Valićne karakterizacije Soboljevljevih prostora

Stipčić, Mario

Master's thesis / Diplomski rad

2015

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:073161

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-05-24**

Repository / Repozitorij:

Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Mario Stipčić

VALIĆNE KARAKTERIZACIJE SOBOLJEVLJEVIH PROSTORA

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Vjekoslav Kovač

Zagreb, rujan, 2015.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

U ovom radu navodi se i dokazuje karakterizacija nehomogenih Soboljevljevih prostora $\mathrm{W}^{p,s}(\mathbb{R}^n)$ i homogenih Soboljevljevih prostora $\mathring{\mathrm{W}}^{p,s}(\mathbb{R}^n)$ pomoću valića, odnosno pomoću koeficijenata funkcije, tj. distribucije, u pripadnoj valićnoj bazi.

U 1. poglavlju uvodi se pojam Haarove funkcije te vjerojatnosni model koji se koristi u dokazu karakterizacije. Zatim se uvodi pojam ortonormirane valićne baze te se navodi još jedan oblik ortonormirane baze za koji se dokaže da je općenitiji oblik od valićne baze. Za taj dokaz potrebne su dvije tehničke leme koje se također iskazuju i dokazuju.

U 2. poglavlju definiraju se Fourierova transformacija i Schwartzov prostor, koji su potrebni kako bi se definirali nehomogeni i homogeni Soboljevljevi prostori. Zatim se navode još neke definicije i rezultati potrebni za dokaz karakterizacije.

U 3. poglavlju iskazuje se i dokazuje karakterizacija Lebesgueovog prostora $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)$, koji je poseban tip nehomogenog, odnosno homogenog Soboljevljevog prostora za $s = 0$. Zatim se u dva slučaja iskazuje i dokazuje karakterizacija prostora $\mathrm{W}^{p,s}(\mathbb{R}^n)$ pomoću valića, a potom i pomoću koeficijenata koji pripadaju općenitijem obliku od baze. Nakon toga slijede iskaz i dokaz karakterizacije prostora $\mathring{\mathrm{W}}^{p,s}(\mathbb{R}^n)$. U posebnom odjeljku na kraju poglavlja pregledno su napisane sve karakterizacije.

Poglavlje 1

Valići

1.1 Haarove funkcije

Definicija 1.1.1. *Neka je $n \in \mathbb{N}$. Elemente familije*

$$\mathcal{I} := \left\{ 2^{-j} \prod_{i=1}^{n} [k_i, k_i + 1\rangle : j \in \mathbb{Z}, (k_1, k_2, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n \right\}$$

nazivamo (n-dimenzionalnim) dijadskim intervalima *ili* (n-dimenzionalnim) dijadskim kockama.

Dijadsku kocku oblika $2^{-j} \prod_{i=1}^{n} [k_i, k_i + 1\rangle$ često ćemo zbog jednostavnosti označavati s $2^{-j} [k, k + 1\rangle$ ili s $\left[2^{-j}k, 2^{-j} (k + 1)\right\rangle$ pri čemu je $k = (k_1, k_2, \dots, k_n)$.

Dijadske kocke zadovoljavaju jedno zanimljivo svojstvo: ako dvije dijadske kocke imaju zajednički presjek, onda je jedna kocka sadržana u drugoj. Preciznije zapisano, za sve $I, J \in \mathcal{I}$ za koje je $I \cap J \neq \emptyset$ vrijedi $I \subseteq J$ ili $J \subseteq I$. Nadalje, za svaki $j \in \mathbb{Z}$ postoji jedinstvena dijadska kocka J volumena $|J| = 2^{-nj}$ koja sadrži I.

Definicija 1.1.2. *Neka je $I \in \mathcal{I}$ proizvoljan i oblika $I = [a, b\rangle$, za neke $a, b \in \mathbb{R}$. Označimo lijevi podinterval od I s $I_l := \left[a, \frac{a+b}{2}\right\rangle$ i desni podinterval od I s $I_r := \left[\frac{a+b}{2}, b\right\rangle$. Definiramo* Haarove funkcije *nad intervalom I na sljedeći način:*

$$h_I^0(x) := \frac{1}{\sqrt{|I|}} \mathbb{1}_I(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|I|}}, & x \in I, \\ 0, & x \notin I; \end{cases}$$

$$h_I^1(x) := \frac{1}{\sqrt{|I|}}\left(\mathbb{1}_{I_l}(x) - \mathbb{1}_{I_r}(x)\right) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|I|}}, & x \in I_l, \\ -\frac{1}{\sqrt{|I|}}, & x \in I_r, \\ 0, & x \notin I_l \cup I_r. \end{cases}$$

Pomoću ove definicije možemo uvesti pojam Haarove funkcije definiramon na skupu $\mathbb{R}^n$ za proizvoljan $n \in \mathbb{N}$.

Definicija 1.1.3. *Neka je $n \in \mathbb{N}$ proizvoljan. Za $I \in \mathcal{I}$ oblika $I = I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n$, pri čemu su $I_1, I_2, \ldots, I_n$ standardni dijadski intervali (elementi od $\mathcal{I}$ u slučaju $n = 1$), te za $\epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n) \in \{0,1\}^n$, definiramo* Haarovu funkciju *nad I u točki $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ kao*

$$h_I^\eta(x) = h_{I_1\times I_2\times\ldots\times I_n}^{(\epsilon_1,\epsilon_2,\ldots,\epsilon_n)}(x_1, x_2, \ldots, x_n) := \prod_{i=1}^n h_{I_i}^{\epsilon_i}(x_i) = h_{I_1}^{\epsilon_1}(x_1)\cdot h_{I_2}^{\epsilon_2}(x_2)\cdot\ldots\cdot h_{I_n}^{\epsilon_n}(x_n).$$

Primijetimo da za $\epsilon \in \{0,1\}^n \setminus \theta$ vrijedi

$$\int_{\mathbb{R}^n} h_I^\epsilon(x)dx = 0 \;\text{ za sve } I \in \mathcal{I}. \tag{1.1}$$

Naime, po definiciji Haarove funkcije te po Fubinijevom teoremu integral ove funkcije svodi se na n-člani produkt integrala Haarovih funkcija jedne varijable, a zbog $\epsilon \neq \theta$ barem jedna od tih funkcija podudara se s funkcijom $h_{I_i}^1$ za neki dijadski interval $I_i, 1 \leq i \leq n$. Kako je $|(I_i)_l| = |(I_i)_r|$, po definiciji funkcije $h_{I_i}^1$ je jasno da je $\int_{\mathbb{R}} h_{I_i}^1(x)dx = 0$, pa je i cjelokupni produkt jednak nuli.

1.2 Vjerojatnosna struktura

Za dokaz karakterizacije $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)$ prostora za $p \in \langle 1, \infty\rangle$ trebat će nam i određena vjerojatnosna struktura. Promatrani skup je $\Omega := (\{-1,1\})^{\mathcal{I},E}$, a σ-algebra $\mathcal{F}$ na tom prostoru je σ-algebra koja je generirana cilindrima (više o njima nalazi se u [9]). Time smo dobili izmjeriv prostor $(\Omega, \mathcal{F})$ na kojemu zadajemo vjerojatnosnu mjeru μ takvu da za sve $I \in \mathcal{I}$ i za sve $\epsilon \in E$ vrijedi

$$\mu\left(\left\{\omega = \left(\omega_{I'}^{\epsilon'}\right)_{\substack{I'\in\mathcal{I}\\ \epsilon'\in E}} \in \Omega : \omega_I^\epsilon = -1\right\}\right) = \mu\left(\left\{\omega = \left(\omega_{I'}^{\epsilon'}\right)_{\substack{I'\in\mathcal{I}\\ \epsilon'\in E}} \in \Omega : \omega_I^\epsilon = 1\right\}\right) = \frac{1}{2}.$$

Također, neka za svaki $m \in \mathbb{N}$ i za sve $i_1, i_2, ..., i_m \in \{-1, 1\}$, $I_1, I_2, ..., I_m \in \mathcal{I}$, $\epsilon_1, \epsilon_2, ..., \epsilon_m \in E$ vrijedi

$$\mu\left(\bigcap_{k=1}^{m}\left\{\omega_{I_k}^{\epsilon_k} = i_k\right\}\right) = \prod_{k=1}^{m}\mu\left(\left\{\omega_{I_k}^{\epsilon_k} = i_k\right\}\right).$$

Intuitivno, jednako je vjerojatno da proizvoljna komponenta elementa $\omega \in \Omega$ poprimi vrijednost -1 i 1 te su također sve različite komponente od ω međusobno nezavisne.

1.3 Valići

Definicija 1.3.1. Multirezolucijska analiza *ili skraćeno* MRA *je niz* $\left(V_j\right)_{j\in\mathbb{Z}}$ *zatvorenih potprostora od* $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$ *koji zadovoljava sljedeća svojstva*

1. $V_j \subseteq V_{j+1}$ *za sve* $j \in \mathbb{Z}$,
2. $f \in V_j$ *ako i samo ako je* $f(2\,\cdot) \in V_{j+1}$ *za svaki* $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$ *i za sve* $j \in \mathbb{Z}$,
3. $f \in V_0$ *ako i samo ako je* $f(\cdot - k) \in V_0$ *za svaki* $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$ *i za sve* $k \in \mathbb{Z}^n$,
4. $\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\}$,
5. $\overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j} = \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$,
6. *postoji funkcija* $\varphi \in V_0$ *s kompaktnim nosačem takva da je familija funkcija* $\{\varphi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}^n\}$ *ortonormirana baza prostora* V_0.

Funkciju φ *iz* 6. *svojstva nazivamo* skalirajućom funkcijom *dane multirezolucijske analize.*

Definicija 1.3.2. *Neka je* $r \in \mathbb{N}_0$ *i* E *skup kardinalnog broja* $|E| = 2^n - 1$. *Elemente familije* $\{\psi^\epsilon : \epsilon \in E\}$ *nazivamo* generatorima valićne baze reda r *ili* osnovnim valićima reda r *ako za svaki* $\epsilon \in E$ *vrijedi*

1. *nosač funkcije* ψ^ϵ *je kompaktan,*
2. $\partial^\alpha\psi^\epsilon \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$ *za sve* $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ *takve da je* $|\alpha| \leq r$,
3. *za svaki* $m \in \mathbb{N}_0$ *postoji* $C_m > 0$ *takav da za sve* $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ *takve da je* $|\alpha| \leq r$ *i za sve* $x \in \mathbb{R}^n$ *vrijedi* $|\partial^\alpha\psi^\epsilon(x)| \leq \dfrac{C_m}{(1+|x|)^m}$,

4. $\int\limits_{\mathbb{R}^n} x^\alpha \psi^\epsilon(x)dx = 0$ *za sve* $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ *takve da je* $|\alpha| \leq r$

te je familija funkcija $\left\{2^{\frac{nj}{2}}\psi^\epsilon\left(2^j \cdot -k\right) : j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^n, \epsilon \in E\right\}$ *ortonormirana baza prostora* $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$. *Ortonormirana baza prostora* $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$ *iz ove definicije naziva se* ortonormiranim valićnim sistemom *ili* ortonormiranom valićnom bazom.

Zbog jednostavnijeg zapisa za $j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^n$ i $\epsilon \in E$ uvodimo $\psi^\epsilon_{j,k} := 2^{\frac{nj}{2}}\psi^\epsilon\left(2^j \cdot -k\right)$. U ovom radu koristit ćemo i indeksaciju pomoću dijadskih intervala. Točnije, za dijadski interval $I \in \mathcal{I}$ oblika $I = \left[2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)\right)$ uvodimo oznaku $\psi^\epsilon_I := \psi^\epsilon_{j,k}$. Uočimo, ako je nosač funkcije ψ^ϵ sadržan u zatvaraču skupa $[0,1)^n$, onda je nosač funkcije ψ^ϵ_I sadržan upravo u zatvaraču skupa I. Uistinu, po definiciji funkcije ψ^ϵ_I, za $x \in \mathbb{R}^n$ je $\psi^\epsilon_I(x) \neq 0$ ako i samo ako je $2^{\frac{nj}{2}}\psi^\epsilon\left(2^j x - k\right) \neq 0$, a to vrijedi ako i samo ako je $2^j x - k \in [0,1)^n$, odnosno ako i samo ako je $x \in \left[2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)\right) = I$. Time ova notacija dobiva praktičnu ulogu - direktno iz notacije prepoznajemo nosač odgovarajućeg elementa ortonormirane valićne baze.

Za svaku multirezolucijsku analizu $\left(V_j\right)_{j\in\mathbb{Z}}$ moguće je konstruirati pripadnu skalirajuću funkciju, odnosno pripadni ortonormirani valićni sistem $\left\{\psi^\epsilon_{j,k} : j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^n, \epsilon \in E\right\}$ (detalji se nalaze u [6]). Također je moguće zahtijevati dodatna praktična svojstva, između ostalog i proizvoljnu glatkoću elemenata ortonormirane valićne baze (odnosno pripadnost klasi funkcija $\mathrm{C}^r(\mathbb{R}^n)$ za proizvoljan $r \in \mathbb{N}$). Ovaj rezultat trebat će nam za dokaz karakterizacije homogenog Soboljevljevog prostora, a dokaz se može pronaći u [3].

Teorem 1.3.3. *Za svaki* $r \in \mathbb{N}_0$ *postoje multirezolucijska analiza* $\left(V_j\right)_{j\in\mathbb{Z}}$ *i njoj pridružen ortonormiran valićni sistem* $\left\{\psi^\epsilon_{j,k} : j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^n, \epsilon \in E\right\}$ *koji zadovoljava*

1. *skalirajuća funkcija* φ *je klase* $\mathrm{C}^r(\mathbb{R}^n)$ *i ima kompaktan nosač,*

2. *za svaki* $m \in \mathbb{N}_0$ *postoji konstanta* $C_m > 0$ *koja ovisi samo o* m *takva da za svaki* $\epsilon \in E$ *i za svaki multiindeks* $\alpha \in \mathbb{N}_0^n, |\alpha| \leq r$ *vrijedi*

$$|\partial^\alpha \varphi(x)| \leq \frac{C_m}{1+|x|^m} \quad za \quad sve\, x \in \mathbb{R}^n,$$

3. $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)dx = 1,$

4. *za svaki* $\epsilon \in E$ *funkcija* ψ^ϵ *je klase* $\mathrm{C}^r(\mathbb{R}^n)$ *i ima kompaktan nosač,*

5. *za svaki $m \in \mathbb{N}_0$ i za svaki multiindeks $\alpha \in \mathbb{N}_0^n, |\alpha| \leq r$ postoji konstanta $C_m > 0$ koja ovisi samo o m i za koju vrijedi*

$$|\partial^\alpha \varphi(x)| \leq \frac{C_m}{1 + |x|^m} \quad \text{za} \quad \text{sve } x \in \mathbb{R}^n \text{ za} \quad \text{sve } \epsilon \in E,$$

6. *za svaki multiindeks $\alpha \in \mathbb{N}_0^n, |\alpha| \leq r$ i za sve $j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^n$ i $\epsilon \in E$ vrijedi*

$$\int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha \psi_{j,k}^\epsilon(x) dx = 0.$$

Po definiciji ortonormirane baze normiranog prostora, dobivamo da za svaku funkciju $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$ vrijedi

$$f(x) = \sum_{\substack{I \in \mathcal{I} \\ \epsilon \in E}} \alpha_I^\epsilon \psi_I^\epsilon(x) \tag{1.2}$$

za skoro svaki $x \in \mathbb{R}^n$, pri čemu je $\alpha_I^\epsilon = \langle f, \psi_I^\epsilon \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)}$ za sve $I \in \mathcal{I}$. Pritom jednakost vrijedi u prostoru $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$, odnosno pripadni red konvergira u prostoru $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$. Pritom je riječ o bezuvjetnoj konvergenciji, odnosno red konvergira neovisno o poretku sumacije - što nam i odgovara obzirom na činjenicu da na skup $\mathcal{I}$ nismo uveli uređaj pa na prvu nemamo određeni poredak sumacije. No, po teoremu 6. 14. iz odjeljka 5. 3. knjige [6] ova jednakost vrijedi i u $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)$ prostoru ako je $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)$ za $p \in \langle 1, \infty \rangle$, pri čemu je i dalje konvergencija navedenog reda bezuvjetna.

Ista jednakost ne vrijedi ako je $p = 1$ ili $p = \infty$. Naime, ako je $f \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)$ takva da je $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = 1$ te da zadovoljava promatranu jednakost, integriranjem iste jednakosti te koristeći 3. svojstvo iz definicije 1.3.2 za $\alpha = \theta$, dobivamo jednakost $1 = 0$ koja nas dovodi do kontradikcije. Slično, za $f \equiv 1 \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$, koristeći isto svojstvo dobivamo da za sve $I \in \mathcal{I}$ i za sve $\epsilon \in E$ vrijedi $\langle f, \psi_I^\epsilon \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\psi_I^\epsilon(x)} dx = 0$, a onda iz jednakosti direktno slijedi $1 = 0$, što je nemoguće.

Ovaj problem može se izbjeći uz nešto općenitiji zapis. Moguće je odabrati funkcije ϕ i ψ^ϵ za $\epsilon \in E$ koja zadovoljavaju slična svojstva kao i iz definicije 1.3.2:

1. funkcije ϕ i $\psi^\epsilon, \epsilon \in E$ imaju kompaktne nosače,

2. $\partial^\alpha \phi, \partial^\alpha \psi^\epsilon \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$ za sve $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ takve da je $|\alpha| \leq r$ i za sve $\epsilon \in E$,

3. za svaki $m \in \mathbb{N}_0$ postoji $C_m > 0$ takav da za sve $\epsilon \in E$, za sve $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ takve da je $|\alpha| \leq r$ i za sve $x \in \mathbb{R}^n$ vrijedi $|\partial^\alpha \phi(x)| \leq \frac{C_r}{(1 + |x|)^m}$ i $|\partial^\alpha \psi^\epsilon(x)| \leq \frac{C_r}{(1 + |x|)^m}$,

4. $\int\limits_{\mathbb{R}^n} x^\alpha \psi^\epsilon(x)dx = 0$ za sve $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ takve da je $|\alpha| \leq r$ i za sve $\epsilon \in E$,

5. $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \phi(x)dx = 1$

te je familija funkcija $\{\phi\left(\cdot - k\right), \psi_I^\epsilon : k \in \mathbb{Z}^n, I \in \mathcal{I}, |I| \leq 1, \epsilon \in E\}$ ortonormirana baza prostora $\mathrm{L}^2\left(\mathbb{R}^n\right)$. Tada vrijedi jednakost

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \beta_k \phi(x-k) + \sum_{\substack{I\in\mathcal{I},|I|\leq 1\\ \epsilon\in E}} \alpha_I^\epsilon \psi_I^\epsilon(x) \tag{1.3}$$

za skoro svaki $x \in \mathbb{R}^n$, pri čemu je $\beta_k = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)\overline{\phi(y-k)}dy$ za $k \in \mathbb{Z}^n$ te $\alpha_I^\epsilon = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)\overline{\psi_I^\epsilon(y)}dy$ za $I \in \mathcal{I}, |I| \leq 1$ i $\epsilon \in E$. Pritom ova jednakost vrijedi i u drugim prostorima oblika $\mathrm{L}^p\left(\mathbb{R}^n\right)$ za $p \in \langle 1, \infty\rangle$.

Pokažimo da jednakost (1.3) povlači jednakost (1.2). Ako za proizvoljan $j \in \mathbb{Z}$ u jednakosti (1.3) umjesto funkcije f promatramo funkciju $x \longmapsto f\left(2^{-j}x\right)$ te napravimo zamjenu varijabli $x \longmapsto 2^j x$, dobivamo jednakost

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \beta_k \phi\left(2^j x - k\right) + \sum_{\substack{I\in\mathcal{I},|I|\leq 2^{-nj}\\ \epsilon\in E}} \alpha_I^\epsilon \psi_I^\epsilon(x),$$

za skoro svaki $x \in \mathbb{R}^n$ te uz analogno definirane koeficijente $\beta_k = 2^{nj} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)\overline{\phi(2^j y - k)}dy$ za $k \in \mathbb{Z}^n$ te $\alpha_I^\epsilon = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)\overline{\psi_I^\epsilon(y)}dy$ za $I \in \mathcal{I}, |I| \leq 2^{-nj}$ i $\epsilon \in E$. Promotrimo što se događa kada $j \longrightarrow -\infty$. Za drugu sumu, kako izraz pod sumom ne ovisi o j, vrijedi $\sum\limits_{\substack{I\in\mathcal{I},|I|\leq 2^{-nj}\\ \epsilon\in E}} \alpha_I^\epsilon \psi_I^\epsilon(x) \overset{j\longrightarrow-\infty}{\longrightarrow} \sum\limits_{\substack{I\in\mathcal{I}\\ \epsilon\in E}} \alpha_I^\epsilon \psi_I^\epsilon(x)$, što se podudara s desnom stranom jednakosti (1.2). Za određivanje limesa prve sume potrebne su nam leme 1.3.4 i 1.3.5 čiji su iskazi navedeni nakon ovog raspisa. Označimo funkciju $K(x,y) := \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^n} \phi\left(x-k\right)\overline{\phi\left(y-k\right)}$. Vrijedi $K \in \mathrm{L}^\infty\left(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n\right)$ budući da je $\phi \in \mathrm{L}^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)$ s kompaktnim nosačem, pa je suma u definiciji funkcije K konačna, a onda i ograničena. Nadalje, za sve $x, y \in \mathbb{R}^n$ vrijedi

$$|K(x,y)| \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \left|\phi\left(x-k\right)\right| \left|\overline{\phi\left(y-k\right)}\right| \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \frac{C_{n+1}^2}{\left(1+|x-k|\right)^{n+1}\left(1+|y-k|\right)^{n+1}}$$

$$\leq \frac{CC_{n+1}^2}{\left(1+\left|\frac{x-y}{2}\right|\right)^{n+1}} = \frac{2^{n+1}CC_{n+1}^2}{(2+|x-y|)^{n+1}} \leq \frac{2^{n+1}CC_{n+1}^2}{(1+|x-y|)^{n+1}}.$$

Pritom smo koristili pretpostavku $|\phi(x)| \leq \dfrac{C_m}{(1+|x|)^m}$ koja vrijedi za sve $m \in \mathbb{N}_0$ i za sve $x \in \mathbb{R}^n$ te lemu 1.3.5 za funkciju $x' \longmapsto \dfrac{1}{(1+x')^{n+1}}$ koja trivijalno zadovoljava tražene pretpostavke.

Pokazali smo da ovako definirana funkcija K zadovoljava pretpostavke 1.3.4, stoga puštanjem $j \longrightarrow -\infty$ dobivamo jednakost (1.2).

Lema 1.3.4. *Neka je $K \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ funkcija za koju postoji konstanta $C \geq 0$ takva da za sve $x, y \in \mathbb{R}^n$ vrijedi $|K(x,y)| \leq \dfrac{C}{(1+|x-y|)^{n+1}}$. Nadalje, za $p \in \langle 1, \infty\rangle$ i $\lambda > 0$ neka je $T_\lambda : \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)$ operator koji zadovoljava prikaz*

$$T_\lambda f(x) = \lambda^n \int_{\mathbb{R}^n} K(\lambda x, \lambda y)\, f(y) dy$$

za sve $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)$ i za sve $x \in \mathbb{R}^n$. Tada za sve $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)$ vrijedi

$$\lim_{\lambda\to 0} \|T_\lambda f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)} = 0.$$

Dokaz. Pokažemo li da tvrdnja leme vrijedi za proizvoljnu $f \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, po gustoći prostora $\mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ u $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)$ tvrdnja slijedi i za svaku funkciju iz prostora $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)$ što upotpunjuje dokaz ove leme. Neka je $f \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ proizvoljna funkcija. Tada je $f \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$ te postoji $r_0 > 0$ takav da je $\operatorname{supp} f \subseteq K(\theta, r_0) \subset K(\theta, 2r_0)$. Za svaki $\lambda > 0$ vrijedi

$$\|T_\lambda f\|^p_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} \left| \lambda^n \int_{\mathbb{R}^n} K(\lambda x, \lambda y) f(y) dy \right|^p dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\lambda^n \int_{\operatorname{supp} f} |K(\lambda x, \lambda y)|\, |f(y)|\, dy \right)^p dx$$

$$\leq \left(\lambda^n \|f\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^n)}\right)^p \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{K(\theta,r_0)} \frac{C}{(1+|\lambda x - \lambda y|)^{n+1}} dy \right)^p dx$$

$$= \left(\lambda^n \|f\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^n)} C\right)^p \left[\int_{K(\theta,2r_0)} \left(\int_{K(\theta,r_0)} \underbrace{\frac{1}{(1+\lambda|x-y|)^{n+1}}}_{\leq 1} dy \right)^p dx \right.$$

$$\left. + \int_{K(\theta,2r_0)^c} \left(\int_{K(\theta,r_0)} \frac{1}{(1+\lambda|x-y|)^{n+1}} dy \right)^p dx \right]$$

$$\leq \left(\lambda^n \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} C\right)^p \left[\omega_n (2r_0)^n \cdot (\omega_n r_0^n)^p + \int\limits_{K(\theta,2r_0)^c} \left(\int\limits_{K(\theta,r_0)} \frac{1}{(1+\lambda(|x|-|y|))^{n+1}} dy\right)^p dx\right]$$

$$\leq \left(\lambda^n \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} C\right)^p \left[2^n \omega_n^{1+p} r_0^{n(1+p)} + \int\limits_{K(\theta,2r_0)^c} \left(\frac{1}{(1+\lambda(|x|-r_0))^{n+1}} \cdot \omega_n r_0^n\right)^p dx\right]$$

$$= \left(\lambda^n \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} C\right)^p \left[2^n \omega_n^{1+p} r_0^{n(1+p)} + (\omega_n r_0^n)^p \int\limits_{2r_0}^{\infty} \frac{n\omega_n r^{n-1}}{(1+\lambda(r-r_0))^{(n+1)p}} dr\right]$$

$$= \left(\lambda^n \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} C\right)^p \left[2^n \omega_n^{1+p} r_0^{n(1+p)} + n\omega_n^{1+p} r_0^{np} \int\limits_{\lambda r_0}^{\infty} \frac{1}{(1+s)^{(n+1)p}} \cdot \left(\frac{s}{\lambda} + r_0\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{\lambda} ds\right]$$

$$\leq \left(\lambda^n \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} C\right)^p \left[2^n \omega_n^{1+p} r_0^{n(1+p)} + n\omega_n^{1+p} r_0^{np} \int\limits_{\lambda r_0}^{\infty} \frac{1}{(1+s)^{(n+1)p}} \cdot \frac{2^{n-1}(1+s)^{n-1}}{\lambda^{n-1}} \cdot \frac{1}{\lambda} ds\right]$$

$$\leq \left(\lambda^n \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} C\right)^p \left[2^n \omega_n^{1+p} r_0^{n(1+p)} + 2^{n-1} n\omega_n^{1+p} r_0^{np} \int\limits_{0}^{\infty} \frac{1}{(1+s)^{(n+1)p-n+1}} ds \cdot \frac{1}{\lambda^n}\right]$$

$$= \left(\lambda^n \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} C\right)^p \left[2^n \omega_n^{1+p} r_0^{n(1+p)} + \frac{2^{n-1} n\omega_n^{1+p} r_0^{np}}{(n+1)p-n} \cdot \frac{1}{\lambda^n}\right]$$

$$= \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^p C^p \cdot 2^n \omega_n^{1+p} r_0^{n(1+p)} \cdot \lambda^{np} + \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^p C^p \cdot \frac{2^{n-1} n\omega_n^{1+p} r_0^{np}}{(n+1)p-n} \cdot \lambda^{n(p-1)}.$$

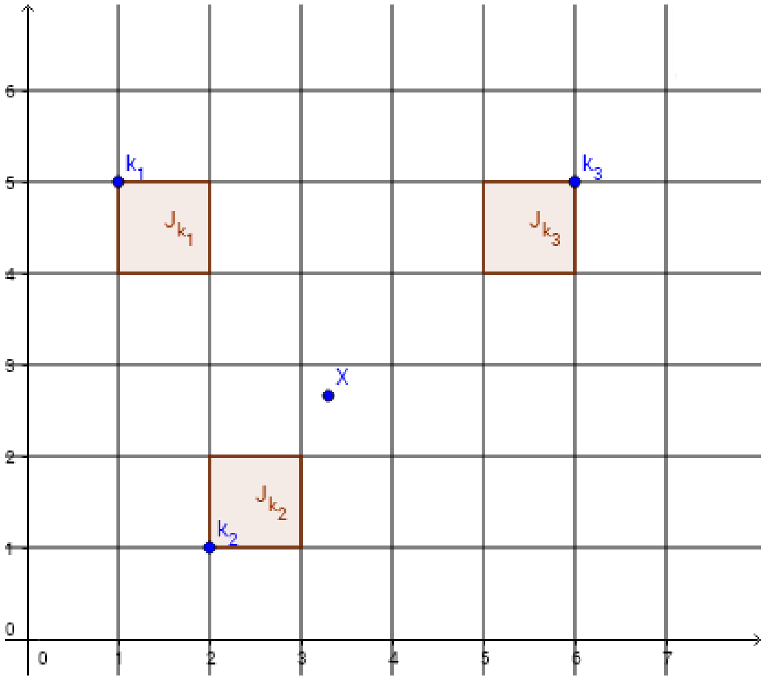
Puštanjem $\lambda \longrightarrow 0$ dobivamo $\|T_\lambda f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p \longrightarrow 0$ što je i trebalo pokazati. □

Lema 1.3.5. *Neka je $W : [0,\infty\rangle \to \langle 0,\infty\rangle$ padajuća funkcija takva da je $W \circ |\cdot| \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Tada postoji $C > 0$ takav da za sve $x, y \in \mathbb{R}^n$ vrijedi*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} W(|x-k|)\, W(|y-k|) \leq CW\left(\frac{|x-y|}{2}\right).$$

Dokaz. Za sve $x, y \in \mathbb{R}^n$ i $k \in \mathbb{Z}^n$ po nejednakosti trokuta vrijedi $|x-y| \leq |x-k| + |y-k|$, iz čega slijedi $|x-k| \geq \frac{|x-y|}{2}$ ili $|y-k| \geq \frac{|x-y|}{2}$. Kako je W nenegativna padajuća funkcija, iz ovoga dodavanjem potrebnih sumanada slijedi

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} W(|x-k|)\, W(|y-k|) \leq W\left(\frac{|x-y|}{2}\right)\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} W(|x-k|) + \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} W(|y-k|)\right).$$



Slika 1.1: Prikaz konstrukcije opisane u dokazu za točku $x = (3.3, 2.66)$ te za cjelobrojne točke $k_1 = (1, 5), k_2 = (2, 1)$ i $k_3 = (6, 5)$.

Potrebno je još pokazati da red $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} W(|x-k|)$ konvergira. Uz oznake $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ i $k = (k_1, k_2, ..., k_n)$ napravimo rastav

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} W(|x-k|) = \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}^n \\ |x_i-k_i|\geq 1 \text{ za sve } i\in\{1,2,...,n\}}} W(|x-k|) + \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}^n \\ |x_i-k_i|<1 \text{ za neki } i\in\{1,2,...,n\}}} W(|x-k|) .$$

Primijetimo da za svaki $k \in \mathbb{Z}^n$ takav da je $|x_i - k_i| \geq 1$ za sve $i \in \{1, 2, ..., n\}$ postoji jedinstveni jedinični kvadrat $J_k \subseteq \mathbb{R}^n$ s vrhovima u $\mathbb{Z}^n$ na kojem funkcija $z \longmapsto |x - z|$ postiže maksimum upravo u točki $z = k$. Vrhovi te kocke su točke u $\mathbb{Z}^n$ kojima je i-ta koordinata oblika k_i ili $k_i + \text{sign}(x_i - k_i)$. Vrijedi i obratno: svakom takvom kvadratu možemo pripisati jedinstvenu točku $k \in \mathbb{Z}^n$ s istim svojstvima. Ova povezanost prikazana je na slici 1.1.

Koristeći ovu bijekciju i oznaku $K := \{k \in \mathbb{Z}^n : |x_i - k_i| \geq 1 \text{ za sve } i \in \{1, 2, ..., n\}\}$ dobivamo

$$\sum_{k\in K} W(|x-k|) = \sum_{k\in K} \int_{J_k} W(|x-k|)\, dz \leq \sum_{k\in K} \int_{J_k} W(|x-z|)\, dz = \int_{\bigcup_{k\in K} J_k} W(|x-z|)\, dz$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} W(|x-z|)\,dz = \int_{\mathbb{R}^n} W(|z|)\,dz = \|W \circ |\cdot|\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)} < \infty.$$

Potrebno je naglasiti kako posljednja jednakost prvog reda vrijedi ako i samo ako su kvadrati J_k međusobno disjunktni, no ti kvadrati imaju zajedničke $(n-1)$-dimenzionalne stranice za koje nismo odredili kojemu od njih pripadaju. To nije bitno za ovaj raspis budući da je je $(n-1)$-dimenzionalna stranica kao skup u $\mathbb{R}^n$ skup n-dimenzionalne Lebesgueove mjere nula.

Promotrimo drugu sumu. Neka su $k \in \mathbb{Z}^n$ i $i \in \{1, 2, ..., n\}$ takvi da je $|x_i - k_i| < 1$. Vrijedi $k_i = \lceil x_i \rceil$ ili $k_i = \lfloor x_i \rfloor$, dakle k_i može poprimiti najviše dvije različite vrijednosti. Tu sumu promatramo kao $\sum\limits_{\substack{k \in \mathbb{Z}^n \\ |x_i - k_i| < 1 \text{ za neki } i \in \{1,2,...,n\}}} W(|x-k|) \leq \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{\substack{k \in \mathbb{Z}^n \\ k_i = \lceil x_i \rceil}} W(|x-k|) + \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{\substack{k \in \mathbb{Z}^n \\ k_i = \lfloor x_i \rfloor}} W(|x-k|)$, a onda za svaki $i \in \{1, 2, ..., n\}$ primjenjujemo sličan argument kao i za prvu sumu. U ovom slučaju promatramo sumu u kojoj je i-ta koordinata konstantna (i iznosi $x_i - k_i$, $k_i \in \{\lceil x_i \rceil, \lfloor x_i \rfloor\}$) te analogno pomoću $(n-1)$-dimenzionalnih jediničnih kvadrata sumu omeđimo $\mathrm{L}^1\left(\mathbb{R}^{n-1}\right)$ normom funkcije $z' = (z_1, z_2, ..., z_{i-1}, z_{i+1}, ..., z_n) \longmapsto W(|(z_1, z_2, ..., z_{i-1}, x_i - k_i, z_{i+1}, ..., z_n)|)$ (koja je konačna zbog $W \circ |\cdot| \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)$) i sumom po takvim $k \in \mathbb{Z}^n$ koji zadovoljavaju uvjet $|x_{i'} - k_{i'}| < 1$ za neki $i' \in \{1, 2, ..., n\} \setminus \{i\}$. Postupak nastavljamo analogno za $(n-2)$-dimenzionalne jedinične kvadrate i ponavljamo ga sve do spuštanja na jednodimenzionalnu ravninu $\mathbb{R}$ gdje na kraju preostaju samo oni $k \in \mathbb{Z}^n$ za koje je $|x_i - k_i| < 1$ za sve $i \in \{1, 2, ..., n\}$, a takvih je konačno mnogo (ovaj uvjet je zapravo ekvivalentan uvjetu $|x - k| < 1$ u smislu n-dimenzionalne euklidske norme).

Zaključujemo, postoji $C > 0$ takav da je $\sum\limits_{k \in \mathbb{Z}^n} W(|x-k|) < \dfrac{C}{2}$. Vratimo li se na prvu nejednakost u ovom dokazu, dobivamo

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} W(|x-k|)\, W(|y-k|) &\leq W\left(\frac{|x-y|}{2}\right)\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} W(|x-k|) + \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} W(|y-k|)\right) \\ &\leq CW\left(\frac{|x-y|}{2}\right) \end{aligned}$$

što je upravo tvrdnja ove leme. □

Poglavlje 2

Soboljevljevi prostori

2.1 Schwartzov prostor

Definicija 2.1.1. *Neka je $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)$.* Fourierova transformacija *funkcije f je operator $\mathcal{F} : \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$ dan s*

$$(\mathcal{F}f)(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi} f(x)dx.$$

Često se za Fourierovu transformaciju funkcije f koristi i dodatna oznaka $\widehat{f} := \mathcal{F}f$. Fourierova transformacija zadovoljava sljedeća svojstva:

Lema 2.1.2. *Neka je $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)$, $h \in \mathbb{R}^n$ te $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Tada za svaki $\xi \in \mathbb{R}^n$ vrijedi*

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f(x-h)](\xi) &= e^{-2\pi i\xi\cdot h}\mathcal{F}f(\xi),\\
\mathcal{F}\left[e^{2\pi i x\cdot h}f\right](\xi) &= \mathcal{F}f(\xi-h),\\
\mathcal{F}[f(ax)] &= \frac{1}{|a|^n}\mathcal{F}f\left(\frac{\xi}{a}\right).
\end{aligned}$$

Dokaz. Neka je $\xi \in \mathbb{R}^n$. Vrijedi

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f(x-h)](\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi} f(x-h)\,dx = [y = x-h, dy = dx]\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(y+h)\cdot\xi} f(y)\,dy = e^{-2\pi i\xi\cdot h}\mathcal{F}f(\xi),\\
\mathcal{F}\left[e^{2\pi i x\cdot h}f\right](\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi}e^{2\pi i x\cdot h}f(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot(\xi-h)}f(x)dx = \mathcal{F}f(\xi-h),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[f(ax)\right] &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi} f(ax)\,dx = \left[y = ax, dy = |a|^n\,dx\right] \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \frac{y}{a}\cdot\xi} f(y)\,\frac{1}{|a|^n}dy = \frac{1}{|a|^n}\mathcal{F}f\left(\frac{\xi}{a}\right).\end{aligned}$$ □

Za Fourierovu transformaciju iznimno je važan sljedeći prostor funkcija.

Definicija 2.1.3. *Neka je $f \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Za $\alpha,\beta \in \mathbb{N}_0^n$ označimo $\|f\|_{\alpha,\beta} := \left\|x^\alpha\partial^\beta f\right\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^n)}$. Nadalje, za $k \in \mathbb{N}_0$ označimo $\|f\|_k := \max\limits_{\substack{\alpha,\beta\in\mathbb{N}_0^n\\|\alpha|+|\beta|\le k}} \|f\|_{\alpha,\beta}$.* Schwartzov prostor *funkcija, u oznaci $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, definiramo kao*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \left\{f \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^n) : \|f\|_k < \infty \ \ za\ sve\ k \in \mathbb{N}_0\right\}.$$

Jedno od praktičnih svojstava funkcija iz Schwartzovog prostora jest iznimno brzo opadanje vrijednosti funkcije u beskonačnosti prema nuli, odnosno vrijedi $\lim\limits_{\substack{x\in\mathbb{R}^n\\|x|\to+\infty}} |f(x)| = 0$. Pomoću ovoga jednostavno je dokazati sljedeću lemu.

Lema 2.1.4. *Neka je $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Tada za svaki $i \in \{1,2,...,n\}$ i za svaki $\xi \in \mathbb{R}^n$ vrijedi*

$$\begin{aligned}\partial_i\mathcal{F}f(\xi) &= \mathcal{F}\left[-2\pi i x_i f\right](\xi),\\ \mathcal{F}\left[\partial_i f\right](\xi) &= 2\pi i\xi_i\mathcal{F}f(\xi)\end{aligned}$$

uz oznake $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$.

Dokaz. Za dokaz prve jednakosti moramo derivirati po varijabli ξ_i pod znakom integrala, što smijemo po [5, tm. 2.27]. Slijedi

$$\begin{aligned}\partial_{\xi_i}\mathcal{F}f(\xi) &= \partial_{\xi_i}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi} f(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n}\partial_{\xi_i} e^{-2\pi i x\cdot\xi} f(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n}(-2\pi i x_i)\,e^{-2\pi i x\cdot\xi} f(x)dx\\ &= \mathcal{F}\left[-2\pi i x_i f\right](\xi).\end{aligned}$$

Neka je sada $R > 0$ proizvoljan. Vrijedi

$$\begin{aligned}\int_{K[\theta,R]} e^{-2\pi i x\cdot\xi}\partial_{x_i} f(x)dx &= \int_{S[\theta,R]} e^{-2\pi i x\cdot\xi} f(x)d\sigma_x - \int_{K[\theta,R]}\partial_{x_i}\left(e^{-2\pi i x\cdot\xi}\right) f(x)dx \qquad (2.1)\\ &= \int_{S[\theta,R]} e^{-2\pi i x\cdot\xi} f(x)d\sigma_x + 2\pi i\xi_i\int_{K[\theta,R]} e^{-2\pi i x\cdot\xi} f(x)dx.\end{aligned}$$

Promotrimo sferni integral $\int\limits_{S[\theta,R]} e^{-2\pi i x\cdot\xi} f(x) d\sigma_x$. Kako je $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, posebno je (uvrštavanjem $k = 0$ u normu iz definicije 2.1.3) $f \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Stoga vrijedi

$$\begin{aligned}\left| \int\limits_{S[\theta,R]} e^{-2\pi i x\cdot\xi} f(x) d\sigma_x \right| &\leq \int\limits_{S[\theta,R]} \left| e^{-2\pi i x\cdot\xi} f(x) \right| d\sigma_x \leq \|f\|_{\mathrm{L}^\infty(S[\theta,R])} \int\limits_{S[\theta,R]} d\sigma_x \\ &= \|f\|_{\mathrm{L}^\infty(S[\theta,R])} n\omega_n R^{n-1}.\end{aligned}$$

Pritom je ω_n oznaka za volumen n-dimenzionalne kugle radijusa R u prostoru $\mathbb{R}^n$ (u kojem slučaju je veličina oplošja te kugle $n\omega_n R^{n-1}$). Nadalje, uočimo da vrijedi $\left|(x\cdot x)^{\frac{n}{2}} f(x)\right|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^n |f(x)|^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^n \\ |\alpha|=n}} \frac{n!}{\alpha!} |x^\alpha f(x)|^2$. Kako je $x^\alpha f \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$ (što slijedi iz definicije 2.1.3 uvrštavanjem $k = n$ i promatranjem normi $\|.\|_{\alpha,\theta}$ za $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ takve da je $|\alpha| = n$), dobivamo $(x\cdot x)^{\frac{n}{2}} f \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Označimo $C := \left\|(x\cdot x)^{\frac{n}{2}} f\right\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^n)}$. Slijedi

$$\begin{aligned}\left| \int\limits_{S[\theta,R]} e^{-2\pi i x\cdot\xi} f(x) d\sigma_x \right| &\leq \|f\|_{\mathrm{L}^\infty(S[\theta,R])} n\omega_n R^{n-1} = \frac{n\omega_n}{R} R^n \|f\|_{\mathrm{L}^\infty(S[\theta,R])} \\ &= \frac{n\omega_n}{R} \left\|(x\cdot x)^{\frac{n}{2}} f\right\|_{\mathrm{L}^\infty(S[\theta,R])} \leq \frac{n\omega_n C}{R}.\end{aligned}$$

Puštanjem $R \to +\infty$ dobivamo da vrijedi $\lim\limits_{R\to+\infty} \int\limits_{S[\theta,R]} e^{-2\pi i x\cdot\xi} f(x) d\sigma_x = 0$.

Vratimo se na (2.1). Prikažemo li preostala dva integrala u obliku $\int\limits_{K[\theta,R]} e^{-2\pi i x\cdot\xi} \partial_{x_i} f(x) dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi} \partial_{x_i} f(x) \mathbb{1}_{K[\theta,R]}(x) dx$ i $\int\limits_{K[\theta,R]} e^{-2\pi i x\cdot\xi} f(x) dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi} f(x) \mathbb{1}_{K[\theta,R]}(x) dx$, možemo primijeniti Lebesgueov teorem o dominiranoj konvergenciji (iskazan u [1, teorem 2.4.5]. Naime, za drugi integral koristimo $\left|e^{-2\pi i x\cdot\xi} f(x)\right| = |f(x)|$. Kako je $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, posebno je

$(x \cdot x)^{(n+1)/2} f \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$, pa vrijedi

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x|^{n+1}} \left|(x \cdot x)^{(n+1)/2} f(x)\right| dx \leq \left\|(x \cdot x)^{(n+1)/2} f\right\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^n)} \lim_{R' \to +\infty} \int_{K[0,R']} \frac{dx}{|x|^{n+1}}$$
$$= \left\|(x \cdot x)^{(n+1)/2} f\right\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^n)} \lim_{R' \to +\infty} \int_0^{R'} \int_{S[0,R]} \frac{d\sigma_x}{|x|^{n+1}} dR$$
$$= \left\|(x \cdot x)^{(n+1)/2} f\right\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_0^{+\infty} \frac{n\omega_n R^{n-1}}{R^{n+1}} dR$$
$$= \left\|(x \cdot x)^{(n+1)/2} f\right\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^n)} n\omega_n \int_0^{+\infty} \frac{1}{R^2} dR < +\infty.$$

Prema tome, podintegralna funkcija iz prvog integrala je dominirana apsolutno integrabilnom funkcijom f, što opravdava primjenu Lebesgueovog teorema o dominiranoj konvergenciji. Na isti način je opravdana i primjena za drugi navedeni integral budući da $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ povlači $\partial_{x_i} f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Pritom nakon primjene tog teorema dobivamoo iste podintegralne funkcije budući da za sve $x \in \mathbb{R}^n$ vrijedi limes $\lim\limits_{R \to +\infty} \mathbb{1}_{K[\theta,R]}(x) = 1$. Prema tome, iz te jednakosti dobivamo

$$\mathcal{F}\left[\partial_{x_i} f\right](\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \xi} \partial_{x_i} f(x) dx = 2\pi i \xi_i \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \xi} f(x) dx = 2\pi i \xi_i \mathcal{F} f(\xi).$$

□

Velika važnost Schwartzovog prostora je i u sljedećem: za $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ integral u definiciji Fourierove transformacije postoji za svaki $\xi \in \mathbb{R}^n$ te je u tom slučaju $\mathcal{F} f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Čak štoviše, $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ je neprekidna bijekcija. Stoga je moguće definirati inverznu funkciju Fourierove transformacije.

Definicija 2.1.5. Inverzna Fourierova transformacija *je operator* $\mathcal{F}^{-1} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. *Za funkciju* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *vrijede i oznake* $\overline{\mathcal{F}} f := \mathcal{F}^{-1} f$, *odnosno* $\check{f} := \mathcal{F}^{-1} f$.

2.2 Soboljevljevi prostori

Definicija 2.2.1. Distribucija F *je antilinearan funkcional na prostoru* $\mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ *takav da za svaki kompaktni skup* $K \subseteq \mathbb{R}^n$ *postoji* $m \in \mathbb{N}_0$ *i* $C > 0$ *takav da za svaku* $f \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ *sa svojstvom* $\operatorname{supp} f \subseteq K$ *vrijedi* $|F(f)| \leq C \max\limits_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha f\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^n)}$.

Ako postoji $m \in \mathbb{N}_0$ takav da definicija vrijedi za sve kompaktne skupove K, kažemo da je F distribucija reda *m*.

Definicija 2.2.2. Temperirana distribucija *je antilinearan funkcional F za koji postoji $C \in \langle 0, \infty \rangle$ i $k \in \mathbb{N}_0$ takav da za sve $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ vrijedi $|F(f)| \leq C \|f\|_k$. Prostor svih temperiranih distribucija označava se kao $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$*

Oznaka $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ je istovremeno i oznaka za (topološki) dual prostora $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, što može dovesti do zabune zbog nejednoznačne notacije. No, ova dva prostora se zapravo podudaraju, odnosno prostor temperiranih distribucija jest dual Schwartzovog prostora. Stoga je opravdana uporaba iste oznake za te prostore.

Definicija 2.2.3. *Neka je $p \in \langle 1, \infty \rangle$ i $s \in \mathbb{R}$.* Soboljevljev (nehomogeni) prostor *s parametrima p i s, u oznaci $\mathrm{W}^{p,s}(\mathbb{R}^n)$ je prostor temperiranih distribucija dan s*

$$\mathrm{W}^{p,s}(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \overline{\mathcal{F}}\left[\left(1 + 4\pi^2 |\xi|^2\right)^{\frac{s}{2}} \mathcal{F}[f]\right] \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n) \right\}.$$

Za $s > 0$ ekvivalentne su norme $\left\| \overline{\mathcal{F}}\left[\left(1 + 4\pi^2 |\xi|^2\right)^{\frac{s}{2}} \mathcal{F}[f]\right] \right\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)}$ (koja je po ovoj definiciji konačna ako i samo ako je $f \in \mathrm{W}^{p,s}(\mathbb{R}^n)$) i

$$\left\| \overline{\mathcal{F}}\left[(1 + (2\pi|\xi|)^s)\mathcal{F}[f]\right] \right\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)} = \left\| f + \overline{\mathcal{F}}\left[(2\pi|\xi|)^s \mathcal{F}[f]\right] \right\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)},$$

a posljednji je izraz nadalje ekvivalentan sa

$$\|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)} + \left\| \overline{\mathcal{F}}\left[(2\pi|\xi|)^s \mathcal{F}[f]\right] \right\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)}. \tag{2.2}$$

Za dokaz tih ekvivalencija potrebno je poznavanje osnova Littlewood-Paleyeve teorije, tj. da su množitelji sa simbolima $\frac{(1+4\pi^2|\xi|^2)^{s/2}}{1+(2\pi|\xi|)^s}$, $\frac{1}{(1+4\pi^2|\xi|^2)^{s/2}}$, $\frac{(2\pi|\xi|)^s}{(1+4\pi^2|\xi|^2)^{s/2}}$ ograničeni na prostorima $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$. Obzirom da ovdje nismo u prilici baviti se tom opsežnom teorijom, samo upućujemo čitatelja na knjigu [10].

Definicija 2.2.4. *Neka je $p \in \langle 1, \infty \rangle$ i $s \in \mathbb{R}$.* Soboljevljev homogeni prostor *s parametrima p i s, u oznaci $\mathring{\mathrm{W}}^{p,s}(\mathbb{R}^n)$ je prostor temperiranih distribucija dan s*

$$\mathring{\mathrm{W}}^{p,s}(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \overline{\mathcal{F}}\left[(2\pi|\xi|)^s \mathcal{F}[f]\right] \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n) \right\}.$$

Soboljevljevi homogeni i nehomogeni prostori imaju zanimljivu karakterizaciju u slučaju $s \in \mathbb{N}$. Naime, tada je $f \in \mathrm{W}^{p,s}(\mathbb{R}^n)$ ako i samo ako su sve derivacije reda manjeg ili jednakog od s sadržane u $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)$; točnije, $\partial^\alpha f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)$ za sve $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ reda $|\alpha| \leq s$. S druge strane, $f \in \mathring{\mathrm{W}}^{p,s}(\mathbb{R}^n)$ ako i samo ako su sve derivacije točno reda s sadržane u $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)$; točnije, $\partial^\alpha f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)$ za sve $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ reda $|\alpha| = s$.

2.3 Pomoćni alati

Lema 2.3.1. *Za sve $a, b \geq 0$ i $s > 0$ postoje konstante $C \geq c > 0$ takve da vrijedi*

$$c\,(a+b)^s \leq a^s + b^s \leq C\,(a+b)^s\,.$$

Dokaz. Vrijedi $a^s + b^s \leq (a+b)^s + (a+b)^s = 2(a+b)^s$. Nadalje, vrijedi $(a+b)^s \leq 2^s \max\{a^s, b^s\} \leq 2^s(a^s + b^s)$. Tvrdnja leme slijedi uz $c := 2^{-s}$ i $C := 2$. □

Definicija 2.3.2. Calderón-Zygmundova jezgra *je funkcija $K : \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : x \neq y\} \to \mathbb{R}$ za koju postoje konstante $C_0, C_1 \in \langle 0, +\infty\rangle$ takve da za sve $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x \neq y$ vrijedi*

1. $|K(x,y)| \leq \dfrac{C_0}{|x-y|^n}$,
2. $|\nabla_x K(x,y)| \leq \dfrac{C_1'}{|x-y|^{n+1}}$,
3. $\left|\nabla_y K(x,y)\right| \leq \dfrac{C_1'}{|x-y|^{n+1}}$,

Neprekidni linearni operator $T : \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$ je Calderón-Zygmundov operator *ako postoji Calderón-Zygmundova jezgra $K : \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : x \neq y\} \to \mathbb{R}$ takva da za svaku $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$ s kompaktnim nosačem i za svaki $x \in \mathbb{R}^n$ vrijedi*

$$(Tf)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y) f(y) dy.$$

Teorem 2.3.3. *Calderón-Zygmundov operator $T : \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$ može se proširiti do ograničenog linearnog operatora s $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)$ u $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)$ za svaki $p \in \langle 1, \infty\rangle$.*

Ovaj rezultat naveden je kao lema 1. u 6. poglavlju u [8], a detaljniji raspis može se vidjeti u [2, odjeljak 7.3.].

Definicija 2.3.4. Atom *je proizvoljna Borel-izmjeriva funkcija $a : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ za koju postoji kocka $J \subseteq \mathbb{R}^n$ takva da vrijedi*

$$\mathrm{supp}\,(a) \subseteq J, \quad \|a\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)} \leq |J|^{-\frac{1}{2}}\,, \quad \int_J a(x) dx = 0.$$

Realni (atomarni) Hardyjev prostor *je prostor funkcija*

$$\mathrm{H}^1(\mathbb{R}^n) := \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_i : \alpha_i \in \mathbb{C}, a_i \text{ je atom za sve } i \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| < \infty \right\}.$$

Hardyjev prostor moguće je definirati na više ekvivalentnih načina, a u ovom radu koristit će se definicija pomoću atoma, što opravdava naziv iz definicije.

Definicija 2.3.5. *Neka je H proizvoljan Hilbertov prostor.* Rieszov niz *u prostoru H je niz $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ elemenata iz H za koje postoje $C \geq C' > 0$ takvi da za svaki niz skalara $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ za koje je $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 < \infty$ vrijedi*

$$C' \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 \right) \leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n \right\|_H^2 \leq C \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 \right).$$

Rieszova baza *prostora H je Rieszov niz $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prostora H za koji je $\overline{\mathrm{span}\,\{e_n : n \in \mathbb{N}\}} = H$.*

Poglavlje 3

Karakterizacije pomoću valićnih koeficijenata

Najviše ćemo koristiti jednakost koju smo već naveli u (1.2), a slijedi iz definicije ortonormirane valićne baze, odnosno iz definicije 1.3.2:

$$f(x) = \sum_{I \in \mathcal{I}\, \epsilon \in E} \langle f, \psi_I^\epsilon \rangle \, \psi_I^\epsilon(x),$$

dok ćemo u posebnom slučaju koristiti i jednakost navedenu u (1.3), uz novu oznaku $\phi_k := \phi\left(\,\cdot - k\right)$ za $k \in \mathbb{Z}^n$:

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \langle f, \phi_k \rangle \, \phi_k(x) + \sum_{\substack{I \in \mathcal{I}, |I| \leq 1 \\ \epsilon \in E}} \langle f, \psi_I^\epsilon \rangle \, \psi_I^\epsilon(x).$$

U oba slučaja uvodimo oznake $\beta_k := \langle f, \phi_k \rangle$ za $k \in \mathbb{Z}^n$ te $\alpha_I^\epsilon := \langle f, \psi_I^\epsilon \rangle$ za $I \in \mathcal{I}$.

3.1 Lebesgueovi prostori

Definicija Soboljevljevih prostora sugerira da bi trebalo prvo ponuditi valićnu karakterizaciju prostora $\mathrm{L}^p\left(\mathbb{R}^n\right)$ za $p \in \langle 1, \infty \rangle$. U izvodu te karakterizacije trebat će nam lema koja se može pronaći u [11].

Lema 3.1.1. *(Hinčinove nejednakosti) Neka je $p \in \langle 1, \infty \rangle$ i $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ vjerojatnosni prostor iz odjeljka 1.2. Norme prostora $\mathrm{L}^p\left(\Omega, d\mu\right)$ međusobno su ekvivalentne na zatvorenom potprostoru od $\mathrm{L}^2\left(\Omega\right)$ određenog funkcijama oblika $S\left(\omega\right) = \sum_{\substack{I \in \mathcal{I} \\ \epsilon \in E}} \alpha_I^\epsilon \omega_I^\epsilon$, pri čemu je $(\alpha_I)_{I \in \mathcal{I}}$*

proizvoljan niz u $\mathbb{R}$ ili u $\mathbb{C}$. Drugim riječima, postoje konstante $C_p \geq C'_p > 0$ takve da vrijedi

$$C'_p \left(\sum_{\substack{I \in \mathcal{I} \\ \epsilon \in E}} \left| \alpha_I^\epsilon \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_\Omega |S(\omega)|^p \, d\mu(\omega) \right)^{\frac{1}{p}} \leq C_p \left(\sum_{\substack{I \in \mathcal{I} \\ \epsilon \in E}} \left| \alpha_I^\epsilon \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Teorem 3.1.2. *Neka je $p \in \langle 1, \infty \rangle$ te neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcija s pripadnim valićnim koeficijentima $\alpha_I^\epsilon := \langle f, \psi_I^\epsilon \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{\psi_I^\epsilon(x)}dx$ za sve $I \in \mathcal{I}$ i za sve $\epsilon \in E$. Tada su sljedeće norme na prostoru $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)$ ekvivalentne:*

1. $\|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)}$

2. $\left\| \left(\sum_{\substack{I \in \mathcal{I} \\ \epsilon \in E}} \left| \alpha_I^\epsilon \right|^2 \left| \psi_I^\epsilon \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)}$

3. $\left\| \left(\sum_{\substack{I \in \mathcal{I} \\ \epsilon \in E}} \left| \alpha_I^\epsilon \right|^2 |I|^{-1} \mathbb{1}_I \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)}$

Prisjetimo se na trenutak karakterizacije ortonormirane baze u prostoru $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$. Naime, $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$ ako i samo ako vrijedi $\sum_{\substack{I \in \mathcal{I} \\ \epsilon \in E}} \left| \alpha_I^\epsilon \right|^2 < \infty$. To nam potvrđuje i ovaj teorem raspisivanjem bilo koje od preostale dvije norme, koristeći pritom Beppo-Levijev teorem (koji se može pronaći u [1, kor. 2.4.2]) te činjenicu da za svaki $I \in \mathcal{I}$ i za svaki $\epsilon \in E$ vrijedi $\left\| \psi_I^\epsilon \right\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)} = 1$, odnosno $\int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_I(x)dx = |I|$.

Dokaz. Za svaki $\omega \in \Omega$ označimo s $T_\omega : \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$ omeđeni linearni operator koji je dan djelovanjem na bazi $\{\psi_I^\epsilon : I \in \mathcal{I}, \epsilon \in E\}$ prostora $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$ jednakošću $T_\omega(\psi_I^\epsilon) := \omega_I^\epsilon \psi_I^\epsilon$ za svaki $I \in \mathcal{I}$ i za svaki $\epsilon \in E$. Primijetimo da je to i Calderón-Zygmundov operator. Naime, neka je K_ω preslikavanje dano s $K_\omega(x, y) := \sum_{\substack{I \in \mathcal{I} \\ \epsilon \in E}} \omega_I^\epsilon \psi_I^\epsilon(x)\overline{\psi_I^\epsilon}(y)$. Za $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$ s kompaktnim nosačem i za $x \in \mathbb{R}^n$ vrijedi

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} K_\omega(x,y)f(y)dy &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{\substack{I\in\mathcal{I}\\ \epsilon\in E}} \omega_I^\epsilon \psi_I^\epsilon(x)\overline{\psi_I^\epsilon}(y) f(y) \right) dy \\
&= \sum_{\substack{I\in\mathcal{I}\\ \epsilon\in E}} \int_{\mathbb{R}^n} \omega_I^\epsilon \psi_I^\epsilon(x)\overline{\psi_I^\epsilon}(y) \left(\sum_{\substack{I'\in\mathcal{I}\\ \epsilon'\in E}} \alpha_{I'}^{\epsilon'} \psi_{I'}^{\epsilon'}(y) \right) dy \\
&= \sum_{\substack{I\in\mathcal{I}\\ \epsilon\in E}} \sum_{\substack{I'\in\mathcal{I}\\ \epsilon'\in E}} \omega_I^\epsilon \alpha_{I'}^{\epsilon'} \psi_I^\epsilon(x) \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\psi_I^\epsilon}(y)\psi_{I'}^{\epsilon'}(y)dy \\
&= \sum_{\substack{I\in\mathcal{I}\\ \epsilon\in E}} \sum_{\substack{I'\in\mathcal{I}\\ \epsilon'\in E}} \omega_I^\epsilon \alpha_{I'}^{\epsilon'} \psi_I^\epsilon(x) \left\langle \psi_{I'}^{\epsilon'}, \psi_I^\epsilon \right\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)} = \sum_{\substack{I\in\mathcal{I}\\ \epsilon\in E}} \omega_I^\epsilon \alpha_I^\epsilon \psi_I^\epsilon(x) \\
&= \sum_{\substack{I\in\mathcal{I}\\ \epsilon\in E}} \alpha_I^\epsilon \left(T_\omega \psi_I^\epsilon\right)(x) = \left(T_\omega \left(\sum_{\substack{I\in\mathcal{I}\\ \epsilon\in E}} \alpha_I^\epsilon \psi_I^\epsilon \right)\right)(x) = \left(T_\omega f\right)(x).
\end{aligned}$$

Pritom smo prijelazom u drugi i u treći red koristili Lebesgueov teorem o dominiranoj konvergenciji (po definiciji 1.3.2 je $\psi_I^\epsilon \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$ za sve $I \in \mathcal{I}$ i $\epsilon \in E$, a f je element prostora $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$ i s kompaktnim nosačem, pa je posebno po Hölderovoj nejednakosti ([5, tm 6.2]) i element prostora $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)$) te činjenicu da je $\{\psi_I^\epsilon : I \in \mathcal{I}, \epsilon \in E\}$ ortonormiran skup u $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$. Dakle, K_ω je jezgra pripadna operatoru T_ω, odnosno vrijedi posljednja jednakost iz definicije 2.3.3. Preostaje još provjeriti da K_ω zadovoljava svojstva Calderón-Zygmundove jezgre iz iste definicije. Za sve $x, y \in \mathbb{R}^n, x \neq y$ vrijedi

$$\begin{aligned}
|K_\omega(x,y)| &\leq \sum_{\substack{I\in\mathcal{I}\\ \epsilon\in E}} \underbrace{\left|\omega_I^\epsilon\right|}_{=|\pm1|=1} \left|\psi_I^\epsilon(x)\right| \left|\overline{\psi_I^\epsilon(y)}\right| = \sum_{\substack{j\in\mathbb{Z},k\in\mathbb{Z}^n\\ \epsilon\in E}} \left|2^{\frac{nj}{2}}\psi^\epsilon\left(2^jx-k\right)\right| \left|2^{\frac{nj}{2}}\psi^\epsilon\left(2^jy-k\right)\right| \\
&\leq \sum_{\substack{j\in\mathbb{Z},k\in\mathbb{Z}^n\\ \epsilon\in E}} \frac{2^{nj}C_{n+1}^2}{(1+|2^jx-k|)^{n+1}(1+|2^jy-k|)^{n+1}} \\
&= 2^{n-1}C_{n+1}^2 \sum_{j\in\mathbb{Z},k\in\mathbb{Z}^n} \frac{2^{nj}}{(1+|2^jx-k|)^{n+1}(1+|2^jy-k|)^{n+1}}.
\end{aligned}$$

Pritom smo napravili zamjenu u sumaciji obzirom da dijadski intervali imaju jednoznačni oblik $I = \left[2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)\right\rangle$ za $j \in \mathbb{Z}$ i $k \in \mathbb{Z}^n$, a u tom slučaju vrijedi $\psi_I^\epsilon(x) = 2^{\frac{nj}{2}}\psi^\epsilon\left(2^jx-k\right)$ za sve $\epsilon \in E$. Također, izraz u sumi u drugom redu ne ovisi o parametru ϵ pa prijelazom u sljedeći red koristimo jednakost $|E| = 2^n - 1$. Koristeći lemu 1.3.5 gdje za funkciju W

uvrštavamo funkciju $x' \longmapsto \dfrac{1}{(1+|x'|)^{n+1}}$ te umjesto točki x i y u iskazu leme uvrštavamo točke $2^j x$ i $2^j y$ za svaki $j \in \mathbb{Z}$, dobivamo

$$|K_\omega(x,y)| \leq 2^{n-1} C_{n+1}^2 C' \sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{2^{nj}}{(1+2^{j-1}|x-y|)^{n+1}}$$

Označimo sada $z_j := 2^j|x-y|$ za sve $j \in \mathbb{Z}$. Dobivenu sumu možemo po monotonosti funkcije $z \longmapsto \dfrac{1}{(2+z)^2}$ svesti na sumu integrala po (do na rubove) disjunktnim segmentima oblika $\left[z_{j-1}, z_j\right]$. Dodatno, ti segmenti su duljine $z_j - z_{j-1} = z_{j-1} = \dfrac{z_j}{2}$ te u uniji daju interval $\langle 0, \infty\rangle$. Prema tome,

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{2^{nj}}{(1+2^{j-1}|x-y|)^{n+1}} &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{z_j^n |x-y|^{-n}}{\left(1+\frac{z_j}{2}\right)^{n+1}} = 2^{n+1}|x-y|^{-n} \sum_{j\in\mathbb{Z}} z_j \cdot \frac{z_j^{n-1}}{\left(2+z_j\right)^{n+1}} \\
&\leq 2^{n+2}|x-y|^{-n} \sum_{j\in\mathbb{Z}} z_{j-1} \cdot \frac{\left(2+z_j\right)^{n-1}}{\left(2+z_j\right)^{n+1}} \\
&= 2^{n+2}|x-y|^{-n} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \int_{z_{j-1}}^{z_j} \frac{dz}{\left(2+z_j\right)^2} \\
&\leq 2^{n+2}|x-y|^{-n} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \int_{z_{j-1}}^{z_j} \frac{dz}{(2+z)^2} = 2^{n+2}|x-y|^{-n} \int_0^\infty \frac{dz}{(2+z)^2} \\
&= 2^{n+1}|x-y|^{-n}.
\end{aligned}$$

Slijedi

$$|K_\omega(x,y)| \leq \frac{2^{2n} C_{n+1}^2 C'}{|x-y|^n},$$

što je upravo prva nejednakost iz definicije 2.3.3 uz $C_0 := 2^{2n} C_{n+1}^2 C'$. Druge dvije nejednakosti dobivamo sličnim računom. Vrijedi

$$\begin{aligned}
\nabla_x K_\omega(x,y) &= \sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}, k\in\mathbb{Z}^n \\ \epsilon\in E}} 2^{nj} \omega^\epsilon \nabla_x \left(\psi^\epsilon\left(2^j x - k\right)\right) \psi^\epsilon\left(2^j y - k\right) \\
&= \sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}, k\in\mathbb{Z}^n \\ \epsilon\in E}} 2^{(n+1)j} \omega^\epsilon \nabla_x \psi^\epsilon\left(2^j x - k\right) \psi^\epsilon\left(2^j y - k\right).
\end{aligned}$$

Iz ovoga, analognim postupkom kao i gore, dobivamo

$$|\nabla_x K_\omega(x,y)| \leq 2^{n-1} C_{n+1}^2 C' \sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{2^{(n+1)j}}{\left(1+2^{j-1}|x-y|\right)^{n+1}} \leq \frac{2^{2n} C_{n+1}^2 C'}{|x-y|^{n+1}}.$$

Druga nejednakost slijedi uz istu konstantu $C_1 := 2^{2n} C_{n+1}^2 C'$. Jasno, treća nejednakost slijedi potpuno analognim raspisom. Prema tome, K_ω je uistinu Calderón-Zygmundov operator, stoga možemo primijeniti teorem 2.3.4. Po tom teoremu je T_ω omeđeni linearni operator na $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)$, dakle postoji konstanta $C > 0$ takva da vrijedi $\|T_\omega(f)\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)}$. Potenciranjem ove nejednakosti eksponentom p te integriranjem po varijabli $\omega \in \Omega$ u odnosu na mjeru μ dobivamo

$$\int_\Omega \int_{\mathbb{R}^n} |(T_\omega f)(x)|^p \, dx d\mu(\omega) \leq C^p \int_\Omega \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx d\mu(\omega) = C^p \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx.$$

Pritom posljednja jednakost vrijedi jer je μ vjerojatnosna mjera te podintegralni izraz ne ovisi o varijabli ω.

Fiksirajmo sada $x \in \mathbb{R}^n$ i promotrimo preslikavanje $\omega \longmapsto (T_\omega f)(x) = \sum_{\substack{I\in\mathcal{I}\\ \epsilon\in E}} \alpha_I^\epsilon \omega_I^\epsilon \psi_I^\epsilon(x)$ $= \sum_{\substack{I\in\mathcal{I}\\ \epsilon\in E}} \alpha_I^\epsilon \psi_I^\epsilon(x) \omega_I^\epsilon$. Po prvoj Hinčinovoj nejednakosti postoji $C_p' > 0$ takav da vrijedi

$$C_p' \left(\sum_{\substack{I\in\mathcal{I}\\ \epsilon\in E}} \left|\alpha_I^\epsilon \psi_I^\epsilon(x)\right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_\Omega |(T_\omega f)(x)|^p \, d\mu(\omega) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Potenciranjem ove nejednakosti eksponentom p te integriranjem po $x \in \mathbb{R}^n$ dobivamo

$$C_p'^p \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{\substack{I\in\mathcal{I}\\ \epsilon\in E}} \left|\alpha_I^\epsilon \psi_I^\epsilon(x)\right|^2 \right)^{\frac{p}{2}} dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_\Omega |(T_\omega f)(x)|^p \, d\mu(\omega) dx.$$

Iz ovih nejednakosti primjenom Fubinijevog teorema za apsolutno integrabilne funkcije ([1, pogl. 5]) te uvodeći konstantu $C_0 := \dfrac{C}{C_p'}$ slijedi

$$\left\| \left(\sum_{\substack{I\in\mathcal{I}\\ \epsilon\in E}} \left|\alpha_I^\epsilon\right|^2 \left|\psi_I^\epsilon\right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_0 \|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Dobili smo jednu od dvije potrebne nejednakosti koje nam daju ekvivalenciju prvih dviju normi iz iskaza ovog teorema. Sada koristimo drugu nejednakost iz druge Hinčinove nejednakosti, dakle za $C_p > 0$ vrijedi

$$\left(\int\limits_{\Omega} \left| (T_\omega f)(x) \right|^p d\mu(\omega) \right)^{\frac{1}{p}} \leq C_p \left(\sum_{\substack{I \in \mathcal{I} \\ \epsilon \in E}} \left| \alpha_I^\epsilon \psi_I^\epsilon(x) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Slično kao i ranije, iz ove nejednakosti dobivamo

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \int\limits_{\Omega} \left| (T_\omega f)(x) \right|^p d\mu(\omega) dx \leq C_p^p \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{\substack{I \in \mathcal{I} \\ \epsilon \in E}} \left| \alpha_I^\epsilon \psi_I^\epsilon(x) \right|^2 \right)^{\frac{p}{2}} dx.$$

Primijetimo sada da je za svaki $\omega \in \Omega$ operator T_ω involucija, odnosno vrijedi $T_\omega^2 = I_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)}$. Uistinu, za svaki $I \in \mathcal{I}$ i za svaki $\epsilon \in E$ vrijedi $T_\omega^2 \psi_I^\epsilon = T_\omega \left(T_\omega \psi_I^\epsilon \right) = \omega_I^\epsilon T_\omega \psi_I^\epsilon = \left| \omega_I^\epsilon \right|^2 \psi_I^\epsilon = \psi_I^\epsilon$, dakle T_ω djeluje kao identiteta na elementima baze prostora $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$, pa je ujedno identiteta i na cijelom prostoru. Iz ovoga dobivamo nejednakost

$$\|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)} = \|T_\omega (T_\omega f)\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)} \leq C \|T_\omega f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)}$$

iz koje slijedi

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx = \int\limits_{\Omega} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx d\mu(\omega) \leq C^p \int\limits_{\Omega} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left| (T_\omega f)(x) \right|^p dx d\mu(\omega)$$

Uz $C_0' := \dfrac{1}{CC_p'}$ slijedi

$$C_0' \|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)} \leq \left\| \left(\sum_{\substack{I \in \mathcal{I} \\ \epsilon \in E}} \left| \alpha_I^\epsilon \right|^2 \left| \psi_I^\epsilon \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Dakle, dobili smo

$$C_0' \|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)} \leq \left\| \left(\sum_{\substack{I \in \mathcal{I} \\ \epsilon \in E}} \left| \alpha_I^\epsilon \right|^2 \left| \psi_I^\epsilon \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_0 \|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)},$$

odnosno prve dvije norme iz iskaza ovog teorema su ekvivalentne.

Da bi pokazali ekvivalenciju ovih normi s preostalom, trećom normom, pokazat ćemo prvo da prethodno dokazana ekvivalencija vrijedi i za poseban tip ortonormirane valićne baze koja nije glatka. Neka je $\{h_I^\epsilon : I \in \mathcal{I}, \epsilon \in E\}$ Haarova valićna baza dana kao i u definicijama 1.1.2 i 1.1.3 (Haarove funkcije definirane su pomoću skupa $E = \{0,1\}^n \setminus \{\theta\}$ što u ovom trenutku nije bitno jer koristimo još bazu $\{\psi_I^\epsilon : I \in \mathcal{I}, \epsilon \in E\}$ s proizvoljnim skupom E kardinaliteta $2^n - 1$, a u ovom dokazu taj skup je isključivo u ulozi indeksacije baznih funkcija). Primijetimo, obe ove baze su podskup prostora $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)$ za svaki $p \in [1, \infty]$ budući da elementi tih baza po pripadnim definicijama imaju kompaktne nosače te su omeđene funkcije.

Definiramo operator $U : \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$ koji je na elementima baze dan s $U(h_I^\epsilon) := \psi_I^\epsilon$ za sve $I \in \mathcal{I}$ i za sve $\epsilon \in E$. Primijetimo: $\{\psi_I^\epsilon : I \in \mathcal{I}, \epsilon \in E\}$ je baza prostora $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$, ujedno i podskup od $\operatorname{Im} U$, prema tome U je surjektivan operator. Nadalje, U čuva skalarni produkt; točnije, za sve $g_1, g_2 \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$ sa zapisom u Haarovoj bazi $g_1 = \sum_{\substack{I \in \mathcal{I} \\ \epsilon \in E}} \beta_I^\epsilon h_I^\epsilon$ i $g_2 = \sum_{\substack{I' \in \mathcal{I} \\ \epsilon' \in E}} \gamma_{I'}^{\epsilon'} h_{I'}^{\epsilon'}$ vrijedi

$$
\begin{aligned}
\langle Ug_1, Ug_2 \rangle &= \left\langle U\left(\sum_{\substack{I \in \mathcal{I} \\ \epsilon \in E}} \beta_I^\epsilon h_I^\epsilon\right), U\left(\sum_{\substack{I' \in \mathcal{I} \\ \epsilon' \in E}} \gamma_{I'}^{\epsilon'} h_{I'}^{\epsilon'}\right)\right\rangle = \sum_{\substack{I \in \mathcal{I} \\ \epsilon \in E}} \sum_{\substack{I' \in \mathcal{I} \\ \epsilon' \in E}} \beta_I^\epsilon \overline{\gamma_{I'}^{\epsilon'}} \left\langle \psi_I^\epsilon, \psi_{I'}^{\epsilon'} \right\rangle = \sum_{\substack{I \in \mathcal{I} \\ \epsilon \in E}} \beta_I^\epsilon \overline{\gamma_I^\epsilon} \\
&= \sum_{\substack{I \in \mathcal{I} \\ \epsilon \in E}} \sum_{\substack{I' \in \mathcal{I} \\ \epsilon' \in E}} \beta_I^\epsilon \overline{\gamma_{I'}^{\epsilon'}} \left\langle h_I^\epsilon, h_{I'}^{\epsilon'} \right\rangle = \langle g_1, g_2 \rangle,
\end{aligned}
$$

pri čemu smo koristili definicijska svojstva ortonormiranih baza. Budući da je U surjektivan operator koji čuva skalarni produkt, U je posebno i unitaran operator, pa i izomorfizam.

Primijetimo sljedeće: za svaki $I \in \mathcal{I}$ i $\epsilon \in E$ je $h_I^\epsilon \in \mathrm{H}^1(\mathbb{R}^n)$. Doista, po definiciji 2.3.5 funkcija $|I|^{\frac{1}{2}} h_I^\epsilon$ je atom budući da je $\operatorname{supp}\left(|I|^{\frac{1}{2}} h_I^\epsilon\right) \subseteq \overline{I}$, a vrijedi i $\left\| |I|^{\frac{1}{2}} h_I^\epsilon \right\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)} = |I|^{\frac{1}{2}} \left\| h_I^\epsilon \right\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)} = |I|^{\frac{1}{2}}$ te, po definiciji Haarovih funkcija, $\int_I |I|^{\frac{1}{2}} h_I^\epsilon(x) dx = |I|^{\frac{1}{2}} \int_I h_I^\epsilon(x) dx = 0$ (raspisano u (1.1)). Sada je iz trivijalnog prikaza $h_I^\epsilon = |I|^{-\frac{1}{2}} \cdot |I|^{\frac{1}{2}} h_I^\epsilon$ jasno da vrijedi $h_I^\epsilon \in \mathrm{H}^1(\mathbb{R}^n)$.

Ova činjenica opravdava promatranje operatora $U : \mathrm{H}^1(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)$ koji je također izomorfizam Banachovih prostora. Koristeći teorem interpolacije iz [4] zaključujemo da su $U, U^{-1} : \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)$ ograničeni operatori, također izomorfizmi, za $p \in \langle 1, 2 \rangle$. No, kako je U unitaran operator na $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$, vrijedi $U^* = U^{-1}$, s tim da, ako je U omeđen operator s $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)$ u $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)$ za $p \in \langle 1, 2 \rangle$, onda je U^* omeđen operator s $\mathrm{L}^{p'}(\mathbb{R}^n)$ u $\mathrm{L}^{p'}(\mathbb{R}^n)$, pri čemu je $p' \in \mathbb{R}$ dualni eksponent od p, tj. onaj koji zadovoljava jednakost $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$.

To slijedi iz činjenice da je $(\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n))' = \mathrm{L}^{p'}(\mathbb{R}^n)$, odnosno $\mathrm{L}^{p'}(\mathbb{R}^n)$ je dual prostora $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)$. Pritom, kako je $p \in \langle 1, 2\rangle$, vrijedi $p' = \dfrac{1}{1-\frac{1}{p}} \in \langle 2, \infty\rangle$. Prema tome, $U^{-1} : \mathrm{L}^{p'}(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{L}^{p'}(\mathbb{R}^n)$ je omeđen operator, no isto vrijedi i za U, budući da je $U = \left(U^{-1}\right)^{-1} = \left(U^{-1}\right)^*$. Sveukupno, U je omeđeni operator, također izomorfizam, s $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)$ u $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)$ za proizvoljni $p \in \langle 1, \infty\rangle$.

Sada kada znamo da je U, pa posebno i U^{-1}, izomorfizam na promatranom prostoru $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)$, imamo ekvivalenciju normi $\left\| \sum_{\substack{I\in\mathcal{I}\\ \epsilon\in E}} \alpha_I^\epsilon \psi_I^\epsilon \right\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)}$ i $\left\| U^{-1}\left(\sum_{\substack{I\in\mathcal{I}\\ \epsilon\in E}} \alpha_I^\epsilon \psi_I^\epsilon \right)\right\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)}$. Međutim, vrijedi

$$U^{-1}\left(\sum_{\substack{I\in\mathcal{I}\\ \epsilon\in E}} \alpha_I^\epsilon \psi_I^\epsilon \right) = \sum_{\substack{I\in\mathcal{I}\\ \epsilon\in E}} \alpha_I^\epsilon U^{-1} \psi_I^\epsilon = \sum_{\substack{I\in\mathcal{I}\\ \epsilon\in E}} \alpha_I^\epsilon h_I^\epsilon,$$

pa po već dokazanoj ekvivalenciji prvih dviju normi za valićnu bazu $\{h_I^\epsilon : I \in \mathcal{I}, \epsilon \in E\}$ (koja je valićni sistem reda $r = 0$) dobivamo da su norme $\|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)}$ i $\left\| \left(\sum_{\substack{I\in\mathcal{I}\\ \epsilon\in E}} \left|\alpha_I^\epsilon\right|^2 \left|h_I^\epsilon\right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)}$ ekvivalentne. No, $\left|h_I^\epsilon(x)\right|^2 = |I|^{-1}\, \mathbb{1}_I(x)$ za sve $I \in \mathcal{I}$, $\epsilon \in E$ i $x \in \mathbb{R}^n$, što uvrštavanjem daje traženu treću navedenu normu iz iskaza ovog teorema. Dakle, i ta norma je ekvivalentna s preostalim dvima navedenim normama, pa je time dokazana tvrdnja ovog teorema. □

3.2 Nehomogeni Soboljevljevi prostori

Sada smo spremni za karakterizaciju Soboljevljevih prostora $\mathrm{W}^{p,s}(\mathbb{R}^n)$ pomoću valića. Karakterizaciju je moguće napraviti u slučaju kada je $r > |s|$ jer tada postoji Fourierova transformacija funkcije navedene u definiciji nehomogenog Soboljevljevog prostora. Dokaz ćemo provoditi u dva dijela: kada je $s \geq 0$ (a onda i $r > s$) te kada je $s \leq 0$ (a onda i $r > -s$).

Propozicija 3.2.1. *Neka je $p \in \langle 1, \infty\rangle$ i $s \in [0, r\rangle$. Nadalje, neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcija s pripadnim valićnim koeficijentima $\alpha_I^\epsilon := \langle f, \psi_I^\epsilon\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{\psi_I^\epsilon(x)}dx$ za sve $I \in \mathcal{I}$ i za sve*

$\epsilon \in E$. Tada je $f \in \mathrm{W}^{p,s}(\mathbb{R}^n)$ ako i samo ako vrijedi

$$\left(\sum_{\substack{I \in \mathcal{I} \\ \epsilon \in E}} \left| \alpha_I^\epsilon \right|^2 \left(1 + |I|^{-\frac{2s}{n}} \right) |I|^{-1} \, \mathbb{1}_I \right)^{\frac{1}{2}} \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n).$$

Dokaz. Za $I \in \mathcal{I}$ oblika $I = \left[2^j k, 2^j(k+1)\right\rangle$, za $j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^n$ i za $\epsilon \in E$ dan je prikaz

$$\psi_I^\epsilon(x) = 2^{\frac{nj}{2}} \psi^\epsilon \left(2^j x - k\right) \quad \text{za sve } x \in \mathbb{R}^n.$$

Za svaki $\epsilon \in E$ i za svaki $\gamma \in \mathbb{R}$ možemo definirati funkciju $\psi^{\epsilon,\gamma}$ koja zadovoljava $\widehat{\psi^{\epsilon,\gamma}}(\xi) = |\xi|^\gamma \widehat{\psi^\epsilon}(\xi)$ za sve $\xi \in \mathbb{R}^n$. Potrebno je naglasiti da je, u ovisnosti o $\gamma \in \mathbb{R}$, moguće odabrati dovoljno glatki ortonormirani valićni sistem $\{\psi^\epsilon : \epsilon \in E\}$ takav da je za svaki $\epsilon \in E$ funkcija $\psi^\epsilon \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$ s kompaktnim nosačem, pa je ujedno i element prostora $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Stoga postoji Fourierova transformacija iste funkcije. Štoviše, odabirom dovoljno glatkog valićnog sistema možemo postići da su i novodefinirane funkcije dovoljno glatke.

Uz ovako definirane funkcije za svaki $\gamma \in \mathbb{R}$ definiramo analogno familiju funkcija $\left\{\psi_I^{\epsilon,\gamma} : I \in \mathcal{I}, \epsilon \in E\right\}$ formulom

$$\psi_I^{\epsilon,\gamma}(x) := 2^{\frac{nj}{2}} \psi^{\epsilon,\gamma} \left(2^j x - k\right) \quad \text{za sve } x \in \mathbb{R}^n.$$

Fiksirajmo sada $\gamma \in \mathbb{R}$. Definirajmo operator $\mathcal{L}_\gamma : \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$ koji je na elementima baze dan s $\mathcal{L}_\gamma(\psi_I^\epsilon) := \psi_I^{\epsilon,\gamma}$ za sve $I \in \mathcal{I}$ i $\epsilon \in E$. Cilj nam je pokazati da je operator $\mathcal{L}_\gamma$ izomorfizam s $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)$ u $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)$ za sve $p \in \langle 1, \infty \rangle$. Prije svega promotrimo slučaj $p = 2$. Po lemi 4. iz odjeljka 6. 2. Meyerove knjige [8] familija $\left\{\psi_I^{\epsilon,\gamma} : I \in \mathcal{I}, \epsilon \in E\right\}$ čini Rieszovu bazu u $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$ s pripadnom dualnom bazom $\left\{\psi_I^{\epsilon,-\gamma} : I \in \mathcal{I}, \epsilon \in E\right\}$. Obzirom na to, $\mathcal{L}_\gamma$ je izomorfizam s $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$ u $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$. No, taj operator je i Calderón-Zygmundov operator s pripadnom jezgrom koja je dana s $K_\gamma(x,y) := \sum_{\substack{\epsilon \in E \\ I \in \mathcal{I}}} \psi_I^{\epsilon,\gamma}(x) \overline{\psi_I^\epsilon(y)}$. Naime, ako je f oblika $f = \sum_{\substack{\epsilon \in E \\ I \in \mathcal{I}}} \beta_I^\epsilon \psi_I^\epsilon$, onda za sve $x \in \mathbb{R}^n$ vrijedi

$$\begin{aligned}
\left(\mathcal{L}_\gamma f\right)(x) &= \left(\mathcal{L}_\gamma \left(\sum_{\substack{\epsilon \in E \\ I \in \mathcal{I}}} \beta_I^\epsilon \psi_I^\epsilon \right) \right)(x) = \sum_{\substack{\epsilon \in E \\ I \in \mathcal{I}}} \beta_I^\epsilon \psi_I^{\epsilon,\gamma}(x) \\
&= \sum_{\substack{\epsilon \in E \\ I \in \mathcal{I}}} \sum_{\substack{\epsilon' \in E \\ I' \in \mathcal{I}}} \beta_{I'}^{\epsilon'} \psi_I^{\epsilon,\gamma}(x) \int_{\mathbb{R}^n} \psi_{I'}^{\epsilon'}(y) \overline{\psi_I^\epsilon(y)} dy = \int_{\mathbb{R}^n} K_\gamma(x,y) f(y) dy.
\end{aligned}$$

Slično kao i u dokazu teorema 3.1.2 pokaže se da ocjene iz definicije 2.3.3 vrijede i za operator $\mathcal{L}_\gamma$. Naime, ψ^ϵ je glatka i brzo opadajuća funkcija, a po svojstvima Fourierove transformacije i $\psi^{\epsilon,\gamma}$ je glatka i brzo opadajuća, što je dovoljno da bi se pokazale navedene ocjene. Primjenom teorema 2.3.4 zaključujemo da je $\mathcal{L}_\gamma$ neprekidni operator s $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)$ u $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)$ za sve $p \in \langle 1, \infty \rangle$.

Za isti fiksirani parametar γ definirajmo operator $\mathcal{M}_\gamma : \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$ koji je na elementima gore navedene Rieszove baze dan s $\mathcal{M}_\gamma \psi_I^{\epsilon,\gamma} := \psi_I^\epsilon$ za sve $I \in \mathcal{I}$ i $\epsilon \in E$. Potpuno analogno kao i za operator $\mathcal{L}_\gamma$ pokaže se da je i operator $\mathcal{M}_\gamma$ neprekidni Calderón-Zygmundov operator na $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$, pa je onda i neprekidni operator s $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)$ u $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)$.

Uočimo još da vrijedi $\mathcal{L}_\gamma \mathcal{M}_\gamma = \mathcal{M}_\gamma \mathcal{L}_\gamma = I_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)}$ za sve $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)$. Naime, ova jednakost vrijedi na elementima skupova $\{\psi_I^\epsilon : I \in \mathcal{I}, \epsilon \in E\}$ i $\left\{\psi_I^{\epsilon,\gamma} : I \in \mathcal{I}, \epsilon \in E\right\}$ koji su generirani funkcijama $(\psi^\epsilon)_{\epsilon \in E}$, a te funkcije pripadaju prostoru $\mathrm{C}_c^r(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathrm{C}_c(\mathbb{R}^n)$. Uz to, oba skupa čine ortonormiranu bazu prostora $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$ koji sadrži $\mathrm{C}_c(\mathbb{R}^n)$. Dakle, gornja jednakost operatora vrijedi i na $\mathrm{C}_c(\mathbb{R}^n)$, a taj je skup gust u prostoru $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)$ za sve $p \in \langle 1, \infty \rangle$, što je pokazano u [5, prop. 8. 17.] (uz inkluzije $\mathrm{C}_\mathrm{c}^\infty(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathrm{C}_c(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)$). Koristeći proširenje s $\mathrm{C}_c(\mathbb{R}^n)$ na $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)$ dobivamo da vrijedi jednakost $\mathcal{L}_\gamma \mathcal{M}_\gamma = \mathcal{M}_\gamma \mathcal{L}_\gamma = I_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)}$. A prema ovome, kako smo i najavili, $\mathcal{L}_\gamma$ je izomorfizam s $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)$ u $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)$.

Za karakterizaciju prostora $\mathrm{W}^{p,s}(\mathbb{R}^n)$ pomoću valića koristimo alternativnu, ekvivalentnu normu navedenu u (2.2). Cilj je dakle pomoću valića okarakterizirati izraz $\|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)} + \left\|\overline{\mathcal{F}}\left[(2\pi|\xi|)^s \mathcal{F}[f]\right]\right\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)}$. Norme $\|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)}$ i $\left\|\left(\sum_{\substack{I\in\mathcal{I}\\ \epsilon\in E}} |\alpha_I|^2 |I|^{-1} \mathbb{1}_I\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)}$ su ekvivalentne po teoremu 3.1.2. Da bi dobili ekvivalenciju s drugom normom u ovom izrazu, primijetimo da vrijedi

$$
\begin{aligned}
\overline{\mathcal{F}}\left[(2\pi|\xi|)^s \mathcal{F}[f(x)]\right](x) &= \overline{\mathcal{F}}\left[(2\pi|\xi|)^s \mathcal{F}\left[\sum_{\substack{I\in\mathcal{I}\\ \epsilon\in E}} \alpha_I^\epsilon \psi_I^\epsilon(x)\right]\right](x) \qquad (3.1)\\
&= \sum_{\substack{I\in\mathcal{I}\\ \epsilon\in E}} \overline{\mathcal{F}}\left[(2\pi|\xi|)^s \alpha_I^\epsilon \mathcal{F}[\psi_I^\epsilon(x)]\right](x)\\
&= \sum_{\substack{I\in\mathcal{I}\\ \epsilon\in E}} \overline{\mathcal{F}}\left[(2\pi|\xi|)^s \alpha_I^\epsilon \mathcal{F}\left[2^{\frac{nj}{2}} \psi^\epsilon\left(2^j x - k\right)\right]\right](x)\\
&= \sum_{\substack{I\in\mathcal{I}\\ \epsilon\in E}} \overline{\mathcal{F}}\left[(2\pi|\xi|)^s \alpha_I^\epsilon 2^{\frac{nj}{2}} e^{-2\pi i\xi\cdot k} 2^{-nj} \mathcal{F}[\psi^\epsilon]\left(2^{-j}\xi\right)\right](x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\substack{I\in\mathcal{I}\\ \epsilon\in E}} \overline{\mathcal{F}}\left[(2\pi)^s \alpha_I^\epsilon 2^{\frac{nj}{2}} e^{-2\pi i\xi\cdot k} 2^{-nj} 2^{js} \left|2^{-j}\xi\right|^s \mathcal{F}\left[\psi^\epsilon\right]\left(2^{-j}\xi\right)\right](x)\\
&= \sum_{\substack{I\in\mathcal{I}\\ \epsilon\in E}} \overline{\mathcal{F}}\left[(2\pi)^s 2^{js} \alpha_I^\epsilon 2^{\frac{nj}{2}} e^{-2\pi i\xi\cdot k} 2^{-nj} \mathcal{F}\left[\psi^{\epsilon,s}\right]\left(2^{-j}\xi\right)\right](x)\\
&= \overline{\mathcal{F}}\left[(2\pi)^s \mathcal{F}\left[\sum_{\substack{I\in\mathcal{I}\\ \epsilon\in E}} \underbrace{2^{js}}_{=\left(2^{nj}\right)^{\frac{s}{n}}=|I|^{-\frac{s}{n}}} \alpha_I^\epsilon \psi_I^{\epsilon,s}(x)\right]\right](x)\\
&= \sum_{\substack{I\in\mathcal{I}\\ \epsilon\in E}} (2\pi)^s |I|^{-\frac{s}{n}} \alpha_I^\epsilon \psi_I^{\epsilon,s}(x).
\end{aligned}
$$

Pritom, u ovom raspisu koristili smo definicije funkcija navedenih na početku ovog dokaza, lemu 2.1.2, kao i svojstva omeđenih, odnosno neprekidnih linearnih operatora, odnosno izomorfizama koje imaju Fourierova i inverzna Fourierova transformacija. Dakle, vrijedi $\left\|\overline{\mathcal{F}}\left[(2\pi|\xi|)^s \mathcal{F}[f]\right]\right\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)} = \left\|\sum_{\substack{I\in\mathcal{I}\\ \epsilon\in E}} (2\pi)^s |I|^{-\frac{s}{n}} \alpha_I^\epsilon \psi_I^{\epsilon,s}\right\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)}$. Ova norma ekvivalentna je normi $\left\|\sum_{\substack{I\in\mathcal{I}\\ \epsilon\in E}} (2\pi)^s |I|^{-\frac{s}{n}} \alpha_I^\epsilon \psi_I^{\epsilon}\right\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)} = (2\pi)^s \left\|\sum_{\substack{I\in\mathcal{I}\\ \epsilon\in E}} |I|^{-\frac{s}{n}} \alpha_I^\epsilon \psi_I^{\epsilon}\right\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)}$ budući da je $\mathcal{L}_s$ izomorfizam na $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)$, a karakterizaciju ove norme dobivamo ponovo iz teorema 3.1.2, ovoga puta na niz koeficijenata $\left(|I|^{-\frac{s}{n}} \alpha_I^\epsilon\right)_{\substack{I\in\mathcal{I}\\ \epsilon\in E}}$, pa dobivamo da je ta norma ekvivalentna normi

$$
\left\|\left(\sum_{\substack{I\in\mathcal{I}\\ \epsilon\in E}} \left||I|^{-\frac{s}{n}} \alpha_I^\epsilon\right|^2 |I|^{-1} \mathbb{1}_I\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)} = \left\|\left(\sum_{\substack{I\in\mathcal{I}\\ \epsilon\in E}} |I|^{-\frac{2s}{n}} \left|\alpha_I^\epsilon\right|^2 |I|^{-1} \mathbb{1}_I\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)}.
$$

Sve zajedno, $f \in \mathrm{W}^{p,s}(\mathbb{R}^n)$ ako i samo ako je

$$
\left(\sum_{\substack{I\in\mathcal{I}\\ \epsilon\in E}} \left|\alpha_I^\epsilon\right|^2 |I|^{-1} \mathbb{1}_I\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{\substack{I\in\mathcal{I}\\ \epsilon\in E}} |I|^{-\frac{2s}{n}} \left|\alpha_I^\epsilon\right|^2 |I|^{-1} \mathbb{1}_I\right)^{\frac{1}{2}} \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n),
$$

odnosno po lemi 2.3.1

$$
\left(\sum_{\substack{I\in\mathcal{I}\\ \epsilon\in E}} \left|\alpha_I^\epsilon\right|^2 \left(1 + |I|^{-\frac{2s}{n}}\right) |I|^{-1} \mathbb{1}_I\right)^{\frac{1}{2}}
$$

$$= \left(\sum_{\substack{I \in \mathcal{I} \\ \epsilon \in E}} \left|\alpha_I^\epsilon\right|^2 |I|^{-1} \mathbb{1}_I + \sum_{\substack{I \in \mathcal{I} \\ \epsilon \in E}} |I|^{-\frac{2s}{n}} \left|\alpha_I^\epsilon\right|^2 |I|^{-1} \mathbb{1}_I \right)^{\frac{1}{2}} \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n).$$

Time je upotpunjen dokaz uz pretpostavku glatkoće valićnog sistema. Pomoću ovoga moguće je pokazati tvrdnju teorema i za proizvoljni ortonormirani valićni sistem. Detaljnije o ovom slučaju može se pronaći u [8, 170. stranica]. □

Time je pokazana karakterizacija Soboljevljevog prostora $\mathrm{W}^{p,s}(\mathbb{R}^n)$ u slučaju $r > s \geq 0$. Preostaje još slučaj $r > -s$ za $s \leq 0$. a taj slučaj se može izvesti iz propozicije 3.2.1 na nešto jednostavniji način. Označimo s p' konjugirani eksponent od p, tj. takav realan broj da vrijedi $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$. Vrijedi $(\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n))' = \mathrm{L}^{p'}(\mathbb{R}^n)$. Sličan odnos dualnosti vrijedi i za Soboljevljeve prostore, odnosno za svaki $s \in \mathbb{R}$ vrijedi $(\mathrm{W}^{p,s}(\mathbb{R}^n))' = \mathrm{W}^{p',-s}(\mathbb{R}^n)$. Navedena propozicija vrijedi za $r > s > 0$, što znači da bi po dualnosti mogli dobiti karakterizaciju upravo za one prostore s parametrom $s < 0$ i $r > -s$.

Prije iskaza i dokaza druge karakterizacije treba nam još jedna lema.

Lema 3.2.2. *Neka je $p \in \langle 1, \infty \rangle$ te neka je p' konjugirani eksponent od p. Neka je nadalje $(\omega_I^\epsilon)_{\substack{I \in \mathcal{I} \\ \epsilon \in E}}$ niz pozitivnih realnih brojeva. Označimo s F prostor nizova realnih brojeva $(\alpha_I^\epsilon)_{\substack{I \in \mathcal{I} \\ \epsilon \in E}}$ za koje vrijedi*

$$\left(\sum_{\substack{I \in \mathcal{I} \\ \epsilon \in E}} \left|\alpha_I^\epsilon\right|^2 \omega_I^\epsilon |I|^{-1} \mathbb{1}_I \right)^{\frac{1}{2}} \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)$$

te koji je Banachov prostor uz normu

$$\left\| (\alpha_I^\epsilon)_{\substack{I \in \mathcal{I} \\ \epsilon \in E}} \right\|_F := \left\| \left(\sum_{\substack{I \in \mathcal{I} \\ \epsilon \in E}} \left|\alpha_I^\epsilon\right|^2 \omega_I^\epsilon |I|^{-1} \mathbb{1}_I \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Tada je dualni prostor F' prostora F prostor nizova realnih brojeva $(\beta_I^\epsilon)_{\substack{I \in \mathcal{I} \\ \epsilon \in E}}$ za koje vrijedi

$$\left(\sum_{\substack{I \in \mathcal{I} \\ \epsilon \in E}} \left|\beta_I^\epsilon\right|^2 (\omega_I^\epsilon)^{-1} |I|^{-1} \mathbb{1}_I \right)^{\frac{1}{2}} \in \mathrm{L}^{p'}(\mathbb{R}^n)$$

koji je Banachov uz normu

$$\left\| (\beta_I^\epsilon)_{\substack{I\in\mathcal{I}\\ \epsilon\in E}} \right\|_{F'} := \left\| \left(\sum_{\substack{I\in\mathcal{I}\\ \epsilon\in E}} \left|\beta_I^\epsilon\right|^2 (\omega_I^\epsilon)^{-1} |I|^{-1} \mathbb{1}_I \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{\mathrm{L}^{p'}(\mathbb{R}^n)} .$$

Dokaz. Neka je $\{\psi_I^\epsilon : I \in \mathcal{I}, \epsilon \in E\}$, kao i do sada, ortonormirana valićna baza reda r. Neka su $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcije takve da za sve $x \in \mathbb{R}^n$ vrijedi

$$f(x) = \sum_{\substack{I\in\mathcal{I}\\ \epsilon\in E}} \alpha_I^\epsilon (\omega_I^\epsilon)^{\frac{1}{2}} \psi_I^\epsilon(x), \quad g(x) = \sum_{\substack{I\in\mathcal{I}\\ \epsilon\in E}} \beta_I^\epsilon (\omega_I^\epsilon)^{-\frac{1}{2}} \psi_I^\epsilon(x).$$

Vrijedi

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}dx = \sum_{\substack{I\in\mathcal{I}\\ \epsilon\in E}} \sum_{\substack{I'\in\mathcal{I}\\ \epsilon'\in E}} \alpha_I^\epsilon \overline{\beta_{I'}^{\epsilon'}} (\omega_I^\epsilon)^{\frac{1}{2}} \left(\omega_{I'}^{\epsilon'}\right)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \psi_I^\epsilon(x)\overline{\psi_{I'}^{\epsilon'}(x)}dx = \sum_{\substack{I\in\mathcal{I}\\ \epsilon\in E}} \alpha_I^\epsilon \overline{\beta_I^\epsilon},$$

pri čemu smo koristili Lebesgueov teorem o dominiranoj konvergenciji u slučaju konačnih izraza te svojstva ortonormirane baze u $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$. Po definiciji prostora F i po teoremu 3.1.2 dobivamo je $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)$.

Vrijedi $(\beta_I^\epsilon)_{\substack{I\in\mathcal{I}\\ \epsilon\in E}} \in F'$ ako i samo ako je $\sum_{\substack{I\in\mathcal{I}\\ \epsilon\in E}} \alpha_I^\epsilon \overline{\beta_I^\epsilon} < \infty$. Po gornjem raspisu to vrijedi ako i samo ako je $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}dx < \infty$, a zbog $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)$ ovaj integral je konačan ako i samo ako je $g \in (\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n))' = \mathrm{L}^{p'}(\mathbb{R}^n)$. Zbog definicije funkcije g i teorema 3.1.2, to vrijedi ako i samo ako je $\left(\sum_{\substack{I\in\mathcal{I}\\ \epsilon\in E}} \left|\beta_I^\epsilon\right|^2 (\omega_I^\epsilon)^{-1} |I|^{-1} \mathbb{1}_I \right)^{\frac{1}{2}} \in \mathrm{L}^{p'}(\mathbb{R}^n)$. Time je dokazana karakterizacija dualnog prostora od F navedena u iskazu teorema. □

Propozicija 3.2.3. *Neka je $p \in \langle 1, \infty\rangle$ i $s \in \langle -r, 0]$. Nadalje, neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcija s pripadnim valićnim koeficijentima $\alpha_I^\epsilon := \langle f, \psi_I^\epsilon\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{\psi_I^\epsilon(x)}dx$ za sve $I \in \mathcal{I}$ i za sve $\epsilon \in E$. Tada je $f \in \mathrm{W}^{p,s}(\mathbb{R}^n)$ ako i samo ako vrijedi*

$$\left(\sum_{\substack{I\in\mathcal{I}\\ \epsilon\in E}} \left|\alpha_I^\epsilon\right|^2 \left(1 + |I|^{\frac{2s}{n}}\right)^{-1} |I|^{-1} \mathbb{1}_I \right)^{\frac{1}{2}} \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n) .$$

Dokaz. Primijetimo po propoziciji 3.2.1 da je karakterizacija pripadnosti funkcije f prostoru $\mathrm{W}^{p,s}(\mathbb{R}^n)$ zapravo izražena preko niza koeficijenata $\left(\left|\alpha_I^\epsilon\right|\right)_{\substack{I\in\mathcal{I}\\ \epsilon\in E}}$ umjesto direktno preko niza $(\alpha_I^\epsilon)_{\substack{I\in\mathcal{I}\\ \epsilon\in E}}$. Nadalje, vrijedi $(\mathrm{W}^{p,s}(\mathbb{R}^n))' = \mathrm{W}^{p',-s}(\mathbb{R}^n)$, pa na sličan način pripadnost dualne funkcije g prostoru $\mathrm{W}^{p',-s}(\mathbb{R}^n)$ karakterizirana je pripadnim nizom koeficijenata $(|\beta_I|)_{I\in\mathcal{I}}$; pritom je $\beta_I^\epsilon := \langle g, \psi_I^\epsilon\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x)\overline{\psi_I^\epsilon(x)}dx$ za sve $I \in \mathcal{I}$ i za sve $\epsilon \in E$. Pritom je $\{\psi_I^\epsilon : I \in \mathbb{R}^n, \epsilon \in E\}$ kao baza prostora $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$ dualna sama sebi.

Tvrdnja ove propozicije sada slijedi iz propozicije 3.2.1 uz konjugirani eksponent p' umjesto p i parametar $-s$ umjesto s te iz leme 3.2.2 uz niz brojeva $(\omega_I^\epsilon)_{\substack{I\in\mathcal{I}\\ \epsilon\in E}}$ dan jednakošću $\omega_I^\epsilon := 1 + |I|^{-\frac{2s}{n}}$ za sve $I \in \mathcal{I}$ i $\epsilon \in E$. □

Osvrnimo se na trenutak na propozicije 3.2.1 i 3.2.3. Ove propozicije nisu međusobno disjunktne jer uključuju zajednički parametar $s = 0$, što može predstavljati problem zbog moguće kontradikcije i dva neekvivalentna kriterija. No, uvrštavanjem u obe propozicije dobivamo isti kriterij $\left(\sum\limits_{\substack{I\in\mathcal{I}\\ \epsilon\in E}} \left|\alpha_I^\epsilon\right|^2 \mathbb{1}_I\right)^{\frac{1}{2}} \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)$. Kako je $s = 0$ jedini parametar koji zadovoljava pretpostavke obiju propozicija, one nisu u međusobnoj kontradikciji.

Propozicijama 3.2.1 i 3.2.3 zaključili smo karakterizaciju nehomogenog Soboljevljevog prostora $\mathrm{W}^{p,s}(\mathbb{R}^n)$ za $p \in \langle 1, \infty\rangle$ i za $r > |s|$. Međutim, postoji i još jedan oblik karakterizacije, a koji koristi zapis baze naveden u (1.3), generirane pomoću funkcija $\psi^\epsilon, \epsilon \in E$ i dodatno funkcije ϕ, odnosno pomoću funkcija $\phi_k = \phi(\,\cdot - k)$ za sve $k \in \mathbb{Z}^n$.

Teorem 3.2.4. *Neka je $p \in \langle 1, \infty\rangle$ i $s \in \langle -r, r\rangle$. Nadalje, neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcija s pripadnim koeficijentima $\beta_k := \langle f, \phi_k\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{\phi(x-k)}dx$ za sve $k \in \mathbb{Z}^n$ i $\alpha_I^\epsilon := \langle f, \psi_I^\epsilon\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{\psi_I^\epsilon(x)}dx$ za sve $I \in \mathcal{I}$ za koje je $|I| \leq 1$ i za sve $\epsilon \in E$. Tada je $f \in \mathrm{W}^{p,s}(\mathbb{R}^n)$ ako i samo ako vrijedi*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |\beta_k|^p < \infty \;\; i \;\; \left(\sum_{\substack{I\in\mathcal{I},|I|\leq 1\\ \epsilon\in E}} \left|\alpha_I^\epsilon\right|^2 |I|^{-\frac{2s}{n}-1}\,\mathbb{1}_I\right)^{\frac{1}{2}} \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n).$$

Dokaz. Označimo s $\mathcal{I}_0 := \{I \in \mathcal{I} : |I| = 1\}$. Kao što je i raspisano u tekstu poslije definicije 1.1.1, svaka dijadska kocka $I \in \mathcal{I}$ veličine $|I| \leq 1$ podskup je jedinstvenog elementa familije $\mathcal{I}_0$. Za svaki $R \in \mathcal{I}_0$ definirajmo funkcije $\omega_R := \left(\sum_{\substack{I \in \mathcal{I}, I \subseteq R \\ \epsilon \in E}} \left|\alpha_I^\epsilon\right|^2 |I|^{-\frac{2s}{n}-1} \mathbb{1}_I \right)^{\frac{1}{2}}$ i $\sigma_R := \sum_{\substack{I \in \mathcal{I}, I \subseteq R \\ \epsilon \in E}} \alpha_I^\epsilon \psi_I^\epsilon$.

Pretpostavimo da je $s \geq 0$. Po propoziciji 3.2.1 norma funkcije σ_R u prostoru $\mathrm{W}^{p,s}(\mathbb{R}^n)$ ekvivalentna je normi izraza $\left(\sum_{\substack{I \in \mathcal{I}, I \subseteq R \\ \epsilon \in E}} \left|\alpha_I^\epsilon\right|^2 \left(1 + |I|^{-\frac{2s}{n}}\right) |I|^{-1} \mathbb{1}_I \right)^{\frac{1}{2}}$ u prostoru $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)$. No, kako je $I \subseteq R$, vrijedi $|I| \leq |R| = 1$, a onda i $|I|^{-\frac{2s}{n}} \geq 1$. Prema tome, $1 + |I|^{-\frac{2s}{n}} \leq 2|I|^{-\frac{2s}{n}} \leq 2\left(1 + |I|^{-\frac{2s}{n}}\right)$. Zaključujemo da je norma od $\left(\sum_{\substack{I \in \mathcal{I}, I \subseteq R \\ \epsilon \in E}} \left|\alpha_I^\epsilon\right|^2 \left(1 + |I|^{-\frac{2s}{n}}\right) |I|^{-1} \mathbb{1}_I \right)^{\frac{1}{2}}$ u prostoru $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)$ ekvivalentna $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)$ normi izraza $\left(\sum_{\substack{I \in \mathcal{I}, I \subseteq R \\ \epsilon \in E}} \left|\alpha_I^\epsilon\right|^2 |I|^{-\frac{2s}{n}-1} \mathbb{1}_I \right)^{\frac{1}{2}}$, odnosno $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)$ normi od ω_R.

Nadalje, promotrimo li na trenutak zapis funkcije f isključivo pomoću baznih elemenata ψ_I^ϵ za $I \in \mathcal{I}, |I| \leq 1$ i $\epsilon \in E$ (dakle, bez dijela izraženog pomoću funkcija $\phi_k, k \in \mathbb{Z}^n$), primijetimo da je po propoziciji 3.2.1 norma funkcije $f|_R$ u prostoru $\mathrm{W}^{p,s}(\mathbb{R}^n)$ ekvivalentna normi funkcije σ_R (zato što su ekvivalentne $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)$ normi istog izraza). Zbog $\|f\|_{\mathrm{W}^{p,s}(\mathbb{R}^n)}^p = \sum_{R \in \mathcal{I}_0} \|f|_R\|_{\mathrm{W}^{p,s}(\mathbb{R}^n)}^p$ vrijedi da je $\mathrm{W}^{p,s}(\mathbb{R}^n)$ norma od f ekvivalentna s $\left(\sum_{R \in \mathcal{I}_0} \|\sigma_R\|_{\mathrm{W}^{p,s}(\mathbb{R}^n)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$, odnosno s

$$\left(\sum_{R \in \mathcal{I}_0} \|\omega_R\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)}^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{R \in \mathcal{I}_0} \left\| \left(\sum_{\substack{I \in \mathcal{I}, I \subseteq R \\ \epsilon \in E}} \left|\alpha_I^\epsilon\right|^2 |I|^{-\frac{2s}{n}-1} \mathbb{1}_I \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$
$$= \left\| \left(\sum_{\substack{I \in \mathcal{I}, |I| \leq 1 \\ \epsilon \in E}} \left|\alpha_I^\epsilon\right|^2 |I|^{-\frac{2s}{n}-1} \mathbb{1}_I \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)},$$

pri čemu smo u posljednjem koraku koristili činjenicu da izrazi pod normom imaju nosače $\overline{R}$ za $R \in \mathcal{I}_0$, a to su međusobno disjunktni skupovi do na skup Lebesgueove mjere nula.

Za ekvivalenciju s uvjetom navedenom u iskazu teorema potrebno je još odrediti uvjete na niz koeficijenata $(\beta_k)_{k\in\mathbb{Z}^n}$. No, zbog invarijantnosti Lebesgueovog integrala obzirom na translaciju vrijedi $\|\phi_k\|_{\mathrm{W}^{p,s}(\mathbb{R}^n)} = \|\phi\|_{\mathrm{W}^{p,s}(\mathbb{R}^n)}$ za sve $k \in \mathbb{Z}^n$ (koristi se definicija Soboljevljevog prostora $\mathrm{W}^{p,s}(\mathbb{R}^n)$ te prva jednakost iz leme 2.1.2). Pritom, $\phi \in \mathrm{W}^{p,s}(\mathbb{R}^n)$ obzirom da je $\partial^\alpha\phi \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$ i s kompaktnim nosačem za sve $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ za koje je $|\alpha| = r$. Uz to, $\left\|\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\beta_k\phi_k\right\|^p_{\mathrm{W}^{p,s}(\mathbb{R}^n)}$ je ekvivalentno s $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\|\beta_k\phi_k\|^p_{\mathrm{W}^{p,s}(\mathbb{R}^n)} = \|\phi\|^p_{\mathrm{W}^{p,s}(\mathbb{R}^n)}\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}|\beta_k|^p$. Dakle, $f \in \mathrm{W}^{p,s}(\mathbb{R}^n)$ je ekvivalentno već izvedenom uvjetu te dodatno uvjetu $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}|\beta_k|^p < \infty$.

Time smo dokazali ovaj teorem u slučaju $s \geq 0$. U slučaju $s \leq 0$ dokaz je analogan uz korištenje propozicije 3.2.3. □

3.3 Homogeni Soboljevljevi prostori

Preostaje nam još karakterizacija homogenih Soboljevljevih prostora $\mathring{\mathrm{W}}^{p,s}(\mathbb{R}^n)$ za $p \in \langle 1, \infty\rangle$ i $s \in \langle -r, r\rangle$. Za ove prostore promatramo karakterizaciju temperiranih distribucija $F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ s dodatnim pretpostavkama koje omogućuju sami dokaz. Uz već navedenu pretpostavku $|s| < r$, potrebno je da je F distrubucija reda manjeg ili jednakog od r. Uz to, konvergenciju reda $\sum_{\substack{I\in\mathcal{I}\\ \epsilon\in E}}\alpha_I^\epsilon\psi_I^\epsilon$ prema distribuciji F promatramo u topološkom prostoru distribucija u slučaju kada je $s < \frac{n}{p}$, dok u slučaju kada je $\frac{n}{p} + m \leq s < \frac{n}{p} + m + 1$ za neki $m \in \mathbb{N}_0$ konvergenciju promatramo u kvocijetnom prostoru distribucijskog prostora po prostoru polinoma stupnja manjeg ili jednakog od m.

Još jedna nejasnoća u interpretaciji problema jest vrijednost koeficijenta $\alpha_I^\epsilon = \langle F, \psi_I^\epsilon\rangle$ za $I \in \mathcal{I}$ i $\epsilon \in E$, budući da F nije funkcijsko preslikavanje (u kojem slučaju je ovo obični skalarni produkt u $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$, odnosno $\int_{\mathbb{R}^n} F(x)\overline{\psi_I^\epsilon(x)}dx$) nego općeniti antilinearni funkcional nad prostorom funkcija iz $\mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. U tom slučaju definiramo $\langle F, \varphi\rangle := F(\varphi)$ za sve $\varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dodatno, kako je F distribucija reda $m' \leq r$, po propoziciji 3.1, odjeljak 7.3A iz knjige [7] može se na jedinstven način proširiti do antilinearnog funkcionala na prostoru $\mathrm{C}_c^{m'}(\mathbb{R}^n)$, a u tom slučaju moguće je po teoremu 1.3.3 odabrati ortonormirani valićni sistem $\{\psi_I^\epsilon : I \in \mathcal{I}, \epsilon \in E\} \subseteq \mathrm{C}_c^{m'}(\mathbb{R}^n)$. Tada ima smisla promatrati $F(\psi_I^\epsilon)$ za sve $I \in \mathcal{I}$ i $\epsilon \in E$ i u tom slučaju dobro je definiran koeficijent $\alpha_I^\epsilon := \langle F, \psi_I^\epsilon\rangle = F(\psi_I^\epsilon)$.

S ovim pretpostavkama moguće je pokazati sljedeći rezultat:

Teorem 3.3.1. *Neka je $p \in \langle 1, \infty\rangle$ i $s \in \langle -r, r\rangle$. Neka je nadalje F temperirana distribucija reda manjeg ili jednakog od r s pripadnim valićnim koeficijentima $\alpha_I^\epsilon := \langle F, \psi_I^\epsilon\rangle = F(\psi_I^\epsilon)$*

za sve $I \in \mathcal{I}$ i za sve $\epsilon \in E$. Tada F pripada prostoru $\mathring{\mathrm{W}}^{p,s}(\mathbb{R}^n)$ ako i samo ako vrijedi

$$\left(\sum_{\substack{I \in \mathcal{I} \\ \epsilon \in E}} \left| \alpha_I^\epsilon \right|^2 |I|^{-1-\frac{2s}{n}} \mathbb{1}_I \right)^{\frac{1}{2}} \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n).$$

Dokaz. Dokaz ovog teorema je analogan dokazu teorema 3.2.4 uz iznimku što promatramo koeficijente α_I^ϵ za sve $I \in \mathcal{I}$ i $\epsilon \in E$, a ne samo dijadske kocke za koje je $|I| \leq 1$. Točnije, promatramo koeficijente uz članove ortonormirane baze kao u (1.2) umjesto ortonormirane baze sa zapisom kao u (1.3). Naime, fiksiramo $j \in \mathbb{Z}$ te postupak provodimo uz kocke $R \in \mathcal{I}$ za koje je $|R| = 2^{-j}$. Norma u prostoru $\mathring{\mathrm{W}}^{p,s}(\mathbb{R}^n)$ distribucije F ekvivalentna je $\sum_{\substack{R \in \mathcal{I} \\ |R| = 2^{-j}}} \|\sigma_R\|_{\mathring{\mathrm{W}}^{p,s}(\mathbb{R}^n)}$. Za svaki takav R $\mathring{\mathrm{W}}^{p,s}(\mathbb{R}^n)$ norma od σ_R ekvivalentna je, koristeći definiciju prostora $\mathring{\mathrm{W}}^{p,s}(\mathbb{R}^n)$ te raspis u propoziciji 3.2.1 počevši od (3.1) na dalje, ekvivalentna je $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)$ normi izraza $\left(\sum_{\substack{I \in \mathcal{I}, I \subseteq R \\ \epsilon \in E}} \left| \alpha_I^\epsilon \right|^2 |I|^{-\frac{2s}{n}-1} \mathbb{1}_I \right)^{\frac{1}{2}}$. Nastavljamo slično kao u dokazu teorema 3.2.4 te dobivamo da je $F \in \mathring{\mathrm{W}}^{p,s}(\mathbb{R}^n)$ ako i samo ako je $\left(\sum_{\substack{I \in \mathcal{I}, |I| \leq 2^{-j} \\ \epsilon \in E}} \left| \alpha_I^\epsilon \right|^2 |I|^{-\frac{2s}{n}-1} \mathbb{1}_I \right)^{\frac{1}{2}} \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)$ i to vrijedi za sve $j \in \mathbb{Z}$. Nadalje, $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)$ norma od

$$\left(\sum_{\substack{I \in \mathcal{I} \\ \epsilon \in E}} \left| \alpha_I^\epsilon \right|^2 |I|^{-\frac{2s}{n}-1} \mathbb{1}_I \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{\substack{I \in \mathcal{I}, |I| \leq 2^{-j} \\ \epsilon \in E}} \left| \alpha_I^\epsilon \right|^2 |I|^{-\frac{2s}{n}-1} \mathbb{1}_I + \sum_{\substack{I \in \mathcal{I}, |I| > 2^{-j} \\ \epsilon \in E}} \left| \alpha_I^\epsilon \right|^2 |I|^{-\frac{2s}{n}-1} \mathbb{1}_I \right)^{\frac{1}{2}}$$

zbog leme 2.3.1 ekvivalentna je $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)$ normi od

$$\left(\sum_{\substack{I \in \mathcal{I}, |I| \leq 2^{-j} \\ \epsilon \in E}} \left| \alpha_I^\epsilon \right|^2 |I|^{-\frac{2s}{n}-1} \mathbb{1}_I \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{\substack{I \in \mathcal{I}, |I| > 2^{-j} \\ \epsilon \in E}} \left| \alpha_I^\epsilon \right|^2 |I|^{-\frac{2s}{n}-1} \mathbb{1}_I \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{3.2}$$

a uz to vrijedi

$$\left\| \left(\sum_{\substack{I \in \mathcal{I}, |I| > 2^{-j} \\ \epsilon \in E}} \left| \alpha_I^\epsilon \right|^2 |I|^{-\frac{2s}{n}-1} \mathbb{1}_I \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)} \longrightarrow 0$$

kada $j \to -\infty$. Prema tome, postoji $j \in \mathbb{Z}$ za koji je

$$\left(\sum_{\substack{I \in \mathcal{I}, |I| > 2^{-j} \\ \epsilon \in E}} \left| \alpha_I^\epsilon \right|^2 |I|^{-\frac{2s}{n} - 1} \mathbb{1}_I \right)^{\frac{1}{2}} \in \mathrm{L}^p \left(\mathbb{R}^n \right).$$

Puštanjem $j \longrightarrow -\infty$ u (3.2) slijedi tvrdnja teorema. □

3.4 Pregled karakterizacija

Karakterizacije koje su izvedene u ovom poglavlju navedene su u tablicama 3.1 i 3.2. U prvoj tablici zapisujemo karakterizacije istom notacijom i oznakama kako smo ih iskazali u odgovarajućim propozicijama i teoremima. Druga tablica koristi alternativnu notaciju. Naime, svaka dijadska kocka I jednoznačno se može zapisati u obliku $\left[2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)\right\rangle$, pri čemu su $j \in \mathbb{Z}$ i $k \in \mathbb{Z}^n$. U tom slučaju volumen te dijadske kocke je $|I| = 2^{-nj}$. Uvedemo li alternativnu oznaku $\alpha_{j,k}^\epsilon := \alpha_I^\epsilon$ za sve $\epsilon \in E$, dobivamo karakterizaciju pomoću sume s parametrima $j \in \mathbb{Z}$ i $k \in \mathbb{Z}^n$.

Primijetimo da valićna karakterizacija Lebesgueovog prostora $\mathrm{L}^p \left(\mathbb{R}^n \right)$ vrijedi samo za $p \in \langle 1, \infty \rangle$. Zbog problema vezanog uz jednakost 1.2 ne možemo ponuditi sličnu karakterizaciju za prostore $\mathrm{L}^1 \left(\mathbb{R}^n \right)$ i $\mathrm{L}^\infty \left(\mathbb{R}^n \right)$. Međutim, može se pokazati da je norma u prostoru $\mathrm{L}^1 \left(\mathbb{R}^n \right)$ (dakle, za $p = 1$) istog izraza upravo valićna karakterizacija Hardyjevog prostora $\mathrm{H}^1 \left(\mathbb{R}^n \right)$ kojeg smo naveli u definiciji 2.3.5.

funkcijski prostor	ekvivalentna norma
$\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)$, $p \in \langle 1, \infty \rangle$	$\Big\Vert \Big(\sum_{\substack{I \in \mathcal{I} \\ \epsilon \in E}} \big\vert \alpha_I^\epsilon \big\vert^2 \vert I \vert^{-1} \mathbb{1}_I \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\Vert_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)}$
$\mathrm{H}^1(\mathbb{R}^n)$	$\Big\Vert \Big(\sum_{\substack{I \in \mathcal{I} \\ \epsilon \in E}} \big\vert \alpha_I^\epsilon \big\vert^2 \vert I \vert^{-1} \mathbb{1}_I \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\Vert_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)}$
$\mathrm{W}^{p,s}(\mathbb{R}^n)$, $p \in \langle 1, \infty \rangle$, $s \in [0, r\rangle$	$\Big\Vert \Big(\sum_{\substack{I \in \mathcal{I} \\ \epsilon \in E}} \big\vert \alpha_I^\epsilon \big\vert^2 \Big(1 + \vert I \vert^{-\frac{2s}{n}}\Big) \vert I \vert^{-1} \mathbb{1}_I \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\Vert_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)}$
$\mathrm{W}^{p,s}(\mathbb{R}^n)$, $p \in \langle 1, \infty \rangle$, $s \in \langle -r, 0]$	$\Big\Vert \Big(\sum_{\substack{I \in \mathcal{I} \\ \epsilon \in E}} \big\vert \alpha_I^\epsilon \big\vert^2 \Big(1 + \vert I \vert^{\frac{2s}{n}}\Big)^{-1} \vert I \vert^{-1} \mathbb{1}_I \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\Vert_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)}$
$\mathrm{W}^{p,s}(\mathbb{R}^n)$, $p \in \langle 1, \infty \rangle$, $s \in \langle -r, r\rangle$	$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \vert \beta_k \vert^p < \infty$ i $\Big\Vert \Big(\sum_{\substack{I \in \mathcal{I}, \vert I \vert \leq 1 \\ \epsilon \in E}} \big\vert \alpha_I^\epsilon \big\vert^2 \big\vert I \big\vert^{-\frac{2s}{n}-1} \mathbb{1}_I \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\Vert_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)}$
$\mathring{\mathrm{W}}^{p,s}(\mathbb{R}^n)$, $p \in \langle 1, \infty \rangle$, $s \in \langle -r, r\rangle$	$\Big\Vert \Big(\sum_{\substack{I \in \mathcal{I} \\ \epsilon \in E}} \big\vert \alpha_I^\epsilon \big\vert^2 \vert I \vert^{-\frac{2s}{n}-1} \mathbb{1}_I \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\Vert_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)}$

Tablica 3.1: Karakterizacija funkcijskih prostora pomoću valićnih koeficijenata uz parametre $I \in \mathcal{I}, \epsilon \in E$.

funkcijski prostor	ekvivalentna norma
$\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)$, $p \in \langle 1, \infty\rangle$	$\Big\\|\Big(\sum_{\substack{j\in\mathbb{Z},k\in\mathbb{Z}^n\\ \epsilon\in E}} \big\lvert\alpha_{j,k}^{\epsilon}\big\rvert^2 2^{nj}\mathbb{1}_{2^{-j}[k,k+1\rangle}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big\\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)}$
$\mathrm{H}^1(\mathbb{R}^n)$	$\Big\\|\Big(\sum_{\substack{j\in\mathbb{Z},k\in\mathbb{Z}^n\\ \epsilon\in E}} \big\lvert\alpha_{j,k}^{\epsilon}\big\rvert^2 2^{nj}\mathbb{1}_{2^{-j}[k,k+1\rangle}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big\\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)}$
$\mathrm{W}^{p,s}(\mathbb{R}^n)$, $p \in \langle 1, \infty\rangle, s \in [0, r\rangle$	$\Big\\|\Big(\sum_{\substack{j\in\mathbb{Z},k\in\mathbb{Z}^n\\ \epsilon\in E}} \big\lvert\alpha_{j,k}^{\epsilon}\big\rvert^2 \big(1+4^{sj}\big)2^{nj}\mathbb{1}_{2^{-j}[k,k+1\rangle}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big\\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)}$
$\mathrm{W}^{p,s}(\mathbb{R}^n)$, $p \in \langle 1, \infty\rangle, s \in \langle -r, 0]$	$\Big\\|\Big(\sum_{\substack{j\in\mathbb{Z},k\in\mathbb{Z}^n\\ \epsilon\in E}} \big\lvert\alpha_{j,k}^{\epsilon}\big\rvert^2 \big(1+4^{-sj}\big)^{-1}2^{nj}\mathbb{1}_{2^{-j}[k,k+1\rangle}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big\\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)}$
$\mathrm{W}^{p,s}(\mathbb{R}^n)$, $p \in \langle 1, \infty\rangle, s \in \langle -r, r\rangle$	$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \lvert\beta_k\rvert^p < \infty$ i $\Big\\|\Big(\sum_{\substack{j\in\mathbb{Z},j\geq 0\\ k\in\mathbb{Z}^n\\ \epsilon\in E}} \big\lvert\alpha_{j,k}^{\epsilon}\big\rvert^2 2^{(2s+n)j}\mathbb{1}_{2^{-j}[k,k+1\rangle}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big\\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)}$
$\mathring{\mathrm{W}}^{p,s}(\mathbb{R}^n)$, $p \in \langle 1, \infty\rangle, s \in \langle -r, r\rangle$	$\Big\\|\Big(\sum_{\substack{j\in\mathbb{Z},k\in\mathbb{Z}^n\\ \epsilon\in E}} \big\lvert\alpha_{j,k}^{\epsilon}\big\rvert^2 2^{(2s+n)j}\mathbb{1}_{2^{-j}[k,k+1\rangle}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big\\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)}$

Tablica 3.2: Karakterizacija funkcijskih prostora pomoću valićnih koeficijenata uz parametre $j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^n, \epsilon \in E$.

Bibliografija

[1] D. L. Cohn, *Measure Theory*, Birkhäuser Advanced Texts, Springer, New York, 2013.

[2] R. Coifman i Y. Meyer, *Wavelets: Calderón-Zygmund and multilinear operators*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 48, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[3] I. Daubechies, *Ten Lectures on Wavelets*, CBMS-NSF Regional Conf. Series Appl. Math., SIAM, Philadelphia, 1992.

[4] C. Fefferman i E. M. Stein, *hsp spaces of several variables*, Acta Math. 129 (1972), 137–193.

[5] G. B. Folland, *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, John Wiley and Sons, New York, 1999.

[6] E. Hernández i G. Weiss, *A First Course on Wavelets*, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Boca Raton, 1996.

[7] F. Hirsch i G. Lacombe, *Elements of Functional Analysis*, Graduate Texts in Mathematics 192, Springer, New York, 1999.

[8] Y. Meyer, *Wavelets and Operators*, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

[9] N. Sarapa, *Teorija vjerojatnosti*, Školska knjiga, Zagreb, 2002.

[10] E. M. Stein, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton Mathematical Series 30, Princeton University Press, Princeton, 1970.

[11] A. Zygmund, *Trigonometric Series, Second Edition*, Cambridge University Press, Cambridge, 1968.

Sažetak

Ovaj rad bavi se dokazima karakterizacije nehomogenih i homogenih Soboljevljevih prostora izražene preko koeficijenata funkcije ili općenitije distribucije u prikladnoj valićnoj bazi.

Uz uvođenje pojmova valićne baze i Soboljevljevih prostora definiraju se još neki osnovni objekti te navode rezultati i dokazi potrebni za rad.

Navodi se iskaz i dokaz karakterizacije Lebesgueovog prostora $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)$. Uz taj rezultat dokazuju se karakterizacije nehomogenog Soboljevljevog prostora $\mathrm{W}^{p,s}(\mathbb{R}^n)$ izražene preko koeficijenata dva tipa valićnih sistema, a zatim i karakterizacija homogenog Soboljevljevog prostora $\mathring{\mathrm{W}}^{p,s}(\mathbb{R}^n)$.

Summary

This thesis deals with the proofs of characterizations of inhomogeneous and homogeneous Sobolev spaces expressed through the coefficients of a function, or in general a distribution, in an appropriate wavelet basis.

Along with the introduction of notions of a wavelet basis and Sobolev spaces, some other basic objects are defined and the results and proofs needed in the thesis are given.

The statement and the proof of the characterization of the Lebesgue space $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)$ is given. Along with that result the characterizations of inhomogeneous Sobolev space $\mathrm{W}^{p,s}(\mathbb{R}^n)$ expressed through coefficients in two types of wavelet systems are established and then also the characterization of the homogeneous Sobolev space $\mathring{\mathrm{W}}^{p,s}(\mathbb{R}^n)$ is given.

Životopis

Mario Stipčić rođen je 17. travnja 1991. godine u Splitu. Pohađao je Osnovnu školu Majstora Radovana u Trogiru, a poslije je upisao III. gimnaziju u Splitu. Tijekom osnovne i srednje škole sudjelovao je na raznim natjecanjima iz matematike, informatike i logike na kojima je često osvajao nagrade.

2010. godine upisao je Preddiplomski sveučilišni studij matematike na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu, a 2013. godine na istom odsjeku i fakultetu upisao je Diplomski studij Teorijska matematika. Pri završetku oba studija dobio je nagradu Matematičkog odsjeka za najuspješnijeg studenta završnih godina studija.

Tijekom studija radio je kao demonstrator iz niza kolegija. Dobitnik je Rektorove nagrade za akademsku godinu 2014./2015. godine za rad "Primjene slučajnih dijadskih sistema na dekompozicije funkcija i operatora" koji je pisao zajedno s kolegicom s iste godine i studija.

Za vrijeme preddiplomskog studija član je udruge Mladih nadarenih matematičara "Marin Getaldić" u kojoj je djelovao kao jedan od glavnih organizatora srednjoškolskog natjecanja "Turnir gradova" za grad Zagreb. Tijekom studija volontira držeći besplatne instrukcije iz matematike za osnovnu i srednju školu u crkvi Sveta Mati Slobode.