

# Stacionarnost GARCH procesa i primjene

---

**Stojanović, Daniel**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2016**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:337869>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-02-08**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Daniel Stojanović

**STACIONARNOST GARCH PROCESA I  
PRIMJENE**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
prof.dr.sc.Siniša Slijepčević

Zagreb, lipanj, 2016.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

# Sadržaj

<b>Sadržaj</b>	<b>iii</b>
<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>1 Analiza vremenskih nizova</b>	<b>2</b>
1.1 Slučajni procesi . . . . .	2
1.2 Stacionarnost vremenskih nizova . . . . .	3
1.3 Trend i sezonalnost . . . . .	5
1.4 Autokovarijacijska funkcija . . . . .	10
1.5 ARMA modeli . . . . .	12
1.6 Financijski vremenski nizovi . . . . .	13
<b>2 GARCH procesi</b>	<b>18</b>
2.1 Definicije . . . . .	18
2.2 Stacionarnost . . . . .	21
2.3 Asimetrični GARCH modeli . . . . .	28
<b>3 Primjena</b>	<b>30</b>
3.1 VaR . . . . .	30
3.2 Zaključak . . . . .	40
<b>Bibliografija</b>	<b>41</b>

# Uvod

Rad se bavi proučavanjem GARCH(p,q) procesa kao važnih alata analize financijskih vremenskih nizova. Promatra se stacionarnost (u slabom i jakom smislu) kao ključan pojam kod same analize. Financijski svijet jedan je od najbogatijih izvora vremenskih nizova zbog visoke frekvencije prikupljanja podataka s obzirom na stalno praćenje cijena dionica ili kretanja kamatnih stopa. U financijskom svijetu velika je želja za predviđanjem budućih kretanja cijena ili kamatnih stopa. Iz tog razloga se pojavljuje i potreba za pronalaženjem odgovarajućih modela kojima bi se takvi nizovi mogli opisivati. U ovom se radu najprije daje pregled najbitnijih koncepata analize općenitih vremenskih nizova te bitni primjeri modela koji se u analizi uobičajeno koriste. Poseban se naglasak stavlja na važnost stacionarnosti nizova i mogućnosti predviđanja budućih putanja samih nizova. Predstavljaju se i posebnosti financijskih vremenskih nizova (posebice dnevnih cijena i povrata dionica) te se objašnjava značaj GARCH procesa u njihovom modeliranju. U drugom poglavlju dane su definicije te se obrađuju najbitniji teorijski rezultati vezani uz stacionarnost GARCH procesa, najprije za jednostavni GARCH(1,1) slučaj, a potom i za općeniti GARCH(p,q) slučaj. Za kraj, u 3. poglavlju dan je primjer primjene GARCH procesa u modeliranju vremenskih nizova, odnosno u predviđanju rizika kod trgovanja financijskim instrumentima. Pomoću programskog jezika R, u zadnjem se poglavlju procjenjuju Value-at-Risk vrijednosti za dva dionička burzovna indeksa, korištenjem nekoliko različitih modela i metoda.

# Poglavlje 1

## Analiza vremenskih nizova

**Vremenski niz** je skup opažanja ( $x_t$ ) zabilježenih u vremenskim trenucima  $t$  iz skupa vremena  $T_0$ . Vremenski niz u diskretnom vremenu je vremenski niz u kojem je skup vremena u kojima opažamo ( $T_0$ ) diskretan. Najčešće je  $T_0 = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$  ili  $\{1, 2, 3, \dots\}$ . U ovom radu bavimo se upravo diskretnim vremenskim nizovima i njihovom analizom.

Analiza vremenskih nizova temelji se na nekoliko osnovnih pojmova poput stacionarnosti, sezonalnosti, trenda i autokorelacije. Cilj je analize vremenskih nizova odabrati vjerojatnosni model koji najbolje opisuje podatke te ga kasnije iskoristiti kao podlogu za širok spektar zaključaka –pokušaje predviđanja budućih vrijednosti vremenskog niza, razdvajanje utjecaja sezonalnosti od trenda i slično. U prvom poglavlju dan je pregled najbitnijih koncepata i modela za analizu vremenskih nizova.

### 1.1 Slučajni procesi

Prvi korak u analizi traženje je prigodne klase matematičkih modela za opisivanje podataka. Kako bi uzeli u obzir i moguću nepredvidivost budućih vrijednosti, svako opažanje  $x_t$  promatramo kao realizaciju neke slučajne varijable  $X_t$ . Prema tome, naše podatke (vremenski niz  $\{x_t, t \in T_0\}$ ) želimo modelirati kao realizaciju familije slučajnih varijabli  $\{X_t, t \in T_0\}$ . Zato koristimo slučajne procese  $\{X_t, t \in T\}$  za  $T \supseteq T_0$ .

**Definicija 1.1.1.** *Slučajni proces* je familija slučajnih varijabli  $\{X_t, t \in T\}$  definirana na vjerojatnosnom prostoru  $\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}$

**Definicija 1.1.2.** *Funkcije*  $\{X_t(\omega), \omega \in \Omega\}$  na  $T$  nazivamo realizacijom procesa  $\{X_t, t \in T\}$ .

**Napomena 1.1.3.** *Pojam vremenski niz često ćemo koristiti i za podatke i za proces čija su realizacija.*

## 1.2 Stacionarnost vremenskih nizova

Stacionarnost je ključan pojam u promatranju vremenskih nizova jer služi kao prirodna zamjena za klasičnu pretpostavku o nezavisnosti i jednakoj distribuiranosti koja se koristi u standardnoj statistici. Najprije dajemo nekoliko definicija koje će nam pomoći u formalnom definiranju stacionarnosti.

**Definicija 1.2.1.** *Neka je  $\{X_t, t \in T\}$  slučajni proces za koji vrijedi  $\text{Var}(X_t) < \infty$  za svaki  $t \in T$ . Autokovarijacijska funkcija (ACVF)  $\gamma_X(\cdot, \cdot)$  od  $\{X_t\}$  definirana je sa*

$$\gamma_X(r, s) = \text{Cov}(X_r, X_s) = \mathbb{E}[(X_r - \mathbb{E}X_r)(X_s - \mathbb{E}X_s)], \quad r, s \in T$$

**Definicija 1.2.2.** *Kažemo da je vremenski niz  $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$  (slabo) stacionaran ako vrijedi:*

- (i)  $\mathbb{E}|X_t|^2 < \infty$ , za sve  $t \in \mathbb{Z}$
- (ii)  $\mathbb{E}X_t = m$ , za sve  $t \in \mathbb{Z}$
- (iii)  $\gamma_X(r, s) = \gamma_X(r + t, s + t)$ , za sve  $r, s, t \in \mathbb{Z}$ .

*Za niz kažemo da je **strogo (jako) stacionaran** ako su zajedničke distribucije od  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_k})$  i  $(X_{t_1+h}, \dots, X_{t_k+h})$  jednake za svaki pozitivan cijeli broj  $k$  i za sve  $t_1, t_2, \dots, t_k, h \in \mathbb{Z}$ .*

**Napomena 1.2.3.** *Ako je  $\{X_t\}$  jako stacionaran i  $\mathbb{E}[X_t^2] < \infty$  za svaki  $t$ , onda je  $\{X_t\}$  i slabo stacionaran. Obrnuta tvrdnja ne mora vrijediti, odnosno svaki slabo stacionaran vremenski niz ne mora biti jako stacionaran. Ipak, ako je  $\{X_t, t \in T\}$  **gausovski proces**, tj. za proizvoljne  $t_1, \dots, t_n \in T$ , slučajni vektor  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$  ima multivarijantnu normalnu razdiobu, i slabo stacionaran, onda je i jako stacionaran.*

**Napomena 1.2.4.** *Kada koristimo funkciju  $\gamma_X$  za (slabo) stacionaran niz, možemo ju promatrati kao funkciju jedne varijable,*

$$\gamma_X(h) := \gamma_X(h, 0) = \gamma_X(t + h, t)$$

za sve  $t, h \in \mathbb{Z}$ .

Takvu izmijenjenu definiciju autokovarijacijske funkcije iskoristit ćemo kako bi definirali autokorelacijsku funkciju.

**Definicija 1.2.5.** *Za vremenski niz  $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$  **autokorelacijska funkcija** (ACF) s pomakom  $h$  definirana je sa*

$$\rho_X(h) = \frac{\gamma_X(h)}{\gamma_X(0)} = \text{Cov}(X_{t+h}, X_t)$$

za sve  $t, h \in \mathbb{Z}$ .

## Primjeri vremenskih nizova

Stacionarnost i izostanak iste prikazat ćemo i na nekoliko primjera vremenskih nizova. Za početak, definiramo klasu procesa koja je vrlo bitna za analizu vremenskih nizova.

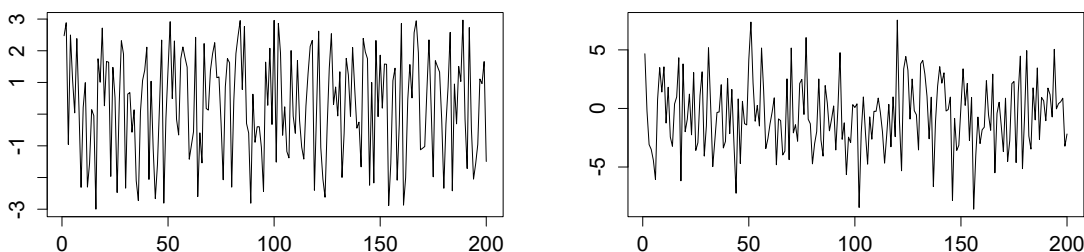
**Definicija 1.2.6.** Proces  $\{Z_t, t \in T\}$  nazivamo **bijeli šum** ako vrijedi:

$$(i) \mathbb{E}Z_t = 0, \quad \text{za sve } t \in T$$

$$(ii) \gamma_Z(h) = \begin{cases} \sigma^2; & h = 0 \\ 0; & h \neq 0 \end{cases}$$

U oznaci,  $\{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$ . Proces je **jaki bijeli šum** ako su  $Z_t$  i  $Z_{t+h}$  nezavisne i jednako distribuirane za sve  $h \in \mathbb{Z}$

**Primjer 1.2.7.** Bijeli šum najpoznatiji je primjer stacionarnog procesa. Na slici 1.1 prikazana su dva primjera bijelog šuma.



(a) Realizacija slučajnih varijabli  $X_i \sim U([-3, 3])$  (b) Realizacija slučajnih varijabli  $Y_i \sim N(0, 3)$

Slika 1.1: Primjeri bijelog šuma

**Definicija 1.2.8.** Neka su  $X_i, i = 1, 2, \dots$  nezavisne i jednako distribuirane slučajne varijable. Vremenski niz  $\{S_n, n \geq 0\}$  definiran sa

$$S_0 = 0, S_n = S_{n-1} + X_n, \quad n \geq 1$$

naziva se **slučajna šetnja**.

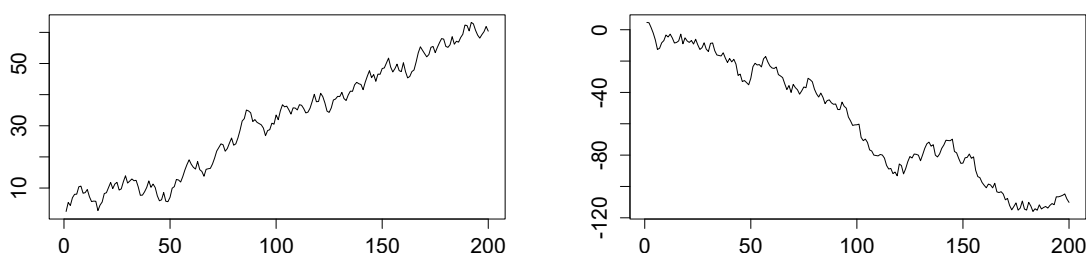
**Primjer 1.2.9.** Uzmimo sada bijeli šum  $\{X_i\}$  prikazan na slici 1.1a te konstruirajmo pomoću njega slučajnu šetnju  $\{S_n\}$ . Dakle,  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ , gdje su  $X_i, i = 1, 2, \dots$  nezavisne



*i jednako distribuirane slučajne varijable sa očekivanjem 0 i varijancom  $\sigma^2 = 3$ . Za  $h > 0$ ,*

$$\begin{aligned} \text{Cov}(S_{t+h}, S_t) &= \text{Cov}\left(\sum_{i=1}^{t+h} X_i, \sum_{j=1}^t X_j\right) \\ &= \text{Cov}\left(\sum_{i=1}^t X_i, \sum_{j=1}^t X_j\right) \\ &= \sigma^2 t = 3t \end{aligned}$$

*Vidimo da kovarijanca niza ovisi o trenutku  $t$  iz čega zaključujemo da niz nije stacionaran. Na sljedećim slikama vidimo primjere nestacionarnih nizova, slučajnih šetnji definiranih pomoću nizova korištenih u primjeru 1.2.7.*



Slika 1.2: Primjeri slučajnih šetnji

### 1.3 Trend i sezonalnost

Prvi korak u analizi vremenskog niza je uvijek grafički prikaz podataka. Ako postoje jasne nepravilnosti u nizu, podatke možemo prikazati kao realizaciju procesa

$$X_t = m_t + s_t + Y_t, \quad (1.1)$$

gdje je  $m_t$  funkcija koju nazivamo *komponentom trenda*,  $s_t$  funkcija sa periodom  $d$  koju nazivamo *sezonalnom komponentom*, a  $Y_t$  *komponenta slučajnog šuma* koja je slabo stacionarna. Cilj je procijeniti i izdvojiti determinističke komponente ( $m_t$  i  $s_t$ ) u nadi da će rezidualni dio ( $Y_t$ ) biti stacionaran slučajni proces kojeg možemo modelirati.

## Uklanjanje trenda

U ovom pododjeljku predstavljene su 3 metode procjene trenda u modelu. U odsutnosti sezonalne komponente ( $s_t = 0$ ), (1.1) postaje

$$X_t = m_t + Y_t, \quad t = 1, \dots, n \quad (1.2)$$

gdje možemo, bez smanjenja općenitosti, pretpostaviti da je  $\mathbb{E}Y_t = 0$ .

**Metoda 1.** (Procjena metodom najmanjih kvadrata) Često je korisno pretpostaviti da se komponenta trenda može modelirati prikladnim polinomijalnim izrazom

$$m_t = b_0 + b_1 t + \dots + b_p t^p, \quad p \in \mathbb{N}_0.$$

U tom se slučaju nepoznati parametri  $b_0, b_1, \dots, b_p$  mogu procijeniti metodom najmanjih kvadrata. Na taj način dobivamo trend

$$\hat{m}_t = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 t + \dots + \hat{b}_p t^p, \quad t \in T,$$

gdje  $\hat{b}_0, \hat{b}_1, \dots, \hat{b}_p$  predstavljaju procjene koeficijenata regresije dobivene metodom najmanjih kvadrata. Odabir reda  $p$  stvar je ekspertne procjene statističara. Rezidualni dio  $\hat{Y}_t$  dobije se kao

$$\hat{Y}_t = X_t - \hat{m}_t = X_t - \hat{b}_0 - \hat{b}_1 t - \dots - \hat{b}_p t^p, \quad t \in T.$$

**Metoda 2.** (Izgladivanje pomičnim prosjecima) Neka je  $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$  slučajni proces koji zadovoljava (1.2). Za proizvoljni  $q \in \mathbb{N}_0$  definiramo *dvostrani pomični prosjek*

$$W_t = \frac{1}{2q+1} \sum_{j=-q}^q X_{t+j}, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Uz pretpostavku da je očekivana vrijednost  $Y_t$  na intervalu  $[t-q, t+q]$  blizu 0 te da je trend lokalno aproksimativno linearan, dobivamo

$$W_t = \frac{1}{2q+1} \sum_{j=-q}^q m_{t+j} + \frac{1}{2q+1} \sum_{j=-q}^q Y_{t+j} \approx m_t$$

Stoga,  $m_t$  možemo procijeniti sa

$$\hat{m}_t = W_t, \quad t = q+1, \dots, n-q.$$

Općenitije, na  $m_t$  možemo gledati kao proces dobiven primjenom linearnog filtera na  $X_t$ . U tom slučaju imamo

$$\hat{m}_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j X_{t+j},$$

gdje je  $a_j = \frac{1}{2q+1}$  za  $-q \leq j \leq q$  i  $a_j = 0$  za  $|j| > q$ .

**Metoda 3.** (Diferenciranje) Umjesto pokušaja uklanjanja šuma zaglađivanjem, treća metoda za cilj ima uklanjanje trenda diferenciranjem. Najprije definiramo operator diferenciranja  $\nabla$ :

$$\nabla X_t = X_t - X_{t-1} = (1 - B)X_t, \quad t \in T,$$

gdje je  $B$  operator pomaka definiran sa  $BX_t = X_{t-1}$ . Primijenimo li taj operator na  $m_t = b_0 + b_1 t$  dobivamo

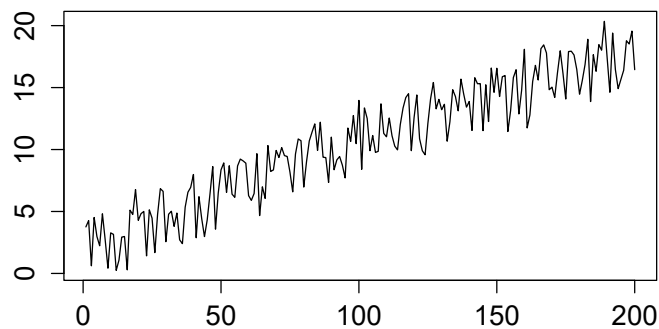
$$\nabla m_t = m_t - m_{t-1} = b_0 + b_1 t - b_0 - b_1(t-1) = b_1,$$

što je konstanta. Induktivno, za  $m_t$  polinom stupnja  $p$  dobivamo  $\nabla^p m_t = p! b_p$  što je također konstanta. Sada primjenom istog postupka na slučajni proces definiran sa (1.2) dobivamo

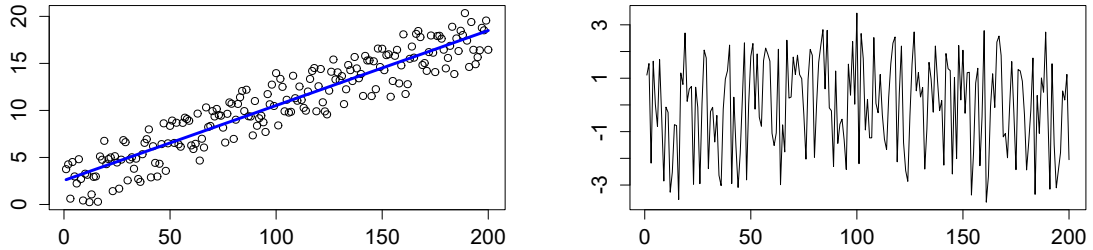
$$\nabla^p X_t = p! b_p + \nabla^p Y_t, \quad t \in T.$$

Dakle, dobili smo stacionaran proces sa aritmetičkom sredinom  $p! b_p$ .

**Primjer 1.3.1.** *Uzmimo primjer vremenskog niza kao na slici 1.3. Očigledno se radi o nestacionarnom nizu sa izraženim rastućim trendom. Koristeći jednu od upravo opisanih metoda, pokušat ćemo iz niza ukloniti trend. Metodom najmanjih kvadrata lako je naći funkciju koja najbolje opisuje zadane podatke. U našem slučaju radi se o linearnoj funkciji. Na slici 1.4a prikazana je regresijska funkcija kojom se mogu opisati podaci dok je na slici 1.4b prikazana putanja niza nakon uklanjanja trenda. Možemo zaključiti da je novodobiveni niz stacionaran te da se naši podaci mogu zapisati u željenom obliku  $X_t = m_t + Y_t$ , gdje je  $Y_t$  stacionaran.*



Slika 1.3: Primjer putanje nestacionarnog vremenskog niza



(a) Podaci i regresijska funkcija

(b) Podaci nakon uklanjanja trenda

Slika 1.4: Uklanjanje trenda iz vremenskog niza

## Uklanjanje trenda i sezonalnosti

Metode opisane u prethodnom pododjeljku mogu se prirodno prilagoditi kako bi se koristile za uklanjanje trenda i sezonalnosti u klasičnoj dekompoziciji definiranoj sa (1.1). Opet ćemo predstaviti tri metode za procjenu trenda i sezonalnosti u podacima. Kao dodatni uvjet na  $\{s_t\}$  stavit ćemo

$$s_{t+d} = s_t, \quad \sum_{j=1}^d s_j = 0,$$

gdje je sa  $d$  označen period sezonalne komponente. S obzirom na period sezonalnosti, logično je i definirati nove oznake za opažanja  $x_1, x_2, \dots, x_n$  i to na sljedeći način:

$$x_{j,k} = x_{k+d(j-1)}.$$

Kao najlakši primjer nameće se primjer jedne kalendarske godine. U tom slučaju period je  $d = 12$ ,  $k$  predstavlja godinu, a  $j$  mjesec u godini.

**Metoda 1.** (Metoda malog trenda) Ako su promjene u komponenti trenda male, razumno je pretpostaviti da je trend konstantan kroz period  $d$ . Tada trend procjenjujemo sa

$$\hat{m}_t = \frac{1}{d} \sum_{k=1}^d x_{j,k}.$$

Sada možemo procijeniti i sezonalnost u podacima.

$$\hat{s}_k = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (x_{j,k} - \hat{m}_j),$$

gdje je  $N = \frac{n}{d}$ , a podaci su prikupljeni kroz  $N$  punih ciklusa. Valja primijetiti da je trend procijenjen samo za cikluse, dok smo sezonalnost procijenili samo za razdoblja unutar ciklusa.

**Metoda 2.** (Metoda pomičnih prosjeka) Ova metoda ne pretpostavlja da je komponenta trenda konstantna ili gotovo konstantna tijekom ciklusa. Trend procjenjujemo linearnim filterom na sljedeći način:

- Ako je period  $d = 2q + 1$  neparan

$$\hat{m}_t = \frac{1}{d} \sum_{j=-q}^q X_{t+j}$$

- Ako je  $d = 2q$  paran

$$\hat{m}_t = \frac{0.5x_{t-q} + x_{t-q+1} + \dots + x_{t+q-1} + 0.5x_{t+q}}{d}, \quad t = q + 1, \dots, n - q$$

Sada možemo procijeniti sezonalnost. Najprije definiramo

$$\mu_k = \frac{1}{N-1} \sum_{j=2}^N (x_{k+d(j-1)} - \hat{m}_{k+d(j-1)}), \quad k = 1, \dots, q,$$

$$\mu_k = \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} (x_{k+d(j-1)} - \hat{m}_{k+d(j-1)}), \quad k = q + 1, \dots, d.$$

Sezonalnost procjenjujemo sa

$$\hat{s}_k = \mu_k - \frac{1}{d} \sum_{l=1}^d \mu_l, \quad k = 1, \dots, d$$

uz  $\hat{s}_k = \hat{s}_{k-d}$  za  $k > d$ . Preostali trend, nakon uklanjanja sezonalnosti, može se ukloniti bilo kojom od metoda obrađenih u prethodnom pododjeljku.

**Metoda 3.** (Diferenciranje) Najprije uvodimo definiciju *operatora diferenciranja s pomakom d*

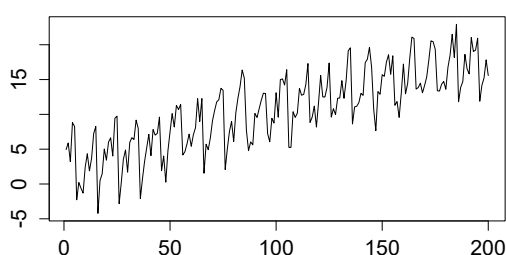
$$\nabla_d X_t = X_t - X_{t-d} = (1 - B^d)X_t, \quad t = d + 1, \dots, n.$$

Kada s taj operator primijenimo na (1.1), dobivamo

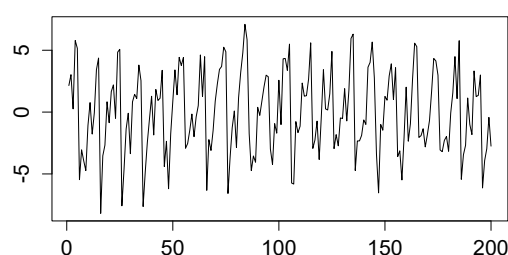
$$\nabla_d X_t = m_t - m_{t-d} + Y_t - Y_{t-d}, \quad t = d + 1, \dots, n.$$

Novodobiveni niz  $\{\nabla_d X_t\}$  nema sezonalnu komponentu jer je po definiciji  $s_t = s_{t-d}$ , a preostali šum  $Y_t - Y_{t-d}$  je stacionaran niz sa očekivanjem 0. Novu komponentu trenda,  $m_t - m_{t-d}$  možemo ukloniti bilo kojom od metoda iz prethodnog pododjeljka.

**Primjer 1.3.2.** *Uzmimo opet vremenski niz iz primjera 1.3.1. Pregledom podataka vidimo da je period sezonalnosti  $d = 10$ . Koristeći jednu od upravo opisanih metoda, pokušat ćemo iz niza ukloniti trend i sezonalnost. Najprije metodom pomičnih prosjeka uklanjamo sezonalnost (slika 1.5a), a nakon toga metodom najmanjih kvadrata tražimo funkciju koja najbolje opisuje zadane podatke. Na slici 1.5b prikazan je niz nakon uklanjanja trenda. Možemo zaključiti da je novodobiveni niz stacionaran te da se naši podaci mogu zapisati u željenom obliku  $X_t = m_t + s_t + Y_t$ , gdje je  $Y_t$  stacionaran.*



(a) Podaci nakon uklanjanja sezonalnosti



(b) Podaci nakon uklanjanja trenda

Slika 1.5: Uklanjanje sezonalnosti i trenda iz vremenskog niza

## 1.4 Autokovarijacijska funkcija stacionarnih procesa

Ovaj se odjeljak bavi svojstvima autokovarijacijske funkcije.

**Propozicija 1.4.1.** *Ako je  $\gamma(\cdot)$  autokovarijacijska funkcija stacionarnog procesa  $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ , onda vrijedi*

$$\gamma(0) \geq 0 \quad (1.3)$$

*i*

$$|\gamma(h)| \leq \gamma(0), \quad \forall h \in \mathbb{Z}. \quad (1.4)$$

*Također,  $\gamma(\cdot)$  je parna funkcija, tj.*

$$\gamma(h) = \gamma(-h), \quad \forall h \in \mathbb{Z}. \quad (1.5)$$

*Dokaz.* Prvo svojstvo (1.3) očito vrijedi jer je  $\text{Var}(X_t) \geq 0$  po definiciji. Drugo svojstvo (1.4) slijedi iz Cauchy-Schwarz nejednakosti,

$$|\text{Cov}(X_{t+h}, X_t)| \leq \sqrt{\text{Var}(X_{t+h})\text{Var}(X_t)}$$

, a treće (1.5) iz

$$\gamma(-h) = \text{Cov}(X_{t-h}, X_t) = \text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \gamma(h).$$

□

Autokovarijacijska funkcija također ima i svojstvo pozitivne semidefinitnosti.

**Definicija 1.4.2.** Za funkciju  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  kažemo da je **pozitivno semidefinitna** ako i samo ako vrijedi

$$\sum_{i,j=1}^n a_i f(t_i - t_j) a_j \geq 0$$

za sve  $n \in \mathbb{N}$  i za sve vektore  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)' \in \mathbb{R}^n$  i  $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n)' \in \mathbb{Z}^n$  ili ako i samo ako vrijedi  $\sum_{i,j=1}^n a_i f(i - j) a_j \geq 0$  za sve takve  $n$  i  $\mathbf{a}$ .

**Teorem 1.4.3.** Funkcija  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  je autokovarijacijska funkcija stacionarnog vremenskog niza ako i samo ako je parna i pozitivno semidefinitna.

*Dokaz.* Dokaz teorema nalazi se na stranici 27 u [2].

□

## Uzoračka autokovarijacijska funkcija

Kada radimo sa stvarnim podacima, teorijska autokovarijacijska funkcija najčešće nam je nepoznata. Stoga ćemo ju za stacionarni vremenski niz  $\{X_t\}$  procjenjivati iz realizacija  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ .

**Definicija 1.4.4.** Uzoračka autokovarijacijska funkcija na uzorku  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  definirana je sa

$$\hat{\gamma}(h) := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-h} (x_{j+h} - \bar{x})(x_j - \bar{x}), \quad 0 \leq h < n,$$

te  $\hat{\gamma}(h) = \hat{\gamma}(-h)$  za  $-n < h \leq 0$ , gdje je  $\bar{x}$  uzoračka aritmetička sredina  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j$ .

Uz uzoračku autokovarijacijsku funkciju vežemo i uzoračku autokorelacijsku funkciju koju definiramo sa

$$\hat{\rho}(h) := \frac{\hat{\gamma}(h)}{\hat{\gamma}(0)}, \quad |h| < n.$$

**Napomena 1.4.5.** Uzoračka autokorelacijska funkcija vrlo je koristan indikator nestacionarnosti podataka. U slučaju da podaci sadrže trend,  $|\hat{\rho}(h)|$  polako će opadati sa rastom pomaka  $h$  dok će se kod podataka sa izraženom determinističkom periodičnom komponentom  $\hat{\rho}(h)$  ponašati slično i sa istim periodom.

## 1.5 ARMA modeli

Cilj analize vremenskih nizova je konstruirati model koji opisuje dani slučajni proces. U ovom odjeljku uvodimo jednu od najvažnijih klasa modela - **ARMA modele**.

**Definicija 1.5.1.** *Proces  $\{X_t, t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$  naziva se **ARMA**( $p, q$ ) **proces** ako je stacionaran i ako za svaki  $t$  vrijedi*

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \dots - \phi_p X_{t-p} = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \dots + \theta_q Z_{t-q}, \quad (1.6)$$

gdje je  $\{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$ .

Jednadžbu 1.6 možemo zapisati i u kompaktnijem obliku,

$$\phi(B)X_t = \theta(B)Z_t, \quad t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (1.7)$$

gdje su  $\phi$  i  $\theta$  polinomi stupnja  $p$ , odnosno  $q$

$$\phi(z) = 1 - \phi_1 z - \dots - \phi_p z^p \quad (1.8)$$

i

$$\theta(z) = 1 + \theta_1 z + \dots + \theta_q z^q \quad (1.9)$$

$B$  je *operator pomaka unazad* definiran sa

$$B^j X_t = X_{t-j}, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

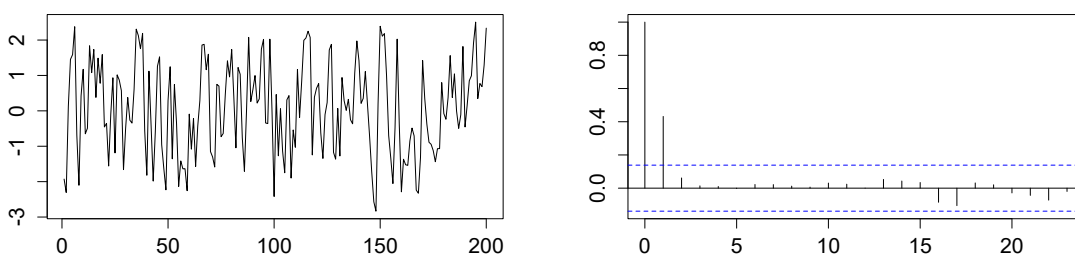
Polinom  $\phi$  nazivamo autoregresivnim (AR) polinomom, a  $\theta$  polinomom pomičnih prosjeka (MA).

**Primjer 1.5.2.** *Ako je  $\phi(z) \equiv 1$ , u smislu definicije 1.7, dobivamo **proces pomičnih prosjeka reda  $q$  ili MA**( $q$ ) **proces***

$$X_t = \theta(B)Z_t \quad (1.10)$$

Na slici 1.6 prikazan je primjer jednog MA(1) niza sa parametrom  $\theta_1 = 0.5$  i grafički prikaz autokorelacijske funkcije  $\rho(h)$  spomenutog MA(1) procesa iz koje se vidi najbitnije obilježje - autokorelacija  $\rho(h)$  nije značajna za  $h > q$ , u ovom slučaju za  $h > 1$ .





(a) Putanja MA(1) procesa

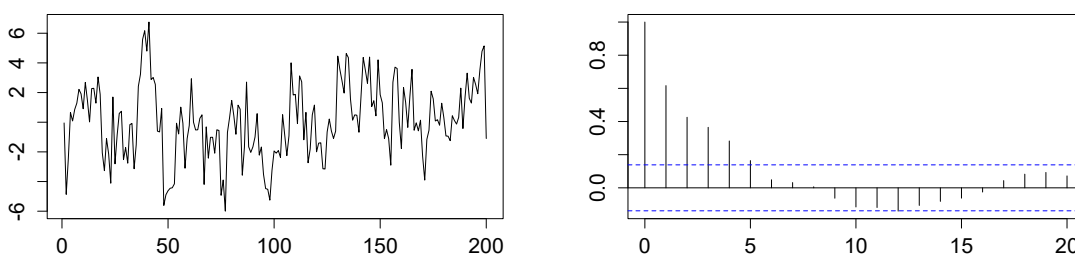
(b) Autokorelacijska funkcija MA(1) procesa

Slika 1.6: Primjer MA(1) procesa  $X_t = Z_t + 0.5Z_{t-1}$

**Primjer 1.5.3.** Ako je  $\theta(z) \equiv 1$ , u smislu definicije 1.7, dobivamo **autoregresivni proces reda p ili AR(p) proces**

$$\phi(B)X_t = Z_t. \tag{1.11}$$

Na slici 1.7 prikazan je primjer jednog AR(1) niza sa parametrom  $\phi_1 = 0.5$  i grafički prikaz autokorelacijske funkcije  $\rho(h)$  spomenutog AR(1) procesa.



(a) Putanja AR(1) procesa

(b) Autokorelacijska funkcija MA(1) procesa

Slika 1.7: Primjer AR(1) procesa  $X_t = Z_t + 0.5X_{t-1}$

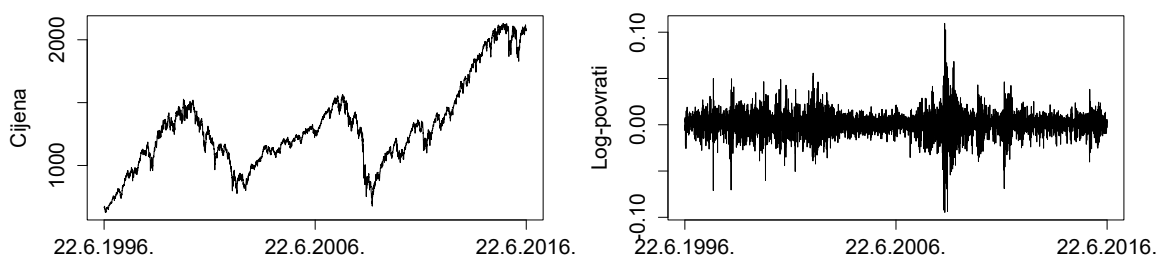
## 1.6 Posebnosti analize financijskih vremenskih nizova

Financijski vremenski nizovi (cijene dionica, kretanje kamatnih stopa i slično) po mnogočemu se razlikuju od uobičajenih vremenskih nizova. Radi se o nizovima sa ogromnim brojem

dostupnih podataka vrlo visoke frekvencije prikupljanja (Po satu, minuti, čak i sekundi). Kompleksnosti modeliranja takvih nizova najviše doprinose takozvane *stilizirane činjenice* koje su zajedničko obilježje velikog broja financijskih vremenskih nizova, a vrlo ih je teško reproducirati pomoću stohastičkih modela. Najveći dio svojstava može se primijetiti na primjeru cijena dionica. Tim karakterističnim svojstvima bavi se ovaj odjeljak.

Neka je  $p_t$  oznaka za cijenu u trenutku  $t$ . Tada sa  $\epsilon = \ln \frac{p_t}{p_{t-1}}$  označavamo dnevne *log-povrate*, a sa  $r_t = \frac{p_t - p_{t-1}}{p_{t-1}}$  dnevne *povrate*. Za razliku od cijena, povrati (i log-povrati) ne ovise direktno o novčanim jedinicama što omogućava usporedbu među različitim vrstama imovine. Slijedi pregled svojstava financijskih nizova.

- (i) *Nestacionarnost niza cijena* - Putanja niza cijena uglavnom odgovara ili liči slučajnoj šetnji. S druge strane, grafovi povrata i log-povrata uglavnom su u skladu s pretpostavkom o stacionarnosti. Primjer toga vidi se na slici 1.8 koja prikazuje kretanje cijena i log-povrata američkog burzovnog indeksa S&P500 <sup>1</sup>.



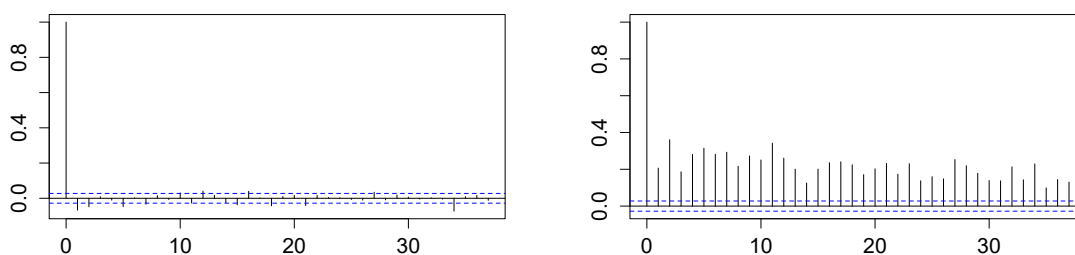
(a) Cijene S&P500 indeksa

(b) Log-povrati S&P500 indeksa

Slika 1.8: Cijene i log-povrati S&P500 burzovnog indeksa

- (ii) *Izostanak autokorelacije kod povrata* - Niz povrata uglavnom ima nisku autokorelaciju za bilo koji pomak  $h$  što ga čini sličnom bijelom šumu. Ta je činjenica prikazana na slici 1.9a.

<sup>1</sup>S&P500 burzovni indeks je linearna kombinacija dionica 500 velikih tvrtki na njujorškoj burzi ili NASDAQ-u



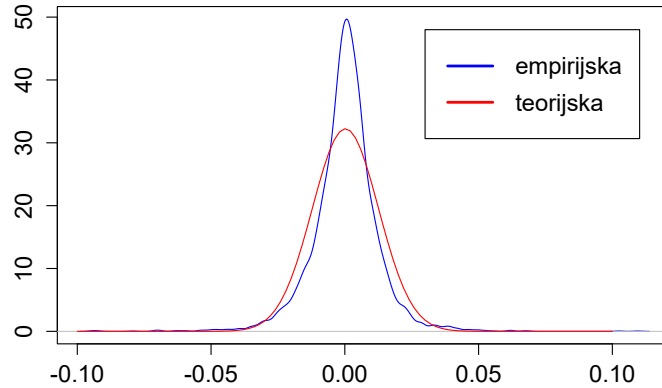
(a) Uzoračka autokorelacija povrata

(b) Uzoračka autokorelacija kvadrata log-povrata

Slika 1.9: Uzoračke autokorelacije za povrate i kvadrirane log-povrate S&amp;P burzovnog indeksa

- (iii) *Autokoreliranost kvadriranih log-povrata* - Kvadrirani log-povrati ( $\epsilon_t^2$ ) i apsolutni log-povrati ( $|\epsilon_t|$ ) uobičajeno su snažno autokorelirani. To svojstvo u pravilu nije u suprotnosti sa pretpostavkom o bijelom šumu, ali pokazuje da taj bijeli šum nije jaki bijeli šum. To je svojstvo vidljivo na slici 1.9b.
- (iv) *Grupiranje volatilnosti* - Veliki apsolutni povrati ( $|r_t|$  ili  $|\epsilon_t|$ ) pojavljuju se zajedno (u klasterima). Preciznije rečeno, postoje razdoblja visoke volatilnosti u kojima su apsolutni povrati visoki, a prate ih razdoblja niske volatilnosti (niskih apsolutnih povrata). Takva se razdoblja ponavljaju, ali ne periodički, što ukazuje na moguću kontradiktornost sa pretpostavkom o stacionarnosti. Grupiranje volatilnosti vidljiva je i na grafičkom prikazu niza log-povrata (slika 1.8b).
- (v) *Razdioba teškog repa* - Kada se promatra empirijska razdioba dnevnih log-povrata, može se primijetiti da se u pravilu ne radi o normalnoj razdiobi. Preciznije, gustoće imaju težak rep i izražen šiljak u nuli - *leptokurtične* su. Mjera leptokurtičnosti zapravo je koeficijent zaobljenosti, odnosno omjer uzoračkog četvrtog momenta i kvadrata uzoračke varijance. Dok je za normalnu razdiobu taj koeficijent jednak 3, za niz log-povrata on je mnogo veći. Razlika je jasna i na grafu gustoća (slika 1.10).
- (vi) *Efekt poluge* - Efekt poluge naziv je za fenomen koji se pojavljuje kod povrata. Radi se o asimetriji utjecaja prošlih negativnih i pozitivnih povrata na trenutnu volatilnost. Naime, empirijski je utvrđeno da postoji veća korelacija između negativnih povrata ( $\max\{-\epsilon_t, 0\}$ ) i  $|\epsilon_{t+h}$  nego između pozitivnih povrata ( $\max\{\epsilon_t, 0\}$ ) i  $|\epsilon_{t+h}$ .

Sva navedena svojstva, posebice leptokurtičnost, nepredvidivost povrata te autokoreliranost kvadrata log-povrata, treba na neki način reproducirati statističkim modelom. Jasno



Slika 1.10: Usporedba empirijske gustoće razdiobe log-povrata i teorijske gustoće normalne razdiobe sa istom aritmetičkom sredinom i varijancom

je da klasični modeli poput ranije opisanih ARMA modela ne mogu to napraviti na zadovoljavajući način.

Pokušat ćemo sada matematički predočiti način za modeliranje navedenih *stiliziranih činjenica* financijskih podataka. Najprije, činjenicu da su veliki apsolutni povrati uglavnom praćeni velikim apsolutnim povratima u matematičkom smislu objašnjavamo **uvjetnom heteroskedastičnošću**:

$$\text{Var}(\epsilon_t | \epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-2}, \dots) \neq \text{const.}$$

Modeli koji se u literaturi koriste za modeliranje financijskih vremenskih nizova uglavno se zapisuju u sljedećoj formi:

$$\epsilon_t = \sigma_t \eta_t, \quad (1.12)$$

gdje su  $\{\eta_t\}$  i  $\{\sigma_t\}$  realni procesi takvi da vrijedi:

- (i)  $\sigma_t$  je izmjerljiva u odnosu na  $\sigma$ -algebru  $\mathcal{F}_{t-1}$ ,
- (ii)  $\{\eta_t\}$  je nezavisan i jednako distribuiran slučajaj proces sa očekivanjem 0 i varijancom 1;  $\eta$  je neovisan o  $\mathcal{F}_{t-1} = \sigma(\{\epsilon_u : u < t\})^2$ ,
- (iii)  $\sigma_t > 0$ .

---

<sup>2</sup> $\mathcal{F}_{t-1}$  je najmanja sigma algebra inducirana skupom  $\{\epsilon_u : u < t\}$

Iz ovakve definicije proizlazi kako je trenutni predznak u promjeni cijene (predznak povrata ili log-povrata) predznak procesa  $\{\eta_t\}$  te je neovisan o ranijim promjenama cijene. Usto, ako postoje prva dva uvjetna momenta od  $\epsilon_t$ , dani su sa

$$\mathbb{E}[\epsilon_t | \mathcal{F}_{t-1}] = 0, \quad \mathbb{E}[\epsilon_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}] = \sigma^2.$$

Slučajna varijabla  $\sigma_t$  naziva se *volatilnost* od  $\epsilon_t$ . Treba istaknuti i da je  $\{\epsilon_t\}$  bijeli šum. Naime,

$$E[\epsilon_t] = \mathbb{E}[\sigma_t] \mathbb{E}[\eta_t] = 0$$

te

$$Cov(\epsilon_t, \epsilon_{t-h}) = \mathbb{E}[\eta_t] \mathbb{E}[\sigma_t \epsilon_{t-h}] = 0, \quad \forall h > 0.$$

Za kraj ostaje pitanje leptokurtičnosti i kako odabrati model pomoću kojeg ćemo u obzir uzeti i leptokurtičnost niza. Koeficijent zaobljenosti od  $\epsilon_t$ , ako postoji, povezan je sa  $\eta_t$  pa ćemo ga označiti sa  $\kappa_\eta$ . Prema formuli

$$\frac{\mathbb{E}[\epsilon_t^4]}{\mathbb{E}[\epsilon_t^2]^2} = \kappa_\eta \left[ 1 + \frac{Var(\sigma_t^2)}{\mathbb{E}[\sigma_t^2]^2} \right]$$

leptokurtičnost možemo uzeti u obzir na dva načina; uzimanjem leptokurtične razdiobe za niz  $\{\eta_t\}$  ili određivanjem vrlo varijabilnog procesa  $\{\sigma_t^2\}$ .

## Poglavlje 2

### GARCH(p,q) procesi

U ovom poglavlju prezentirana je glavna tema ovog rada - GARCH(p,q) procesi. GARCH (Generalizirani autoregresivni uvjetno heteroskedastični) procesi nastali su kao generalizacija ARCH (autoregresivnih uvjetno heteroskedastičnih) procesa. Ključan koncept u tim modelima je *uvjetna varijanca*, odnosno, varijanca koja ovisi o prošlosti. Započet ćemo sa osnovnim definicijama nakon čega ćemo prijeći na proučavanje stacionarnosti GARCH modela.

#### 2.1 Definicije

**Definicija 2.1.1.** *Proces  $\{\epsilon_t\}$  naziva se **GARCH(p, q) proces** ako njegova prva dva uvjetna momenta postoje i zadovoljavaju sljedeće uvjete:*

(i)  $\mathbb{E}[\epsilon_t | \epsilon_u; u < t] = 0, \quad t \in \mathbb{Z}.$

(ii) *Postoje konstante  $\omega, \alpha_i$ , za  $i = 1, 2, \dots, q$  i  $\beta_j$  za  $j = 1, 2, \dots, p$  takvi da*

$$\sigma_t^2 = \text{Var}(\epsilon_t | \epsilon_u; u < t) = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2, \quad t \in \mathbb{Z} \quad (2.1)$$

Jednadžbu (2.1) možemo zapisati i kompaktnije:

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha(B)\epsilon_t^2 + \beta(B)\sigma_t^2, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (2.2)$$

gdje je  $B$  standardni operator pomaka unazad dok su  $\alpha$  i  $\beta$  polinomi stupnja  $q$  odnosno  $p$ :

$$\alpha(B) = \sum_{i=1}^q \alpha_i B^i, \quad \beta(B) = \sum_{j=1}^p \beta_j B^j.$$

Za  $\beta(z) = 0$  imamo

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 \quad (2.3)$$

i taj proces nazivamo **ARCH( $q$ ) proces**.

Po definiciji, inovacija procesa  $\epsilon_t^2$  je varijabla  $v_t = \epsilon_t^2 - \sigma_{t-1}^2$ . Kada zamijenimo  $\sigma_{t-j}^2$  u formuli (2.1), dobivamo sljedeću reprezentaciju:

$$\epsilon_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^r (\alpha_i + \beta_i) \epsilon_{t-i}^2 + v_t - \sum_{j=1}^p \beta_j v_{t-j} \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (2.4)$$

gdje je  $r = \max\{p, q\}$  uz  $\alpha_i = 0$  ako je  $i > q$ , odnosno  $\beta_j = 0$  ako je  $j > p$ . Ova jednadžba ima strukturu poput ARMA modela, a uz neke dodatne pretpostavke (poput stacionarnosti od  $\epsilon_t^2$ ), možemo reći da ako je  $\{\epsilon_t\}$  GARCH( $p, q$ ), onda je  $\{\epsilon_t^2\}$  ARMA( $r, p$ ) proces. Posebno, kvadrat ARCH( $q$ ) procesa dopušta, ako je stacionaran, AR( $q$ ) reprezentaciju.

**Napomena 2.1.2. (Koreliranost kvadrata GARCH procesa)** U 1.6 ukazali smo na karakteristično svojstvo financijskih vremenskih nizova da su im kvadrati log-povrata visoko autokorelirani dok sami log-povrati nisu. Reprezentacija (2.4) pokazuje da GARCH procesi uspijevaju imitirati tu činjenicu. Uzmimo zbog jednostavnosti slučaj GARCH(1, 1). Kvadrirani proces  $\{\epsilon_t^2\}$  je ARMA(1, 1) pa njegova autokorelacija opada prema 0 proporcionalno faktoru  $(\alpha_1 + \beta_1)^h$ . Za  $h > 1$  vrijedi

$$\text{Corr}(\epsilon_t^2, \epsilon_{t+h}^2) = K(\alpha_1 + \beta_1)^h,$$

gdje je  $K$  konstanta neovisna o koraku  $h$ . S druge strana,  $\epsilon_t$  su nekorelirani po definiciji (2.1).

Sljedeća definicija nešto je restriktivnija, ali će nam, za razliku od definicije (2.1), omogućiti pronalaženje eksplicitnog rješenja.

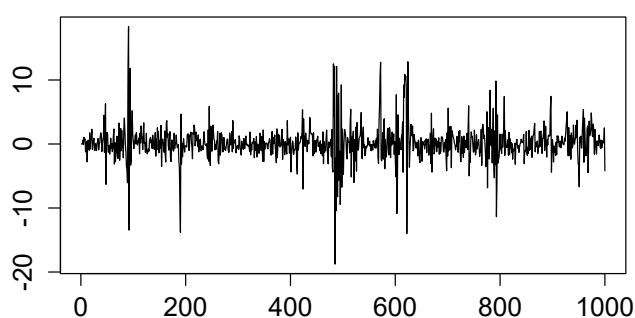
**Definicija 2.1.3.** Neka je  $\eta$  vjerojatnosna razdioba sa očekivanjem 0 i varijancom 1. Neka je  $\{\eta_t\}$  niz nezavisnih jednako distribuiranih varijabli sa razdiobom  $\eta$ . Proces  $\{\epsilon_t\}$  naziva se **jaki GARCH( $p, q$ ) proces** ako vrijedi

$$\begin{cases} \epsilon_t = \sigma_t \eta_t \\ \sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2 \end{cases} \quad (2.5)$$

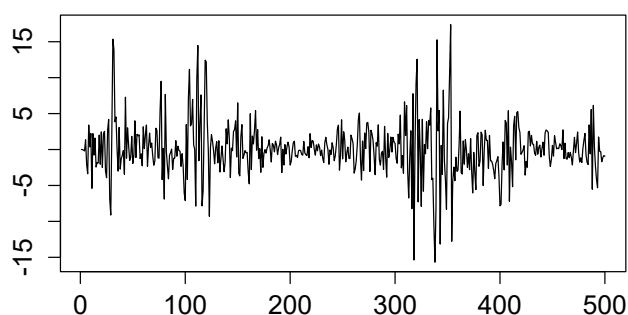
gdje su  $\alpha_i$  i  $\beta_j$  nenegativne konstante, a  $\omega$  pozitivna konstanta.

**Primjeri GARCH procesa**

Za razliku od standardnih modela za vremenske nizove, u GARCH modelu šum  $\epsilon_t$  ovisi o svojim prethodnim vrijednostima. Zbog toga dolazi do grupiranja volatilnosti; razdoblja visoke volatilnosti slijede razdoblja niske volatilnosti i obratno. To svojstvo jasno je ilustrirano na slikama simuliranih putanja GARCH procesa (2.1 i 2.2).



Slika 2.1: Simulacija GARCH(1,1) procesa s parametrima  $\omega = 0.7, \alpha = 0.8, \beta = 0.2$



Slika 2.2: Simulacija GARCH(2,2) procesa s parametrima  $\omega = 0.5, \alpha_1 = 0.4, \alpha_2 = 0.1, \beta_1 = 0.3, \beta_2 = 0.2$



Kod obje je simulacije korištena  $N(0, 1)$  razdioba kao razdioba niz  $\{\eta_t\}$ .

## 2.2 Stacionarnost GARCH procesa

U ovom ćemo se odjeljku baviti egzistencijom stacionarnih (u jakom smislu) rješenja modela (2.5). Zanimaju nas *neanticipativna* rješenja, odnosno, procesi  $\{\epsilon_t\}$  za koje je  $\epsilon_t$  izmjeriva funkcija varijabli  $\eta_{t-s}$ ,  $s \geq 0$ . Najprije ćemo proučiti slučaj GARCH(1, 1) modela.

### Slučaj GARCH(1,1)

Za  $p = q = 1$ , model (2.5) ima sljedeći oblik:

$$\begin{cases} \epsilon_t = \sigma_t \eta_t \\ \sigma_t^2 = \omega + \alpha \epsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2, \end{cases} \quad (2.6)$$

gdje su  $\{\eta_t\}$  nezavisne jednako distribuirane varijable s očekivanjem 0 i varijancom 1,  $\omega \geq 0$ ,  $\alpha \geq 0$ ,  $\beta \geq 0$ . Neka je sada  $a(z) = \omega + \alpha z^2 + \beta z^2$ .

**Teorem 2.2.1.** (*Jaka stacionarnost jakog GARCH(1,1) procesa*) Ako je

$$-\infty < \gamma := \mathbb{E} \ln(\alpha \eta_t^2 + \beta) < 0, \quad (2.7)$$

onda beskonačna suma

$$h_t = \omega \left[ 1 + \sum_{i=1}^{\infty} a(\eta_{t-1}) \dots a(\eta_{t-i}) \right] \quad (2.8)$$

gotovo sigurno konvergira i proces  $\{\epsilon_t\}$  definiran sa  $\epsilon_t = \sqrt{h_t} \eta_t$  je jedinstveno jako stacionarno rješenje modela (2.6). To je rješenje *neanticipativno* i *ergodsko*.

**Napomena 2.2.2.** *O uvjetu jake stacionarnosti (2.7)*

1. Za  $\gamma \geq 0$  i  $\omega > 0$  ne postoji jako stacionarno rješenje.
2. Za  $\omega = 0$  i  $\gamma < 0$ , jasno je, iz (2.8), da je jedinstveno jako stacionarno rješenje  $\epsilon_t = 0$  pa je prirodno postaviti uvjet  $\omega > 0$ .
3. Primijetimo da uvjet (2.7) ovisi o razdiobi  $\eta_t$  te nije simetričan u  $\alpha$  i  $\beta$ .
4. Uvjet (2.7) povlači da je  $\beta < 1$ . Sada, ako je

$$\alpha + \beta < 1,$$

onda je (2.7) zadovoljeno jer, primjernom Jensenove nejednakosti, imamo

$$\mathbb{E}[\ln(a(\eta_t))] \leq \ln \mathbb{E}[a(\eta_t)] = \ln(\alpha + \beta) < 0.$$

5. Ukoliko je zadovoljen uvjet (2.7), onda je zadovoljen i za bilo koji par  $(\alpha_1, \beta_1)$  takav da je  $\alpha_1 \leq \alpha$  i  $\beta_1 \leq \beta$ . Dodatno, stroga stacionarnost GARCH(1,1) modela implicira stacionarnost ARCH(1) modela dobivenog izbacivanjem  $\beta$ .

**Dokaz teorema 2.2.1.** Neka je  $\ln^+ x = \max(\ln x, 0)$ . Najprije primijetimo da koeficijent  $\gamma$  uvijek postoji na  $[-\infty, +\infty)$  jer vrijedi  $\mathbb{E}[\ln^+(a(\eta_t))] \leq \mathbb{E}[a(\eta_t)] = \alpha + \beta$ . Iteriranjem druge jednadžbe modela (2.6) dobivamo, za  $N \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 &= \omega + a(\eta_{t-1})\sigma_{t-1}^2 \\ &= \omega \left[ 1 + \sum_{n=1}^N a(\eta_{t-1}) \dots a(\eta_{t-n}) \right] + a(\eta_{t-1}) \dots a(\eta_{t-N-1})\sigma_{t-N-1}^2 \\ &:= h_t(N) + a(\eta_{t-1}) \dots a(\eta_{t-N-1})\sigma_{t-N-1}^2. \end{aligned} \quad (2.9)$$

S obzirom da su sumandi nenegativni,  $\lim_{N \rightarrow \infty} h_t(N)$  postoji na  $[0, +\infty]$ . Nadalje, kada  $N$  teži u beskonačnost, iz  $h_t(N) = \omega + a(\eta_{t-1})h_{t-1}(N-1)$  dobivamo

$$h_t = \omega + a(\eta_{t-1})h_{t-1}.$$

Sada ćemo pokazati da je  $h_t$  gotovo sigurno konačan ako i samo ako je  $\gamma < 0$ .

Pretpostavimo da je  $\gamma < 0$ . Koristit ćemo Cauchyjev kriterij konvergencije za redove s nenegativnim članovima<sup>1</sup>. Dobivamo

$$[a(\eta_{t-1}) \dots a(\eta_{t-n})]^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln[a(\eta_{t-i})]\right) \rightarrow e^\gamma \quad \text{g.s.} \quad (2.10)$$

za  $n \rightarrow \infty$ , primjenom jakog zakona velikih brojeva na niz  $\{\ln[a(\eta_t)]\}$ . Stoga, red definiran u (2.8) gotovo sigurno konvergira u  $\mathbb{R}$  primjenom Cauchyjevog kriterija, a proces limesa  $\{h_t\}$  poprima realne vrijednosti. Iz toga slijedi da je proces definiran sa  $\epsilon_t = \sqrt{h_t}\eta_t$  strogo stacionaran i ergodski. Nadalje,  $\{\epsilon_t\}$  je neanticipativno rješenje modela (2.6).

Ostaje dokazati jedinstvenost rješenja. Neka je  $\tilde{\epsilon}_t = \sigma_t \eta_t$  još jedno jako stacionarno rješenje. Prema (2.9) imamo

$$\sigma_t^2 = h_t(N) + a(\eta_{t-1}) \dots a(\eta_{t-N-1})\sigma_{t-N-1}^2.$$

Slijedi

$$\sigma_t^2 - h_t = h_t(N) - h_t + a(\eta_{t-1}) \dots a(\eta_{t-N-1})\sigma_{t-N-1}^2.$$

Prvi dio desne strane konvergira ka 0 jer  $h_t(N) \rightarrow h_t$  za  $N \rightarrow \infty$ . Također, kako  $h_t$  konvergira gotovo sigurno, imamo  $a(\eta_{t-1}) \dots a(\eta_{t-N-1}) \rightarrow 0$  za  $n \rightarrow \infty$  s vjerojatnošću 1.

<sup>1</sup>Neka je  $\sum a_n$  red s nenegativnim članovima i neka je  $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i$ . Tada za  $\lambda < 1$  red konvergira, a za  $\lambda > 1$  divergira.

Osim toga, distribucija od  $\sigma_{t-N-1}^2$  je neovisna o  $N$  zbog pretpostavke o stacionarnosti. Zato  $a(\eta_{t-1}) \dots a(\eta_{t-N-1}) \sigma_{t-N-1}^2 \rightarrow 0$  po vjerojatnosti kada  $N \rightarrow \infty$ . Dakle, dokazali smo da  $\sigma_t^2 - h_t$  po vjerojatnosti teži u 0 za  $N \rightarrow \infty$  pa nužno vrijedi  $h_t = \sigma_t^2$  g.s. za svaki  $t$ .

Ako je  $\gamma = 0$ , iz (2.10) i Cauchyjevog kriterija, imamo  $\sum_{n=1}^N a(\eta_{t-1}) \dots a(\eta_{t-n}) \rightarrow +\infty$  g.s. za  $N \rightarrow \infty$ . Stoga, ako je  $\omega > 0$ ,  $h_t = +\infty$  g.s. Iz (2.9) zatim očito slijedi da je  $\sigma_t^2 = +\infty$  g.s., odakle slijedi da ne postoji gotovo sigurno konačno rješenje za (2.6).

Za  $\gamma = 0$ , dokazat ćemo obratom po kontrapoziciji. Pretpostavimo da postoji jako stacionarno rješenje  $(\epsilon_t, \sigma_t^2)$  za (2.6). Za  $n > 0$  imamo

$$\sigma_0^2 \geq \omega \left[ 1 + \sum_{i=1}^n a(\eta_{-1}) \dots a(\eta_{-i}) \right]$$

iz čega zaključujemo da  $a(\eta_{-1}) \dots a(\eta_{-n}) \omega$  za  $n \rightarrow \infty$  konvergira u 0 g.s. Ekvivalentno je

$$\sum_{i=1}^n \ln a(\eta_i) + \ln \omega \rightarrow -\infty \text{ g.s. } \text{ za } n \rightarrow \infty$$

. Međutim, iz Chung-Fuchsovog teorema <sup>2</sup> dobivamo  $\mathbb{P}(\limsup \sum_{i=1}^n \ln a(\eta_i) = +\infty) = 1$  što je u kontradikciji s prethodnom tvrdnjom.  $\square$

Sljedeći rezultat govori o eksplozivnosti nestacionarnih GARCH procesa.

**Korolar 2.2.3.** Za GARCH(1,1) model definiran sa (2.6), za  $T \geq 1$ , s početnim uvjetima za  $\epsilon_0$  i  $\sigma_0$  vrijedi

$$\gamma > 0 \implies \sigma_t^2 \rightarrow +\infty \text{ g.s. } (t \rightarrow \infty).$$

Ako dodatno vrijedi  $\mathbb{E}[\ln(\eta_t^2)] < \infty$ , onda vrijedi

$$\gamma > 0 \implies \epsilon_t^2 \rightarrow +\infty \text{ g.s. } (t \rightarrow \infty).$$

Nakon ovoga promotrit ćemo općenit slučaj - GARCH(p,q).

## Općenit slučaj

U općenitom slučaju jakog GARCH(p, q) procesa, bit će korisna sljedeća vektorska reprezentacija. Neka je

$$\underline{z}_t = \underline{b}_t + A_t \underline{z}_{t-1} \tag{2.11}$$

<sup>2</sup>Neka je  $X_1, \dots, X_n$  niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli takvih da je  $\mathbb{E}X_1 = 0$  i  $\mathbb{E}|X_1| > 0$ . Tada je  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n X_i = +\infty$  i  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n X_i = -\infty$

gdje su

$$\underline{b}_t = \underline{b}_t(\eta_t) = \begin{pmatrix} \omega\eta_t^2 \\ 0 \\ \vdots \\ \omega \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p+q}, \underline{z}_t = \begin{pmatrix} \epsilon_t^2 \\ \vdots \\ \epsilon_{t-q+1}^2 \\ \sigma_t^2 \\ \vdots \\ \sigma_{t-p+1}^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p+q},$$

te je

$$A_t = \begin{pmatrix} \alpha_1\eta_t^2 & \cdots & \alpha_q\eta_t^2 & \beta_1\eta_t^2 & \cdots & \beta_p\eta_t^2 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_q & \beta_1 & \cdots & \beta_p \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

$(p+q) \times (p+q)$  matrica. U ARCH( $q$ ) slučaju,  $\underline{z}_t$  svodi se na  $\epsilon_t^2$  i njegovih  $q-1$  prethodnih vrijednosti, dok se  $A_t$  svodi na gornji lijevi blok matrice. Jednadžba (2.11) definira vektorski autoregresivni model prvog reda s pozitivnim i nezavisnim jednako distribuiranim koeficijentima matrice. Distribucija od  $\underline{z}_t$  uz uvjet na njenu beskonačnu prošlost podudara se s distribucijom od  $\underline{z}_t$  samo uz uvjet na  $\underline{z}_{t-1}$ , što znači da je  $\{\underline{z}_t\}$  Markovljev proces. Model (2.11) stoga nazivamo *Markovljeva reprezentacija GARCH( $p, q$ ) modela*. Iteriranjem (2.11) dobivamo

$$\underline{z}_t = \underline{b}_t + \sum_{k=1}^{\infty} A_t A_{t-1} \cdots A_{t-k+1} \underline{b}_{t-k} \quad (2.13)$$

u slučaju da red postoji gotovo sigurno. Cilj nam je naći uvjete potrebne da bi se osigurala egzistencija ovog reda. Uočimo da egzistencija vektora desne strane u (2.13) ne osigurava da su njegove komponente pozitivne. Jedan dovoljan uvjet za

$$\underline{b}_t + \sum_{k=1}^{\infty} A_t A_{t-1} \cdots A_{t-k+1} \underline{b}_{t-k} > 0, \quad g.s. \quad (2.14)$$

u smislu da su sve komponente vektora strogo pozitivne ( moguće je i da su beskonačne) je da

$$\omega > 0, \quad \alpha_i \geq 0 \quad (i = 1, \dots, q), \quad \beta_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, p). \quad (2.15)$$

Ovaj uvjet je vrlo jednostavan za korištenje, međutim, ne mora biti nužan<sup>3</sup>.

### Stroga stacionarnost

Glavni alat za proučavanje stroge stacionarnosti je koncept gornjih Ljapunovljevih eksponenata. Neka je  $A$   $(p + q) \times (p + q)$  matrica. Spektralni radijus od  $A$  označavamo s  $\rho(A)$ , a definiramo ga kao po apsolutnoj vrijednosti najveću svojstvenu vrijednost matrice  $A$ . Neka  $\|\cdot\|$  označava normu na prostoru  $(p + q) \times (p + q)$  matrica. Vrijedi sljedeći rezultat iz linearne algebre:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \|A^t\| = \ln \rho(A). \quad (2.16)$$

Ovo svojstvo ima sljedeće proširenje za slučajne matrice.

**Teorem 2.2.4.** *Neka je  $\{A_t, t \in \mathbb{Z}\}$  strogo stacionaran i ergodski niz slučajnih matrica takav da je  $\mathbb{E} \ln^+ \|A_t\|$  konačan. Tada vrijedi*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \mathbb{E}(\ln \|A_t A_{t-1} \cdots A_1\|) = \gamma = \inf_{t \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{t} \mathbb{E}(\ln \|A_t A_{t-1} \cdots A_1\|), \quad (2.17)$$

$\gamma$  zovemo **Ljapunovljev eksponent**, a  $\exp(\gamma)$  zovemo **spektralni radijus niza matrica**  $\{A_t, t \in \mathbb{Z}\}$ . Nadalje,

$$\gamma = \lim_{t \rightarrow \infty} \text{g.s.} \frac{1}{t} \ln \|A_t A_{t-1} \cdots A_1\| \quad (2.18)$$

**Napomena 2.2.5.** (O gornjem Ljapunovljevom eksponentu  $\gamma$ )

1. Uvijek vrijedi da je  $\gamma \leq \mathbb{E}(\ln \|A_1\|)$ , a jednakost se poprima u dimenziji 1.
2. Ako je  $A_t = A$  za sve  $t \in \mathbb{Z}$ , vrijedi da je  $\gamma = \ln \rho(A)$  u smislu (2.16).
3. Sve norme na konačno-dimenzionalnim prostorima su ekvivalentne, iz čega slijedi da  $\gamma$  ne ovisi o odabranoj normi.

Sljedeća općenita lema koju ćemo iskazati, vrlo je korisna za proučavanje umnožaka slučajnih matrica.

**Lema 2.2.6.** *Neka je  $\{A_t, t \in \mathbb{Z}\}$  strogo stacionaran i ergodski niz slučajnih matrica takvih da je  $\mathbb{E} \ln^+ \|A_t\|$  konačan. Neka je  $\gamma$  gornji Ljapunovljev eksponent. Tada je*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{g.s.} \ln \|A_0 A_{-1} \cdots A_{-t}\| = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma < 0. \quad (2.19)$$

<sup>3</sup>Odjeljak 2.3.2. u [5]

Kao i kod ARMA modela, najviše nas zanimaju neanticipativna rješenja ( $\epsilon_t$ ) modela (2.5), odnosno, ona za koje  $\epsilon_t$  pripada  $\sigma$ -algebri generiranoj s  $\{\eta_t, \eta_{t-1}, \dots\}$ .

**Teorem 2.2.7** (Stroga stacionarnost GARCH( $p, q$ ) modela). *Nužan i dovoljan uvjet egzistencije strogo stacionarnog rješenja GARCH( $p, q$ ) modela (2.5) je*

$$\gamma < 0,$$

gdje je  $\gamma$  gornji Ljapunovljev eksponent niza  $\{A_t, t \in \mathbb{Z}\}$  definiranog s (2.12). U slučaju da strogo stacionarno rješenje postoji, ono je jedinstveno, neanticipativno i ergodično.

*Dokaz.* Koristit ćemo normu definiranu s  $\|A\| = \sum |a_{ij}|$ . Radi jednostavnosti, normu ćemo označavati jednako bez obzir na dimenziju od  $A$ . Ovako definirana norma je očito *multiplikativna*:  $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$  za sve matrice  $A$  i  $B$  takve da  $AB$  postoji. Uočimo da budući da  $\eta_t$  ima konačnu varijancu, komponente matrice  $A_t$  su integrabilne. Dakle, vrijedi

$$\mathbb{E} \ln^+ \|A_t\| \leq \mathbb{E} \|A_t\| < \infty.$$

Pretpostavimo prvo da je  $\gamma < 0$ . Tada iz (2.18) slijedi da

$$\tilde{z}_t(N) = \underline{b}_t + \sum_{n=0}^N A_t A_{t-1} \cdots A_{t-n} \underline{b}_{t-n-1}$$

konvergira gotovo sigurno prema nekom limesu  $\tilde{z}_t$  kada  $N$  teži u beskonačnost. Doista, korištenjem činjenice da je norma multiplikativna dobivamo

$$\|\tilde{z}_t(N)\| = \|\underline{b}_t\| + \sum_{n=0}^N \|A_t A_{t-1} \cdots A_{t-n}\| \|\underline{b}_{t-n-1}\| \quad (2.20)$$

te da je

$$\begin{aligned} \|A_t \cdots A_{t-n}\|^{\frac{1}{n}} \|\underline{b}_{t-n-1}\|^{\frac{1}{n}} &= \exp \left[ \frac{1}{n} \ln \|A_t \cdots A_{t-n}\| + \frac{1}{n} \ln \|\underline{b}_{t-n-1}\| \right] \\ &\xrightarrow{g.s.} e^\gamma < 1. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Kako bismo pokazali da

$$n^{-1} \ln \|\underline{b}_{t-n-1}\|^{\frac{1}{n}} \rightarrow 0 \quad g.s.$$

koristit ćemo rezultat dokazan u Zadatku 2.11<sup>4</sup>, koji možemo primijeniti jer je

$$\mathbb{E} \ln \|\underline{b}_{t-n-1}\| \leq |\ln \omega| + \mathbb{E} \ln^+ \|\underline{b}_{t-n-1}\| \leq |\ln \omega| + \mathbb{E} \|\underline{b}_{t-n-1}\| < \infty.$$

<sup>4</sup>Neka je  $\{X_n\}$  niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli sa konačnim očekivanjem. Tada  $\frac{X_n}{n} \rightarrow 0$  kada  $n \rightarrow \infty$  sa vjerojatnošću 1. Ukoliko ne postoji očekivanje od  $X_n$ , konvergencija ne mora vrijediti.

Slijedi da je, po Cauchyjevom integralnom kriteriju,  $\tilde{z}_t$  dobro definiran u  $(\mathbb{R}^{*+})^{p+q}$ . Neka  $\tilde{z}_{q+1,t}$  označava  $(q+1)$ . komponentu od  $\tilde{z}_t$ . Uzimanjem  $\epsilon_t = \sqrt{\tilde{z}_{q+1,t}} \eta_t$ , definiramo rješenje modela (2.5). Ovo rješenje neanticipativno budući da po (2.13),  $\epsilon_t$  možemo izraziti kao integrabilnu funkciju od  $\eta_t, \eta_{t-1}, \dots$ . Uz ergodičnost  $(\eta_t)$ , rješenje je također strogo stacionarno i ergodično<sup>5</sup>.

Dokaz jedinstvenosti analogan je kao u slučaju  $p = q = 1$ . Neka  $(\epsilon_t)$  označava strogo stacionarno rješenje modela (2.5), ili ekvivalentno, neka  $(z_t)$  označava pozitivna i strogo stacionarna rješenja od (2.11). Za sve  $N \geq 0$ ,

$$z_t = \tilde{z}_t(N) + A_t \cdots A_{t-N} z_{t-N-1}.$$

Tada vrijedi

$$\|z_t - \tilde{z}_t\| \leq \|\tilde{z}_t(N) - \tilde{z}_t\| + \|A_t \cdots A_{t-N}\| \|z_{t-N-1}\|.$$

Prvi član s desne strane teži u 0 g.s. kada  $N \rightarrow \infty$ . Uz to, budući da red definiran s  $\tilde{z}_t$  konvergira g.s., vrijedi da  $\|A_t \cdots A_{t-N}\| \rightarrow 0$  s vjerojatnošću 1 kada  $n \rightarrow \infty$ . Nadalje, distribucija od  $\|z_{t-N-1}\|$  ne ovisi o  $N$  zbog stacionarnosti. Slijedi da  $\|A_t \cdots A_{t-N}\| \|z_{t-N-1}\| \rightarrow 0$  po vjerojatnosti kad  $N \rightarrow \infty$ . Pokazali smo da  $z_t - \tilde{z}_t \rightarrow 0$  po vjerojatnosti kad  $N \rightarrow \infty$ . Budući da ova vrijednost ne ovisi o  $N$ , nužno je  $\tilde{z}_t = z_t$  za sve  $t$ , g.s.

Dokažimo sad nužni dio. Iz Leme 2.2.6, dovoljno je pokazati (2.19). Pokazat ćemo da je za  $1 \leq i \leq p+q$ ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A_0 \cdots A_{-t} e_i = 0, \quad \text{g.s.}, \quad (2.22)$$

gdje je  $e_i$   $i$ -ti element kanonske baze u  $\mathbb{R}^{p+q}$ . Neka je  $(\epsilon_t)$  strogo stacionarno rješenje od (2.5) i neka je  $(z_t)$  definiran s (2.11). Vrijedi da je za svaki  $t > 0$ ,

$$\begin{aligned} z_0 &= \underline{b}_0 + A_0 z_{-1} \\ &= \underline{b}_0 + \sum_{k=0}^{t-1} A_0 \cdots A_{-k} \underline{b}_{-k-1} + A_0 \cdots A_{-t} z_{-t-1} \\ &\geq \sum_{k=0}^{t-1} A_0 \cdots A_{-k} \underline{b}_{-k-1} \end{aligned} \quad (2.23)$$

budući da su koeficijenti matrice  $A_t$ ,  $\underline{b}_0$  i  $z_t$  nenegativni.<sup>6</sup> Slijedi da red  $\sum_{k=0}^{t-1} A_0 \cdots A_{-k} \underline{b}_{-k-1}$  konvergira, stoga  $A_0 \cdots A_{-k} \underline{b}_{-k-1}$  teži u 0 gotovo sigurno kada  $k \rightarrow \infty$ . Međutim, kako je

<sup>5</sup>Za dokaz pogledati teorem A.1 u [5]

<sup>6</sup>Ovdje s  $x \geq y$  označavamo da su sve komponente vektora  $x$  veće ili jednake od pripadnih komponenti vektora  $y$

$\underline{b}_{-k-1} = \omega \eta_{-k-1}^2 e_1 + \omega e_{q+1}$ , slijedi da  $A_0 \cdots A_{-k} \underline{b}_{-k-1}$  možemo rastaviti na dva pozitivna člana, te vrijedi

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A_0 \cdots A_{-k} \omega \eta_{-k-1}^2 e_1 = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} A_0 \cdots A_{-k} \omega e_{q+1} = 0, \quad g.s. \quad (2.24)$$

Budući da  $\omega \neq 0$ , (2.22) vrijedi za  $i = q + 1$ . Sada koristimo jednakost

$$A_{-k} e_{q+i} = \beta_i \eta_{-k}^2 e_1 + \beta_i e_{q+1} + e_{q+i+1}, \quad i = 1, \dots, p, \quad (2.25)$$

uz uvjet da je  $e_{p+q+1} = 0$  po dogovoru. Prema tome, za  $i = 1$  iz jednakosti dobivamo

$$0 = \lim_{k \rightarrow \infty} A_0 \cdots A_{-k} e_{q+1} \geq \lim_{k \rightarrow \infty} A_0 \cdots A_{-k+1} e_{q+2} \geq 0,$$

dakle (2.22) vrijedi za  $i = q+2$ , pa po matematičkoj indukciji, korištenjem (2.25) dobivamo da vrijedi i za  $i = q + j$ ,  $j = 1, \dots, p$ . Nadalje, uočimo da je  $A_{-k} e_q = \alpha_q \eta_{-k}^2 e_1 + \alpha_q e_{q+1}$ , što nam omogućava da prema (2.24), (2.22) vrijedi i za  $i = q$ . Za sve ostale vrijednosti od  $i$  zaključak rekurzivno slijedi iz

$$A_{-k} e_i = \alpha_i \eta_{-k}^2 e_1 + \alpha_i e_{q+1} + e_{i+1}, \quad i = 1, \dots, q-1.$$

Time je dokaz gotov. □

## 2.3 Asimetrični GARCH modeli

Osim standardnog GARCH(p,q) modela, razvili su se i mnogi prošireni, poput *EPARCH*, *TGARCH* i *APARCH* modela. Njihova je zadaća na neki način obuhvatiti i *utjecaj poluge* koji smo objasnili u 1.6. U ovom radu, ti modeli su nam zanimljivi iz perspektive primjene. Njihova svojstva, u smislu stacionarnosti, neće biti tema opširnijeg razmatranja u ovom radu.

**Definicija 2.3.1 (EGARCH(p,q) proces).** *Neka je  $\{\eta_t\}$  niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli takvih da je  $\mathbb{E}[\eta_t] = 0$  i  $\text{Var}(\eta_t) = 1$ . Tada za  $\{\epsilon_t\}$  kažemo da je **eksponencijalni GARCH (EGARCH(p, q)) proces** ako zadovoljava jednadžbu sljedećeg oblika:*

$$\begin{cases} \epsilon_t = \sigma_t \eta_t \\ \ln \sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i g(\eta_{t-i}) + \sum_{j=1}^p \beta_j \ln \sigma_{t-j}^2, \end{cases} \quad (2.26)$$

gdje je

$$g(\eta_{t-i}) = \theta \eta_{t-i} + \zeta (|\eta_{t-i}| - \mathbb{E}|\eta_{t-i}|), \quad (2.27)$$

a  $\omega, \alpha_i, \beta_j, \theta$  i  $\zeta$  su realni brojevi.



Osim EGARCH-a, prirodni način za uvođenje asimetrije je uvjetnu varijancu definirati kao funkciju pozitivnih i negativnih dijeova prošlih inovacija. Označimo ih sa

$$\epsilon_t^+ = \max\{\epsilon_t, 0\}, \quad \epsilon_t^- = \min\{\epsilon_t, 0\}.$$

Očito vrijedi  $\epsilon_t = \epsilon_t^+ + \epsilon_t^-$ . Taj ćemo učinak pokušati oponašati pomoću TGARCH klase modela.

**Definicija 2.3.2 (TGARCH(p,q) proces).** *Neka je  $\{\eta_t\}$  niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli takvih da je  $\mathbb{E}[\eta_t] = 0$  i  $\text{Var}(\eta_t) = 1$ . Tada za  $\{\epsilon_t\}$  kažemo da je TGARCH(p, q) proces ako zadovoljava jednadžbu sljedećeg oblika:*

$$\begin{cases} \epsilon_t = \sigma_t \eta_t \\ \sigma_t = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_{i,+} \eta_{t-i}^+ - \alpha_{i,-} \eta_{t-i}^- + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}, \end{cases} \quad (2.28)$$

gdje su  $\omega, \alpha_{i,+}, \alpha_{i,-}$  i  $\beta_j$  realni brojevi.

U sljedećem je poglavlju cilj pomoću GARCH modela, i upravo navedenih asimetričnih proširenja, procijeniti rizik u trgovanju dionicama.

## Poglavlje 3

# Primjena GARCH modela

GARCH procesi vrlo su bitni za primjenu u financijama. Kao što je već opisano u 1.6, vremenski nizovi u financijama, posebice nizovi dnevnih cijena dionica, pokazuju određena svojstva koja GARCH modeli vrlo dobro oponašaju. Sada ćemo dati primjer primjene GARCH modeliranja u financijama.

Vrlo bitan aspekt upravljanja financijskom imovinom je upravljanje rizicima. Jedna od najbitnijih mjera rizika je Value at Risk (VaR) kojom ćemo se uglavnom baviti u ovom poglavlju.

### 3.1 Value at Risk

VaR je mjera rizika koja procjenjuje maksimalni gubitak koji neće biti ostvaren uz danu (veliku) vjerojatnost. Najčešće je od interesa procijeniti maksimalni očekivani gubitak u nekom vremenskom razdoblju ( $h = 1$  ili  $h = 10$  najčešće) uz danu razinu prihvatljivog rizika ( $\alpha$  je obično između 1% i 5%).

**Primjer 3.1.1.** *Pretpostavimo da imamo portfelj koji se sastoji od  $d$  dionica. Sa  $S_{i,t}$  označimo cijenu  $i$ -te dionice u trenutku  $t$ , a sa  $r_{i,t,t+h} = \ln \frac{S_{i,t+h}}{S_{i,t}}$  log-povrat. Nadalje, ako je  $a_i$  broj  $i$ -tih dionica u portfelju, vrijednost portfelja je*

$$V_t = \sum_{i=1}^d a_i S_{t,i}.$$

*Pod pretpostavkom da se portfelj ne mijenja u danom razdoblju (od trenutka  $t$  do  $t + h$ ), gubitak portfelja je sljedeći:*

$$L_{t,t+h} = - \sum_{i=1}^d a_i S_{i,t} (e^{r_{i,t,t+h}} - 1).$$

Sada možemo dati matematičku definiciju VaR-a.

**Definicija 3.1.2.**  $(1 - \alpha)$  kvantil distribucije gubitka naziva se **VaR na razini  $\alpha$**

$$\text{VaR}_{t,h}(\alpha) := \inf\{x \in \mathbb{R} | \mathbb{P}_t(L_{t,t+h} \leq x) \geq 1 - \alpha\},$$

kada je taj kvantil pozitivan. U suprotnom, prema dogovoru,  $\text{VaR}_{t,h}(\alpha) = 0$ .  $\mathbb{P}_t$  je uvjetna vjerojatnost u odnosu na informacije dostupne u trenutku  $t$ .

Kod izračuna VaR-a koristimo GARCH modele kako bi modelirali rezidualne. Preciznije, za modeliranje uvjetnog očekivanja vremenskog niza koriste se modeli iz primjerice ARMA familije dok se pomoću GARCH procesa modelira uvjetna varijanca, odnosno volatilitet. U sljedećem primjeru ilustriran je postupak pronalaženja ARMA + GARCH modela kakav se može koristiti kod modeliranja povrata i volatiliteta. Prisjetimo se kako smo definirali ARMA(p,q) i GARCH(p,q) procese - formulama (1.6) i (2.5). Cilj je iskoristiti te dvije familije modela u svrhu izračuna VaR-a.

### **Primjer 1: Modeliranje VaR-a dioničkog indeksa FTSE100 pomoću GARCH(1,1) sa konstantnim očekivanjem**

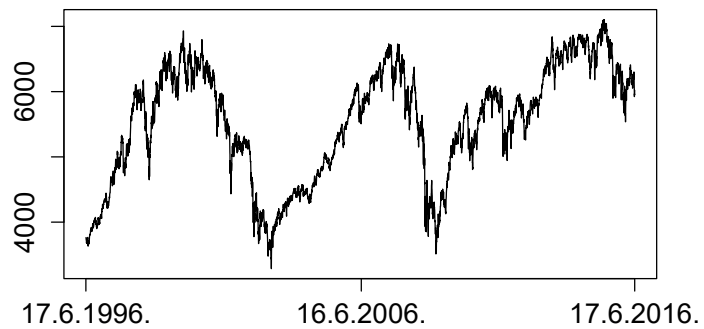
U ovom primjeru modeliramo log-povrate FTSE100<sup>1</sup> u razdoblju od 20 godina (od 17.6.1996. do 17.6.2016.). Radi se o 5200 dnevnih vrijednosti tog indeksa<sup>2</sup>. Kretanje vrijednosti prikazano je na slici 3.1. Ipak, nas ne zanimaju nominalne vrijednosti indeksa već dnevni log-povrati. Stoga ćemo promatrati upravo vremenski niz dnevnih log-povrata (prikazan na slici 3.2). Kao što je spomenuto već mnogo puta, vremenski niz koji modeliramo mora biti stacionaran. Stoga je prvi korak provjera stacionarnosti vremenskog niza. U tu svrhu koristi se prošireni Dickey-Fuller test kojeg su uveli Said i Dickey[4]. Za proizvoljan vremenski odmak  $k < 265$ , proširenim Dickey-Fullerovim test na razini značajnosti od 1% ne možemo prihvatiti nul-hipotezu o nestacionarnosti, odnosno vremenski niz je stacionaran. Iz sljedećeg R ispisa jasno je da je za vremenski odmak  $k = 10$  niz stacionaran. Analogan ispis dobije se za sve ranije navedene odmake  $k$ .

Augmented Dickey-Fuller Test

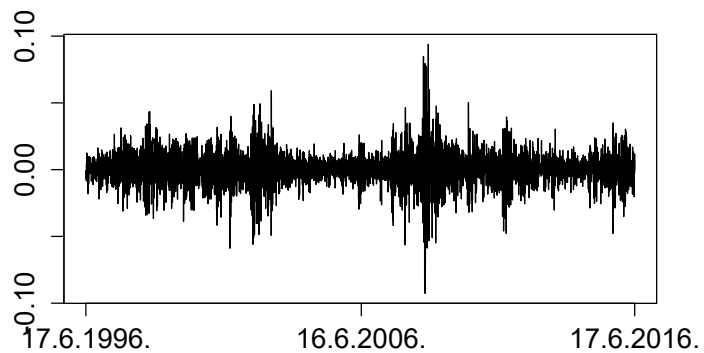
```
data: lp
Dickey-Fuller = -22.9093, Lag order = 10, p-value = 0.01
alternative hypothesis: stationary
```

<sup>1</sup>FTSE100 je dionički indeks koji sadrži dionice 100 najvećih tvrtki sa londonske burze po tržišnoj kapitalizaciji, odnosno po ukupnoj vrijednosti svih javno izdanih dionica.

<sup>2</sup>Svi burzovni podaci javno su dostupni, a podaci korišteni u ovom pododjeljku se mogu preuzeti preko ove poveznice



Slika 3.1: Kretanje vrijednosti dioničkog indeksa FTSE100 u razdoblju od 17.lipnja 1996. do 17.lipnja 2016. godine



Slika 3.2: Putanja niza dnevnih log-povrata dioničkog indeksa FTSE100 od 17.lipnja 1996. do 17.lipnja 2016. godine

Za početak ćemo niz modelirati pomoću GARCH(1,1) procesa i konstantnog očekivanja. Ovdje treba napomenuti kako se  $\epsilon_t$  mogu modelirati pomoću raznih razdioba, a mi ćemo za ovaj primjer uzeti standardnu normalnu razdiobu, odnosno  $\epsilon_t \sim N(0, 1)$ . Za početak od povrata oduzmemo očekivanje koje procjenjujemo aritmetičkom sredinom uzorka. Ostatke,  $e_t = p_t - \mu$  modeliramo pomoću GARCH(1,1) procesa. Kako je vidljivo iz sljedećeg R ispisa, GARCH(1,1) model koji najbolje opisuje naše podatke ima koeficijente  $\omega = 0.000001459$ ,  $\alpha = 0.09462$  i  $\beta = 0.89595$ .

Title:

GARCH Modelling

Call:

garchFit(data = e)

Mean and Variance Equation:

data ~ garch(1, 1)

<environment: 0x0000000031ba8810>

[data = e]

Conditional Distribution:

norm

Coefficient(s):

	mu	omega	alpha1	beta1
	2.1274e-18	1.4590e-06	9.4620e-02	8.9595e-01

Std. Errors:

based on Hessian

Error Analysis:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
mu	2.127e-18	1.172e-04	0.000	1
omega	1.459e-06	2.912e-07	5.011	5.42e-07 ***
alpha1	9.462e-02	8.557e-03	11.058	< 2e-16 ***
beta1	8.960e-01	9.191e-03	97.483	< 2e-16 ***

---

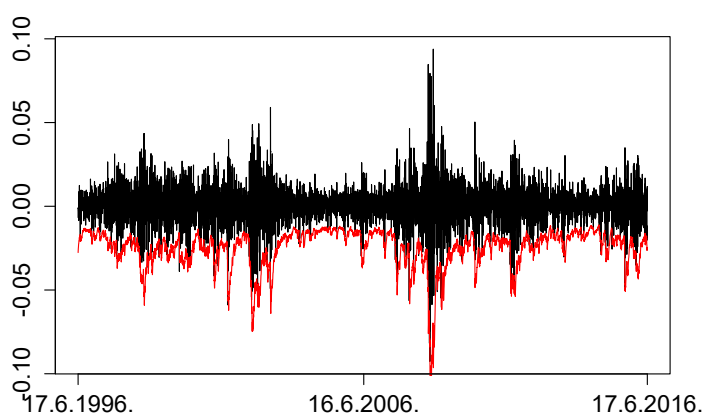
Signif. codes: 0 '\*\*\*' 0.001 '\*\*' 0.01 '\*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Nas pak zanimaju dobivene uvjetne standardne devijacije,  $\sigma_t$ , s obzirom da ćemo iz njih izračunati VaR vrijednosti. Najprije, formula po kojoj ćemo dobiti jednodnevni VaR sa

prihvatljivim rizikom od 5% je sljedeća:

$$VaR_{t,1}(0.05) = \sigma_t * \Phi(0.05), \quad (3.1)$$

gdje je  $\Phi$  funkcija gustoće jedinične normalne razdiobe. Preciznost ove metode na podacima od FTSE indeksa nije se pokazala očekivano velikom. Naime, više od 5% (točnije, 5.75%) ostvarenih gubitaka bilo je veće od maksimalnog predviđenog gubitka. Na sljedećoj slici crvenom bojom prikazano je kretanje VaR-a i kretanje log-povrata.



Slika 3.3: Kretanje jednodnevnog VaR-a uz 5% rizika za dionički indeks FTSE100 (procjena GARCH(1,1) modelom)

Iako odstupanje od 0.75% nije toliko loše, u sljedećem pododjeljku pokušat ćemo na istim podacima VaR procijeniti pomoću ARMA+GARCH modela.

### **Primjer 2: Modeliranje VaR-a dioničkog indeksa FTSE100 pomoću ARMA+GARCH procesa**

Za razliku od prethodnog primjera, u kojem smo očekivanje promatrali kao konstantu, u ovom primjeru ćemo uvjetno očekivanje modelirati ARMA(1,1) procesom. Usto, umjesto standardnog GARCH modela, koristiti ćemo najbolji model među dosad spominjanima (GARCH, TGARCH ili EGARCH). U sljedećim isječcima iz R ispisa, jasno se vidi da, iako su vrlo slični po svim kriterijima, EGARCH(1,1) proces ipak je nešto bolji od konkurencije (to vidimo po najnižoj AIC<sup>3</sup> vrijednosti).

<sup>3</sup>Akaike informacijski kriterij, za više informacija pogledati [1]

## Conditional Variance Dynamics

-----  
 GARCH Model : fGARCH(1,1)  
 fGARCH Sub-Model : TGARCH  
 Mean Model : ARFIMA(1,0,1)  
 Distribution : norm

## Optimal Parameters

-----  

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
ar1	0.656109	0.021149	31.0226	0
ma1	-0.670605	0.020784	-32.2647	0
omega	0.000180	0.000027	6.5966	0
alpha1	0.061211	0.007320	8.3624	0
beta1	0.935853	0.007553	123.9063	0
eta11	0.956781	0.109489	8.7386	0

## Information Criteria

-----  

Akaike	-6.4210
Bayes	-6.4142
Shibata	-6.4210
Hannan-Quinn	-6.4184

-----

## Conditional Variance Dynamics

-----  
 GARCH Model : sGARCH(1,1)  
 Mean Model : ARFIMA(1,0,1)  
 Distribution : norm

## Optimal Parameters

-----  

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
ar1	0.876774	0.067157	13.0556	0.000000
ma1	-0.899427	0.060939	-14.7594	0.000000
omega	0.000001	0.000001	1.0111	0.311984
alpha1	0.093074	0.020223	4.6023	0.000004

beta1 0.897911 0.020725 43.3256 0.000000

Information Criteria

-----

Akaike -6.3878  
 Bayes -6.3815  
 Shibata -6.3878  
 Hannan-Quinn -6.3856

-----

Conditional Variance Dynamics

-----

GARCH Model : eGARCH(1,1)  
 Mean Model : ARFIMA(1,0,1)  
 Distribution : norm

Optimal Parameters

-----

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
ar1	0.67006	0.031258	21.436	0
ma1	-0.68568	0.030542	-22.451	0
omega	-0.15349	0.001273	-120.540	0
alpha1	-0.10479	0.006023	-17.398	0
beta1	0.98302	0.000044	22187.860	0
gamma1	0.11466	0.003948	29.042	0

Information Criteria

-----

Akaike -6.4231  
 Bayes -6.4155  
 Shibata -6.4231  
 Hannan-Quinn -6.4204

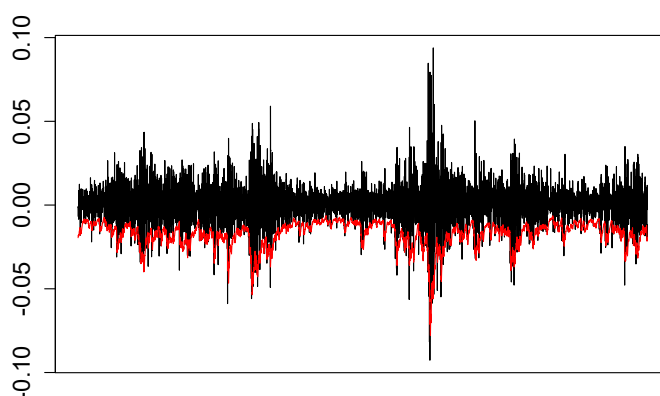
-----

$\omega = -0.15349$ ,  $\alpha = -0.10479$ ,  $\beta = 0.98302$ ,  $\theta = 1$  i  $\gamma$

Prisjetimo se sada EGARCH modela definiranog sa (2.26) i (2.27). U našem modelu, iznosi



koeficijenta su  $\omega = -0.15349$ ,  $\alpha = -0.10479$ ,  $\beta = 0.98302$ ,  $\theta = 1$  i  $\zeta = 0.11466$ . Opet nas, kao i u prethodnom primjeru, zanimaju uvjetne standardne devijacije ( $\sigma_t$ ) dobivene iz modela. Na isti način izračunat ćemo VaR. Na slici 3.4 opet prikazujemo VaR i log-povrate. I ovog puta postotak vrijednosti koje su pale ispod VaR-a je veći od 5%(5.923%), ali testovi pokazuju kako ne možemo odbaciti hipotezu o dobroj procjeni na razini značajnosti od 1%.



Slika 3.4: Kretanje jednodnevnog VaR-a uz 5% rizika za dionički indeks FTSE100 (procjena ARMA(1,1)+EGARCH(1,1) modelom)

Rezultati testova vidljivi su na sljedećem isječku R ispisa. Radi se o Kupiecovom([6]) i Christoffersenovom([3]) testu čiji rezultati jasno kažu da ne možemo odbaciti hipotezu o zadovoljavajućim prekoračenjima na razini značajnosti od 1%.

```
Unconditional Coverage (Kupiec)
Null-Hypothesis: Correct Exceedances
LR.uc Statistic: 0.619
LR.uc Critical: 6.635
LR.uc p-value: 0.432
Reject Null: NO
```

```
Conditional Coverage (Christoffersen)
Null-Hypothesis: Correct Exceedances and
Independence of Failures
LR.cc Statistic: 0.663
```

LR.cc Critical: 9.21

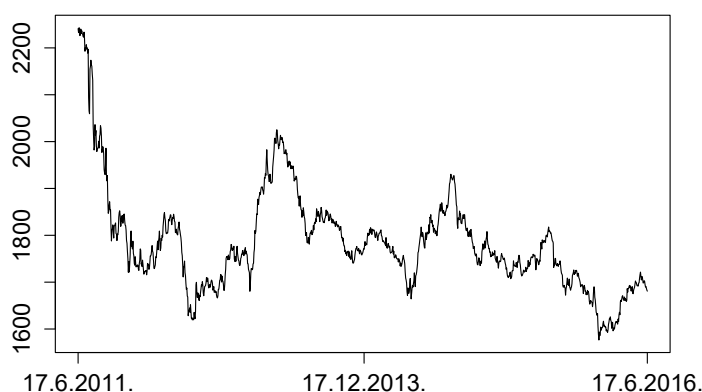
LR.cc p-value: 0.718

Reject Null: NO

Na kraju možemo zaključiti kako nijedan od 2 modela nije dao očekivano dobru procjenu. Ipak, kako ne bi preuranjeno zaključivali, pokušat ćemo isti postupak odraditi na drugom vremenskom nizu.

### Primjer 3: Modeliranje VaR-a dioničkog indeksa CROBEX pomoću GARCH(1,1) procesa sa konstantnim očekivanjem

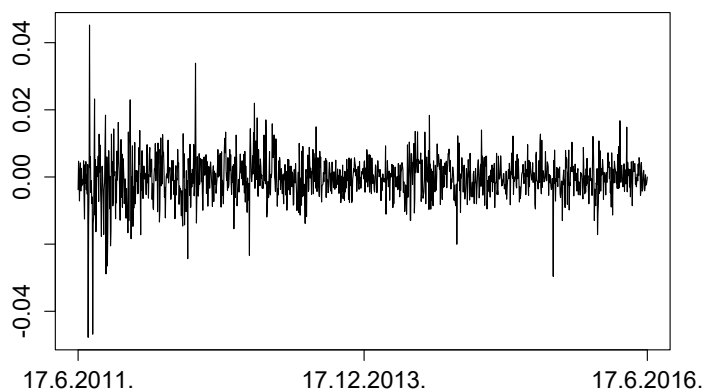
Umjesto FTSE100 indeksa, u ovom ćemo se primjeru pozabaviti domaćim burzovnim indeksom - CROBEX<sup>4</sup>. Podaci o cijenama uzeti su sa web-stranice Zagrebačke burze. Kao i ranije, pretpostavit ćemo da niz log-povrata ima konstantno očekivanje te ćemo zapravo modelirati  $e_t = p_t - \mu_t$ , gdje su sa  $p_t$  označeni log-povrati, a sa  $\mu$  njihova aritmetička sredina (procjenitelj za očekivanje).



Slika 3.5: Kretanje vrijednosti dioničkog indeksa CROBEX u razdoblju od 17.lipnja 2011. do 17.lipnja 2016. godine

---

<sup>4</sup>CROBEX je dionički indeks Zagrebačke Burze, sastoji se od dionica 25 tvrtki sa najvećom tržišnom kapitalizacijom



Slika 3.6: Putanja niza dnevnih log-povrata dioničkog indeksa CROBEX od 17.lipnja 2011. do 17.lipnja 2016. godine

Ponovno ćemo na početku provjeriti stacionarnost niza dnevnih log-povrata. Opet koristimo prošireni Dickey-Fuller test koji kao rezultat daje sljedeći ispis:

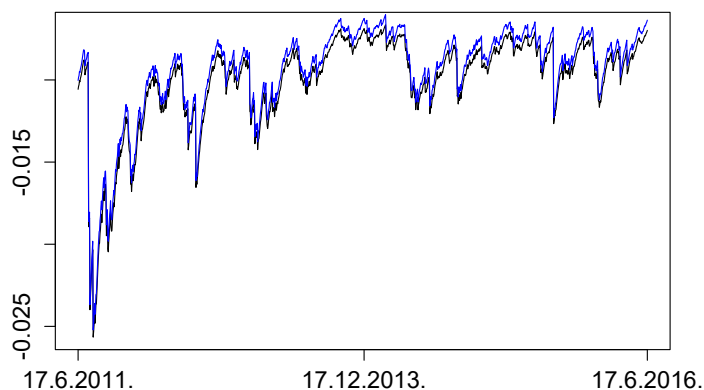
#### Augmented Dickey-Fuller Test

```
data: lp
Dickey-Fuller = -6.4489, Lag order = 20, p-value = 0.01
alternative hypothesis: stationary
```

Test nam opet daje do znanja da je niz stacionaran i da možemo početi sa modeliranjem. Koeficijenti dobivenog modela su  $\omega = 0.0000006849453$ ,  $\alpha = 0.04585211$  i  $\beta = 0.9358278$ . Za nas najbitniji podatak je uspješnost VaR procjena. Opet računamo 5%-tni jednodnevni VaR, ali ovoga puta sa većom uspješnošću. Naime, samo 4.65% povrata palo je ispod procijenjenog VaR-a, što pokazuje da je metoda vrlo uspješna. Time se potvrđuje mogućnost da je relativni neuspjeh metode bio posljedica promatranog niza<sup>5</sup>, a ne problema sa metodom. Za kraj ćemo istu procjenu napraviti korištenjem različite distribucije. Umjesto dosad korištene normalne, iskoristit ćemo Studentovu t distribuciju. Na slici 3.7 prikazana je usporedba procijenjenih VaR-ova pomoću normalne i Studentove razdiobe. Preciznost je na strani normalne razdiobe (4.65% u odnosu na 5.77%), što se

<sup>5</sup>U obzir treba uzeti vremensko razdoblje i činjenicu da je prvi niz promatran od 1996. do 2016. što znači da je prošao kroz 2 velike financijske krize

može zaključiti po tome što je putanja VaR-a procijenjena Studentovom razdiobom (na slici plavom bojom) gotovo konstantno veća od procjene normalnom razdiobom što jasno pokazuje da je procjena s pretpostavkom o normalnoj razdiobi nešto konzervativnija.



Slika 3.7: Usporedba VaR-a procijenjenog GARCH(1,1) modelom s pretpostavkom o normalnoj distribuciji inovacija (crna boja), odnosno s pretpostavkom o Studentovoj distribuciji inovacija (plava boja)

## 3.2 Zaključak

Na kraju možemo zaključiti da je primjena GARCH modela u procjeni VaR-a vrlo dobar način procjene rizika. Uz očito dobru pouzdanost, nudi se i širok spektar modela, primjerice sa konstantnim ili slučajnim uvjetnim očekivanjem, sa različitim pretpostavkama o razdiobi inovacija i sa nizom asimetričnih GARCH modela.

# Bibliografija

- [1] H.Akaike, *A New Look at the Statistical Model Identification*, IEEE Transactions on Automatic Control 19(6), 1974: 716–723
- [2] P.J.Brockwell, R.A.Davis, *Time Series: Theory and Models*, 2. izdanje, Springer, 2006.
- [3] P.Christoffersen, *Evaluating interval forecasts*, International Economic Review 39(4), 1998: 841-862
- [4] D.A.Dickey, S.E.Said, *Testing for Unit Roots in Autoregressive-Moving Average Models of Unknown Order*, Biometrika 71(3), 1984: 599–607
- [5] C.Francq, J.M.Zakoian, *GARCH Models*, Wiley and Sons, 2010.
- [6] P.H.Kupiec, *Techniques for verifying the accuracy of risk measurement models*, Journal of Derivatives 3(2), 1995: 73–84

# Sažetak

Glavna tema rada je stacionarnost GARCH procesa. Stacionarnost je bitna kako bi se model mogao koristiti u procjeni budućih vrijednosti vremenskog niza. Zbog povoljnih svojstava GARCH procesa, posebice zbog nekonstantne uvjetne varijance, oni mogu vrlo dobro opisivati vremenske nizove u financijskom svijetu. U kontekstu stacionarnosti općeg GARCH(p,q) procesa, uvodimo i vrlo bitan pojam Ljapunovljevog eksponenta čija će negativnost značiti jaku stacionarnost rješenja jakog GARCH modela. Važno je naglasiti da su ta rješenja također jedinstvena, neanticipativna i ergodska. Također, na kraju se rad bavi i primjenom GARCH modela u upravljanju rizicima trgovine na financijskom tržištu, kroz procjenu VaR-a za burzovne indekse FTSE100 i CROBEX.

# Summary

Main topic of this thesis is strong stationarity of GARCH processes. Stationarity is very important in eventual future values forecasting. Because of its good properties, especially its variable conditional variance, GARCH models are very good at capturing important properties of financial time series. Regarding stationarity of the general GARCH(p,q) case, we also introduce the Lyapunov exponent that plays an integral role in determining the existence of strong stationary solution to GARCH models. We should also note that this solution is unique, nonanticipative and ergodic. In the end, thesis also puts GARCH modeling into use by estimating Value-at-Risk for two stock indices, showing the way GARCH models can be used for risk management.

# Životopis

Daniel Stojanović rođen je 25. veljače 1993. godine u Zagrebu. Osnovnu školu završava u Zagrebu te potom upisuje V. gimnaziju, također u Zagrebu. Godine 2011. upisuje matematiku na Prirodoslovno matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. Preddiplomski studij Matematike završava 2014. godine te tako stječe naziv bacc.univ.math. Nakon toga upisuje diplomski studij matematike, smjer Financijska i poslovna matematika.