Lokalna izračunljivost

Sušić, Igor

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Igor Sušić

LOKALNA IZRAČUNLJIVOST

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc.dr.sc. Zvonko Iljazović

Zagreb, lipanj 2015.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Ovaj rad se bavi proučavanjem izračunljivosti i srodnih pojmova na metričkim i topološkim prostorima. Sam pojam izračunljivosti koji je prirodno definiran na skupu prirodnih brojeva se proširuje i na cijele, racionalne i naposljetku realne brojeve. Nadalje, pokazani su mnogi rezultati koji spajaju svojstva metričkih i topoloških prostora, kao što su neprekidnost, kompaktnost, otvorenost, zatvorenost i drugi, sa svojstvima kao što su izračunljivost, poluizračunljivost, rekurzivna prebrojivost itd.

Osnovni značaj ovog rada je što se poopćavaju rezultati iz članka [6] napravljeni za izračunljive metričke prostore na izračunljive topološke prostore.

Tijekom cijelog rada navedeni su svi pojmovi i definicije nužne za cjelovitost i smislenost rada, od onih elementarnih koji se obrađuju na standardnim kolegijima tokom studija do onih naprednijih vezanih za tematiku rada. Gotovo sve tvrdnje su detaljno dokazane i neke odabrane potkrepljene slikama radi bolje vizualizacije. Za onih nekoliko tvrdnji koje nisu dokazane navedena je literatura gdje se pripadni dokaz može pronaći.

Rad je logički podijeljen u tri poglavlja. U prvom poglavlju govorimo općenito o izračunljivosti. Tako navodimo osnovne pojmove i definicije vezane za izračunljivost koji se susreću u standardnom kolegiju Izračunljivost. Potom, razrađujemo izračunljivost u skupovima $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R}$ što predstavlja osnovu za cijeli rad i razmatranja koja provodimo u ostalim poglavljima.

U drugom poglavlju „Izračunljivi metrički prostori" krenuvši od same definicije metričkog prostora razrađujemo teoriju i dolazimo do pojma izračunljivog metričkog prostora. Nadalje, govorimo o rekurzivnim brojevima, gustim nizovima, rekurzivno prebrojivim skupovima, poluizračunljivim skupovima i navodimo mnoge rezultate iz teorije metričkih prostora s ciljem povezivanja sa svojstvom izračunljivosti. Također, ovdje uvodimo pojam r.r.o. funkcije koji će odigrati važnu ulogu u dokazivanju mnogih tvrdnji u radu. Naime, ispostavit će se da se mnoge stvari bitno jednostavnije dokazuju upravo zahvaljujući ovim funkcijama. U potpoglavlju „Lokalna izračunljivost" uvodimo pojam *izračunljivost do na* *skup* koji je bitan za razvoj same teorije. Nadalje, bitni pojmovi koji se provlače kroz cijeli rad a uvedeni su u ovom poglavlju su i *formalna sadržanost* i *formalna disjunktnost*.

Nakon što smo u drugom poglavlju detaljno objasnili i dokazali mnoge tvrdnje vezane za lokalnu izračunljivost u metričkim prostorima, u trećem poglavlju pokušavamo te tvrdnje traslatirati u topološke prostore i pokazati postojanje ekvivalentnih tvrdnji i rezultata i u topološkim prostorima. Krećemo od samih osnovnih definicija topoloških prostora pa postepeno gradeći teoriju dolazimo do mnogih rezultata koji povezuju topološke prostore i izračunljivost. Dosta rezultata iz same topologije ovdje su objašnjeni i dokazani. Uvedeni su pojmovi kao npr. *Cb–kompaktnost*.

Na kraju, rad je ispunio svoju svrhu kao završni rad za diplomski studij računarstva i matematike, ali je ujedno i premašio te okvire zbog originalnih elemenata koje sadržava.

Poglavlje 1

Izračunljivost

1.1 Osnovni pojmovi i definicije

Neka su $k, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te $S_1, \dots, S_n \subseteq \mathbb{N}^k$. Neka su

$$g_1 \colon S_1 \to \mathbb{N},\ g_2 \colon S_2 \to \mathbb{N},\ \dots,\ g_n \colon S_n \to \mathbb{N}.$$

Neka je $T \subseteq \mathbb{N}^n$ te $f \colon T \to \mathbb{N}$. Definiramo k-mjesnu funkciju h sa

$$h(\vec{x}) \simeq f(g_1(\vec{x}), \dots, g_n(\vec{x})), \quad \vec{x} \in \mathbb{N}^k.$$

Ovo znači da je domena funkcije h skup

$$\left\{\vec{x} \in S_1 \cap \ldots \cap S_k \mid (g_1(\vec{x}), \dots, g_n(\vec{x}) \in T)\right\}$$

i za $\vec{x}$ iz tog skupa je

$$h(\vec{x}) = f(g_1(\vec{x}), \dots, g_n(\vec{x})).$$

Kažemo da je funkcija h dobivena *kompozicijom funkcija* f, g_1, ..., g_n.

Neka je $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te $f \colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ i $g \colon \mathbb{N}^{n+2} \to \mathbb{N}$. Definiramo funkciju $h \colon \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ sa

$$\begin{aligned} h(0, x_1, \dots, x_n) &= f(x_1, \dots, x_n) \\ h(y+1, x_1, \dots, x_n) &= g\left(h(y, x_1, \dots, x_n), y, x_1, \dots, x_n\right). \end{aligned}$$

Za funkciju h kažemo da je dobivena *primitivnom rekurzijom* od funkcija f i g.

Pojam da je h dobivena primitivnom rekurzijom od f i g na prirodan način proširujemo i na slučaj kada su $f\colon S \to \mathbb{N}$, $g\colon T \to \mathbb{N}$, gdje su $T \subseteq \mathbb{N}^n$, $S \subseteq \mathbb{N}^{n+2}$; u tom slučaju domena funkcije h je podskup od $\mathbb{N}^{n+1}$.

Neka je $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te $g\colon \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$. Definiramo

$$S = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{N}^n \;\middle|\; \exists y \in \mathbb{N} \text{ takav da je } g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0\right\}.$$

Neka je $f\colon S \to \mathbb{N}$ definirana sa

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \mu y \left[g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0\right],$$

pri čemu $\mu y\left[g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0\right]$ označava najmanji $y \in \mathbb{N}$ takav da je $g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$.
Pišemo i $f(\vec{x}) \simeq \mu y\left[g(\vec{x}, y) = 0\right]$, $\vec{x} \in \mathbb{N}^n$.
Za funkciju f kažemo da je dobivena primjenom μ – *operatora* na funkciju g.

Pojam, da je f dobivena primjenom μ–operatora na g, na prirodan način proširujemo i na slučaj kada je $g\colon T \to \mathbb{N}$, gdje je $T \subseteq \mathbb{N}^{n+1}$.

Neka su $s, z\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcije definirane sa $s(x) = x + 1$, $z(x) = 0$. Za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ i $j \in \{1, \ldots, n\}$ neka je $I^n_j\colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ projekcija na j-tu koordinatu, tj. $I^n_j(x_1, \ldots, x_n) = x_j$. Za funkcije s, z, I^n_j , $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $j \in \{1, \ldots, n\}$ kažemo da su *inicijalne funkcije*.

Definiramo skupove φ_n, $n \in \mathbb{N}$ na sljedeći način:

- Neka je φ_0 skup svih inicijalnih funkcija.
- Pretpostavimo da je $n \in \mathbb{N}$, te da smo definirali φ_n.
- Tada definiramo A kao skup svih funkcija koje se mogu dobiti kompozicijom i primitivnom rekurzijom od funkcija iz φ_n, te stavimo $\varphi_{n+1} = A \cup \varphi_n$

Za uniju $\cup_{n\in\mathbb{N}}\varphi_n$ kažemo da je *klasa primitivno rekurzivnih funkcija*, a za elemente tog skupa kažemo da su *primitivno rekurzivne funkcije*.

Za $x, y \in \mathbb{N}$ neka $x \dot{-} y$ označava broj definiran sa

$$x \dot{-} y = \begin{cases} x - y, & \text{ako je } x \geq y \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Funkciju $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $(x, y) \to x \dot{-} y$ nazivamo *modificirano oduzimanje*.

Neka su $sg, \overline{sg} \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcije definirane sa

$$sg(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases},$$

$$\overline{sg}(x) = \begin{cases} 0, & x \geq 1 \\ 1, & x = 0 \end{cases}.$$

Može se pokazati da su funkcije sg, $\overline{sg}$ i modificirano oduzimanje primitivno rekurzivne. Nadalje, i sljedeće funkcije sa $\mathbb{N}^2$ u $\mathbb{N}$ su primitivno rekurzivne:

1) $(x, y) \mapsto x + y$

2) $(x, y) \mapsto x \cdot y$

3) $(x, y) \mapsto \max\{x, y\}$

4) $(x, y) \mapsto \min\{x, y\}$

5) $(x, y) \mapsto |x - y|$

Za $f \colon S \to \mathbb{N}$, $S \subseteq \mathbb{N}^k$ kažemo da je *totalna* ako je $S = \mathbb{N}^k$.

Definirajmo skupove $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ induktivno na sljedeći način:

- Neka je φ_0 skup svih inicijalnih funkcija.
- Pretpostavimo da je $m \in \mathbb{N}$, te da smo definirali φ_m.

- Tada definiramo φ_{m+1} kao skup svih funkcija oblika $h\colon S \to \mathbb{N}$, gdje je $S \subseteq \mathbb{N}^k$ za neki $k \geq 1$, tako da vrijedi jedno od sljedećeg:
  - h je dobivena kompozicijom funkcija $f, g_1, \ldots, g_n$, gdje su $f, g_1, \ldots, g_n \in \varphi_m$
  - h je dobivena primitivnom rekurzijom od f i g gdje su f, $g \in \varphi_m$
  - h je dobivena primjenom μ-operatora na f gdje je $f \in \varphi_m$
  - $h \in \varphi_m$.

(Jasno je da vrijedi $\varphi_0 \subseteq \varphi_1 \subseteq \ldots \subseteq \varphi_m \subseteq \varphi_{m+1} \subseteq \ldots$.)
Za funkciju $f\colon S \to \mathbb{N}$, gdje je $S \subseteq \mathbb{N}^k$, $k \geq 1$ kažemo da je *parcijalno rekurzivna* ako je $f \in \varphi_m$ za neki $m \in \mathbb{N}$. Dakle $\cup_{m\in\mathbb{N}}\varphi_m$ je skup svih parcijalno rekurzivnih funkcija.

Vrijedi sljedeće:

1) ako su $f, g_1, \ldots, g_n$ parcijalno rekurzivne funkcije i h dobivena kompozicijom od $f, g_1, \ldots, g_n$, onda je i h parcijalno rekurzivna funkcija

2) ako su f i g parcijalno rekurzivne funkcije i h dobivena primitivnom rekurzijom od f i g, onda je i h parcijalno rekurzivna funkcija

3) ako je g parcijalno rekurzivne funkcije i f dobivena primjenom μ–operatora na g, onda je i f parcijalno rekurzivna funkcija.

Za funkciju kažemo da je *rekurzivna* ako je parcijalno rekurzivna i totalna.

Uočimo da je svaka primitivno rekurzivna funkcija rekurzivna.

Uočimo sljedeće: ako su $f, g\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ funkcije, onda je funkcija $f + g$ kompozicija funkcije $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $(x, y) \mapsto x + y$ i funkcija f i g. Stoga je $f + g$ rekurzivna funkcija ako su f i g rekurzivne.
Isto tako, $f \cdot g$ je rekurzivna ako su f i g rekurzivne.

Dokazi sljedećih dviju propozicija se mogu naći u [[9]].

Propozicija 1.1.1. *Neka je $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Neka su $g\colon \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ i $\alpha, \beta\colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije. Neka je $f\colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa*

$$f(\vec{x}) = \begin{cases} \sum_{i=\alpha(\vec{x})}^{\beta(\vec{x})} g(i, \vec{x}), & \text{ako je } \alpha(\vec{x}) \leq \beta(\vec{x}) \\ 0, & \text{inače} \end{cases}.$$

Tada je f rekurzivna funkcija.

Propozicija 1.1.2. *Neka je $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Neka su $g\colon \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ i $\alpha, \beta\colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije. Neka je $h\colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa*

$$h(\vec{x}) = \begin{cases} \prod_{i=\alpha(\vec{x})}^{\beta(\vec{x})} g(i, \vec{x}), & \text{ako je } \alpha(\vec{x}) \leq \beta(\vec{x}) \\ 1, & \text{inače} \end{cases}.$$

Tada je h rekurzivna funkcija.

Neka je $k \geq 1$, te $S \subseteq \mathbb{N}^k$. Za skup S kažemo da je *rekurzivan* ako je njegova karakteristična funkcija $\chi_S : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivna:

$$\chi_S(\vec{x}) = \begin{cases} 1, & \vec{x} \in S \\ 0, & \vec{x} \notin S \end{cases}.$$

Neka je $k \in \mathbb{N}$ te $c_k\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa $c_k(x) = k$, $\forall x \in \mathbb{N}$.

Lako se vidi da je c_k primitivno rekurzivna funkcija za svaki $k \in \mathbb{N}$.

Propozicija 1.1.3. *Neka je $a \in \mathbb{N}$ te $G\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija. Neka je $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa*

$$\begin{aligned} f(0) &= a \\ f(y+1) &= G(f(y), y). \end{aligned}$$

Tada je f rekurzivna.

Dokaz. Neka je $f' : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa $f'(y, x) = f(y)$.
Imamo

$$\begin{aligned} f'(0, x) &= f(0) = a = c_a(x) \\ f'(y+1, x) &= f(y+1) = G(f(y), y) = G(f'(y, x), y). \end{aligned}$$

Definiramo funkciju $H : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ sa

$$H(a, b, c) = G(a, b).$$

Uočimo da je H kompozicija funkcija G, I^3_1, I^3_2, pa je rekurzivna.
Dakle vrijedi

$$\begin{aligned} f'(0, x) &= c_a(x) \\ f'(y+1, x) &= H(f'(y, x), y, x). \end{aligned}$$

Dakle, f' je dobivena primitivnom rekurzijom od c_a i H, pa je f' rekurzivna funkcija.
Imamo

$$f(x) = f'(x, x)$$

pa je f rekurzivna kao kompozicija funkcija f', I^1_1, I^1_1. □

Propozicija 1.1.4. *Neka su $n, k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Neka su $F_1, \ldots, F_n : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije. Neka su $S_1, \ldots, S_n \subseteq \mathbb{N}^k$ rekurzivni skupovi takvi da za svaki $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ postoji točno jedan $i \in \{1, \ldots, n\}$ takav da je $\vec{x} \in S_i$.*
Neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ definirana sa

$$f(\vec{x}) = \begin{cases} F_1(\vec{x}), & \text{ako je } \vec{x} \in S_1 \\ F_2(\vec{x}), & \text{ako je } \vec{x} \in S_2 \\ \quad\vdots & \\ F_n(\vec{x}), & \text{ako je } \vec{x} \in S_n. \end{cases}$$

Tada je f rekurzivna funkcija.

Dokaz. Za svaki $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$f(\vec{x}) = F_1(\vec{x}) \cdot \chi_{S_1}(\vec{x}) + F_2(\vec{x}) \cdot \chi_{S_2}(\vec{x}) + \ldots + F_n(\vec{x}) \cdot \chi_{S_n}(\vec{x}).$$

Dakle f je rekurzivna funkcija kao konačan zbroj rekurzivnih funkcija. □

Za $n \in \mathbb{N}$, neka je p_n $(n+1)$-vi prosti broj. Dakle $p_0 = 2$, $p_1 = 3$, $p_2 = 5$, itd.

Neka je $h \colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa

$$h(j,i) = \begin{cases} \text{eksponent s kojim } p_i \text{ ulazi u rastav od } j \text{ na proste faktore}, & \text{ako je } j > 0 \\ 1, & j = 0 \end{cases}.$$

Za $j, i \in \mathbb{N}$ broj $h(j,i)$ označavamo sa $\langle j \rangle_i$.

Neka je $len \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa

$$len(x) = \begin{cases} \text{najveći } k \in \mathbb{N} \text{ takav da } p_k | x, & x \geq 2 \\ 0, & x = 0 \text{ ili } x = 1. \end{cases}$$

Funkcije $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $i \mapsto p_i$, $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $(j,i) \to \langle j \rangle_i$ te funkcija *len* su primitivno rekurzivne (vidi [[9]]).

Neka je $S \subseteq \mathbb{N}$. Za S kažemo da je *rekurzivno prebrojiv* skup ako je $S = \emptyset$ ili ako postoji rekurzivna funkcija $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $S = f(\mathbb{N})$.

1.2 Izračunljivost u $\mathbb{Z}$

Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$. Za f kažemo da je rekurzivna ako postoje rekurzivne funkcije $u, v : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je

$$f(x) = (-1)^{v(x)} u(x), \quad \forall x \in \mathbb{N}^k. \tag{1.1}$$

Lema 1.2.1. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$. Tada je f rekurzivna funkcija ako i samo ako postoje rekurzivne funkcije $a, b : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je $f(x) = a(x) - b(x)$, $\forall x \in \mathbb{N}^k$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je f rekurzivna funkcija (kao funkcija u $\mathbb{Z}$). Tada postoje funkcije $u, v : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da $f(x) = (-1)^{v(x)}u(x)$, $\forall x \in \mathbb{N}^k$. Tada vrijedi

$$(-1)^{v(x)}u(x) = \chi_{2\mathbb{N}}(v(x))u(x) - \chi_{2\mathbb{N}+1}(v(x))u(x)$$

pa je jasno da tražene funkcije a i b postoje.

Obratno, pretpostavimo da postoje rekurzivne funkcije $a, b : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je $f(x) = a(x) - b(x)$, $\forall x \in \mathbb{N}^k$. Vrijedi:

$$a(x) - b(x) = (-1)^{\overline{sg}\left(a(x) \dot{-} b(x)\right)}\left|a(x) - b(x)\right|.$$

Iz činjenice da su funkcije $\overline{sg}$, $(x, y) \mapsto x \dot{-} y$ i $(x, y) \mapsto |x - y|$ rekurzivne slijedi da je f rekurzivna. □

Propozicija 1.2.2. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka su $f, g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ rekurzivne funkcije. Tada su rekurzivne i funkcije $-f,\ f + g,\ f \cdot g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$.*

Dokaz. Prema prethodnoj lemi 1.2.1 postoje rekurzivne funkcije $a,\ b,\ a',\ b' : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je $f(x) = a(x) - b(x)$, $g(x) = a'(x) - b'(x)$, $\forall x \in \mathbb{N}^k$.

Imamo:

$$\begin{aligned} -f(x) &= b(x) - a(x) \\ f(x) + g(x) &= \big(a(x) + a'(x)\big) - \big(b(x) + b'(x)\big) \\ f(x) \cdot g(x) &= \big(a(x)a'(x) + b(x)b'(x)\big) - \big(a(x)b'(x) + b(x)a'(x)\big). \end{aligned}$$

Koristeći činjenicu da su zbroj i produkt rekurzivnih funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije, iz ovoga i prethodne leme slijedi tvrdnja propozicije. □

Uočimo sljedeće:

(1) Ako je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ rekurzivna funkcija, onda je $|f| : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija (kao funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$), jer je $|f| = u(x)$, gdje je u funkcija iz (1.1). Posebno, ako je $\operatorname{Im} f \subseteq \mathbb{N}$, onda je f rekurzivna kao funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$.

(2) Nadalje, ako je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija, onda je f rekurzivna i kao funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ (jer je $f(x) = (-1)^0 f(x)$).

1.3 Izračunljivost u $\mathbb{Q}$

Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$. Za f kažemo da je rekurzivna funkcija ako postoje rekurzivne funkcije $u, v, w : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je $v(x) \neq 0$ i $f(x) = (-1)^{w(x)} \frac{u(x)}{v(x)}$, $\forall x \in \mathbb{N}^k$.

Uočimo sljedeće: funkcija $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ je rekurzivna ako i samo ako postoje rekurzivne funkcije $u : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ i $v : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je $v(x) \neq 0$ i $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, $\forall x \in \mathbb{N}^k$.

Propozicija 1.3.1. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka su $f, g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivne funkcije. Tada su i funkcije $-f$, $|f|$, $f + g$, $f \cdot g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivne. Ako je $f(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{N}^k$ onda je i funkcija $1/f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivna.*

Dokaz. Budući da su f i g rekurzivne, postoje rekurzivne funkcije $u,\ u' : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ i $v,\ v' : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}, \quad g(x) = \frac{u'(x)}{v'(x)}, \qquad \forall x \in \mathbb{N}^k.$$

Imamo

$$f(x) + g(x) = \frac{u(x)}{v(x)} + \frac{u'(x)}{v'(x)} = \frac{u(x)v'(x) + u'(x)v(x)}{v(x)v'(x)}$$

pa iz propozicije 1.2.2 slijedi da je $f + g$ rekurzivna funkcija. Analogno dobivamo da su $-f$, $|f|$, $f \cdot g$ rekurzivne funkcije.
Budući da je f rekurzivna, postoje rekurzivne funkcije $a, b, c : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je $b(x) \neq 0$ i $f(x) = (-1)^{c(x)} \frac{a(x)}{b(x)}$. Pretpostavimo da je $f(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{N}^k$. Tada je $a(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{N}^k$ te vrijedi

$$\frac{1}{f(x)} = (-1)^{c(x)} \frac{b(x)}{a(x)}$$

pa je očito da je $1/f$ rekurzivna funkcija. □

Uočimo:

(1) Svaka rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ je rekurzivna i kao funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ (jer je $(-1)^{v(x)} u(x) = (-1)^{v(x)} \frac{u(x)}{c_1(x)}$, gdje je $c_1 : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ konstantna funkcija s vrijednošću 1).

(2) Pretpostavimo da je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivna funkcija takva da $\mathrm{Im}(f) \subseteq \mathbb{Z}$. Neka su $u, v, w : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije takve da je $v(x) \neq 0$ i $f(x) = (-1)^{w(x)} \frac{u(x)}{v(x)}$, $\forall x \in \mathbb{N}^k$. Neka je $x \in \mathbb{N}^k$. Iz $f(x) \in \mathbb{Z}$ slijedi da je $\frac{u(x)}{v(x)} \in \mathbb{N}$, pa je $\frac{u(x)}{v(x)} = \left\lfloor \frac{u(x)}{v(x)} \right\rfloor$.
Dakle
$$f(x) = (-1)^{w(x)} \left\lfloor \frac{u(x)}{v(x)} \right\rfloor.$$
Iz činjenice da je funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, definirana sa
$$(a, b) \mapsto \begin{cases} \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor & , b \geq 1 \\ 0 & , b = 0 \end{cases}$$
rekurzivna, slijedi da je f rekurzivna kao funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$.

Propozicija 1.3.2. *Neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivna funkcija. Tada su skupovi*
$$\left\{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) > 0\right\},$$
$$\left\{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) = 0\right\},$$
$$\left\{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) \geq 0\right\}$$
rekurzivni.

Dokaz. Neka su $u, v, w : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije takve da je $v(x) \neq 0$ i $f(x) = (-1)^{w(x)} \frac{u(x)}{v(x)}$, $\forall x \in \mathbb{N}^k$.
Označimo prvi skup sa S, drugi sa T, a treći sa V.
Neka je $x \in \mathbb{N}^k$, vrijedi
$$x \in S \Leftrightarrow (-1)^{w(x)} \frac{u(x)}{v(x)} > 0 \Leftrightarrow u(x) > 0 \text{ i } w(x) \in 2\mathbb{N}. \tag{1.2}$$
Neka je $S_1 = \left\{x \mid u(x) > 0\right\}$ i $S_2 = \left\{x \mid w(x) \in 2\mathbb{N}\right\}$. Skupovi S_1 i S_2 su rekurzivni jer je
$$\chi_{S_1}(x) = sg(u(x)),$$
$$\chi_{S_2}(x) = \chi_{2\mathbb{N}}(w(x)).$$

Prema (1.2), vrijedi:

$$x \in S \Leftrightarrow x \in S_1 \text{ i } x \in S_2 \Leftrightarrow x \in S_1 \cap S_2.$$

Dakle, $S = S_1 \cap S_2$, pa slijedi da je S rekurzivan skup.
Za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi:

$$x \in T \Leftrightarrow (-1)^{w(x)} \frac{u(x)}{v(x)} = 0 \Leftrightarrow u(x) = 0,$$

stoga je

$$\chi_T(x) = \overline{sg}(u(x)).$$

Zaključak: T je rekurzivan.
Iz $V = S \cup T$ slijedi da je i V rekurzivan. □

Korolar 1.3.3. *Neka su $f, g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivne funkcije. Tada su skupovi*

$$\left\{x \in \mathbb{N}^k \;\middle|\; f(x) < g(x)\right\},$$

$$\left\{x \in \mathbb{N}^k \;\middle|\; f(x) = g(x)\right\},$$

$$\left\{x \in \mathbb{N}^k \;\middle|\; f(x) \leq g(x)\right\}$$

rekurzivni.

Dokaz. Označimo prvi skup sa S, drugi sa T, a treći sa V. Neka je $h : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ definiran sa $h(x) = g(x) - f(x)$. Dakle $h = g + (-f)$, pa iz propozicije 1.3.1 slijedi da je h rekurzivna funkcija. Očito je $S = \left\{x \in \mathbb{N}^k \;\middle|\; h(x) > 0\right\}$, $T = \left\{x \in \mathbb{N}^k \;\middle|\; h(x) = 0\right\}$ i $V = \left\{x \in \mathbb{N}^k \;\middle|\; h(x) \geq 0\right\}$ pa tvrdnja korolara slijedi iz propozicije 1.3.2. □

Neka su $k, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Za funkciju $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ kažemo da je rekurzivna ako su komponente funkcije od g rekurzivne, tj. ako su funkcije $g_1, \ldots, g_n : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je $g(x) = (g_1(x), \ldots, g_n(x))$, $\forall x \in \mathbb{N}^k$, rekurzivne.

Uočimo sljedeće: ako su $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ i $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije onda je i funkcija $f \circ g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivna. Naime, funkcija $f \circ g$ je kompozicija funkcija $f, g_1, \ldots, g_n$ koje su rekurzivne, pri čemu su $g_1, \ldots, g_n$ komponentne funkcije funkcije g.

Propozicija 1.3.4. *Neka su $k, n : \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ rekurzivna funkcija.*

(1) Ako je $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{Z}$ rekurzivna funkcija, onda je i $f \circ g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ rekurzivna funkcija.

(2) Ako je $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{Q}$ rekurzivna funkcija, onda je i $f \circ g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivna funkcija.

Dokaz. (2) Neka su $u, v, w : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije takve da je $v(y) \neq 0$ i $f(y) = (-1)^{w(y)} \frac{u(y)}{v(y)}$, $\forall y \in \mathbb{N}^n$. Tada $\forall x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= (-1)^{w\left(g(x)\right)} \frac{u(g(x))}{v(g(x))} \\ &= (-1)^{(w \circ g)(x)} \frac{(u \circ g)(x)}{(v \circ g)(x)}.\end{aligned}$$

Budući da su funkcije $u \circ g,\ v \circ g,\ w \circ g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne, funkcija $f \circ g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ je rekurzivna.
Analogno dokazujemo tvrdnju (1). □

1.4 Izračunljivost u $\mathbb{R}$

Neka je $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$ te neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$. Za funkciju f kažemo da je rekurzivna (kao funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$) ako postoji rekurzivna funkcija $F : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ takva da je

$$\left| f(x) - F(x, i) \right| < 2^{-i},\ \forall x \in \mathbb{N}^k,\ \forall i \in \mathbb{N}.$$

Za funkciju F kažemo da je rekurzivna aproksimacija funkcije f.

Lema 1.4.1. *Neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ funkcija te neka su $F : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ i $H : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije takve da je*

$$\left| f(x) - F(x, i) \right| < H(x) \cdot 2^{-i},\ \forall x \in \mathbb{N}^k,\ \forall i \in \mathbb{N}. \tag{1.3}$$

Tada je funkcija f rekurzivna.

Dokaz. Neka su $x \in \mathbb{N}^k$ i $i \in \mathbb{N}$.
Prema (1.3) vrijedi

$$\begin{aligned}\left|f(x) - F(x, i + H(x))\right| &< H(x) \cdot 2^{-\left(i+H(x)\right)} \\ &= \frac{H(x)}{2^{H(x)}} \cdot 2^{-i} \\ &\leq 2^{-i}.\end{aligned}$$

Definirajmo $G : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ sa $G(x, i) = F(x, i + H(x))$. Imamo dakle da je

$$\left|f(x) - G(x, i)\right| < 2^{-i}, \ \forall x \in \mathbb{N}^k, \ \forall i \in \mathbb{N}.$$

Preostaje još dokazati da je funkcija G rekurzivna. Definirajmo funkciju $g : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}^{k+1}$ sa

$$g(x, i) = (x, i + H(x)), \ x \in \mathbb{N}^k, \ i \in \mathbb{N}.$$

Funkcija g je rekurzivna jer su njene komponentne funkcije rekurzivne (prvih k komponentnih funkcija od g su projekcije, a zadnja komponentna funkcija od g je zbroj projekcije i rekurzivne funkcije). Iz $G = F \circ g$ i propozicije 1.3.4 slijedi da je G rekurzivna funkcija. □

Uočimo sljedeće: ako je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivna funkcija, onda je f rekurzivna i kao funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$.
Naime, definiramo funkciju $F : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ sa $F(x, i) = f(x)$. Imamo $F(x, i) = f(g(x, i))$, gdje je $g : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}^k$ funkcija definirana sa $g(x, i) = x$, pa iz propozicije 1.3.4 slijedi da je F rekurzivna. Za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ i za svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijedi $\left|f(x) - F(x, i)\right| = 0 < 2^{-i}$, prema tome f je rekurzivna (kao funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$).

Lema 1.4.2.

(1) *Neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivna funkcija. Tada postoji rekurzivna funkcija $H : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takva da $\left|f(x)\right| < H(x)$, $\forall x \in \mathbb{N}^k$.*

(2) *Neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ rekurzivna funkcija. Tada postoji rekurzivna funkcija $H : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takva da $\left|f(x)\right| < H(x)$, $\forall x \in \mathbb{N}^k$.*

Dokaz.

(1) Imamo da je $f(x) = (-1)^{w(x)} \frac{u(x)}{v(x)}$, $\forall x \in \mathbb{N}^k$, pri čemu su $u, v, w : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije ($v(x) \neq 0$). Slijedi da je

$$\left|f(x)\right| = \frac{u(x)}{v(x)} \leq u(x) < u(x) + 1, \quad \forall x \in \mathbb{N}^k.$$

Stoga možemo uzeti $H(x) = u(x) + 1$.

(2) Uočimo prije svega da za sve $a, b \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$|a| - |b| \leq |a - b| \tag{1.4}$$

(jer $|a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b|$).
Neka je $F : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ rekurzivna aproksimacija od f. Tada $\forall x \in \mathbb{N}^k$ i $\forall i \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\left|f(x) - F(x, i)\right| < 2^{-i},$$

pa posebno za $i = 0$ dobivamo

$$\left|f(x) - F(x, 0)\right| < 1 \tag{1.5}$$

Koristeći (1.4), iz (1.5) slijedi

$$\left|f(x)\right| - \left|F(x, 0)\right| < 1,$$

pa je

$$\left|f(x)\right| < \left|F(x, 0)\right| + 1.$$

Funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$, $x \mapsto \left|F(x, 0)\right| + 1$ je rekurzivna, što slijedi iz propozicije 1.3.1 i činjenice da je funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$, $x \mapsto F(x, 0)$ rekurzivna (prema propoziciji 1.3.4).
Prema dijelu (1) postoji rekurzivna funkcija $H : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takva da je

$$\left|F(x, 0)\right| + 1 \leq H(x), \quad \forall x \in \mathbb{N}^k.$$

Stoga je $\left|f(x)\right| < H(x)$, $\forall x \in \mathbb{N}^k$.

□

Teorem 1.4.3. *Neka su $f, g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ rekurzivne funkcije. Tada su rekurzivne i funkcije $-f,\ |f|,\ f+g,\ f \cdot g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$.*

Dokaz. Neka su $F, G : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ rekurzivne aproksimacije od f i g. Za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ i $\forall i \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\begin{aligned}\Big|(-f(x)) - (-F(x,i))\Big| &= \Big| -f(x) + F(x,i)\Big| \\ &= \Big|f(x) - F(x,i)\Big| \\ &< 2^{-i}.\end{aligned}$$

Prema tome $-F$ je rekurzivna aproksimacija od $-f$. Dakle, $-f$ je rekurzivna funkcija.

Općenito, za $a, b \in \mathbb{R}$ vrijedi $\Big||a| - |b|\Big| \leq \Big|a - b\Big|$, što slijedi iz $|a| - |b| \leq |a-b|$ i $|b| - |a| \leq |b-a| = |a-b|$. Neka su $x \in \mathbb{N}^k$ i $i \in \mathbb{N}$. Vrijedi:

$$\begin{aligned}\Big||f|(x) - |F|(x,i)\Big| &= \Big||f(x)| - |F(x,i)|\Big| \\ &\leq \Big|f(x) - F(x,i)\Big| \\ &< 2^{-i}.\end{aligned}$$

Prema tome, $\Big|F\Big|$ je rekurzivna aproksimacija funkcije $\Big|f\Big|$. Dakle, $\Big|f\Big|$ je rekurzivna funkcija.

Za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ i $\forall i \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\begin{aligned}\Big|(f+g)(x) - (F+G)(x,i)\Big| &= \Big|f(x) - F(x,i) + g(x) - G(x,i)\Big| \\ &\leq \Big|f(x) - F(x,i)\Big| + \Big|g(x) - G(x,i)\Big| \\ &< 2^{-i} + 2^{-i} \\ &= 2 \cdot 2^{-i}.\end{aligned}$$

Dakle, $\Big|(f+g)(x) - (F+G)(x,i)\Big| < 2 \cdot 2^{-i}$, pa iz leme 1.4.1 slijedi da je $f+g$ rekurzivna funkcija.

Neka su $x \in \mathbb{N}^k$ i $i \in \mathbb{N}$. Tada je

$$\Big|G(x,i)\Big| - \Big|g(x)\Big| \leq \Big|g(x) - G(x,i)\Big| < 2^{-i} \leq 1,$$

pa je

$$\Big|G(x,i)\Big| \leq \Big|g(x)\Big| + 1 \tag{1.6}$$

Imamo:

$$\begin{aligned}
\left|(f\cdot g)(x)-(F\cdot G)(x,i)\right| &= \left|f(x)g(x)-F(x,i)G(x,i)\right| \\
&= \left|f(x)g(x)-f(x)G(x,i)+f(x)G(x,i)-F(x,i)G(x,i)\right| \\
&= \left|f(x)(g(x)-G(x,i))+(f(x)-F(x,i))G(x,i)\right| \\
&\leq \left|f(x)\right|2^{-i}+2^{-i}\left|G(x,i)\right| \\
&= \left(\left|f(x)\right|+\left|G(x,i)\right|\right)2^{-i} \\
&\overset{(1.6)}{\leq} \left(\left|f(x)\right|+\left|g(x)\right|+1\right)2^{-i}.
\end{aligned}$$

Prema lemi 1.4.2 postoji rekurzivna funkcija $H : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takva da je $\left|f(x)\right| + \left|g(x)\right| + 1 < H(x)$.
Stoga je $\left|(f\cdot g)(x)-(F\cdot G)(x,i)\right| < H(x)\cdot 2^{-i}$. Iz leme 1.4.1 slijedi da je $f\cdot g$ rekurzivna funkcija. □

Propozicija 1.4.4. *Neka su $k, n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ te neka su $g\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ i $f\colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{R}$ rekurzivne funkcije. Tada je $f\circ g\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ rekurzivna funkcija.*

Dokaz. Neka je $F\colon \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{Q}$ rekurzivna aproksimacija od f. Tada za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ i svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\left|f(g(x)) - F(g(x), i)\right| < 2^{-i}. \tag{1.7}$$

Neka je $G\colon \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ funkcija definirana sa $G(x,i) = F(g(x), i)$. Tada je G rekurzivna funkcija prema propoziciji 1.3.4 (2), te iz (1.7) slijedi da je G rekurzivna aproksimacija od $f\circ g$. □

Neka je $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ te $S \subseteq \mathbb{N}^k$. Za S kažemo da je rekurzivno prebrojiv skup ako je $S = \emptyset$ ili ako postoji rekurzivna funkcija $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^k$ čija slika je jednaka S, tj. takva da je $S = f(\mathbb{N})$.

Propozicija 1.4.5. *Neka je $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ te neka je S rekurzivan skup u $\mathbb{N}^k$. Tada je S rekurzivno prebrojiv skup.*

Dokaz. Ako je $S = \emptyset$ tvrdnja je jasna.

Pretpostavimo da je $S \neq \emptyset$. Odaberimo $a \in S$. Imamo $a = (a_1, \ldots, a_k)$, $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{N}$. Definirajmo funkciju $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^k$ sa $h(x) = (\langle x\rangle_1, \langle x\rangle_2, \ldots, \langle x\rangle_k)$. Očito je da su komponentne funkcije od h rekurzivne. Dakle h je rekurzivna.

Definirajmo $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^k$ sa

$$f(x) = \begin{cases} h(x) & \text{, ako je } h(x) \in S \\ a & \text{, inače.} \end{cases}$$

Neka su $f_1, \ldots, f_k$ komponentne funkcije od f. Neka je $i \in \{1, \ldots, k\}$. Tada je

$$f_i(x) = \begin{cases} \langle x\rangle_i & \text{, ako je } h(x) \in S \\ a_i & \text{, inače} \end{cases} = \begin{cases} \langle x\rangle_i & \text{, ako je } x \in T \\ a_i & \text{, inače} \end{cases}$$

gdje je $T = \left\{x \in \mathbb{N} \,\middle|\, h(x) \in S\right\}$.

Imamo da je $\chi_T(x) = \chi_S(h(x))$, dakle $\chi_T = \chi_S \circ h$, pa je χ_T rekurzivna funkcija, odnosno T je rekurzivan skup.
Iz propozicije 1.1.4 slijedi da je funkcija f_i rekurzivna. Prema tome, f je rekurzivna funkcija.

Dokažimo još da je $f(\mathbb{N}) = S$. Iz definicije od f je očito da je $f(\mathbb{N}) \subseteq S$. Neka je $s \in S$, $s = (s_1, \ldots, s_k)$. Neka je $x = p_1^{s_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{s_k}$. Tada je $h(x) = (s_1, \ldots, s_k)$, tj. $h(x) = s$. Stoga je $f(x) = h(x)$, tj. $f(x) = s$. Time smo dokazali $S \subseteq f(\mathbb{N})$. Prema tome $S = f(\mathbb{N})$ i tvrdnja propozicije je dokazana. □

Neka su $k,\ n,\ l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka su $g\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ i $f\colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}^l$ rekurzivne funkcije. Tada je i $f \circ g\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^l$ rekurzivna funkcija.
Naime, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \big(f_1(g(x)), \ldots, f_l(g(x))\big)$$

iz čega zaključujemo da su $f_1 \circ g, \ldots, f_l \circ g\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ komponentne funkcije od $f \circ g$. Budući da su $f_1, \ldots, f_l\colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ rekurzivne, funkcije $f_1 \circ g, \ldots, f_l \circ g$ su rekurzivne, pa je $f \circ g$ rekurzivna funkcija.

Propozicija 1.4.6. *Neka su $k,\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ rekurzivna funkcija. Neka je S rekurzivno prebrojiv skup u $\mathbb{N}^k$. Tada je $f(S)$ rekurzivno prebrojiv skup u $\mathbb{N}^n$.*

Dokaz. Ako je $S = \emptyset$ onda je $f(S) = \emptyset$, pa je $f(S)$ rekurzivno prebrojiv.

Uzmimo da je $S \neq \emptyset$. Tada postoji rekurzivna funkcija $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^k$ takva da je $g(\mathbb{N}) = S$. Neka je $h = f \circ g$. Funkcija $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^n$ je rekurzivna kao kompozicija rekurzivnih funkcija. Neka je $z \in \mathbb{N}^n$. Tada je

$$\begin{aligned} z \in f(S) &\Leftrightarrow \exists y \in S \text{ takav da } z = f(y) \\ &\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{N} \text{ takav da } z = f(g(x)) \\ &\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{N} \text{ takav da } z = h(x). \end{aligned}$$

Iz ovoga zaključujemo da je $h(\mathbb{N}) = f(S)$. Prema tome $f(S)$ je rekurzivno prebrojiv skup. □

Teorem 1.4.7 (Teorem o projekciji)**.** *Neka su $k,\ n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te neka je T rekurzivno prebrojiv skup u $\mathbb{N}^{k+n}$. Neka je $S \subseteq \mathbb{N}^k$ takav da za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi*

$$x \in S \Leftrightarrow \exists y \in \mathbb{N}^n \ \textit{ takav da je } \ (x, y) \in T.$$

Tada je S rekurzivno prebrojiv skup.

Dokaz. Neka je $p\colon \mathbb{N}^{k+n} \to \mathbb{N}^k$ funkcija definirana sa

$$p(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n) = (x_1, \ldots, x_k).$$

Očito je p rekurzivna funkcija.

Tvrdimo da je $S = p(T)$. Neka je $x \in S$. Tada postoji $y \in \mathbb{N}^n$ takav da je $(x, y) \in T$. Imamo $x = p(x, y)$, pa je $x \in p(T)$. Dakle $S \subseteq p(T)$.
Obratno, ako je $x \in p(T)$ onda je $x = p(a_1, \ldots, a_k, y_1, \ldots, y_n)$ gdje je $(a_1, \ldots, a_k, y_1, \ldots, y_n) \in T$. Slijedi $x = (a_1, \ldots, a_k)$, a prema tome $(x, y_1, \ldots, y_n) \in T$. Dakle postoji $y \in \mathbb{N}^n$ takav da je $(x, y) \in T$, stoga je $x \in S$.
Zaključak: $p(T) \subseteq S$, tj. $p(T) = S$.

Iz propozicije 1.4.6 slijedi da je S rekurzivno prebrojiv skup. □

Teorem 1.4.8. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ rekurzivna funkcija. Neka je $S = \left\{x \in \mathbb{N}^k \;\middle|\; f(x) > 0\right\}$. Tada je S rekurzivno prebrojiv skup.*

Dokaz. Neka je $F\colon \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ rekurzivna aproksimacija od f. Tada $\forall x \in \mathbb{N}^k$ i $\forall i \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\left|f(x) - F(x,i)\right| < 2^{-i}. \tag{1.8}$$

Neka je $x \in \mathbb{N}^k$. Pretpostavimo da je $f(x) > 0$. Tada postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $f(x) > 2 \cdot 2^{-i}$. Slijedi $f(x) - 2^{-i} > 2^{-i}$. Iz (1.8) slijedi $f(x) - F(x,i) < 2^{-i}$ pa je $f(x) - 2^{-i} < F(x,i)$. Stoga je $F(x,i) > 2^{-i}$.
Prema tome, ako je $f(x) > 0$ onda postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $F(x,i) > 2^{-i}$.

Obratno, pretpostavimo da postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $F(x,i) > 2^{-i}$. Tada je $F(x,i) - 2^{-i} > 0$. Iz (1.8) slijedi $F(x,i) - f(x) < 2^{-i}$, pa je $F(x,i) - 2^{-i} < f(x)$. Stoga je $f(x) > 0$.

Imamo sljedeći zaključak:

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow \exists i \in \mathbb{N} \text{ takav da je } F(x,i) > 2^{-i}. \tag{1.9}$$

Neka je $T = \{(x,i) \mid F(x,i) > 2^{-i}\}$. Funkcija $\mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$, $(x,i) \mapsto 2^{-i}$ je rekurzivna, pa iz korolara 1.3.3 slijedi da je T rekurzivan skup. Prema (1.9) vrijedi

$$x \in S \Leftrightarrow \exists i \in \mathbb{N} \text{ takav da } (x,i) \in T.$$

Iz teorema o projekciji 1.4.7 slijedi da je S rekurzivno prebrojiv skup. □

Korolar 1.4.9. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, te neka su $f,\ g\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ rekurzivne funkcije. Tada je skup $\{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) < g(x)\}$ rekurzivno prebrojiv.*

Dokaz. Definirajmo $h\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ sa $h(x) = g(x) - f(x)$. Iz teorema 1.4.3 slijedi da je h rekurzivna funkcija. Za $x \in \mathbb{N}^k$ očito vrijedi $h(x) > 0$ ako i samo ako $f(x) < g(x)$. Tvrdnja korolara slijedi iz teorema 1.4.8. □

Poglavlje 2

Izračunljivi metrički prostori

2.1 Metrički prostori

Neka je X neprazan skup te neka je $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ funkcija takva da za sve $x,\ y,\ z \in X$ vrijede sljedeća svojstva:

(1) $d(x, y) \geq 0 \ \ \&\ \ d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(2) $d(x, y) = d(y, x)$

(3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Tada za d kažemo da je *metrika* na skupu X, a za uređeni par (X, d) kažemo da je *metrički prostor*.

Primjer 2.1.1. *Neka je $d\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa $d(x, y) = |x - y|$. Tada je d metrika na $\mathbb{R}$.*

Naime, svojstva (1) *i* (2) *iz definicije metrike su očita, a da vrijedi svojstvo* (3) *vidimo na sljedeći način:*

$$\begin{aligned} d(x, y) &= |x - y| \\ &= |x - z + z - y| \\ &\leq |x - z| + |z - y| \\ &= d(x, z) + d(z, y). \end{aligned}$$

Za d kažemo da je euklidska metrika na $\mathbb{R}$.

Neka je (X, d) metrički prostor, neka je $x_0 \in X$, te $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. Definiramo

$$K(x_0, r) = \left\{ x \in X \;\middle|\; d(x_0, x) < r \right\}.$$

Za $K(x_0, r)$ kažemo da je *otvorena kugla* oko x_0 radijusa r.

Neka je (X, d) metrički prostor te $U \subseteq X$. Za U kažemo da je *otvoren skup* u metričkom prostoru (X, d) ako $\forall x \in U\ \exists r > 0$ takav da je $K(x, r) \subseteq U$.

Primjer 2.1.2. *Neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}$. Neka je $x_0 \in \mathbb{R}$ te $r > 0$. Tada je*

$$K(x_0, r) = \langle x_0 - r, x_0 + r \rangle.$$

Naime

$$\begin{aligned} x \in K(x_0, r) &\Leftrightarrow d(x, x_0) < r \\ &\Leftrightarrow |x - x_0| < r \\ &\Leftrightarrow -r < x - x_0 < r \\ &\Leftrightarrow x_0 - r < x < x_0 + r \\ &\Leftrightarrow x \in \langle x_0 - r, x_0 + r \rangle. \end{aligned}$$

Dakle, otvorene kugle u metričkom prostoru $(\mathbb{R}, d)$ su oblika $\langle a, b \rangle$, gdje su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Obratno, ako su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, onda je $\langle a, b \rangle = \langle x_0 - r, x_0 + r \rangle$, gdje je $x_0 = (a + b)/2$, $r = (b - a)/2$.

Prema tome, $\langle a, b \rangle$ je otvorena kugla u $(\mathbb{R}, d)$.

Propozicija 2.1.3. *Neka je (X, d) metrički prostor. Tada vrijede sljedeće tvrdnje:*

(1) $\emptyset$ i X su otvoreni skupovi u (X, d).

(2) Ako je U_α, $\alpha \in A$ indeksirana familija otvorenih skupova u (X, d) onda je $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ otvoren skup u (X, d).

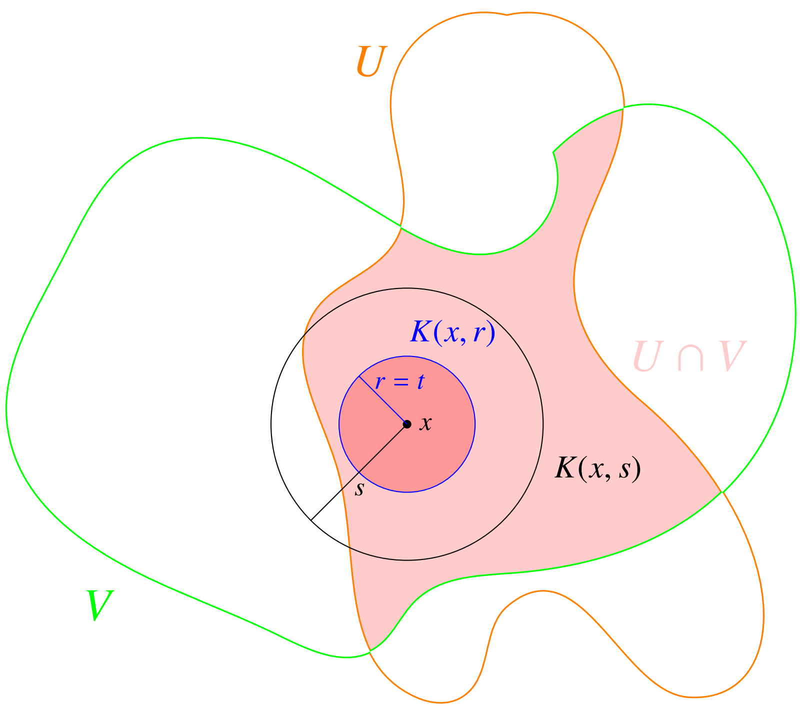
(3) *Ako su U, V otvoreni skupovi u (X, d), onda je $U \cap V$ otvoren skup u (X, d).*

Dokaz.

(1) Tvrdnja je očita.

(2) Neka je $x \in \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$. Tada postoji $\alpha_0 \in A$ takav da je $x \in U_{\alpha_0}$. Budući da je U_{α_0} otvoren skup u (X, d) postoji $r > 0$ takav da $K(x, r) \subseteq U_{\alpha_0}$. Slijedi da je $K(x, r) \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$. Prema tome $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ je otvoren skup.

(3) Neka je $x \in U \cap V$. Slijedi da je $x \in U$ i $x \in V$, pa postoje $r, s > 0$ takvi da je $K(x, r) \subseteq U$ i $K(x, s) \subseteq V$. Neka je $t = \min\{r, s\}$. Tada je $t \leq r$ i $t \leq s$, pa je očito $K(x, t) \subseteq K(x, r)$ i $K(x, t) \subseteq K(x, s)$, stoga je $K(x, t) \subseteq K(x, r) \cap K(x, s) \subseteq U \cap V$, tj. $K(x, t) \subseteq U \cap V$. Prema tome $U \cap V$ je otvoren skup.



Slika 2.1: Presjek otvorenih skupova je otvoren skup.

□

Korolar 2.1.4. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je $n \in \mathbb{N}$ te $U_1, \ldots, U_n$ otvoreni skupovi u (X, d). Tada je $U_1 \cap \ldots \cap U_n$ otvoren skup.*

Dokaz. Lako se vidi indukcijom iz prethodne propozicije o presjeku dva skupa. □

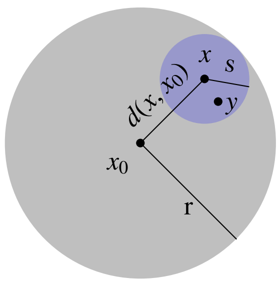
Propozicija 2.1.5. *Neka je (X, d) metrički prostor, $x_0 \in X$ i $r > 0$. Tada je $K(x_0, r)$ otvoren skup u (X, d).*

Dokaz. Neka je $x \in K(x_0, r)$. Tada je $d(x, x_0) < r$. Definirajmo $s = r - d(x, x_0)$. Očito je $s > 0$ te vrijedi $s + d(x, x_0) = r$. Tvrdimo da je

$$K(x, s) \subseteq K(x_0, r). \tag{2.1}$$

Neka je $y \in K(x, s)$. Imamo

$$\begin{aligned} d(y, x_0) &\leq d(y, x) + d(x, x_0) \\ &< s + d(x, x_0) \\ &= r. \end{aligned}$$



Slika 2.2: Otvorena kugla je otvoren skup.

Dakle $d(y, x_0) < r$, pa je $y \in K(x_0, r)$. Time smo dokazali da vrijedi (2.1).
Zaključak: $K(x_0, r)$ je otvoren skup u (X, d). □

Propozicija 2.1.6. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je $U \subseteq X$. Tada je U otvoren skup u (X, d) ako i samo ako je U unija otvorenih kugla.*

Dokaz. Pretpostavimo da je U unija otvorenih kugla, tj. da postoji indeksirana familija B_α, $\alpha \in A$ otvorenih kugla u metričkom prostoru (X, d), takva da je $U = \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha$. Tada iz propozicija 2.1.3 i 2.1.5 slijedi da je U otvoren skup.

Obratno, pretpostavimo da je U otvoren skup. Tada za svaki $x \in U$ postoji $r_x > 0$ takav da je $K(x, r_x) \subseteq U$. Tada je $U = \bigcup_{x \in U} K(x, r_x)$.

Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

2.2 Izračunljivi metrički prostori

Neka je (X, d) metrički prostor te neka je $A \subseteq X$. Za A kažemo da je *gust skup* u (X, d) ako za svaki $x \in X$ i svaki $\epsilon > 0$ postoji $a \in A$ takav da je $d(x, a) < \epsilon$.

Uočimo sljedeće: skup A je gust u (X, d) ako i samo ako svaka otvorena kugla u (X, d) siječe A.
Naime, ako je A gust te ako su $x_0 \in X$, $r > 0$, onda postoji $a \in A$ takav da je $d(x_0, a) < r$ što povlači da je $a \in K(x_0, r)$ pa imamo $K(x_0, r) \cap A \neq \emptyset$.
Obratno, ako svaka otvorena kugla u (X, d) siječe A onda za svaki $x \in X$ i svaki $\epsilon > 0$ vrijedi $K(x, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$, što povlači da postoji $a \in A$ takav da je $a \in K(x, \epsilon)$, tj. $d(x, a) < \epsilon$. Prema tome, A je gust skup u (X, d).

Propozicija 2.2.1. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je $A \subseteq X$. Tada je A gust u (X, d) ako i samo ako svaki otvoren neprazan skup u (X, d) siječe A.*

Dokaz. Pretpostavimo da je A gust u (X, d). Neka je U otvoren neprazan skup u (X, d). Odaberimo $x \in U$. Tada postoji $r > 0$ takav da je $K(x, r) \subseteq U$. Budući da je A gust vrijedi da $K(x, r) \cap A \neq \emptyset$. Stoga je i $U \cap A \neq \emptyset$. Obratno, ako svaki otvoren neprazan skup u (X, d) siječe A onda posebno svaka otvorena kugla iz (X, d) siječe A, pa je A gust. □

Neka je (X, d) metrički prostor te neka je (x_n) niz u X. Kažemo da je (x_n) *gust niz* u (X, d) ako je njegova slika, tj. skup $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ gust u (X, d).

Neka je (X, d) metrički prostor, te neka je $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gust niz u (X, d) takav da je funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$, $(i, j) \mapsto d(\alpha_i, \alpha_j)$ rekurzivna. Tada za uređenu trojku (X, d, α) kažemo da je *izračunljiv metrički prostor*.

Primjer 2.2.2. *Neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}$. Uočimo da je $\mathbb{Q}$ gust skup u $(\mathbb{R}, d)$. Naime, ako su $x \in \mathbb{R}$ i $\epsilon > 0$ onda postoji racionalni broj a takav da je*

$$x - \epsilon < a < x + \epsilon$$

iz čega slijedi da je

$$a \in \langle x - \epsilon, x + \epsilon\rangle,$$

tj.

$$|x - a| < \epsilon,$$

tj.

$$d(x, a) < \epsilon.$$

Definirajmo funkciju $\alpha\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ sa

$$\alpha(n) = (-1)^{\langle n\rangle_2} \frac{\langle n\rangle_0}{\langle n\rangle_1 + 1}.$$

Očito je α rekurzivna funkcija (kao funkcija $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$). Nadalje, α je surjekcija. Naime, svaki element iz $\mathbb{Q}$ je oblika $(-1)^c \frac{a}{b+1}$, gdje su a, b, $c \in \mathbb{N}$, a $\alpha(2^a 3^b 5^c) = (-1)^c \frac{a}{b+1}$. Stoga je α gust niz u $(\mathbb{R}, d)$.

Neka je $\gamma\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{Q}$ funkcija definirana sa

$$\gamma(i, j) = d(\alpha_i, \alpha_j).$$

Imamo

$$\gamma(i, j) = \left|\alpha_i - \alpha_j\right|.$$

Neka su $f, g\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{Q}$ funkcije definirane sa $f(i, j) = \alpha_i$, $g(i, j) = \alpha_j$. Funkcije f i g su rekurzivne jer je $f = \alpha \circ I_1^2$ i $g = \alpha \circ I_2^2$. Stoga je i funkcija $|f + (-g)| : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{Q}$ rekurzivna, no $\gamma = |f + (-g)|$. Dakle, γ je rekurzivna funkcija pa je stoga rekurzivna i kao funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$.
Zaljučak: $(\mathbb{R}, d, \alpha)$ je izračunljiv metrički prostor.

Neka je (X, d) metrički prostor, $a \in X$ te (x_n) niz u X. Za niz (x_n) kažemo da *teži* ili *konvergira* prema a u metričkom prostoru (X, d) i pišemo $x_n \to a$ ako $\forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $d(x_n, a) < \epsilon$, $\forall n \geq n_0$. U tom slučaju za a kažemo da je *limes niza* (x_n).

Lema 2.2.3. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka su $a, b \in X$, $a \neq b$. Neka je $r = \frac{d(a,b)}{2}$. Tada je $K(a, r) \cap K(b, r) = \emptyset$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tada je $K(a, r) \cap K(b, r) \neq \emptyset$.
Odaberimo $c \in K(a, r) \cap K(b, r)$. Tada je $d(a, c) < r$ i $d(c, b) < r$. Imamo

$$2r = d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b) < r + r = 2r.$$

Kontradikcija. Dakle, $K(a, r) \cap K(b, r) = \emptyset$. □

Propozicija 2.2.4. *Neka je (X, d) metrički prostor, neka je (x_n) niz u X te neka su $a, b \in X$ takvi da $x_n \to a$ i $x_n \to b$. Tada je $a = b$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $a \neq b$. Neka je $r = \frac{d(a,b)}{2}$. Prema lemi 2.2.3 vrijedi

$$K(a, r) \cap K(b, r) = \emptyset. \tag{2.2}$$

Budući da $x_n \to a$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $d(a, x_n) < r$, $\forall n \geq n_0$, tj. $x_n \in K(a, r)$, $\forall n \geq n_0$.
Nadalje, iz $x_n \to b$ slijedi da postoji $m_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $x_n \in K(b, r)$, $\forall n \geq m_0$.
Odaberimo $n \in \mathbb{N}$ takav da je $n \geq n_0$ i $n \geq m_0$. Tada je $x_n \in K(a, r)$ i $x_n \in K(b, r)$, što je u kontradikciji sa (2.2). Prema tome $a = b$. □

Neka je $x \in \mathbb{R}$. Za x kažemo da je *rekurzivan broj* ako postoji rekurzivna funkcija $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ takva da je $|x - f(k)| < 2^{-k}$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Uočimo: svaki racionalan broj je rekurzivan.

Lema 2.2.5. *Neka je $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$ te $S \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$ rekurzivan skup takav da za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ postoji $y \in \mathbb{N}$ takav da je $(x, y) \in S$. Tada postoji rekurzivna funkcija $\varphi \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takva da je $(x, \varphi(x)) \in S$, $\forall x \in \mathbb{N}^k$.*

Dokaz. Definirajmo funkciju $\varphi\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ tako da je

$$\varphi(x) = \mu y((x, y) \in S).$$

Funckija φ je rekurzivna jer je

$$\varphi(x) = \mu y\Big(\overline{sg}(\chi_S(x, y)) = 0\Big).$$

Očito je $(x, \varphi(x)) \in S$, $\forall x \in \mathbb{N}^k$. $\square$

Primjer 2.2.6. *Broj* $\sqrt{2}$ *je rekurzivan.*

Neka je $\epsilon > 0$*. Tada postoji pozitivan racionalan broj r takav da je*

$$\sqrt{2} - \epsilon < r < \sqrt{2}$$

iz čega slijedi

$$r < \sqrt{2} < r + \epsilon.$$

Neka je $x\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ *funkcija definirana sa*

$$x_i = \frac{\langle i \rangle_0}{\langle i \rangle_1 + 1}.$$

Očito da je x rekurzivna funkcija te da je $\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Q} \cap \langle 0, \infty \rangle$*.*

Neka je $k \in \mathbb{N}$*. Tada postoji* $r \in \mathbb{Q}$*,* $r > 0$ *takav da je*

$$r < \sqrt{2} < r + 2^{-k}$$

pa postoji $i \in \mathbb{N}$ *takav da je*

$$x_i < \sqrt{2} < x_i + 2^{-k}$$

iz čega slijedi da je

$$x_i^2 < 2 < \left(x_i + 2^{-k}\right)^2.$$

Neka je $S = \left\{(k, i) \mid x_i^2 < 2 < \left(x_i + 2^{-k}\right)^2\right\}$*. Imamo dakle da za svaki* $k \in \mathbb{N}$ *postoji* $i \in \mathbb{N}$ *takav da je* $(k, i) \in S$*. Skup S je rekurzivan kao presjek skupova* $S_1 = \left\{(k, i) \mid x_i^2 < 2\right\}$ *i*

$S_2 = \left\{(k,i) \,\middle|\, 2 < \left(x_i + 2^{-k}\right)^2\right\}$ *koji su rekurzivni prema korolaru 1.3.3.*

Prema lemi 2.2.5 postoji rekurzivna funkcija $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *takva da je* $(k, \varphi(k)) \in S$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Neka je $k \in \mathbb{N}$. *Označimo* $i = \varphi(k)$. *Imamo* $(k,i) \in S$, *pa je*

$$x_i^2 < 2 < \left(x_i + 2^{-k}\right)^2$$

iz čega slijedi

$$x_i < \sqrt{2} < x_i + 2^{-k}.$$

Stoga je

$$0 < \sqrt{2} - x_i < 2^{-k}$$

pa je

$$\left|\sqrt{2} - x_i\right| < 2^{-k}.$$

Dakle $\left|\sqrt{2} - x_{\varphi(k)}\right| < 2^{-k}$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Neka je $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ *funkcija definirana sa* $f(x) = x_{\varphi(k)}$. *Tada je* f *rekurzivna funkcija kao kompozicija funkcija* x *i* φ *i vrijedi* $\left|\sqrt{2} - f(k)\right| < 2^{-k}$, $\forall k \in \mathbb{N}$. *Prema tome* $\sqrt{2}$ *je rekurzivan broj.*

Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Neka je $x_0 \in X$. Za x_0 kažemo da je *izračunljiva točka* u (X, d, α) ako postoji rekurzivna funkcija $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je

$$d(\alpha_{f(k)}, x_0) < 2^{-k}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Propozicija 2.2.7. *Neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}$ te neka je α niz iz primjera 2.2.2. Neka je $x \in \mathbb{R}$. Tada je x rekurzivan broj ako i samo ako je x izračunljiva točka u izračunljivom metričkom prostoru $(\mathbb{R}, d, \alpha)$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je x rekurzivan broj. Tada postoji rekurzivna funkcija $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ takva da je

$$\left|x - f(k)\right| < 2^{-k}, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{2.3}$$

Neka je $S = \left\{(k,i) \,\middle|\, |f(k+1) - \alpha_i| < 2^{-(k+1)}\right\}$. Tada je S rekurzivan skup prema korolaru 1.3.3, te za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $(k,i) \in S$. Prema lemi 2.2.5 postoji rekurzivna funkcija $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $(k, \varphi(k)) \in S$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Uzmimo $k \in \mathbb{N}$. Iz $(k, \varphi(k)) \in S$ slijedi

$$\left| f(k+1) - \alpha_{\varphi(k)} \right| < 2^{-(k+1)}.$$

Prema (2.3) vrijedi

$$\left| x - f(k+1) \right| < 2^{-(k+1)}.$$

Sada je

$$\begin{aligned} \left| x - \alpha_{\varphi(k)} \right| &\leq \left| x - f(k+1) \right| + \left| f(k+1) - \alpha_{\varphi(k)} \right| \\ &< 2^{-(k+1)} + 2^{-(k+1)} \\ &= 2^{-k}. \end{aligned}$$

Dakle $d\left(x, \alpha_{\varphi(k)}\right) < 2^{-k}$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Prema tome, x je izračunljiva točka u $(\mathbb{R}, d, \alpha)$.

Obratno, pretpostavimo da je x izračunljiva točka u $(\mathbb{R}, d, \alpha)$. Tada postoji rekurzivna funkcija $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $d\left(x, \alpha_{\varphi(k)}\right) < 2^{-k}$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Neka je $f = \alpha \circ \varphi$, tada je $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ rekurzivna funkcija i $\left| x - f(k) \right| < 2^{-k}$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Prema tome x je rekurzivan broj. □

Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Neka su $i \in \mathbb{N}$ te $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$. Tada za $K(\alpha_i, r)$ kažemo da je *racionalna kugla* u (X, d, α).

Neka je $q\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ neka (fiksirana) rekurzivna funkcija takva da je $\operatorname{Im} q = \langle 0, \infty \rangle \cap \mathbb{Q}$ (takva funkcija postoji, npr. $q(i) = \frac{\langle i \rangle_0}{\langle i \rangle_1 + 1}$). Nadalje, neka su $\tau_1, \tau_2\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ neke (fiksirane) rekurzivne funkcije takve da je $\{ (\tau_1(x), \tau_2(x)) \mid x \in \mathbb{N} \} = \mathbb{N}^2$ (takve funkcije postoje, npr. $\tau_1(x) = \langle x \rangle_0$ i $\tau_2(x) = \langle x \rangle_1$).
Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Za $i \in \mathbb{N}$ definiramo

$$I_i = K(\alpha_{\tau_1(i)}, q_{\tau_2(i)}).$$

Uočimo da je $\{I_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ familija svih racionalnih kugla u (X, d, α).

Neka je (X, d) metrički prostor te $F \subseteq X$. Za F kažemo da je *zatvoren skup* u (X, d) ako je F^c otvoren skup u (X, d).

Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Neka je S zatvoren skup u (X, d). Za S kažemo da je *izračunljivo prebrojiv skup* u (X, d, α) ako je $\{i \in \mathbb{N} \mid I_i \cap S \neq \emptyset\}$ rekurzivno prebrojiv podskup od $\mathbb{N}$.

Za S kažemo da je *koizračunljivo prebrojiv skup* u (X, d, α) ako je $S = X$ ili ako postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $X \setminus S = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_{f(i)}$.

Za S kažemo da je *izračunljiv zatvoren skup* u (X, d, α) ako je S izračunljivo prebrojiv i koizračunljivo prebrojiv u (X, d, α).

Neka su $\sigma : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ i $\eta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ neke (fiksirane) rekurzivne funkcije takve da je

$$\Big\{\Big(\sigma(i, 0), \dots, \sigma(i, \eta(i))\Big) \;\Big|\; i \in \mathbb{N}\Big\}$$

skup svih konačnih nizova u $\mathbb{N}$, tj. skup

$$\Big\{(a_0, \dots, a_n) \;\Big|\; n \in \mathbb{N},\ \ a_0, \dots, a_n \in \mathbb{N}\Big\}.$$

Takve funkcije σ i η postoje, naime, možemo uzeti

$$\sigma(i, j) = \langle i \rangle_j \dot{-} 1,$$

$$\eta(i) = \mathrm{len}(i).$$

Tada za $n \in \mathbb{N}$ i $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{N}$ vrijedi da je $\Big(\sigma(i, 0), \dots, \sigma(i, \eta(i))\Big) = (a_0, \dots, a_n)$, pri čemu je $i = p_0^{a_0+1} \cdot \ldots \cdot p_n^{a_n+1}$.

Za $i, j \in \mathbb{N}$ ćemo umjesto $\sigma(i, j)$ pisati $(i)_j$, a umjesto $\eta(i)$ ćemo pisati $\bar{i}$.

Dakle svaki konačan niz u $\mathbb{N}$ je oblika $\Big((i)_0, \dots, (i)_{\bar{i}}\Big)$ za neki $i \in \mathbb{N}$.

Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor te neka je (x_i) niz u X. Za (x_i) kažemo da je *izračunljiv niz* u (X, d, α) ako postoji rekurzivna funkcija $F : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da je $d(x_i, \alpha_{F(i,k)}) < 2^{-k}$, $\forall i, k \in \mathbb{N}$.

Uočimo sljedeće: ako je (x_i) izračunljiv niz u (X, d, α) onda je x_i izračunljiva točka u (X, d, α) za svaki $i \in \mathbb{N}$.

Propozicija 2.2.8. *Neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}$ te neka je α niz u $\mathbb{R}$ definiran sa $\alpha(n) = (-1)^{\langle n \rangle_2} \langle n \rangle_0 / (\langle n \rangle_1 + 1)$. Neka je (x_i) niz realnih brojeva. Tada je (x_i) rekurzivan niz u $\mathbb{R}$ (tj. rekurzivna funkcija $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$) ako i samo ako je (x_i) izračunljiv niz u izračunljivom metričkom prostoru $(\mathbb{R}, d, \alpha)$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je (x_i) izračunljiv niz u $(\mathbb{R}, d, \alpha)$. Tada postoji rekurzivna funkcija $F\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da je

$$d(x_i, \alpha_{F(i,k)}) < 2^{-k}, \quad \forall i, k \in \mathbb{N} \tag{2.4}$$

Definirajmo funkciju $G\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{Q}$ sa $G(i,k) = \alpha_{F(i,k)}$ (očito je G rekurzivna funkcija). Prema (2.4) vrijedi

$$\left|x_i - G(i,k)\right| < 2^{-k}, \quad \forall i, k \in \mathbb{N}.$$

Stoga je (x_i) rekurzivan niz realnih brojeva.

Obratno, pretpostavimo da je (x_i) rekurzivan niz realnih brojeva. Tada postoji rekurzivna funkcija $G\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{Q}$ takva da je

$$\left|x_i - G(i,k)\right| < 2^{-k}, \quad \forall i, k \in \mathbb{N}. \tag{2.5}$$

Neka su $i, k \in \mathbb{N}$. Tada postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je $\alpha_j = G(i,k)$.

Neka je $S = \left\{(i,k,j) \in \mathbb{N}^3 \mid \alpha_j = G(i,k)\right\}$. Prema korolaru 1.3.3 S je rekurzivan skup, pa budući da za sve $i, k \in \mathbb{N}$ postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je $(i,k,j) \in S$, postoji rekurzivna funkcija $F\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da je $(i, k, F(i,k)) \in S$, $\forall i, k \in \mathbb{N}$ (lema 2.2.5).
To znači da je $\alpha_{F(i,k)} = G(i,k)$, $\forall i, k \in \mathbb{N}$ pa iz (2.5) slijedi

$$d(x_i, \alpha_{F(i,k)}) < 2^{-k}, \quad \forall i, k \in \mathbb{N},$$

što znači da je (x_i) izračunljiv niz u $(\mathbb{R}, d, \alpha)$. □

Primjer 2.2.9. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Tada je niz $\alpha = (\alpha_i)$ izračunljiv u (X, d, α).*

Naime, vrijedi $d(\alpha_i, \alpha_{F(i,k)}) = 0$, $\forall i, k \in \mathbb{N}$, pri čemu je $F = I_1^2$.
Općenitije, ako je $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija onda je niz $(\alpha_{f(i)})_{i \in \mathbb{N}}$ izračunljiv u (X, d, α). U ovom slučaju imamo $d(\alpha_{f(i)}, \alpha_{F(i,k)}) = 0$, $\forall i, k \in \mathbb{N}$, pri čemu je $F\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ definirana sa $F(i,k) = f(i)$.

Neka je (X, d) metrički prostor te neka su S i T podskupovi od X takvi da je T podskup od S. Za T kažemo da je *gust podskup* od S u (X, d) ako $\forall x \in S$ i $\forall \epsilon > 0$ $\exists y \in T$ takav da je $d(x, y) < \epsilon$.

Lema 2.2.10. *Neka je (X,d) metrički prostor, neka je $S \subseteq X$ te neka je T gust podskup od S. Neka je U otvoren skup u (X,d). Tada je $U \cap S \neq \emptyset$ ako i samo ako je $U \cap T \neq \emptyset$.*

Dokaz. Jasno je da $U \cap T \neq \emptyset \Rightarrow U \cap S \neq \emptyset$.

Pretpostavimo $U \cap S \neq \emptyset$. Tada postoji $x \in S$ takav da je $x \in U$. Budući da je U otvoren skup, postoji $r > 0$ takav da je $K(x,r) \subseteq U$.
S druge strane postoji $y \in T$ takav da je $d(x,y) < r$, iz čega slijedi da je $y \in K(x,r)$ pa je $y \in U$.
Zaključak: $U \cap T \neq \emptyset$. □

Lema 2.2.11. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, neka je $f \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ te neka je $F \colon \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{R}$ rekurzivna funkcija takva da je $|f(x) - F(x,i)| < 2^{-i}$, $\forall x \in \mathbb{N}^k$, $\forall i \in \mathbb{N}$. Tada je f rekurzivna funkcija.*

Dokaz. Neka je $G \colon \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{Q}$ rekurzivna aproksimacija od F. Tada za sve $x \in \mathbb{N}^k$, $i, j \in \mathbb{N}$ vrijedi
$$\left|F(x,i) - G(x,i,j)\right| < 2^{-j}.$$
Posebno, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ i za svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijedi
$$\left|F(x,i) - G(x,i,i)\right| < 2^{-i}.$$
Neka su $x \in \mathbb{N}^k$ i $i \in \mathbb{N}$. Imamo
$$\begin{aligned}\left|f(x) - G(x,i,i)\right| &= \left|f(x) - F(x,i) + F(x,i) - G(x,i,i)\right| \\ &\leq \left|f(x) - F(x,i)\right| + \left|F(x,i) - G(x,i,i)\right| \\ &< 2^{-i} + 2^{-i} \\ &= 2 \cdot 2^{-i}.\end{aligned}$$
Dakle,
$$\left|f(x) - G(x,i,i)\right| < 2 \cdot 2^{-i}.$$
Neka je $H \colon \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ funkcija definirana sa $H(x,i) = G(x,i,i)$, $x \in \mathbb{N}^k$, $i \in \mathbb{N}$. Funkcija H je rekurzivna te vrijedi
$$\left|f(x) - H(x,i)\right| < 2 \cdot 2^{-i}.$$
Prema lemi 1.4.1 f je rekurzivna funkcija. □

Lema 2.2.12. *Neka je (X, d) metrički prostor, $\epsilon > 0$ te neka su $x, y, a, b \in X$ takvi da je $d(x, a) < \epsilon$ i $d(y, b) < \epsilon$. Tada je $\left|d(x, y) - d(a, b)\right| < 2\epsilon$.*

Dokaz. Imamo

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq d(x, a) + d(a, y) \\ &\leq d(x, a) + d(a, b) + d(b, y) \\ &< d(a, b) + 2\epsilon \end{aligned}$$

pa je

$$d(x, y) - d(a, b) < 2\epsilon.$$

Analogno dobivamo

$$d(a, b) - d(x, y) < 2\epsilon.$$

Prema tome je

$$\left|d(x, y) - d(a, b)\right| < 2\epsilon.$$

□

Propozicija 2.2.13. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor te neka su (x_i), (y_j) izračunljivi nizovi u (X, d, α). Tada je funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$, $(i, j) \mapsto d(x_i, y_j)$ rekurzivna.*

Dokaz. Neka su $F, G \colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije takve da je

$$\begin{matrix} d(x_i, \alpha_{F(i,k)}) < 2^{-k} \\ d(y_j, \alpha_{G(j,k)}) < 2^{-k} \end{matrix} \quad , \forall i, j, k \in \mathbb{N}.$$

Posebno, za sve $i, j, k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\begin{aligned} d(x_i, \alpha_{F(i,k+1)}) < 2^{-(k+1)} \\ d(y_j, \alpha_{G(j,k+1)}) < 2^{-(k+1)} \end{aligned}$$

pa iz leme 2.2.12 slijedi da je

$$\left|d(x_i, y_j) - d(\alpha_{F(i,k+1)}, \alpha_{G(j,k+1)})\right| < 2 \cdot 2^{-(k+1)} = 2^{-k}.$$

Neka je $H \colon \mathbb{N}^3 \to \mathbb{R}$, $H(i, j, k) = d(\alpha_{F(i,k+1)}, \alpha_{G(j,k+1)})$. Imamo

$$\left|d(x_i, y_j) - H(i, j, k)\right| < 2^{-k}, \quad \forall i, j, k \in \mathbb{N}.$$

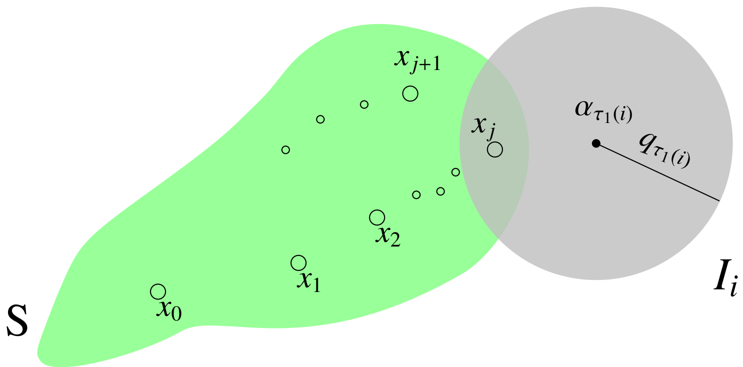
Preostaje dokazati da je funkcija H rekurzivna, naime tada će iz leme 2.2.11 slijediti da je funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$, $(i, j) \mapsto d(x_i, y_j)$ rekurzivna.

Neka je $K \colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$, $K(i, j) = d(\alpha_i, \alpha_j)$. Tada je K rekurzivna funkcija prema definiciji izračunljivog metričkog prostora.
Imamo $H(i, j, k) = K(F(i, k + 1), G(j, k + 1))$ pa iz propozicije 1.4.4 slijedi da je H rekurzivna funkcija.
Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Teorem 2.2.14. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor te neka je S zatvoren skup u (X, d). Pretpostavimo da postoji izračunljiv niz (x_i) u (X, d, α) takav da je skup $\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ gust podskup od S. Tada je S izračunljivo prebrojiv skup u (X, d, α).*

Dokaz. Neka je $i \in \mathbb{N}$. Tada je $I_i \cap S \neq \emptyset$ ako i samo ako $I_i \cap \{x_j \mid j \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset$ (prema propoziciji 2.1.5 i lemi 2.2.10).
Stoga je:

$$I_i \cap S \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists j \in \mathbb{N} \text{ takav da je } x_j \in I_i \Leftrightarrow \exists j \in \mathbb{N} \text{ takav da je } d(\alpha_{\tau_1(i)}, x_j) < q_{\tau_2(i)} \quad (2.6)$$



Slika 2.3: Ilustracija presjeka $I_i \cap S$.

Neka je $\Omega = \left\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid d(\alpha_{\tau_1(i)}, x_j) < q_{\tau_2(i)}\right\}$ te neka je $\Gamma = \{i \in \mathbb{N} \mid I_i \cap S \neq \emptyset\}$.

Prema (2.6) vrijedi da je $\Gamma = \{i \in \mathbb{N} \mid \exists j \in \mathbb{N} \text{ takav da je } (i, j) \in \Omega\}$. Stoga je dovoljno dokazati da je Ω rekurzivno prebrojiv skup, naime tada će iz teorema o projekciji 1.4.7 slijediti da je skup Γ rekurzivno prebrojiv, a to će značiti da je S izračunljivo prebrojiv skup u (X, d, α).

Imamo $\Omega = \left\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid \beta(i, j) < \gamma(i, j)\right\}$, gdje su $\beta, \gamma \colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$ funkcije definirane sa $\beta(i, j) = d(\alpha_{\tau_1(i)}, x_j)$, $\gamma(i, j) = q_{\tau_2(i)}$. Prema propoziciji 2.2.13 i primjeru 2.2.9 funkcija β je rekurzivna.

Očito je da je γ rekurzivna kao funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{Q}$ pa je rekurzivna i kao funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$. Iz korolara 1.4.9 slijedi da je Ω rekurzivno prebrojiv skup.
Time je tvrdnja teorema dokazana. □

Neka je (X, d) metrički prostor. Neka su $A, B \subseteq X$ te neka je $\epsilon > 0$. Pišemo $A \prec_\epsilon B$ ako za svaki $a \in A$ postoji $b \in B$ takav da je $d(a, b) < \epsilon$.
Ako vrijedi $A \prec_\epsilon B$ i $B \prec_\epsilon A$ onda pišemo $A \approx_\epsilon B$.

Neka je (X, d) metrički prostor te neka je $K \subseteq X$. Neka je $\mathcal{U}$ neprazna familija otvorenih skupova u (X, d) takva da je $K \subseteq \bigcup \mathcal{U}$. Tada za $\mathcal{U}$ kažemo da je *otvoreni pokrivač* skupa K u metričkom prostoru (X, d).

Za otvoreni pokrivač $\mathcal{U}$ skupa K u metričkom prostoru (X, d) kažemo da se može reducirati na *konačan pokrivač* od K ako postoje $n \in \mathbb{N}$ i $U_0, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$ takvi da je $K \subseteq U_0 \cup \ldots \cup U_n$.

Neka je (X, d) metrički prostor te $K \subseteq X$. Kažemo da je K *kompaktan skup* u metričkom prostoru (X, d) ako se svaki otvoreni pokrivač od K u (X, d) može reducirati na konačan pokrivač od K.

Primjer 2.2.15. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je K konačan podskup od X. Tada je K kompaktan skup u (X, d).*

Dokažimo to. Ako je K prazan skup, tvrdnja je jasna. Inače imamo $K = \{x_0, \ldots, x_n\}$. Pretpostavimo da je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač od K u (X, d). Neka je $i \in \{1, \ldots, n\}$. Imamo $x_i \in \bigcup \mathcal{U}$ pa postoji $U_i \in \mathcal{U}$ takav da je $x_i \in U_i$. Tada je $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq U_1 \cup \ldots \cup U_n$, dakle $\mathcal{U}$ se može reducirati na konačan pokrivač od K. Prema tome K je kompaktan.

Napomena: Neka je (X, d) metrički prostor te $a, b \in X$, $a \neq b$. Tada postoje otvoreni skupovi U, V u (X, d) takvi da je $a \in U$, $b \in V$ i $U \cap V = \emptyset$. To slijedi direktno iz leme 2.2.3.

Teorem 2.2.16. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je K kompaktan skup u (X, d). Tada je K zatvoren u (X, d).*

Dokaz. Ako je $K = \emptyset$ tvrdnja je jasna.

Pretpostavimo da je K neprazan. Neka je $x \in K^C$. Neka je $y \in K$. Tada je $x \neq y$ pa postoje otvoreni skupovi U_y, V_y u (X, d) takvi da je

$$x \in U_y, \ y \in V_y,$$

$$U_y \cap V_y = \emptyset.$$

Neka je

$$\mathcal{U} = \{V_y \mid y \in K\}.$$

Tada je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač od K u (X, d). Budući da je K kompaktan postoje $n \in \mathbb{N}$ i $y_1, \dots, y_n \in K$ takvi da je

$$K \subseteq V_{y_1} \cup \dots \cup V_{y_n}.$$

Neka je $W = U_{y_1} \cap \dots \cap U_{y_n}$. Tada je W otvoren skup u (X, d) (korolar 2.1.4) te je očito $x \in W$. Neka je $i \in \{1, \dots, n\}$.
Tada je

$$W \cap V_{y_i} = U_{y_1} \cap \dots \cap U_{y_n} \cap V_{y_i} = \emptyset$$

jer je $U_{y_i} \cap V_{y_i} = \emptyset$.
Stoga je

$$W \cap K \subseteq W \cap (V_{y_1} \cup \dots \cup V_{y_n}) = (W \cap V_{y_1}) \cup \dots \cup (W \cap V_{y_n}) = \emptyset.$$

Dakle $W \cap K = \emptyset$, pa je $W \subseteq K^C$. Imamo da je $x \in W$ te da je W otvoren skup pa stoga postoji $r > 0$ takav da je $K(x, r) \subseteq W$.
Tada je

$$K(x, r) \subseteq K^C.$$

Time smo dokazali da je K^C otvoren skup. Prema tome K je zatvoren skup. □

Neka je (X, d) metrički prostor te $S \subseteq X$. Za S kažemo da je *omeđen skup* u metričkom prostoru (X, d) ako postoje $x \in X$ i $r > 0$ takvi da je $S \subseteq K(x, r)$.

Propozicija 2.2.17. *Aka je S omeđen skup u metričkom prostoru (X, d) onda za svaki $x \in X$ postoji $r > 0$ takav da je $S \subseteq K(x, r)$.*

Dokaz. Budući da je S omeđen, postoje $x_0 \in X$ i $r_0 > 0$ takvi da je $S \subseteq K(x_0, r_0)$. Neka je $x \in X$. Definirajmo $r = d(x, x_0) + r_0$. Tvrdimo da je

$$K(x_0, r_0) \subseteq K(x, r). \tag{2.7}$$

Neka je $y \in K(x_0, r_0)$. Tada je $d(y, x_0) < r_0$.
Imamo

$$d(x, y) \leq d(x, x_0) + d(y, x_0) < d(x, x_0) + r_0 = r.$$

Dakle $d(x, y) < r$ pa je $y \in K(x, r)$. Time smo dokazali da vrijedi (2.7) pa slijedi $S \subseteq K(x, r)$. □

Propozicija 2.2.18. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je K kompaktan skup u (X, d). Tada je K omeđen skup u (X, d).*

Dokaz. Odaberimo $x_0 \in X$. Neka je $\mathcal{U} = \{K(x_0, r) \mid r > 0\}$. Tada je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač od K u (X, d). Naime, ako je $x \in K$, odaberimo pozitivan broj r takav da je $d(x_0, x) < r$ i tada je $x \in K(x_0, r)$, tj. $x \in \bigcup \mathcal{U}$. Budući da je K kompaktan, postoje $n \in \mathbb{N}$ i $r_1, \dots, r_n > 0$ takvi da je $K \subseteq K(x_0, r_1) \cup \ldots \cup K(x_0, r_n)$. Neka je $r = \max\{r_1, \dots, r_n\}$. Tada je $K \subseteq K(x_0, r)$. Prema tome, K je omeđen skup. □

Iz teorema 2.2.16 i propozicije 2.2.18 dobivamo sljedeći korolar.

Korolar 2.2.19. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je K kompaktan skup u (X, d). Tada je K zatvoren i omeđen u (X, d).* □

Neka je X neprazan skup te neka je $d \colon X \times X \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}.$$

Tvrdimo da je d metrika na X.

Jedino netrivijalno svojstvo koje treba provjeriti je nejednakost trokuta.

Neka su $x, y, z \in X$. Nejednakost

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \tag{2.8}$$

očito vrijedi ako je $x = y$.

Ako je $x \neq y$ onda je $z \neq x$ ili $z \neq y$ pa imamo $d(x, y) = 1$ i ($d(x, z) = 1$ ili $d(z, y) = 1$) pa je jasno da (2.8) vrijedi.

Dakle d je metrika na X. Za d kažemo da je *diskretna metrika* na X.

Primjer 2.2.20. *Neka je X neprazan skup te d diskretna metrika na X. Neka je $x_0 \in X$ te $r > 0$. Ako je $r \leq 1$ onda je $K(x_0, r) = \{x_0\}$, a ako je $r > 1$ onda je $K(x_0, r) = X$.*

Primjer 2.2.21. *Neka je X neprazan skup te d diskretna metrika na X. Tada je svaki podskup od X otvoren u metričkom prostoru (X, d).*

Naime, ako je $U \subseteq X$ te $x \in U$ onda za $r = 1/2$ vrijedi da je $K(x, r) = \{x\}$, pa je $K(x, r) \subseteq U$, dakle U je otvoren u (X, d).

Uočimo da ovo povlači da je svaki podskup od X ujedno i zatvoren u (X, d).

Primjer 2.2.22. *Neka je X beskonačan skup. Odaberimo podskup $S \subseteq X$ koji je također beskonačan (npr. možemo uzeti $S = X$). Neka je d diskretna metrika na X. Tada je S zatvoren skup u (X, d) te je ujedno i omeđen skup, naime, za svaki $x \in X$ i za svaki $r > 1$ vrijedi da je $S \subseteq K(x, r)$ jer je $K(x, r) = X$.*

Tvrdimo da S nije kompaktan skup u (X, d).
Pretpostavimo suprotno, tj. da je S kompaktan u (X, d). Neka je $\mathcal{U} = \{\{x\} \mid x \in S\}$. Tada je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač od S u (X, d). Budući da je S kompaktan, $\mathcal{U}$ se može reducirati na konačan pokrivač od S, tj. postoje $n \in \mathbb{N}$ i $x_1, \ldots, x_n \in S$ takvi da je $S \subseteq \{x_1\} \cup \ldots \cup \{x_n\}$. Dakle $S \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$. Ovo je u kontradikciji s činjenicom da je S beskonačan skup. Prema tome S nije kompaktan u (X, d).

Prthodni primjer pokazuje da postoji skup koji je omeđen i zatvoren, a nije kompaktan.

Propozicija 2.2.23. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je A gust skup u (X, d). Neka je K neprazan kompaktan skup u (X, d). Tada za svaki $\epsilon > 0$ postoji konačan podskup A' od A takav da je $K \approx_\epsilon A'$.*

Dokaz. Neka je $\epsilon > 0$.
Neka je
$$\mathcal{U} = \Big\{K(a, \epsilon) \mid a \in A,\ K(a, \epsilon) \cap K \neq \emptyset\Big\}.$$
Tada je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač od K u (X, d). Naime, ako je $x \in K$ onda postoji $a \in A$ takav da je $d(x, a) < \epsilon$ (jer je A gust skup) pa je $x \in K(a, \epsilon)$ i $K(a, \epsilon) \cap K \neq \emptyset$. Stoga je $K(a, \epsilon) \in \mathcal{U}$, pa je $x \in \bigcup \mathcal{U}$.

Budući da je K kompaktan skup, postoje $n \in \mathbb{N}$ i $a_0, \dots, a_n \in A$ takvi da je
$$K \subseteq K(a_0, \epsilon) \cup \ldots \cup K(a_n, \epsilon) \tag{2.9}$$
i $K \cap K(a_i, \epsilon) \neq \emptyset$, $\forall i \in \{0, \dots, n\}$.

Tvrdimo da je
$$K \approx_\epsilon \{a_0, \dots, a_n\}. \tag{2.10}$$
Dokažimo prvo da vrijedi $K \prec_\epsilon \{a_0, \dots, a_n\}$.
Neka je $x \in K$. Prema (2.9) postoji $i \in \{0, \dots, n\}$ takav da je $x \in K(a_i, \epsilon)$. Iz ovoga slijedi $d(x, a_i) < \epsilon$. Dakle $K \prec_\epsilon \{a_0, \dots, a_n\}$ vrijedi.

Obratno, neka je $i \in \{0, \dots, n\}$. Iz $K \cap K(a_i, \epsilon) \neq \emptyset$ slijedi da postoji $x \in K$ takav da je $x \in K(a_i, \epsilon)$, tj. $d(a_i, x) < \epsilon$. Prema tome $\{a_0, \dots, a_n\} \prec_\epsilon K$. Time smo dokazali (2.10). □

Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Za $i \in \mathbb{N}$ definiramo
$$\Lambda_i = \Big\{\ \alpha_{(i)_0}, \dots, \alpha_{(i)_{\bar{i}}}\ \Big\}.$$

Uočimo sljedeće: Za svaki $i \in \mathbb{N}$ Λ_i je konačan podskup od $\{\alpha_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ i obratno, svaki konačan neprazan podskup od $\{\alpha_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ je oblika Λ_i za neki $i \in \mathbb{N}$.

Pretpostavimo da je K neprazan kompaktan skup u (X, d). Prema propoziciji 2.2.23 za svaki $\epsilon > 0$ postoji konačan neprazan podskup $A \subseteq \{\alpha_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ takav da je $K \approx_\epsilon A$, tj. postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $K \approx_\epsilon \Lambda_i$.

Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor te neka je K kompaktan skup u (X, d). Kažemo da je K *izračunljiv skup* u (X, d, α) ako je $K = \emptyset$ ili ako postoji rekurzivna funkcija $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $K \approx_{2^{-k}} \Lambda_{f(k)}$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Ako je $n \in \mathbb{N}$ te $B_0, \dots, B_n$ racionalne otvorene kugle u (X, d, α), onda ćemo za uniju $B_0 \cup \ldots \cup B_n$ reći da je *racionalan otvoren skup* u (X, d, α).

Uočimo da se svaki racionalni otvoren skup u (X, d, α) može zapisati u obliku $I_{i_0} \cup \ldots \cup I_{i_n}$, gdje su $i_0, \dots, i_n \in \mathbb{N}$.

Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Za $j \in \mathbb{N}$ definiramo

$$J_j = I_{(j)_0} \cup \ldots \cup I_{(j)_{\bar{j}}}.$$

Uočimo da je $\{J_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ familija svih racionalnih otvorenih skupova u (X, d, α).

Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor te K kompaktan skup u (X, d). Kažemo da je K *poluizračunljiv skup* u (X, d, α) ako je skup $\{j \in \mathbb{N} \mid K \subseteq J_j\}$ rekurzivno prebrojiv u $\mathbb{N}$.

Neka su $k, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je $\Phi\colon \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$ funkcija gdje $\mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$ označava partitivni skup od $\mathbb{N}^n$.
Definirajmo funkciju $\overline{\Phi}\colon \mathbb{N}^{k+n} \to \mathbb{N}$ sa

$$\overline{\Phi}(x, y) = \chi_{\Phi(x)}(y).$$

Za Φ kažemo da je rekurzivna funkcija ako je $\overline{\Phi}$ rekurzivna funkcija.

Primjer 2.2.24. *Neka su Φ, $\Psi\colon \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ funkcije definirane sa*

$$\Phi(x) = \{y \in \mathbb{N} \mid y \leq x\},$$
$$\Psi(x) = \{y \in \mathbb{N} \mid y \geq x\}.$$

Tada su Φ, Ψ rekurzivne funkcije. Naime, za funkcije $\overline{\Phi}$, $\overline{\Psi}\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ vrijedi

$$\overline{\Phi}(x, y) = \chi_{\Phi(x)}(y) = \begin{cases} 1, & y \in \Phi(x) \\ 0, & \textit{inače} \end{cases} = \begin{cases} 1, & y \leq x \\ 0, & \textit{inače} \end{cases} = \overline{sg}(y \dot{-} x),$$

$$\overline{\Psi}(x,y) \;=\; \overline{sg}(x\dot{-}y),$$

iz čega je jasno da su $\overline{\Phi}$, $\overline{\Psi}$ rekurzivne funkcije.

Za $m \in \mathbb{N}$ neka je $\mathbb{N}_m = \{0, \ldots, m\}$. Za $n \geq 1$ neka je

$$\mathbb{N}_m^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{N}_m\}.$$

Za funkciju $\Phi\colon \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$ kažemo da je *rekurzivno omeđena* ako postoji rekurzivna funkcija $\varphi\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takva da je

$$\Phi(x) \subseteq \mathbb{N}^n_{\varphi(x)}, \quad \forall x \in \mathbb{N}^k.$$

Uočimo da je u tom slučaju $\Phi(x)$ konačan skup za svaki $x \in \mathbb{N}^k$.

Za funkciju $\Phi\colon \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$ koja je rekurzivna i rekurzivno omeđena kažemo da je *r.r.o.* funkcija.

Primjer 2.2.25. *Funkcija Φ iz prethodnog primjera je rekurzivno omeđena, što slijedi iz činjenice da je $\Phi(x) \subseteq \mathbb{N}_{\varphi(x)}$, gdje je $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\varphi(x) = x$. Stoga je Φ r.r.o. funkcija.*

Propozicija 2.2.26. *Neka su Φ, $\Psi\colon \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$ r.r.o. funkcije. Tada je funkcija $\Lambda\colon \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$ definirana sa $\Lambda(x) = \Phi(x) \cup \Psi(x)$ r.r.o.*

Dokaz. Promotrimo funkciju $\overline{\Lambda}\colon \mathbb{N}^{k+n} \to \mathbb{N}$. Za $x \in \mathbb{N}^k$, $y \in \mathbb{N}^n$ vrijedi

$$\begin{aligned}
\overline{\Lambda}(x,y) &= \chi_{\Lambda(x)}(y) \\
&= \chi_{\Phi(x)\cup\Psi(x)}(y) \\
&= sg\big(\chi_{\Phi(x)}(y) + \chi_{\Psi(x)}(y)\big) \\
&= sg(\overline{\Phi}(x,y) + \overline{\Psi}(x,y)),
\end{aligned}$$

Iz ovoga je jasno da je $\overline{\Lambda}$ rekurzivna funkcija, pa je i Λ rekurzivna funkcija.

Dokažimo još da je Λ rekurzivno omeđena funkcija.
Postoje $\varphi, \psi \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije takve da je

$$\begin{matrix} \Phi(x) \subseteq \mathbb{N}^n_{\varphi(x)} \\ \Psi(x) \subseteq \mathbb{N}^n_{\psi(x)} \end{matrix} \quad , \forall x \in \mathbb{N}^k.$$

Neka je $\lambda \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa

$$\lambda(x) = \max\{\varphi(x), \psi(x)\}.$$

Za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi $\mathbb{N}^n_{\varphi(x)} \subseteq \mathbb{N}^n_{\lambda(x)}$ i $\mathbb{N}^n_{\psi(x)} \subseteq \mathbb{N}^n_{\lambda(x)}$, stoga je $\Phi(x) \cup \Psi(x) \subseteq \mathbb{N}^n_{\lambda(x)}$, tj. $\Lambda(x) \subseteq \mathbb{N}^n_{\lambda(x)}$.

Iz činjenice da je funkcija max rekurzivna slijedi da je i funkcija λ rekurzivna. Stoga je Λ rekurzivno omeđena. Dakle Λ je r.r.o. □

Teorem 2.2.27. *Neka su Φ, $\Psi \colon \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$ r.r.o. funkcije.*
Neka je

$$S = \{x \in \mathbb{N}^k \mid \Phi(x) \subseteq \Psi(x)\}.$$

Tada je S rekurzivan skup.

Dokaz. Neka je $\varphi \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija takva da je

$$\Phi(x) \subseteq \mathbb{N}^n_{\varphi(x)}, \quad \forall x \in \mathbb{N}^k.$$

Neka je $h \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^n$ funkcija definirana sa

$$h(i) = (\langle i \rangle_1, \dots, \langle i \rangle_n).$$

Neka je $x \in \mathbb{N}^k$.
Uočimo da za svaki $m \in \mathbb{N}$ i svaki $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{N}^n_m$ postoji $i \in \{0, \dots, p_1^m \cdot \ldots \cdot p_n^m\}$ takav da je

$$(y_1, \dots, y_n) = h(i)$$

(naime, možemo uzeti $i = p_1^{y_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{y_m}$).

Vrijede sljedeće ekvivalencije:

$$\begin{aligned}
\Phi(x) \subseteq \Psi(x) &\Leftrightarrow \text{ne postoji } y \in \mathbb{N}^n_{\varphi(x)} \text{ takav da je } y \in \Phi(x) \text{ i } y \notin \Psi(x) \\
&\Leftrightarrow \text{ne postoji } i \in \{0, \dots, p_1^{\varphi(x)} \cdot \ldots \cdot p_n^{\varphi(x)}\} \text{ takav da} \\
&\quad\ \text{je } h(i) \in \Phi(x) \text{ i } h(i) \notin \Psi(x) \\
&\Leftrightarrow \text{ne postoji } i \in \{0, \dots, p_1^{\varphi(x)} \cdot \ldots \cdot p_n^{\varphi(x)}\} \text{ takav da} \\
&\quad\ \text{je } \overline{sg}\Big(\chi_{\Phi(x)}(h(i))\Big) + \chi_{\Psi(x)}(h(i)) = 0 \\
&\Leftrightarrow \prod_{i=0}^{p_1^{\varphi(x)} \cdot \ldots \cdot p_n^{\varphi(x)}} \Big(\overline{sg}\Big(\chi_{\Phi(x)}(h(i))\Big) + \chi_{\Psi(x)}(h(i))\Big) \neq 0.
\end{aligned}$$

Stoga je

$$\chi_S(x) = sg\Bigg(\prod_{i=0}^{p_1^{\varphi(x)} \cdot \ldots \cdot p_n^{\varphi(x)}} \Big(\overline{sg}\Big(\overline{\Phi}(x, h(i))\Big) + \overline{\Psi}(x, h(i))\Big)\Bigg).$$

Iz propozicije 1.1.2 slijedi da je χ_S rekurzivna funkcija, tj. da je S rekurzivan skup. □

Korolar 2.2.28. *Neka su $\Phi, \Psi \colon \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$ r.r.o. funkcije. Tada je skup*

$$\{x \in \mathbb{N}^k \mid \Phi(x) = \Psi(x)\}$$

rekurzivan.

Dokaz. Ovaj skup je presjek skupova

$$\{x \in \mathbb{N}^k \mid \Phi(x) \subseteq \Psi(x)\}$$

i

$$\{x \in \mathbb{N}^k \mid \Psi(x) \subseteq \Phi(x)\},$$

pa iz prethodnog teorema slijedi tvrdnja. □

Neka je $g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcija. Definiramo $g^{\max} \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sa

$$g^{\max}(x) = \max\{g(i) \mid i \in \{0, \dots, x\}\}.$$

Propozicija 2.2.29. *Neka je $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija. Tada je i $g^{\max}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija.*

Dokaz. Imamo

$$\begin{aligned} g^{\max}(0) &= g(0) \\ g^{\max}(y+1) &= \max\{g(0),\dots,g(y+1)\} \\ &= \max\Big\{\{g(0),\dots,g(y)\}, g(y+1)\Big\} \\ &= h(g^{\max}(y), g(y+1)) \end{aligned}$$

pri čemu je $h\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa

$$h(i,j) = \max\{i,j\}.$$

Definirajmo $G\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ sa

$$G(a,y) = h(a, g(y+1)).$$

Tada je G rekurzivna funkcija te za svaki $y \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$g^{\max}(y+1) = G(g^{\max}(y), y).$$

Prema propoziciji 1.1.3 $g^{\max}$ je rekurzivna funkcija. □

Teorem 2.2.30. *Neka su $k,n,m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Neka je $\Phi\colon \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$ r.r.o. funkcija, te neka je $f\colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}^m$ rekurzivna funkcija. Neka je $\Psi\colon \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^m)$ funkcija definirana sa $\Psi(x) = f(\Phi(x))$, tj. $\Psi(x) = \{f(y) \mid y \in \Phi(x)\}$. Tada je Ψ r.r.o. funkcija.*

Dokaz. Neka je $\varphi\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija takva da je $\Phi(x) \subseteq \mathbb{N}^n_{\varphi(x)}$ za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Neka je $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^n$ funkcija definirana sa

$$h(i) = (\langle i\rangle_1, \dots, \langle i\rangle_n).$$

Neka su $x \in \mathbb{N}^k$ i $z \in \mathbb{N}^m$. Tada je

$$\begin{aligned} \overline{\Psi}(x,z) = \chi_{\Psi(x)}(z) &= \begin{cases} 1, & z \in \Psi(x) \\ 0, & \text{inače} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1, & z \in f(\Phi(x)) \\ 0, & \text{inače} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1, & z = f(y), \text{ za neki } y \in \Phi(x) \\ 0, & \text{inače.} \end{cases} \end{aligned}$$

Stoga je

$$\begin{aligned}\overline{\Psi}(x,z)\neq 0 &\Leftrightarrow \exists y\in\Phi(x) \text{ takav da je } z=f(y)\\ &\Leftrightarrow \exists y\in\mathbb{N}^n_{\varphi(x)} \text{ takav da je } y\in\Phi(x) \text{ i } z=f(y)\\ &\Leftrightarrow \exists i\in\{0,\dots,p_1^{\varphi(x)}\cdot\ldots\cdot p_n^{\varphi(x)}\} \text{ takav da je } h(i)\in\Phi(x) \text{ i } z=f\big(h(i)\big)\\ &\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{p_1^{\varphi(x)}\cdot\ldots\cdot p_n^{\varphi(x)}} \chi_{\Phi(x)}h(i)\cdot\overline{sg}\Big(\big|z-f\big(h(i)\big)\big|\Big)\neq 0.\end{aligned}$$

Prema tome

$$\overline{\Psi}(x,z)=sg\left(\sum_{i=0}^{p_1^{\varphi(x)}\cdot\ldots\cdot p_n^{\varphi(x)}}\overline{\Phi}(x,h(i))\cdot\overline{sg}\Big(\big|z-f\big(h(i)\big)\big|\Big)\right).$$

Iz propozicije 1.1.1 slijedi da je $\overline{\Psi}$ rekurzivna funkcija, pa je i Ψ rekurzivna funkcija.

Neka su $f_1,\dots,f_m\colon\mathbb{N}^n\to\mathbb{N}$ komponentne funkcije od f. Neka je $x\in\mathbb{N}^k$. Tada je

$$\begin{aligned}\Psi(x)&=\Big\{f(y)\mid y\in\Phi(x)\Big\}\\ &\subseteq\Big\{f(y)\mid y\in\mathbb{N}^n_{\varphi(x)}\Big\}\\ &=\Big\{(f_1(y),\dots,f_m(y))\mid y\in\mathbb{N}^n_{\varphi(x)}\Big\}\\ &\subseteq\Big\{\Big(f_1(h(i)),\dots,f_m(h(i))\Big)\mid i\in\{0,\dots,p_1^{\varphi(x)}\cdot\ldots\cdot p_n^{\varphi(x)}\}\Big\}\end{aligned}$$

jer je

$$\mathbb{N}^n_{\varphi(x)}\subseteq\Big\{h(i)\mid i\in\{0,\dots,p_1^{\varphi(x)}\cdot\ldots\cdot p_n^{\varphi(x)}\}\Big\}.$$

Prema tome

$$\Psi(x)\subseteq\Big\{\Big((f_1\circ h)(i),\dots,(f_m\circ h)(i)\Big)\mid i\in\{0,\dots,p_1^{\varphi(x)}\cdot\ldots\cdot p_n^{\varphi(x)}\}\Big\}.$$

Neka je $\psi\colon\mathbb{N}^k\to\mathbb{N}$ funkcija definirana sa

$$\psi(x)=\max\Big\{(f_1\circ h)^{\max}(p_1^{\varphi(x)}\cdot\ldots\cdot p_n^{\varphi(x)}),\ \dots,\ (f_m\circ h)^{\max}(p_1^{\varphi(x)}\cdot\ldots\cdot p_n^{\varphi(x)})\Big\}.$$

Iz propozicije 2.2.29 i činjenice da je max rekurzivna funkcija slijedi da je ψ rekurzivna funkcija.

Za svaki $i\in\{0,\dots,p_1^{\varphi(x)}\cdot\ldots\cdot p_n^{\varphi(x)}\}$ vrijedi

$$f_1(h(i))\leq\psi(x),\ \dots,\ f_m(h(i))\leq\psi(x).$$

Stoga je

$$\Big\{\big(f_1(h(i)),\ \ldots,\ f_m(h(i))\big) \mid i \in \{0, \ldots, p_1^{\varphi(x)} \cdot \ldots \cdot p_n^{\varphi(x)}\}\Big\} \subseteq \mathbb{N}^m_{\psi(x)}.$$

Prema tome

$$\Psi(x) \subseteq \mathbb{N}^m_{\psi(x)}.$$

Time smo dokazali da je Ψ rekurzivno omeđena funkcija.

Zaključak: Ψ je r.r.o. □

Propozicija 2.2.31. *Neka su n, k, $l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Neka je $\Phi\colon \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$ r.r.o. funkcija te neka je $f\colon \mathbb{N}^l \to \mathbb{N}^k$ rekurzivna funkcija. Tada je $\Phi \circ f\colon \mathbb{N}^l \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$ r.r.o. funkcija.*

Dokaz. Imamo sljedeći dijagram:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{N}^l \arrow[r, "f"] & \mathbb{N}^k \arrow[r, "\Phi"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \mathcal{P}(\mathbb{N}^n) \\
& & \mathbb{N}
\end{tikzcd}$$

Označimo $\Psi = \Phi \circ f$. Za funkciju $\overline{\Psi}\colon \mathbb{N}^{l+n} \to \mathbb{N}$ vrijedi

$$\overline{\Psi}(z, y) = \chi_{\Psi(z)}(y) = \chi_{\Phi(f(z))}(y) = \overline{\Phi}(f(z), y)$$

za sve $z \in \mathbb{N}^l$ i $y \in \mathbb{N}^n$, tj.

$$\overline{\Psi}(z, y) = \overline{\Phi}(f(z), y).$$

Iz činjenice da je $\overline{\Phi}$ rekurzivna funkcija slijedi da je i $\overline{\Psi}$ rekurzivna funkcija. Dakle Ψ je rekurzivna funkcija.

Nadalje, budući da je Φ rekurzivno omeđena, postoji $\varphi\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija takva da je $\Phi(x) \subseteq \mathbb{N}^n_{\varphi(x)}$, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Posebno za svaki $z \in \mathbb{N}^l$ vrijedi $\Phi(f(z)) \subseteq \mathbb{N}^n_{\varphi(f(z))}$, tj.

$$\Psi(z) \subseteq \mathbb{N}^n_{(\varphi \circ f)(z)}.$$

Funkcija $\varphi \circ f\colon \mathbb{N}^l \to \mathbb{N}$ je rekurzivna pa slijedi da je Ψ rekurzivno omeđena funkcija. Prema tome Ψ je r.r.o. □

Lema 2.2.32. *Neka je $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je T rekurzivno prebrojiv skup u $\mathbb{N}^n$. Tada postoji r.r.o. funkcija $\Gamma\colon \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$ takva da je $\Gamma(i) \subseteq T$ za svaki $i \in \mathbb{N}$ te takva da za svaki konačan podskup $T' \subseteq T$ postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $T' \subseteq \Gamma(i)$.*

Dokaz. Ako je $T = \emptyset$ onda funkcija $\Gamma\colon \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$ definirana sa $\Gamma(i) = \emptyset$, za svaki $i \in \mathbb{N}$, očito zadovoljava tražene uvjete.

Pretpostavimo sada da je $T \neq \emptyset$. Tada postoji rekurzivna funkcija $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^n$ takva da je

$$T = g(\mathbb{N}).$$

Definirajmo $\Gamma\colon \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$ sa

$$\Gamma(i) = \{g(0), \ldots, g(i)\}.$$

Neka je $\Phi\colon \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ funkcija definirana sa

$$\Phi(i) = \{0, \ldots, i\}.$$

Prema primjeru 2.2.25 Φ je r.r.o.

Nadalje, za svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\Gamma(i) = g(\Phi(i))$$

pa iz teorema 2.2.30 slijedi da je Γ r.r.o. funkcija.

Očito je

$$\Gamma(i) \subseteq T, \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

S druge strane, ako je T' konačan neprazan podskup od T onda je $T' = \{a_0, \ldots, a_k\}$, za neki $k \in \mathbb{N}$ i $a_0, \ldots, a_k \in T$. Budući da je $T = g(\mathbb{N})$ imamo $a_0 = g(j_0), \ldots, a_k = g(j_k)$, gdje su $j_0, \ldots, j_k \in \mathbb{N}$.

Neka je $i = \max\{j_0, \ldots, j_k\}$. Tada vrijedi $g(j_0), \ldots, g(j_k) \in \Gamma(i)$, tj.

$$T' \subseteq \Gamma(i).$$

Time je tvrdnja leme dokazana. $\square$

Teorem 2.2.33. *Neka su $k, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je $\Phi\colon \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$ r.r.o. funkcija. Neka je T rekurzivno prebrojiv podskup od $\mathbb{N}^n$. Neka je*

$$S = \{x \in \mathbb{N}^k \mid \Phi(x) \subseteq T\}.$$

Tada je S rekurzivno prebrojiv skup.

Dokaz. Prema lemi 2.2.32 postoji r.r.o. funkcija $\Gamma\colon \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$ takva da je $\Gamma(i) \subseteq T$ za svaki $i \in \mathbb{N}$ te takva da za svaki konačan podskup od T postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $T' \subseteq \Gamma(i)$.

Neka je $x \in \mathbb{N}^k$. Budući da je $\Phi(x)$ konačan skup vrijedi

$$\Phi(x) \subseteq T \Leftrightarrow \exists i \in \mathbb{N} \text{ takav da je } \Phi(x) \subseteq \Gamma(i). \tag{2.11}$$

Neka je

$$\Omega = \left\{(x, i) \in \mathbb{N}^{k+1} \mid x \in \mathbb{N}^k,\ i \in \mathbb{N},\ \Phi(x) \subseteq \Gamma(i)\right\}.$$

Definirajmo funkcije $\Phi', \Gamma'\colon \mathbb{N}^{k+1} \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$ sa

$$\Phi'(x, i) = \Phi(x),$$
$$\Gamma'(x, i) = \Gamma(i).$$

Tada su Φ' i Γ' r.r.o. funkcije prema propoziciji 2.2.31, a očito vrijedi da je

$$\Omega = \left\{y \in \mathbb{N}^{k+1} \mid \Phi'(y) \subseteq \Gamma'(y)\right\}$$

pa iz teorema 2.2.27 slijedi da je Ω rekurzivan skup.

Iz definicije skupa Ω i (2.11) slijedi da je

$$x \in S \Leftrightarrow \exists i \in \mathbb{N} \text{ takav da je } (x, i) \in \Omega.$$

Iz teorema o projekciji 1.4.7 slijedi da je S rekurzivno prebrojiv skup. □

Za $i \in \mathbb{N}$ označavamo sa $[i]$ skup $\{(i)_0, \ldots, (i)_{\bar{i}}\}$.

Uočimo da je svaki konačan neprazan podskup od $\mathbb{N}$ oblika $[i]$, za neki $i \in \mathbb{N}$.
Naime, svaki konačan neprazan podskup od $\mathbb{N}$ je oblika $\{a_0, \ldots, a_n\}$, gdje je $n \in \mathbb{N}$ i $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$. Neka je $i \in \mathbb{N}$ takav da je $(a_0, \ldots, a_n) = ((i)_0, \ldots, (i)_{\bar{i}})$ (takav i sigurno postoji). Tada je očito $\{a_0, \ldots, a_n\} = \{(i)_0, \ldots, (i)_{\bar{i}}\}$, tj.

$$\{a_0, \ldots, a_n\} = [i].$$

Nadalje, ako je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor onda za svaki $j \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$J_j = \bigcup_{i \in [j]} I_i.$$

Propozicija 2.2.34. *Funkcija* $\Phi\colon \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ *definirana sa* $\Phi(i) = [i]$ *je r.r.o.*

Dokaz. Za svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\begin{aligned}
\Phi(i) &= \{(i)_0, \dots, (i)_{\bar{i}}\} \\
&= \left\{\sigma(i, 0), \dots, \sigma(i, \bar{i})\right\} \\
&= \sigma\Big(\left\{(i, 0), \dots, (i, \bar{i})\right\} \Big) \\
&= \sigma\Big(\{(i, 0), \dots, (i, \eta(i))\} \Big).
\end{aligned}$$

Definirajmo $\Psi\colon \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$ sa

$$\Psi(i) = \{(i, 0), \dots, (i, \eta(i))\}.$$

Dakle, za svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\Phi(i) = \sigma(\Psi(i)).$$

Stoga je prema teoremu 2.2.30 dovoljno dokazati da je Ψ r.r.o. funkcija.

Neka su $i, a, b \in \mathbb{N}$. Vrijedi

$$\begin{aligned}
\overline{\Psi}(i, a, b) &= \chi_{\Psi(i)}(a, b) \\
&= \begin{cases} 1, & (a, b) \in \Psi(i) \\ 0, & \text{inače} \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1, & a = i,\ b \leq \bar{i} \\ 0, & \text{inače} \end{cases}
\end{aligned}$$

pa je

$$\overline{\Psi}(i, a, b) = \overline{sg}(\,|a - i|\,) \cdot \overline{sg}(b \dot{-} \eta(i)).$$

Iz ovoga je jasno da je $\overline{\Psi}$ rekurzivna funkcija. Prema tome, Ψ je rekurzivna funkcija.

Neka je $\psi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa

$$\psi(i) = \max\{i, \eta(i)\}.$$

Tada je ψ rekurzivna funkcija (jer je max rekurzivna) te za svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\Psi(i) \subseteq \mathbb{N}^2_{\psi(i)}.$$

Prema tome, Ψ je rekurzivno omeđena funkcija. Dakle Ψ je r.r.o. funkcija.
Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Propozicija 2.2.35. *Neka su k, n, $m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ te neka su $\Phi\colon \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$ i $\Psi\colon \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^m)$ r.r.o. funkcije. Neka je $\Lambda\colon \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^{n+m})$ funkcija definirana sa $\Lambda(x) = \Phi(x) \times \Psi(x)$. Tada je Λ r.r.o. funkcija.*

Dokaz. Promotrimo funkciju $\overline{\Lambda}\colon \mathbb{N}^{k+n+m} \to \mathbb{N}$. Neka su $x \in \mathbb{N}^k$, $y \in \mathbb{N}^n$, $z \in \mathbb{N}^m$. Tada je

$$\begin{aligned}
\overline{\Lambda}(x, y, z) &= \chi_{\Lambda(x)}(y, z) \\
&= \begin{cases} 1, & (y, z) \in \Phi(x) \times \Psi(x) \\ 0, & \text{inače} \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1, & y \in \Phi(x),\ z \in \Psi(x) \\ 0, & \text{inače} \end{cases} \\
&= \chi_{\Phi(x)}(y) \cdot \chi_{\Psi(x)}(z) \\
&= \overline{\Phi}(x, y) \cdot \overline{\Psi}(x, z).
\end{aligned}$$

Stoga je $\overline{\Lambda}$ rekurzivna funkcija, tj. Λ je rekurzivna funkcija. Nadalje, budući da su Φ i Ψ rekurzivno omeđene, postoje rekurzivne funkcije φ, $\psi\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je

$$\begin{aligned}
&\Phi(x) \subseteq \mathbb{N}^n_{\varphi(x)} \\
&\Psi(x) \subseteq \mathbb{N}^m_{\psi(x)}, \quad \forall x \in \mathbb{N}^k.
\end{aligned}$$

Neka je $\lambda\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa

$$\lambda(x) = \max\{\varphi(x), \psi(x)\}.$$

Tada je λ rekurzivna funkcija te je

$$\Phi(x) \subseteq \mathbb{N}^n_{\lambda(x)},$$
$$\Psi(x) \subseteq \mathbb{N}^m_{\lambda(x)}$$

pa je

$$\Phi(x) \times \Psi(x) \subseteq \mathbb{N}^{n+m}_{\lambda(x)},$$

tj.

$$\Lambda(x) \subseteq \mathbb{N}^{n+m}_{\lambda(x)}.$$

Time smo dokazali da je Λ r.r.o. funkcija □

Lema 2.2.36. *Neka su $k, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka su $f, g \in \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ rekurzivne funkcije. Tada je skup $S = \left\{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) = g(x)\right\}$ rekurzivan.*

Dokaz. Neka su $f_1, \dots, f_n$ i $g_1, \dots, g_n$ komponentne funkcije od f i g.

Tada je

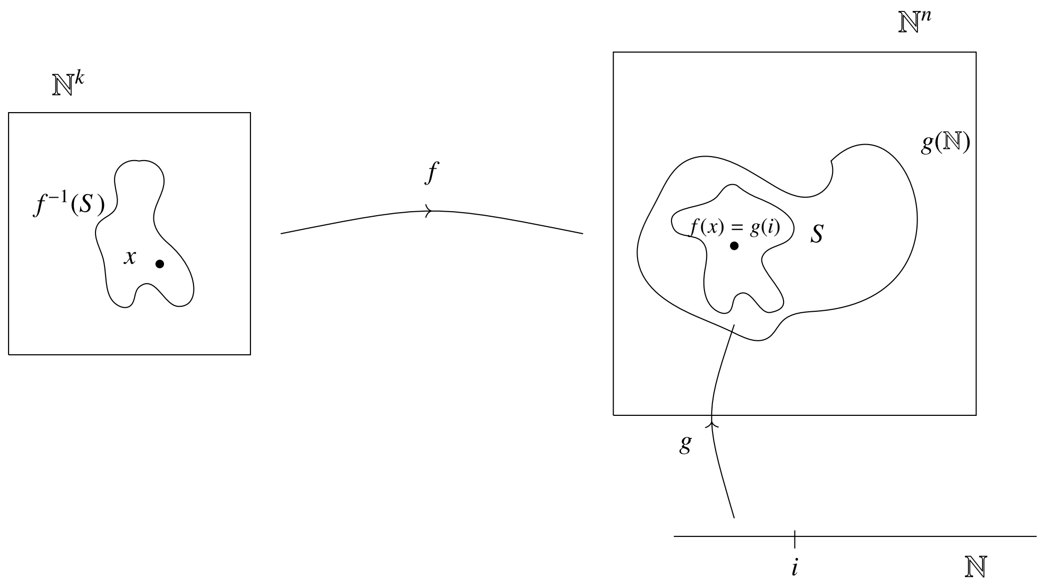
$$\begin{aligned} S &= \left\{x \in \mathbb{N}^k \mid (f_1(x), \dots, f_n(x)) = (g_1(x), \dots, g_n(x))\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{N}^k \mid f_1(x) = g_1(x), \dots, f_n(x) = g_n(x)\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{N}^k \mid f_1(x) = g_1(x)\right\} \cap \dots \cap \left\{x \in \mathbb{N}^k \mid f_n(x) = g_n(x)\right\}. \end{aligned}$$

Iz korolara 1.3.3 slijedi da je S presjek konačno mnogo rekurzivnih skupova. Stoga je S rekurzivan. □

Propozicija 2.2.37. *Neka su $k, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, neka je $f \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ rekurzivna funkcija te neka je S rekurzivno prebrojiv skup u $\mathbb{N}^n$. Tada je $f^{-1}(S)$ rekurzivno prebrojiv skup u $\mathbb{N}^k$.*

Dokaz. Ako je $S = \emptyset$, tvrdnja je jasna.

Pretpostavimo da je $S \neq \emptyset$.



Slika 2.4: Vizualizacija djelovanja funkcija.

Tada postoji rekurzivna funkcija $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^n$ takva da je $g(\mathbb{N}) = S$.

Neka je $x \in \mathbb{N}^k$. Tada vrijedi

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(S) &\Leftrightarrow f(x) \in S \\ &\Leftrightarrow \exists i \in \mathbb{N} \text{ takav da } f(x) = g(i) \\ &\Leftrightarrow \exists i \in \mathbb{N} \text{ takav da } (x, i) \in T \end{aligned}$$

pri čemu je

$$T = \left\{(x, i) \in \mathbb{N}^{k+1} \mid x \in \mathbb{N}^k,\ i \in \mathbb{N},\ f(x) = g(i)\right\}.$$

Skup T je rekurzivan prema lemi 2.2.36.

Dakle, vrijedi

$$x \in f^{-1}(S) \Leftrightarrow \exists i \in \mathbb{N} \text{ takav da } (x, i) \in T$$

pa iz teorema o projekciji 1.4.7 slijedi da je $f^{-1}(S)$ rekurzivno prebrojiv skup. □

Teorem 2.2.38. *Neka su k, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je $S \subseteq \mathbb{N}^{k+n}$ rekurzivno prebrojiv skup takav da za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ postoji $y \in \mathbb{N}^n$ takav da je $(x, y) \in S$. Tada postoji rekurzivna funkcija $\varphi\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ takva da je $(x, \varphi(x)) \in S$, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$.*

Dokaz. Budući da je S rekurzivno prebrojiv skup (te je očito neprazan) postoji rekurzivna funkcija $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^{k+n}$ takva da je

$$S = g(\mathbb{N}).$$

Neka su $g_1, \dots, g_{k+n}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ komponentne funkcije od g. Neka je $x \in \mathbb{N}^k$. Tada postoji $y \in \mathbb{N}^n$ takav da je $(x, y) \in S$ iz čega slijedi da postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je

$$(x, y) = g(i).$$

Iz ovoga slijedi da je $x = (g_1(i), \dots, g_k(i))$. Dakle, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je

$$x = (g_1(i), \dots, g_k(i)).$$

Neka je

$$T = \left\{(x, i) \in \mathbb{N}^{k+1} \mid x \in \mathbb{N}^k,\ i \in \mathbb{N},\ x = (g_1(i), \dots, g_k(i))\right\}.$$

Neka su $F, G\colon \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}^k$ funkcije definirane sa

$$F(x_1, \dots, x_k, i) = (x_1, \dots, x_k),$$
$$G(x_1, \dots, x_k, i) = (g_1(i), \dots, g_k(i)).$$

Očito su F i G rekurzivne funkcije, a prema definiciji skupa T vrijedi

$$T = \left\{z \in \mathbb{N}^{k+1} \mid F(z) = G(z)\right\}.$$

Iz leme 2.2.36 slijedi da je T rekurzivan skup. Vidjeli smo da za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $(x, i) \in T$.

Prema lemi 2.2.5 postoji rekurzivna funkcija $h\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takva da je $(x, h(x)) \in T$ za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Stoga za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$x = \Big(g_1(h(x)), \dots, g_k(h(x))\Big).$$

Definirajmo $\varphi\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ sa

$$\varphi(x) = \Big(g_{k+1}(h(x)), \dots, g_{k+n}(h(x))\Big).$$

Očito je φ rekurzivna funkcija te za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$(x, \varphi(x)) = \Big(g_1(h(x)), \dots, g_k(h(x)), g_{k+1}(h(x)), \dots, g_{k+n}(h(x))\Big) = g(h(x)) \in S.$$

Dakle, $(x, \varphi(x)) \in S$ za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. $\square$

Propozicija 2.2.39. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka su S i T rekurzivno prebrojivi podskupovi od $\mathbb{N}^k$. Tada su $S \cup T$ i $S \cap T$ rekurzivno prebrojivi podskupovi od $\mathbb{N}^k$.*

Dokaz. Ako je $S = \emptyset$ ili $T = \emptyset$ tvrdnja je jasna.

Pretpostavimo da je $S \neq \emptyset$ i $T \neq \emptyset$. Tada postoje rekurzivne funkcije $f, g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^k$ takve da je

$$f(\mathbb{N}) = S \;\text{ i }\; g(\mathbb{N}) = T.$$

Definirajmo $h \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^k$ sa

$$h(x) = \begin{cases} f\left(\lfloor \frac{x}{2} \rfloor\right), & \text{x paran} \\ g\left(\lfloor \frac{x \dot{-} 1}{2} \rfloor\right), & \text{x neparan.} \end{cases}$$

Jasno je da je h rekurzivna funkcija.

Nadalje, očito je $h(\mathbb{N}) \subseteq S \cup T$. Obratno, ako je $y \in S$ onda je $y = g(i)$, za neki $i \in \mathbb{N}$ pa je $y = g(i)$, za neki $i \in \mathbb{N}$ pa je $y = h(2i)$, a ako je $y \in T$ onda je $y = g(j)$, za neki $j \in \mathbb{N}$ pa je $y = h(2j + 1)$. Prema tome $S \cup T \subseteq h(\mathbb{N})$ pa je

$$h(\mathbb{N}) = S \cup T.$$

Dakle $S \cup T$ je rekurzivno prebrojiv skup.

Neka je $x \in \mathbb{N}^k$. Tada je

$$\begin{aligned} x \in S \cap T &\Leftrightarrow x \in S \;\text{ i }\; x \in T \\ &\Leftrightarrow \exists\, i, j \in \mathbb{N} \;\text{ takvi da je }\; x = f(i),\; x = g(j) \\ &\Leftrightarrow \exists\, i, j \in \mathbb{N} \;\text{ takvi da je }\; (x, i, j) \in \Omega, \end{aligned}$$

pri čemu je

$$\Omega = \left\{(x, i, j) \in \mathbb{N}^{k+2} \mid x = f(i),\; x = g(j)\right\}.$$

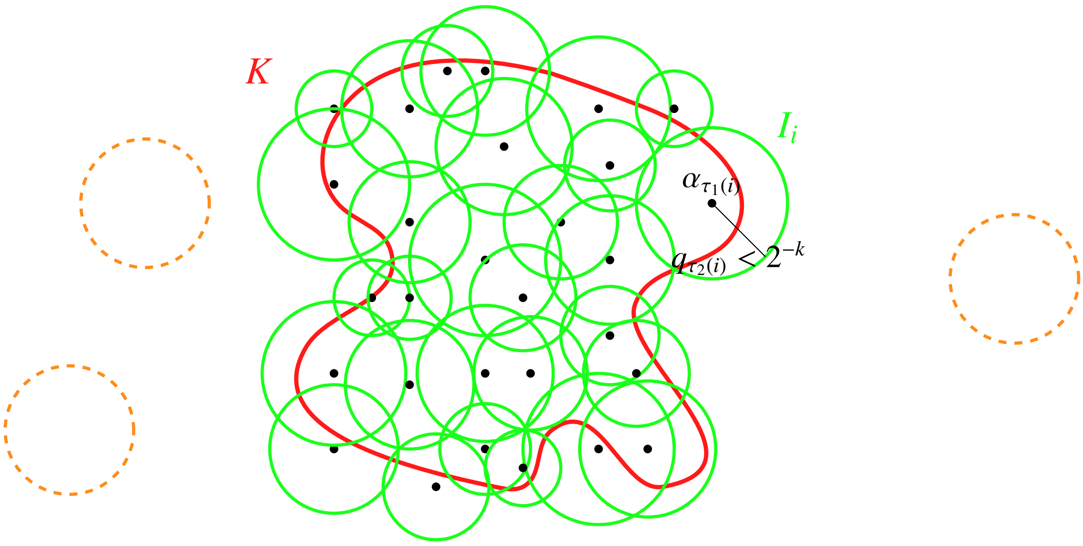
Skup Ω je prema lemi 2.2.36 presjek dva rekurzivna skupa pa je i sam rekurzivan.

Dokazali smo da je

$$x \in S \cap T \Leftrightarrow \exists\, y \in \mathbb{N}^2 \;\text{ takav da je }\; (x, y) \in \Omega.$$

Iz teorema o projekciji (teorem 1.4.7) slijedi da je $S \cap T$ rekurzivno prebrojiv skup. $\square$

Teorem 2.2.40. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Neka je K poluizračunljiv i izračunljivo prebrojiv skup u (X, d, α). Tada je K izračunljiv skup u (X, d, α).*



Slika 2.5: Vizualizacija ideje dokaza teorema.

Dokaz. Ideja dokaza je, neformalno govoreći, sljedeća.
Za dani $k \in \mathbb{N}$ želimo naći $j \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi:

(1) $K \subseteq J_j$

(2) Svaka kuglica I_i, $i \in [j]$, ima radijus manji od 2^{-k}.

(3) Svaka kuglica I_i, $i \in [j]$, siječe K.

Tada bi konačan skup A, koji se sastoji od središtâ tih kuglica, trebao aproksimirati K s točnošću 2^{-k}, tj.

$$K \approx_{2^{-k}} A.$$

Formalno, postupamo na sljedeći način.

Ako je $K = \emptyset$, tvrdnja je jasna.

Pretpostavimo da je $K \neq \emptyset$.

Neka je
$$S = \{i \in \mathbb{N} \mid I_i \cap K \neq \emptyset\}.$$
Skup S je rekurzivno prebrojiv jer je K izračunljivo prebrojiv.

Neka je
$$T = \{j \in \mathbb{N} \mid I_i \cap K \neq \emptyset,\ \forall i \in [j]\}.$$
Vrijedi
$$\begin{aligned} T &= \{j \in \mathbb{N} \mid i \in S,\ \forall i \in [j]\} \\ &= \{j \in \mathbb{N} \mid [j] \subseteq S\} \\ &= \{j \in \mathbb{N} \mid \Phi(j) \subseteq S\}, \end{aligned}$$
gdje je $\Phi\colon \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ funkcija definirana sa
$$\Phi(j) = [j].$$
Funkcija Φ je r.r.o. prema propoziciji 2.2.34 pa je T rekurzivno prebrojiv skup prema teoremu 2.2.33.

Neka je
$$V = \left\{(k, j) \in \mathbb{N}^2 \mid q_{\tau_2(i)} < 2^{-k},\ \forall i \in [j]\right\}.$$
Tvrdimo da je V rekurzivno prebrojiv skup. Neka je
$$V' = \left\{(i, k) \in \mathbb{N}^2 \mid q_{\tau_2(i)} < 2^{-k}\right\}.$$
Prema korolaru 1.3.3 V' je rekurzivan skup.
Vrijedi
$$\begin{aligned} V &= \left\{(k, j) \in \mathbb{N}^2 \mid (i, k) \in V',\ \forall i \in [j]\right\} \\ &= \left\{(k, j) \in \mathbb{N}^2 \mid a \in V',\ \forall a \in [j] \times \{k\}\right\} \\ &= \left\{(k, j) \in \mathbb{N}^2 \mid [j] \times \{k\} \subseteq V'\right\}. \end{aligned}$$
Prema tome,
$$V = \left\{(k, j) \in \mathbb{N}^2 \mid \Phi(k, j) \subseteq V'\right\} \tag{2.12}$$

gdje je funkcija $\Phi\colon \mathbb{N}^2 \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$ definirana sa

$$\Phi(k, j) = [j] \times \{k\}.$$

Iz propozicije 2.2.35, propozicije 2.2.34 i propozicije 1.3.4 slijedi da je Φ r.r.o. funkcija (lako se vidi da je funkcija $\mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $k \mapsto \{k\}$ r.r.o.).

Sada iz (2.12) i teorema 2.2.33 slijedi da je V rekurzivno prebrojiv skup.

Neka je

$$\Omega = \left\{(k, j) \in \mathbb{N}^2 \mid K \subseteq J_j,\ I_i \cap K \neq \emptyset,\ q_{\tau_2(i)} < 2^{-k},\ \forall i \in [j]\right\}.$$

Tada je

$$\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2 \cap V \tag{2.13}$$

gdje je

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &= \left\{(k, j) \in \mathbb{N}^2 \mid K \subseteq J_j\right\}, \\
\Omega_2 &= \left\{(k, j) \in \mathbb{N}^2 \mid I_i \cap K \neq \emptyset,\ \forall i \in [j]\right\}.
\end{aligned}$$

Vrijedi

$$\begin{aligned}
\Omega_2 &= \left\{(k, j) \in \mathbb{N}^2 \mid j \in T\right\} \\
&= \left\{(k, j) \in \mathbb{N}^2 \mid I_2^2(k, j) \in T\right\} \\
&= (I_2^2)^{-1}(T)
\end{aligned}$$

pa iz propozicije 2.2.37 slijedi da je Ω_2 rekurzivno prebrojiv skup.

Koristeći činjenicu da je skup $\left\{j \in \mathbb{N} \mid K \subseteq J_j\right\}$ rekurzivno prebrojiv (što je posljedica činjenice da je K poluizračunljiv skup) na isti način dobivamo da je Ω_1 rekurzivno prebrojiv.

Sada iz (2.13) i propozicije 2.2.39 slijedi da je Ω rekurzivno prebrojiv skup.

Dokažimo sada da za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je $(k, j) \in \Omega$.

Neka je $k \in \mathbb{N}$. Budući da je $\{\alpha_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ gust skup u (X, d) prema propoziciji 2.2.23 postoji konačan podskup $A' \subseteq \{\alpha_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ takav da je

$$K \approx_{2^{-k}/2} A'.$$

Dakle, postoje $n \in \mathbb{N}$ i $p_0, \ldots, p_n \in \mathbb{N}$ takvi da je

$$K \approx_{2^{-k}/2} \left\{\alpha_{p_0}, \ldots, \alpha_{p_n}\right\}. \tag{2.14}$$

Neka je $l \in \{0, \dots, n\}$. Budući da je ${}^{2^{-k}}/_2$ pozitivan racionalan broj postoji $i_l \in \mathbb{N}$ takav da je

$$(\alpha_{p_l}, {}^{2^{-k}}/_2) = (\alpha_{\tau_1(i_l)}, q_{\tau_2(i_l)}).$$

Tvrdimo da vrijedi sljedeće:

(1) $K \subseteq I_{i_0} \cup \dots \cup I_{i_n}$

(2) $K \cap I_{i_l} \neq \emptyset, \forall l \in \{0, \dots, n\}$

(3) $q_{\tau_2(i_l)} < 2^{-k}, \forall l \in \{0, \dots, n\}$.

Očito je da (3) vrijedi.

Dokažimo (1). Neka je $x \in K$. Prema (2.14) postoji $l \in \{0, \dots, n\}$ takav da je $d(x, \alpha_{p_l}) < {}^{2^{-k}}/_2$. Stoga je $x \in I_{i_l}$. Dakle, (1) vrijedi.

Dokažimo (2). Neka je $l \in \{0, \dots, n\}$. Prema (2.14) postoji $x \in K$ takav da je $d(x, \alpha_{p_l}) < {}^{2^{-k}}/_2$. Imamo $x \in I_{i_l}$ i $x \in K$ pa je $I_{i_l} \cap K \neq \emptyset$. Dakle, (2) vrijedi.

Odaberimo $j \in \mathbb{N}$ takav da je

$$(i_0, \dots, i_n) = \Big((j)_0, \dots, (j)_{\bar{j}}\Big).$$

Tada je

$$[j] = \{i_0, \dots, i_n\}$$

pa iz (1), (2) i (3) slijedi da je $K \subseteq J_j$, $I_i \cap K \neq \emptyset$ i $q_{\tau_2(i)} < 2^{-k}$, za svaki $i \in [j]$. Prema tome $(k, j) \in \Omega$.

Zaključak: za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je $(k, j) \in \Omega$.

Stoga, prema teoremu 2.2.38 postoji rekurzivna funkcija $\varphi \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je

$$(k, \varphi(k)) \in \Omega, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Uočimo sljedeće, ako su $k, j \in \mathbb{N}$ takvi da je $(k, j) \in \Omega$ onda je

$$K \approx_{2^{-k}} \left\{\alpha_{\tau_1((j)_0)}, \alpha_{\tau_1((j)_1)}, \dots, \alpha_{\tau_1((j)_{\bar{j}})}\right\}. \tag{2.15}$$

Naime, ako je $x \in K$ onda zbog $K \subseteq J_j$ postoji $i \in [j]$ takav da je $x \in I_i$ što povlači da je

$$d(x, \alpha_{\tau_1(i)}) < q_{\tau_2(i)}.$$

Zbog $(k, j) \in \Omega$ vrijedi

$$q_{\tau_2(i)} < 2^{-k}$$

pa je

$$d(x, \alpha_{\tau_1(i)}) < 2^{-k}.$$

Uočimo da je $i = (j)_l$, gdje je $l \in \{0, \dots, \overline{j}\}$. Obratno, ako je $l \in \{0, \dots, \overline{j}\}$ onda zbog $(k, j) \in \Omega$ vrijedi

$$I_{(j)_l} \cap K \neq \emptyset$$

pa postoji $x \in K$ takav da je $x \in I_{(j)_l}$ tj.

$$d(x, \alpha_{\tau_1((j)_l)}) < q_{\tau_2((j)_l)} < 2^{-k}.$$

Dakle, (2.15) vrijedi.

Neka je $k \in \mathbb{N}$. Tada je $(k, \varphi(k)) \in \Omega$ pa iz (2.15) zaključujemo da je

$$K \approx_{2^{-k}} \left\{\alpha_{\tau_1((\varphi(k))_0)}, \alpha_{\tau_1((\varphi(k))_1)}, \dots, \alpha_{\tau_1((\varphi(k))_{\overline{\varphi(k)}})}\right\}. \tag{2.16}$$

Neka je $\Phi \colon \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ funkcija definirana sa

$$\Phi(k) = \left\{\tau_1((\varphi(k))_0), \tau_1((\varphi(k))_1), \dots, \tau_1((\varphi(k))_{\overline{\varphi(k)}})\right\}.$$

Uočimo da je

$$\Phi(k) = \tau_1([\varphi(k)]). \tag{2.17}$$

Funkcija $\mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $k \mapsto [\varphi(k)]$ je r.r.o. prema propoziciji 2.2.34 i propoziciji 2.2.31.

Sada iz (2.17) i teorema 2.2.30 slijedi da je Φ r.r.o.

Uočimo da je za svaki $k \in \mathbb{N}$ skup $\Phi(k)$ neprazan i konačan. Stoga za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoji $l \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\Phi(k) = [l].$$

Skup

$$\left\{(k, l) \in \mathbb{N}^2 \mid \Phi(k) = [l]\right\}$$

je rekurzivan prema korolaru 2.2.28.

Stoga, prema lemi 2.2.5 (ili teoremu 2.2.38) postoji rekurzivna funkcija $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je

$$\Phi(k) = [f(k)], \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Iz ovoga, (2.16) i definicije od Φ slijedi

$$K \approx_{2^{-k}} \alpha(\Phi(k)) = \alpha([f(k)]) = \Lambda_{f(k)},$$

tj.

$$K \approx_{2^{-k}} \Lambda_{f(k)}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Prema tome, K je izračunljiv skup u (X, d, α). □

2.3 Lokalna izračunljivost

Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Neka su $A, B \subseteq X$ takvi da je $A \subseteq B$. Kažemo da je A *izračunljiv do na* B u (X, d, α) ako postoji rekurzivna funkcija $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je

$$A \prec_{2^{-k}} \Lambda_{f(k)} \text{ i } \Lambda_{f(k)} \prec_{2^{-k}} B$$

za svaki $k \in \mathbb{N}$.

Uočimo sljedeće: ako je K kompaktan, neprazan skup u (X, d) onda je A izračunljiv skup u (X, d, α) ako i samo ako je A izračunljiv do na A u (X, d, α).

Propozicija 2.3.1. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Neka su A, B, $S \subseteq X$ takvi da je $A \subseteq S$ i $B \subseteq S$ te takvi da su A i B izračunljivi do na S. Tada je i $A \cup B$ izračunljiv do na S.*

Dokaz. Budući da su A i B izračunljivi do na S postoje rekurzivne funkcije $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takve da je

$$A \prec_{2^{-k}} \Lambda_{f(k)} \prec_{2^{-k}} S$$
$$B \prec_{2^{-k}} \Lambda_{g(k)} \prec_{2^{-k}} S$$

za svaki $k \in \mathbb{N}$.

Uočimo da općenito vrijedi sljedeće:
ako su $C_1, C_2, D_1, D_2 \subseteq X$ i $\epsilon > 0$ takvi da je

$$C_1 \prec_\epsilon D_1 \text{ i } C_2 \prec_\epsilon D_2$$

onda je

$$C_1 \cup C_2 \prec_\epsilon D_1 \cup D_2.$$

Stoga, za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$A \cup B \prec_{2^{-k}} \Lambda_{f(k)} \cup \Lambda_{g(k)} \prec_{2^{-k}} S. \tag{2.18}$$

Vrijedi

$$\begin{aligned}\Lambda_{f(k)} \cup \Lambda_{g(k)} &= \alpha([f(k)]) \cup \alpha([g(k)]) \\ &= \alpha([f(k)] \cup [g(k)]).\end{aligned}$$

Neka je $\Phi \colon \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ funkcija definirana sa

$$\Phi(k) = [f(k)] \cup [g(k)].$$

Prema propoziciji 2.2.26 Φ je r.r.o. funkcija. Budući da za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoji $l \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\Phi(k) = [l]$$

te budući da je skup

$$\{(k, l) \mid \Phi(k) = [l]\}$$

rekurzivan (prema korolaru 2.2.28) prema teoremu 2.2.38 postoji rekurzivna funkcija $h \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je

$$\Phi(k) = [h(k)], \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Dakle,

$$[f(k)] \cup [g(k)] = [h(k)], \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Stoga je

$$\Lambda_{f(k)} \cup \Lambda_{g(k)} = \alpha[h(k)] = \Lambda_{h(k)}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Ovo, zajedno sa (2.18), daje

$$A \cup B \prec_{2^{-k}} \Lambda_{h(k)} \prec_{2^{-k}} S.$$

Prema tome, skup $A \cup B$ je izračunljiv do na S. □

Korolar 2.3.2. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor, neka je $S \subseteq X$, neka je $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka su $A_1, \ldots, A_n$ podskupovi od S takvi da je A_i izračunljiv do na S za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$. Tada je skup $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ izračunljiv do na S.*

Dokaz. Ovo slijedi lako indukcijom iz prethodne propozicije. □

Korolar 2.3.3. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Neka je S kompaktan skup u (X, d) te neka su $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i $A_1, \dots, A_n$ podskupovi od S takvi da je $S = A_1 \cup \dots \cup A_n$ te takvi da je A_i izračunljiv do na S za svaki $i \in \{1, \dots, n\}$. Tada je S izračunljiv skup.* □

Neka je (X, d) metrički prostor te neka je Y neprazan podskup od X. Neka je $p\colon Y \times Y \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa

$$p(a, b) = d(a, b), \quad \forall a, b \in Y,$$

(tj. $p = d|_{Y \times Y}$). Tada je p očito metrika na Y.
Za metrički prostor (Y, p) kažemo da je potprostor metričkog prostora (X, d).

Propozicija 2.3.4. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je (Y, p) njegov potprostor. Neka je $V \subseteq Y$. Tada je V otvoren skup u (Y, p) ako i samo ako postoji otvoren skup U u (X, d) takav da je $V = Y \cap U$.*

Dokaz. Za $a \in Y$ i $r > 0$ neka $K_Y(a, r)$ označava kuglu oko a radijusa r u metričkom prostoru (Y, p).

Neka je $a \in Y$ i $r > 0$. Tada je

$$K_Y(a, r) = Y \cap K(a, r).$$

Naime, ako je $b \in K_Y(a, r)$ onda je $b \in Y$ i $p(a, b) < r$ pa je i $d(a, b) < r$, tj. $b \in Y \cap K(a, r)$.

Obratno, ako je $b \in Y \cap K(a, r)$ onda je $b \in Y$ i $d(a, b) < r$ pa je i $p(a, b) < r$ tj. $b \in K_Y(a, r)$.

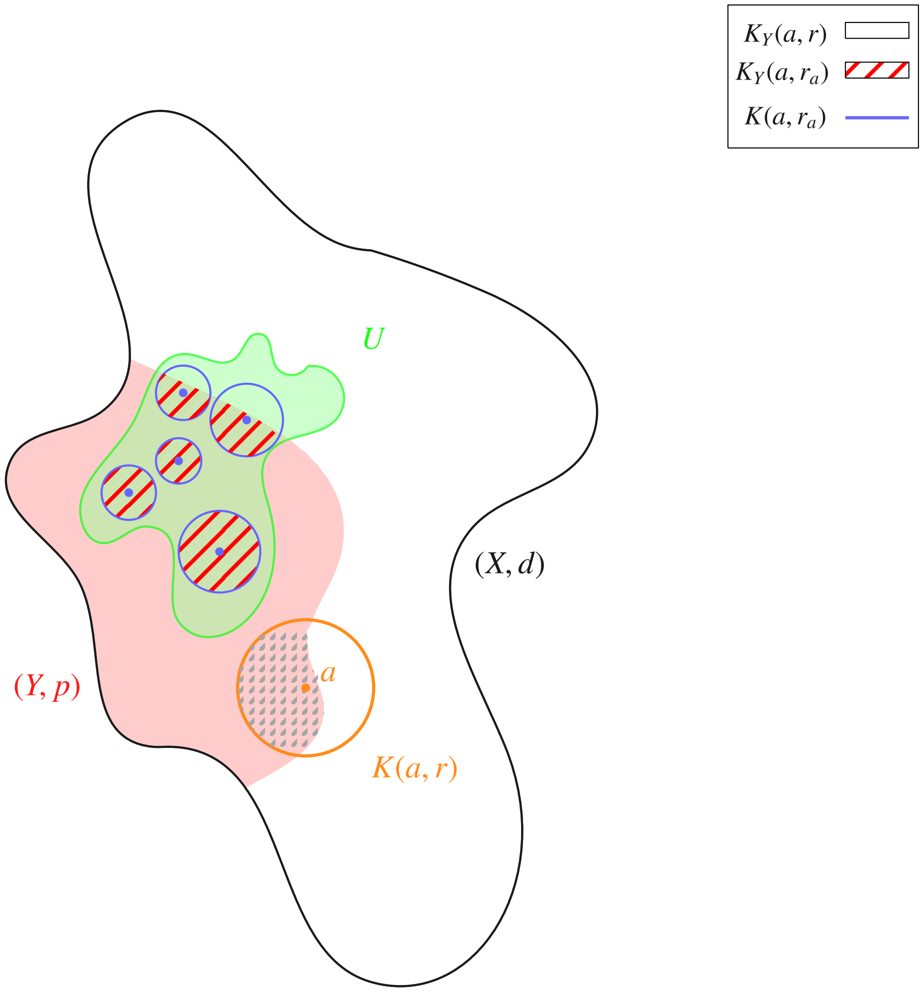
Pretpostavimo da je V otvoren skup u (Y, p). Tada za svaki $a \in V$ postoji $r_a > 0$ takav da je

$$K_Y(a, r_a) \subseteq V.$$

Tada je

$$V = \bigcup_{a \in V} K_Y(a, r_a).$$

Neka je $U = \bigcup_{a \in V} K(a, r_a)$. Tada je U otvoren skup u (X, d) te vrijedi



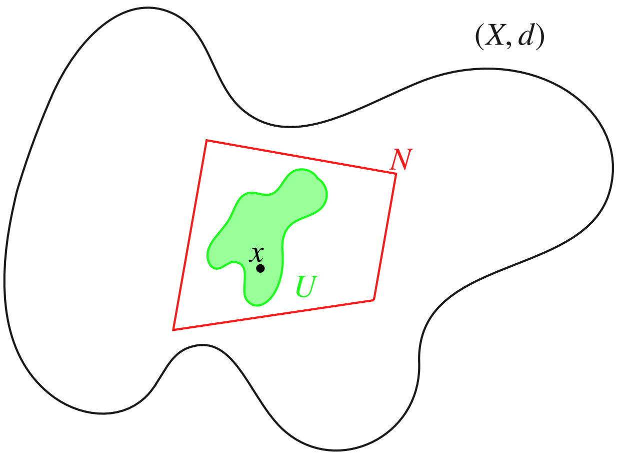
Slika 2.6: Vizualizacija dokaza.

$$
\begin{aligned}
Y \cap U &= Y \cap \bigcup_{a\in V} K(a, r_a) \\
&= \bigcup_{a\in V} Y \cap K(a, r_a) \\
&= \bigcup_{a\in V} K_Y(a, r_a) \\
&= V.
\end{aligned}
$$

Dakle
$$V = Y \cap U.$$
Obratno, pretpostavimo da postoji otvoreni skup U u (X, d) takav da je $V = Y \cap U$. Želimo dokazati da je V otvoren u (Y, p).

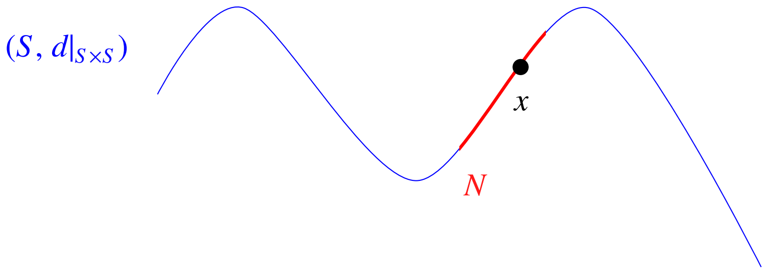
Neka je $a \in V$. Tada je $a \in Y$ i $a \in U$ pa postoji $r > 0$ takav da je $K(a, r) \subseteq U$. Slijedi
$$Y \cap K(a, r) \subseteq Y \cap U,$$
tj.
$$K_Y(a, r) \subseteq V.$$
Prema tome, V je otvoren skup u (Y, p). □

Neka je (X, d) metrički prostor, $x \in X$ i $N \subseteq X$. Kažemo da je N *okolina točke* x u metričkom prostoru (X, d) ako postoji otvoren skup U u (X, d) takav da je $x \in U \subseteq N$.



Slika 2.7: Prikaz okoline točke x u metričkom prostoru (X, d).

Neka je (X, d) metrički prostor, $S \subseteq X$, $x \in S$ te $N \subseteq S$. Kažemo da je N *okolina točke* x *u* S (u metričkom prostoru (X, d)) ako je N okolina točke x u metričkom prostoru $(S, d|_{S\times S})$.



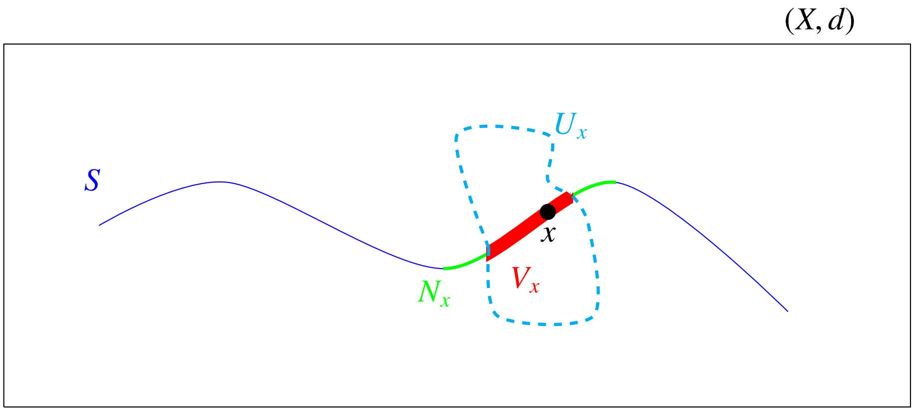
Slika 2.8: Prikaz okoline točke x u metričkom prostoru $(S, d|_{S\times S})$.

Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor, neka je $S \subseteq X$ te $x \in S$. Kažemo da je skup S *izračunljiv u točki* x (u (X, d, α)) ako postoji okolina N točke x u S takva da je N izračunljiv skup do na S.

Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor te neka je $S \subseteq X$. Kažemo da je S *lokalno izračunljiv skup u* (X, d, α) ako je S izračunljiv u točki x za svaki $x \in S$.

Uočimo sljedeće: ako je S izračunljiv u (X, d, α) onda je S i lokalno izračunljiv u (X, d, α).

Propozicija 2.3.5. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Neka je S lokalno izračunljiv skup u (X, d, α). Pretpostavimo da je S kompaktan skup u (X, d). Tada je S izračunljiv u (X, d, α).*



Slika 2.9: Vizualizacija dokaza.

Dokaz. Neka je $x \in S$. Tada postoji okolina N_x od x u S takva da je skup N_x izračunljiv do na S. Dakle, N_x je okolina od x u metričkom prostoru $(S, d|_{S\times S})$ pa postoji otvoren skup V_x u $(S, d|_{S\times S})$ takav da je
$$x \in V_x \subseteq N_x.$$
Prema propoziciji 2.3.4 postoji otvoren skup U_x u (X, d) takav da je
$$V_x = S \cap U_x.$$
Očito je $x \in U_x$.

Uočimo da je $\{U_x \mid x \in S\}$ otvoreni pokrivač skupa S u metričkom prostoru (X, d). Budući da je S kompaktan postoje $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i $x_1, \dots, x_n \in S$ takvi da je
$$S \subseteq U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_n}.$$
Iz toga slijedi da je
$$\begin{aligned} S &= (U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_n}) \cap S \\ &= S \cap U_{x_1} \cup \dots \cup S \cap U_{x_n} \\ &= V_{x_1} \cup \dots \cup V_{x_n} \\ &\subseteq N_{x_1} \cup \dots \cup N_{x_n}. \end{aligned}$$
Dakle
$$S \subseteq N_{x_1} \cup \dots \cup N_{x_n}$$
pa je
$$S = N_{x_1} \cup \dots \cup N_{x_n}$$
Iz korolara 2.3.3 slijedi da je S izračunljiv skup. □

Lema 2.3.6. *Neka je (X, d) metrički prostor, $x, y \in X$ te $r, s > 0$ takvi da je $r + s \leq d(x, y)$. Tada je $K(x, r) \cap K(y, s) = \emptyset$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno.
Tada postoji $z \in X$ takav da je $z \in K(x, r) \cap K(y, s)$. Slijedi $z \in K(x, r)$ i $z \in K(y, s)$, pa je $d(z, x) < r$ i $d(z, y) < s$. Slijedi
$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < r + s,$$
dakle
$$d(x, y) < r + s$$
što je u kontradikciji s pretpostavkom leme. Dakle $K(x, r) \cap K(y, s) = \emptyset$. □

Primjer 2.3.7. *Obrat prethodne leme ne vrijedi.*

Naime, pretpostavimo da je X skup te da su $x, y \in X$ takvi da je $x \neq y$.
Neka je d diskretna metrika na X. Neka je $r = s = 1$. Imamo $K(x, r) = \{x\}$, $K(y, s) = \{y\}$. Stoga je $K(x, r) \cap K(y, s) = \emptyset$. No, broj $r + s$ nije manji ili jednak od $d(x, y)$, jer je $r + s = 2$, a $d(x, y) = 1$.

2.4 Formalna disjunktnost i formalna sadržanost

Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Neka su $i, j \in \mathbb{N}$. Kažemo da su I_i i I_j *formalno disjunktni* ako je

$$q_{\tau_2(i)} + q_{\tau_2(j)} < d(\alpha_{\tau_1(i)}, \alpha_{\tau_1(j)}).$$

Uočimo da je ovo relacija između brojeva $i, j \in \mathbb{N}$, a ne između skupova I_i i I_j.

Iz prethodne definicije i leme 2.3.6 odmah slijedi da ako su $i, j \in \mathbb{N}$ takvi da su I_i i I_j formalno disjunktni, onda je $I_i \cap I_j = \emptyset$.

Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Neka su $u, v \in \mathbb{N}$. Kažemo da su J_u i J_v *formalno disjunktni* ako su I_i i I_j formalno disjunktni $\forall i \in [u]$ i $\forall j \in [v]$.

Uočimo da je ovo relacija između brojeva $u, v \in \mathbb{N}$ a ne između skupova J_u i J_v.
Nadalje, ako su $u, v \in \mathbb{N}$ takvi da su J_u i J_v formalno disjunktni onda je očito $J_u \cap J_v = \emptyset$.

Propozicija 2.4.1. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor.*

(1) Neka je $S = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid I_i$ i I_j formalno disjunktni$\}$. Tada je S rekurzivno prebrojiv podskup od $\mathbb{N}^2$.

(2) Neka je $T = \{(u, v) \in \mathbb{N}^2 \mid J_u$ i J_v formalno disjunktni$\}$. Tada je T rekurzivno prebrojiv podskup od $\mathbb{N}^2$.

Dokaz.

(1) Neka su $i, j \in \mathbb{N}$. Tada je $(i, j) \in S$ ako i samo ako su I_i i I_j formalno disjunktni, tj.

$$(i, j) \in S \Leftrightarrow q_{\tau_2(i)} + q_{\tau_2(j)} < d(\alpha_{\tau_1(i)}, \alpha_{\tau_1(j)}). \tag{2.19}$$

Neka su $f, g\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$ funkcije definirane sa

$$f(i, j) = q_{\tau_2(i)} + q_{\tau_2(j)}$$
$$g(i, j) = d(\alpha_{\tau_1(i)}, \alpha_{\tau_1(j)})$$

Funkcija f je rekurzivna kao zbroj rekurzivnih funkcija, a funkcija g je rekurzivna prema propoziciji 2.2.13. Prema (2.19) vrijedi

$$S = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid f(i, j) < g(i, j)\}$$

pa iz teorema 1.4.9 slijedi da je S rekurzivno prebrojiv skup.

(2) Vrijedi

$$\begin{aligned} T &= \left\{(u, v) \in \mathbb{N}^2 \mid I_i \text{ i } I_j \text{ formalno disjunktni}, \forall i \in [u],\ \forall j \in [v]\right\} \\ &= \left\{(u, v) \in \mathbb{N}^2 \mid (i, j) \in S,\ \forall i \in [u],\ \forall j \in [v]\right\} \\ &= \left\{(u, v) \in \mathbb{N}^2 \mid [u] \times [v] \subseteq S\right\} \\ &= \left\{(u, v) \in \mathbb{N}^2 \mid \Lambda(u, v) \subseteq S\right\} \end{aligned}$$

pri čemu je $\Lambda\colon \mathbb{N}^2 \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$ funkcija definirana sa

$$\Lambda(u, v) = [u] \times [v].$$

Vrijedi

$$\Lambda(u, v) = \Phi(u, v) \times \Psi(u, v),$$

gdje su $\Phi, \Psi\colon \mathbb{N}^2 \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ funkcije definirane sa

$$\Phi(u, v) = [u]$$
$$\Psi(u, v) = [v].$$

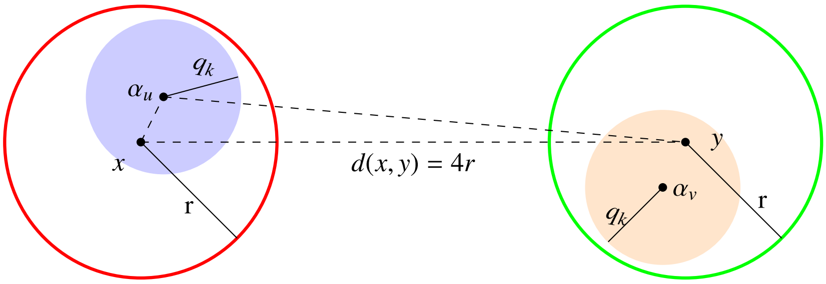
Funkcije Φ, Ψ su r.r.o. prema propoziciji 2.2.34 i propoziciji 2.2.31, stoga je Λ r.r.o. prema propoziciji 2.2.35. Dobili smo da je

$$T = \left\{(u, v) \in \mathbb{N}^2 \mid \Lambda(u, v) \subseteq S\right\}$$

pa iz teorema 2.2.33 slijedi da je T rekurzivno prebrojiv skup.

□

Propozicija 2.4.2. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor te neka su $x, y \in X$, $x \neq y$. Tada postoje $i, j \in \mathbb{N}$ takvi da je $x \in I_i$ i $y \in I_j$ te takvi da su I_i i I_j formalno disjunktni.*



Slika 2.10: Ilustracija dokaza.

Dokaz. Neka je
$$r = \frac{d(x, y)}{4}.$$
Očito je $r > 0$. Odaberimo $k \in \mathbb{N}$ takav da je $q_k < r$. Budući da je α gust niz u (X, d) postoje $u, v \in \mathbb{N}$ takvi da je
$$d(x, \alpha_u) < q_k \ \text{ i } \ d(y, \alpha_v) < q_k.$$
Iz ovoga slijedi
$$x \in K(\alpha_u, q_k) \ \text{ i } \ y \in K(\alpha_v, q_k).$$
Postoje $i, j \in \mathbb{N}$ takvi da je
$$(u, k) = (\tau_1(i), \tau_2(i)) \ \text{ i } \ (v, k) = (\tau_1(j), \tau_2(j)).$$
Stoga je
$$x \in K(\alpha_{\tau_1(i)}, q_{\tau_2(i)}) \ \text{ i } \ y \in K(\alpha_{\tau_1(j)}, q_{\tau_2(j)}),$$
tj.
$$x \in I_i \ \text{ i } \ y \in I_j.$$
Tvrdimo da su I_i i I_j formalno disjunktni, tj. da je
$$q_{\tau_2(i)} + q_{\tau_2(j)} < d(\alpha_{\tau_1(i)}, \alpha_{\tau_1(j)}).$$
Ovo je ekvivalentno sa
$$q_k + q_k < d(\alpha_u, \alpha_v). \tag{2.20}$$

Dokažimo (2.20). Pretpostavimo suprotno, da je

$$d(\alpha_u, \alpha_v) \leq 2q_k.$$

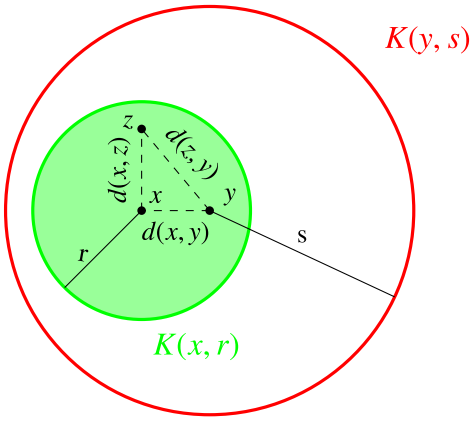
Tada je

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq d(x, \alpha_u) + d(\alpha_u, y) \\ &\leq d(x, \alpha_u) + d(\alpha_u, \alpha_v) + d(\alpha_v, y) \\ &< q_k + 2q_k + q_k \\ &= 4q_k < 4r = d(x, y), \end{aligned}$$

tj. $d(x, y) < d(x, y)$, kontradikcija.

Prema tome (2.20) vrijedi, dakle I_i i I_j su formalno disjunktni. Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Lema 2.4.3. *Neka je (X, d) metrički prostori. Neka su $x, y \in X$ te $r, s > 0$ takvi da je $d(x, y) + r \leq s$. Tada je $K(x, r) \subseteq K(y, s)$.*



Slika 2.11: Ilustracija dokaza.

Dokaz. Neka je $z \in K(x, r)$. Tada je $d(z, x) < r$. Imamo

$$\begin{aligned} d(z, y) &\leq d(z, x) + d(x, y) \\ &< r + d(x, y) \\ &\leq s. \end{aligned}$$

Dakle, $d(z, y) < s$ pa je $z \in K(y, s)$. Prema tome $K(x, r) \subseteq K(y, s)$. □

Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Neka su $i, j \in \mathbb{N}$. Kažemo da je I_i *formalno sadržan* u I_j i pišemo $I_i \subseteq_F I_j$ ako je

$$d(\alpha_{\tau_1(i)}, \alpha_{\tau_1(j)}) + q_{\tau_2(i)} < q_{\tau_2(j)}.$$

Uočimo sljedeće: ako su $i, j \in \mathbb{N}$ takvi da je $I_i \subseteq_F I_j$ onda je $I_i \subseteq I_j$ (lema 2.4.3).

Propozicija 2.4.4. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor te neka su $i, j \in \mathbb{N}$ i $x \in X$ takvi da je $x \in I_i \cap I_j$. Tada postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $x \in I_k$, $I_k \subseteq_F I_i$ i $I_k \subseteq_F I_j$.*

Dokaz. Imamo $x \in I_i$ i $x \in I_j$ pa je

$$d(x, \alpha_{\tau_1(i)}) < q_{\tau_2(i)} \text{ i } d(x, \alpha_{\tau_1(j)}) < q_{\tau_2(j)}.$$

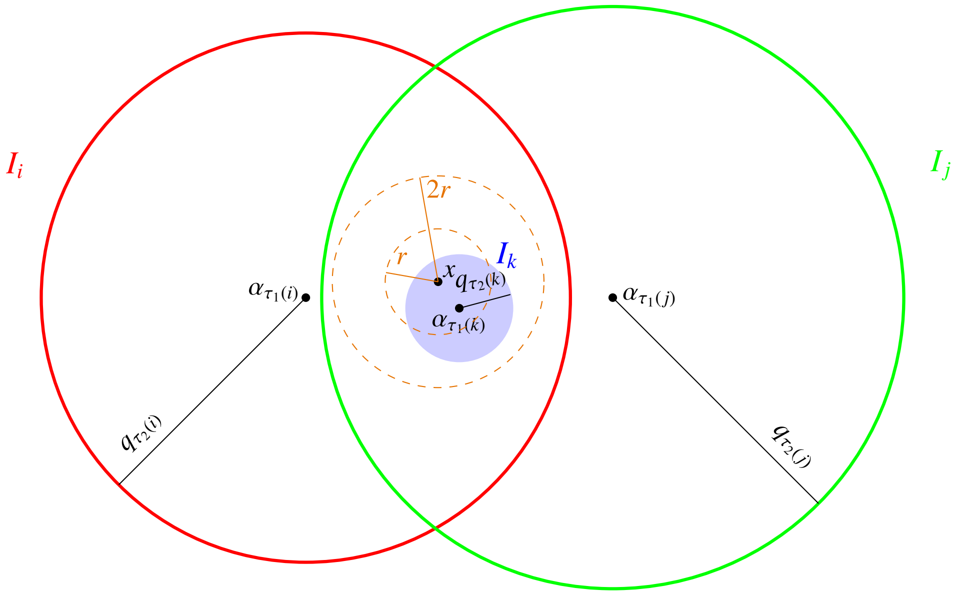
Tada postoji pozitivan racionalan broj r takav da je

$$d(x, \alpha_{\tau_1(i)}) + 2r < q_{\tau_2(i)} \tag{2.21}$$

$$d(x, \alpha_{\tau_1(j)}) + 2r < q_{\tau_2(j)}.$$

Budući da je α gust niz u (X, d) postoji $u \in \mathbb{N}$ takav da je $d(x, \alpha_u) < r$. Odaberimo $v \in \mathbb{N}$ takav da je $q_v = r$. Dakle $d(x, \alpha_u) < q_v$ pa je $x \in K(\alpha_u, q_v)$. Odaberimo $k \in \mathbb{N}$ takav da je $(u, v) = (\tau_1(k), \tau_2(k))$. Tada je $x \in K(\alpha_{\tau_1(k)}, q_{\tau_2(k)})$, tj. $x \in I_k$.

Dokažimo da je $I_k \subseteq_F I_i$.



Slika 2.12: Ilustracija dokaza.

Vrijedi

$$\begin{aligned} d(\alpha_{\tau_1(k)}, \alpha_{\tau_1(i)}) + q_{\tau_2(k)} &= d(\alpha_u, \alpha_{\tau_1(i)}) + q_v \\ &\leq d(\alpha_u, x) + d(x, \alpha_{\tau_1(i)}) + q_v \\ &< r + d(x, \alpha_{\tau_1(i)}) + r \\ &\overset{(2.21)}{<} q_{\tau_2(i)}, \end{aligned}$$

dakle

$$d(\alpha_{\tau_1(k)}, \alpha_{\tau_1(i)}) + q_{\tau_2(k)} < q_{\tau_2(i)},$$

tj.

$$I_k \subseteq_F I_i.$$

Posve analogno dobivamo i $I_k \subseteq_F I_j$. $\square$

Propozicija 2.4.5. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor te neka su $k, i, j \in \mathbb{N}$ takvi da je $I_k \subseteq_F I_i$ i $I_i \subseteq_F I_j$. Tada je $I_k \subseteq_F I_j$.*

Dokaz. Vrijedi

$$d(\alpha_{\tau_1(k)}, \alpha_{\tau_1(i)}) + q_{\tau_2(k)} < q_{\tau_2(i)} \tag{2.22}$$

$$d(\alpha_{\tau_1(i)}, \alpha_{\tau_1(j)}) + q_{\tau_2(i)} < q_{\tau_2(j)}. \tag{2.23}$$

Imamo

$$\begin{aligned} d(\alpha_{\tau_1(k)}, \alpha_{\tau_1(j)}) + q_{\tau_2(k)} &\leq d(\alpha_{\tau_1(k)}, \alpha_{\tau_1(i)}) + d(\alpha_{\tau_1(i)}, \alpha_{\tau_1(j)}) + q_{\tau_2(k)} \\ &\overset{(2.22)}{<} d(\alpha_{\tau_1(i)}, \alpha_{\tau_1(j)}) + q_{\tau_2(i)} \\ &\overset{(2.23)}{<} q_{\tau_2(j)}. \end{aligned}$$

Prema tome, $I_k \subseteq_F I_j$. □

Propozicija 2.4.6. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor te neka su $k, i, j \in \mathbb{N}$ takvi da je $I_k \subseteq_F I_i$ te takvi da su I_i i I_j formalno disjunktni. Tada su I_k i I_j formalno disjunktni.*

Dokaz. Budući da je $I_k \subseteq_F I_i$ vrijedi

$$d(\alpha_{\tau_1(i)}, \alpha_{\tau_1(k)}) + q_{\tau_2(k)} < q_{\tau_2(i)}$$

pa je

$$q_{\tau_2(k)} < q_{\tau_2(i)} - d(\alpha_{\tau_1(i)}, \alpha_{\tau_1(k)}). \tag{2.24}$$

Iz činjenice da su I_i i I_j formalno disjunktni slijedi

$$\begin{aligned} q_{\tau_2(i)} + q_{\tau_2(j)} &< d(\alpha_{\tau_1(i)}, \alpha_{\tau_1(j)}) \\ &\leq d(\alpha_{\tau_1(i)}, \alpha_{\tau_1(k)}) + d(\alpha_{\tau_1(k)}, \alpha_{\tau_1(j)}), \end{aligned}$$

tj.

$$q_{\tau_2(i)} + q_{\tau_2(j)} < d(\alpha_{\tau_1(i)}, \alpha_{\tau_1(k)}) + d(\alpha_{\tau_1(k)}, \alpha_{\tau_1(j)})$$

pa je

$$q_{\tau_2(i)} - d(\alpha_{\tau_1(i)}, \alpha_{\tau_1(k)}) + q_{\tau_2(j)} < d(\alpha_{\tau_1(k)}, \alpha_{\tau_1(j)}). \tag{2.25}$$

Prema (2.24) vrijedi

$$q_{\tau_2(k)} + q_{\tau_2(j)} < q_{\tau_2(i)} - d(\alpha_{\tau_1(i)}, \alpha_{\tau_1(k)}) + q_{\tau_2(j)}. \tag{2.26}$$

Iz (2.25) i (2.26) slijedi

$$q_{\tau_2(k)} + q_{\tau_2(j)} < d(\alpha_{\tau_1(k)}, \alpha_{\tau_1(j)}).$$

Dakle, I_k i I_j su formalno disjunktni. □

Korolar 2.4.7. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor, neka je $n \in \mathbb{N}$, $i_0, \ldots, i_n \in \mathbb{N}$ te neka je $x \in I_{i_0} \cap \ldots \cap I_{i_n}$. Tada postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $x \in I_k$ i $I_k \subseteq_F I_{i_0}$, …, $I_k \subseteq_F I_{i_n}$.*

Dokaz. Tvrdnju dokazujemo indukcijom po n.

(B) Uzmimo $n = 0$.

Neka je $i_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $x \in I_{i_0}$. Tada je $x \in I_{i_0} \cap I_{i_0}$ pa iz propozicije 2.4.4 slijedi da postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $x \in I_k$ i $I_k \subseteq_F I_{i_0}$.

(P) Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$.

(K) Neka su $i_0, \ldots, i_{n+1} \in \mathbb{N}$ takvi da je $x \in I_{i_0} \cap \ldots \cap I_{i_n} \cap I_{i_{n+1}}$. Tada je $x \in I_{i_0} \cap \ldots \cap I_{i_n}$ pa iz induktivne pretpostavke slijedi da postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $x \in I_k$, $I_k \subseteq_F I_{i_0}$, $\ldots, I_k \subseteq_F I_{i_n}$.

Imamo $x \in I_k \cap I_{i_{n+1}}$, pa iz propozicije 2.4.4 slijedi da postoji $l \in \mathbb{N}$ takav da je $x \in I_l$ i $I_l \subseteq_F I_k$, $I_l \subseteq_F I_{i_{n+1}}$.

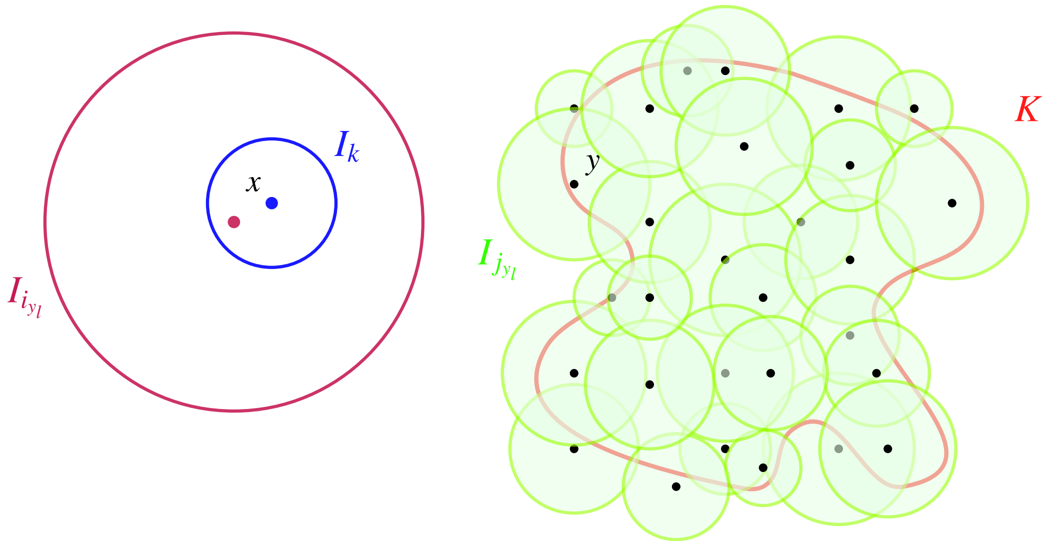
Prema propoziciji 2.4.5 vrijedi

$$I_l \subseteq_F I_{i_0}, \ldots, I_l \subseteq_F I_{i_n}.$$

□

Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Neka su i, $u \in \mathbb{N}$. Kažemo da su I_i i J_u *formalno disjunktni* ako su I_i i I_j formalno disjunktni za svaki $j \in [u]$.

Propozicija 2.4.8. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor, neka je K kompaktan neprazan skup u (X, d) te neka je $x \in X$ točka takva da $x \notin K$. Tada postoje i, $u \in \mathbb{N}$ takvi da je $x \in I_i$, $K \subseteq J_u$ te takvi da su I_i i J_u formalno disjunktni.*



Slika 2.13: Ilustracija dokaza propozicije.

Dokaz. Neka je $y \in K$. Tada je $x \neq y$ pa postoje $i_y, j_y \in \mathbb{N}$ takvi da je $x \in I_{i_y}$, $y \in I_{j_y}$ i I_{i_y} i I_{j_y} su formalno disjunktni.

Neka je

$$\mathcal{U} = \left\{ I_{j_y} \mid y \in K \right\}.$$

Tada je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač od K pa budući da je K kompaktan postoje $n \in \mathbb{N}$ i $y_0, \ldots, y_n \in K$ takvi da je

$$K \subseteq I_{j_{y_0}} \cup \ldots \cup I_{j_{y_n}}. \tag{2.27}$$

Imamo $x \in I_{i_{y_0}} \cap \ldots \cap I_{i_{y_n}}$ pa prema korolaru 2.4.7 postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je

$$x \in I_k \ \text{ i } \ I_k \subseteq_F I_{i_{y_0}}, \ldots, I_k \subseteq_F I_{i_{y_n}}.$$

Ako je $l \in \{0, \ldots, n\}$, tada je $I_k \subseteq_F I_{i_{y_l}}$, a $I_{i_{y_l}}$ i $I_{j_{y_l}}$ su formalno disjunktni pa iz propozicije 2.4.6 slijedi da je I_k formalno disjunktan sa $I_{j_{y_l}}$.

Odaberimo $u \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\{j_{y_0}, \ldots, j_{y_n}\} = [u].$$

Imamo dakle da je I_k formalno disjunktan sa I_j, za svaki $j \in [u]$ pa je I_k formalno disjunktan sa J_u.

Iz (2.27) slijedi da je $K \subseteq J_u$. $\square$

Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Neka su u, $v \in \mathbb{N}$. Kažemo da je J_u *formalno sadržan* u J_v i pišemo $J_u \subseteq_F J_v$ ako za svaki $i \in [u]$ postoji $j \in [v]$ takav da je $I_i \subseteq_F I_j$.

Uočimo sljedeće: ako su u, v, $i \in \mathbb{N}$ takvi da je $J_u \subseteq_F J_v$ i I_i i J_v formalno disjunktni, onda su I_i i J_u formalno disjunktni (to je posljedica propozicije 2.4.6).
Nadalje, ako su u, v, $w \in \mathbb{N}$ takvi da je $J_u \subseteq_F J_v$ i $J_v \subseteq_F J_w$ onda je $J_u \subseteq_F J_w$ (propozicija 2.4.5).

Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor te neka su i, $v \in \mathbb{N}$. Kažemo da je I_i *formalno sadržan* u J_v i pišemo $I_i \subseteq_F J_v$ ako postoji $j \in [v]$ takav da je $I_i \subseteq_F I_j$.

Uočimo da za u, $v \in \mathbb{N}$ vrijedi $J_u \subseteq_F J_v$ ako i samo ako je $I_i \subseteq_F J_v$, za svaki $i \in [u]$.

Propozicija 2.4.9. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor, neka je K neprazan kompaktan skup u (X, d) te neka su u, $v \in \mathbb{N}$ takvi da je $K \subseteq J_u \cap J_v$. Tada postoji $w \in \mathbb{N}$ takav da je $K \subseteq J_w$ te $J_w \subseteq_F J_u$ i $J_w \subseteq_F J_v$.*

Dokaz. Neka je $x \in K$. Tada postoje $i \in [u]$, $j \in [v]$ takvi da je $x \in I_i \cap I_j$ (jer je $K \subseteq J_u$ i $K \subseteq J_v$).

Prema propoziciji 2.4.4 postoji $k_x \in \mathbb{N}$ takav da je $x \in I_{k_x}$, $I_{k_x} \subseteq_F I_i$ i $I_{k_x} \subseteq_F I_j$. Slijedi

$$I_{k_x} \subseteq_F J_u \ \text{ i } \ I_{k_x} \subseteq_F J_v.$$

Očito je $\{I_{k_x} \mid x \in K\}$ otvoreni pokrivač od K. Budući da je K kompaktan, postoje $n \in \mathbb{N}$ i $x_0, \dots, x_n \in K$ takvi da je

$$K \subseteq I_{k_{x_0}} \cup \dots \cup I_{k_{x_n}}.$$

Odaberimo $w \in \mathbb{N}$ takav da je

$$[w] = \{k_{x_0}, \dots, k_{x_n}\}.$$

Tada je $K \subseteq J_w$ te je $J_w \subseteq_F J_u$ i $J_w \subseteq_F J_v$. □

Korolar 2.4.10. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor, neka je $n \in \mathbb{N}$ te neka su $u_0, \dots, u_n \in \mathbb{N}$. Pretpostavimo da je K kompaktan neprazan skup u (X, d) takav da je $K \subseteq J_{u_0} \cap \dots \cap J_{u_n}$. Tada postoji $w \in \mathbb{N}$ takav da je $K \subseteq J_w$ i $J_w \subseteq_F J_{u_0}, \dots, J_w \subseteq_F J_{u_n}$.*

Dokaz. Analogno kao korolar 2.4.7. □

Propozicija 2.4.11. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor te neka su K i L neprazni disjunktni skupovi u (X, d). Tada postoje u, $v \in \mathbb{N}$ takvi da je $K \subseteq J_u$, $L \subseteq J_v$ te da su J_u i J_v formalno disjunktni.*

Dokaz. Neka je $x \in K$. Tada $x \notin L$ pa prema propoziciji 2.4.8 postoje i_x, $u_x \in \mathbb{N}$ takvi da je $x \in I_{i_x}$, $L \subseteq J_{u_x}$ i I_{i_x} i J_{u_x} formalno disjunktni.

Familija
$$\{I_{i_x} \mid x \in K\}$$
je otvoreni pokrivač od K pa postoje $n \in \mathbb{N}$ i $x_0, \ldots, x_n \in K$ takvi da je
$$K \subseteq I_{i_{x_0}} \cup \ldots \cup I_{i_{x_n}}. \tag{2.28}$$
Vrijedi
$$L \subseteq J_{u_{x_0}} \cap \ldots \cap J_{u_{x_n}}$$
pa prema korolaru 2.4.10 postoji $w \in \mathbb{N}$ takav da je
$$L \subseteq J_w \text{ i } J_w \subseteq_F J_{u_{x_0}}, \ldots, J_w \subseteq_F J_{u_{x_n}}.$$
Neka je $l \in \{0, \ldots, n\}$. Imamo $J_w \subseteq_F J_{u_{x_l}}$, a vrijedi da su $I_{i_{x_l}}$ i $J_{u_{x_l}}$ formalno disjunktni. Stoga su $I_{i_{x_l}}$ i J_w formalno disjunktni.

Odaberimo $v \in \mathbb{N}$ takav da je
$$\{i_{x_0}, \ldots, i_{x_n}\} = [v].$$
Tada je I_i formalno disjunktan sa J_w za svaki $i \in [v]$. Prema tome J_v i J_w su formalno disjunktni. Iz (2.28) slijedi da je $K \subseteq J_v$. □

Lema 2.4.12. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor te neka je K kompaktan skup u (X, d). Tada postoji $u \in \mathbb{N}$ takav da je $K \subseteq J_u$.*

Dokaz. Ako je $K = \emptyset$ tvrdnja je jasna.

Pretpostavimo da je $K \neq \emptyset$.

Uočimo prije svega sljedeće:
$$\forall x \in X \;\; \exists\, i \in \mathbb{N} \;\text{ takav da je }\; x \in I_i.$$

Stoga

$$\forall x \in K \ \ \exists\, i_x \in \mathbb{N} \ \text{ takav da je } \ x \in I_{i_x}.$$

Budući da je K kompaktan postoje $n \in \mathbb{N}$ i $x_0, \ldots, x_n \in K$ takvi da je

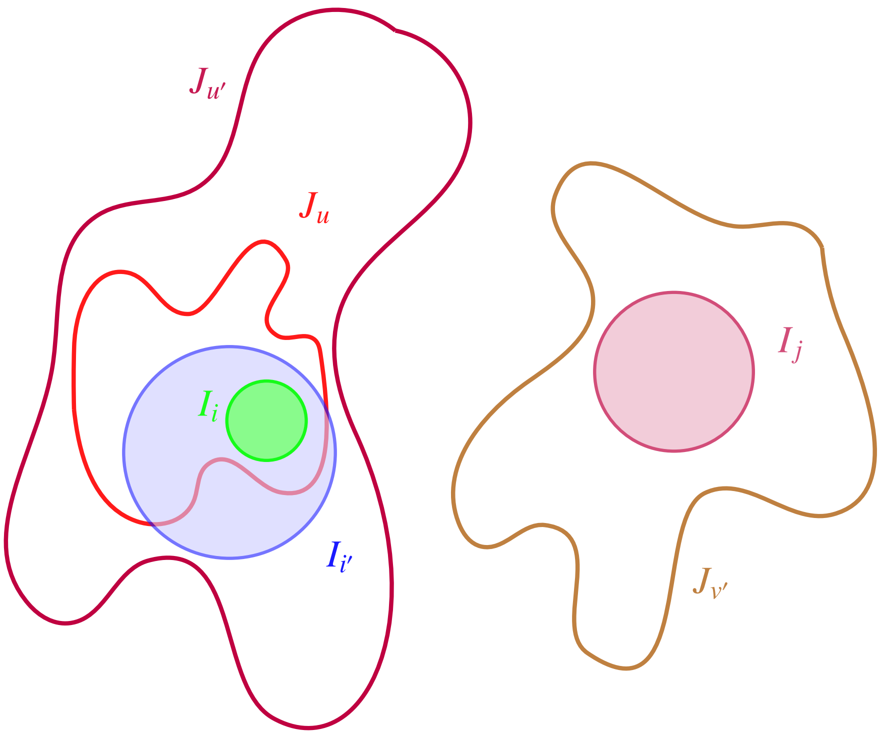
$$K \subseteq I_{i_{x_0}} \cup \ldots \cup I_{i_{x_n}}.$$

Odaberimo $u \in \mathbb{N}$ takav da je

$$[u] = \{i_{x_0}, \ldots, i_{x_n}\}.$$

Tada je $K \subseteq J_u$. □

Napomena: Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor te neka su u, u', $v' \in \mathbb{N}$ takvi da je $J_u \subseteq_F J_{u'}$ te takvi da su $J_{u'}$ i $J_{v'}$ formalno disjunktni.
Tada su J_u i $J_{v'}$ formalno disjunktni. Nadalje, ako je $v \in \mathbb{N}$ takav da je $J_v \subseteq_F J_{v'}$ onda iz istog razloga imamo da su J_u i J_v formalno disjunktni.



Slika 2.14: Ilustracija uz napomenu.

Teorem 2.4.13. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor, $n \in \mathbb{N}$ te neka su $K_0, \dots, K_n$ kompaktni neprazni skupovi u (X, d). Tada postoje brojevi $u_0, \dots, u_n$ takvi da je $K_i \subseteq J_{u_i}$, za svaki $i \in \{0, \dots, n\}$ te takvi da za sve $i, j \in \{0, \dots, n\}$, $i < j$, vrijedi sljedeće: ako je $K_i \cap K_j = \emptyset$, onda su J_{u_i} i J_{u_j} formalno disjunktni.*

Dokaz. Dokažimo ovo indukcijom po n.

(B) Za $n = 0$ tvrdnja slijedi iz leme 2.4.12.

(P) Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$.

(K) Neka su $K_0, \dots, K_n, K_{n+1}$ kompaktni neprazni skupovi u (X, d). Prema induktivnoj pretpostavci postoje brojevi $u_0, \dots, u_n \in \mathbb{N}$ takvi da je

$$K_0 \subseteq J_{u_0}, \dots, K_n \subseteq J_{u_n}$$

te takvi da su J_{u_i} i J_{u_j} formalno disjunktni kad god su $i, j \in \{0, \dots, n\}$, $i < j$, takvi da je $K_i \cap K_j = \emptyset$.

Neka je $i \in \{0, \dots, n\}$. Ako je $K_i \cap K_{n+1} \neq \emptyset$ odaberimo $w_i \in \mathbb{N}$ takav da je $K_{n+1} \subseteq J_{w_i}$ te definirajmo $v_i = u_i$. Ako je $K_i \cap K_{n+1} = \emptyset$, prema propoziciji 2.4.11 postoje v_i, $w_i \in \mathbb{N}$ takvi da je $K_i \subseteq J_{v_i}$, $K_{n+1} \subseteq J_{w_i}$ te da su J_{v_i} i J_{w_i} formalno disjunktni.

Imamo

$$K_{n+1} \subseteq J_{w_0} \cap \dots \cap J_{w_n}$$

pa prema korolaru 2.4.10 postoji $l \in \mathbb{N}$ takav da je

$$K_{n+1} \subseteq J_l \text{ i } J_l \subseteq_F J_{w_0}, \dots, J_l \subseteq_F J_{w_n}.$$

S druge strane, za svaki $i \in \{0, \dots, n\}$ imamo

$$K_i \subseteq J_{u_i} \cap J_{v_i}$$

pa postoji $u'_i \in \mathbb{N}$ takav da je $K_i \subseteq J_{u'_i}$, $J_{u'_i} \subseteq_F J_{u_i}$ i $J_{u'_i} \subseteq J_{v_i}$.

Neka je $u'_{n+1} = l$. Tada su $u'_0, \dots, u'_{n+1}$ traženi brojevi. Dakle, tvrdnja vrijedi i za $n + 1$, čime je teorem dokazan.

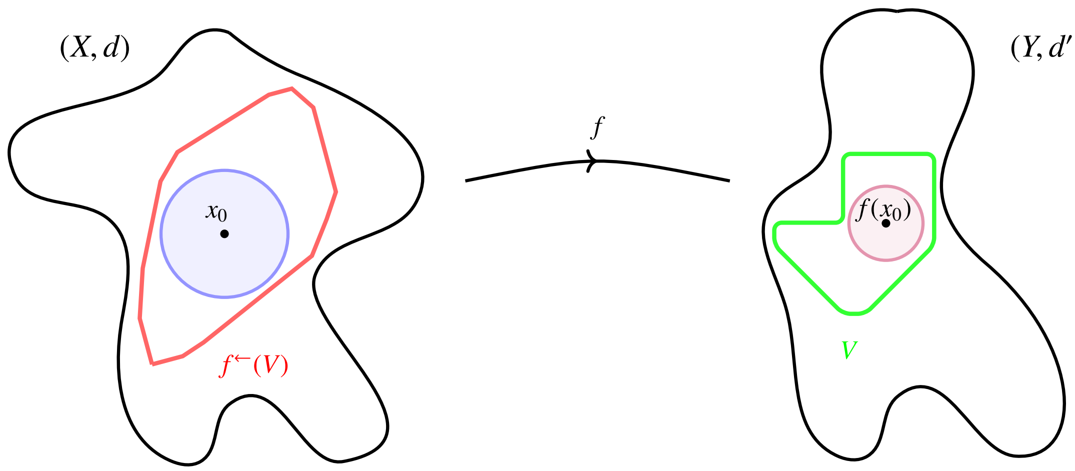
$\square$

Neka su (X,d) i (Y,d') metrički prostori te neka je $f\colon X \to Y$ funkcija. Neka je $x_0 \in X$. Kažemo da je f *neprekidna* u točki x_0, s obzirom na metrike d i d', ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $x \in X$ vrijedi

$$d(x,x_0) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(x_0)) < \epsilon.$$

Za funkciju f kažemo da je neprekidna, s obzirom na metrike d i d', ako je f neprekidna u x_0, s obzirom na d i d', za svaki $x_0 \in X$.

Propozicija 2.4.14. *Neka su (X,d), (Y,d') metrički prostori te $f\colon X \to Y$. Tada je f neprekidna s obzirom na d i d' ako i samo ako za svaki otvoreni skup V u (Y,d') vrijedi da je $f^{\leftarrow}(V)$ otvoren skup u (X,d).*



Slika 2.15: Vizualizacija dokaza.

Dokaz. Pretpostavimo da je f neprekidna.

Neka je V otvoren skup u (Y,d'). Želimo dokazati da je $f^{\leftarrow}(V)$ otvoren skup u (X,d). Uzmimo $x_0 \in f^{\leftarrow}(V)$. Tada je $f(x_0) \in V$ pa budući da je V otvoren postoji $\epsilon > 0$ takav da je

$$K(f(x_0),\epsilon) \subseteq V.$$

Sada činjenica da je f neprekidna funkcija u x_0 povlači da postoji $\delta > 0$ takav da vrijedi

$$d(x,x_0) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(x_0)) < \epsilon. \tag{2.29}$$

Neka je $x \in K(x_0, \delta)$. Tada je $d(x, x_0) < \delta$ pa je prema (2.29) $d'(f(x), f(x_0)) < \epsilon$, što znači da je $f(x) \in K(f(x_0), \epsilon)$ pa je $f(x) \in V$. Dakle, za svaki $x \in K(x_0, \delta)$ vrijedi da je $f(x) \in V$, tj. $x \in f^{\leftarrow}(V)$. Prema tome

$$K(x_0, \delta) \subseteq f^{\leftarrow}(V).$$

Time smo dokazali da je $f^{\leftarrow}(V)$ otvoren skup.

Obratno, pretpostavimo da je $f^{\leftarrow}(V)$ otvoren skup u (X, d) za svaki otvoren skup V u (Y, d').

Dokažimo da je f neprekidna funkcija. Neka je $x_0 \in X$ te neka je $\epsilon > 0$. Neka je

$$V = K(f(x_0), \epsilon).$$

Tada je V otvoren skup u (Y, d') pa je $f^{\leftarrow}(V)$ otvoren skup u (X, d). Očito je $f(x_0) \in V$ pa je stoga $x_0 \in f^{\leftarrow}(V)$, iz čega slijedi da postoji $\delta > 0$ takav da je

$$K(x_0, \delta) \subseteq f^{\leftarrow}(V).$$

Tada za svaki $x \in X$ vrijedi

$$\begin{aligned} d(x, x_0) < \delta &\Rightarrow x \in K(x_0, \delta) \\ &\Rightarrow x \in f^{\leftarrow}(V) \\ &\Rightarrow f(x) \in V \\ &\Rightarrow f(x) \in K(f(x_0), \epsilon) \\ &\Rightarrow d'(f(x), f(x_0)) < \epsilon. \end{aligned}$$

Dakle

$$d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(x_0)) < \epsilon.$$

Zaključak: f je neprekidna funkcija. □

Propozicija 2.4.15. *Neka su (X, d) i (Y, d') metrički prostori te neka je $f : X \to Y$ funkcija neprekidna s obzirom na metrike d i d'. Neka je K kompaktan skup u (X, d). Tada je $f(K)$ kompaktan skup u (Y, d').*

Dokaz. Neka je $\mathcal{V}$ otvoreni pokrivač od $f(K)$ u metričkom prostoru (Y, d'). Neka je

$$\mathcal{U} = \{f^{\leftarrow}(V) \mid V \in \mathcal{V}\}.$$

Tada je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač od K u (X, d).
Naime, za svaki $V \in \mathcal{V}$ vrijedi da je V otvoreni skup u (Y, d'), pa je $f^{\leftarrow}(V)$ otvoreni skup u (X, d) prema propoziciji 2.4.14. S druge strane, ako je $x \in K$, onda je $f(x) \in f(K)$ pa postoji $V \in \mathcal{V}$ takav da je $f(x) \in V$, iz čega slijedi $x \in f^{\leftarrow}(V)$.

Budući da je K kompaktan, postoje $n \in \mathbb{N}$ i $V_0, \ldots, V_n \in \mathcal{V}$ takvi da je

$$K \subseteq f^{\leftarrow}(V_0) \cup \ldots \cup f^{\leftarrow}(V_n).$$

Tada je

$$f(K) \subseteq V_0 \cup \ldots \cup V_n.$$

Zaključak: $f(K)$ je kompaktan skup u (Y, d'). $\square$

Poglavlje 3

Izračunljivost u topološkim prostorima

3.1 Topološki prostori

Neka je X neprazan skup te neka je $\mathcal{T}$ familija podskupova od X. Za $\mathcal{T}$ kažemo da je *topologija* na skupu X ako vrijede sljedeća svojstva:

(1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$

(2) Ako je $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ indeksirana familija elemenata od $\mathcal{T}$, onda je

$$\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha \in \mathcal{T}.$$

(3) Ako su U, $V \in \mathcal{T}$ onda je $U \cap V \in \mathcal{T}$.

Ako je $\mathcal{T}$ topologija na skupu X onda za uređeni par $(X, \mathcal{T})$ kažemo da je *topološki prostor*.

Primjer 3.1.1. *Neka je (X, d) metrički prostor. Sa $\mathcal{T}_d$ označimo familiju svih otvorenih skupova u metričkom prostoru (X, d).*

Iz propozicije 2.1.3 slijedi da je $\mathcal{T}_d$ topologija na skupu X.

Za $\mathcal{T}_d$ kažemo da je *topologija inducirana metrikom d*.

Primjer 3.1.2. *Neka je X skup. Tada su $\mathcal{P}(X)$ i $\{\emptyset, X\}$ topologije na X.*

Za $\mathcal{P}(X)$ kažemo da je *diskretna topologija* na X, a za $\{\emptyset, X\}$ kažemo da je *indiskretna topologija* na X.

Primjer 3.1.3. *Neka je X skup koji ima barem dva elementa. Postoji li metrika na X koja inducira indiskretnu topologiju na X, tj. postoji li metrika d na X takva da je $\mathcal{T}_d = \{\emptyset, X\}$?*

Pretpostavimo da takva metrika d postoji.

Neka su a, $b \in X$, $a \neq b$ (takvi a i b sigurno postoje). Neka je $r = d(a, b)$. Očito je $r > 0$. Neka je $U = K(a, r)$. Tada je U otvoren skup u metričkom prostoru (X, d), tj. $U \in \mathcal{T}_d$.

Slijedi da je $U \in \{\emptyset, X\}$ pa je $U = \emptyset$ ili $U = X$. No, $U \neq \emptyset$ jer je $a \in U$, s druge strane, $U \neq X$ jer je $b \in X$ i $b \notin U$.

Prema tome, ne postoji metrika na X koja inducira topologiju $\{\emptyset, X\}$.

Za topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ kažemo da je *metrizabilan* ako postoji metrika na X koja inducira topologiju $\mathcal{T}$.

Primjer 3.1.4. *Vidjeli smo u primjeru 3.1.3 da topləški prostor $(X, \{\emptyset, X\})$ nije metrizabilan ako je X skup koji ima barem dva elementa. S druge strane, ako je X bilo koji neprazan skup onda je topološki prostor $(X, \mathcal{P}(X))$ metrizabilan.*

Naime, ako je d diskretna metrika na X onda je svaki podskup od X otvoren u metričkom prostoru (X, d) prema primjeru 2.2.21 pa je $\mathcal{T}_d = \mathcal{P}(X)$.

Za topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ kažemo da je *Hausdorffov* ako za sve a, $b \in X$, $a \neq b$ postoje U, $V \in \mathcal{T}$ takvi da je $a \in U$, $b \in V$ i $U \cap V = \emptyset$.

Uočimo da topološki prostor $(X, \{\emptyset, X\})$ nije Hausdorffov ako je X skup koji ima barem dva elementa. Dakle postoje topološki prostori koji nisu Hausdorffovi.

Propozicija 3.1.5. *Svaki metrizabilan topološki prostor je Hausdorffov.*

Dokaz. Neka je $(X, \mathcal{T})$ metrizabilan topološki prostor. Tada postoji metrika d na X takva da je $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$.

Neka su $a, b \in X$, $a \neq b$. Neka je
$$r = \frac{d(a,b)}{2},$$
očito je $r > 0$. Neka je $U = K(a,r)$, $V = K(b,r)$. Pretpostavimo da postoji $c \in X$ takav da je $c \in U \cap V$. Tada je $d(c,a) < r$ i $d(c,b) < r$. Imamo

$$\begin{aligned} d(a,b) &\leq d(a,c) + d(c,b) \\ &< r + r \\ &= 2r \\ &= d(a,b), \end{aligned}$$

tj. $d(a,b) < d(a,b)$, kontradikcija. Prema tome, $U \cap V = \emptyset$.

Nadalje, očito je da je $a \in U$, $b \in V$ te da su U i V otvoreni skupovi u (X,d). To znači da su U, $V \in \mathcal{T}_d$ pa su U, $V \in \mathcal{T}$. Time smo dokazali da je $(X, \mathcal{T})$ Hausdorffov prostor. □

Neka je X skup te neka je $\mathcal{T}$ topologija na X. Neka je $\mathcal{B}$ familija podskupova od X takva da je $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ te takva da se svaki neprazan element od $\mathcal{T}$ može napisati kao unija nekih elemenata od $\mathcal{B}$, tj. za svaki $U \in \mathcal{T}$, $U \neq \emptyset$ postoji indeksirana familija $(B_\alpha)_{\alpha \in A}$ elemenata od $\mathcal{B}$ takvih da je $U = \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha$. Tada za $\mathcal{B}$ kažemo da je *baza topologije* $\mathcal{T}$.

Primjer 3.1.6. *Neka je X neprazan skup te neka je $\mathcal{B}$ familija svih jednočlanih podskupova od X.*

Tada je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{P}(X)$.

Primjer 3.1.7. *Neka je (X,d) metrički prostor te neka je $\mathcal{B}$ familija svih otvorenih kugla u metričkom prostoru (X,d).*

Tada je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{T}_d$ (propozicija 2.1.6).

Propozicija 3.1.8. *Neka je X skup, $\mathcal{T}$ topologija na X te neka je $\mathcal{B}$ podfamilija od $\mathcal{T}$. Tada je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{T}$ ako i samo ako za svaki $U \in \mathcal{T}$ i svaki $x \in U$ postoji $B \in \mathcal{B}$ takav da je $x \in B \subseteq U$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{T}$.

Pretpostavimo da je $U \in \mathcal{T}$ te da je $x \in U$. Vrijedi

$$U = \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha,$$

pri čemu je $(B_\alpha)_{\alpha \in A}$ neka indeksirana familija elemenata od $\mathcal{B}$. Iz $x \in U$ slijedi da je $x \in B_\alpha$, za neki $\alpha \in A$.

Dakle $x \in B_\alpha \subseteq U$.

Obratno, pretpostavimo da za svaki $U \in \mathcal{T}$ i svaki $x \in U$ postoji $B \in \mathcal{B}$ takav da je $x \in B \subseteq U$. Neka je $U \in \mathcal{T}$, $U \neq \emptyset$. Za svaki $x \in U$ postoji $B_x \in \mathcal{B}$ takav da je $x \in B_x \subseteq U$. Tada je $U = \bigcup_{x \in U} B_x$.

Zaključak: $\mathcal{B}$ je baza topologije $\mathcal{T}$. □

Propozicija 3.1.9. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je A gust skup u (X, d). Neka je $\mathcal{B} = \{K(a, q) \mid a \in A,\ q \in \mathbb{Q},\ q > 0\}$. Tada je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{T}_d$.*

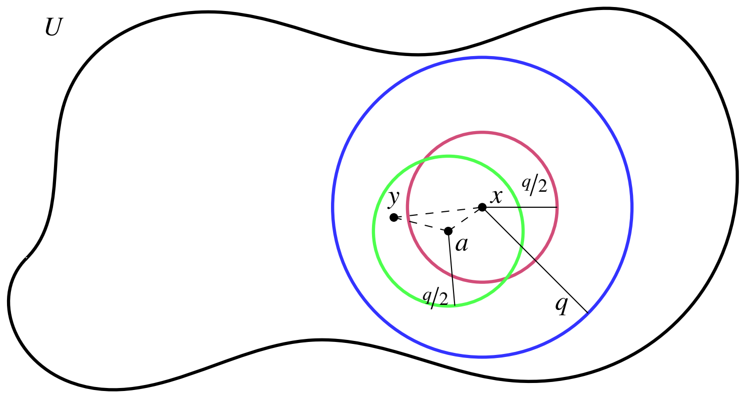
Dokaz. Očito je $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}_d$.

Neka je $U \in \mathcal{T}_d$ te neka je $x \in U$. Tada postoji $r > 0$ takav da je $K(x, r) \subseteq U$. Odaberimo pozitivan racionalan broj q takav da je $q \leq r$. Tada je $K(x, q) \subseteq U$. Budući da je A gust skup u (X, d) postoji $a \in A$ takav da je $d(x, a) < q/2$. Slijedi da je $x \in K(a, q/2)$.

Dokažimo da je $K(a, q/2) \subseteq U$. Neka je $y \in K(a, q/2)$. Tada je

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq d(x, a) + d(a, y) \\ &< q/2 + q/2 \\ &= q. \end{aligned}$$

Dakle, $d(x, y) < q$ pa je $y \in K(x, q)$, tj. $y \in U$.



Slika 3.1: Vizualizacija dokaza.

Zaključak: $x \in K(a, q/2) \subseteq U$, a naravno $K(a, q/2) \in \mathcal{B}$.

Prema propoziciji 3.1.8 $\mathcal{B}$ je baza topologije $\mathcal{T}_d$. $\square$

Korolar 3.1.10. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Tada je $\{I_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ baza topologije $\mathcal{T}_d$.*

Dokaz. Znamo da je $\{\alpha_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ gust skup u (X, d) pa je prema propoziciji 3.1.9 familija svih racionalnih kugla u (X, d, α) baza topologije $\mathcal{T}_d$. No, $\{I_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ je upravo familija svih racionalnih kugla u (X, d, α). $\square$

3.2 Izračunljivi topološki prostori

Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor i $U \subseteq X$. Kažemo da je U *otvoren skup* u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T})$ ako je $U \in \mathcal{T}$.

Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te neka je $(I_i)_{i \in \mathbb{N}}$ niz u $\mathcal{T}$ takav da je $\{I_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ baza topologije $\mathcal{T}$.

Za $(X, \mathcal{T}, (I_i)_{i\in\mathbb{N}})$ kažemo da je *izračunljiv topološki prostor* ako postoje rekurzivno prebrojivi podskupovi FD i FS od $\mathbb{N}^2$ takvi da vrijedi sljedeće:

(1) Ako je $(i, j) \in FD$ onda je $I_i \cap I_j = \emptyset$.

(2) Ako je $(i, j) \in FS$ onda je $I_i \subseteq I_j$.

(3) Ako je $(i, j) \in FD$ onda je $(j, i) \in FD$. (*simetričnost relacije FD*)

(4) Ako su $(i, j), (j, k) \in FS$ onda je $(i, k) \in FS$. (*tranzitivnost relacije FS*)

(5) Ako je $(k, i) \in FS$ i $(i, j) \in FD$ onda je $(k, j) \in FD$.

(6) Za sve $x, y \in X$ takve da je $x \neq y$ postoje $i, j \in \mathbb{N}$ takvi da je $(i, j) \in FD$ te $x \in I_i$, $y \in I_j$.

(7) Za sve $i, j \in \mathbb{N}$ i svaki $x \in I_i \cap I_j$ postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $x \in I_k$ i $(k, i), (k, j) \in FS$.

Napomena: Ubuduće ćemo kada govorimo o izračunljivom topološkom prostoru $(X, \mathcal{T}, (I_i))$ pod FS i FD podrazumijevati skupove iz gornje definicije.

Primjer 3.2.1. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Tada je $(X, \mathcal{T}_d, (I_i))$ izračunljiv topološki prostor.*

Naime, $\{I_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ je baza topologije $\mathcal{T}_d$ prema korolaru 3.1.10. Nadalje, definirajmo skupove FD i FS na sljedeći način:

$$FD = \left\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid I_i \text{ i } I_j \text{ formalno disjunktni}\right\},$$
$$FS = \left\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid I_i \subseteq_F I_j\right\}.$$

Skupovi FD i FS su rekurzivno prebrojivi prema propoziciji 2.4.1.

Iz definicije skupova FD i FS je očito kako svojstva 1), 2) i 3) iz prethodne definicije vrijede. Svojstva 4), 5), 6) i 7) iz prethodne definicije slijede redom iz propozicije 2.4.5, propozicije 2.4.6, propozicije 2.4.2 i korolara 2.4.7.

Uočimo sljedeće: ako je $(X, \mathcal{T}, (I_i))$ izračunljiv topološki prostor onda je $(X, \mathcal{T})$ Hausdorffov prostor. To slijedi iz svojstava 6) i 1) definicije izračunljivog topološkog prostora.

Ako je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te $F \subseteq X$ onda za F kažemo da je *zatvoren skup* u $(X, \mathcal{T})$ ako je F^C otvoren u $(X, \mathcal{T})$, tj. $F^C \in \mathcal{T}$.

Ako je (X, d) metrički prostor te $U \subseteq X$ onda je U otvoren u metričkom prostoru (X, d) ako i samo ako je U otvoren u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T}_d)$. Iz ovoga slijedi da je F zatvoren u metričkom prostoru (X, d) ako i samo ako je F zatvoren u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T}_d)$.

Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te $K \subseteq X$. Neka je $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$, $\mathcal{U} \neq \emptyset$. Za $\mathcal{U}$ kažemo da je *otvoreni pokrivač* od K u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T})$ ako je $K \subseteq \bigcup \mathcal{U}$.

Za skup K kažemo da je *kompaktan* u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T})$ ako za svaki otvoreni pokrivač $\mathcal{U}$ od K u $(X, \mathcal{T})$ postoje $n \in \mathbb{N}$ i $U_0, \dots, U_n \in \mathcal{U}$ takvi da je $K \subseteq U_0 \cup \dots \cup U_n$.

Uočimo sljedeće: ako je (X, d) metrički prostor i $K \subseteq X$ onda je K kompaktan skup u metričkom prostoru (X, d) ako i samo ako je K kompaktan u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T}_d)$.

Primjer 3.2.2. *Neka je X neprazan skup. Tada je svaki podskup od X kompaktan u topološkom prostoru $(X, \{\emptyset, X\})$.*

Štoviše, svaki podskup od X je kompaktan u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T})$ ako je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor takav da je $\mathcal{T}$ konačna familija.

U topološkom prostoru $(X, \{\emptyset, X\})$ jedini otvoreni skupovi su $\emptyset$ i X pa su stoga jedini zatvoreni skupovi također $\emptyset$ i X.

Stoga, ako X ima barem dva elementa, postoji podskup K od X takav da je $K \neq \emptyset$ i $K \neq X$ te imamo da je K kompaktan skup u $(X, \{\emptyset, X\})$ ali nije zatvoren.

Teorem 3.2.3. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ Hausdorffov topološki prostor te neka je K kompaktan skup u $(X, \mathcal{T})$. Tada je K zatvoren u $(X, \mathcal{T})$.*

Dokaz. Ako je $K = \emptyset$ tvrdnja je jasna.

Pretpostavimo da je K neprazan. Neka je $x \in K^C$. Na isti način kao u dokazu teorema 2.2.16 dobivamo da postoji otvoreni skup W u $(X, \mathcal{T})$ takav da je $x \in W \subseteq K^C$. Dakle za svaki $x \in K^C$ postoji $W_x \in \mathcal{T}$ takav da je $x \in W_x \subseteq K^C$. Iz ovoga slijedi da je

$$K^C = \bigcup_{x \in K^C} W_x.$$

Stoga je $K^C \in \mathcal{T}$, tj. K^C je otvoren skup u $(X, \mathcal{T})$ pa je K zatvoren. □

Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori te neka je $f \colon X \to Y$ funkcija. Za f kažemo da je *funkcija neprekidna s obzirom na topologije* $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$ ako za svaki $V \in \mathcal{S}$ vrijedi da je $f^{\leftarrow}(V) \in \mathcal{T}$.

Uočimo sljedeće: ako su (X, d) i (Y, d') metrički prostori te $f \colon X \to Y$ funkcija, onda je f neprekidna s obzirom na metrike d i d' ako i samo ako je f neprekidna s obzirom na topologije $\mathcal{T}_d$ i $\mathcal{T}_{d'}$. Ovo slijedi iz propozicije 2.4.14.

Propozicija 3.2.4. *Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori, $f \colon X \to Y$ funkcija neprekidna s obzirom na topologije $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$ te K kompaktan skup u $(X, \mathcal{T})$. Tada je $f(K)$ kompaktan skup u $(Y, \mathcal{S})$.*

Dokaz. Ova tvrdnja se dokazuje na isti način kao tvrdnja propozicije 2.4.15. □

Neka je $(X, \mathcal{T}, (I_i))$ izračunljiv topološki prostor. Neka je S zatvoren skup u $(X, \mathcal{T})$. Kažemo da je S *izračunljivo prebrojiv skup* u $(X, \mathcal{T}, (I_i))$ ako je $\{i \in \mathbb{N} \mid I_i \cap S \neq \emptyset\}$ rekurzivno prebrojiv podskup od $\mathbb{N}$.

Neka je $(X, \mathcal{T}, (I_i))$ izračunljiv topološki prostor. Za $j \in \mathbb{N}$ definiramo

$$J_j = I_{(j)_0} \cup \ldots \cup I_{(j)_{\bar{j}}}.$$

Za kompaktan skup S u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T})$ kažemo da je *poluizračunljiv skup* u izračunljivom topološkom prostoru $(X, \mathcal{T}, (I_i))$ ako je $\{j \in \mathbb{N} \mid S \subseteq J_j\}$ rekurzivno prebrojiv podskup od $\mathbb{N}$.

Propozicija 3.2.5. *Neka je $(X, \mathcal{T}, (I_i))$ izračunljiv topološki prostor, neka je $n \in \mathbb{N}$, $i_0, \dots, i_n \in \mathbb{N}$ te neka je $x \in I_{i_0} \cap \dots \cap I_{i_n}$. Tada postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $x \in I_k$ i $(k, i_0), \dots, (k, i_n) \in FS$.*

Dokaz. Koristeći svojstva 7) i 4) iz definicije izračunljivog topološkog prostora, tvrdnju propozicije dokazujemo na isti način kao tvrdnju korolara 2.4.7. □

Neka je $(X, \mathcal{T}, (I_i))$ izračunljiv topološki prostor. Neka su $i, u \in \mathbb{N}$. Kažemo da su I_i i J_u *FD–disjunktni* ako je $(i, j) \in FD$ za svaki $j \in [u]$.

Propozicija 3.2.6. *Neka je $(X, \mathcal{T}, (I_i))$ izračunljiv topološki prostor, neka je K kompaktan neprazan skup u $(X, \mathcal{T})$ te neka je $x \in X$ točka takva da $x \notin K$. Tada postoje $i, u \in \mathbb{N}$ takvi da je $x \in I_i$, $K \subseteq J_u$ te takvi da su I_i i J_u FD–disjunktni.*

Dokaz. Koristeći propoziciju 3.2.5 i svojstvo 5) iz definicije izračunljivog topološkog prostora, tvrdnju ove propozicije dobivamo na isti način kao i tvrdnju propozicije 2.4.8. □

Neka je $(X, \mathcal{T}, (I_i))$ izračunljiv topološki prostor te neka su $i, v \in \mathbb{N}$. Kažemo da je I_i *FS–sadržan* u J_v i pišemo $I_i \subseteq_{FS} J_v$ ako postoji $j \in [v]$ takav da je $(i, j) \in FS$.

Neka je $(X, \mathcal{T}, (I_i))$ izračunljiv topološki prostor. Neka su $u, v \in \mathbb{N}$. Kažemo da je J_u *FS–sadržan* u J_v i pišemo $J_u \subseteq_{FS} J_v$ ako za svaki $i \in [u]$ postoji $j \in [v]$ takav da je $(i, j) \in FS$.

Jasno je da je $J_u \subseteq_{FS} J_v$ ako i samo ako je $I_i \subseteq_{FS} J_v$ za svaki $i \in [u]$.

Uočimo sljedeće: ako su $u, v, i \in \mathbb{N}$ takvi da je $J_u \subseteq_{FS} J_v$ te I_i i J_v *FD–disjunktni*, onda su I_i i J_u *FD–disjunktni* (to slijedi iz svojstva 5) definicije izračunljivog topološkog prostora).

Nadalje, iz tranzitivnosti relacije FS slijedi da ako su $u, v, w \in \mathbb{N}$ takvi da je $J_u \subseteq_{FS} J_v$ i $J_v \subseteq_{FS} J_w$ onda je $J_u \subseteq_{FS} J_w$.

Propozicija 3.2.7. *Neka je $(X, \mathcal{T}, (I_i))$ izračunljiv topološki prostor, neka je K neprazan kompaktan skup u $(X, \mathcal{T})$ te neka su u, $v \in \mathbb{N}$ takvi da je $K \subseteq J_u \cap J_v$. Tada postoji $w \in \mathbb{N}$ takav da je $K \subseteq J_w$ te $J_w \subseteq_{FS} J_u$ i $J_w \subseteq_{FS} J_v$.*

Dokaz. Koristeći svojstvo 7) iz definicije izračunljivog topološkog prostora, tvrdnju ove propozicije dokazujemo na isti način kao i tvrdnju propozicije 2.4.9. □

Iz prethodne propozicije lako indukcijom dokazujemo sljedeću tvrdnju.

Korolar 3.2.8. *Neka je $(X, \mathcal{T}, (I_i))$ izračunljiv topološki prostor, neka je $n \in \mathbb{N}$ te neka su $u_0, \dots, u_n \in \mathbb{N}$. Pretpostavimo da je K kompaktan neprazan skup u $(X, \mathcal{T})$ takav da je $K \subseteq J_{u_0} \cap \dots \cap J_{u_n}$. Tada postoji $w \in \mathbb{N}$ takav da je $K \subseteq J_w$ i $J_w \subseteq_{FS} J_{u_0}, \dots, J_w \subseteq_{FS} J_{u_n}$.* □

Neka je $(X, \mathcal{T}, (I_i))$ izračunljiv topološki prostor te neka su $u, v \in \mathbb{N}$. Kažemo da su J_u i J_v *FD–disjunktni* ako za svaki $i \in [u]$ i svaki $j \in [v]$ vrijedi da je $(i, j) \in FD$.

Uočimo da su J_u i J_v *FD–disjunktni* ako i samo ako za svaki $i \in [u]$ vrijedi da su I_i i J_v *FD–disjunktni*.

Koristeći propoziciju 3.2.6 i zadnji korolar dokazujemo sljedeću propoziciju na isti način kao i propoziciju 2.4.11.

Propozicija 3.2.9. *Neka je $(X, \mathcal{T}, (I_i))$ izračunljiv topološki prostor te neka su K i L neprazni disjunktni skupovi u $(X, \mathcal{T})$. Tada postoje u, $v \in \mathbb{N}$ takvi da je $K \subseteq J_u$, $L \subseteq J_v$ te J_u i J_v FD–disjunktni.*

Lema 3.2.10. *Neka je $(X, \mathcal{T}, (I_i))$ izračunljiv topološki prostor te neka je K kompaktan skup u $(X, \mathcal{T})$. Tada postoji $u \in \mathbb{N}$ takav da je $K \subseteq J_u$.*

Dokaz. Familija $\{I_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ je otvoreni pokrivač od K u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T})$. Stoga postoje $n \in \mathbb{N}$ i $i_0, \dots, i_n \in \mathbb{N}$ takvi da je

$$K \subseteq I_{i_0} \cup \dots \cup I_{i_n}.$$

Neka je $u \in \mathbb{N}$ takav da je $[u] = \{i_0, \dots, i_n\}$. Tada je $K \subseteq J_u$. □

Napomena: Iz svojstva 5) definicije izračunljivog topološkog prostora lako zaključujemo sljedeće: ako je $(X, \mathcal{T}, (I_i))$ izračunljiv topološki prostor te ako su $u, u', v' \in \mathbb{N}$ takvi da je $J_u \subseteq_{FS} J_{u'}$ te takvi da su $J_{u'}$ i $J_{v'}$ *FD–disjunktni*, onda su J_u i $J_{v'}$ *FD–disjunktni*. Nadalje, ako je $v \in \mathbb{N}$ takvi da je $J_v \subseteq_{FS} J_{v'}$ onda su i J_u i J_v *FD–disjunktni*.

Teorem 3.2.11. *Neka je $(X, \mathcal{T}, (I_i))$ izračunljiv topološki prostor, $n \in \mathbb{N}$ te neka su $K_0, \dots, K_n$ kompaktni neprazni skupovi u $(X, \mathcal{T})$. Tada postoje brojevi $u_0, \dots, u_n$ takvi da je $K_i \subseteq J_{u_i}$, za svaki $i \in \{0, \dots, n\}$ te takvi da za sve $i, j \in \{0, \dots, n\}$, $i < j$, vrijedi sljedeće: ako je $K_i \cap K_j = \emptyset$, onda su J_{u_i} i J_{u_j} FD–disjunktni.*

Dokaz. Ovu tvrdnju dokazujemo na isti način kao tvrdnju teorema 2.4.13, pri čemu koristimo lemu 3.2.10, propoziciju 3.2.9 i korolar 3.2.8. □

Propozicija 3.2.12. *Neka je $(X, \mathcal{T}, (I_i))$ izračunljiv topološki prostor. Neka je*

$$T = \{(u, v) \in \mathbb{N}^2 \mid J_u \ \ i \ \ J_v \ \ FD\text{–}disjunktni\}.$$

Tada je T rekurzivno prebrojiv podskup od $\mathbb{N}^2$.

Dokaz. Vrijedi

$$\begin{aligned} T &= \left\{(u, v) \in \mathbb{N}^2 \mid (i, j) \in FD, \ \forall i \in [u], \ \forall j \in [v]\right\} \\ &= \left\{(u, v) \in \mathbb{N}^2 \mid [u] \times [v] \subseteq FD\right\}. \end{aligned}$$

Dakle
$$T = \left\{(u,v) \in \mathbb{N}^2 \mid \Lambda(u,v) \subseteq FD\right\},$$
gdje je $\Lambda \colon \mathbb{N}^2 \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$ funkcija definirana sa
$$\Lambda(u,v) = [u] \times [v].$$
U dokazu propozicije 2.4.1 smo vidjeli da je Λ r.r.o. funkcija pa iz teorema 2.2.33 slijedi da je T rekurzivno prebrojiv skup. $\square$

Propozicija 3.2.13. *Neka je $(X, \mathcal{T}, (I_i))$ izračunljiv topološki prostor.*

(1) Skup $\Gamma = \{(i,v) \in \mathbb{N}^2 \mid I_i \subseteq_{FS} J_v\}$ je rekurzivno prebrojiv.

(2) Skup $\Omega = \{(u,v) \in \mathbb{N}^2 \mid J_u \subseteq_{FS} J_v\}$ je rekurzivno prebrojiv.

Dokaz.

(1) Neka su $i, v \in \mathbb{N}$. Tada je
$$\begin{aligned}(i,v) \in \Gamma &\Leftrightarrow I_i \subseteq_{FS} J_v \\ &\Leftrightarrow \exists j \in [v] \text{ takav da je } (i,j) \in FS \\ &\Leftrightarrow \exists j \in \mathbb{N} \text{ takav da je } (i,j) \in FS \text{ i } j \in [v].\end{aligned}$$

Neka je
$$\Gamma' = \left\{(i,v,j) \in \mathbb{N}^3 \mid (i,j) \in FS,\ j \in [v]\right\}.$$
Dobili smo da je
$$(i,v) \in \Gamma \Leftrightarrow \exists j \in \mathbb{N} \text{ takav da je } (i,v,j) \in \Gamma'. \tag{3.1}$$

Vrijedi $\Gamma' = S \cap T$, gdje je
$$\begin{aligned}S &= \left\{(i,j,v) \in \mathbb{N}^3 \mid (i,j) \in FS\right\},\\ T &= \left\{(i,j,v) \in \mathbb{N}^3 \mid j \in [v]\right\}.\end{aligned}$$

Vrijedi $S = p^{\leftarrow}(FS)$, gdje je $p \colon \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}^2$ funkcija definirana sa $p(i,j,v) = (i,j)$.

Očito je p rekurzivna funkcija pa iz propozicije 2.2.37 slijedi da je S rekurzivno prebrojiv skup.

Neka je $\phi\colon \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ funkcija definirana sa $\phi(v) = [v]$.

Znamo da je ϕ r.r.o. funkcija.
Vrijedi
$$\chi_T(i, j, v) = \chi_{[v]}(j) = \chi_{\phi(v)}(j) = \overline{\phi}(v, j),$$
pa rekurzivnost funkcije $\overline{\phi}$ povlači rekurzivnost funkcije χ_T. Prema tome, T je rekurzivan skup, pa je i rekurzivno prebrojiv. Iz $\Gamma' = S \cap T$ slijedi da je i Γ' rekurzivno prebrojiv skup (propozicija 2.2.39).

Iz (3.1) i teorema o projekciji (teorem 1.4.7) slijedi da je Γ rekurzivno prebrojiv skup.

(2) Neka su $u, v \in \mathbb{N}$. Tada je
$$\begin{aligned}(u, v) \in \Omega &\Leftrightarrow J_u \subseteq_{FS} J_v\\ &\Leftrightarrow \forall i \in [u] \quad I_i \subseteq_{FS} J_v\\ &\Leftrightarrow \forall i \in [u] \quad (i, v) \in \Gamma\\ &\Leftrightarrow [u] \times \{v\} \subseteq \Gamma.\end{aligned}$$

Dakle,
$$\Omega = \left\{(u, v) \in \mathbb{N}^2 \mid \phi(u, v) \subseteq \Gamma\right\}, \tag{3.2}$$
pri čemu je $\phi\colon \mathbb{N}^2 \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$ funkcija definirana sa $\phi(u, v) = [u] \times \{v\}$.

Vrijedi
$$\phi(u, v) = \psi_1(u, v) \times \psi_2(u, v), \tag{3.3}$$
pri čemu su $\psi_1, \psi_2\colon \mathbb{N}^2 \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ funkcije definirane sa
$$\psi_1(u, v) = [u], \quad \psi_2(u, v) = \{v\}.$$

Funkcije ψ_1 i ψ_2 su r.r.o. prema propoziciji 2.2.31 (funkcija $\mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $v \mapsto \{v\}$ je očito r.r.o.).

Iz (3.3) i propozicije 2.2.35 slijedi da je ϕ r.r.o.

Sada iz (3.2) i teorema 2.2.33 slijedi da je Ω rekurzivno prebrojiv skup.

□

Propozicija 3.2.14. *Neka je* $(X, \mathcal{T})$ *topološki prostor.*

(1) $\emptyset$*,* X *su zatvoreni skupovi u* $(X, \mathcal{T})$*.*

(2) Ako je $(F_\alpha)_{\alpha \in A}$ *indeksirana familija zatvorenih skupova u* $(X, \mathcal{T})$*, tada je* $\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha$ *zatvoren skup u* $(X, \mathcal{T})$*.*

(3) Ako su F *i* G *zatvoreni skupovi u* $(X, \mathcal{T})$ *onda je* $F \cup G$ *zatvoren skup u* $(X, \mathcal{T})$*.*

Dokaz.

(1) Očito vrijedi.

(2) Imamo

$$\left(\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha\right)^C = \bigcup_{\alpha \in A} F_\alpha^C$$

pa slijedi da je

$$\left(\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha\right)^C \in \mathcal{T}.$$

Stoga je $\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha$ zatvoren skup.

(3) Vrijedi

$$(F \cup G)^C = F^C \cap G^C$$

pa je

$$(F \cup G)^C \in \mathcal{T},$$

tj. $F \cup G$ je zatvoren skup.

□

Propozicija 3.2.15. *Neka je* $(X, \mathcal{T})$ *topološki prostor, neka je* K *kompaktan skup u* $(X, \mathcal{T})$ *te neka je* F *zatvoren skup u* $(X, \mathcal{T})$ *takav da je* $F \subseteq K$*. Tada je* F *kompaktan skup u* $(X, \mathcal{T})$*.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač od F u $(X, \mathcal{T})$. Definirajmo

$$\mathcal{U}' = \mathcal{U} \cup \{F^C\}.$$

Tada je $\mathcal{U}'$ otvoreni pokrivač od K u $(X, \mathcal{T})$. Budući da je K komapaktan postoje $n \in \mathbb{N}$ i $U_0, \dots, U_n \in \mathcal{U}$ takvi da je

$$K \subseteq U_0 \cup \dots \cup U_n \cup F^C.$$

Sada $F \subseteq K$ povlači da je $F \subseteq U_0 \cup \dots \cup U_n \cup F^C$, pa je

$$F \subseteq U_0 \cup \dots \cup U_n.$$

Zaključak: F je kompaktan skup u $(X, \mathcal{T})$. □

Lema 3.2.16. *Neka je $(X, \mathcal{T}, (I_i))$ izračunljiv topološki prostor. Tada postoji rekurzivna funkcija $f\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da je $J_u \cup J_v = J_{f(u,v)}$ za sve $u, v \in \mathbb{N}$.*

Dokaz. Neka su $u, v \in \mathbb{N}$. Imamo

$$J_u \cup J_v = \bigcup_{i \in [u]} I_i \cup \bigcup_{i \in [v]} I_i = \bigcup_{i \in [u] \cup [v]} I_i.$$

Neka je $\phi\colon \mathbb{N}^2 \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ funkcija definirana sa

$$\phi(u, v) = [u] \cup [v].$$

Iz propozicije 2.2.31 i propozicije 2.2.26 slijedi da je ϕ r.r.o. funkcija.

Za sve $u, v \in \mathbb{N}$ je očito $\phi(u, v)$ neprazan konačan podskup od $\mathbb{N}$. Stoga, za sve $u, v \in \mathbb{N}$ postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\phi(u, v) = [k].$$

Neka je

$$S = \left\{(u, v, k) \in \mathbb{N}^3 \mid \phi(u, v) = [k]\right\}.$$

Iz korolara 2.2.28 (koristeći propoziciju 2.2.31) slijedi da je S rekurzivan skup.

Budući da za sve $u, v \in \mathbb{N}$ postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $(u, v, k) \in S$ prema lemi 2.2.5 postoji rekurzivna funkcija $f\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da je $(u, v, f(u, v)) \in S$, za sve $u, v \in \mathbb{N}$.

Dakle, za sve $u, v \in \mathbb{N}$ vrijedi $\phi(u, v) = [f(u, v)]$, tj. $[u] \cup [v] = [f(u, v)]$.

Sada imamo

$$J_u \cup J_v = \bigcup_{i \in [u] \cup [v]} I_i = \bigcup_{i \in [f(u,v)]} I_i = J_{f(u,v)}.$$

Dakle, $J_u \cup J_v = J_{f(u,v)}$ za sve $u, v \in \mathbb{N}$. □

Korolar 3.2.17. *Neka je $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Tada postoji rekurzivna funkcija $f \colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ takva da je*

$$J_{x_1} \cup \ldots \cup J_{x_n} = J_{f(x_1,\ldots,x_n)},$$

za sve $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{N}$.

Dokaz. Dokažimo ovo indukcijom po n.

Za $n = 1$ tvrdnja je očita. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Dakle postoji funkcija $f \colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ takva da vrijedi

$$J_{x_1} \cup \ldots \cup J_{x_n} = J_{f(x_1,\ldots,x_n)}.$$

Neka je $\varphi \colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija takva da je $J_u \cup J_v = J_{\varphi(u,v)}$, za sve $u, v \in \mathbb{N}$ (lema 3.2.16).

Za sve $x_1, \ldots, x_{n+1} \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$J_{x_1} \cup \ldots \cup J_{x_n} \cup J_{x_{n+1}} = J_{f(x_1,\ldots,x_n)} \cup J_{x_{n+1}} = J_{\varphi(f(x_1,\ldots,x_n),x_{n+1})}.$$

Definirajmo $g \colon \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ sa

$$g(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \varphi(f(x_1, \ldots, x_n), x_{n+1}).$$

Tada je g rekurzivna funkcija i

$$J_{x_1} \cup \ldots \cup J_{x_{n+1}} = J_{g(x_1,\ldots,x_{n+1})}.$$

Time je tvrdnja korolara dokazana. □

Lema 3.2.18. *Neka je $(X, \mathcal{T}, (I_i))$ izračunljiv topološki prostor. Neka je S poluizračunljiv skup u prostoru $(X, \mathcal{T}, (I_i))$ te neka je $m \in \mathbb{N}$. Tada je $S \setminus J_m$ poluizračunljiv skup u $(X, \mathcal{T}, (I_i))$.*

Dokaz. Iz činjenice da je svaki izračunljivi topološki prostor Hausdorffov i teorema 3.2.3 slijedi da je S zatvoren u $(X, \mathcal{T})$. Nadalje, očito je J_m otvoren u $(X, \mathcal{T})$ pa je stoga J_m^C zatvoren.

Imamo $S \setminus J_m = S \cap J_m^C$ pa slijedi da je $S \setminus J_m$ zatvoren u $(X, \mathcal{T})$ kao presjek dva zatvorena skupa (propozicija 3.2.14).

Očito je $S \setminus J_m \subseteq S$ pa iz propozicije 3.2.15 slijedi da je $S \setminus J_m$ kompaktan u $(X, \mathcal{T})$.

Neka je
$$\Gamma = \left\{ j \in \mathbb{N} \mid S \subseteq J_j \right\}.$$
Tada je Γ rekurzivno prebrojiv skup (jer je S poluizračunljiv). Neka je
$$\Omega = \left\{ j \in \mathbb{N} \mid S \setminus J_m \subseteq J_j \right\}.$$
Neka je $f \colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija iz leme 3.2.16. Neka je $j \in \mathbb{N}$. Tada je
$$\begin{aligned} j \in \Omega &\Leftrightarrow S \setminus J_m \subseteq J_j \\ &\Leftrightarrow S \subseteq J_j \cup J_m \\ &\Leftrightarrow S \subseteq J_{f(j,m)} \\ &\Leftrightarrow f(j,m) \in \Gamma. \end{aligned}$$
Neka je $g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa $g(j) = f(j,m)$. Očito je g rekurzivna funkcija. Imamo
$$\begin{aligned} j \in \Omega &\Leftrightarrow f(j,m) \in \Gamma \\ &\Leftrightarrow g(j) \in \Gamma \\ &\Leftrightarrow j \in g^{\leftarrow}(\Gamma). \end{aligned}$$
Stoga je $\Omega = g^{\leftarrow}(\Gamma)$ pa iz propozicije 2.2.37 slijedi da je Ω rekurzivno prebrojiv skup.

Zaključak: $S \setminus J_m$ je poluizračunljiv skup. □

3.3 Poluizračunljive mnogostrukosti s izračunljivim rubovima

Neka je $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je $d \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa
$$d\left((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\right) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}.$$

Može se pokazati da je d metrika na $\mathbb{R}^n$ (vidi [8]).
Za d kažemo da je *euklidska metrika* na $\mathbb{R}^n$. Za topologiju induciranu metrikom d kažemo da je *euklidska topologija* na $\mathbb{R}^n$.

Propozicija 3.3.1. *Neka je $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $a \in \mathbb{R}$ te $i \in \{1, \dots, n\}$. Tada su skupovi*

$$F = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq a\},$$
$$G = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \leq a\}$$

zatvoreni u $\mathbb{R}^n$ (tj. u $(\mathbb{R}^n, d)$, pri čemu je d euklidska metrika na $\mathbb{R}^n$).

Dokaz. Neka je $y \in F^C$, $y = (y_1, \dots, y_n)$. Imamo $y \notin F$ pa je $y_i < a$. Odaberimo $\epsilon > 0$ takav da je $y_i + \epsilon < a$. Tvrdimo da je $K(y, \epsilon) \subseteq F^C$.

Neka je $x \in K(y, \epsilon)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$. Imamo $d(y, x) < \epsilon$ pa slijedi

$$|x_i - y_i| \leq \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} < \epsilon,$$

tj. $|x_i - y_i| < \epsilon$ pa je $x_i - y_i < \epsilon$ što povlači da je

$$x_i < y_i + \epsilon < a.$$

Prema tome $x \notin F$ pa je $x \in F^C$ i time je dokazano da je $K(y, \epsilon) \subseteq F^C$.

Zaključak: F^C je otvoreni skup pa je F zatvoren.

Analogno dobivamo da je G zatvoren skup. □

Korolar 3.3.2. *Neka je $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka su $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ realni brojevi takvi da je $a_i < b_i$ za svaki $i \in \{1, \dots, n\}$. Tada je $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$ zatvoren skup u $\mathbb{R}^n$.*

Dokaz. Za $i \in \{1, \dots, n\}$ neka su

$$F_i = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq a_i\},$$
$$G_i = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \leq b_i\}.$$

Tada je

$$[a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n] = F_1 \cap G_1 \cap F_2 \cap G_2 \cap \ldots \cap F_n \cap G_n.$$

Prema propoziciji 3.3.1 skupovi $F_1, \ldots, F_n, G_1, \ldots, G_n$ su zatvoreni u $\mathbb{R}^n$ pa slijedi tvrdnja korolara. □

Lema 3.3.3. *Neka je* $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ *te neka je* $M \in \mathbb{R}$, $M > 0$. *Tada je skup* $[-M, M]^n$ *omeđen u* $\mathbb{R}^n$.

Dokaz. Neka je $(x_1, \ldots, x_n) \in [-M, M]^n$. Tada za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$ vrijedi $x_i \in [-M, M]$, tj. $|x_i| \leq M$. Stoga je

$$\begin{aligned} d((0, \ldots, 0), (x_1, \ldots, x_n)) &= \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} \\ &\leq \sqrt{M^2 + \ldots + M^2} \\ &= \sqrt{nM^2} \\ &= M\sqrt{n} \\ &< 1 + M\sqrt{n}. \end{aligned}$$

Prema tome

$$[-M, M]^n \subseteq K\left((0, \ldots, 0),\ 1 + M\sqrt{n}\right).$$

Dakle $[-M, M]^n$ je omeđen skup u $\mathbb{R}^n$. □

Ranije smo vidjeli da je u metričkom prostoru svaki kompaktan skup omeđen i zatvoren, no da obratno ne mora vrijediti. U $\mathbb{R}^n$ međutim vrijedi i obrat. Navodimo tu činjenicu bez dokaza (vidi [8]).

Teorem 3.3.4. *Neka je* d *euklidska metrika na* $\mathbb{R}^n$. *Neka je* $K \subseteq \mathbb{R}^n$. *Tada je* K *kompaktan u* $(\mathbb{R}^n, d)$ *ako i samo ako je* K *zatvoren i omeđen u* $(\mathbb{R}^n, d)$. □

Sljedeća tvrdnja će biti važna u dokazu činjenice da poluizračunljivi skupovi koji „lokalno izgledaju kao $\mathbb{R}^n$" moraju biti izračunljivi. Za dokaz ove činjenice vidjeti [6], [5] i [4].

Teorem 3.3.5. *Neka je $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Za $i \in \{1, \dots, n\}$ neka su*

$$A_i = \{(x_1, \dots, x_n) \in [-2, 2]^n \mid x_i = -2\},$$
$$B_i = \{(x_1, \dots, x_n) \in [-2, 2]^n \mid x_i = 2\}.$$

Tada ne postoje otvoreni skupovi $U_1, \dots, U_n$ i $V_1, \dots, V_n$ u $\mathbb{R}^n$ takvi da je

$$U_i \cap B_i = \emptyset, \quad V_i \cap A_i = \emptyset \;\; i \;\; U_i \cap V_i = \emptyset$$

za svaki $i \in \{1, \dots, n\}$ te takvi da je

$$[-2, 2]^n \subseteq U_1 \cup \ldots \cup U_n \cup V_1 \cup \ldots \cup V_n.$$

□

Neka je $(X, \mathcal{T}, (I_i))$ izračunljiv topolološki prostor te neka je $S \subseteq X$. Kažemo da je S *izračunljiv skup* u $(X, \mathcal{T}, (I_i))$ ako je S poluizračunljiv i izračunljivo prebrojiv u $(X, \mathcal{T}, (I_i))$.

Neka je $(X, \mathcal{T}, (I_i))$ izračunljiv topološki prostor te neka su A i S podskupovi od X takvi da je $A \subseteq S$. Kažemo da je skup A *izračunljivo prebrojiv do na S* u $(X, \mathcal{T}, (I_i))$ ako postoji rekurzivno prebrojiv podskup Ω od $\mathbb{N}$ takav da za svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijede sljedeće implikacije:

$$I_i \cap A \neq \emptyset \Rightarrow i \in \Omega$$
$$i \in \Omega \Rightarrow I_i \cap S \neq \emptyset.$$

Uočimo sljedeće: ako je $(X, \mathcal{T}, (I_i))$ izračunljiv topološki prostor te S zatvoren skup u $(X, \mathcal{T})$ onda je S izračunljivo prebrojiv u $(X, \mathcal{T}, (I_i))$ ako i samo ako je S izračunljivo prebrojiv do na S.

Propozicija 3.3.6. *Neka je $(X, \mathcal{T}, (I_i))$ izračunljiv topološki prostor, neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka su $A_1, \dots, A_k$ i S podskupovi od X takvi da su $A_1, \dots, A_k$ izračunljivo prebrojivi do na S. Tada je $A_1 \cup \ldots \cup A_k$ izračunljivo prebrojiv do na S.*

Dokaz. Za svaki $p \in \{1, \dots, k\}$ neka je Ω_p rekurzivno prebrojiv podskup od $\mathbb{N}$ takav da za svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijede implikacije:

$$I_i \cap A_p \neq \emptyset \Rightarrow i \in \Omega_p$$
$$i \in \Omega_p \Rightarrow I_i \cap S \neq \emptyset.$$

Tada očito vrijede implikacije:

$$I_i \cap (A_1 \cup \ldots \cup A_k) \neq \emptyset \Rightarrow i \in \Omega_1 \cup \ldots \cup \Omega_k$$
$$i \in \Omega_1 \cup \ldots \cup \Omega_k \Rightarrow I_i \cap S \neq \emptyset.$$

Sada tvrdnja propozicije slijedi iz činjenice da je skup $\Omega_1 \cup \ldots \cup \Omega_k$ rekurzivno prebrojiv. $\square$

Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, $x \in X$ te $N \subseteq X$. Za N kažemo da je *okolina točke x* u $(X, \mathcal{T})$ ako postoji $U \in \mathcal{T}$ takav da je $x \in U \subseteq N$.

Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te neka je $Y \subseteq X$, $Y \neq \emptyset$. Neka je $\mathcal{S} = \{U \cap Y \mid U \in \mathcal{T}\}$. Tada je $\mathcal{S}$ topologija na Y.

Dokažimo to: Imamo $\emptyset$, $Y \in S$ jer je $\emptyset = \emptyset \cap Y$ i $Y = X \cap Y$. Neka je $(V_\alpha)_{\alpha \in A}$ indeksirana familija elemenata od $\mathcal{S}$. Tada za svaki $\alpha \in A$ možemo odabrati $U_\alpha \in \mathcal{T}$ takav da je $V_\alpha = U_\alpha \cap Y$. Imamo

$$\bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} (U_\alpha \cap Y) = \left(\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \right) \cap Y \in \mathcal{S}$$

jer je $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{T}$.

Ako su V_1, $V_2 \in \mathcal{S}$ onda je $V_1 = U_1 \cap Y$ i $V_2 = U_2 \cap Y$ gdje su U_1, $U_2 \in \mathcal{T}$ pa je

$$V_1 \cap V_2 = (U_1 \cap Y) \cap (U_2 \cap Y) = (U_1 \cap U_2) \cap Y$$

pa je očito $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{S}$.

Za $\mathcal{S}$ kažemo da je *relativna topologija* na Y određena topologijom $\mathcal{T}$, a za $(Y, \mathcal{S})$ kažemo da je *potprostor* topološkog prostora $(X, \mathcal{T})$.

Propozicija 3.3.7. *Neka je (Y, p) potprostor metričkog prostora (X, d). Tada je $(Y, \mathcal{T}_p)$ potprostor topološkog prostora $(X, \mathcal{T}_d)$.*

Dokaz. Treba dokazati da je

$$\mathcal{T}_p = \{U \cap Y \mid U \in \mathcal{T}_d\}$$

no ovo je direktna posljedica propozicije 2.3.4. □

Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, $S \subseteq X$ i $x \in S$. Za N kažemo da je *(otvorena) okolina točke x u S* (s obzirom na $(X, \mathcal{T})$) ako je N (otvorena) okolina točke x u topološkom prostoru $(S, \mathcal{T}_S)$, pri čemu je $\mathcal{T}_S$ relativna topologija na S.

Neka je $(X, \mathcal{T}, (I_i))$ izračunljiv topološki prostor, $S \subseteq X$ te $x \in S$. Kažemo da je skup S *izračunljivo prebrojiv u točki x* (u $(X, \mathcal{T}, (I_i))$) ako postoji okolina N točke x u S takva da je N izračunljivo prebrojiva do na S.

Neka je $(X, \mathcal{T}, (I_i))$ izračunljiv topološki prostor te neka je $S \subseteq X$. Kažemo da je S *lokalno izračunljivo prebrojiv* u $(X, \mathcal{T}, (I_i))$ ako je S izračunljivo prebrojiv u točki x, za svaki $x \in S$.

Uočimo da je svaki izračunljivo prebrojiv skup u $(X, \mathcal{T}, (I_i))$ i lokalno izračunljivo prebrojiv u $(X, \mathcal{T}, (I_i))$.

Propozicija 3.3.8. *Neka je $(X, \mathcal{T}, (I_i))$ izračunljiv topološki prostor. Neka je S lokalno izračunljivo prebrojiv skup u $(X, \mathcal{T}, (I_i))$. Pretpostavimo da je S kompaktan skup u $(X, \mathcal{T})$. Tada je S izračunljivo prebrojiv u $(X, \mathcal{T}, (I_i))$.*

Dokaz. Neka je $x \in S$. Tada postoji okolina N_x od x u S takva da je skup N_x izračunljivo prebrojiv do na S. Neka je $\mathcal{T}_S$ relativna topologija na S. Budući da je N_x okolina od x u $(S, \mathcal{T}_S)$ postoji $V_x \in \mathcal{T}_S$ takav da je $x \in V_x \subseteq N_x$.

Odaberimo $U_x \in \mathcal{T}$ takav da je $V_x = U_x \cap S$. Tada je $\{U_x \mid x \in S\}$ otvoreni pokrivač od S u $(X, \mathcal{T})$ pa postoji $n \in \mathbb{N}$ i $x_0, \ldots, x_n \in S$ takvi da je

$$S \subseteq U_{x_0} \cup \ldots \cup U_{x_n}.$$

Iz ovoga na isti način kao u dokazu propozicije 2.3.5 zaključujemo da je

$$S = N_{x_0} \cup \ldots \cup N_{x_n}.$$

Iz propozicije 3.3.6 slijedi da je S izračunljivo prebrojiv do na S. Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori te $f \colon X \to Y$ bijekcija takva da je f neprekidna s obzirom na topologije $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$ te $f^{-1} \colon Y \to X$ neprekidna s obzirom na topologije $\mathcal{S}$ i $\mathcal{T}$. Tada za f kažemo da je *homeomorfizam* topoloških prostora $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$.

Primjer 3.3.9. *Neka je X neprazan skup. Tada je $id \colon X \to X$ bijekcija neprekidna s obzirom na topologije $\mathcal{P}(X)$ i $\{\emptyset, X\}$ no id^{-1}, tj. id nije neprekidna s obzirom na topologije $\{\emptyset, X\}$ i $\mathcal{P}(X)$ ako X ima barem dva elementa.*

Prema tome, neprekidna bijekcija ne mora biti homeomorfizam.

Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori te $f \colon X \to Y$. Za f kažemo da je *otvoreno preslikavanje* topoloških prostora $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ ako je $f(U) \in S$ za svaki $U \in \mathcal{T}$, tj. ako f otvorene skupove preslikava u otvorene skupove.

Propozicija 3.3.10. *Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori te neka je $f \colon X \to Y$ bijekcija neprekidna s obzirom na topologije $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$. Tada je f homeomorfizam ako i samo ako je f otvoreno preslikavanje.*

Dokaz. Neka je $U \subseteq X$. Tada je

$$f(U) = \left(f^{-1}\right)^{\leftarrow}(U). \tag{3.4}$$

Naime, za svaki $y \in Y$ vrijedi

$$\begin{aligned} y \in f(U) &\Leftrightarrow \exists x \in U \text{ takav da je } y = f(x) \\ &\Leftrightarrow \exists x \in U \text{ takav da je } x = f^{-1}(y) \\ &\Leftrightarrow f^{-1}(y) \in U \\ &\Leftrightarrow y \in \left(f^{-1}\right)^{\leftarrow}(U). \end{aligned}$$

Pretpostavimo da je f homeomorfizam. Tada je f^{-1} neprekidna s obzirom na topologije $\mathcal{S}$ i $\mathcal{T}$ pa za svaki $U \in \mathcal{T}$ vrijedi da je

$$\left(f^{-1}\right)^{\leftarrow}(U) \in \mathcal{S}.$$

Iz ovoga i (3.4) slijedi da je f otvoreno preslikavanje.

Obratno, ako je f otvoreno preslikavanje onda iz (3.4) zaključujemo da za svaki $U \in \mathcal{T}$ vrijedi $\left(f^{-1}\right)^{\leftarrow}(U) \in S$. Stoga je funkcija f^{-1} neprekidna s obzirom na $\mathcal{S}$ i $\mathcal{T}$ pa slijedi da je f homeomorfizam. □

Lema 3.3.11. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, $x \in X$ te N okolina točke x u $(X, \mathcal{T})$. Neka je $\mathcal{T}_N$ relativna topologija na N. Neka je $V \in \mathcal{T}_N$ takva da je $x \in V$. Tada je V okolina točke x u $(X, \mathcal{T})$.*

Dokaz. Imamo $V = N \cap U$ gdje je $U \in \mathcal{T}$. Uočimo da je $x \in U$. S druge strane, budući da je N okolina od x u $(X, \mathcal{T})$ postoji $W \in \mathcal{T}$ takav da je $x \in W \subseteq N$. Iz ovoga slijedi

$$x \in W \cap U \subseteq N \cap U,$$

dakle $x \in W \cap U \subseteq V$ pa tvrdnja slijedi iz činjenice da je $W \cap U$ otvoren skup. □

Propozicija 3.3.12. *Neka su $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{S})$ i $(Z, \mathcal{R})$ topološki prostori takvi da je $(Y, \mathcal{S})$ potprostor od $(Z, \mathcal{R})$. Neka je $f\colon X \to Y$ funkcija. Tada je f neprekidna s obzirom na $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$ ako i samo ako je f kao funkcija sa X u Z neprekidna s obzirom na $\mathcal{T}$ i $\mathcal{R}$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je f neprekidna s obzirom na $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$. Neka je $W \in \mathcal{R}$. Imamo

$$f^{\leftarrow}(W) = f^{\leftarrow}(W \cap Y) \in \mathcal{T}$$

jer je $W \cap Y \in \mathcal{S}$.

Dakle, f je neprekidna kao funkcija s X u Z.

Pretpostavimo da je f neprekidna kao funkcija s X u Z s obzirom na topologije $\mathcal{T}$ i $\mathcal{R}$. Neka je $V \in \mathcal{S}$. Tada postoji $W \in \mathcal{R}$ takav da je $V = W \cap Y$. Vrijedi

$$\begin{aligned} f^{\leftarrow}(V) &= \{x \in X \mid f(x) \in V\} \\ &= \{x \in X \mid f(x) \in W\} \\ &= f^{\leftarrow}(W) \in \mathcal{T}. \end{aligned}$$

Prema tome f je neprekidna s obzirom na T i S. □

Za topološke prostore $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ kažemo da su *homeomorfni* i pišemo $(X, \mathcal{T}) \cong (Y, \mathcal{S})$ ako postoji homeomorfizam između ova dva topološka prostora.

Napomena: Neka je $(Y, \mathcal{S})$ potprostor topološkog prostora $(X, \mathcal{T})$ te neka je $Z \subseteq Y$, $Z \neq \emptyset$. Neka je $\mathcal{S}_Z$ relativna topologija na Z određena sa $\mathcal{S}$ te neka je $\mathcal{T}_Z$ relativna topologija na Z određena sa $\mathcal{T}$. Tada je $\mathcal{S}_Z = \mathcal{T}_Z$. Naime, ako je $V \in \mathcal{S}$ onda je $V = U \cap Y$, gdje je $U \in \mathcal{T}$ pa imamo

$$\begin{aligned} V \cap Z &= (U \cap Y) \cap Z \\ &= U \cap (Y \cap Z) \\ &= U \cap Z. \end{aligned}$$

što pokazuje da je $\mathcal{S}_Z \subseteq \mathcal{T}_Z$.

Obratno, ako je $U \in \mathcal{T}$ onda je

$$\begin{aligned} U \cap Z &= U \cap (Y \cap Z) \\ &= (U \cap Y) \cap Z \in \mathcal{S}_Z \end{aligned}$$

jer je $U \cap Y \in \mathcal{S}$. Prema tome $\mathcal{T}_Z \subseteq \mathcal{S}_Z$.

Propozicija 3.3.13. *Neka su $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{S})$ i $(Z, \mathcal{R})$ topološki prostori, neka je $f \colon X \to Y$ funkcija neprekidna s obzirom na topologije $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$ te neka je $g \colon Y \to Z$ funkcija neprekidna s obzirom na topologije $\mathcal{S}$ i $\mathcal{R}$. Tada je $g \circ f \colon X \to Z$ funkcija neprekidna s obzirom na topologije $\mathcal{T}$ i $\mathcal{R}$.*

Dokaz. Za svaki $W \subseteq Z$ vrijedi

$$(g \circ f)^{\leftarrow}(W) = f^{\leftarrow}\left(g^{\leftarrow}(W)\right).$$

Ako je $W \in \mathcal{R}$ onda je $g^{\leftarrow}(W) \in \mathcal{S}$ pa je $f^{\leftarrow}\left(g^{\leftarrow}(W)\right) \in \mathcal{T}$. Dakle $(g \circ f)^{\leftarrow}(W) \in \mathcal{T}$.

Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Korolar 3.3.14. *Neka su $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{S})$ i $(Z, \mathcal{R})$ topološki prostori te neka su $f\colon X \to Y$ i $g\colon Y \to Z$ homeomorfizmi pripadnih topoloških prostora. Tada je $g \circ f\colon X \to Z$ homeomorfizam.*

Dokaz. Prema prethodnoj propoziciji $g \circ f\colon X \to Z$ je neprekidna funkcija. Očito je $g \circ f$ bijekcija i

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

pa iz činjenice da su f^{-1} i g^{-1} neprekidne funkcije i prethodne propozicije slijedi da je $(g \circ f)^{-1}$ neprekidna funkcija. Dakle $g \circ f$ je homeomorfizam. □

Lema 3.3.15. *Neka je $n \in \mathbb{N}$ te $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Tada je $\langle a, b\rangle^n$ otvoren skup u $\mathbb{R}^n$.*

Dokaz. Za $i \in \{1, \dots, n\}$ neka je

$$F_i = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq b\},$$
$$G_i = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \leq a\}.$$

Prema propoziciji 3.3.1 skupovi F_i i G_i su zatvoreni u $\mathbb{R}^n$ za svaki $i \in \{1, \dots, n\}$. Vrijedi

$$\mathbb{R}^n \setminus \langle a, b\rangle^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \exists i \in \mathbb{N} \text{ takav da je } x_i \leq a \text{ ili } x_i \geq b\}$$

pa je

$$\mathbb{R}^n \setminus \langle a, b\rangle^n = F_1 \cup G_1 \cup F_2 \cup G_2 \cup \ldots \cup F_n \cup G_n.$$

Stoga je $\mathbb{R}^n \setminus \langle a, b\rangle^n$ zatvoren skup pa je $\langle a, b\rangle^n$ otvoren skup. □

Propozicija 3.3.16. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te neka je $(Y, \mathcal{S})$ njegov potprostor. Neka je $F \subseteq Y$. Tada je F zatvoren skup u $(Y, \mathcal{S})$ ako i samo ako postoji zatvoren skup G u $(X, \mathcal{T})$ takav da je $F = G \cap Y$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je F zatvoren u $(Y, \mathcal{S})$. Tada je $Y \setminus F \in \mathcal{S}$ pa postoji $U \in \mathcal{T}$ takav da je $Y \setminus F = U \cap Y$. Tada je $F = (X \setminus U) \cap Y$, a skup $X \setminus U$ je očito zatvoren u $(X, \mathcal{T})$.

Obratno, pretpostavimo da je $F = G \cap Y$, gdje je G zatvoren skup u $(X, \mathcal{T})$. Tada je $Y \setminus F = (X \setminus G) \cap Y$ pa je $X \setminus F \in \mathcal{S}$. Dakle F je zatvoren skup u $(Y, \mathcal{S})$. □

Korolar 3.3.17. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te neka je $(Y, \mathcal{S})$ njegov potprostor takav da je Y zatvoren skup u $(X, \mathcal{T})$. Neka je F zatvoren skup u $(Y, \mathcal{S})$. Tada je F zatvoren skup u $(X, \mathcal{T})$.*

Dokaz. Prema prethodnoj propoziciji postoji zatvoren skup G u $(X, \mathcal{T})$ takav da je $F = G \cap Y$ pa je F zatvoren u $(X, \mathcal{T})$ kao presjek dva zatvorena skupa. □

Napomena: Neka je $(X, \mathcal{T}, (I_i))$ izračunljiv topološki prostor te neka je $\mathcal{S}$ poluizračunljiv skup u $(X, \mathcal{T}, (I_i))$. Tada je $\mathcal{S}$ zatvoren skup u $(X, \mathcal{T})$.
To slijedi iz činjenice da je $\mathcal{S}$ kompaktan u $(X, \mathcal{T})$, činjenice da je $(X, \mathcal{T})$ Hausdorffov prostor i teorema 3.2.3.

Lema 3.3.18. *Neka je $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\mathcal{E}$ euklidska topologija na $\mathbb{R}^n$, $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te $x \in X$. Pretpostavimo da postoji homeomorfizam f topoloških prostora $(\mathbb{R}^n, \mathcal{E})$ i $(X, \mathcal{T})$. Tada postoji homeomorfizam g topoloških prostora $(\mathbb{R}^n, \mathcal{E})$ i $(X, \mathcal{T})$ takav da je*

$$g(0, \dots, 0) = x.$$

Dokaz. Budući da je f surjekcija postoji $a \in \mathbb{R}^n$, $a = (a_1, \dots, a_n)$ takav da je $f(a) = x$. Neka je $\varphi \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ funkcija definirana sa $\varphi(y) = y + a$, za svaki $y \in \mathbb{R}^n$.

Neka je d euklidska metrika. Uočimo da za sve $y, z \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$, $z = (z_1, \ldots, z_n)$ vrijedi

$$\begin{aligned} d(\varphi(y), \varphi(z)) &= d(y + a,\ z + a) \\ &= d((y_1 + a_1, \ldots, y_n + a_n), (z_1 + a_1, \ldots, z_n + a_n)) \\ &= \sqrt{(y_1 - z_1)^2 + \ldots + (y_n - z_n)^2} \\ &= d(y, z). \end{aligned}$$

Dakle, $d(y, z) = d(\varphi(y), \varphi(z))$, za sve $y.z \in \mathbb{R}^n$.

Neka je $y \in \mathbb{R}^n$ te neka je $\epsilon > 0$. Uzmimo $\delta = \epsilon$. Tada za svaki $z \in \mathbb{R}^n$ takav da je $d(z, y) < \delta$ vrijedi $d(\varphi(z), \varphi(y)) < \epsilon$. Ovo znači da je φ neprekidna u točki y, tj. φ je neprekidna funkcija s obzirom na metriku d (tj. metrike d i d). Stoga je φ neprekidna s obzirom na topologiju $\mathcal{T}_d$, tj. topologiju $\mathcal{E}$.

Uočimo da je φ bijekcija te da je

$$\varphi^{-1}(z) = z - a = z + (-a),$$

za svaki $z \in \mathbb{R}^n$ iz čega na isti način zaključujemo da je φ^{-1} neprekidna s obzirom na topologiju $\mathcal{E}$.

Prema tome, φ je homeomorfizam topoloških prostora $(\mathbb{R}^n, \mathcal{E})$ i $(\mathbb{R}^n, \mathcal{E})$.

Definirajmo $g\colon \mathbb{R}^n \to X$ sa $g = f \circ \varphi$. Prema korolaru 3.3.14 g je homeomorfizam topoloških prostora $(\mathbb{R}^n, \mathcal{E})$ i $(X, \mathcal{T})$, a vrijedi

$$g(0, \ldots, 0) = f(\varphi(0)) = f(a) = x.$$

□

Lema 3.3.19. *Neka je $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}^n$. Neka je $a \in \mathbb{R}^n$, $a = (a_1, \ldots, a_n)$ i $r > 0$. Tada postoji $\epsilon > 0$ takav da je*

$$[a_1 - \epsilon, a_1 + \epsilon] \times \ldots \times [a_n - \epsilon, a_n + \epsilon] \subseteq K(a, r).$$

Dokaz. Neka je

$$\epsilon := \frac{r}{2\sqrt{n}}.$$

Tvrdimo da tada vrijedi

$$[a_1 - \epsilon, a_1 + \epsilon] \times \ldots \times [a_n - \epsilon, a_n + \epsilon] \subseteq K(a, r). \tag{3.5}$$

Neka je

$$(x_1, \ldots, x_n) \in [a_1 - \epsilon, a_1 + \epsilon] \times \ldots \times [a_n - \epsilon, a_n + \epsilon].$$

Tada je

$$|x_1 - a_1| \leq \epsilon, \ldots, |x_n - a_n| \leq \epsilon$$

pa je

$$\begin{aligned} d((x_1, \ldots, x_n), (a_1, \ldots, a_n)) &= \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2} \\ &\leq \sqrt{\epsilon^2 + \ldots + \epsilon^2} \\ &= \sqrt{n\epsilon^2} \\ &= \epsilon\sqrt{n} \\ &= \frac{r}{2} \\ &< r. \end{aligned}$$

Stoga je $(x_1, \ldots, x_n) \in K(a, r)$. Prema tome, (3.5) vrijedi. □

Lema 3.3.20. *Postoji rekurzivna funkcija $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $I_i = J_{\varphi(i)}$.*

Dokaz. Neka je

$$S = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid (j)_0 = i \text{ i } \overline{j} = 0\}.$$

Tada je S rekurzivan skup te za svaki $i \in \mathbb{N}$ postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je $(i, j) \in S$ (prema svojstvu koje imaju funkcije σ i η). Stoga postoji rekurzivna funkcija $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $(i, \varphi(i)) \in S$, za svaki $i \in \mathbb{N}$. To znači da je $\overline{\varphi(i)} = 0$ i $(\varphi(i))_0 = i$ pa je $J_{\varphi(i)} = I_i$, za svaki $i \in \mathbb{N}$. □

Lema 3.3.21. *Neka je $(X, \mathcal{T}, (I_i))$ izračunljiv topološki prostor. Neka je $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka su $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_n, E$ kompaktni neprazni skupovi u $(X, \mathcal{T})$ takvi da je $A_i \cap B_i = \emptyset$ za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$. Pretpostavimo da su $d_1, \ldots, d_n, c_1, \ldots, c_n, l \in \mathbb{N}$ takvi da je*

$$A_i \subseteq J_{c_i}, \quad B_i \subseteq J_{d_i}, \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\} \ \text{ i } \ E \subseteq J_l.$$

Tada postoje $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, e \in \mathbb{N}$ *takvi da je*

$$A_i \subseteq J_{a_i}, \ \ B_i \subseteq J_{b_i}, \ \ \forall i \in \{1, \dots, n\} \ \ i \ \ E \subseteq J_e$$

te takvi da je

$$\begin{aligned} &J_{a_i} \textit{ FD–disjunktan sa } J_{b_i}, \\ &J_{a_i} \textit{ FS–sadržan u } J_{c_i}, \\ &J_{b_i} \textit{ FS–sadržan u } J_{d_i}, \ \ \forall i \in \{1, \dots, n\}, \\ &J_e \textit{ FS–sadržan u } J_l. \end{aligned}$$

Dokaz. Prema teoremu 3.2.11 postoje brojevi $a'_i, \dots, a'_n, b'_1, \dots, b'_n, e' \in \mathbb{N}$ takvi da vrijedi

$$A_i \subseteq J_{a'_i}, \ \ B_i \subseteq J_{b'_i}, \ \ \forall i \in \{1, \dots, n\} \ \ \text{i} \ \ E \subseteq J_{l'}$$

te takvi da je $J_{a'_i}$ FD–disjunktan sa $J_{b'_i}$, za svaki $i \in \{1, \dots, n\}$.

Neka je $i \in \{1, \dots, n\}$. Imamo

$$A_i \subseteq J_{a'_i} \cap J_{c_i}$$

pa prema propoziciji 3.2.7 postoji $a_i \in \mathbb{N}$ takav da je

$$A_i \subseteq J_{a_i} \text{ te } J_{a_i} \subseteq_{FS} J_{a'_i} \text{ i } J_{a_i} \subseteq_{FS} J_{c_i}.$$

Iz $B_i \subseteq J_{b'_i} \cap J_{d_i}$ i propozicije 3.2.7 slijedi da postoji $b_i \in \mathbb{N}$ takav da je

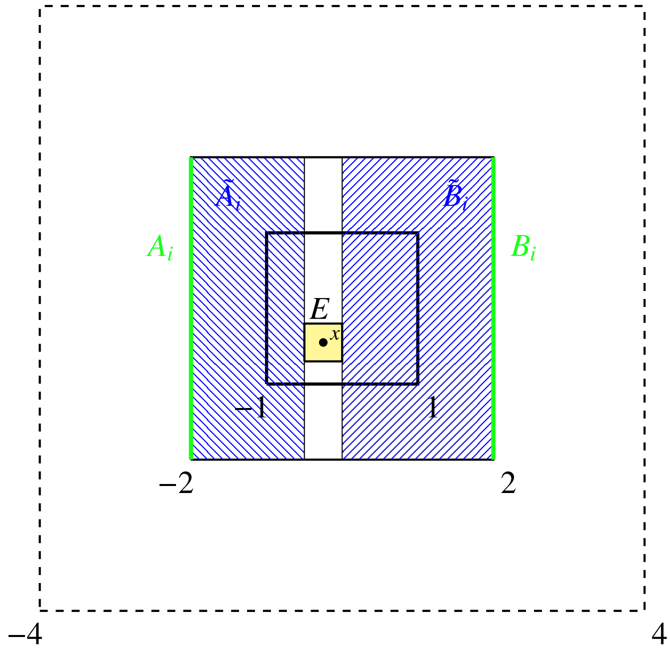
$$B_i \subseteq J_{b_i}, \ \ J_{b_i} \subseteq_{FS} J_{b'_i} \ \ \text{i} \ \ J_{b_i} \subseteq_{FS} J_{d_i}.$$

Iz $E \subseteq J_{e'} \cap J_l$ slijedi da postoji $e \in \mathbb{N}$ takav da je

$$E \subseteq J_e, \ \ J_e \subseteq_{FS} J_{e'} \ \ \text{i} \ \ J_e \subseteq_{FS} J_l.$$

Za svaki $i \in \{1, \dots, n\}$ imamo $J_{a_i} \subseteq_{FS} J_{a'_i}$, $J_{b_i} \subseteq_{FS} J_{b'_i}$ i $J_{a'_i}$ i $J_{b'_i}$ su FD–disjunktni. Stoga su J_{a_i} i J_{b_i} FD–disjunktni. □

Teorem 3.3.22. *Neka je* $(X, \mathcal{T}, (I_i))$ *izračunljiv topološki prostor, neka je* S *poluizračunljiv skup u* $(X, \mathcal{T}, (I_i))$ *te neka je* $x \in S$. *Pretpostavimo da postoji otvorena okolina* N *od* x *u* S *takva da je* $N \cong \mathbb{R}^n$ *za neki* $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. *Tada je skup* S *izračunljivo prebrojiv u točki* x.



Slika 3.2: Vizualizacija dokaza.

Dokaz. Neka je $f\colon \mathbb{R}^n \to N$ homeomorfizam. Prema lemi 3.3.18 možemo pretpostaviti da je $f(0,\ldots,0) = x$.

Neka je $\mathcal{T}_N$ relativna topologija na N određena topologijom $\mathcal{T}$. Neka je $\mathcal{H}$ relativna topologija na $\mathcal{S}$ određena topologijom $\mathcal{T}$. Tada je prema lemi 3.3.11 $\mathcal{T}_N$ relativna topologija na N određena topologijom $\mathcal{H}$.

Budući da je f homeomorfizam te da je skup $\langle -4, 4\rangle^n$ otvoren u $\mathbb{R}^n$ (prema lemi 3.3.15), $f(\langle -4, 4\rangle^n)$ je otvoren u $(N, \mathcal{T}_N)$, tj. $f(\langle -4, 4\rangle^n) \in \mathcal{T}_N$.

Stoga postoji $V \in \mathcal{H}$ takav da je

$$f(\langle -4, 4\rangle^n) = V \cap N.$$

Prema pretpostavci N je otvoren skup u $(S, \mathcal{H})$, tj. $N \in \mathcal{H}$ pa slijedi da je $f(\langle -4, 4\rangle^n) \in \mathcal{H}$. Stoga je $S \setminus f(\langle -4, 4\rangle^n)$ zatvoren skup u $(S, \mathcal{H})$.

Iz prethodne napomene i korolara 3.3.17 slijedi da je $S \setminus f(\langle -4, 4\rangle^n)$ zatvoren skup u $(X, \mathcal{T})$.

Očito je $S \setminus f(\langle -4, 4\rangle^n) \subseteq S$ pa iz propozicije 3.2.15 slijedi da je $S \setminus f(\langle -4, 4\rangle^n)$ kompaktan skup u $(X, \mathcal{T})$.

Funkcija f je neprekidna i kao funkcija $\mathbb{R}^n \to X$ (prema propoziciji 3.3.12), a skup $[-2, 2]^n$ je kompaktan u $\mathbb{R}^n$ jer je zatvoren i omeđen (prema korolaru 3.3.2, lemi 3.3.3 i teoremu 3.3.4) pa iz propozicije 3.2.4 slijedi da je $f([-2, 2]^n)$ kompaktan skup u $(X, \mathcal{T})$.

Dakle, $S \setminus f(\langle -4, 4\rangle^n)$ i $f([-2, 2]^n)$ su kompaktni skupovi, a očito su disjunktni. Iz propozicije 2.4.11 slijedi da postoji $m_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$S \setminus f(\langle -4, 4\rangle^n) \subseteq J_{m_0} \text{ i } J_{m_0} \cap f([-2, 2]^n) = \emptyset.$$

Neka je $S' = S \setminus J_{m_0}$. Prema lemi 3.2.18 skup S' je poluizračunljiv u $(X, \mathcal{T}, (I_i))$, a vrijedi

$$f([-2, 2]^n) \subseteq S' \subseteq f([-4, 4]^n).$$

Za $i \in \{1, \dots, n\}$ neka su

$$\begin{aligned} C_i &= \{(x_1, \dots, x_n) \in [-4, 4]^n \mid x_i \leq 1\} \\ D_i &= \{(x_1, \dots, x_n) \in [-4, 4]^n \mid x_i \geq -1\} \\ A_i &= \{(x_1, \dots, x_n) \in [-2, 2]^n \mid x_i = -2\}, \\ B_i &= \{(x_1, \dots, x_n) \in [-2, 2]^n \mid x_i = 2\}. \end{aligned}$$

Za svaki $i \in \{1, \dots, n\}$ skupovi A_i, B_i, C_i, D_i su zatvoreni, kao presjeci zatvorenih skupova (što dobivamo koristeći propoziciju 3.3.1, korolar 3.3.2 i činjenicu da je presjek zatvorenih skupova zatvoren skup) i omeđeni (što je posljedica leme 3.3.3), stoga su i kompaktni. Prema tome, skupovi $f(A_i)$, $f(B_i)$, $f(C_i)$, $f(D_i)$ su također kompaktni u $(X, \mathcal{T})$.

Nadalje, za svaki $i \in \{1, \dots, n\}$ vrijedi da su skupovi $f(A_i)$, $f(D_i)$ disjunktni (jer su A_i i D_i disjunktni) te da su $f(B_i)$ i $f(C_i)$ disjunktni (jer su B_i i C_i disjunktni).

Iz propozicije 2.4.11 slijedi da za svaki $i \in \{1, \dots, n\}$ postoje brojevi d_i, $c_i \in \mathbb{N}$ takvi da je

$$f(C_i) \subseteq J_{c_i} \text{ i } J_{c_i} \cap f(B_i) = \emptyset, \tag{3.6}$$

$$f(D_i) \subseteq J_{d_i} \text{ i } J_{d_i} \cap f(A_i) = \emptyset. \tag{3.7}$$

Neka je $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija takva da je $I_i = J_{\varphi(i)}$, za svaki $i \in \mathbb{N}$ (lema 3.3.20). Pretpostavimo da je $l \in \mathbb{N}$ takav da je

$$I_l \cap f([-1, 1]^n) \neq \emptyset$$

Tada postoji $v \in [-1,1]^n$, $v = (v_1, \ldots, v_n)$ takav da je $f(v) \in I_l$. Iz ovoga slijedi da je $v \in f^{\leftarrow}(I_l)$ pa budući da je $f^{\leftarrow}(I_l)$ otvoren skup u $\mathbb{R}^n$, postoji $r > 0$ takav da je

$$K(v,r) \subseteq f^{\leftarrow}(I_l).$$

Prema lemi 3.3.19 postoji $\epsilon > 0$ takav da je

$$[v_1 - \epsilon, v_1 + \epsilon] \times \ldots \times [v_n - \epsilon, v_n + \epsilon] \subseteq K(v,r).$$

Možemo pretpostaviti da je $\epsilon < 1$.
Definirajmo

$$E = [v_1 - \epsilon, v_1 + \epsilon] \times \ldots \times [v_n - \epsilon, v_n + \epsilon].$$

Imamo

$$E \subseteq K(v,r) \subseteq f^{\leftarrow}(I_l),$$

tj. $E \subseteq f^{\leftarrow}(I_l)$ pa je $f(E) \subseteq I_l$. Za $i \in \{1, \ldots, n\}$ definirajmo skupove

$$\begin{aligned} \tilde{A}_i &= \{(x_1, \ldots, x_n) \in [-4,4]^n \mid x_i \leq v_i - \epsilon\}, \\ \tilde{B}_i &= \{(x_1, \ldots, x_n) \in [-4,4]^n \mid x_i \geq v_i + \epsilon\}. \end{aligned}$$

Uočimo da je

$$\tilde{A}_i \subseteq C_i \;\text{ i }\; \tilde{B}_i \subseteq D_i, \tag{3.8}$$

za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$. Nadalje, vrijedi

$$\tilde{A}_1 \cup \tilde{B}_1 \cup \ldots \cup \tilde{A}_n \cup \tilde{B}_n \cup E = [-4,4]^n$$

pa je

$$f(\tilde{A}_1) \cup f(\tilde{B}_1) \cup \ldots \cup f(\tilde{A}_n) \cup f(\tilde{B}_n) \cup f(E) = f\left([-4,4]^n\right). \tag{3.9}$$

Za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$ vrijedi $\tilde{A}_i \cap \tilde{B}_i = \emptyset$ pa je $f(\tilde{A}_i) \cap f(\tilde{B}_i) = \emptyset$.

Prema (3.8) vrijedi $f(\tilde{A}_i) \subseteq f(C_i)$ i $f(\tilde{B}_i) \subseteq f(D_i)$ pa iz (3.6) i (3.7) slijedi

$$f(\tilde{A}_i) \subseteq J_{c_i} \;\text{ i }\; f(\tilde{B}_i) \subseteq J_{d_i},$$

za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$.
Iz $f(E) \subseteq I_l$ slijedi $f(E) \subseteq J_{\varphi(l)}$.

Uočimo da su $\tilde{A}_1, \ldots, \tilde{A}_n, \tilde{B}_1, \ldots, \tilde{B}_n, E$ neprazni kompaktni skupovi u $\mathbb{R}^n$, stoga su $f(\tilde{A}_1), \ldots, f(\tilde{A}_n), f(\tilde{B}_1), \ldots, f(\tilde{B}_n), f(E)$ neprazni kompaktni skupovi u $(X, \mathcal{T})$.

Prema lemi 3.3.21 postoje brojevi $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, e \in \mathbb{N}$ takvi da za svaki $i \in \{1, \dots, n\}$ vrijedi

$$f(\tilde{A}_i) \subseteq J_{a_i}, \quad f(\tilde{B}_i) \subseteq J_{b_i}, \quad f(E) \subseteq J_e,$$
$$J_{a_i} \subseteq_{FS} J_{c_i}, \quad J_{b_i} \subseteq_{FS} J_{d_i}, \quad J_e \subseteq_{FS} J_{\varphi(l)} \ \text{ i } \ J_{a_i} \text{ FD–disjunktan sa } J_{b_i}.$$

Iz $S' \subseteq f([-4,4]^n)$ i (3.9) slijedi

$$S' \subseteq J_{a_1} \cup J_{b_1} \cup \ldots \cup J_{a_n} \cup J_{b_n} \cup J_e.$$

Dakle dokazali smo sljedeće: ako je $l \in \mathbb{N}$ takav da je $I_l \cap f([-1,1]^n) \neq \emptyset$ onda postoje $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, e \in \mathbb{N}$ takvi da je

1) $J_{a_i} \subseteq_{FS} J_{c_i}, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$

2) $J_{b_i} \subseteq_{FS} J_{d_i}, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$

3) $J_e \subseteq_{FS} J_{\varphi(l)}$

4) J_{a_i} FD–disjunktan sa $J_{b_i}, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$

5) $S' \subseteq J_{a_1} \cup J_{b_1} \cup \ldots \cup J_{a_n} \cup J_{b_n} \cup J_e$.

Neka je Γ skup svih $(l, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, e) \in \mathbb{N}^{2n+2}$ takvih da vrijedi 1) - 5). Nadalje, neka je Ω skup svih $l \in \mathbb{N}$ za koje postoje $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, e \in \mathbb{N}$ takvih da je $(l, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, e) \in \Gamma$. Uočimo, ako je $l \in \mathbb{N}$ takav da je $I_l \cap f([-1,1]^n) \neq \emptyset$ onda je $l \in \Omega$.

Pretpostavimo sada da je $l \in \Omega$. Dokažimo da je $I_l \cap f([-2,2]^n) \neq \emptyset$. Budući da je $l \in \Omega$ postoje $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, e \in \mathbb{N}$ takvi da je $(l, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, e) \in \Gamma$. Dakle, za brojeve $l, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, e$ vrijedi 1) - 5).

Znamo da je $f([-2,2]^n) \subseteq S'$ pa je prema 5)

$$f([-2,2]^n) \subseteq J_{a_1} \cup J_{b_1} \cup \ldots \cup J_{a_n} \cup J_{b_n} \cup J_e.$$

Slijedi da je

$$[-2,2] \subseteq f^{\leftarrow}\left(J_{a_1} \cup J_{b_1} \cup \ldots \cup J_{a_n} \cup J_{b_n} \cup J_e\right),$$

tj.

$$[-2,2]^n \subseteq f^{\leftarrow}(J_{a_1}) \cup f^{\leftarrow}(J_{b_1}) \cup \ldots \cup f^{\leftarrow}(J_{a_n}) \cup f^{\leftarrow}(J_{b_n}) \cup f^{\leftarrow}(J_e). \tag{3.10}$$

Neka je $i \in \{1, \dots, n\}$, prema 1) vrijedi $J_{a_i} \subseteq J_{d_i}$ pa iz (3.6) zaključujemo da je $J_{a_i} \cap f(B_i) = \emptyset$. Stoga je

$$f^{\leftarrow}(J_{a_i}) \cap B_i = \emptyset. \tag{3.11}$$

Analogno iz 2) i (3.7) zaključujemo da je

$$f^{\leftarrow}(J_{b_i}) \cap A_i = \emptyset. \tag{3.12}$$

Iz 4) slijedi da je

$$f^{\leftarrow}(J_{a_i}) \cap f^{\leftarrow}(J_{b_i}) = \emptyset. \tag{3.13}$$

Uočimo da su skupovi $f^{\leftarrow}(J_{a_1}), \ldots, f^{\leftarrow}(J_{a_n}), f^{\leftarrow}(J_{b_1}), \ldots, f^{\leftarrow}(J_{b_n})$ otvoreni u $\mathbb{R}^n$.

Iz (3.11), (3.12) i (3.13) i teorema 3.3.4 slijedi da

$$[-2, 2]^n \nsubseteq f^{\leftarrow}(J_{a_1}) \cup f^{\leftarrow}(J_{b_1}) \cup \ldots \cup f^{\leftarrow}(J_{a_n}) \cup f^{\leftarrow}(J_{b_n}).$$

Iz ovoga i (3.10) slijedi da

$$[-2, 2]^n \cap f^{\leftarrow}(J_e) \neq \emptyset.$$

Ovo znači da je $f([-2, 2]^n) \cap J_e \neq \emptyset$ pa iz 3) zaključujemo da $f([-2, 2]^n) \cap J_{\varphi(l)} \neq \emptyset$, tj. $f([-2, 2]^n) \cap I_l \neq \emptyset$.

Dakle, $I_l \cap f([-2, 2]^n) \neq \emptyset$ pa je $I_l \cap S \neq \emptyset$.

Rezimirajmo, za svaki $l \in \mathbb{N}$ vrijede sljedeće implikacije:

i) $I_l \cap f([-1, 1]^n) \neq \emptyset \Rightarrow l \in \Omega$

ii) $l \in \Omega \Rightarrow I_l \cap S \neq \emptyset$.

Uočimo da je $f([-1, 1]^n)$ okolina točke x u S. Naime, $f(\langle -1, 1\rangle^n)$ je otvoren skup u $(N, \mathcal{T}_N)$, a očito je $x \in f(\langle -1, 1\rangle^n)$. S druge strane, N je okolina od x u $(S, \mathcal{H})$. Nadalje, $\mathcal{T}_N$ je relativna topologija na N s obzirom na $\mathcal{H}$. Iz svega ovoga i leme 3.3.11 slijedi da je $f(\langle -1, 1\rangle^n)$ okolina od x u S. Stoga je $f([-1, 1]^n)$ okolina od x u S.

Ostaje još dokazati da je Ω rekurzivno prebrojiv skup. Naime, tada će iz *i*) i *ii*) slijediti da je $f([-1, 1]^n)$ izračunljivo prebrojiv do na S, a budući da je $f([-1, 1]^n)$ okolina od x u S to će značiti da je S izračunljivo prebrojiv u točki x.

U tu svrhu, prema definiciji skupa Ω i teoremu o projekciji, dovoljno je dokazati da je Γ rekurzivno prebrojiv.

Vrijedi

$$\Gamma = \Gamma_1 \cap \ldots \cap \Gamma_5,$$

gdje je, za $k = 1, \dots, 5$, skup Γ_k definiran kao skup svih $(l, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, e) \in \mathbb{N}^{2n+2}$ takvih da vrijedi svojstvo k). Stoga je dovoljno dokazati da su $\Gamma_1, \dots, \Gamma_5$ rekurzivno prebrojivi skupovi.

Neka je

$$W = \left\{(u, v) \in \mathbb{N}^2 \mid J_u \subseteq_{FS} J_v\right\}.$$

Skup W je rekurzivno prebrojiv prema propoziciji 3.2.13.

Za $i \in \{1, \dots, n\}$ neka je

$$T_i = \{(l, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, e) \mid J_{a_i} \subseteq_{FS} J_{c_i}\}$$

te neka je $\psi_i \colon \mathbb{N}^{2n+2} \to \mathbb{N}^2$ funkcija definirana sa $\psi_i(l, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, e) = (a_i, c_i)$.

Očito je ψ_i rekurzivna funkcija te vrijedi

$$\begin{aligned} T_i &= \{(l, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, e) \mid (a_i, c_i) \in W\} \\ &= \left\{z \in \mathbb{N}^{2n+2} \mid \psi_i(z) \in W\right\} \\ &= \psi_i^{\leftarrow}(W), \end{aligned}$$

dakle

$$T_i = \psi_i^{\leftarrow}(W).$$

Iz propozicije 2.2.37 slijedi da je T_i rekurzivno prebrojiv skup.

S obzirom da je $\Gamma_1 = T_1 \cap \ldots \cap T_n$, vrijedi da je Γ_1 rekurzivno prebrojiv skup.

Analogno zaključujemo da su Γ_2 i Γ_3 rekurzivno prebrojivi skupovi.

Koristeći da je skup $\{(u, v) \in \mathbb{N}^2 \mid J_u \text{ i } J_v \text{ FD–disjunktni}\}$ rekurzivno prebrojiv, što slijedi iz propozicije 3.2.13, na isti način dobivamo da je Γ_4 rekurzivno prebrojiv skup.

Prema korolaru 3.2.17 postoji rekurzivna funkcija $\psi' \colon \mathbb{N}^{2n+1} \to \mathbb{N}$ takva da je

$$J_{a_1} \cup J_{b_1} \cup \ldots \cup J_{a_n} \cup J_{b_n} \cup J_e = J_{\psi'(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, e)}$$

za sve $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, e \in \mathbb{N}$.

Definirajmo $\psi \colon \mathbb{N}^{2n+2} \to \mathbb{N}$ sa

$$\psi(l, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, e) = \psi'(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, e).$$

Očito je ψ rekurzivna funkcija.

Neka je

$$W = \left\{ j \in \mathbb{N} \mid S' \subseteq J_j \right\}.$$

Skup W je rekurzivno prebrojiv jer je skup S' poluizračunljiv. Imamo

$$\begin{aligned}
\Gamma_5 &= \left\{ (l, a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n, e) \in \mathbb{N}^{2n+2} \mid S' \subseteq J_{a_1} \cup J_{b_1} \cup \ldots \cup J_{a_n} \cup J_{b_n} \cup J_e \right\} \\
&= \left\{ (l, a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n, e) \in \mathbb{N}^{2n+2} \mid S' \subseteq J_{\psi'(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n, e)} \right\} \\
&= \left\{ (l, a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n, e) \in \mathbb{N}^{2n+2} \mid S' \subseteq J_{\psi(l, a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n, e)} \right\} \\
&= \left\{ z \in \mathbb{N}^{2n+2} \mid S' \subseteq J_{\psi(z)} \right\} \\
&= \left\{ z \in \mathbb{N}^{2n+2} \mid \psi(z) \in W \right\} \\
&= \psi^{\leftarrow}(W).
\end{aligned}$$

Dakle, $\Gamma_5 = \psi^{\leftarrow}(W)$ pa slijedi da je Γ_5 rekurzivno prebrojiv skup. Time smo dokazali da je Γ rekurzivno prebrojiv skup pa slijedi tvrdnja teorema.

□

Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te neka je $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Kažemo da je $(X, \mathcal{T})$ *n–mnogostrukost* ako za svaku točku $x \in X$ postoji otvorena okolina N od x u $(X, \mathcal{T})$ takva da je $N \cong \mathbb{R}^n$.

Primjer 3.3.23. *Neka je $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Tada je $\mathbb{R}^n$ (s euklidskom topologijom) očito n–mnogostrukost.*

Teorem 3.3.24. *Neka je $(X, \mathcal{T}, (I_i))$ izračunljiv topološki prostor te neka je S poluizračunljiv skup u tom prostoru. Pretpostavimo da je S, kao potprostor od $(X, \mathcal{T})$, n–mnogostrukost za neki $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Tada je S izračunljiv skup u $(X, \mathcal{T}, (I_i))$.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{H}$ relativna topologija na S s obzirom na $\mathcal{T}$. Imamo dakle da je $(S, \mathcal{H})$ n–mnogostrukost.

Stoga za svaki $x \in X$ postoji otvorena okolina N od x u $(S, \mathcal{H})$ takva da je $N \cong \mathbb{R}^n$. Pri tome, na N gledamo kao na potprostor od $(S, \mathcal{H})$. No, znamo da je to isto kao kada N

gledamo kao potprostor od $(X, \mathcal{T})$.

Iz teorema 3.3.22 slijedi da je skup S izračunljivo prebrojiv u točki x. Zaključujemo da je S lokalno izračunljivo prebrojiv.

Skup S je kompaktan jer je poluizračunljiv pa iz propozicije 3.3.8 slijedi da je S izračunljivo prebrojiv u $(X, \mathcal{T}, (I_i))$. Stoga je S izračunljiv skup. □

Za $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ neka je
$$\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\}$$
te neka je
$$\mathrm{Bd}\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\}\,.$$
Očito je $\mathrm{Bd}\mathbb{H}^n \subseteq \mathbb{H}^n$.

Neka je $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, neka je S neprazan podskup od $\mathbb{R}^n$, neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}^n$ te neka je $p\colon S \times S \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa $p(x, y) = d(x, y)$ za sve $x, y \in S$ (tj. $p = d_{|S \times S}$).
Tada je p metrika na S te je (S, p) potprostor metričkog prostora $(\mathbb{R}^n, d)$. Za p kažemo da je *euklidska metrika* na S.
Za topologiju $\mathcal{T}_p$ kažemo da je *euklidska topologija* na S. Iz propozicije 3.3.7 slijedi: ako je $\mathcal{E}'$ euklidska topologija na S te $\mathcal{E}$ euklidska topologija na $\mathbb{R}^n$ onda je $(S, \mathcal{E}')$ potprostor topološkog prostora $(\mathbb{R}^n, \mathcal{E})$.

Lema 3.3.25. *Neka je $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\mathcal{E}$ euklidska topologija na $\mathbb{H}^n$, $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te $x \in X$. Pretpostavimo da postoji homeomorfizam f topoloških prostora $(\mathbb{H}^n, \mathcal{E})$ i $(X, \mathcal{T})$ takav da je $x \in f(\mathrm{Bd}\mathbb{H}^n)$. Tada postoji homeomorfizam g topoloških prostora $(\mathbb{H}^n, \mathcal{E})$ i $(X, \mathcal{T})$ takav da je $g(0, \dots, 0) = x$ te takav da je $g(\mathrm{Bd}\mathbb{H}^n) = f(\mathrm{Bd}\mathbb{H}^n)$.*

Dokaz. Budući da je $x \in f(\mathrm{Bd}\mathbb{H}^n)$ postoji $a \in \mathrm{Bd}\mathbb{H}^n$ takav da je $x = f(a)$.

Definirajmo funkciju $\varphi\colon \mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^n$ sa
$$\varphi(y) = y + a,$$
za svaki $y \in \mathbb{H}^n$. Funkcija φ je dobro definirana, tj. za svaki $y \in \mathbb{H}^n$ vrijedi $y + a \in \mathbb{H}^n$, jer je zadnja koordinata točke a jednaka nula.

Neka je p euklidska metrika na $\mathbb{H}^n$. Na isti način kao u dokazu leme 3.3.18 dobivamo da je φ neprekidna funkcija s obzirom na metriku p, stoga je φ neprekidna i s obzirom na topologiju $\mathcal{T}_p$, tj. topologiju $\mathcal{E}$.

Nadalje, očito je φ bijekcija te je $\varphi^{-1}\colon \mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^n$ funkcija takva da je $\varphi^{-1}(y) = y - a$, za svaki $y \in \mathbb{H}^n$ pa slijedi da je φ^{-1} neprekidna funkcija. Prema tome, φ je homeomorfizam topoloških prostora $(\mathbb{H}^n, \mathcal{E})$ i $(\mathbb{H}^n, \mathcal{E})$. Uočimo da je $\varphi(\mathrm{Bd}\mathbb{H}^n) = \mathrm{Bd}\mathbb{H}^n$.

Neka je $g\colon \mathbb{H}^n \to X$ funkcija definirana sa $g = f \circ \varphi$. Tada je g homeomorfizam topoloških prostora $(\mathbb{H}^n, \mathcal{E})$ i $(X, \mathcal{T})$ te vrijedi

$$g(0, \dots, 0) = f(\varphi(0, \dots, 0)) = f(a) = x.$$

Nadalje,

$$g(\mathrm{Bd}\mathbb{H}^n) = (f \circ \varphi)(\mathrm{Bd}\mathbb{H}^n) = f(\varphi(\mathrm{Bd}\mathbb{H}^n)) = f(\mathrm{Bd}\mathbb{H}^n).$$

□

Lema 3.3.26. *Neka je $(Y, \mathcal{S})$ potprostor topološkog prostora $(X, \mathcal{T})$. Pretpostavimo da je $K \subseteq Y$ te da je K kompaktan skup u $(X, \mathcal{T})$. Tada je K kompaktan skup u $(Y, \mathcal{S})$.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{V}$ otvoreni pokrivač od K u $(Y, \mathcal{S})$. Za svaki $V \in \mathcal{V}$ vrijedi $V \in \mathcal{S}$ pa postoji $U_V \in \mathcal{T}$ takav da je $V = U_V \cap Y$.

Neka je $\mathcal{U} = \{U_V \mid V \in \mathcal{V}\}$. Tada je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač od K u $(X, \mathcal{T})$.

Budući da je K kompaktan skup u $(X, \mathcal{T})$ postoji $n \in \mathbb{N}$ i $V_0, \dots, V_n \in \mathcal{V}$ takvi da je

$$K \subseteq U_{V_0} \cup \dots \cup U_{V_n}.$$

Tada je

$$K \subseteq V_0 \cup \dots \cup V_n.$$

Naime, ako je $x \in K$ onda je $x \in U_{V_i}$ za neki $i \in \{0, \dots, n\}$. Imamo $K \subseteq Y$ pa je $x \in Y$, tj.

$$x \in U_{V_i} \cap Y = V_i.$$

Prema tome, $x \in V_i$. Dakle, $K \subseteq V_0 \cup \dots \cup V_n$. Time smo dokazali da je K kompaktan skup u $(Y, \mathcal{S})$. □

Propozicija 3.3.27. *Neka je* $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. *Za* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *neka je*

$$B_i = \{(x_1, \ldots, x_n) \in [-2, 2]^{n-1} \times [0, 2] \mid x_i = 2\}.$$

Za $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ *neka je*

$$A_i = \{(x_1, \ldots, x_n) \in [-2, 2]^{n-1} \times [0, 2] \mid x_i = -2\}$$

te neka je

$$A_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in [-2, 2]^{n-1} \times [0, 2] \mid x_n = 0\}.$$

Tada ne postoje otvoreni skupovi $U_1, \ldots, U_n, V_1, \ldots, V_n$ *u* $\mathbb{H}^n$ *takvi da je*

$$U_i \cap B_i = \emptyset, \quad V_i \cap A_i = \emptyset \;\; i \;\; U_i \cap V_i = \emptyset \tag{3.14}$$

za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$ *te takvi da je*

$$[-2, 2]^{n-1} \times [0, 2] \subseteq U_1 \cup \ldots \cup U_n \cup V_1 \cup \ldots \cup V_n. \tag{3.15}$$

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. pretpostavimo da postoje skupovi $U_1, \ldots, U_n, V_1, \ldots, V_n$ s navedenim svojstvom. Definirajmo funkciju $\gamma \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{H}^n$ sa

$$\gamma(z_1, \ldots, z_n) = \begin{cases} (z_1, \ldots, z_{n-1}, \frac{z_n+2}{2}), & z_n \geq -2 \\ (z_1, \ldots, z_{n-1}, 0), & z_n \leq -2. \end{cases}$$

Neka je $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{2}, & x \geq -2 \\ 0, & x \leq -2. \end{cases}$$

Neka su $x, y \in \mathbb{R}$. Tvrdimo da je

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|. \tag{3.16}$$

Imamo nekoliko slučajeva:

<u>Slučaj 1.</u> Neka su $x, y \leq -2$. Tada je $f(x) - f(y) = 0$ pa je očito da (3.16) vrijedi.

Slučaj 2. Neka su $x, y \geq -2$. Tada je

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left|\frac{x+2}{2} - \frac{y+2}{2}\right| \\ &= \left|\frac{x-y}{2}\right| \\ &\leq |x-y|\,. \end{aligned}$$

Slučaj 3. Neka je $y \leq -2 \leq x$. Iz ovih nejednakosti odmah slijedi $x - (-2) \leq x - y$, tj. $x + 2 \leq x - y$ pa je

$$\frac{x}{2} + 1 \leq \frac{x-y}{2} = \left|\frac{x-y}{2}\right|.$$

Imamo

$$|f(x) - f(y)| = \left|\frac{x+2}{2}\right| = \frac{x+2}{2} = \frac{x}{2} + 1 \leq \left|\frac{x-y}{2}\right| \leq |x-y|\,.$$

Slučaj 4. Neka je $x \leq -2 \leq y$. Analogno kao u slučaju 3. dobivamo da vrijedi (3.16).

Neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}^n$ te p euklidska metrika na $\mathbb{H}^n$. Neka su $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n)$ i $y = (y_1, \dots, y_n)$. Imamo

$$\begin{aligned} p(\gamma(x), \gamma(y)) &= p\big((x_1, \dots, x_{n-1}, f(x_n)),\ (y_1, \dots, y_{n-1}, f(y_n))\big) \\ &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_{n-1} - y_{n-1})^2 + (f(x_n) - f(y_n))^2} \\ &\leq \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_{n-1} - y_{n-1})^2 + (x_n - y_n)^2} \\ &= d(x, y). \end{aligned}$$

Dakle, $p(\gamma(x), \gamma(y)) \leq d(x, y)$, za sve $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Općenito, ako su (X, q) i (Y, q') metrički prostori te $g\colon X \to Y$ funkcija takva da je

$$q'(g(x), g(y)) \leq q(x, y), \quad \forall x, y \in X$$

onda je funkcija g neprekidna s obzirom na metrike q i q'. Stoga je γ neprekidna funkcija.

Lako se provjeri da je

$$\gamma([-2, 2]^n) = [-2, 2]^{n-1} \times [0, 2].$$

Iz ovoga i (3.15) slijedi

$$\begin{aligned} [-2, 2]^n &\subseteq \gamma^{\leftarrow}([-2, 2]^{n-1} \times [0, 2]) \\ &\subseteq \gamma^{\leftarrow}(U_1 \cup \ldots \cup U_n \cup V_1 \cup \ldots \cup V_n) \end{aligned}$$

pa je

$$[-2,2]^n \subseteq \gamma^{\leftarrow}(U_1) \cup \ldots \cup \gamma^{\leftarrow}(U_n) \cup \gamma^{\leftarrow}(V_1) \cup \ldots \cup \gamma^{\leftarrow}(V_n). \tag{3.17}$$

Iz (3.14) slijedi da za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$ vrijedi

$$\gamma^{\leftarrow}(U_i) \cap \gamma^{\leftarrow}(V_i) = \emptyset. \tag{3.18}$$

Za $i \in \{1, \ldots, n\}$ neka su

$$\tilde{A}_i = \{(x_1, \ldots, x_n) \in [-2,2]^n \mid x_i = -2\}$$
$$\tilde{B}_i = \{(x_1, \ldots, x_n) \in [-2,2]^n \mid x_i = 2\}.$$

Uočimo da za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$ vrijedi

$$\gamma(\tilde{B}_i) \subseteq B_i \ \ i \ \ \gamma(\tilde{A}_i) \subseteq A_i.$$

Stoga za $i \in \{1, \ldots, n\}$ iz $U_i \cap B_i = \emptyset$ slijedi $U_i \cap \gamma(\tilde{B}_i) = \emptyset$ pa je

$$\gamma^{\leftarrow}(U_i) \cap \tilde{B}_i = \emptyset \tag{3.19}$$

te također iz $V_i \cap A_i = \emptyset$ slijedi $V_i \cap \gamma(\tilde{A}_i) = \emptyset$ pa je

$$\gamma^{\leftarrow}(V_i) \cap \tilde{A}_i = \emptyset. \tag{3.20}$$

Budući da je γ neprekidna, skupovi $\gamma^{\leftarrow}(U_1), \ldots, \gamma^{\leftarrow}(U_n), \gamma^{\leftarrow}(V_1), \ldots, \gamma^{\leftarrow}(V_n)$ su otvoreni u $\mathbb{R}^n$. Ovo je zajedno sa (3.17), (3.18), (3.19) i (3.20) u kontradikciji s teoremom 3.3.5. Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Napomena: Ako je $(Y, \mathcal{S})$ potprostor topološkog prostora $(X, \mathcal{T})$ takav da je Y otvoren skup u $(X, \mathcal{T})$, onda je svaki otvoren skup u $(Y, \mathcal{S})$ ujedno otvoren i u $(X, \mathcal{T})$. Naime, ako je V otvoren u $(Y, \mathcal{S})$ onda je $V = Y \cap U$, gdje je $U \in \mathcal{T}$ pa je V otvoren u $(X, \mathcal{T})$ kao presjek dva otvorena skupa.

Teorem 3.3.28. *Neka je $(X, \mathcal{T}, (I_i))$ izračunljiv topološki prostor. Neka su S i T poluizračunljivi skupovi u $(X, \mathcal{T}, (I_i))$ takvi da je $T \subseteq S$ te neka je $x \in S$. Pretpostavimo da postoji otvorena okolina N od x u S te homeomorfizam $f\colon \mathbb{H}^n \to N$, za neki $n \in \mathbb{N}$ takav da je $x \in f(\mathrm{Bd}\mathbb{H}^n)$ i $f(\mathrm{Bd}\mathbb{H}^n) = N \cap T$. Tada je S izračunljivo prebrojiv u točki x.*

Dokaz. Prema lemi 3.3.25 možemo pretpostaviti da je $x = f(0, \dots, 0)$. Neka su $\mathcal{T}_N$ i $\mathcal{H}$ relativne topologije na N i S određene topologijom $\mathcal{T}$.

Skup $\langle -4, 4\rangle^{n-1} \times [0, 4\rangle$ je otvoren u $\mathbb{H}^n$ jer je

$$\langle -4, 4\rangle^{n-1} \times [0, 4\rangle = \langle -4, 4\rangle^n \cap \mathbb{H}^n,$$

a topološki prostor $\mathbb{H}^n$ je potprostor topološkog prostora $\mathbb{R}^n$. Stoga je $f(\langle -4, 4\rangle^{n-1} \times [0, 4\rangle)$ otvoren u $(N, \mathcal{T}_N)$. Budući da je N otvoren u $(S, \mathcal{H})$ imamo da je $f(\langle -4, 4\rangle^{n-1} \times [0, 4\rangle)$ otvoren u $(S, \mathcal{H})$, a to povlači da je $S \setminus f(\langle -4, 4\rangle^{n-1} \times [0, 4\rangle)$ zatvoren skup u $(S, \mathcal{H})$. Stoga je $S \setminus f(\langle -4, 4\rangle^{n-1} \times [0, 4\rangle)$ zatvoren skup u $(X, \mathcal{T})$. No, očito je ovaj skup podskup od S pa iz propozicije 3.2.15 slijedi da je $S \setminus f(\langle -4, 4\rangle^{n-1} \times [0, 4\rangle)$ kompaktan skup u $(X, \mathcal{T})$.

Skup $[-2, 2]^{n-1} \times [0, 2]$ je kompaktan u $\mathbb{R}^n$ jer je zatvoren i omeđen. Stoga je kompaktan i u $\mathbb{H}^n$ (lema 3.3.26). Iz propozicije 3.2.4 i činjenice da je f neprekidna i kao funkcija sa $\mathbb{H}^n \to X$, slijedi da je $f([-2, 2]^{n-1} \times [0, 2])$ kompaktan skup u $(X, \mathcal{T})$.

Budući da su $S \setminus f(\langle -4, 4\rangle^{n-1} \times [0, 4\rangle)$ i $f([-2, 2]^{n-1} \times [0, 2])$ kompaktni disjunktni skupovi, prema propoziciji 2.4.11 postoji $m_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$S \setminus f(\langle -4, 4\rangle^{n-1} \times [0, 4\rangle) \subseteq J_{m_0} \text{ i } J_{m_0} \cap f([-2, 2]^{n-1} \times [0, 2]) = \emptyset. \tag{3.21}$$

Neka je

$$S' = S \setminus J_{m_0},$$
$$T' = T \setminus J_{m_0}.$$

Prema lemi 3.2.18 skupovi S' i T' su poluizračunljivi u $(X, \mathcal{T}, (I_i))$. Vrijedi

$$f([-2, 2]^{n-1} \times [0, 2]) \subseteq S' \subseteq f([-4, 4]^{n-1} \times [0, 4]). \tag{3.22}$$

Za $i \in \{1, \dots, n-1\}$ neka su

$$C_i = \Big\{(x_1, \dots, x_n) \in [-4, 4]^{n-1} \times [0, 4] \mid x_i \leq 1\Big\}$$
$$D_i = \Big\{(x_1, \dots, x_n) \in [-4, 4]^{n-1} \times [0, 4] \mid x_i \geq -1\Big\}$$
$$A_i = \Big\{(x_1, \dots, x_n) \in [-2, 2]^{n-1} \times [0, 2] \mid x_i = -2\Big\}$$
$$B_i = \Big\{(x_1, \dots, x_n) \in [-2, 2]^{n-1} \times [0, 2] \mid x_i = 2\Big\}.$$

Neka je

$$C_n = \Big\{(x_1, \dots, x_n) \in [-4,4]^{n-1} \times [0,4] \mid x_n \le 1\Big\}$$
$$B_n = \Big\{(x_1, \dots, x_n) \in [-2,2]^{n-1} \times [0,2] \mid x_n = 2\Big\}.$$

Skupovi A_i, B_i, C_i, D_i, za $i \in \{1, \dots, n-1\}$ i C_n i B_n su zatvoreni i omeđeni pa stoga i kompaktni u $\mathbb{R}^n$. Prema lemi 3.3.26 ti skupovi su kompaktni i u $\mathbb{H}^n$. Stoga su $f(A_i)$, $f(B_i)$, $f(C_i)$, $f(D_i)$, za $i \in \{1, \dots, n-1\}$ i $f(C_n)$ i $f(B_n)$ kompaktni u $(X, \mathcal{T})$.

Za svaki $i \in \{1, \dots, n-1\}$ vrijedi $f(A_i) \cap f(D_i) = \emptyset$, $f(B_i) \cap f(C_i) = \emptyset$. Također $f(B_n) \cap f(C_n) = \emptyset$.

Prema propoziciji 2.4.11 za svaki $i \in \{1, \dots, n-1\}$ postoje brojevi d_i, $c_i \in \mathbb{N}$ takvi da je

$$f(C_i) \subseteq J_{c_i} \ \text{ i } \ J_{c_i} \cap f(B_i) = \emptyset, \tag{3.23}$$

$$f(D_i) \subseteq J_{d_i} \ \text{ i } \ J_{d_i} \cap f(A_i) = \emptyset \tag{3.24}$$

te također postoji $c_n \in \mathbb{N}$ takav da je

$$f(C_n) \subseteq J_{c_n} \ \text{ i } \ J_{c_n} \cap f(B_n) = \emptyset. \tag{3.25}$$

Neka je $\varphi \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija takva da je $I_i = J_{\varphi(i)}$, za svaki $i \in \mathbb{N}$ (lema 3.3.20). Pretpostavimo da je $l \in \mathbb{N}$ takav da je

$$I_l \cap f\Big([-1,1]^{n-1} \times [0,1]\Big) \neq \emptyset$$

Odaberimo $w \in [-1,1]^{n-1} \times [0,1]$, $w = (w_1, \dots, w_n)$ takav da je $f(w) \in I_l$. Tada je $w \in f^{\leftarrow}(I_l)$, a $f^{\leftarrow}(I_l)$ je otvoren skup u $\mathbb{H}^n$. Stoga postoji $r > 0$ takav da je

$$K(w, r; p) \subseteq f^{\leftarrow}(I_l), \tag{3.26}$$

gdje je p euklidska metrika na $\mathbb{H}^n$. Možemo pretpostaviti da je $r < 1$.

Definirajmo brojeve $v_1, \dots, v_n$ sa

$$v_1 = w_1, \dots, v_{n-1} = w_{n-1} \ \text{ i } \ v_n = \begin{cases} w_n & w_n > 0 \\ r/2 & \text{inače.} \end{cases}$$

Neka je $v = (v_1, \dots, v_n)$. Tada je $v \in [-1,1]^{n-1} \times [0,1]$, $v_n > 0$ i $p(v, w) \le r/2 < r$ pa je $v \in K(w, r; p)$. Iz (3.26) slijedi $v \in f^{\leftarrow}(I_l)$. Stoga postoji $r' > 0$ takav da je

$$K(v, r'; p) \subseteq f^{\leftarrow}(I_l). \tag{3.27}$$

Neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}^n$. Prema lemi 3.3.19 postoji $\epsilon > 0$ takav da je

$$[v_1 - \epsilon, v_1 + \epsilon] \times \ldots \times [v_n - \epsilon, v_n + \epsilon] \subseteq K(v, r'; d). \tag{3.28}$$

Možemo pretpostaviti da je $\epsilon < v_n$.

Neka je $x \in [v_1 - \epsilon, v_1 + \epsilon] \times \ldots \times [v_n - \epsilon, v_n + \epsilon]$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Tada je $v_n - \epsilon \leq x_n$, no $v_n - \epsilon > 0$ pa je $x_n > 0$. Stoga je $x \in \mathbb{H}^n$. Iz (3.28) slijedi da je $x \in K(v, r'; d)$ pa je $d(x, v) < r'$. Prema tome $p(x, v) < r'$ pa je $x \in K(v, r'; p)$. Iz (3.27) slijedi $x \in f^{\leftarrow}(I_l)$. Time smo pokazali da je

$$[v_1 - \epsilon, v_1 + \epsilon] \times \ldots \times [v_n - \epsilon, v_n + \epsilon] \subseteq f^{\leftarrow}(I_l).$$

Definirajmo

$$E = [v_1 - \epsilon, v_1 + \epsilon] \times \ldots \times [v_n - \epsilon, v_n + \epsilon].$$

Dakle $E \subseteq f^{\leftarrow}(I_l)$ pa je $f(E) \subseteq I_l$.
Za $i \in \{1, \ldots, n\}$ definirajmo skupove

$$\tilde{A}_i = \Big\{(x_1, \ldots, x_n) \in [-4, 4]^{n-1} \times [0, 4] \mid x_i \leq v_i - \epsilon\Big\},$$
$$\tilde{B}_i = \Big\{(x_1, \ldots, x_n) \in [-4, 4]^{n-1} \times [0, 4] \mid x_i \geq v_i + \epsilon\Big\}.$$

Za svaki $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ vrijedi

$$\tilde{A}_i \subseteq C_i \ \text{ i } \ \tilde{B}_i \subseteq D_i \ \text{ te } \ \tilde{A}_n \subseteq C_n. \tag{3.29}$$

Nadalje, vrijedi

$$\tilde{A}_1 \cup \tilde{B}_1 \cup \ldots \cup \tilde{A}_n \cup \tilde{B}_n \cup E = [-4, 4]^{n-1} \times [0, 4]$$

pa je

$$f(\tilde{A}_1) \cup f(\tilde{B}_1) \cup \ldots \cup f(\tilde{A}_n) \cup f(\tilde{B}_n) \cup f(E) = f\left([-4, 4]^{n-1} \times [0, 4]\right). \tag{3.30}$$

Za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$ vrijedi $\tilde{A}_i \cap \tilde{B}_i = \emptyset$ pa je $f(\tilde{A}_i) \cap f(\tilde{B}_i) = \emptyset$.

Neka je $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Prema (3.29) vrijedi $f(\tilde{A}_i) \subseteq f(C_i)$ i $f(\tilde{B}_i) \subseteq f(D_i)$ pa iz (3.23) i (3.24) slijedi

$$f(\tilde{A}_i) \subseteq J_{c_i} \ \text{ i } \ f(\tilde{B}_i) \subseteq J_{d_i}.$$

Iz (3.29) slijedi $f(\tilde{A}_n) \subseteq f(C_n)$ pa iz (3.25) slijedi $f(\tilde{A}_n) \subseteq J_{c_n}$.

Iz $f(E) \subseteq I_l$ slijedi $f(E) \subseteq J_{\varphi(l)}$.

Tvrdimo da je

$$f(\tilde{B}_n) \cap T' = \emptyset. \tag{3.31}$$

Imamo

$$\begin{aligned} f(\tilde{B}_n) \cap T' &= \left(f(\tilde{B}_n) \cap N\right) \cap T' \\ &\subseteq \left(f(\tilde{B}_n) \cap N\right) \cap T \\ &= f(\tilde{B}_n) \cap (N \cap T) \\ &= f(\tilde{B}_n) \cap f(\mathrm{Bd}\mathbb{H}^n) \\ &= f(\tilde{B}_n \cap \mathrm{Bd}\mathbb{H}^n) \\ &= f(\emptyset) \\ &= \emptyset. \end{aligned}$$

Dakle, (3.31) vrijedi.

Neka je

$$A_n = \left\{(x_1, \dots, x_n) \in [-2, 2]^{n-1} \times [0, 2] \mid x_n = 0\right\}.$$

Iz $A_n \subseteq \mathrm{Bd}\mathbb{H}^n$ slijedi

$$f(A_n) \subseteq f(\mathrm{Bd}\mathbb{H}^n) = N \cap T.$$

Stoga je $f(A_n) \subseteq T$. Nadalje, iz (3.21) slijedi $f(A_n) \cap J_{m_0} = \emptyset$. Stoga je $f(A_n) \subseteq T \setminus J_{m_0}$, tj.

$$f(A_n) \subseteq T'. \tag{3.32}$$

Posebno, T' je neprazan skup. Iz (3.31) i propozicije 3.2.9 slijedi da postoje brojevi $d_n, t \in \mathbb{N}$ takvi da je $f(\tilde{B}_n) \subseteq J_{d_n}$, $T' \subseteq J_t$ te takvi da su J_{d_n} i J_t FD–disjunktni.

Skupovi $\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n, \tilde{B}_1, \dots, \tilde{B}_n, E$ su neprazni i kompaktni u $\mathbb{H}^n$. Stoga su $f(\tilde{A}_1), \dots, f(\tilde{A}_n), f(\tilde{B}_1), \dots, f(\tilde{B}_n), f(E)$ neprazni i kompaktni skupovi u $(X, \mathcal{T})$.

Iz leme 3.3.21 slijedi da postoje brojevi $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, e \in \mathbb{N}$ takvi da za svaki $i \in \{1, \dots, n\}$ vrijedi

$$\begin{aligned} &f(\tilde{A}_i) \subseteq J_{a_i}, \quad f(\tilde{B}_i) \subseteq J_{b_i}, \quad f(E) \subseteq J_e, \\ &J_{a_i} \subseteq_{FS} J_{c_i}, \quad J_{b_i} \subseteq_{FS} J_{d_i}, \quad J_e \subseteq_{FS} J_{\varphi(l)} \ \text{ i } \ J_{a_i} \text{ FD–disjunktan sa } J_{b_i}. \end{aligned}$$

Iz $J_{b_n} \subseteq_{FS} J_{d_n}$ i J_{d_n} FD–disjunktan sa J_t slijedi J_{b_n} FD–disjunktan sa J_t.

Iz (3.22) i (3.30) slijedi

$$\begin{aligned} S' &\subseteq f(\tilde{A}_1) \cup f(\tilde{B}_1) \cup \ldots \cup f(\tilde{A}_n) \cup f(\tilde{B}_n) \cup f(E) \\ &\subseteq J_{a_1} \cup J_{b_1} \cup \ldots \cup J_{a_n} \cup J_{b_n} \cup J_e, \end{aligned}$$

dakle

$$S' \subseteq J_{a_1} \cup J_{b_1} \cup \ldots \cup J_{a_n} \cup J_{b_n} \cup J_e.$$

Rezimirajmo, ako je $l \in \mathbb{N}$ takav da je $I_l \cap f([-1,1]^{n-1} \times [0,1]) \neq \emptyset$ onda postoje $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n, e, t \in \mathbb{N}$ takvi da je

1) $J_{a_i} \subseteq_{FS} J_{c_i}, \ \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}$

2) $J_{b_i} \subseteq_{FS} J_{d_i}, \ \ \forall i \in \{1, \ldots, n-1\}$

3) $J_e \subseteq_{FS} J_{\varphi(l)}$

4) J_{a_i} FD–disjunktan sa $J_{b_i}, \ \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}$

5) $T' \subseteq J_t$

6) J_{b_n} i J_t FD–disjunktni

7) $S' \subseteq J_{a_1} \cup J_{b_1} \cup \ldots \cup J_{a_n} \cup J_{b_n} \cup J_e$.

Neka je Γ skup svih $(l, a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n, e, t) \in \mathbb{N}^{2n+3}$ takvih da vrijedi 1) - 7). Nadalje, neka je Ω skup svih $l \in \mathbb{N}$ za koje postoje $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n, e, t \in \mathbb{N}$ takvih da je $(l, a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n, e, t) \in \Gamma$. Dokazali smo sljedeće: ako je $l \in \mathbb{N}$ takav da je $I_l \cap f([-1,1]^{n-1} \times [0,1]) \neq \emptyset$ onda je $l \in \Omega$.

Pretpostavimo sada da je $l \in \Omega$. Dokažimo da je $I_l \cap f([-2,2]^{n-1} \times [0,2]) \neq \emptyset$. Iz $l \in \Omega$ slijedi da postoje $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n, e, t \in \mathbb{N}$ takvi da je $(l, a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n, e, t) \in \Gamma$. Dakle, za brojeve $l, a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n, e, t$ vrijedi 1) - 7).

Iz (3.22) i 7) slijedi

$$f([-2,2]^{n-1} \times [0,2]) \subseteq J_{a_1} \cup J_{b_1} \cup \ldots \cup J_{a_n} \cup J_{b_n} \cup J_e$$

pa je

$$[-2,2]^{n-1} \times [0,2] \subseteq f^{\leftarrow}(J_{a_1}) \cup f^{\leftarrow}(J_{b_1}) \cup \ldots \cup f^{\leftarrow}(J_{a_n}) \cup f^{\leftarrow}(J_{b_n}) \cup f^{\leftarrow}(J_e). \tag{3.33}$$

Neka je $i \in \{1, \ldots, n\}$. Imamo $J_{a_i} \subseteq J_{c_i}$ (prema svojstvu 1)) pa iz (3.23) i (3.25) slijedi da je $J_{a_i} \cap f(B_i) = \emptyset$. Stoga je

$$f^{\leftarrow}(J_{a_i}) \cap B_i = \emptyset. \tag{3.34}$$

Neka je $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Iz 2) i (3.24) slijedi da je $J_{b_i} \cap f(A_i) = \emptyset$ pa je

$$f^{\leftarrow}(J_{b_i}) \cap A_i = \emptyset. \tag{3.35}$$

Iz (3.32), 5) i 6) slijedi da je $J_{b_n} \cap f(A_n) = \emptyset$. Stoga je

$$f^{\leftarrow}(J_{b_n}) \cap A_n = \emptyset.$$

Iz 4) slijedi da je

$$f^{\leftarrow}(J_{a_i}) \cap f^{\leftarrow}(J_{b_i}) = \emptyset, \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}. \tag{3.36}$$

Očito je da su skupovi $f^{\leftarrow}(J_{a_1}), \ldots, f^{\leftarrow}(J_{a_n}), f^{\leftarrow}(J_{b_1}), \ldots, f^{\leftarrow}(J_{b_n})$ otvoreni u $\mathbb{H}^n$. Iz (3.34), (3.35), (3.36) i propozicije 3.3.27 slijedi da

$$[-2, 2]^{n-1} \times [0, 2] \not\subseteq f^{\leftarrow}(J_{a_1}) \cup \ldots \cup f^{\leftarrow}(J_{a_n}) \cup f^{\leftarrow}(J_{b_1}) \cup \ldots \cup f^{\leftarrow}(J_{b_n}).$$

Iz ovoga i (3.33) slijedi da je

$$([-2, 2]^{n-1} \times [0, 2]) \cap f^{\leftarrow}(J_e) \neq \emptyset.$$

Stoga je $J_e \cap f([-2, 2]^{n-1} \times [0, 2]) \neq \emptyset$ pa iz 3) i $J_{\varphi(l)} = I_l$ slijedi $I_l \cap f([-2, 2]^{n-1} \times [0, 2]) \neq \emptyset$.

Prema tome, $I_l \cap S \neq \emptyset$.

Dokazali smo da za svaki $l \in \mathbb{N}$ vrijede sljedeće implikacije:

i) $I_l \cap f([-1, 1]^{n-1} \times [0, 1]) \neq \emptyset \Rightarrow l \in \Omega$

ii) $l \in \Omega \Rightarrow I_l \cap S \neq \emptyset$.

Skup $\langle -1, 1\rangle^{n-1} \times [0, 1\rangle$ je otvoren u $\mathbb{H}^n$ jer je $\langle -1, 1\rangle^{n-1} \times [0, 1\rangle = \mathbb{H}^n \cap \langle -1, 1\rangle^n$. Stoga je $f(\langle -1, 1\rangle^{n-1} \times [0, 1\rangle)$ otvoren skup u $(N, \mathcal{T}_N)$, a N je otvoren u $(S, \mathcal{H})$.

Prema napomeni prije teorema, $f(\langle -1, 1\rangle^{n-1} \times [0, 1\rangle)$ je otvoren skup u $(S, \mathcal{H})$. Iz $x = f(0, \ldots, 0)$ slijedi $x \in f(\langle -1, 1\rangle^{n-1} \times [0, 1\rangle)$. Stoga je $f([-1, 1]^{n-1} \times [0, 1])$ okolina od x u $(S, \mathcal{H})$.

Dokažimo sada da je Ω rekurzivno prebrojiv skup. U tu svrhu je, prema definiciji skupa Ω i teoremu o projekciji, dovoljno dokazati da je Γ rekurzivno prebrojiv skup no to dobivamo analogno kao u dokazu teorema 3.3.22.

Prema tome Ω je rekurzivno prebrojiv skup pa iz implikacija *i*) i *ii*) slijedi da je skup $f([-1,1]^{n-1} \times [0,1])$ izračunljivo prebrojiv do na S. Stoga je S izračunljivo prebrojiv u točki x. □

Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te neka je $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Za $(X, \mathcal{T})$ kažemo da je *n–mnogostrukost s rubom* ako za svaku točku $x \in X$ postoji otvorena okolina N od x u $(X, \mathcal{T})$ takva da vrijedi jedno od sljedećeg:

1) $N \cong \mathbb{R}^n$

2) Postoji homeomorfizam $f \colon \mathbb{H}^n \to N$ takav da je $x \in f(\mathrm{Bd}\mathbb{H}^n)$.

Neka je X n–mnogostrukost s rubom. Definirajmo ∂X kao skup svih točaka $x \in X$ koje imaju otvorenu okolinu N sa svojstvom 2) iz definicije n–mnogostrukosti. Za ∂X kažemo da je *rub* n–mnogostrukosti X.

Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori, $x_0 \in X$ te $f \colon X \to Y$ funkcija. Za f kažemo da je neprekidna u točki x_0 s obzirom na topologije $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$ ako za svaku okolinu V od $f(x_0)$ u $(Y, \mathcal{S})$ postoji okolina U od x_0 u $(X, \mathcal{T})$ takva da je $f(U) \subseteq V$.

Uočimo sljedeće: f je neprekidna u x_0 ako i samo ako za svaku otvorenu okolinu V od $f(x_0)$ postoji otvorena okolina U od x_0 takva da je $f(U) \subseteq V$.

Propozicija 3.3.29. *Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori te $f \colon X \to Y$. Tada je f neprekidna funkcija ako i samo ako za svaki $x_0 \in X$ vrijedi da je f neprekidna u x_0.*

Dokaz. Pretpostavimo da je f neprekidna. Neka je $x_0 \in X$ te neka je V otvorena okolina od $f(x_0)$. Definirajmo

$$U = f^{\leftarrow}(V).$$

Budući da je f neprekidna, skup U je otvoren. Iz $f(x_0) \in V$ slijedi $x_0 \in f^{\leftarrow}(V)$ tj. $x_0 \in U$. Prema tome U je otvorena okolina od x_0. Iz definicije od U je jasno da je $f(U) \subseteq V$. Zaključak: f je neprekidna u točki x_0.

Obratno, pretpostavimo da je f neprekidna u x_0 za svaki $x_0 \in X$. Neka je V otvoren skup u $(Y, \mathcal{S})$. Želimo dokazati da je $f^{\leftarrow}(V)$ otvoren skup u $(X, \mathcal{T})$. Neka je $x \in f^{\leftarrow}(V)$. Tada je $f(x) \in V$, V je otvorena okolina od $f(x)$ pa budući da je f neprekidna u točki x postoji otvorena okolina U_x od x takva da je $f(U_x) \subseteq V$. Iz ovoga slijedi da je $U_x \subseteq f^{\leftarrow}(V)$. Slijedi da je

$$f^{\leftarrow}(V) = \bigcup_{x \in f^{\leftarrow}(V)} U_x.$$

Stoga je $f^{\leftarrow}(V)$ otvoren skup. Prema tome f je neprekidna funkcija. $\square$

Lema 3.3.30. *Neka je $n \in \mathbb{N}$ te neka je $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa $f(x) = \|x\|$. Tada je f neprekidna funkcija.*

Dokaz. Neka su $x, y \in \mathbb{R}^n$. Imamo

$$\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|.$$

pa je

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|.$$

Analogno

$$\|y\| - \|x\| \leq \|x - y\|$$

pa je

$$\big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \|x - y\|. \tag{3.37}$$

Neka je p euklidska metrika na $\mathbb{R}$ te d euklidska metrika na $\mathbb{R}^n$. Prema (3.37) vrijedi

$$p(f(x), f(y)) \leq d(x, y).$$

Iz ovoga slijedi da je f neprekidna funkcija. $\square$

Propozicija 3.3.31. *Neka je $n \in \mathbb{N}$. Neka su $x_0 \in \mathbb{R}^n$ i $r > 0$. Tada je $K(x_0, r) \cong \mathbb{R}^n$.*

Dokaz. Definirajmo $\alpha\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sa

$$\alpha(x) = x - x_0.$$

Funkcija α je homeomorfizam te je $\alpha(K(x_0, r)) = K(0, r)$. Stoga je $K(x_0, r) \cong K(0, r)$.

Neka je $\beta\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ funkcija definirana sa

$$\beta(x) = \frac{1}{r}x.$$

Funkcija β je neprekidna jer su joj komponentne funkcija neprekidne. Nadalje, β je bijekcija i $\beta^{-1}(y) = ry$ pa zaključujemo da je β^{-1} neprekidna funkcija. Stoga je β homeomorfizam. Uočimo da je $\beta(K(0,r)) = K(0,1)$. Prema tome

$$K(0,r) \cong K(0,1).$$

Neka je $f\colon [0,1\rangle \to [0,\infty\rangle$ funkcija definirana sa

$$f(x) = \frac{x}{1-x}.$$

Funkcija f je neprekidna kao kvocijent neprekidnih funkcija. Nadalje, f je bijekcija i $f^{-1}(y) = {}^{y}\!/_{1+y}$ pa iz istog razloga zaključujemo da je i f^{-1} neprekidna funkcija. Stoga je f homeomorfizam.

Definirajmo $g\colon K(0,1) \to \mathbb{R}^n$ sa

$$g(z) = \begin{cases} \frac{z}{\|z\|} f(\|z\|), & z \neq 0 \\ 0, & z = 0. \end{cases}$$

Neka je $z \in K(0,1)$, $z \neq 0$. Iz definicije funkcije g i leme 3.3.30 slijedi da su komponentne funkcije od g neprekidne u točki z. Stoga je g neprekidna u točki z.

Dokažimo još da je g neprekidna u 0. Neka je $\epsilon > 0$. Budući da je f bijekcija postoji $\delta \in [0,1\rangle$ takav da je $f(\delta) = {}^{\epsilon}\!/_{2}$. Uočimo da je $\delta > 0$ (jer je ${}^{\epsilon}\!/_{2} > 0$). Pretpostavimo da je $z \in K(0,1)$ takav da je $\|z - 0\| < \delta$. Tada je $\|z\| < \delta$ pa budući da je f rastuća funkcija vrijedi

$$f(\|z\|) \leq f(\delta) = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

Dakle, $f(\|z\|) < \epsilon$ pa je, za $z \neq 0$,

$$\begin{aligned} \|g(z) - g(0)\| &= \|g(z)\| \\ &= \left\| \frac{z}{\|z\|} f(\|z\|) \right\| \\ &= f(\|z\|) \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

Dakle, $\|g(z) - g(0)\| < \epsilon$. Time smo pokazali da je g neprekidna u točki 0. Prema tome g je neprekidna.

Definirajmo $h \colon \mathbb{R}^n \to K(0,1)$ sa

$$h(y) = \begin{cases} \frac{y}{\|y\|} f^{-1}(\|y\|), & y \neq 0 \\ 0, & y = 0. \end{cases}$$

Tvrdimo da je h neprekidna funkcija. U tu svrhu dovoljno je provjeriti da je h neprekidna u 0. Neka je $\epsilon > 0$, $\epsilon < 1$. Neka je $\delta \in \langle 0, \infty \rangle$ takav da je $f^{-1}(\delta) = \epsilon/2$. Uočimo da je f^{-1} rastuća funkcija (jer je f rastuća).

Neka je $y \in \mathbb{R}^n$, $y \neq 0$ takav da je $\|y - 0\| < \delta$. Slijedi $\|y\| < \delta$ pa je

$$f^{-1}(\|y\|) \leq f^{-1}(\delta) = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon,$$

dakle $f^{-1}(\|y\|) < \epsilon$. Imamo

$$\|h(y) - h(0)\| = \|h(y)\| = \left\| \frac{y}{\|y\|} f^{-1}(\|y\|) \right\| = f^{-1}(\|y\|) < \epsilon,$$

dakle $\|h(y) - h(0)\| < \epsilon$. Prema tome h je neprekidna u 0 pa slijedi da je h neprekidna funkcija. Neka je $z \in K(0,1)$. Ako je $z = 0$ onda je očito $h(g(z)) = z$. Ako je $z \neq 0$ imamo

$$\begin{aligned} h(g(z)) &= h\left(\frac{z}{\|z\|} f(\|z\|)\right) \\ &= \frac{\frac{z}{\|z\|} f(\|z\|)}{\left\|\frac{z}{\|z\|} f(\|z\|)\right\|} f^{-1}\left(\left\|\frac{z}{\|z\|} f(\|z\|)\right\|\right) \\ &= \frac{\frac{z}{\|z\|} f(\|z\|)}{f(\|z\|)} f^{-1}(f(\|z\|)) \\ &= \frac{z}{\|z\|}\|z\| \\ &= z. \end{aligned}$$

Prema tome $h(g(z)) = z$, za svaki $z \in K(0,1)$, tj. $h \circ g = id_{K(0,1)}$.

S druge strane, ako je $y \in \mathbb{R}^n$, $y \neq 0$ onda je

$$\begin{aligned} g(h(y)) &= g\left(\frac{y}{\|y\|} f^{-1}(\|y\|)\right) \\ &= \frac{\frac{y}{\|y\|} f^{-1}(\|y\|)}{\left\|\frac{y}{\|y\|} f^{-1}(\|y\|)\right\|} f\left(\left\|\frac{y}{\|y\|} f^{-1}(\|y\|)\right\|\right) \\ &= \frac{\frac{y}{\|y\|} f^{-1}(\|y\|)}{f^{-1}(\|y\|)} f(f^{-1}(\|y\|)) \\ &= \frac{y}{\|y\|}\|y\| \\ &= y. \end{aligned}$$

Dakle, $g \circ h = id_{\mathbb{R}^n}$. Zaključujemo da je g bijekcija te da je $g^{-1} = h$. Stoga je g homeomorfizam. Time smo dokazali da je $K(0,1) \cong \mathbb{R}^n$. Rezimirajmo,

$$K(x_0, r) \cong K(0, r) \cong K(0,1) \cong \mathbb{R}^n.$$

Prema tome $K(x_0, r) \cong \mathbb{R}^n$. □

Navedimo sada, bez dokaza, jednu netrivijalnu činjenicu iz topologije koju ćemo koristiti u dokazu sljedeće leme.

Teorem 3.3.32 (Invarijantnost domene)**.** *Neka je $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, neka je U otvoren skup u $\mathbb{R}^n$ te neka je $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ neprekidna injekcija. Tada je $f(U)$ otvoren skup u $\mathbb{R}^n$.* □

Lema 3.3.33. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je $x \in X$. Pretpostavimo da postoje otvorena okolina N od x u $(X, \mathcal{T})$ i homeomorfizam $f\colon \mathbb{H}^n \to N$ takav da je $x \in f(\mathrm{Bd}\mathbb{H}^n)$. Tada ne postoji otvorena okolina od x u $(X, \mathcal{T})$ koja je homeomorfna sa $\mathbb{R}^n$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, da postoji otvorena okolina N' od x takva da je $N' \cong \mathbb{R}^n$. Neka je $g\colon \mathbb{R}^n \to N'$ homeomorfizam. Možemo pretpostaviti da je $g(0, \ldots, 0) = x$. Također možemo pretpostaviti da je $f(0, \ldots, 0) = x$. Neka je

$$V = N' \cap N.$$

Budući da su N i N' otvoreni u $(X, \mathcal{T})$ imamo da je V otvoren i u N i u N'. Neka je

$$U = g^{\leftarrow}(V).$$

Slijedi da je U otvoren skup u $\mathbb{R}^n$. Uočimo da je $(0, \ldots, 0) \in U$.

Promotrimo restrikciju $g_{|U,V} \colon U \to V$ funkcije g. Očito je to neprekidna injekcija. Nadalje, restrikcija $f^{-1}_{|V} \colon V \to \mathbb{H}^n$ je također neprekidna injekcija.

Promotrimo kompoziciju

$$f^{-1}_{|V} \circ g_{|U,V} \colon U \to \mathbb{H}^n.$$

To je neprekidna injekcija a neprekidna je i kao funkcija sa U u $\mathbb{R}^n$. Iz teorema 3.3.32 slijedi da je

$$\Omega = (f^{-1}_{|V} \circ g_{|U,V})(U)$$

otvoren skup.

Imamo $(0, \ldots, 0) \in \Omega$ jer je

$$\begin{aligned}(f^{-1}_{|V} \circ g_{|U,V})(0, \ldots, 0) &= f^{-1}_{|V}(x) \\ &= f^{-1}(x) \\ &= (0, \ldots, 0).\end{aligned}$$

Stoga postoji $r > 0$ takav da je $K((0, \ldots, 0), r; d) \subseteq \Omega$ gdje je d euklidska metrika na $\mathbb{R}^n$. Očito je $(0, \ldots, 0, -\frac{r}{2}) \in K((0, \ldots, 0), r; d)$ pa je $(0, \ldots, 0, -\frac{r}{2}) \in \Omega$. Ovo je u kontradikciji s činjenicom da je $\Omega \subseteq \mathbb{H}^n$ (naime, iz definicije od Ω je jasno da je $\Omega \subseteq \operatorname{Im} f^{-1} = \mathbb{H}^n$). $\square$

Propozicija 3.3.34. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ n–mnogostrukost s rubom, gdje je $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Neka je $x \in X$.*

1) *Ako postoji otvorena okolina N od x u $(X, \mathcal{T})$ takva da je $N \cong \mathbb{R}^n$, onda $x \notin \partial(X, \mathcal{T})$.*

2) *Ako postoje otvorena okolina N od x u $(X, \mathcal{T})$ i homeomorfizam $f \colon \mathbb{H}^n \to N$ takav da $x \notin f(\mathrm{Bd}\mathbb{H}^n)$, onda $x \notin \partial(X, \mathcal{T})$.*

Dokaz. Tvrdnja 1) slijedi direktno iz definicije ruba mnogostrukosti i leme 3.3.33.

Dokažimo 2). Pretpostavimo da postoji takva okolina N od x i takav homeomorfizam f. Imamo $x \in N$ pa je $x = f(a)$, gdje je $a \in \mathbb{H}^n$, $a = (a_1, \ldots, a_n)$. No, $x \notin f(\mathrm{Bd}\mathbb{H}^n)$ pa slijedi

$a \notin \mathrm{Bd}\mathbb{H}^n$. Stoga je $a_n > 0$.

Odaberimo pozitivan broj r takav da je $r < a_n$. Tvrdimo da je $K(a, r; d) \subseteq \mathbb{H}^n$ pri čemu je d euklidska metrika na $\mathbb{R}^n$. Neka je $b \in K(a, r; d)$, $b = (b_1, \ldots, b_n)$. Tada je

$$\begin{aligned} |b_n - a_n| &\leq \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + \ldots + (b_n - a_n)^2} \\ &= d(a, b) \\ &< r. \end{aligned}$$

Dakle, $|b_n - a_n| < r$, posebno $a_n - b_n < r$ pa je $a_n - r < b_n$ što povlači $0 < b_n$. Prema tome, $b \in \mathbb{H}^n$ i zaključujemo da vrijedi $K(a, r; d) \subseteq \mathbb{H}^n$.

Skup $K(a, r; d)$ je otvoren u $\mathbb{R}^n$ pa je otvoren i u $\mathbb{H}^n$. Budući da je $f \colon \mathbb{H}^n \to N$ homeomorfizam imamo da je $f(K(a, r; d))$ otvoren skup u N. No, N je otvoren u $(X, \mathcal{T})$. Stoga je $f(K(a, r; d))$ otvoren u $(X, \mathcal{T})$. Zbog $x = f(a)$ imamo $x \in f(K(a, r; d))$. Prema tome, $f(K(a, r; d))$ je otvorena okolina od x u $(X, \mathcal{T})$. Imamo $f(K(a, r; d)) \cong K(a, r; d)$ pa iz propozicije 3.3.31 slijedi $f(K(a, r; d)) \cong \mathbb{R}^n$. Dakle, postoji otvorena okolina točke x u $(X, \mathcal{T})$ koja je homeomorfna s $\mathbb{R}^n$ pa iz tvrdnje 1) slijedi da $x \notin \partial(X, \mathcal{T})$. □

Teorem 3.3.35. *Neka je $(X, \mathcal{T}, (I_i))$ izračunljiv topološki prostor, neka je $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je S poluizračunljiv skup u $(X, \mathcal{T}, (I_i))$ koji ima sljedeće svojstvo: S je, kao potprostor od $(X, \mathcal{T})$, n–mnogostrukost s rubom i ∂S je poluizračunljiv skup u $(X, \mathcal{T}, (I_i))$. Tada je S izračunljiv skup.*

Dokaz. Budući da je S kompaktan dovoljno je dokazati da je S lokalno izračunljivo prebrojiv. Neka je $x \in S$. Tada vrijedi jedno od sljedećeg:

1) Postoji otvorena okolina od x u S koja je homeomorfna s $\mathbb{R}^n$.

2) Postoje otvorena okolina N od x u S i homeomorfizam $f \colon \mathbb{H}^n \to N$ takav da je $x \in f(\mathrm{Bd}\mathbb{H}^n)$.

Ako vrijedi 1) onda je prema teoremu 3.3.22 S izračunljivo prebrojiv u točki x.

Pretpostavimo da vrijedi 2). Dokažimo da je

$$f(\mathrm{Bd}\mathbb{H}^n) = N \cap \partial S. \tag{3.38}$$

Očito je $f(\mathrm{Bd}\mathbb{H}^n) \subseteq N$. Ako je $y \in f(\mathrm{Bd}\mathbb{H}^n)$ onda je $y \in N$, dakle N je otvorena okolina od y u S a $f \colon \mathbb{H}^n \to N$ je homeomorfizam takav da $y \in f(\mathrm{Bd}\mathbb{H}^n)$. Slijedi $y \in \partial S$. Prema tome

$y \in N \cap \partial S$. Time smo dokazali da je $f(\mathrm{Bd}\mathbb{H}^n) \subseteq N \cap \partial S$.

Obratno, neka je $y \in N \cap \partial S$. Imamo $y \in N$ pa kada bi vrijedilo da $y \notin f(\mathrm{Bd}\mathbb{H}^n)$ onda bi iz propozicije 3.3.34 slijedilo da $y \notin \partial S$ što je u kontradikciji sa $y \in N \cap \partial S$. Prema tome $y \in f(\mathrm{Bd}\mathbb{H}^n)$. Time smo dokazali da vrijedi (3.38).

Sada iz teorema 3.3.28 slijedi da je S izračunljivo prebrojiv u točki x. Zaključak: S je lokalno izračunljivo prebrojiv pa slijedi da je S izračunljiv u $(X, \mathcal{T}, (I_i))$. □

3.4 Cb–kompaktni skupovi

Neka je (X, d) metrički prostor, $x_0 \in X$ te $r > 0$. Definirajmo

$$\overline{K}(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) \leq r\}.$$

Za $\overline{K}(x_0, r)$ kažemo da je *zatvorena kugla* oko x_0 radijusa r.

Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Za $i \in \mathbb{N}$ definiramo $\hat{I}_i = \overline{K}(\alpha_{\tau_1(i)},\ q_{\tau_2(i)})$.

Napomena: Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Neka su $i, j \in \mathbb{N}$. Tada vrijede sljedeće implikacije:

1) I_i formalno disjunktan sa $I_j \Rightarrow \hat{I}_i \cap \hat{I}_j = \emptyset$

2) I_i formalno sadržan u $I_j \Rightarrow \hat{I}_i \subseteq I_j$.

Dokažimo to.
Označimo

$$x = \alpha_{\tau_1(i)}, \quad r = q_{\tau_2(i)},$$
$$y = \alpha_{\tau_1(j)}, \quad s = q_{\tau_2(j)}.$$

Uzmimo da je I_i formalno disjunktan sa I_j. Tada je $d(x, y) > r + s$. Pretpostavimo da je $\hat{I}_i \cap \hat{I}_j \neq \emptyset$. Odaberimo $z \in \hat{I}_i \cap \hat{I}_j$. Tada je $z \in \overline{K}(x, r)$ i $z \in \overline{K}(y, s)$ pa slijedi

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \leq r + s$$

što je u kontradikciji sa $d(x,y) > r + s$. Prema tome $\hat{I}_i \cap \hat{I}_j = \emptyset$.
Uzmimo sada da je I_i formalno sadržan u I_j. Tada je $d(x,y) + r < s$. Neka je $z \in \hat{I}_i$. Tada je $z \in \overline{K}(x,r)$ pa slijedi

$$d(z,y) \leq d(z,x) + d(x,y) \leq r + d(x,y) < s.$$

Stoga je $z \in K(y,s)$, tj. $z \in I_j$. Prema tome $\hat{I}_i \subseteq I_j$.

Ako je $i \in \mathbb{N}$ te $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$ onda za $\overline{K}(\alpha_i, r)$ kažemo da je *zatvorena racionalna kugla* u (X,d,α). Uočimo da je $\{\hat{I}_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ familija svih zatvorenih racionalnih kugla u (X,d,α).

Propozicija 3.4.1. *Neka je (X,d) metrički prostor. Tada je svaka zatvorena kugla u (X,d) zatvoren skup.*

Dokaz. Neka su $x_0 \in X$ i $r > 0$. Neka je $x \in X \setminus \overline{K}(x_0,r)$. Tada je $r < d(x,x_0)$ pa postoji $s > 0$ takav da je $r + s \leq d(x,x_0)$. Tada je

$$K(x,s) \subseteq X \setminus \overline{K}(x_0,r). \tag{3.39}$$

U suprotnom bi postojao $y \in K(x,s)$ takav da je $y \in \overline{K}(x_0,r)$ pa bismo imali

$$\begin{aligned} d(x_0,x) &\leq d(x_0,y) + d(y,x) \\ &< r + s \end{aligned}$$

što je nemoguće.

Prema tome, (3.39) vrijedi pa zaključujemo da je $X \setminus \overline{K}(x_0,r)$ otvoren skup. Dakle $\overline{K}(x_0,r)$ je zatvoren skup. □

Neka je (X,d) metrički prostor te neka je $F \subseteq X$. Za F kažemo da je *Cb–kompaktan* skup u (X,d) ako je $F \cap \overline{K}(x_0,r)$ kompaktan skup za svaki $x_0 \in X$ i svaki $r > 0$.

Uočimo sljedeće: ako je (X,d) metrički prostor onda je svaki kompaktan skup u (X,d) ujedno i Cb–kompaktan skup u (X,d).
Naime, ako je K kompaktan skup u (X,d) onda je K i zatvoren pa je $K \cap \overline{K}(x_0,r)$, za svaki $x_0 \in X$ i svaki $r > 0$, zatvoren skup kao presjek dva zatvorena skupa te iz $K \cap \overline{K}(x_0,r) \subseteq K$ i teorema 3.2.15 slijedi da je $K \cap \overline{K}(x_0,r)$ kompaktan skup.

Primjer 3.4.2. *Neka je $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}^n$. Neka je F zatvoren skup u $(\mathbb{R}^n, d)$. Tada je za sve $x_0 \in \mathbb{R}^n$ i $r > 0$, $F \cap \overline{K}(x_0, r)$ zatvoren i omeđen skup pa stoga i kompaktan skup. To znači da je F Cb–kompaktan skup. Dakle, svaki zatvoren skup u $\mathbb{R}^n$ je Cb–kompaktan.*

Prethodni primjer pokazuje da Cb–kompaktni skupovi ne moraju biti kompaktni (naime, $\mathbb{R}^n$ je Cb–kompaktan u $\mathbb{R}^n$, ali nije kompaktan).

Propozicija 3.4.3. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je F Cb–kompaktan u (X, d). Tada je F zatvoren skup u (X, d).*

Dokaz. Neka je $x \in X \setminus F$. Tada $x \notin F$ pa $x \notin \overline{K}(x, 1) \cap F$. Skup $\overline{K}(x, 1) \cap F$ je kompaktan pa je i zatvoren, stoga je njegov komplement otvoren. Imamo $x \in X \setminus (\overline{K}(x, 1) \cap F)$ pa postoji $r > 0$ takav da je

$$K(x, r) \subseteq X \setminus (\overline{K}(x, 1) \cap F).$$

Pri tome možemo pretpostavimo da je $r \leq 1$. Slijedi $K(x, r) \cap (\overline{K}(x, 1) \cap F) = \emptyset$. No,

$$\begin{aligned} K(x, r) \cap (\overline{K}(x, 1) \cap F) &= (K(x, r) \cap \overline{K}(x, 1)) \cap F \\ &= K(x, r) \cap F. \end{aligned}$$

Dakle $K(x, r) \cap F = \emptyset$ pa je $K(x, r) \subseteq X \setminus F$. Zaključak, $X \setminus F$ je otvoren skup. Dakle, F je zatvoren. □

Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Neka je $S \subseteq X$. Za S kažemo da je *poluizračunljiv Cb–kompaktan skup* u (X, d, α) ako je S Cb–kompaktan u (X, d) te vrijedi da je skup

$$\left\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid S \cap \hat{I}_i \subseteq J_j\right\}$$

rekurzivno prebrojiv.
Ako je S poluizračunljiv Cb–kompaktan skup te ujedno i izračunljivo prebrojiv u (X, d, α), onda kažemo da je S *izračunljiv Cb–kompaktan skup* u (X, d, α).

Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. Neka je Y skup te neka je $\infty \in Y \setminus X$ takav da je $Y = X \cup \{\infty\}$. Neka je

$$\mathcal{S} = \mathcal{T} \cup \{\{\infty\} \cup U \mid U \in \mathcal{T} \text{ takav da je } X \setminus U \text{ kompaktan u } (X, \mathcal{T})\}.$$

Dokažimo da je $\mathcal{S}$ topologija na Y.

1) Očito je $\emptyset \in \mathcal{S}$, a $\{\infty\} \cup X \in \mathcal{S}$ jer je $X \in \mathcal{T}$ i $X \setminus X = \emptyset$ je kompaktan skup u $(X, \mathcal{T})$.

2) Neka je $(V_\alpha)_{\alpha \in A}$ indeksirana familija elemenata od S. Imamo tri slučaja.

   1° Vrijedi $V_\alpha \in \mathcal{T}$, za svaki $\alpha \in A$.
   Tada je $\bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha \in \mathcal{T}$ pa je $\bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha \in \mathcal{S}$.

   2° Vrijedi $V_\alpha \notin \mathcal{T}$, za svaki $\alpha \in A$.
   Tada za svaki $\alpha \in A$ postoji $U_\alpha \in \mathcal{T}$ takav da je $V_\alpha = \{\infty\} \cup U_\alpha$, pri tome je $X \setminus U_\alpha$ kompaktan skup u $(X, \mathcal{T})$. Tada je

$$\bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha = \{\infty\} \cup \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha.$$

   Jasno je da je $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{T}$. Odaberimo $\alpha_0 \in A$. Imamo da je $X \setminus (\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha)$ zatvoren skup u $(X, \mathcal{T})$, a vrijedi

$$X \setminus \left(\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \right) \subseteq X \setminus U_{\alpha_0}.$$

   Iz činjenice da je $X \setminus U_{\alpha_0}$ kompaktan skup u $(X, \mathcal{T})$ i teorema 3.2.15 slijedi da je $X \setminus (\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha)$ kompaktan skup u $(X, \mathcal{T})$. Stoga je $\bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha \in \mathcal{S}$.

   3° Postoje $\alpha_1,\ \alpha_2 \in A$ takvi da je $V_{\alpha_1} \in \mathcal{T}$ i $V_{\alpha_2} \notin \mathcal{T}$. Tada je

$$\bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha = \bigcup_{\substack{\alpha \in A \\ V_\alpha \in \mathcal{T}}} V_\alpha \cup \bigcup_{\substack{\alpha \in A \\ V_\alpha \notin \mathcal{T}}} V_\alpha$$

   pa je

$$\bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha = W \cup (\{\infty\} \cup U)$$

   gdje su $U, W \in \mathcal{T}$ i $X \setminus U$ je kompaktan skup u $(X, \mathcal{T})$. Prema tome,

$$\bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha = \{\infty\} \cup (W \cup U)\,.$$

   Očito je $W \cup U \in \mathcal{T}$. Nadalje, $X \setminus (W \cup U)$ je kompaktan skup u $(X, \mathcal{T})$ što slijedi na isti način kao u slučaju 2°. Dakle, $\bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha \in \mathcal{S}$.

3) Neka su $V_1,\ V_2 \in \mathcal{S}$. Ako je $V_1 \in \mathcal{T}$ ili $V_2 \in \mathcal{T}$ tada je očito $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{T}$ pa je $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{S}$. Inače vrijedi $V_1 = \{\infty\} \cup U_1$ i $V_2 = \{\infty\} \cup U_2$, gdje su $U_1,\ U_2 \in \mathcal{T}$ takvi da su skupovi $X \setminus U_1$ i $X \setminus U_2$ kompaktni. Imamo

$$\begin{aligned} V_1 \cap V_2 &= (\{\infty\} \cup U_1) \cap (\{\infty\} \cup U_2) \\ &= \{\infty\} \cup (U_1 \cap U_2)\,. \end{aligned}$$

Očito je $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$. Nadalje,

$$\begin{aligned} X \setminus (U_1 \cap U_2) &= (U_1 \cap U_2)^C \\ &= U_1^C \cup U_2^C \\ &= (X \setminus U_1) \cup (X \setminus U_2)\,. \end{aligned}$$

Lako je dokazati da je općenito unija dva kompaktna skupa u topološkom prostoru kompaktan skup. Stoga je $X \setminus (U_1 \cap U_2)$ kompaktan skup u $(X, \mathcal{T})$ pa zaključujemo da je $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{S}$.

Za topološki prostor $(Y, \mathcal{S})$ kažemo da je *jednotočkovna* ili *Aleksandrovljeva kompaktifikacija* topološkog prostora $(X, \mathcal{T})$ preko točke ∞.

Dokažimo da je $(Y, \mathcal{S})$ kompaktan topološki prostor.

Neka je $\mathcal{V}$ otvoreni pokrivač ovog topološkog prostora. Tada postoji $V_0 \in \mathcal{V}$ takav da je $\infty \in V_0$. Slijedi $V_0 = \{\infty\} \cup U_0$, gdje je $U_0 \in \mathcal{T}$ takav da je $X \setminus U_0$ kompaktan skup u $(X, \mathcal{T})$. Za svaki $x \in X \setminus U_0$ postoji $V \in \mathcal{V}$ takav da je $x \in \mathcal{V}$. Iz toga zaključujemo da za svaki $x \in X \setminus U_0$ postoji $W_x \in \mathcal{T}$ takav da je $x \in W_x$ te takav da je $W_x \in \mathcal{V}$ ili $\{\infty\} \cup W_x \in \mathcal{V}$.

Tada je $\{W_x \mid x \in X \setminus U_0\}$ otvoreni pokrivač od $X \setminus U_0$ u $(X, \mathcal{T})$. Stoga postoje $n \in \mathbb{N}$ i $x_0, \ldots, x_n \in X \setminus U_0$ takvi da je

$$X \setminus U_0 \subseteq W_{x_0} \cup \ldots \cup W_{x_n}. \tag{3.40}$$

Za $i \in \{0, \ldots, n\}$ definirajmo skup W_i' na sljedeći način: ako je $W_{x_i} \in \mathcal{V}$ neka je $W_i' = W_{x_i}$, inače neka je $W_i' = \{\infty\} \cup W_{x_i}$. Tada su $W_0', \ldots, W_n' \in \mathcal{V}$ te iz (3.40) slijedi

$$X \setminus U_0 \subseteq W_0' \cup \ldots \cup W_n'.$$

Stoga je

$$\begin{aligned} X \cup \{\infty\} &= (U_0 \cup \{\infty\}) \cup (X \setminus U_0) \\ &\subseteq V_0 \cup W_0' \cup \ldots \cup W_n'. \end{aligned}$$

Dakle $X \cup \{\infty\}$ je sadržano u konačno mnogo članova od $\mathcal{V}$. Zaključak: $(Y, \mathcal{S})$ je kompaktan topološki prostor.

3.5 Pseudokompaktifikacija izračunljivih metričkih prostora

Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Neka je Y skup te $\infty \in Y \setminus X$ takav da je $Y = X \cup \{\infty\}$. Neka je

$$\mathcal{S} = \mathcal{T}_d \cup \{\{\infty\} \cup U \mid U \text{ otvoren u } (X, d) \text{ i } X \setminus U \text{ omeđen u } (X, d)\}.$$

Tada za $(Y, \mathcal{S})$ kažemo da je *pseudokompaktifikacija* od (X, d, α) (preko točke ∞).

Lema 3.5.1. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Neka je S omeđen skup u (X, d). Tada postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $S \subseteq I_i$. Posebno, $S \subseteq \hat{I}_i$.*

Dokaz. Budući da je S omeđen postoje $x_0 \in X$ i $r > 0$ takvi da je

$$S \subseteq K(x_0, r). \tag{3.41}$$

Odaberimo $v \in \mathbb{N}$ takav da je $d(x_0, \alpha_v) < 1$. Nadalje, odaberimo $w \in \mathbb{N}$ takav da je $r + 1 < q_w$. Odaberimo $i \in \mathbb{N}$ takav da je

$$(v, w) = (\tau_1(i), \tau_2(i)).$$

Tada je

$$(\alpha_v, q_w) = \left(\alpha_{\tau_1(i)}, q_{\tau_2(i)}\right)$$

pa je

$$I_i = K(\alpha_v, q_w). \tag{3.42}$$

Tvrdimo da je

$$K(x_0, r) \subseteq K(\alpha_v, q_w). \tag{3.43}$$

Neka je $x \in K(x_0, r)$. Tada je $d(x, x_0) < r$ pa je

$$d(x, \alpha_v) \leq d(x, x_0) + d(x_0, \alpha_v) < r + 1 < q_w.$$

Stoga je $x \in K(\alpha_v, q_w)$. Prema tome (3.43) vrijedi pa iz (3.41) i (3.42) slijedi $S \subseteq I_i$. □

Propozicija 3.5.2. *Neka je $(Y, \mathcal{S})$ pseudokompaktifikacija izračunljivog metričkog prostora (X, d, α) preko točke ∞. Tada je $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostor. Nadalje,*

$$\{I_i \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \left\{\{\infty\} \cup \left(X \setminus \hat{I}_i\right) \mid i \in \mathbb{N}\right\}$$

je baza topologije $\mathcal{S}$.

Dokaz. Očito su $\emptyset, Y \in \mathcal{S}$.

Pretpostavimo da je $(V_\alpha)_{\alpha\in A}$ indeksirana familija elemenata od $\mathcal{S}$. Ako je $V_\alpha \in \mathcal{T}_d$, za svaki $\alpha \in A$, onda je $\bigcup_{\alpha\in A} V_\alpha \in \mathcal{T}_d$ pa je $\bigcup_{\alpha\in A} V_\alpha \in \mathcal{S}$.

Ako postoji $\alpha_0 \in A$ takav da $V_{\alpha_0} \notin \mathcal{T}_d$ onda je

$$V_{\alpha_0} = \{\infty\} \cup U,$$

gdje je $U \in \mathcal{T}_d$ takav da je $X \setminus U$ omeđen u (X, d). Tada lako zaključujemo da je

$$\begin{aligned} \bigcup_{\alpha\in A} V_\alpha &= (\{\infty\} \cup U) \cup \left(\bigcup_{\alpha\neq\alpha_0} V_\alpha \right) \\ &= \{\infty\} \cup (U \cup W)\,, \end{aligned}$$

gdje je $W \in \mathcal{T}_d$. Očito je $U \cup W$ otvoren skup u (X, d), a iz $X \setminus (U \cup W) \subseteq X \setminus U$ slijedi da je $X \setminus (U \cup W)$ omeđen skup u (X, d). Stoga je $\bigcup_{\alpha\in A} V_\alpha \in \mathcal{S}$.

Neka su $V_1, V_2 \in \mathcal{S}$. Ako je $V_1 \in \mathcal{T}_d$ ili $V_2 \in \mathcal{T}_d$ onda je $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{T}_d$, tj. $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{S}$. Inače imamo $V_1 = \{\infty\} \cup U_1$, $V_2 = \{\infty\} \cup U_2$, gdje su $U_1, U_2 \in \mathcal{T}_d$ takvi da su skupovi $X \setminus U_1$ i $X \setminus U_2$ omeđeni. Tada je

$$V_1 \cap V_2 = \{\infty\} \cup (U_1 \cap U_2)\,.$$

Očito je $U_1 \cap U_2$ otvoren skup u (X, d), a vrijedi

$$X \setminus (U_1 \cap U_2) = (X \setminus U_1) \cup (X \setminus U_2)\,.$$

Općenito, unija dva omeđena skupa u metričkom prostoru mora biti omeđen skup što lako slijedi iz propozicije 2.2.17. Stoga je $X \setminus (U_1 \cap U_2)$ omeđen skup. Prema tome $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{S}$. Dakle, $\mathcal{S}$ je topologija na Y.

Označimo

$$\mathcal{B} = \{I_i \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \left\{\{\infty\} \cup \left(X \setminus \hat{I}_i\right) \mid i \in \mathbb{N}\right\}.$$

Dokažimo da je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{S}$.

Za svaki $i \in \mathbb{N}$ je očito $I_i \in \mathcal{T}_d$, dakle $I_i \in \mathcal{S}$. Nadalje, za svaki $i \in \mathbb{N}$ skup $X \setminus \hat{I}_i$ je otvoren u (X, d) prema propoziciji 3.4.1, a vrijedi $X \setminus \left(X \setminus \hat{I}_i\right) = \hat{I}_i$ što povlači da je $X \setminus \left(X \setminus \hat{I}_i\right)$ omeđen skup u (X, d). (Svaka zatvorena kugla u (X, d) je omeđen skup. Naime, ako su $x \in X$ i $r > 0$ onda je $\overline{K}(x, r) \subseteq K(x, r + 1)$.)
Prema tome,

$$\{\infty\} \cup \left(X \setminus \hat{I}_i\right) \in \mathcal{S}.$$

Zaključak: $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{S}$.

Da bismo dokazali da je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{S}$ dovoljno je još provjeriti da za svaki $V \in \mathcal{S}$ i svaki $x \in V$ postoji $B \in \mathcal{B}$ takav da je $x \in \mathcal{B} \subseteq V$. Neka je $V \in \mathcal{S}$ te neka je $x \in V$.

1. slučaj. Vrijedi $V \in \mathcal{T}_d$. Budući da je $\{I_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ baza topologije $\mathcal{T}_d$ postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $x \in I_i \subseteq V$. Jasno, $I_i \in \mathcal{B}$.

2. slučaj. Vrijedi $V \notin \mathcal{T}_d$. Tada je $V = \{\infty\} \cup U$, gdje je U otvoren u (X, d) te takav da je $X \setminus U$ omeđen u (X, d). Imamo $x \in \{\infty\} \cup U$.
Ako je $x \in U$ onda postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $x \in I_i \subseteq U$ pa je $x \in I_i \subseteq V$.
Pretpostavimo da je $x = \infty$. Prema lemi 3.5.1 postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $X \setminus U \subseteq \hat{I}_i$. Iz toga slijedi da je $X \setminus \hat{I}_i \subseteq U$ pa dobivamo

$$\infty \in \{\infty\} \cup \left(X \setminus \hat{I}_i\right) \subseteq \{\infty\} \cup U.$$

Dakle, postoji $B \in \mathcal{B}$ takav da je $\infty \in B \subseteq V$. Zaključak, $\mathcal{B}$ je baza topologije $\mathcal{S}$. □

Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor te neka je $(Y, \mathcal{S})$ pseudokompaktifikacija ovog topološkog prostora preko točke ∞. Za $i \in \mathbb{N}$ definirajmo

$$B_i = \begin{cases} I_{\frac{i}{2}}, & \text{ako je } i \in 2\mathbb{N} \\ \{\infty\} \cup \left(X \setminus \hat{I}_{\frac{i-1}{2}}\right), & \text{ako je } i \in 2\mathbb{N} + 1 \end{cases}$$

Lema 3.5.3. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Neka su $x \in X$ i $i \in \mathbb{N}$ takvi da $x \notin \hat{I}_i$. Tada postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je $x \in I_j$ i takav da je I_j formalno disjunktan sa I_i.*

Dokaz. Iz $x \notin \hat{I}_i$ slijedi $q_{\tau_2(i)} < d(x, \alpha_{\tau_1(i)})$. Odaberimo pozitivan racionalan broj r takav da je $q_{\tau_2(i)} + 2r < d(x, \alpha_{\tau_1(i)})$. Odaberimo $k \in \mathbb{N}$ takav da je

$$d(\alpha_k, x) < r. \tag{3.44}$$

Tvrdimo da je

$$d(\alpha_k, \alpha_{\tau_1(i)}) > r + q_{\tau_2(i)}. \tag{3.45}$$

Pretpostavimo suprotno, tj. $d(\alpha_k, \alpha_{\tau_1(i)}) \leq r + q_{\tau_2(i)}$. Imamo

$$\begin{aligned} d(x, \alpha_{\tau_1(i)}) &\leq d(x, \alpha_k) + d(\alpha_k, \alpha_{\tau_1(i)}) \\ &< r + r + q_{\tau_2(i)} \\ &= 2r + q_{\tau_2(i)} \\ &< d(x, \alpha_{\tau_1(i)}), \end{aligned}$$

kontradikcija. Prema tome vrijedi (3.45).

Odaberimo $l \in \mathbb{N}$ takav da je $r = q_l$. Nadalje, odaberimo $j \in \mathbb{N}$ takav da je $(k, l) = (\tau_1(j), \tau_2(j))$. Tada je

$$\begin{aligned} \alpha_{\tau_1(j)} &= \alpha_k, \\ q_{\tau_2(j)} &= q_l = r. \end{aligned}$$

Iz (3.44) slijedi $x \in K(\alpha_k, r)$ pa je $x \in I_j$. Prema (3.45) slijedi

$$d(\alpha_{\tau_1(j)}, \alpha_{\tau_1(i)}) > q_{\tau_2(j)} + q_{\tau_2(i)}.$$

Ovo znači da su I_j i I_i formalno disjunktni. □

Lema 3.5.4. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor te neka su $i, j \in \mathbb{N}$. Tada postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je I_i formalno sadržan u I_k te takav da je I_j formalno sadržan u I_k.*

Dokaz. Uzmimo bilo koji $n \in \mathbb{N}$. Odaberimo $l \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\max\left\{d(\alpha_n, \alpha_{\tau_1(i)}) + q_{\tau_2(i)},\ d(\alpha_n, \alpha_{\tau_1(j)}) + q_{\tau_2(j)}\right\} < q_l.$$

Odaberimo $k \in \mathbb{N}$ takav da je $(n, l) = (\tau_1(k), \tau_2(k))$. Tada je

$$\begin{aligned} d(\alpha_{\tau_1(k)}, \alpha_{\tau_1(i)}) + q_{\tau_2(i)} &< q_{\tau_2(k)} \\ d(\alpha_{\tau_1(k)}, \alpha_{\tau_1(j)}) + q_{\tau_2(j)} &< q_{\tau_2(k)}. \end{aligned}$$

Prema tome, I_i je formalno sadržan u I_k, I_j je formalno sadržan u I_k. □

Teorem 3.5.5. *Neka je $(Y, \mathcal{S})$ pseudokompaktifikacija izračunljivog metričkog prostora (X, d, α) preko točke ∞. Tada je $(Y, \mathcal{S}, (B_i)_{i \in \mathbb{N}})$ izračunljiv topološki prostor.*

Dokaz. Iz definicije niza $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ je jasno da je

$$\{B_i \mid i \in \mathbb{N}\} = \{I_i \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \left\{\{\infty\} \cup \left(X \setminus \hat{I}_i\right) \mid i \in \mathbb{N}\right\}$$

pa iz propozicije 3.5.2 slijedi da je $\{B_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ baza topologije $\mathcal{S}$.

Definirajmo FD kao skup svih $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ takvih da vrijedi jedno od sljedećeg:

1) $i, j \in 2\mathbb{N}$ i $I_{\frac{i}{2}}$ formalno disjunktan sa $I_{\frac{j}{2}}$

2) $i \in 2\mathbb{N}$, $j \in 2\mathbb{N} + 1$ i $I_{\frac{i}{2}}$ formalno sadržan u $I_{\frac{j-1}{2}}$

3) $i \in 2\mathbb{N} + 1$, $j \in 2\mathbb{N}$ i $I_{\frac{j}{2}}$ formalno sadržan u $I_{\frac{i-1}{2}}$.

Nadalje, definirajmo FS kao skup svih $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ takvih da vrijedi jedno od sljedećeg:

4) $i, j \in 2\mathbb{N}$ i $I_{\frac{i}{2}}$ formalno sadržan u $I_{\frac{j}{2}}$

5) $i \in 2\mathbb{N}$, $j \in 2\mathbb{N} + 1$ i $I_{\frac{i}{2}}$ formalno disjunktan sa $I_{\frac{j-1}{2}}$

6) $i, j \in 2\mathbb{N} + 1$ i $I_{\frac{j-1}{2}}$ formalno sadržan u $I_{\frac{i-1}{2}}$.

Tvrdimo da su FD i FS upravo skupovi koji „pokazuju” da je $(Y, \mathcal{S}, (B_i)_{i\in\mathbb{N}})$ izračunljiv topološki prostor (u smislu definicije).

Dokažimo prvo da su FD i FS rekurzivno prebrojivi skupovi.

Neka su fd i fs podskupovi od $\mathbb{N}^2$ definirani sa

$$fd = \left\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid I_i \text{ formalno disjunktan sa } I_j\right\}$$
$$fs = \left\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid I_i \text{ formalno sadržan u } I_j\right\}$$

Za $i \in \{1, \ldots, 6\}$ neka je Γ_i skup svih $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ takvih da vrijedi svojstvo i) (iz definicije skupova FD i FS). Tada je

$$FD = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$$
$$FS = \Gamma_4 \cup \Gamma_5 \cup \Gamma_6.$$

Dovoljno je stoga dokazati da su skupovi $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_6$ rekurzivno prebrojivi.

Uočimo sljedeće: ako su S i T rekurzivni skupovi u $\mathbb{N}$ onda je $S \times T$ rekurzivan skup u $\mathbb{N}^2$. Neka je $f\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^2$ funkcija definirana sa

$$f(i, j) = \left(\left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{j}{2} \right\rfloor\right).$$

Očito je f rekurzivna funkcija.

Neka su $i, j \in \mathbb{N}$, imamo

$$\begin{aligned}(i, j) \in \Gamma_1 &\Leftrightarrow (i, j) \in 2\mathbb{N} \times 2\mathbb{N} \text{ i } f(i, j) \in fd\\ &\Leftrightarrow (i, j) \in 2\mathbb{N} \times 2\mathbb{N} \text{ i } (i, j) \in f^{\leftarrow}(fd)\\ &\Leftrightarrow (i, j) \in (2\mathbb{N} \times 2\mathbb{N}) \cap f^{\leftarrow}(fd).\end{aligned}$$

Stoga je

$$\Gamma_1 = (2\mathbb{N} \times 2\mathbb{N}) \cap f^{\leftarrow}(fd),$$

pa zaključujemo da je Γ_1 rekurzivno prebrojiv kao presjek dva rekurzivno prebrojiva skupa.

Posve analogno dobivamo (koristeći činjenicu da je fs također rekurzivno prebrojiv skup) da su skupovi $\Gamma_2, \dots, \Gamma_6$ rekurzivno prebrojivi. Prema tome FD i FS su rekurzivno prebrojivi skupovi.

Dokažimo sada da vrijede svojstva (1) - (7) iz definicije izračunljivog topološkog prostora.

(1) Neka su $i, j \in \mathbb{N}$ takvi da je $(i, j) \in FD$.

<u>Slučaj 1</u>: $(i, j) \in \Gamma_1$. Tada je $I_{\frac{i}{2}} \cap I_{\frac{j}{2}} = \emptyset$, a $B_i = I_{\frac{i}{2}}$, $B_j = I_{\frac{j}{2}}$ pa je $B_i \cap B_j = \emptyset$.

<u>Slučaj 2</u>: $(i, j) \in \Gamma_2$. Tada je $I_{\frac{i}{2}} \subseteq I_{\frac{j-1}{2}}$ pa je posebno $I_{\frac{i}{2}} \subseteq \hat{I}_{\frac{j-1}{2}}$ iz čega slijedi da je $I_{\frac{i}{2}} \cap (\{\infty\} \cup (X \setminus \hat{I}_{\frac{j-1}{2}})) = \emptyset$. Stoga je $B_i \cap B_j = \emptyset$.

<u>Slučaj 3</u>: $(i, j) \in \Gamma_3$. Analogno dobivamo $B_i \cap B_j = \emptyset$.

(2) Neka su $i, j \in \mathbb{N}$ takvi da je $(i, j) \in FS$.

<u>Slučaj 1</u>: $(i, j) \in \Gamma_4$. Tada je $I_{\frac{i}{2}} \subseteq I_{\frac{j}{2}}$ pa je $B_i \subseteq B_j$.

Slučaj 2: $(i, j) \in \Gamma_5$. Tada je $I_{\frac{i}{2}} \cap \hat{I}_{\frac{j-1}{2}} = \emptyset$ pa je $I_{\frac{i}{2}} \subseteq (X \setminus \hat{I}_{\frac{j-1}{2}}) \cup \{\infty\}$. Dakle, $B_i \subseteq B_j$.

Slučaj 3: $(i, j) \in \Gamma_6$. Tada je $\hat{I}_{\frac{j-1}{2}} \subseteq I_{\frac{i-1}{2}}$ pa je posebno $\hat{I}_{\frac{j-1}{2}} \subseteq \hat{I}_{\frac{i-1}{2}}$ iz čega slijedi $X \setminus \hat{I}_{\frac{i-1}{2}} \subseteq X \setminus \hat{I}_{\frac{j-1}{2}}$. Stoga je $B_i \subseteq B_j$.

(3) Očito je da iz $(i, j) \in FD$ slijedi $(j, i) \in FD$.

(4) Pretpostavimo da su $i, j, k \in \mathbb{N}$ takvi da su $(i, j) \in FS$ i $(j, k) \in FS$.

Slučaj 1: $(i, j) \in \Gamma_4$. Tada je $I_{\frac{i}{2}}$ formalno sadržan u $I_{\frac{j}{2}}$.

Podslučaj *i*: $(j, k) \in \Gamma_4$. Tada je $I_{\frac{j}{2}}$ formalno sadržan u $I_{\frac{k}{2}}$. Slijedi da je $I_{\frac{i}{2}}$ formalno sadržan u $I_{\frac{k}{2}}$. Stoga je $(i, k) \in FS$.

Podslučaj *ii*: $(j, k) \in \Gamma_5$. Tada je $I_{\frac{j}{2}}$ formalno disjunktan sa $I_{\frac{k-1}{2}}$. Iz ovoga slijedi da je $I_{\frac{i}{2}}$ formalno disjunktan sa $I_{\frac{k-1}{2}}$. Stoga je $(i, k) \in FS$.

Slučaj 2: $(i, j) \in \Gamma_5$. Tada je $I_{\frac{i}{2}}$ formalno disjunktan sa $I_{\frac{j-1}{2}}$. Budući da je $j \in 2\mathbb{N} + 1$ slijedi $(j, k) \in \Gamma_6$. Stoga je $I_{\frac{k-1}{2}}$ formalno sadržan u $I_{\frac{j-1}{2}}$. Stoga je $I_{\frac{i}{2}}$ formalno disjunktan sa $I_{\frac{k-1}{2}}$. Slijedi, $(i, k) \in FS$.

Slučaj 3: $(i, j) \in \Gamma_6$. Tada je $I_{\frac{j-1}{2}}$ formalno sadržan u $I_{\frac{i-1}{2}}$. Zbog $j \in 2\mathbb{N} + 1$ imamo $(j, k) \in \Gamma_6$ pa je $I_{\frac{k-1}{2}}$ formalno sadržan u $I_{\frac{j-1}{2}}$. Stoga je $I_{\frac{k-1}{2}}$ formalno sadržan u $I_{\frac{i-1}{2}}$ pa slijedi $(i, k) \in FS$.

(5) Pretpostavimo da su $i, j, k \in \mathbb{N}$ takvi da je $(k, i) \in FS$ i $(i, j) \in FD$.

Slučaj 1: $(k, i) \in \Gamma_4$. Imamo $I_{\frac{k}{2}}$ formalno sadržan u $I_{\frac{i}{2}}$.

Podslučaj *i*: $(i, j) \in \Gamma_1$. Tada je $I_{\frac{i}{2}}$ formalno disjunktan sa $I_{\frac{j}{2}}$. Stoga je $I_{\frac{k}{2}}$ formalno disjunktan sa $I_{\frac{j}{2}}$ pa slijedi da je $(k, j) \in FD$.

Podslučaj *ii*: $(i, j) \in \Gamma_2$. Tada je $I_{\frac{i}{2}}$ formalno sadržan u $I_{\frac{j-1}{2}}$. Tada je $I_{\frac{k}{2}}$ formalno sadržan u $I_{\frac{j-1}{2}}$ pa slijedi da je $(k, j) \in FD$.

Slučaj 2: $(k, i) \in \Gamma_5$. Tada je $I_{\frac{k}{2}}$ formalno disjunktan sa $I_{\frac{i-1}{2}}$. Imamo, $i \in 2\mathbb{N} + 1$ pa slijedi $(i, j) \in \Gamma_3$. Stoga je $I_{\frac{j}{2}}$ formalno sadržan u $I_{\frac{i-1}{2}}$. Tada je $I_{\frac{k}{2}}$ formalno disjunktan sa $I_{\frac{j}{2}}$. Stoga je $(k, j) \in FD$.

Slučaj 3: $(k, i) \in \Gamma_6$. Tada je $I_{\frac{i-1}{2}}$ formalno sadržan u $I_{\frac{k-1}{2}}$. Slijedi da je $(i, j) \in \Gamma_3$ pa je $I_{\frac{j}{2}}$ formalno sadržan u $I_{\frac{i-1}{2}}$. Slijedi da je $I_{\frac{j}{2}}$ formalno sadržan u $I_{\frac{k-1}{2}}$. Stoga je $(k, j) \in FD$.

(6) Pretpostavimo da su $x, y \in X \cup \{\infty\}$, $x \neq y$.

Slučaj 1: $x, y \in X$. Tada postoje $i, j \in \mathbb{N}$ takvi da je $x \in I_i$, $y \in I_j$ te takvi da su I_i i I_j formalno disjunktni. Slijedi $x \in B_{2i}$, $y \in B_{2j}$ i $(2i, 2j) \in FD$.

Slučaj 2: jedna od točaka x, y je jednaka ∞. Bez smanjenja općenitosti uzmimo da je $y = \infty$. Jasno, tada je $x \in X$. Odaberimo $j \in \mathbb{N}$ takav da je $x \in I_j$. Tada postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $x \in I_i$ te takav da je I_i formalno sadržan u I_j. Slijedi $x \in B_{2i}$, $\infty \in B_{2j+1}$ te $(2i, 2j + 1) \in FD$.

(7) Neka su $i, j \in \mathbb{N}$ te neka je $x \in B_i \cap B_j$.

Slučaj 1: $i, j \in 2\mathbb{N}$. Slijedi $x \in I_{\frac{i}{2}} \cap I_{\frac{j}{2}}$. Stoga postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $x \in I_k$ te takav da je I_k formalno sadržan u $I_{\frac{i}{2}}$ te da je I_k formalno sadržan u $I_{\frac{j}{2}}$. Slijedi $x \in B_{2k}$, $(2k, i) \in FS$, $(2k, j) \in FS$.

Slučaj 2: $i \in 2\mathbb{N}$, $j \in 2\mathbb{N} + 1$. Tada je $x \in I_{\frac{i}{2}} \cap (\{\infty\} \cup (X \setminus \hat{I}_{\frac{j-1}{2}}))$. Slijedi $x \in I_{\frac{i}{2}}$ i $x \notin \hat{I}_{\frac{j-1}{2}}$. Prema lemi 3.5.3 postoji $l \in \mathbb{N}$ takav da je $x \in I_l$ i I_l formalno disjunktan sa $I_{\frac{j-1}{2}}$.

Imamo $x \in I_{\frac{i}{2}} \cap I_l$ pa postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $x \in I_k$, I_k formalno sadržan u $I_{\frac{i}{2}}$, I_k formalno sadržan u I_l. Slijedi, I_k formalno disjunktan sa $I_{\frac{j-1}{2}}$. Dakle imamo $x \in B_{2k}$, $(2k, i) \in FS$, $(2k, j) \in FS$.

Slučaj 3: $i \in 2\mathbb{N} + 1$, $j \in 2\mathbb{N}$. Ovaj slučaj se svodi na drugi slučaj.

Slučaj 4: $i, j \in 2\mathbb{N} + 1$. Tada je

$$x \in \left(\{\infty\} \cup \left(X \setminus \hat{I}_{\frac{i-1}{2}}\right)\right) \cap \left(\{\infty\} \cup \left(X \setminus \hat{I}_{\frac{j-1}{2}}\right)\right).$$

Podslučaj i: $x \in X$. Tada je

$$x \in \left(\left(X \setminus \hat{I}_{\frac{i-1}{2}}\right)\right) \cap \left(\left(X \setminus \hat{I}_{\frac{j-1}{2}}\right)\right)$$

pa slijedi da $x \notin \hat{I}_{\frac{i-1}{2}}$ i $x \notin \hat{I}_{\frac{j-1}{2}}$. Premi lemi 3.5.3 postoje brojevi $i', j' \in \mathbb{N}$ takvi da je $x \in I_{i'}$, $I_{i'}$ formalno disjunktan sa $I_{\frac{i-1}{2}}$, $x \in I_{j'}$, $I_{j'}$ formalno disjunktan sa $I_{\frac{j-1}{2}}$.

Imamo $x \in I_{i'} \cap I_{j'}$ pa postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $x \in I_k$, I_k formalno sadržan u $I_{i'}$, I_k formalno sadržan u $I_{j'}$. Slijedi da su I_k i $I_{\frac{i-1}{2}}$ formalno disjunktni te da su I_k i $I_{\frac{j-1}{2}}$ formalno disjunktni. Imamo $x \in B_{2k}$, $(2k, i) \in FS$, $(2k, j) \in FS$.

Podslučaj ii: $x = \infty$. Prema lemi 3.5.4 postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $I_{\frac{i-1}{2}}$ formalno sadržan u I_k te takav da je $I_{\frac{j-1}{2}}$ formalno sadržan u I_k. Imamo $\infty \in B_{2k+1}$, $(2k+1, i) \in FS$, $(2k+1, j) \in FS$.

Time smo provjerili da vrijedi svih sedam svojstava iz definicije izračunljivog topološkog prostora. Zaključak: $(Y, \mathcal{S}, (B_i)_{i\in\mathbb{N}})$ je izračunljiv topološki prostor. □

Napomena: Neka je $(Y, \mathcal{S})$ pseudokompaktifikacija izračunljivog metričkog prostora (X, d, α). Tada je $(X, \mathcal{T}_d)$ potprostor topološkog prostora $(Y, \mathcal{S})$.
Naime, ako je $U \in \mathcal{T}_d$ onda je $U \in \mathcal{S}$ (prema definiciji od $\mathcal{S}$) pa zaključujemo da postoji $V \in \mathcal{S}$ takav da je $U = X \cap V$ (naime, možemo uzeti $V = U$). Obratno, ako je $V \in \mathcal{S}$ onda je iz definicije od $\mathcal{S}$ jasno da je $X \cap V \in \mathcal{T}_d$.

Propozicija 3.5.6. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor te neka je $(Y, \mathcal{S})$ pseudokompaktifikacija ovog prostora. Neka je S Cb–kompaktan skup u (X, d). Tada je $S \cup \{\infty\}$ kompaktan skup u $(Y, \mathcal{S})$.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{V}$ otvoreni pokrivač od $S \cup \{\infty\}$ u $(Y, \mathcal{S})$. Tada postoji $V \in \mathcal{V}$ takav da je $\infty \in V$. Budući da je $V \in \mathcal{S}$ imamo $V = \{\infty\} \cup U$, gdje je U otvoren skup u (X, d) takav da je $X \setminus U$ omeđen u (X, d). Slijedi da postoje $x \in X$ i $r > 0$ takvi da je

$$X \setminus U \subseteq \overline{K}(x, r). \tag{3.46}$$

Skup $S \cap \overline{K}(x, r)$ je kompaktan u (X, d) pa i u $(X, \mathcal{T}_d)$. Budući da je $(X, \mathcal{T}_d)$ potprostor od $(Y, \mathcal{S})$ (prethodna napomena) iz leme 3.3.26 slijedi da je $S \cap \overline{K}(x, r)$ kompaktan skup u $(Y, \mathcal{S})$. Nadalje, $\mathcal{V}$ je otvoreni pokrivač od $S \cup \{\infty\}$, a $S \cap \overline{K}(x, r) \subseteq S \cup \{\infty\}$. Stoga je $\mathcal{V}$ otvoreni pokrivač od $S \cap \overline{K}(x, r)$ u $(Y, \mathcal{S})$.

Slijedi da postoje $n \in \mathbb{N}$ i $W_0, \dots, W_n \in \mathcal{V}$ takvi da je

$$S \cap \overline{K}(x, r) \subseteq W_0 \cup \ldots \cup W_n. \tag{3.47}$$

Neka je $y \in S$ takav da $y \notin \overline{K}(x, r)$. Tada je $y \in U$. U suprotnom, kada bi vrijedilo $y \notin U$, imali bismo $y \in X \setminus U$ pa bi iz (3.46) slijedilo $y \in \overline{K}(x, r)$, što je nemoguće. Prema tome, $y \in U$ i time smo pokazali da je $S \setminus \overline{K}(x, r) \subseteq U$. Iz ovoga i (3.47) slijedi da je

$$\begin{aligned} S \cup \{\infty\} &= \left(S \cap \overline{K}(x, r)\right) \cup \left(S \setminus \overline{K}(x, r)\right) \cup \{\infty\} \\ &\subseteq W_0 \cup \ldots \cup W_n \cup U \cup \{\infty\} \\ &= W_0 \cup \ldots \cup W_n \cup V. \end{aligned}$$

Zaključak: $S \cup \{\infty\}$ je kompaktan skup u $(Y, \mathcal{S})$. □

Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Za $l \in \mathbb{N}$ definiramo $L_l = \hat{I}_{(l)_0} \cap \ldots \cap \hat{I}_{(l)_{\bar{l}}}$.

Neka su $i, l \in \mathbb{N}$. Za I_i i L_l kažemo da su formalno disjunktni ako postoji $j \in [l]$ takav da su I_i i I_j formalno disjunktni.

Uočimo: ako su I_i i L_l formalno disjunktni onda je $I_i \cap L_l = \emptyset$.

Propozicija 3.5.7. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Neka je $\Gamma = \{(i, l) \in \mathbb{N}^2 \mid I_i \text{ i } L_l \text{ formalno disjunktni}\}$. Tada je Γ rekurzivno prebrojiv skup.*

Dokaz. Neka je

$$fd = \left\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid I_i \text{ i } I_j \text{ formalno disjunktni}\right\}.$$

Neka su $i, l \in \mathbb{N}$. Imamo

$$\begin{aligned} (i, l) \in \Gamma &\Leftrightarrow \exists j \in [l] \text{ takav da su } I_i \text{ i } I_j \text{ formalno disjunktni} \\ &\Leftrightarrow \exists j \in [l] \text{ takav da } (i, j) \in fd \\ &\Leftrightarrow \exists j \in \mathbb{N} \text{ takav da } (i, j) \in fd \text{ i } j \in [l]. \end{aligned}$$

Neka je

$$\Gamma' = \{(i, l, j) \in \mathbb{N}^3 \mid (i, j) \in fd \text{ i } j \in [l]\}.$$

Lako je zaključiti da je Γ' rekurzivno prebrojiv kao presjek dva rekurzivno prebrojiva skupa. Imamo

$$(i, l) \in \Gamma \Leftrightarrow \exists j \in \mathbb{N} \text{ takav da } (i, l, j) \in \Gamma'.$$

Iz teorema o projekciji slijedi da je Γ rekurzivno prebrojiv skup. □

Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor te neka su $u, l \in \mathbb{N}$. Kažemo da su J_u i L_l *formalno disjunktni* ako su I_i i L_l formalno disjunktni za svaki $i \in [u]$.

Uočimo: ako su J_u i L_l formalno disjunktni tada je $J_u \cap L_l = \emptyset$.

Propozicija 3.5.8. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Neka je $\Omega = \{(u, l) \in \mathbb{N}^2 \mid J_u \text{ i } L_l \text{ formalno disjunktni}\}$. Tada je Ω rekurzivno prebrojiv skup.*

Dokaz. Neka je Γ skup iz prethodne propozicije. Neka su $u, l \in \mathbb{N}$. Imamo

$$\begin{aligned}(u, l) \in \Omega &\Leftrightarrow (i, l) \in \Gamma, \quad \forall i \in [u] \\ &\Leftrightarrow [u] \times \{l\} \subseteq \Gamma \\ &\Leftrightarrow \Phi(u, l) \subseteq \Gamma,\end{aligned}$$

pri čemu je $\Phi\colon \mathbb{N}^2 \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$ funkcija definirana sa $\Phi(u, l) = [u] \times \{l\}$. Jasno je da je Φ r.r.o. funkcija. Imamo

$$\Omega = \left\{(u, l) \in \mathbb{N}^2 \mid \Phi(u, l) \subseteq \Gamma\right\}$$

pa iz teorema 2.2.33 slijedi da je Ω rekurzivno prebrojiv skup. □

Lema 3.5.9. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor te neka su $l \in \mathbb{N}$ i $x \in X$ takvi da $x \notin L_l$. Tada postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $x \in I_i$ te takav da su I_i i L_l formalno disjunktni.*

Dokaz. Iz $x \notin L_l$ slijedi da postoji $j \in [l]$ takav da $x \notin \hat{I}_j$. Prema lemi 3.5.3 postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $x \in I_i$ i takav da su I_i i I_j formalno disjunktni. Slijedi da su I_i i L_l formalno disjunktni. □

Lema 3.5.10. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Neka je $l \in \mathbb{N}$ te neka je K neprazan kompaktan skup u (X, d) takav da je $K \cap L_l = \emptyset$. Tada postoji $u \in \mathbb{N}$ takav da su J_u i L_l formalno disjunktni te takav da je $K \subseteq J_u$.*

Dokaz. Neka je $x \in K$. Tada $x \notin L_l$ pa postoji $i_x \in \mathbb{N}$ takav da je $x \in I_{i_x}$ te takav da su I_{i_x} i L_l formalno disjunktni.

Familija $\{I_{i_x} \mid x \in K\}$ je otvoreni pokrivač od K u (X, d). Stoga postoje $n \in \mathbb{N}$ i $x_0, \ldots, x_n \in K$ takvi da je

$$K \subseteq I_{i_{x_0}} \cup \ldots \cup I_{i_{x_n}}.$$

Odaberimo $u \in \mathbb{N}$ takav da je $[u] = \{i_{x_0}, \ldots, i_{x_n}\}$. Tada je

$$J_u = \bigcup_{j \in [u]} I_j = I_{i_{x_0}} \cup \ldots \cup I_{i_{x_n}}.$$

Stoga je $K \subseteq J_u$. Neka je $j \in [u]$. Tada je $j = i_{x_k}$, za neki $k \in \{0, \ldots, n\}$. Znamo da su $I_{i_{x_k}}$ i L_l formalno disjunktni. Stoga su I_j i L_l formalno disjunktni. Time smo pokazali da su J_u i L_l formalno disjunktni. □

Teorem 3.5.11. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor te neka je S poluizračunljiv Cb–kompaktan skup u (X, d, α). Neka je $\Omega = \{(l, j) \in \mathbb{N}^2 \mid S \cap L_l \subseteq J_j\}$. Tada je Ω rekurzivno prebrojiv skup.*

Dokaz. Neka su $l, j \in \mathbb{N}$. Tvrdimo da je

$$S \cap L_l \subseteq J_j \Leftrightarrow S \cap \hat{I}_{(l)_0} \subseteq J_j \text{ ili}$$
$$(\exists u \in \mathbb{N} \text{ takav da su } J_u \text{ i } L_l \text{ formalno disjunktni i } S \cap \hat{I}_{(l)_0} \subseteq J_j \cup J_u).$$

Pretpostavimo da je

$$S \cap L_l \subseteq J_j. \tag{3.48}$$

Općenito, ako je F zatvoren a U otvoren skup u (X, d), onda je $F \setminus U$ zatvoren skup, naime $F \setminus U = F \cap U^C$ pa je $F \setminus U$ zatvoren kao presjek dva zatvorena. Stoga je $(S \cap \hat{I}_{(l)_0}) \setminus J_j$ zatvoren skup ($S \cap \hat{I}_{(l)_0}$ je zatvoren jer je kompaktan).

Iz $(S \cap \hat{I}_{(l)_0}) \setminus J_j \subseteq S \cap \hat{I}_{(l)_0}$ slijedi da je $(S \cap \hat{I}_{(l)_0}) \setminus J_j$ kompaktan skup. Neka je $x \in (S \cap \hat{I}_{(l)_0}) \setminus J_j$. Slijedi $x \in S$ i $x \notin J_j$. Iz (3.48) slijedi da $x \notin L_l$. Stoga je $((S \cap \hat{I}_{(l)_0}) \setminus J_j) \cap L_l = \emptyset$.

<u>1. slučaj:</u> $(S \cap \hat{I}_{(l)_0}) \setminus J_j = \emptyset$. Tada je $S \cap \hat{I}_{(l)_0} \subseteq J_j$.

<u>2. slučaj:</u> $(S \cap \hat{I}_{(l)_0}) \setminus J_j \neq \emptyset$. Prema lemi 3.5.10 postoji $u \in \mathbb{N}$ takav da su J_u i L_l formalno disjunktni te takav da je $(S \cap \hat{I}_{(l)_0}) \setminus J_j \subseteq J_u$. Slijedi $S \cap \hat{I}_{(l)_0} \subseteq J_j \cup J_u$.

Prema tome, vrijedi implikacija $\Rightarrow$ u promatranoj ekvivalenciji.

Obratno, ako je $S \cap \hat{I}_{(l)_0} \subseteq J_j$ onda iz $L_l \subseteq \hat{I}_{(l)_0}$ slijedi $S \cap L_l \subseteq J_j$.
Pretpostavimo sada da postoji $u \in \mathbb{N}$ takav da su J_u i L_l formalno disjunktni i $S \cap \hat{I}_{(l)_0} \subseteq J_j \cup J_u$. Iz $J_u \cap L_l = \emptyset$ odmah slijedi $S \cap L_l \subseteq J_j$. Prema tome, vrijedi promatrana ekvivalencija.

Neka su

$$\Omega_1 = \left\{(l, j) \in \mathbb{N}^2 \mid S \cap \hat{I}_{(l)_0} \subseteq J_j\right\},$$
$$\Omega_2 = \left\{(l, j) \in \mathbb{N}^2 \mid \exists u \in \mathbb{N} \text{ takav da su } J_u \text{ i } L_l \text{ formalno disjunktni i } S \cap \hat{I}_{(l)_0} \subseteq J_j \cup J_u\right\}.$$

Dokazali smo da za sve $j, l \in \mathbb{N}$ vrijedi $(l, j) \in \Omega \Leftrightarrow (l, j) \in \Omega_1$ ili $(l, j) \in \Omega_2$. Prema tome $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$. Stoga je dovoljno dokazati da su Ω_1 i Ω_2 rekurzivno prebrojivi skupovi.

Neka je
$$\Gamma = \left\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid S \cap \hat{I}_i \subseteq J_j\right\}.$$
Budući da je S poluizračunljiv Cb–kompaktan skup, Γ je rekurzivno prebrojiv skup.

Neka je $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^2$ funkcija definirana sa $f(l, j) = ((l)_0, j)$. Očito je f rekurzivna funkcija. Imamo

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \left\{(l, j) \in \mathbb{N}^2 \mid ((l)_0, j) \in \Gamma\right\} \\ &= \left\{(l, j) \in \mathbb{N}^2 \mid f(l, j) \in \Gamma\right\} \\ &= f^{\leftarrow}(\Gamma). \end{aligned}$$

Stoga je Ω_1 rekurzivno prebrojiv skup.

Neka je

$$\Omega_3 = \left\{(l, j, u) \in \mathbb{N}^3 \mid J_u \text{ i } L_l \text{ formalno disjunktni i } S \cap \hat{I}_{(l)_0} \subseteq J_j \cup J_u\right\}.$$

Vrijedi
$$\Omega_2 = \left\{(l, j) \in \mathbb{N}^2 \mid \exists u \in \mathbb{N} \text{ takav da je } (l, j, u) \in \Omega_3\right\}.$$
Da bismo dokazali da je Ω_2 rekurzivno prebrojiv dovoljno je prema teoremu o projekciji dokazati da je Ω_3 rekurzivno prebrojiv.

Neka je
$$\Gamma' = \left\{(u, l) \in \mathbb{N}^2 \mid J_u \text{ i } L_l \text{ formalno disjunktni}\right\}.$$

Prema propoziciji 3.5.8 skup Γ' je rekurzivno prebrojiv.

Prema lemi 3.2.16 postoji rekurzivna funkcija $\varphi\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da je $J_a \cup J_b = J_{\varphi(a,b)}$, za sve $a, b \in \mathbb{N}$.

Neka su $g, h\colon \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}^2$ funkcije definirane sa

$$\begin{aligned} g(l, j, u) &= (u, l) \\ h(l, j, u) &= ((l)_0, \varphi(j, u)) . \end{aligned}$$

Jasno je da su g i h rekurzivne funkcije. Imamo

$$\begin{aligned} \Omega_3 &= \left\{(l, j, u) \in \mathbb{N}^3 \mid (u, l) \in \Gamma' \text{ i } S \cap \hat{I}_{(l)_0} \subseteq J_{\varphi(j,u)}\right\} \\ &= \left\{(l, j, u) \in \mathbb{N}^3 \mid (u, l) \in \Gamma' \text{ i } ((l)_0, \varphi(j, u)) \in \Gamma\right\} \\ &= \left\{(l, j, u) \in \mathbb{N}^3 \mid g(l, j, u) \in \Gamma' \text{ i } h(l, j, u) \in \Gamma\right\} \\ &= g^{\leftarrow}(\Gamma') \cap h^{\leftarrow}(\Gamma). \end{aligned}$$

Prema tome, Ω_3 je rekurzivno prebrojiv skup. Time je tvrdnja teorema dokazana. □

Lema 3.5.12. *Neka je $\Psi\colon \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ r.r.o. funkcija. Tada postoji r.r.o. funkcija $\Psi'\colon \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ takva da je $\Psi'(x) \neq \emptyset$ za svaki $x \in \mathbb{N}$ te takva da je $\Psi'(x) = \Psi(x)$, za sve $x \in \mathbb{N}$ takve da je $\Psi(x) \neq \emptyset$.*

Dokaz. Neka je $\Lambda\colon \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ funkcija definirana sa

$$\Lambda(x) = \begin{cases} \{0\}, & \Psi(x) = \emptyset \\ \emptyset, & \text{inače.} \end{cases}$$

Za sve $x, y \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\overline{\Lambda}(x, y) = \chi_{\Lambda(x)}(y) = \begin{cases} 1, & y = 0 \text{ i } \Psi(x) = \emptyset \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Iz ovoga slijedi da je $\overline{\Lambda}$ rekurzivna funkcija.

Nadalje, očito je Λ rekurzivno omeđena funkcija. Stoga je Λ r.r.o. funkcija. Tada je $\Psi'\colon \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\Psi'(x) = \Psi(x) \cup \Lambda(x)$ tražena funkcija. □

Lema 3.5.13. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor takav da je metrički prostor (X, d) neomeđen, tj. takav da skup X nije omeđen u (X, d). Tada postoji rekurzivna funkcija $\gamma \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da su I_i i $I_{\gamma(i)}$ formalno disjunktni za svaki $i \in \mathbb{N}$.*

Dokaz. Neka je $i \in \mathbb{N}$. Tada je $\hat{I}_i \neq X$ pa postoji $x \in X$ takav da $x \notin \hat{I}_i$. Iz leme 3.5.3 slijedi da postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je I_j formalno disjunktan sa I_i.

Dakle, za svaki $i \in \mathbb{N}$ postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je $(i, j) \in fd$, gdje je

$$fd = \left\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \;\middle|\; I_i \text{ i } I_j \text{ su formalno disjunktni}\right\}.$$

Skup fd je rekurzivno prebrojiv pa stoga postoji rekurzivna funkcija $\gamma \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $(i, \gamma(i)) \in fd$ za svaki $i \in \mathbb{N}$. To znači da su I_i i $I_{\gamma(i)}$ formalno disjunktni za svaki $i \in \mathbb{N}$. □

Propozicija 3.5.14. *Neka su $k, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka su $\Phi, \Psi \colon \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$ r.r.o. funkcije. Neka su $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{N}^k$ rekurzivni skupovi takvi da je $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ i $S_1 \cup S_2 = \mathbb{N}^k$. Neka je $\Lambda \colon \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$ funkcija definirana sa*

$$\Lambda(x) = \begin{cases} \Phi(x), & x \in S_1 \\ \Psi(x), & x \in S_2. \end{cases}$$

Tada je Λ r.r.o. funkcija.

Dokaz. Neka su $x \in \mathbb{N}^k$ i $y \in \mathbb{N}^n$. Tada je

$$\begin{aligned} \overline{\Lambda}(x, y) &= \chi_{\Lambda(x)}(y) \\ &= \begin{cases} \chi_{\Phi(x)}(y), & x \in S_1 \\ \chi_{\Psi(x)}(y), & x \in S_2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \overline{\Phi}(x, y), & x \in S_1 \\ \overline{\Psi}(x, y), & x \in S_2. \end{cases} \end{aligned}$$

Iz ovoga zaključujemo da je $\overline{\Lambda}$ rekurzivna funkcija. Nadalje, ako su $\phi, \psi \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne međe od Φ, Ψ, onda je $\phi + \psi$ rekurzivna međa od Λ. Prema tome Λ je r.r.o. funkcija. □

Teorem 3.5.15. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor te neka je $(Y, \mathcal{S})$ pseudokompaktifikacija ovog prostora preko točke ∞. Pretpostavimo da je S poluizračunljiv Cb–kompaktan skup u (X, d, α) takav da je S neomeđen. Tada je $S \cup \{\infty\}$ poluizračunljiv skup u $(Y, \mathcal{S}, (B_i))$.*

Dokaz. Prema propoziciji 3.5.6 skup $S \cup \{\infty\}$ je kompaktan u $(Y, \mathcal{S})$. Za $j \in \mathbb{N}$ definirajmo $C_j = B_{(j)_0} \cup \ldots \cup B_{(j)_{\overline{j}}}$. Želimo dokazati da je $S \cup \{\infty\}$ poluizračunljiv u $(Y, \mathcal{S}, (B_i))$, tj. da je skup $\{j \in \mathbb{N} \mid S \cup \{\infty\} \subseteq C_j\}$ rekurzivno prebrojiv.

Definirajmo funkcije $\Phi, \Psi \colon \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ sa

$$\begin{aligned} \Phi(j) &= [j] \cap 2\mathbb{N}, \\ \Psi(j) &= [j] \cap (2\mathbb{N} + 1). \end{aligned}$$

Imamo za sve $j, x \in \mathbb{N}$ da je

$$\begin{aligned} \overline{\Phi}(j, x) &= \chi_{\Phi(j)}(x) \\ &= \chi_{[j] \cap 2\mathbb{N}}(x) \\ &= \chi_{[j]}(x) \cdot \chi_{2\mathbb{N}}(x). \end{aligned}$$

Iz ovoga i činjenice da je funkcija $\mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $j \mapsto [j]$ r.r.o. slijedi da je $\overline{\Phi}$ rekurzivna funkcija. Stoga je Φ rekurzivna. Nadalje, očito je $\Phi(j) \subseteq [j]$ pa kako je $j \mapsto [j]$ r.r.o. funkcija slijedi da je Φ rekurzivno omeđena. Prema tome Φ je r.r.o. funkcija. Analogno zaključujemo da je Ψ r.r.o. funkcija.

Neka je $j \in \mathbb{N}$. Tada je $[j] = \Phi(j) \cup \Psi(j)$ pa slijedi

$$\begin{aligned} C_j &= \bigcup_{i \in [j]} B_i \\ &= \bigcup_{i \in \Phi(j)} B_i \cup \bigcup_{i \in \Psi(j)} B_i \\ &= \bigcup_{i \in \Phi(j)} I_{\frac{i}{2}} \cup \bigcup_{i \in \Psi(j)} \left(\{\infty\} \cup \left(X \setminus \hat{I}_{\frac{i-1}{2}}\right)\right). \end{aligned}$$

Stoga je

$$\begin{aligned} S \cup \{\infty\} \subseteq C_j &\Leftrightarrow \Psi(j) \neq \emptyset \ \text{ i } \ S \subseteq \bigcup_{i \in \Phi(j)} I_{\frac{i}{2}} \cup \bigcup_{i \in \Psi(j)} \left(X \setminus \hat{I}_{\frac{i-1}{2}}\right) \\ &\Leftrightarrow \Psi(j) \neq \emptyset \ \text{ i } \ S \subseteq \bigcup_{i \in \Phi(j)} I_{\frac{i}{2}} \cup \left(X \setminus \left(\bigcap_{i \in \Psi(j)} \hat{I}_{\frac{i-1}{2}}\right)\right). \end{aligned}$$

Općenito, ako su $A, B \subseteq X$ onda je $S \subseteq A \cup (X \setminus B) \Leftrightarrow S \cap B \subseteq A$. Stoga je

$$S \cup \{\infty\} \subseteq C_j \Leftrightarrow \Psi(j) \neq \emptyset \text{ i } S \cap \left(\bigcap_{i \in \Psi(j)} \hat{I}_{\frac{i-1}{2}} \right) \subseteq \bigcup_{i \in \Phi(j)} I_{\frac{i}{2}}. \tag{3.49}$$

Neka je $\Psi' \colon \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ funkcija definirana sa

$$\Psi'(j) = \left\{ \frac{i-1}{2} \,\middle|\, i \in \Psi(j) \right\}.$$

Tada je Ψ' r.r.o. funkcija. To slijedi iz teorema 2.2.30. Naime, funkcija $h \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $h(i) = \lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor$ je očito rekurzivna i za svaki $j \in \mathbb{N}$ vrijedi $\Psi'(j) = h(\Psi(j))$. Iz definicije funkcije Ψ' je jasno da je

$$\bigcap_{i \in \Psi(j)} \hat{I}_{\frac{i-1}{2}} = \bigcap_{i \in \Psi'(j)} \hat{I}_i.$$

Prema lemi 3.5.12 postoji r.r.o. funkcija $\Psi'' \colon \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ takva da je $\Psi''(j) \neq \emptyset$ za svaki $j \in \mathbb{N}$ te takva da je $\Psi''(j) = \Psi'(j)$ za svaki $j \in \mathbb{N}$ takav da je $\Psi'(j) \neq \emptyset$. Iz ovoga slijedi da je

$$\bigcap_{i \in \Psi(j)} \hat{I}_{\frac{i-1}{2}} = \bigcap_{i \in \Psi''(j)} \hat{I}_i$$

za svaki $j \in \mathbb{N}$ takav da je $\Psi(j) \neq \emptyset$.

Za svaki $j \in \mathbb{N}$ imamo da je $\Psi''(j)$ neprazan konačan podskup od $\mathbb{N}$ pa stoga postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $\Psi''(j) = [k]$. Dakle, za svaki $j \in \mathbb{N}$ postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $(j, k) \in \Gamma$, pri čemu je

$$\Gamma = \left\{ (j, k) \in \mathbb{N}^2 \mid \Psi''(j) = [k] \right\}.$$

Skup Γ je rekurzivan pa postoji rekurzivna funkcija $g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taakv da je $(j, g(j)) \in \Gamma$ za svaki $j \in \mathbb{N}$. Dakle, $\Psi''(j) = [g(j)]$, za svaki $j \in \mathbb{N}$. Neka je $j \in \mathbb{N}$ takav da je $\Psi(j) \neq \emptyset$. Tada je

$$\bigcap_{i \in \Psi(j)} \hat{I}_{\frac{i-1}{2}} = \bigcap_{i \in \Psi''(j)} \hat{I}_i = \bigcap_{i \in [g(j)]} \hat{I}_i = L_{g(j)}.$$

Dakle, $\bigcap_{i \in \Psi(j)} \hat{I}_{\frac{i-1}{2}} = L_{g(j)}$ za svaki $j \in \mathbb{N}$ takav da je $\Psi(j) \neq \emptyset$.

Sada iz (3.49) slijedi da za svaki $j \in \mathbb{N}$ imamo

$$S \cup \{\infty\} \subseteq C_j \Leftrightarrow \Psi(j) \neq \emptyset \text{ i } S \cap L_{g(j)} \subseteq \bigcup_{i \in \Phi(j)} I_{\frac{i}{2}}. \tag{3.50}$$

Neka je $\Phi' \colon \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ funkcija definirana sa

$$\Phi'(j) = \left\{ \frac{i}{2} \,\middle|\, i \in \Phi(j) \right\}.$$

Tada je Φ' r.r.o. funkcija te za svaki $j \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\bigcup_{i\in\Phi(j)} I_{\frac{i}{2}} = \bigcup_{i\in\Phi'(j)} I_i$$

Neka je γ funkcija iz leme 3.5.13. Definirajmo funkciju $\Phi'' \colon \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ sa

$$\Phi''(j) = \begin{cases} \Phi'(j), & \Phi'(j) \neq \emptyset \\ \{\gamma\left((g(j))_0\right)\}, & \Phi'(j) = \emptyset. \end{cases}$$

Funkcija $\Lambda \colon \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\Lambda(j) = \{\gamma((g(j))_0)\}$ je r.r.o. što slijedi iz teorema 2.2.30. Naime, imamo $\Lambda(j) = \omega(\{j\})$ pri čemu je $\omega \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa $\omega(j) = \gamma\left((g(j))_0\right)$.

Sada iz propozicije 3.5.14 slijedi da je Φ'' r.r.o. funkcija.

Uočimo da je za svaki $j \in \mathbb{N}$ skup $\Phi''(j)$ neprazan pa kao i maloprije zaključujemo da postoji rekurzivna funkcija $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $\Phi''(j) = [f(j)]$ za svaki $j \in \mathbb{N}$.

Neka je $j \in \mathbb{N}$. Pretpostavimo da je $\Phi(j) \neq \emptyset$. Tada je $\Phi'(j) \neq \emptyset$ te je $\Phi''(j) = \Phi'(j)$. Stoga je

$$\bigcup_{i\in\Phi(j)} I_{\frac{i}{2}} = \bigcup_{i\in\Phi'(j)} I_i = \bigcup_{i\in\Phi''(j)} I_i = \bigcup_{i\in[f(j)]} I_i = J_{f(j)}.$$

Dakle,

$$\bigcup_{i\in\Phi(j)} I_{\frac{i}{2}} = J_{f(j)} \tag{3.51}$$

za svaki $j \in \mathbb{N}$ takav da je $\Phi(j) \neq \emptyset$.

Pretpostavimo sada da je $\Phi(j) = \emptyset$. Tada je $\Phi'(j) = \emptyset$ pa je $\Phi''(j) = \{\gamma((g(j))_0)\}$, tj. $[f(j)] = \{\gamma((g(j))_0)\}$. Stoga je

$$J_{f(j)} = \bigcup_{i\in[f(j)]} I_i = I_{\gamma((g(j))_0)}.$$

Znamo da su $I_{\gamma((g(j))_0)}$ i $I_{(g(j))_0}$ formalno disjunktni. Stoga je $I_{\gamma((g(j))_0)} \cap \hat{I}_{(g(j))_0} = \emptyset$ pa zaključujemo da je $J_{f(j)} \cap L_{g(j)} = \emptyset$.

Neka je $j \in \mathbb{N}$. Pretpostavimo da je $S \cup \{\infty\} \subseteq C_j$. Iz (3.50) slijedi da je $\Psi(j) \neq \emptyset$ i $S \cap L_{g(j)} \subseteq \bigcup_{i\in\Phi(j)} I_{\frac{i}{2}}$.

Ako je $\Phi(j) \neq \emptyset$ onda iz (3.51) slijedi $S \cap L_{g(j)} \subseteq J_{f(j)}$. Ako je $\Phi(j) = \emptyset$ onda je $S \cap L_{g(j)} \subseteq \emptyset$ pa je $S \cap L_{g(j)} = \emptyset$. Stoga je očito $S \cap L_{g(j)} \subseteq J_{f(j)}$.

Dakle, u svakom slučaju vrijedi $\Psi(j) \neq \emptyset$ i $S \cap L_{g(j)} \subseteq J_{f(j)}$.

Pretpostavimo sada da je $\Psi(j) \neq \emptyset$ i $S \cap L_{g(j)} \subseteq J_{f(j)}$. Ako je $\Phi(j) \neq \emptyset$ onda je $S \cap L_{g(j)} \subseteq \bigcup_{i \in \Phi(j)} I_{\frac{i}{2}}$ pa iz (3.50) slijedi $S \cup \{\infty\} \subseteq C_j$.

Ako je $\Phi(j) = \emptyset$ onda je $L_{g(j)} \cap J_{f(j)} = \emptyset$ pa iz $S \cap L_{g(j)} \subseteq J_{f(j)}$ slijedi da je $S \cap L_{g(j)} = \emptyset$. Prema tome $S \cap L_{g(j)} \subseteq \bigcup_{i \in \Phi(j)} I_{\frac{i}{2}}$ pa iz (3.50) slijedi $S \cup \{\infty\} \subseteq C_j$.

Time smo dokazali da vrijedi ekvivalencija

$$S \cup \{\infty\} \subseteq C_j \Leftrightarrow \Psi(j) \neq \emptyset \ \text{ i } \ S \cap L_{g(j)} \subseteq J_{f(j)}. \tag{3.52}$$

Neka je

$$\Omega = \left\{ j \in \mathbb{N} \;\middle|\; S \cup \{\infty\} \subseteq C_j \right\}.$$

Nadalje, neka su

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \{ j \in \mathbb{N} \mid \Psi(j) \neq \emptyset \}, \\ \Omega_2 &= \{ j \in \mathbb{N} \mid S \cap L_{g(j)} \subseteq J_{f(j)} \}. \end{aligned}$$

Prema ekvivalenciji (3.52) vrijedi $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2$. Skup Ω_1 je rekurzivno prebrojiv što možemo zaključiti iz korolara 2.2.28.

Neka je

$$\Gamma = \left\{ (l, u) \in \mathbb{N}^2 \;\middle|\; S \cap L_l \subseteq J_u \right\}.$$

Skup Γ je rekurzivno prebrojiv prema teoremu 3.5.11.

Neka je $h \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ funkcija definirana sa $h(j) = (g(j), f(j))$. Imamo

$$\begin{aligned} \Omega_2 &= \{ j \in \mathbb{N} \mid (g(j), f(j)) \in \Gamma \} \\ &= \{ j \in \mathbb{N} \mid h(j) \in \Gamma \} \\ &= h^{\leftarrow}(\Gamma). \end{aligned}$$

Prema tome, Ω_2 je rekurzivno prebrojiv skup. Iz $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2$ slijedi da je Ω rekurzivno prebrojiv. □

Propozicija 3.5.16. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor te neka je $(Y, \mathcal{S})$ njegova pseudokompaktifikacija preko točke ∞. Neka je $S \subseteq X$ takav da je $S \cup \{\infty\}$ izračunljivo prebrojiv skup u $(Y, \mathcal{S}, (B_i))$. Tada je S izračunljivo prebrojiv skup u (X, d, α).*

Dokaz. Dokažimo prvo da je S zatvoren u (X, d). Imamo da je $S \cup \{\infty\}$ zatvoren u $(Y, \mathcal{S})$ a znamo da je $(X, \mathcal{T}_d)$ potprostor od $(Y, \mathcal{S})$. Iz propozicije 3.3.16 slijedi da je tada $(S \cup \{\infty\}) \cap X$ zatvoren skup u $(X, \mathcal{T}_d)$. Dakle, S je zatvoren u (X, d). Neka su

$$\begin{aligned} \Omega &= \{l \in \mathbb{N} \mid I_i \cap S \neq \emptyset\}, \\ \Gamma &= \{i \in \mathbb{N} \mid B_i \cap (S \cup \{\infty\}) \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

Znamo da je Γ rekurzivno prebrojiv skup. Neka je $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa $f(i) = 2i$. Neka je $i \in \mathbb{N}$. Tada vrijedi

$$\begin{aligned} i \in \Omega &\Leftrightarrow I_i \cap S \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow B_{2i} \cap (S \cup \{\infty\}) \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow 2i \in \Gamma \\ &\Leftrightarrow f(i) \in \Gamma \\ &\Leftrightarrow i \in f^{\leftarrow}(\Gamma). \end{aligned}$$

Prema tome, $\Omega = f^{\leftarrow}(\Gamma)$ pa zaključujemo da je Ω rekurzivno prebrojiv. Dakle, S je izračunljivo prebrojiv skup u (X, d, α). □

Propozicija 3.5.17. *Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori te neka je $f \colon X \to Y$ funkcija. Tada je f neprekidna ako i samo ako za svaki zatvoren skup G u $(Y, \mathcal{S})$ vrijedi da je $f^{\leftarrow}(G)$ zatvoren skup u $(X, \mathcal{T})$.*

Dokaz. Za svaki $G \subseteq Y$ vrijedi

$$X \setminus f^{\leftarrow}(G) = f^{\leftarrow}(Y \setminus G). \tag{3.53}$$

Pretpostavimo da je f neprekidna funkcija. Neka je G zatvoren skup u $(Y, \mathcal{S})$. Tada je $Y \setminus G$ otvoren u $(Y, \mathcal{S})$ pa je $f^{\leftarrow}(Y \setminus G)$ otvoren skup u $(X, \mathcal{T})$. Iz (3.53) zaključujemo da je $f^{\leftarrow}(G)$ zatvoren u $(X, \mathcal{T})$.

Obratno, pretpostavimo da je $f^{\leftarrow}(G)$ zatvoren skup u $(X, \mathcal{T})$ za svaki zatvoren skup G u $(Y, \mathcal{S})$.

Neka je V otvoren skup u $(Y, \mathcal{S})$. Neka je $G = Y \setminus V$. Tada je G zatvoren u $(Y, \mathcal{S})$. Imamo da je

$$f^{\leftarrow}(V) = f^{\leftarrow}(Y \setminus G) = X \setminus f^{\leftarrow}(G)$$

pa zaključujemo da je $f^{\leftarrow}(V)$ otvoren skup u $(X, \mathcal{T})$. Prema tome, f je neprekidna. □

Neka su $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori te $f\colon X \to Y$. Za f kažemo da je *zatvoreno preslikavanje* topoloških prostora $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{S})$ ako za svaki zatvoreni skup F u $(X, \mathcal{T})$ vrijedi da je $f(F)$ zatvoren skup u $(Y, \mathcal{S})$.

Propozicija 3.5.18. *Neka su $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori te neka je $f\colon X \to Y$ bijekcija neprekidna s obzirom na topologije $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$. Tada je f homeomorfizam ako i samo ako je f zatvoreno preslikavanje.*

Dokaz. Ova propozicija se, koristeći propoziciju 3.5.17, dokazuje posve analogno kao propozicija 3.3.10. □

Propozicija 3.5.19. *Neka su $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori pri čemu je $(X, \mathcal{T})$ kompaktan a $(Y, \mathcal{S})$ Hausdorffov. Pretpostavimo da je $f\colon X \to Y$ neprekidna funkcija. Tada je f zatvoreno preslikavanje.*

Dokaz. Neka je F zatvoren skup u $(X, \mathcal{T})$. Iz propozicije 3.2.15 slijedi da je F kompaktan skup u $(X, \mathcal{T})$ (ako uzmemo $K = X$). Iz propozicije 3.2.4 slijedi da je $f(F)$ kompaktan skup u $(Y, \mathcal{S})$. Iz teorema 3.2.3 slijedi da je $f(F)$ zatvoren skup u $(Y, \mathcal{S})$. Dakle f je zatvoreno preslikavanje. □

Korolar 3.5.20. *Neka su $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori, pri čemu čemu je $(X, \mathcal{T})$ kompaktan a $(Y, \mathcal{S})$ Hausdorffov. Pretpostavimo da je $f\colon X \to Y$ neprekidna bijekcija. Tada je f homeomorfizam.*

Dokaz. Ovo slijedi iz zadnje dvije propozicije. □

Lema 3.5.21. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te neka je $(Y, \mathcal{S})$ njegov potprostor. Pretpostavimo da je $(X, \mathcal{T})$ Hausdorffov. Tada je $(Y, \mathcal{S})$ Hausdorffov.*

Dokaz. Neka su $y_1, y_2 \in Y$, $y_1 \neq y_2$. Budući da je $(X, \mathcal{T})$ Hausdorffov, postoje $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$ takvi da je $y_1 \in U_1$, $y_2 \in U_2$ i $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Neka je $V_1 = Y \cap U_1$, $V_2 = Y \cap U_2$. Tada su $V_1, V_2 \in \mathcal{S}$. Nadalje, očito je $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ te $y_1 \in V_1$ i $y_2 \in V_2$. Prema tome, $(Y, \mathcal{S})$ je Hausdorffov prostor. □

Lema 3.5.22. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je S Cb–kompaktan skup u (X, d). Neka je F omeđen i zatvoren skup u (X, d). Tada je $S \cap F$ kompaktan skup u (X, d).*

Dokaz. Budući da je F omeđen, postoje $x \in X$ i $r > 0$ takvi da je $F \subseteq \overline{K}(x, r)$. Slijedi da je $S \cap F \subseteq S \cap \overline{K}(x, r)$.

Skup $S \cap \overline{K}(x, r)$ je kompaktan u (X, d), a $S \cap F$ je zatvoren u (X, d) kao presjek dva zatvorena skupa. Stoga je $S \cap F$ kompaktan skup. □

Propozicija 3.5.23. *Neka je $(Y, \mathcal{S})$ pseudokompaktifikacija izračunljivog metričkog prostora (X, d, α) preko točke ∞. Neka je S Cb–kompaktan skup u (X, d). Neka je $\mathcal{T}_1$ topologija na S takva da je $(S, \mathcal{T}_1)$ potprostor topološkog prostora $(X, \mathcal{T}_d)$.*
Nadalje, neka je $\mathcal{S}_1$ topologija na $S \cup \{\infty\}$ takva da je $(S \cup \{\infty\}, \mathcal{S}_1)$ potprostor topološkog prostora $(Y, \mathcal{S})$.
Neka je $(S \cup \{*\}, \mathcal{T}_1')$ jednotočkovna kompaktifikacija od $(S, \mathcal{T}_1)$ preko točke $*$. Dakle,

$$\mathcal{T}_1' = \mathcal{T}_1 \cup \{\{*\} \cup U \mid U \in \mathcal{T}_1 \ \text{ takav da je } \ S \setminus U \ \text{ kompaktan u } \ (S, \mathcal{T}_1)\}. \tag{3.54}$$

Tada je funkcija $f : S \cup \{*\} \to S \cup \{\infty\}$ definirana sa $f(x) = x$, za svaki $x \in S$, $f(*) = \infty$, homeomorfizam topoloških prostora $(S \cup \{*\}, \mathcal{T}_1')$ i $(S \cup \{\infty\}, \mathcal{S}_1)$.

Dokaz. Očito je f bijekcija. Nadalje, $(S \cup \{*\}, \mathcal{T}_1')$ je kompaktan topološki prostor.

S druge strane, $(S \cup \{\infty\}, \mathcal{S}_1)$ je kao potprostor Hausdorffovog prostora i sam Hausdorffov, prema lemi 3.5.21 ($(Y, \mathcal{S})$ je Hausdorffov prostor jer je $(Y, \mathcal{S}, (B_i))$ izračunljiv topološki prostor). Stoga je dovoljno dokazati da je funkcija f neprekidna, naime, tada će iz korolara 3.5.20 slijediti da je f homeomorfizam.

Neka je $W \in \mathcal{S}_1$. Tada postoji $V \in \mathcal{S}$ takav da je $W = (S \cup \{\infty\}) \cap V$.

1° $V \in \mathcal{T}_d$. Tada je $V \subseteq X$ pa je $W = S \cap V$ pa je $f^{\leftarrow}(W) = W$. Iz $V \in \mathcal{T}_d$ slijedi $S \cap V \in \mathcal{T}_1$. Stoga je $S \cap V \in \mathcal{T}_1'$. Dakle $W \in \mathcal{T}_1'$. Prema tome $f^{\leftarrow}(W) \in \mathcal{T}_1'$.

2° $V = \{\infty\} \cup U$ gdje je U otvoren skup u (X, d) takav da je $X \setminus U$ omeđen u (X, d). Tada je

$$\begin{aligned} W &= (S \cup \{\infty\}) \cap (\{\infty\} \cup U) \\ &= (S \cap U) \cup \{\infty\}. \end{aligned}$$

Stoga je

$$f^{\leftarrow}(W) = (S \cap U) \cup \{*\}. \tag{3.55}$$

Želimo dokazati da je $f^{\leftarrow}(W) \in \mathcal{T}_1'$. Iz (3.55) i (3.54) vidimo da je dovoljno pokazati da je $S \cap U \in \mathcal{T}_1$ te da je $S \setminus (S \cap U)$ kompaktan skup u $(S, \mathcal{T}_1)$. Imamo $U \in \mathcal{T}_d$ pa slijedi $S \cap U \in \mathcal{T}_1$. Uočimo da je $S \setminus (S \cap U) = S \cap (X \setminus U)$.

Skup $X \setminus U$ je omeđen i zatvoren u (X, d) pa iz leme 3.5.22 slijedi da je $S \cap (X \setminus U)$ kompaktan u (X, d). Dakle $S \setminus (S \cap U)$ je kompaktan u (X, d) pa i u $(X, \mathcal{T}_d)$. Iz leme 3.3.26 slijedi da je $S \setminus (S \cap U)$ kompaktan u $(S, \mathcal{T}_1)$. Time smo dokazali da je $f^{\leftarrow}(W) \in \mathcal{T}_1'$.

Zaključak: funkcija f je neprekidna. Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Bibliografija

[1] V. Brattka i G. Presser, *Computability on subsets of metric spaces,* Theoretical Computer Science, 305:43 76, 2003.

[2] V. Brattka, *Plottable real number functions and the computable graph theorem,* SIAM J. Comput., 38(1):303 328, 2008.

[3] K. Burnik i Z. Iljazović, *Computability of 1-Manifolds,* Logical Methods in Computer Science, Vol. 10(2:8):1-28, 2014.

[4] R. Engelking, *Dimension Theory,* PWN - Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1978.

[5] Z. Iljazović, *Co-c.e. Spheres and Cells in Computable Metric Spaces,* Logical Methods in Computer Science, Vol. 7(3:05):1-21, 2011.

[6] Z. Iljazović, *Compact manifolds with computable boundaries,* Logical Methods in Computer Science, Vol. 9(4:19):1-22, 2013.

[7] M. B. Pour-El i I. Richards, *Computability in Analysis and Physics,* Springer-Verlag, Berlin-Heielberg-New York, 1989.

[8] W. A. Sutherland, *Introduction to metric and topological spaces,* Oxford University Press, 1975.

[9] M. Vuković, *Izračunljivost – skripta,* Zagreb, 2009.

[10] K. Weihrauch, *Computable Analysis,* Springer, Berlin, 2000.

[11] K. Weihrauch i T. Grubba, *Elementary Computable Topology,* Journal of Universal Computer Science, 2009.

Sažetak

Ukratko, rad je logički podijeljen u tri poglavlja. U prvom poglavlju govorimo općenito o izračunljivosti.

U drugom poglavlju govorimo o izračunljivim metričkim prostorima. Nadalje, govorimo o rekurzivnim brojevima, gustim nizovima, rekurzivno prebrojivim skupovima, poluizračunljivim skupovima i navodimo mnoge rezultate iz teorije metričkih prostora s ciljem povezivanja sa teorijom izračunljivosti.

U trećem poglavlju poopćavamo neke rezultate za izračunljive metričke prostore na izračunljive topološke prostore.

Summary

This paper is logically divided into three chapters. In the first chapter, we talk generally about computability.

In the second chapter, we talk about computable metric spaces. Furthermore, we talk about recursive numbers, dense sequences, recursively enumerable sets, semi-computable sets and we state many results from the theory of metric spaces in order to establish some connections with the theory of computability.

In the third chapter, we generalize some results for computable metric spaces to computable topological spaces.

Životopis

Rođen sam 8. listopada 1991. godine u Đakovu od oca Siniše i majke Jelice, rođene Lovrić. U Đakovu sam pohađao osnovnu školu „Ivan Goran Kovačić" te kasnije prirodoslovno–matematičko odjeljenje gimnazije „Antun Gustav Matoš", također u Đakovu. Od najranijih razreda osnovne škole pokazivao sam zanimanje za prirodne znanosti, tako da sam od četvrtog do osmog razreda sudjelovao na učeničkim natjecanjima iz matematike, te kasnije i iz fizike i informatike.

U jesen 2010. godine upisao sam preddiplomski studij matematike na Odjelu za matematiku u Osijeku. Isti studij sam završio 2013. godine završnim radom kod prof. Šime Ungara na temu *Aksiom izbora i ekvivalencije*.

Daljnje obrazovanje sam nastavio u Zagrebu na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno–matematičkog fakulteta, gdje sam 2013. godine upisao diplomski studij, smjer Računarstvo i matematika.