

# LQR kontrola linearnih dinamičkih sistema

---

Kešinović, Katarina

Master's thesis / Diplomski rad

2014

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:772901>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-03-31**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Katarina Kešinović

**LQR KONTROLA LINEARNIH  
DINAMIČKIH SISTEMA**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
Prof.dr.sc. Zlatko Drmač

Zagreb, srpanj 2014.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

*Ovaj rad posvećujem svojoj dragoj obitelji, kumovima, stricu Ivi i strini Mariji.*

# Sadržaj

<b>Sadržaj</b>	<b>iv</b>
<b>Uvod</b>	<b>2</b>
<b>1 Linearni dinamički sistemi</b>	<b>3</b>
1.1 Sistem (objekt) . . . . .	4
1.2 Linearizacija diskretnih sistema . . . . .	5
1.3 Egzistencija i jedinstvenost rješenja sistema . . . . .	7
1.4 Linearizacija neprekidnih sistema . . . . .	11
1.5 Zatvoreni sistemi ili sistemi s povratnom vezom . . . . .	14
<b>2 LQR kontrola</b>	<b>19</b>
2.1 Opći problem optimalne kontrole . . . . .	20
2.2 LQR problem optimalne kontrole . . . . .	22
2.3 Glavni teorem egzistencije optimalne LQR kontrole . . . . .	24
<b>3 Primjene LQR kontrole i usporedba sa metodom premještanja polova</b>	<b>27</b>
3.1 Lopta i greda . . . . .	27
3.2 Robot koji balansira svoju težinu . . . . .	37
3.3 Aktivni ovjes kotača sa hidrauličkim aktuatorom . . . . .	48
3.4 Quadrotor . . . . .	58
<b>4 Riccatijeva jednadžba</b>	<b>71</b>
4.1 Simetrična rješenja neprekidne algebarske Riccatijeve jednadžbe . . . . .	71
4.2 Kalmanov filter . . . . .	76
<b>A Rezultati nužni za dokaze teorema o egzistenciji rješenja ODJ-a</b>	<b>79</b>
<b>B Bellmanova teorija funkcionala</b>	<b>83</b>
<b>Bibliografija</b>	<b>87</b>

# Uvod



Slika 0.1: Kontrola naprava

Promatrače događaja dalo bi se svrstati u dvije skupine: *aktivne* i *pasivne*. Osvrne li se čovjek oko sebe, te postavi li si logična pitanja: zašto i kako okom zapažene stvari funkcioniraju/dešavaju se, još uvijek ne izlazi iz okvira *pasivnog* promatrača. Ukoliko njegov interes za nekim predmetom poraste i poželi zadrijeti u neku dublju analizu, te ako se još k tomu njegovo znanje odlikuje matematikom, tada se on pomalo pripaja skupini *aktivnih* promatrača. Nastojati će vizualizirane događaje pretočiti u jezik diferencijalnih jednažbi, koje bi na njemu razumljiv način opisale promatrano. Tehnologija danas doživljava izuzetan napredak. Nažalost, nesreće u zračnom, cestovnom i pomorskom prometu su neizbježna sastavnica današnjice. Česte su glasine pad aviona, potonuće broda, gubitak kontrole nad automobilom ... Svjedoči se i činjenici da čovjek po pitanju obavljanja uobičajenih fizičkih radnji biva sve ljeniji, te svojim znanjem nastoji kreirati nešto što bi mu poslužilo kao adekvatna zamjena - roboti i drugi uređaji. Programira ih i kontrolira za obavljanje njemu napornih i dosadnih radnji. Izuzetna eksplozija napretka pripisuje se robotici. Vremenom si čovjek - *aktivni* promatrač - postavlja prirodna pitanja: kako izvesti *kontrolu*? Kako *održati* robota na nogama? Kako *upravljati* automobilom, a da se pri tome osjete što manje oscilacije na cesti? Kako *upravljati* avionom, a da broj pritužbi na *nekomfortnost* vožnje od strane putnika bude *minimalan*? Također, moglo bi se reći da

jednadžbe i priroda izvode istu skladbu na različite načine - svaka koristi vlastitu melodiju. Mnogi vanjski čimbenici ometaju kontrolu neke naprave. Vjetrovi i nemirna mora otežavaju upravljanje brodom. Krivudave ceste uzrokuju nekomfornu vožnju automobilom.

Predmet interesa ovoga rada upravo je pokušati rekonstruirati neke od navedenih pojava. Opisati ih linearnim jednadžbama. Promatrati promjene obzirom na različito zadane parametre i vanjske utjecaje. Isključivo će se promatrati sistemi diferencijalnih jednadžbi kontrolirani LQR (eng. *Linear Quadratic Regulator*) kontrolom. Kako se princip rada LQR metode bazira na metodi premještanja polova (eng. *Pole-placement*), predstavljene su i usporedbe sa navedenom metodom. U prvom poglavlju čitatelja se upoznaje sa pojmom sistem, kontinuiranost, diskretnost, linearizacija ... Za kontrolu sistema je nužna povratna informacija sistema ili povratna veza (eng. *feedback*). Stoga se čitatelja nastoji upoznati i s tim pojmom. Nastoji se okružiti ga dobro poznatom sredinom za bolje razumijevanje teksta danog u sljedećem poglavlju u kojem se definira pojam optimalne kontrole (eng. *optimal control*) sistema. Dokazuje se egzistencija LQR kontrole sistema i naglašava važnost Riccatijeve jednadžbe (eng. *Riccati equation*) u samom procesu kontrole. Ističe se Bellmanov princip (eng. *Bellman principal*) kao polazna točka za dokaze postojanja optimalnosti rješenja. U dodatku se navode rezultati koji se koriste za dokaze egzistencije rješenja sistema običnih diferencijalnih jednadžbi, te Bellmanova teorija funkcionala.

Da bi se izbjeglo pripajanje još jednog člana skupini pasivnih promatrača, ovim radom pokušati će se napraviti optimalna kontrola nekih od navedenih pojava, a potom i simulacija istih u programskom jeziku - Matlab.

# Poglavlje 1

## Linearni dinamički sistemi

U svrhu boljeg razumijevanja i realizacije upravljanja nekim sistemom u okvirima teorije kontrole i upravljanja, nužno je razjasniti pojam *sistem*, njegovu *upravljivost*, *stanja*, *kontinuiranost* ili *diskretnost*, *vremensku varijabilnost* ili *invarijantnost* ... Kako će se u radu promatrati i problem "Aktivna suspenzija automobila na cesti" potrebno je upoznati se s terminom "automobilska suspenzija". Sistem suspenzije vozila odgovoran je za udobnost i sigurnost u vožnji. Da bi se osigurala ova svojstva uvode se aktivne komponente (moguće i poluaktivne) koje omogućuju sistemu suspenzije adaptiranje raznim uvjetima vožnje. Sigurnost i komfor ugrožene su radi neravnina na cesti koje uzrokuju vibracije kotača i vozila. Stoga je neophodno osigurati zadovoljavajuće prigušenje koje se postavlja na amortizer. Njegova je pak uloga da podiže, odnosno spušta kotače automobila obzirom na prepreku na koju naiđe na cesti. Time se uspijeva prigušiti vibracija. Diferencijalne jednadžbe sistema koje opisuju stanja upravo navedenog modela, poslužit će kao ulaznica u početne definicije i teoreme. Tokom rada će se svi problemi ove prirode svesti na linearne diferencijalne jednadžbe oblika (1.1) i (1.2), dobivene kao ishod fizikalno - matematičkih principa i zakona:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1.1)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t), \quad (1.2)$$

uz početno stanje sistema  $x(0) = x_0$ .

$x(t) \rightsquigarrow$  vektor stanja

$u(t) \rightsquigarrow$  vektor upravljanja (ulaza)

$y(t) \rightsquigarrow$  vektor izlaza

$A \rightsquigarrow$  matrica koeficijenata sustava

$B \rightsquigarrow$  matrica ulaza sustava

$C \rightsquigarrow$  matrica izlaza sustava

$D \rightsquigarrow$  matrica prijenosa sustava



Rješenje sustava običnih diferencijalnih jednadžbi, danih u kompaktnom zapisu

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ x(0) &= x_0,\end{aligned}$$

jest funkcija  $x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$ .

U nastavku se za rješenje sustava 1.1 i 1.2 koristi oznaka  $\phi(n; x_0, t)$ , gdje je  $n \in \mathbb{N}$ .

## 1.1 Sistem (objekt)

### Dohvatljivost stanja sistema

Sljedeće definicije preuzete su iz [6].

**Definicija 1.1.1.** Neka je  $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$  skup stanja (sistema kakav je promatran poviše), gdje je  $n \in \mathbb{N}$ . Stanje  $\bar{x} \in \mathcal{X}$  je **dohvatljivo** (eng. *reachable*) iz nultog inicijalnog stanja ( $x(0) = x_0$ ) ako postoji ulaz  $\bar{u}(t)$  i konačno vrijeme  $\bar{T}$  takvo da vrijedi  $\phi(n; x_0, \bar{T}) = \bar{x}(\bar{T})$ .

$\mathcal{X}^{reach}$  je skup svih dohvatljivih stanja  $x \in \mathcal{X}$ .  $\mathcal{X}^{reach} \subseteq \mathcal{X}$ .

$\mathcal{R}(A, B) = [B, AB, A^2B, \dots]$  definira matricu dohvatljivosti. ( $\mathcal{R}_n(A, B) = [B, AB, \dots, A^{n-1}B]$ ).

### Definicija sistema

**Definicija 1.1.2.** U teoriji kontrole i upravljanja pojam sistem podrazumijeva:

(a)  $\mathcal{T}$  - skup koji označava vrijeme

(b)  $\mathcal{X}$  - neprazan skup stanja

(c)  $\mathcal{U}$  - neprazan skup ulaznih varijabli

(d) preslikavanje  $\Phi : \mathcal{D}_\Phi \rightarrow \mathcal{X}$ , gdje je  $\mathcal{D}_\Phi = \{(\tau, \sigma, x, \omega) | \sigma, \tau \in \mathcal{T}, \sigma \leq \tau, x \in \mathcal{X}, \omega \in \mathcal{U}^{[\sigma, \tau]}\}$ .

Vrijede sljedeća svojstva:

(1) neka je  $\sigma \in \mathcal{T}$  takav da je  $\sigma < \tau$ , te  $\omega \in \mathcal{U}^{[\sigma, \tau]}$ . Postoji barem jedan takav par  $(\sigma, \omega)$  sa svojstvom da je  $\omega$  **dohvatljiv** iz  $x$ , tj.  $(\tau, \sigma, x, \omega) \in \mathcal{D}_\Phi$ .

(2) ako je  $\omega \in \mathcal{U}^{[\sigma, \mu]}$  **dohvatljiv** iz  $x$ , tada je restrikcija  $\omega_1 := \omega \upharpoonright_{[\sigma, \mu]}$  **dohvatljiva** iz  $x$  za svaki  $\tau \in [\sigma, \mu)$ . Također je i  $\omega_2 := \omega \upharpoonright_{[\tau, \mu]}$  **dohvatljiva** iz  $\phi = (\tau, \sigma, x, \omega_1)$ .

(3) ako su  $\sigma, \tau$  i  $\mu$  elementi skupa  $\mathcal{T}$  sa svojstvom  $\sigma < \tau < \mu$ , te za  $\omega_1 \in \mathcal{U}^{[\sigma, \tau]}$ ,  $\omega_2 \in \mathcal{U}^{[\tau, \mu]}$  i  $x \in \mathcal{X}$  vrijede relacije  $\phi(\tau, \sigma, x, \omega_1) = x_1$  i  $\phi(\tau, \sigma, x_1, \omega_2) = x_2$ , tada je  $\omega = \omega_1\omega_2$  također **dohvatljiva** iz  $x$  i  $\phi(\mu, \sigma, x, \omega) = x_2$ .

(4) za bilo koje  $\sigma \in \mathcal{T}$  i  $x \in \mathcal{X}$  je  $v \in \mathcal{U}^{[\sigma, \sigma]}$  i  $\phi(\sigma, \sigma, x, v) = x$ .

Za sistem sa **izlazom** (eng. output) definira se još i :

(5)  $\mathcal{Y}$  - prostor varijabli izlaza

(6) preslikavanje  $h : \mathcal{T} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  (eng. measurement map).

$\Sigma = (\mathcal{T}, \mathcal{X}, \mathcal{U}, \Phi)$  označava sistem.

”Aktivna suspenzija ” primjer je jednog vremenski invarijantnog, linearnog, kontinuiranog sustava. Navode se sljedeće definicije u svrhu točnog značenja opisa upravo spomenutog sustava.

### Vremenska-invarijantnost sistema

**Definicija 1.1.3.** Sistem  $\Sigma$  je **vremenski-invarijantan** (eng. continuous time-invariant) ako za bilo koje  $\omega \in \mathcal{U}^{[\sigma, \tau]}$ ,  $x \in \mathcal{X}$ ,  $\mu \in \mathcal{T}$  ( $\mu$  dohvatljiv iz  $x$ ) i translaciju  $\omega^\mu \in \mathcal{U}^{[\sigma+\mu, \tau+\mu]}$  takvu da je  $\omega^\mu(t) = \omega(t - \mu)$  (dohvatljivu iz  $x$ ) vrijedi  $\phi(\tau, \sigma, x, \omega) = \phi(\tau + \mu, \sigma + \mu, x, \omega^\mu)$ . Za sisteme sa izlazom je  $h(\tau, x)$  nezavisno preslikavanje po  $\tau$ .

**Definicija 1.1.4.** Sistem sa definiranim početnim uvjetom je par  $(\Sigma, x^o)$  gdje je  $\Sigma$  sistem, a  $x^o$  je početno stanje .

**Definicija 1.1.5.** Vremenski diskretan sistem (eng. discrete-time system) je sistem za kojeg je  $\mathcal{T} = \mathbb{Z}$ .

## 1.2 Linearizacija diskretnih sistema

Kako bi se mogao definirati vremenski diskretan linearan sistem treba definirati prijelaz u iduće stanje sistema funkcijom :  $\mathcal{P}(t, x, u) = \phi(t+1, t, x, \omega)$ , gdje je  $\omega = u(t)$  za  $t \in \mathbb{Z}$ . Definira se  $\varepsilon$  kao  $\varepsilon = \varepsilon(\phi) = \{(t, x, u) \in \mathbb{Z} \times \mathcal{X} \times \mathcal{U} \text{ t.d. } (t+1, t, x, u) \in \mathcal{D}_\phi\}$ . Neka je  $\mathbb{K}$  polje  $\mathbb{R}$  ili  $\mathbb{C}$ . Kartezijev produkt bilo koja dva vektora prostora  $\mathcal{X}$  odnosno  $\mathcal{U}$  ima vektorsku strukturu prostora definiranu operacijama po koordinatama :  $(x, u) + k(t, v) = (x + kz, u + kv)$ .  $\mathcal{U}^{[\sigma, \tau]}$  (za  $\sigma < \tau$ ) je **vektorski prostor** sa operacijama po točkama :  $(k\omega + \nu)(t) = k\omega(t) + \nu(t)$ .

**Definicija 1.2.1.** Vremenski sistem  $\Sigma$  je **potpun** ako je za svako stanje sistema svaki ulaz dohvatljiv:  $\mathcal{D}_\phi = \{(\tau, \sigma, x, \omega) | \sigma \leq \tau, x \in \mathcal{X}, \omega \in \mathcal{U}^{[\sigma, \tau]}\}$ .

**Definicija 1.2.2.** Vremenski diskretan sistem  $\Sigma$  je linearan ako je :

(a) potpun

(b)  $\mathcal{X}$  i  $\mathcal{U}$  su vektorski prostori

(c)  $\mathcal{P}(t, \cdot, \cdot)$  je linearna funkcija za svaki element skupa  $\mathbb{Z}$ .

Sistem sa izlazom je linearan ako je dodatno :

(1)  $\mathcal{Y}$  vektorski prostor

(2)  $h(t, \cdot)$  je linearna funkcija za svaki  $t$  element skupa  $\mathbb{Z}$ .

**Definicija 1.2.3.** Sistem je konačno-dimenzionalan ako su  $\mathcal{U}$ ,  $\mathcal{X}$  i  $\mathcal{Y}$  konačno-dimenzionalni. Tada je dimenzija od  $\Sigma$  zapravo dimenzija od  $\mathcal{X}$ .

**Napomena 1.2.4.** Linearnost sistema je ekvivalentna egzistenciji linearnih preslikavanja

$A(t) : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$  i  $B(t) : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X}$ ,  $t \in \mathbb{Z}$ .

Tada je  $\mathcal{P}(t, x, u) = A(t)x + B(t)u$ . Za sistem sa izlazom je  $h(t, x) = C(t)x$ , gdje je  $C(t) : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  za  $t \in \mathbb{Z}$ .

Prezentirani su primjeri u kojima  $A(t)$ ,  $B(t)$ ,  $C(t)$  i  $D(t)$  ne ovise o  $t$ . Riječ je o vremenski invarijantnim sistemima. Snažan "alat" koji doprinosi kompaktnijim zapisima i upravljanju samih sistema je linearizacija diskretnih odnosno kontinuiranih sistema. Bez smanjenja općenitosti promatra se glatkoća vremenski diskretnog sistema u realnom slučaju, jer se u kompleksnom slučaju radi ista stvar posebno nad realnim posebno nad imaginarnim dijelovima. Neka je  $\Sigma$  vremenski diskretan sistem. Za svaki  $t$  element skupa  $\mathbb{Z}$  je skup  $\varepsilon_t = \{(x, u) | (t, x, u) \in \varepsilon\} \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{U}$  u domeni funkcije  $\mathcal{P}(t, \cdot, \cdot)$ .

**Definicija 1.2.5.** Neka je  $k \in \{0, 1, 2, \dots, +\infty\}$ ,  $m \in \mathbb{Z}$  i  $n \in \mathbb{Z}$ . Vremenski diskretan sistem klase  $\mathbb{C}^k$  (nad  $\mathbb{K}$ ) je sistem koji zadovoljava sljedeća svojstva:

(1)  $\mathcal{X}$  je otvoren podskup od  $\mathbb{K}^n$

(2)  $\mathcal{U}$  je otvoren podskup od  $\mathbb{K}^m$

(3) za  $t \in \mathbb{Z}$  je skup  $\varepsilon_t$  otvoren i preslikavanje  $\mathcal{P}(t, \cdot, \cdot)$  je klase  $\mathbb{C}^k$ .

**Definicija 1.2.6.** Neka je  $\Sigma$  vremenski diskretan sistem nad  $\mathbb{R}$  klase  $\mathbb{C}^1$ . Pretpostavka je da je  $\Gamma = (\bar{\xi}, \bar{\omega})$  trajektorija gibanja za  $\Sigma$  na intervalu  $\mathcal{I}$ . **Linearizacija** od  $\Sigma$  oko  $\Gamma$  je linearan vremenski diskretan sistem  $\Sigma_*[\Gamma]$  koji je dan s funkcijom lokalnom po vremenu -  $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m, \mathcal{P}_*)$  gdje je

$$\mathcal{P}_*(t, \cdot, \cdot) = \begin{cases} \mathcal{P}(t, \cdot, \cdot)_*[\bar{\xi}(t), \bar{\omega}(t)], & t \in \mathcal{I} \\ 0, & t \notin \mathcal{I} \end{cases}$$

Za sistem  $\Sigma$  sa izlazom je  $\Sigma_*[\Gamma]$  je vremenski diskretan linearan sistem sa izlazom za kojeg je  $\mathcal{Y} = \mathbb{R}^p$  i za kojeg je definiran gornji  $\mathcal{P}$  te je

$$h_*(t, \cdot) = \begin{cases} h(t, \cdot)_*[\bar{\xi}(t)], & t \in \mathcal{I} \\ 0, & t \notin \mathcal{I}. \end{cases}$$

Ako je  $\mathcal{I} = \mathbb{Z}$  i ako su  $\bar{\xi}$  i  $\bar{\omega}$  konstante takve da je  $\bar{\xi}(t) = x$  i  $\bar{\omega}(t) = u$ , tada je  $\Sigma_*[\Gamma]$  **linearizacija** od  $\Sigma$  oko  $(x, u)$ .

Osim vremenski diskretnih proučavaju se i vremenski *neprekidni (kontinuirani)* sistemi. Grubo govoreći, riječ je o sistemima opisanim diferencijalnim jednadžbama  $\dot{x}(t) = f(t, x, u)$ . Prije definicije neprekidnih sistema u okviru teorije kontrole i upravljanja, nužno je navesti rezultate o egzistenciji i jedinstvenosti rješenja problema sa početnim vrijednostima.:  $\dot{\xi} = f(t, \xi(t))$  uz početni uvjet  $\xi(\sigma^0) = x^0$ , gdje je  $\xi(t) \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ . Zašto? Sama definicija neprekidnog sistema pretpostavlja egzistenciju rješenja navedenog problema. Najjednostavniji pristup je definirati rješenje na intervalu  $\mathcal{I}$  kao lokalno apsolutno neprekidnu funkciju  $\xi : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{X}$  takvu da je integral u jednadžbi  $\xi(t) = x^0 + \int_{\sigma^0}^t f(\tau, \xi(\tau))d\tau$

dobro definiran. Neka vrijede sljedeća svojstva funkcije  $f$ :

(H1)  $f(\cdot, x) : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$  je izmjeriva za svaki fiksni  $x$

(H2)  $f(t, \cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  je neprekidna za svaki fiksni  $t$ , gdje je  $\mathcal{I}$  interval u  $\mathbb{R}$ , a  $\mathcal{X}$  otvoren podskup u  $\mathbb{R}^n$ .

### 1.3 Egzistencija i jedinstvenost rješenja sistema

Navodi se glavni teorem o egzistenciji i jedinstvenosti rješenja ODJ-a (običnih diferencijalnih jednadžbi) koji je dokazan pozivom na [6].

**Teorem 1.3.1.** Neka je  $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$  otvoren skup i  $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$  interval. Neka funkcija  $f : \mathcal{I} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^n$  zadovoljava hipoteze (H1) i (H2) i ima sljedeća svojstva:

1)  $f$  je lokalno Lipschitzova funkcija po  $x \rightsquigarrow \|f(t, x) - f(t, y)\| \leq \alpha(t)\|x - y\|$  za svaki  $x^0 \in \mathcal{X}$ , realni broj  $\rho > 0$  i lokalno integrabilnu funkciju  $\alpha : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}_+$  takvu da je kugla  $K_\rho(x^0)$  sadržana u  $\mathcal{X}$  ( $x, y \in K_\rho(x^0)$ ).

2)  $f$  je lokalno integrabilna funkcija po  $t \rightsquigarrow$  za svaki fiksni  $x^0 \in \mathcal{X}$  i za svaki  $t \in \mathcal{I}$  postoji lokalno integrabilna funkcija  $\beta : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}_+$  takva da je  $\|f(t, x^0)\| \leq \beta(t)$ . Tada za svaki par  $(\sigma^0, x^0) \in \mathcal{I} \times \mathcal{X}$  postoji neprazni podinterval  $J \subseteq \mathcal{I}$  (relativno otvoren u  $\mathcal{I}$ ) i postoji rješenje  $\xi$  problema sa početnim uvjetom na  $J$  sa sljedećim svojstvom:

ako je  $\zeta : J' \rightarrow \mathcal{X}$  neko drugo rješenje problema sa početnim uvjetom gdje je  $J' \subseteq \mathcal{I}$ , tada

je nužno  $J' \subseteq J$  i  $\xi = \zeta$  na  $J'$ .  $\xi$  je maksimalno rješenje problema sa početnim uvjetom na intervalu  $\mathcal{I}$ .

Prije dokaza samog teorema navodi se da tvrdnja vrijedi i za funkcije uniformne na kompaktima. Za svaki kompakt  $K \subseteq \mathcal{X}$ , svaki  $t \in \mathcal{I}$  i  $x \in K$  postoji lokalno integrabilna funkcija  $\gamma$  takva da je  $\|f(t, x)\| \leq \gamma(t)$ . Za dani  $x^o \in K$ , postoje funkcije  $\rho > 0$ ,  $\alpha$  i  $\beta$  kao u iskazu teorema takve da za svaki  $x \in K_\rho(x^o)$  i svaki  $t \in \mathcal{I}$  vrijedi  $\|f(t, x)\| \leq \|f(t, x_o)\| + \|f(t, x) - f(t, x_o)\| \leq \beta(t) + \rho\alpha(t)$ . Neka su  $K_\rho(x^o)$  kugle koje čine otvoren pokrivač skupa  $K$ . Tada postoji konačan potpokrivač kugala sa centrima u  $x_1, x_2, \dots, x_l$ , te je  $\gamma(t) = \max\{\gamma_{x_1}, \dots, \gamma_{x_l}\}$ . Kako je  $\gamma_{x_o}$  je lokalno integrabilna funkcija, onda je i  $\gamma(t)$  lokalno integrabilna.

*Dokaz.* Egzistencija

Bez gubitka općenitosti, pretpostavlja se da je  $\mathcal{I} \neq \{\sigma^o\}$  jer bi inače problem bio trivijalan. Najprije se pokazuje da postoji  $\delta > 0$  takav da problem sa početnim vrijednostima ima rješenje na intervalu  $[\sigma^o, \sigma^o + \delta] \cap \mathcal{I}$ . Ako je  $\sigma^o$  desna krajnja točka intervala  $\mathcal{I}$ , onda to jest očito. Pretpostavi se da to nije slučaj. Za dani  $x^o$  uzimaju se  $\rho$  i lokalno integrabilne funkcije  $\alpha$  i  $\beta$  kao u iskazu teorema. Radi lokalne integrabilnosti, funkcija  $a(t) = \int_{\sigma^o}^{t+\sigma^o} \alpha(\tau) d\tau \rightarrow 0$  kad  $t \rightarrow 0^+$  i slično vrijedi i za  $b(t) := \int_{\sigma^o}^{t+\sigma^o} \beta(\tau) d\tau$ . Ovako definirane funkcije  $a(t)$  i  $b(t)$  su nenegativne i neopadajuće. Tada postoji  $\delta > 0$  takav da je  $\sigma^o + \delta \in \mathcal{I}$  i

- (i)  $a(t) \leq a(\delta) = \varepsilon < 1$ , za svaki  $t$  element skupa  $[0, \delta]$
- (ii)  $a(t)\rho + b(t) \leq a(\delta)\rho + b(\delta) < \rho$ , za svaki  $t$  element skupa  $[0, \delta]$

Neka je  $\xi_o \equiv x^o$  na intervalu  $[\sigma^o, \sigma^o + \delta]$  i neka je kugla radijusa  $\rho$  sa centrom u  $x^o$  u prostoru  $C_n^o(\sigma^o, \sigma^o + \delta)$  definirana kao  $\bar{B} = \bar{K}_\rho(x^o)$ . Neka je  $\xi \in \bar{B}$ . Definira se operator  $\mathcal{S} : \bar{B} \rightarrow C_n^o(\sigma^o, \sigma^o + \delta)$  sa  $(\mathcal{S}\xi)(t) := x^o + \int_{\sigma^o}^t f(\tau, \xi(\tau)) d\tau$ . Za  $\tau \in [\sigma^o, \sigma^o + \delta]$ ,  $\xi(\tau)$  pripadaju kompaktnom skupu  $K$ . Iz dodatnog dijela teorema sa funkcijama uniformnima na kompaktnom skupu  $K$  vrijedi da je funkcija  $f(\cdot, \xi(\cdot))$  lokalno integrabilna i da je  $\int_{\sigma^o}^t \|f(\tau, \xi(\tau))\| d\tau \leq \int_{\sigma^o}^t \gamma(\tau) d\tau$ .  $\mathcal{S}$  je dobro definiran i  $\mathcal{S}\xi$  je apsolutno neprekidan operator za svaki  $\xi$ .

Dodatno,  $\bar{B}$  je invarijantan obzirom na  $\mathcal{S}$ . Doista, za  $\xi \in \bar{B}$  i prema lemi A.0.4, biraju se  $L = [\sigma^o, \delta + \sigma^o]$ ,  $g \equiv 0$  te isti  $\alpha, \beta, x_o, \xi$  i  $f$  kao vrijednosti koje su već definirane. Neka su  $\mathcal{X} = K_\rho(x^o)$ ,  $X^o = \{x^o\}$ ,  $\zeta = \xi_o$  i  $z^o = x^o$ . Posebno, neka je  $\bar{\xi} = \mathcal{S}\xi$  i  $\tilde{\zeta} = \xi_o$ . Zaključuje se da je  $\|\mathcal{S}\xi - \xi_o\|_\infty a(\delta) + b(\delta) < \rho$ .  $\mathcal{S}$  se može shvatiti kao preslikavanje sa  $\bar{B} \rightarrow \bar{B}$ . Time je pokazana tražena invarijantnost.

Dalje, želi se pokazati da je  $\mathcal{S}$  kontrakcija. Ponovno, primjenjujući lemu A.0.4 za dane  $\xi, \zeta \in \bar{B}$  neka je  $X = X_o = K_\rho(x^o)$ .  $\alpha, f$  i  $x^o$  su kao i dosada, te  $g = f, \beta \equiv 0$  i  $L = [\sigma^o, \sigma^o + \delta]$ . U istoj toj lemi nejednakosti (1 i 3) u normi  $\infty$  iščezavaju, pa ostaje  $\|\mathcal{S}\xi - \mathcal{S}\zeta\|_\infty \leq \lambda\|\xi - \zeta\|_\infty$ .  $\mathcal{S}$  je kontrakcija!

Iz teorema A.0.7 slijedi da za fiksnu točku  $\xi$ , za koju vrijedi  $\xi = \mathcal{S}\xi$ , upravo ta točka i definira rješenje problema sa početnim vrijednostima na intervalu  $[\sigma^o, \delta + \sigma^o]$ . Slično se zaključi i za  $\sigma^o$  koji ne smije biti lijeva krajnja točka od  $\mathcal{I}$ , te da postoji rješenje na intervalu  $[\sigma^o - \delta, \sigma^o]$ . Uzmemo li se u obzir oba rješenja zaključi se da postoji rješenje na intervalu  $[\sigma^o - \delta, \sigma^o + \delta]$ . Ako je  $\sigma^o$  u nekom slučaju krajnja desna točka intervala  $\mathcal{I}$ , dobije se rješenje na intervalu  $[\sigma^o, \sigma^o + \delta]$ , ili  $[\sigma^o - \delta, \sigma^o]$  ukoliko je to bila lijeva krajnja točka istog intervala. U svakom slučaju rješenje je definirano u okolini  $\sigma^o$  unutar intervala  $\mathcal{I}$ . Taj rezultat lokalne egzistencije vrijedi za svaki inicijalni par  $(\sigma^o, x^o)$ .

#### Jedinstvenost

Sada se pokazuje da ukoliko su  $\xi$  i  $\zeta$  dva rješenja problema sa početnim uvjetom na intervalu  $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$ , tada je  $\xi = \zeta$  na  $\mathcal{J}$ . Dokazuje se njihovo podudaranje za  $t \in \mathcal{J}$  i  $\sigma^o \in \mathcal{J}$  u slučaju kad je  $t \geq \sigma^o$  (slučaj  $t \in \sigma^o$  je analogan). Najprije se pokazuje da se  $\xi$  i  $\zeta$  podudaraju na nekom moguće malom intervalu  $[\sigma^o, \sigma^o + \delta]$  sadržanom u  $\mathcal{J}$ . Neka je  $\delta > 0$ .

Izabere se  $\rho$  za zadani  $x^o$ . Radi neprekidnosti od  $\xi$  i  $\zeta$  postoji  $\delta$  dovoljno malen takav da  $\xi(t)$  i  $\zeta(t)$  (za  $t \in [\sigma^o, \sigma^o + \delta]$ ) oboje pripadaju  $K_\rho(x^o)$ . Koristi se lema A.0.4 i uzimaju se  $X = X_o = X$  te  $f, x^o, \xi, \zeta$  i  $\alpha$  kao ranije. Neka je  $z^o = x^o, g = f, L = [\sigma^o, \sigma^o + \delta]$  i  $\beta \equiv 0$ . Opet, termini 1 i 3 iz nejednakosti u lemi A.0.4 iščezavaju u  $\infty$ , pa ostaje  $\|\xi(t) - \zeta(t)\| \leq \int_{\sigma^o}^t \alpha(\tau)\|\xi(\tau) - \zeta(\tau)\|d\tau$  za sve  $t \in [\sigma^o, \sigma^o + \delta]$ . Sada, uključujući lemu A.0.5 uz izbor konstante  $c = 0$ , funkcija lijeve strane mora biti 0. To dokazuje jedinstvenost egzistencije danog malenog intervala.

Neka se pak pretpostavi da egzistira neki  $t > \sigma^o$  takav da je (za  $t \in \mathcal{J}$ )  $\xi(t) \neq \zeta(t)$ . Definira se  $\sigma^1 := \inf\{t \in \mathcal{J} \mid \xi(t) \neq \zeta(t)\}$ . Sada je  $\xi = \zeta$  na  $[\sigma^o, \sigma^1]$  i opet radi neprekinutosti od  $\xi$  i  $\zeta$  vrijedi  $\xi(\sigma^1) = \zeta(\sigma^1)$ . Gornja lokalna jedinstvenost vrijedi za svaki početni  $\sigma^o \in \mathcal{I}$  i svaki  $x^o \in X$ . Ukoliko se ovo primijeni na prethodni problem sa početnim vrijednostima uz izbor  $\sigma^1$  kao početnim vremenom i  $x^1 := \xi(\sigma^1)$  kao početnim stanjem, slijedi da je  $\xi = \zeta$  na intervalu  $[\sigma^1, \sigma^1 + \delta]$  za  $\delta > 0$ . To je u kontradikciji sa definicijom od  $\sigma^1$ .

#### Postojanje maksimalnog rješenja

Nadalje, želi se pokazati da postoji maksimalno rješenje početnog problema. Promatra se  $\tau_{min} := \inf\{t \in \mathcal{I} \mid \text{rjesenje po\c{c}etnog problema na } [t, \sigma^o]\}$ , te  $\tau_{max} := \sup\{t \in \mathcal{I} \mid \text{rjesenje na } [\sigma^o, t]\}$ . Rezultat lokalne egzistencije daje  $\tau_{min} < \tau_{max}$ . Promatra se otvoreni interval  $(\tau_{min}, \tau_{max})$ . Rješenje na tom intervalu postoji jer postoji i jedinstveno je rješenje na intervalu  $(s_n, t_n)$  ( $s_n \downarrow \tau_{min}$  i  $t_n \uparrow \tau_{max}$ ). Kako se bira  $\mathcal{J}$ ? Ako su  $\tau_{min}$  i  $\tau_{max}$  oboje u interioru od  $\mathcal{I}$  tada je  $\mathcal{J} = (\tau_{min}, \tau_{max})$ . Ako je  $\tau_{min}$  lijeva krajnja točka intervala  $\mathcal{I}$ , tada

rješenje postoji u intervalu  $\mathcal{J}$  koje sadrži  $\tau_{min}$ . Slično je i za  $\tau_{max}$ . U tom slučaju je  $\mathcal{J}$  relativno otvoren u  $\mathcal{I}$  i neprazan. Štoviše, ako je  $\tau_{min}$  u interioru od  $\mathcal{I}$  tada nema rješenja  $\zeta$  koje je definirano na  $[\tau_{min}, \sigma^o]$ . Zašto? Zbog teorema o lokalnoj egzistenciji primijenjenim na problem početnih vrijednosti sa  $\xi(\tau_{min}) = \zeta(\tau_{min})$ , slijedi da postoji rješenje na intervalu  $(\tau_{min}\delta, \tau_{min}]$ , ali i na intervalu  $(\tau_{min}\delta, \sigma^o]$ . To je u kontradikciji sa  $\tau_{min}$ . Zaključiti se da bilo koje rješenje problema sa početnim vrijednostima mora imati domenu koja uključuje  $\mathcal{J}$ , a radi toga posljednji dio teorema slijedi zbog jedinstvenosti.  $\square$

Za dokaz iduće leme koristi se propozicija A.0.1.

**Lema 1.3.2.** (Egzistencija rješenja sistema običnih diferencijalnih jednačbi sa početnim uvjetom)

Funkcija desne strane (A.0.2, eng. RHS - Right-Hand-Side) ima sljedeće svojstvo  $\leadsto$  za svaka dva realna broja  $\sigma$  i  $\tau$  takva da je  $\sigma < \tau$ , izmjeriv i omeđen  $\omega \in \mathcal{U}^{[\sigma, \tau]}$  i  $x_0 \in \mathcal{X}$  postoji neprazan interval  $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I} = [\sigma, \tau]$  koji je relativno otvoren u  $\mathcal{I}$ .  $\mathcal{J}$  sadrži  $\sigma$ , te postoji rješenje sustava jednačbi

$$\dot{\xi}(t) = (f(t), \xi(t), \omega(t)) \in \mathcal{J} \quad (1.3)$$

$$\xi(\sigma) = x_0. \quad (1.4)$$

Rješenje je maksimalno i jedinstveno. Za neko drugo rješenje  $\zeta : \mathcal{J}' \rightarrow \mathcal{X}$  definirano na  $\mathcal{J}' \subseteq \mathcal{I}$ , nužno vrijedi  $\mathcal{J}' \subseteq \mathcal{J}$  i  $\xi = \zeta$  na  $\mathcal{J}'$ . Ako je  $\mathcal{J} = \mathcal{I}$ , tada je  $\omega$  dohvatljivo iz  $x_0$ .

*Dokaz.* Neka je  $f$  funkcija desne strane. Definira se funkcija  $g(t, x) := f(t, x, \omega(t)) = \tilde{f}(\pi(t), x, \omega(t))$  na  $\mathcal{I} \times \mathcal{X}$  ( $\pi$  i  $\tilde{f}$  su iz definicije A.0.2).  $f$  zadovoljava sva tri svojstva iz definicije RHS funkcija. Prema drugom svojstvu iz te definicije je  $\tilde{f}$  neprekidna funkcija na  $\mathcal{S} \times \mathcal{X} \times \mathcal{U}$ , gdje je  $\mathcal{S}$  metrički prostor. Stoga je  $g(t, x)$  neprekidna funkcija po  $x$  za svaki fiksni  $t \in \mathbb{R}$ , pa je zadovoljena hipoteza (H2). Preslikavanje  $\mathcal{I} \rightarrow \mathcal{U} \times \mathcal{S}$  je izmjerivo (riječ je o preslikavanju  $t \rightarrow (\omega(t), \pi(t))$ ). Prema tome  $g(\cdot, x)$  je kompozicija izmjerive i neprekidne funkcije, te je zbog toga izmjeriva funkcija po  $t$ , za svaki fiksni  $x$ . Time je zadovoljena i hipoteza (H1). Vrijede uvjeti u teoremu 1.3.1. Prema propoziciji A.0.1 treba provjeriti da za svaki kompaktan podskup  $K \subseteq \mathcal{X}$ ,  $x_0 \in \mathcal{X}$ ,  $x \in \mathcal{X}$  i  $t \in \mathcal{I}$  postoji lokalno omeđeno izmjerivo preslikavanje  $\alpha$  i  $\beta$  takvo da je  $|g(t, x_0)| \leq \beta(t)$  i  $|g(t, x_0)| \leq \alpha(t)$ . Kako je  $\omega$  omeđen i  $\pi$  lokalno omeđen postoje kompaktni skupovi  $K_1, K_2$  takvi da je  $\omega(t) \in K_1$  i  $\pi(t) \in K_2$  za svaki  $t$  element skupa  $\mathcal{I}$ . Radi neprekidnosti od  $\tilde{f}$  i  $\tilde{f}_x$  postoje gornje međe  $M1$  za  $|\tilde{f}|$  i  $M2$  za  $|\tilde{f}_x|$  na  $K_2 \times K \times K_1$ . Tada su  $\alpha \equiv M2$  i  $\beta \equiv M1$  željene funkcije. Time se kompletiraju uvjeti teorema 1.3.1, pa slijedi egzistencija i jedinstvenost.  $\square$

**Lema 1.3.3.** (Definicija sistema preko RHS funkcija)

Neka je  $f$  funkcija desne strane i neka je  $\Phi(\tau, \sigma, x, \omega) = \xi(\tau)$ , gdje je  $\xi(\tau)$  jedinstveno rješenje jednačbi 1.3 i 1.4 (na  $[\sigma, \tau]$ ) i  $\xi(\tau)$  dohvatljiv iz  $x_0$  na  $\mathcal{D} = \{(\tau, \sigma, x, \omega) | \sigma < \tau, x \in \mathcal{X}, \omega \in \mathcal{U}^{[\sigma, \tau]}\}$ . Tada je  $\Sigma_f = (\mathbb{R}, \mathcal{X}, \mathcal{U}, \Phi)$  sistem.

**Definicija 1.3.4.** Vremenski kontinuiran sistem je sistem tipa  $\Sigma_f$ , gdje je  $f$  funkcija desne strane. Vremenski kontinuiran sistem sa izlazom je sistem  $\Sigma$  koji je vremenski kontinuiran,  $\mathcal{Y}$  je metrički prostor i  $h : \mathcal{T} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  neprekidna funkcija.

**Definicija 1.3.5.** Neka je  $k \in \{1, 2, \dots, \infty\}$  i  $m \in \mathbb{Z} (m < 0)$ . Vremenski neprekidan sistem je klase  $\mathbb{C}^k$  ako je  $\mathcal{U}$  otvoren potprostor od  $\mathbb{K}^m$  za kojeg vrijedi da se  $\mathcal{S}$  i  $\tilde{f}$  (iz definicije A.0.2) mogu izabrati tako da je  $\mathcal{S}$  otvoren potprostor Euklidskog prostora, a  $\tilde{f}$  je klase  $\mathbb{C}^k$ . Ako je  $\Sigma$  sistem sa izlazom, tada je  $\mathcal{Y}$  otvoren potprostor Euklidskog prostora  $\mathbb{K}^p$  i  $h(t, \cdot)$  i svaki  $t$  je funkcija klase  $\mathbb{C}^k$ .

## 1.4 Linearizacija neprekidnih sistema

Neka je  $\mathcal{X} = \mathbb{K}^n$ ,  $\mathcal{U} = \mathbb{K}^m$ , te  $f(t, x, u) = A(t)x + B(t)u$  ( $A(t)$  je  $n \times n$  matrica,  $B(t)$  je  $n \times m$  matrica).  $f : \mathbb{R} \times \mathcal{X} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X}$  je linearna funkcija u  $(x, u)$  za fiksni  $t$  i lokalno omeđena u točki  $t$  za fiksni par  $(x, u)$ . Prema definiciji A.0.2 je  $f$  funkcija desne strane.

**Definicija 1.4.1.** Vremenski neprekidan sistem  $\Sigma$  je linearan (i konačno-dimenzionalan,  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ili  $\mathbb{C}$ ) ako je klase  $\mathbb{C}^1$  i:

(a)  $\mathcal{X} = \mathbb{K}^n$ ,  $\mathcal{U} = \mathbb{K}^m$

(b)  $f(t, \cdot, \cdot)$  je linearna funkcija za svaki  $t$  element skupa  $\mathbb{R}$ . Sistem sa izlazom  $\Sigma$  je linearan ako je dodatno:

(1)  $\mathcal{Y} = \mathbb{K}^p$

(2)  $h(t, \cdot)$  linearna funkcija za svaki  $t$  element skupa  $\mathbb{R}$ .

Dimenzija od  $\Sigma$  je dimenzija od  $\mathcal{X}$ .

**Definicija 1.4.2.** Neka je  $\Sigma$  vremenski kontinuiran sistem klase  $\mathbb{C}^k$  na  $\mathbb{R}$ . Pretpostavka je da je  $\Gamma = (\bar{\xi}, \bar{\omega})$  trajektorija gibanja za  $\Sigma$  na intervalu  $I$ . **Linearizacija** od  $\Sigma$  oko  $\Gamma$  je vremenski neprekidan linearan sistem  $\Sigma_*[\Gamma]$  sa funkcijom  $f_*$  lokalnom po vremenu gdje je

$$f_*(t, \cdot, \cdot) = \begin{cases} f(t, \cdot, \cdot)_*[\bar{\xi}(t), \bar{\omega}(t)], & t \in I \\ 0, & t \notin I. \end{cases}$$

Ako je  $\Sigma$  sistem sa izlazom, tada je  $\Sigma_*[\Gamma]$  vremenski neprekidan linearan sistem sa izlazom za kojeg je definirana gornja funkcija  $f$  i za kojeg je  $\mathcal{Y} = \mathbb{R}^p$  te je

$$h_*(t, \cdot) = \begin{cases} h(t, \cdot)_*[\bar{\xi}(t)], & t \in I \\ 0, & t \notin I. \end{cases}$$

Neka je  $I = \mathbb{R}$  te  $\bar{\xi}$  i  $\bar{\omega}$  konstante za koje vrijedi  $\bar{\xi}(t) = x$  i  $\bar{\omega}(t) = u$  tada je  $\Sigma_*[\Gamma]$  **linearizacija** od  $\Sigma$  u  $(x, u)$ .



## Upravlјivost sistemom

Poznavajući definiciju sistema, njegovu linearizaciju, kontinuiranost odnosno diskretnost, želi se reći nešto i o *upravlјivosti* samim sistemom. Dohvatljivost sistema može se definirati i na sljedeći način. Promatra se  $\Sigma = (\mathcal{T}, \mathcal{X}, \mathcal{U}, \Phi)$  kao proizvoljan sistem.

**Definicija 1.4.3.** *Neka je  $(x, t) \in \mathcal{X} \times \mathcal{T}$ . Par  $(z, \tau)$  se može dohvatiti iz  $(x, \sigma)$  ako i samo ako postoji put u  $\Sigma$  na  $[\sigma, \tau]$  čije je početno stanje  $x$ , a krajnje  $z$ . To znači da postoji  $\omega \in \mathcal{U}^{(\sigma, \tau)}$  takva da je  $\phi(\tau, \sigma, x, \omega) = z$ . Kaže se još da se  $(x, \sigma)$  može kontrolirati preko  $(z, \tau)$ . Neka su  $x$  i  $z$  oboje elementi skupa  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{T} \geq 0$  ( $\mathcal{T} \in \tau$ ) i postoje  $\sigma$  i  $\tau$  oba iz  $\mathcal{T}$  sa svojstvom  $\tau - \sigma = T$ . Da se  $(z, \tau)$  može dohvatiti iz  $(x, \sigma)$  ( $z$  se može dohvatiti iz  $x$  u vremenu  $T$ ) znači da se  $x$  može kontrolirati sa  $z$  (ili  $z$  se može dohvatiti iz  $x$ ) ako to vrijedi za najmanje jedan  $T$ . (oznaka:  $(x, \sigma) \rightsquigarrow_T (z, \tau)$ ).*

Termin  $x \rightsquigarrow_T z$  znači da se  $z$  može dohvatiti iz  $x$  u vremenu  $T$ .

**Definicija 1.4.4.** *Sistem  $\Sigma$  je **upravlјiv** na intervalu  $[\sigma, \tau]$  ako za bilo koje elemente  $x$  i  $z$  skupa  $\mathcal{X}$  vrijedi  $(x, \sigma) \rightsquigarrow (z, \tau)$ . Sistem je **upravlјiv u vremenu  $T$**  ako za svaka dva broja  $x \in \mathcal{X}$  i  $z \in \mathcal{X}$  vrijedi  $x \rightsquigarrow_T z$ .*

Za potrebe prepoznavanja upravlјivosti nekog sistema navodi se sljedeća karakterizacija.

**Teorem 1.4.5.**  *$n$ -dimenzionalni vremenski diskretni linearni sistem  $\Sigma$  je **upravlјiv** ako i samo ako je rang  $\mathcal{R}(A, B) = n$ .*

*Dokaz.* Poznato je da iz Hamilton-Cayleyeva teorema vrijedi  $A^n = \alpha_1 I + \alpha_2 A + \dots + \alpha_n A^{n-1}$  gdje je  $\mathcal{X}_A(s) = \det(sI - A) = s^n - \alpha_n s^{n-1} - \dots - \alpha_2 s - \alpha_1$  karakteristični polinom od  $A$ . Nakon množenja izraza za  $A^n$  matricom  $A$

$$A^n = \alpha_1 I + \alpha_2 A + \dots + \alpha_n A^{n-1} / * A$$

dobije se  $A^{n+1} = \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \dots + \alpha_n A^n$ . Supstitucijom sa  $A^n = \alpha_1 I + \alpha_2 A + \dots + \alpha_n A^{n-1}$ , dobije se  $A^{n+1} = \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \dots + \alpha_n (\alpha_1 I + \alpha_2 A + \dots + \alpha_n A^{n-1}) = \alpha_n \alpha_1 I + (\alpha_1 + \alpha_n \alpha_2) A + \dots + (\alpha_{n-1} + \alpha_n^2) A^{n-1}$ . Dakle,  $A^{n+1}$  je linearna kombinacija matrice  $A^i$ ,  $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ . Isto bi vrijedilo i za sve druge potencije od  $A$  koje se mogu prikazati kao linearne kombinacije nižih potencija matrice  $A$ . Znači, za svaki vektor  $v$  se linearna ljuska  $A^i v$ ,  $i \geq 0$  podudara sa linearnom ljuskom  $A^i v$ ,  $i < n$ . Ako se to primijeni na svaki stupac matrice  $B$ , zaključi se da će uvjet rang  $\mathcal{R}(A, B) = n$  biti narušen ako i samo ako postoji neki  $n$ -dimenzionalni vektor  $\psi \neq 0$  takav da je  $\psi A^i B = 0$  za svaki  $i \geq 0$ . To znači da postoji linearno preslikavanje  $x \rightarrow \psi x$  koje iščezava za sva stanja koja su dohvatljiva iz nultog inicijalnog stanja. Dakle, sistem je upravlјiv.  $\square$

Neka su :  $\mathcal{R}(x) = \{z \in \mathcal{X} | x \rightsquigarrow z\}$ ,  $\mathcal{C}(x) = \{z \in \mathcal{X} | z \rightsquigarrow x\}$ ,  $\mathcal{R}^T(x) = \{z \in \mathcal{X} | x \rightsquigarrow z\}$ .

Termin,  $x \in \mathcal{X}$  je *ravnotežno stanje* u vremenski-invarijantnom sistemu je pretpostavlja da postoji  $u \in \mathcal{U}$  takav da za svaki  $T \in \mathcal{T}_+$  ( $T \in \mathcal{T}$  takav da je  $T > 0$ ) vrijedi  $\phi(T, 0, x, \omega) = x$ , gdje je  $\omega = u$ . Za vremenski-diskretne sisteme je  $\mathcal{P}(x, u) = x$ , a za vremenski neprekidne  $f(x, u) = 0$ .

**Korolar 1.4.6.** *Neka je  $\mathcal{X}$  vektorski prostor nad poljem  $\mathbb{K}$ ,  $x$  ravnotežno stanje,  $T \in \mathcal{T}_+$  i  $\dim \mathcal{X} = n < \infty$ . Neka je definiran potprostor  $\mathcal{R}^T(x)$ . Tada vrijedi:*

(a) *ako je  $\mathcal{T} = \mathbb{Z}$  onda je  $\mathcal{R}^n = \mathcal{R}(x)$*

(b) *ako je  $\mathcal{T} = \mathbb{R}$  onda je  $\mathcal{R}^\varepsilon = \mathcal{R}(x)$  za svaki  $\varepsilon > 0$ .*

*Dokaz.* Neka je  $0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_{n+1}$  rastući niz elemenata u  $\mathcal{T}$  i neka je (za svaki  $i \in \mathbb{Z}$ )  $\mathcal{X}_i := \mathcal{R}_i^T(x)$ . Kada bi  $\mathcal{X}_i$  bio sadržan u  $\mathcal{X}_{i+1}$ , tada bi  $\dim \mathcal{X}_{i+1} > \dim \mathcal{X}_i$  i  $\dim \mathcal{X}_{n+1} \geq n+1 > \dim \mathcal{X}$ , a to je kontradikcija. U svakom takvom lancu skupa dohvatljivih stanja postoji  $i$ , takav da  $\mathcal{X}_i = \mathcal{X}_{i+1}$ . Kako je za bilo koje  $\mathcal{S}$  i  $T \in \mathcal{T}_+$ ,  $T > 0$  i  $\mathcal{R}^{\mathcal{S}}(x) = \mathcal{R}^{\mathcal{S}+T}(x)$ , nužno je  $\mathcal{R}^{\mathcal{S}}(x) = \mathcal{R}(x)$  (To se vidi tako što za neki  $k$  nenegativan cijeli broj vrijedi  $\mathcal{R}^{\mathcal{S}+kT}(x) = \mathcal{R}^{\mathcal{S}}(x)$ . Kako? Birajući  $k=1$ , raspiše se  $\mathcal{R}^{\mathcal{S}+(k+1)T}(x) = \mathcal{R}^T(\mathcal{R}^{\mathcal{S}+kT}(x)) = \mathcal{R}^T(\mathcal{R}^{\mathcal{S}}(x)) = \mathcal{R}^{\mathcal{S}+T}(x) = \mathcal{R}^{\mathcal{S}}(x)$ ). Stoga, neka je  $z \in \mathcal{R}(x)$ . Postoji  $t \in \mathcal{T}$  takav da je  $z \in \mathcal{R}^t(x)$ . Neka za  $k$  vrijedi  $\mathcal{S} + kT > t$  tada je  $z \in \mathcal{R}^{\mathcal{S}+kT}(x) = \mathcal{R}^{\mathcal{S}}(x)$ . Iz  $\mathcal{X}_i = \mathcal{X}_{i+1}$  se zaključuje da je  $\mathcal{R}^{\tau_i}(x) = \mathcal{R}(x)$ . U slučaju (a) uzme se  $\tau_i = i$ , a u slučaju (b)  $\tau_i = i\varepsilon/n$ .  $\square$

**Korolar 1.4.7.** (a)  *$n$ -dimenzionalni vremenski diskretni linearni sistem je **upravljiv** akko  $\mathcal{R}(0) = \mathcal{R}^n(0) = \mathcal{X}$ .*

(b) *Vremenski kontinuiran linearni sistem je **upravljiv** akko je  $\mathcal{R}(0) = \mathcal{R}^\varepsilon(0) = \mathcal{X}$  za  $\varepsilon > 0$ , odnosno, akko je  $\mathcal{C}(0) = \mathcal{C}^\varepsilon(0) = \mathcal{X}$  za svaki  $\varepsilon > 0$ .*

*Dokaz.* Ako je  $\Sigma$  upravljiv, tada za svaki  $x \in \mathcal{X}$  vrijedi  $\mathcal{R}(x) = \mathcal{X}$ . Prema korolaru 1.4.6 je  $\mathcal{R}^n(0) = \mathcal{X}$  (u vremenski diskrentom slučaju), odnosno  $\mathcal{R}^\varepsilon(0) = \mathcal{X}$  za  $\varepsilon > 0$  (u neprekidnom slučaju). Ako je  $\mathcal{R}^T(0) = \mathcal{X}$  za  $T > 0$  tada je  $\Sigma$  upravljiv jer ukoliko za sve  $y \in \mathcal{X}$  vrijedi  $0 \rightsquigarrow_T y$ , tada je  $(0, 0) \rightsquigarrow (y, T)$  za sve  $y \in \mathcal{X}$ .  $\Sigma$  je upravljiv na  $[0, T]$ . Zašto? Neka su  $(x, \sigma)$  i  $(z, \tau)$  dva para za koje vrijedi  $y := z - \phi(\tau, \sigma, x, 0)$ . Ako je  $(0, \sigma) \rightsquigarrow (y, \tau)$  tada je  $(x, \sigma) \rightsquigarrow (z, \tau)$ , pa je sistem upravljiv. Jednak zaključak vrijedi i u neprekidnom slučaju, tj.  $\mathcal{C}^T(0) = \mathcal{X}$  (u tom slučaju je  $(x, 0) \rightsquigarrow (0, T)$ , pa slijedi upravljivost  $\Sigma$  na  $[0, T]$ ).  $\square$

**Teorem 1.4.8.**  *$n$ -dimenzionalni vremenski neprekidan linearni sistem  $\Sigma$  je **upravljiv** akko je rang  $\mathcal{R}(A, B) = n$ .*

*Dokaz.*  $\Leftarrow$  Ako je rang  $(A, B) < n$  tada postoji vektor redak  $\beta \neq 0$  tako da  $\beta A^i B = 0$  za  $i \geq 0$ . Ako svaki element od  $\mathcal{R}(0) = \mathcal{R}^1(0)$  ima oblik

$$x = \int_0^1 e^{A(1-t)} B \omega(t) dt = \int_0^1 e^{A(t)} B \omega(1-t) dt \quad (1.5)$$

tada vrijedi da je  $\beta x = 0$  za takav  $x$ . Stoga  $\mathcal{R}(0) \neq \mathcal{X}$ , pa sistem prema (a) dijelu korolara 1.4.7 nije upravljiv.

$\implies$  Ako sistem nije upravljiv tada postoji  $\beta \neq 0$  takav da je  $\beta x = 0$  za svaki  $x$  u potprostoru  $\mathcal{R}(0)$ . Razmatra se kontrola  $\omega(t) = B^* e^{A^*(1-t)} \beta^*$  na intervalu  $[0, 1]$ , gdje "β\*" predstavlja konjugiranje i transponiranje. Iz izraza 1.5, slijedi  $0 = \beta x = \int_0^1 \beta e^{A(t)} B B^* e^{A^*} \beta^* dt = \int_0^1 \|B^* e^{A^*(t)} \beta^*\|^2 dt$ . Stoga je  $\beta e^{tA} B = 0$ . □

## Osmotrivost sistema

Na početku rada je definiran sistem diferencijalnih jednačbi i njegovo rješenje za početno stanje  $x(t_0) = x_0$  je označeno sa  $\phi(n; x_0, t)$ .

**Definicija 1.4.9.** Stanje  $\bar{x} \in \mathbb{X}$  **nije osmotrivo** ako je  $y(t) = C\phi(0, \bar{x}, t) = 0$  za  $t \geq 0$  (ako ga ne možemo razlikovati od nultog inicijalnog stanja).  $\mathbb{X}^{unabs} =$  skup svih stanja koja nisu osmotriva. Sistem je osmotriv ako je  $\mathbb{X}^{unabs} = \emptyset$ . Matrica osmorivosti je  $O_n(C, A) = [C, CA, \dots, CA^{n-1}]^T$  ( $O(C, A) = [C, CA, \dots]$ ).

Slijede dva teorema o osmotrivosti bez dokaza (dokazuju se sasvim analogno prethodno dokazanim teorema o upravljivosti).

**Teorem 1.4.10.**  $n$ -dimenzionalni vremenski diskretan linearni sistem  $\Sigma$  je **osmotriv** akko je rang  $O(A, B) = n$  ili ekvivalentno akko je  $(A^T, C^T)$  **upravljiv**.

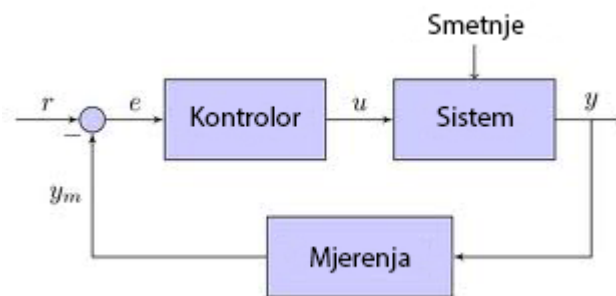
**Teorem 1.4.11.**  $n$ -dimenzionalni vremenski neprekidan linearan sistem  $\Sigma$  je **osmotriv** akko je rang  $O(A, C) = n$  ili ekvivalentno akko je  $(A^T, C^T)$  **upravljiv**.

## 1.5 Zatvoreni sistemi ili sistemi s povratnom vezom

### Egzistencija kontrole sistema s povratnom vezom

Iduće područje interesa je kontrola nad samim sistemom. Promatraju se dvije osnovne klase kontrolnih sistema - sistemi otvorene petlje ili otvoreni sistemi (eng. *open-loop systems*) i sistemi zatvorene petlje ili zatvoreni sistemi (eng. *closed-loop systems*). Sistem

otvorene petlje je tip sistema koji koristi samo jedan ulazni signal za dobivanje izlaza. Kontrolor otvorenog sistema je tip kontrolora koji računa ulaz sistema koristeći se jedino tekućim (sadašnjim) stanjem. Za izračun da li su izlazi sistema postigli željenu vrijednost ulaza sistema ne koristi se povratna veza. Kontrola otvorenih sistema je korisna za dobro definirane sisteme gdje veza između ulaza i rezultirajućeg stanja može biti izmodelirana matematičkim formulama. Primjer je izračun voltaže koja je potrebna električnom motoru koji "vozi" konstantno opterećenje, da bi postigao željenu brzinu. To je dobra aplikacija za kontrolu otvorenih sistema. Kad opterećenje ne bi bilo poznato, odnosno, kad bi se brzina motora mijenjala kao funkcija po opterećenju ili voltaži, onda bi u tom slučaju kontrolor otvorenog sistema bio nedovoljan za osiguranje kontrole brzine. Jedan takav primjer je sistem koji prezentira tekuću vrpcu. Taj sistem se giba konstantnom brzinom. Zahvaljujući voltaži sistem će se gibati, ali različitim brzinama ovisno o opterećenju motora (težina objekta na vrpici). Da bi se vrpca gibala konstantnom brzinom, voltaža motora mora biti namještena u ovisnosti o teretu. U tom slučaju, neophodan je zatvoreni sistem. To je tip sistema koji automatski mijenja izlaz koji se temelji na razlici između signala povratne veze i ulaznog signala. U njemu se neki ili svi izlazi koriste kao ulazi. U zatvorenom sistemu senzor pamti izlaz (recimo brzinu automobila) i šalje podatke u kontrolor koji uključuje kontrolu za postizanje željenog izlaza. Izlaz sistema  $y(t)$  se vrati nazad preko mjerenja senzora  $F$  u referentnu vrijednost  $r(t)$ . Kontrolor  $C$  uzima grešku  $e$  između: reference i izlaza da promijeni ulaz  $u$  u sistem sa kontrolom  $P$ . To je zatvoreni ili kontrolor povratnom vezom.



Slika 1.1: Kontrola povratnom vezom

Na slici 1.1 je prikazana kontrola sistema povratnom vezom ili zatvoreni sistem. Kontrola povratnom vezom se u osnovi dijeli na:

- (a) povratnu vezu stanja sistema - sve se varijable stanja mjere i mogu koristiti u povratnoj vezi

- (b) povratnu vezu izlaza sistema - samo neke izlazne varijable se mjere i mogu koristiti kao povratna veza

Predmet interesa je stabilnost sistema. Promatra se ponovno sistem s početka rada  $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ , gdje su  $t \geq 0, A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{B}^{n \times m}$ , a  $n$  i  $m$  nenegativni cijeli brojevi.  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  ili  $\mathbb{R}$ . Sistem se modificira uvodeći zamjenu  $u(t) = Fx(t) + v(t), t \geq 0$ , gdje je  $v$  vanjski ulaz, a  $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{U}$  proizvoljno preslikavanje - povratna veza stanja. Svrha zamjene je iz nestabilizabilnog para  $(A, B)$  dobiti stabilizabilan par  $(A + BF, B)$ . Prema tome, istražuju se upravljivost i spektar matrice  $A + BF$ . Područje stabilnosti označi se sa:  $\mathbb{C}^- = \{s : \operatorname{Re}(s) < 0\}$ . Područje nestabilnosti označi se sa:  $\mathbb{C}^+ = \{s : \operatorname{Re}(s) \geq 0\}$ .  $(A, B)$  je stabilizabilan par ako postoji  $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{U}$  takvo da je  $\sigma(A + BF) \subset \mathbb{C}^-$ , gdje je  $\sigma$  spektar matrice.

Sljedeći teorem je preuzet iz [7].

**Teorem 1.5.1.** (Teorem o egzistenciji preslikavanja s povratnom vezom (eng. feedback))  
Par  $(A, B)$  je upravljiv akko za svaki skup  $\lambda$  od  $n$  kompleksnih brojeva koji je simetričan obzirom na realnu os postoji preslikavanje  $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{U}$  takvo da je  $\sigma(A + BF) = \lambda$ .

*Dokaz.* Neka je  $B = \{b\} = b$ . Linearna ljuska skupa  $\{b\}$  označena je sa  $\mathcal{B}$ , gdje je  $b \in \mathcal{X}$ .

Promatra se slučaj  $d(\mathcal{B}) = 1$ .

Označi se  $\mathcal{B} = \operatorname{Im} \mathcal{B}$ , te  $\langle A|\mathcal{B} \rangle = \mathcal{B} + A\mathcal{B} + \dots + A^{n-1}\mathcal{B}$ . Proučava se jednadžba sistema  $\dot{x} = Ax + bu$ . Neka je  $(A, b)$  upravljiv. Budući je  $\langle A|\mathcal{B} \rangle = \langle A|b \rangle = \mathcal{X}$  to vektori  $\{b, Ab, \dots, A^{n-1}b\}$  tvore bazu za  $\mathcal{X}$ .  $A$  je ciklička matrica, a  $b$  je generator. Neka je minimalni polinom od  $A$  dan sa  $\alpha(\lambda) = \lambda^n - (a_1 + a_2\lambda + \dots + a_n\lambda^{n-1})$ .

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \cdots 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \cdots 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \cdots a_{n-1} & a_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(To je standardna kanonska forma upravljivog para  $(A, b)$ ).  $\lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  i raspiše se  $(\lambda - \lambda_1) * \dots * (\lambda - \lambda_n) = \lambda^n - (\hat{a}_1 + \hat{a}_2\lambda + \dots + \hat{a}_n\lambda^{n-1})$ . Neka je  $f'$  vektor redak  $(\hat{a}_1 - a_1, \dots, \hat{a}_n - a_n)$ . Matrica  $A + bf'$  ima istu formu kao matrice u kanonskoj formi upravljivog para, gdje mjesto  $a_i$  stoji  $\hat{a}_i, i \in \mathbb{N}$ .

Sada se promatra slučaj  $d(\mathcal{B}) > 1$ .

$\implies$  Kako za svaki  $b \neq 0, b \in \mathcal{B}$  vrijedi: ako je  $(A, B)$  upravljiv postoji  $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{U}$  takav da je  $(A + BF, b)$  upravljiv. Tada je za  $b = Bu \in \mathcal{B}$  i  $F_1 : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{U}$ , par  $(A + BF_1, b)$  upravljiv. Definira se preslikavanje  $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{X}$ . Iz  $\sigma(A + BF_1 + bf') = \lambda \implies$  da je  $F = F_1 + uf'$  traženo preslikavanje.

$\impliedby$  Neka su  $\lambda_i, (i \in \mathbb{N})$  realne i različite svojstvene vrijednosti od  $A$  takve da  $\lambda_i \neq \sigma(A)(i \in$

$\mathbb{N}$ ). Izabere se  $F$  takav da  $\sigma(A + BF) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ . Neka je  $x_i \in \mathcal{X}(i \in \mathbb{N})$  odgovarajući svojstveni vektor : to znači  $(A + BF)x_i = \lambda_i x_i, i \in \mathbb{N} \Rightarrow x_i = (\lambda_i I - A)^{-1} B F x_i, i \in \mathbb{N}$ . Definira se

$$\begin{aligned} \alpha^0(\lambda) &= \alpha(\lambda) \\ \alpha^1(\lambda) &= \lambda^{n-1} - (a_2 + a_3\lambda + \dots + a_n\lambda^{n-2}) \\ &\quad \cdot \\ &\quad \cdot \\ &\quad \cdot \\ \alpha^{n-1}(\lambda) &= \lambda - a_n \\ \alpha^n(\lambda) &= 1, \end{aligned}$$

tada je  $(\lambda I - A)^{-1} = \sum_{j=1}^n \frac{\alpha^j(\lambda)}{\alpha(\lambda)} A^{j-1}$  za  $\alpha^i(\lambda) \in \mathbb{C}/\sigma(A), i \in \mathbb{N}$ .

Sada je  $x_i := \sum_{j=1}^n \alpha^j(\lambda_i) A^{j-1} B F, x_i \in \langle A | \mathcal{B} \rangle, i \in \mathbb{N}$ .  $\langle A | \mathcal{B} \rangle = \mathcal{X}$  jer je  $\mathcal{X}$  linearna ljuska elemenata  $x_i$ . Slijedi da je par  $(A, B)$  upravljiv.  $\square$



## Poglavlje 2

# LQR kontrola

Kao što je i rečeno u uvodu, ovdje će se kao *aktivni* promatrač pojava današnjice koristiti diferencijalne jednačbe za formiranje sistema koji će tu pojavu najbolje opisati. Želi se postići optimalna kontrola. Opći problem optimalne kontrole veže se uz minimizaciju odgovarajućeg funkcionala. U linearno-kvadratnoj regulaciji sistema jednačbi taj će funkcional biti kvadratan po odgovarajućoj varijabli. Glavno uporište ovog rada (u teorijskom konceptu) je pokazati teorem o egzistenciji i jedinstvenosti optimalne kontrole linearno-kvadratnog sistema baziranom na rješenju algebarske Riccatijeve jednačbe. Zanimljiva je veza LQR optimalne kontrole i rješenja neprekidne algebarske Riccatijeve jednačbe (eng. CARE ili *continuous-time algebraic Riccati equation*). Tu premosnicu je kreirala lijepa teorija slavnog *Richarda Ernesta-Bellmana* - američkog primijenjenog matematičara koji se proslavio doprinosima u dinamičkom programiranju. Na njegovu teoriju nadovezuje se još ljepša teorija *Wiliama Rowana Hamiltona* - irskog matematičara, neophodna za opise ponašanja i postojanja rješenja CARE-a, te na koncu za same uvjete egzistencije optimalnosti nekog problema. LQR kontrola spada u tzv. grupu optimalnih i robusnih kontrola (eng. *robust control*) (robusnost je vezana za sposobnost sistema da se odupre različitim poremećajima), čiji se problemi rješavaju minimizacijom normi. Polazeći od općeg problema optimalne kontrole i koristeći *Bellmanovu invarijantu*, dobiju se *Hamilton-Jacobi-Bellmanove jednačbe* za optimalnost rješenja. Koristiti će se svi rezultati vezani za Bellmanovu teoriju iz dodatka B. Rješava se (konačni) LQR problem u formi povratne veze stanja izračunate rješenjem Riccatijeve matrične jednačbe, te (beskonačni) LQR problem čije rješenje se traži u formi vremenski invarijantne povratne veze stanja sistema izračunate rješenjem algebarske Riccatijeve jednačbe.



## 2.1 Opći problem optimalne kontrole

### Konačno-dimenzionalni slučaj problema optimalne kontrole

$x(t) \rightsquigarrow n$ -dimenzionalni vektor stanja u vremenu  $t$

$u(t) \rightsquigarrow r$  dimenzionalni vektor kontrole (ulaza) u vremenu  $t$  ( $r < n$ )

$f \rightsquigarrow n$ -dimenzionalni vektor funkcija

$\phi$  i  $\theta \rightsquigarrow$  skalarne funkcije (neprekidne)

$u[t_o, T] \rightsquigarrow$  vrijednost funkcije  $u(t)$  na  $[t_o, T]$ , gdje su  $t_o$  i  $T$  poznati.

Problem je opisan jednačinama :

$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), t \in [t_o, T]$ , gdje su  $t_o, T$  i  $x(t_o)$  poznati (rješenje sistema je funkcija:

$x(t) = x(t_o) + \int_{t_o}^t f(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau$  i jedinstvena je radi neprekinutosti funkcija  $\phi$  i  $\theta$  te uvjeta da  $u(t)$  bude po dijelovima neprekidna funkcija).

#### Što znači uvesti optimalnu kontrolu navedenog sistema?

Definira li se

$$I(t_o, x(t_o), u[t_o, T]) = \int_{t_o}^T \phi(x(t), u(t), t) dt + \theta(x(T), T), \quad (2.1)$$

gdje je  $\theta(x(T), T)$  rubni uvjet, tada optimalnost znači: odredi  $u[t_o, T]$  tako da  $I(t_o, x(t_o), u[t_o, T])$  bude minimalne vrijednosti.

#### Kako naći minimalnu vrijednost navedenog funkcionala ?

Definira se Bellmanova funkcija

$$V(x(t), t) := \inf_{u[t, T]} \int_t^T \phi(x, u, \tau) d\tau + \theta(x(T), T) \quad (2.2)$$

za proizvoljan  $t \in [t_o, T]$  i proizvoljni početni  $x(t)$ . Potom se primijeti da je minimum funkcionala  $I(t_o, x(t_o), u[t_o, T])$  zapravo vrijednost  $V(x(t), t)$  za  $t = t_o$ . Koristeći se Bellmanovim principom optimalnosti, dolazi se do Hamilton-Jacobi-Bellmanovih jednačina za optimalnost (kako je to napravljeno u dodatku B). Te jednačine su dane zapisom :

$$-\frac{\partial V}{\partial t} = \inf_{u(t)} [\phi(x, u, t) + \frac{\partial V}{\partial x} f(x, u, t)]. \quad (2.3)$$

Definira li se

$$J(x, u, \frac{\partial V}{\partial x}, t) := \phi(x, u, t) + \frac{\partial V}{\partial x} f(x, u, t) \quad (2.4)$$

dobije se kompaktniji zapis jednačini za rješenje  $V(x(t), t)$  dan sa :

$$-\frac{\partial V}{\partial t} = \inf_{u(t)} J(x, u, \frac{\partial V}{\partial x}, t) \quad (2.5)$$

$$V(x(T), T) = \theta(x(T), T). \quad (2.6)$$

Neka je definirana funkcija:

$$u^*(t) = \text{Arg}[\inf_{u(t)} J(x, u, \frac{\partial V}{\partial x}, t)], t \in [t_o, T]. \quad (2.7)$$

Sada se rukuje svim potrebnim alatom za dokazivanje egzistencije rješenja minimizacije funkcionala  $I(t_o, x(t_o), u[t_o, T])$ .

**Teorem 2.1.1. Egzistencija optimalne kontrole općeg konačno-dimenzionalnog problema**  
*Pretpostavi se da je  $V(x, t)$  neprekidno diferencijabilna funkcija i da zadovoljava 2.5 i 2.6, te da postoji funkcija  $u^*[t_o, T]$  kao u 2.7 za  $t \in [t_o, T]$  koja zadovoljava  $J^* = \inf_{u(t)} J(x, u, -\frac{\partial V}{\partial x}, t)$ . Tada je  $u^*[t_o, T]$  optimalna kontrola koja minimizira  $I(t_o, x(t_o), u[t_o, T])$ , te je minimalna vrijednost funkcionala  $V(x(t_o), t_o)$ .*

*Dokaz.* Funkcionalu  $I(t_o, x(t_o), u[t_o, T])$  pribroji se vrijednost  $\int_{t_o}^T \frac{dV(x(t), t)}{dt} dt - [V(x(T), T) - V(x(t_o), t_o)]$  (time se vrijednost funkcionala ne mijenja). Uz derivaciju po vremenskoj varijabli

$$\frac{dV(x(t), t)}{dt} = \frac{\partial V(x(t), t)}{\partial t} + \frac{\partial V^T(x(t), t)}{\partial x} f(x(t), u(t), t) \quad (2.8)$$

dobije se:  $I(t_o, x(t_o), u[t_o, T]) = \int_{t_o}^T (\phi(x, u, t) + \frac{\partial V(x(t), t)}{\partial t} + \frac{\partial V^T(x(t), t)}{\partial x} f(x(t), u(t), t)) dt + \theta(x(T), T) - V(x(T), T) + V(x(t_o), t_o)$ . Koristeći se s 2.4, 2.5, 2.6 i zapisom  $J^* = \inf_{u(t)} J(x, u, \frac{\partial V}{\partial x}, t)$  je  $I(t_o, x(t_o), u[t_o, T]) = V(x(t_o), t_o) + \int_{t_o}^T (J(x, u, \frac{\partial V}{\partial x}, t) - J^*(x, u^*, \frac{\partial V}{\partial x}, t)) dt$ . Budući da je za svaki  $u$ ,  $J^*(x, u^*, \frac{\partial V}{\partial x}, t) \leq J(x, u, \frac{\partial V}{\partial x}, t)$  to prethodno definirani integral  $I(t_o, x(t_o), u[t_o, T])$  ima minimalnu vrijednost u 0 koja je zadovoljena za  $u[t_o, T] = u^*[t_o, T]$ . Minimalna vrijednost funkcionala  $I(t_o, x(t_o), u[t_o, T])$  je  $V(x(t_o), t_o) = I(t_o, x(t_o), u^*[t_o, T]) \leq I(t_o, x(t_o), u[t_o, T])$ , za sve  $u[t_o, T]$ .

□

## Beskonačno-dimenzionalni slučaj problema optimalne kontrole

U ovom je slučaju opis problema dan jednačbama:  $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$  gdje je samo  $x(0)$  poznat. Naći optimalnu kontrolu ovome sistemu znači naći minimalnu vrijednost funkcionala  $I(x(0), u[0, \infty >) = \int_0^\infty (\psi(x(t), u(t))) dt$ . **Kako je osigurana jedinstvenost rješenja?**

Kontrola  $u(t)$  se traži u obliku  $\mu(x(t))$ , gdje je funkcija  $\mu$  neprekidna po varijabli  $x(t)$ . **Koji se  $u(t)$  mogu uzimati u obzir kao kandidati za kontrolu navedenog sistema?** Neka je  $\Omega$  skup svih  $u(t) = \mu(x(t))$ , takvih da je  $\mu$  neprekidna po  $x(t)$ . Ako se izabere  $u(t) \in \Omega$  i uključi u sistem jednadžbi  $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$ , te ako vrijedi  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$  za svaki  $x(0)$  tada je takav  $u(t)$  prihvatljiv i ide u smjeru optimizacije. To se svojstvo zove asimptotička stabilnost sistema. **Kako naći minimalnu vrijednost navedenog funkcionala?** Prema istom principu kao u konačno-dimenzionalnom slučaju, definira se Bellmanova funkcija:  $V(x(t)) = \inf_{\mu \in \Omega} I(x(t), \mu)$ , te se  $V(x(0))$  prihvaća kao vrijednost traženog minimuma. Neka je

$$\mu^* = \text{Arg} \inf_{\mu \in \Omega} \int_0^{\infty} \psi(x(t), \mu(x(t))) dt. \quad (2.9)$$

**Teorem 2.1.2. Egzistencija optimalne kontrole općeg beskonačno-dimenzionalnog problema**

Neka postoji kontrola  $u = \mu^*(x(t))$  i neprekidno-diferencijabilna funkcija  $V(x)$  takva da za svaki  $x$  vrijedi  $0 \leq V(x) \leq x^T V x$  ( $T = T^T > 0$ ), te

(a)  $\frac{\partial V^T}{\partial x} f(x(t), \mu^*(x(t))) + \psi(x(t), \mu^*(x(t))) = 0$

(b)  $\frac{\partial V^T}{\partial x} f(x(t), u(t)) + \psi(x(t), u(t)) \geq 0$  za svaki  $u$ .

Odnosno,  $J(x, \frac{\partial V}{\partial x}, u) \geq J(x, \frac{\partial V}{\partial x}, \mu^*(x)) = 0$ . Tada je  $\mu^*(x(t))$  optimalna kontrola koja minimizira funkcional  $I(x(0), u[0, \infty >)$ .

*Dokaz.* Neka je  $u(t) = \mu^*(x(t))$ . Tada je  $\frac{dV}{dt} x(t, x(0), \mu^*) = \frac{\partial V^T}{\partial x} f(x, \mu^*) + \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial V^T}{\partial x} f(x, \mu^*) = -\psi(x, \mu^*(x))$  (koristeći uvjet (a) u iskazu teorema). Ako se taj izraz integrira od 0 do  $\tau$ , tada je  $V(x(\tau)) - V(x(0)) = -\int_0^{\tau} \psi(x, \mu^*(x)) dt$ . Budući je  $V(x(\tau)) \leq x^T(\tau) T x(\tau)$  i  $x(\tau) \rightarrow 0$  slijedi  $\lim_{\tau \rightarrow \infty} V(x(\tau)) = 0$ , pa je zbog toga  $V(x(0)) = I(x(0), \mu^*)$ . S druge strane, uzme se neka proizvoljna dopustiva kontrola  $u(t) = \mu(x(t))$  sa  $x(t, x(0), \mu)$  kao odgovarajćim rješenjem sistema  $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$ . Integrirajući (b) dio iskaza teorema od 0 do  $\tau$ , gdje se uzima da je  $u(t) = \mu(x(t))$  dobiva se:  $V(x(\tau)) - V(x(0)) = \int_0^{\tau} \frac{\partial V^T}{\partial x} f(x, \mu(x)) dt \geq -\int_0^{\tau} \psi(x(t), \mu(x(t))) dt$ , odnosno  $V(x(0)) \leq V(x(\tau)) + \int_0^{\tau} \psi(x(t), \mu(x(t))) dt$ . Pusti se da  $\tau \rightarrow \infty$  i koristi se gornji zaključak da  $\lim_{\tau \rightarrow \infty} V(x(\tau)) = 0$  i da je  $V(x(0)) = I(x(0), \mu^*)$ . Dobije se:  $I(x(0), \mu^*) \leq I(x(0), \mu)$ . Stoga je  $V(x(0)) = \inf_{\mu \in \Omega} I(x(0), \mu)$ . □

## 2.2 LQR problem optimalne kontrole

### LQR kontrola konačno-dimenzionalnog sistema

Slijedi li se princip općeg slučaja optimalne kontrole za konačno-dimenzionalni problem uz specifičan odabir Bellmanove funkcije  $V(x(t), t)$ , može se pokazati egzistencija optimalne LQR kontrole koja potrebuje rješenje matrične Riccatijeve jednadžbe. Neka su

$A(t)$ ,  $B(t)$ ,  $Q(t)$  te  $R(t)$  vremenski-varijabilne matrice odgovarajućih dimenzija.  $Q(t)$  je simetrična pozitivno semidefinitna matrica, a  $R(t)$  je simetrično pozitivno definitna. Neka je  $M$  simetrično pozitivno semidefinitna matrica. Sistem diferencijalnih jednačbi za problem LQR kontrole u konačno-dimenzionalnom slučaju dan je sa:  $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$ , gdje su  $t_o$  i  $x(t_o)$  poznate vrijednosti. Pripadni funkcional koji se želi minimizirati je:  $I = \int_{t_o}^T [x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t)]dt + x^T(T)Mx(T)$  (ima kvadratni izgled po varijablama  $x(t)$  i  $u(t)$ , pa odatle i naziv linearno-kvadrati sistem). Iz Hamilton-Jacobi-Bellmanovih jednačbi je:

$$-\frac{\partial V(x(t), t)}{\partial t} = \inf_{u(t)} [x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t) + \frac{\partial V^T}{\partial x}(A(t)x(t) + B(t)u(t))] \quad (2.10)$$

$$V(x(T), T) = x^T(T)Mx(T). \quad (2.11)$$

Iz dokaza teorema 2.1 je  $u^*(t) = \inf_{u(t)} J(x, u, \frac{\partial V}{\partial x}, t)$  (za  $t \in [t_o, T]$ ) =  $= \inf_{u(t)} [\phi(x, u, t) + \frac{\partial V^T}{\partial x} f(x, u, t)] =$   $= \inf_{u(t)} [x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t) + \frac{\partial V^T}{\partial x}(A(t)x(t) + B(t)u(t))] =$   $= \inf_{u(t)} [R(t)u(t)u(t) + B^T(t)\frac{\partial V}{\partial x}u(t)]$ , iz čega slijedi da je  $0 = \frac{\partial d}{\partial u} u(t)(R(t)u(t) * u(t) + B^T(t)\frac{\partial V}{\partial x}u(t)) = 2R(t)u^*(t) + B^T(t)\frac{\partial V}{\partial x}$ . Dakle,  $u^*(t) = (-1/2)R^{-1}(t)B^T(t)\frac{\partial V}{\partial x}$  je optimalna LQR kontrola za konačno-dimenzionalni problem. Međutim, ova lijepo obrađena teorija kao takva nije numerički najbolje izvediva. Član  $\frac{\partial V}{\partial x}$  u izrazu za  $u^*(t)$  odudara antipatijom. Lakotne okolnosti daje teorija talijanskog matematičara *Jacopa Francesca Riccatija*. Naime, ako je pretpostavka da je  $V(x(t), t) = x^T(t)P(t)x(t)$  za  $P(t)$  simetričnu matricu, tj. da je funkcija  $V(x(t), t)$  kvadratna po  $x(t)$  (što ima smisla, jer je takvog izgleda i čitav funkcional I), tada uz ovu supstituciju i izraz za kontrolu  $u^*(t)$  iz 2.10 i 2.11 slijedi :

$$-x^T(t)\dot{P}(t)x(t) = [x^T(t)Q(t)x(t) + 2x^T(t)P(t)A(t)x(t) - x^T(t)P(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t)x(t)] \quad (2.12)$$

$$x^T(T)P(T)x(T) = x^T(T)Mx(T). \quad (2.13)$$

Kako za antisimetrične matrice  $S(t)$  vrijedi  $x^T(t)S(t)x(t) = -x^T(t)S(t)x(t)$  to iz zapisa  $2P(t)A(t) = P(t)A(t) + A^T(t)P(t) + P(t)A(t) - A^T(t)P(t)$  slijedi drugi zapis za 2.12 i 2.13:  $-x^T(t)\dot{P}(t) - x(t) = x^T(t)[Q(t) + P(t)A(t) + A^T(t)P(t) - P(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t)]x(t)$ .

**Korolar 2.2.1. Dovoljni uvjeti za optimalnost rješenja konačno-dimenzionalnog problema LQR kontrole**

Ako postoji rješenje  $P(t)$  Riccatijeve matrične jednačbe

$-\dot{P}(t) = Q(t) + P(t)A(t) + A^T(t)P(t) - P(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t)$ ,  $t \in [t_o, T]$  uz uvjet

$P(T) = M$ , tada je optimalna kontrola dana sa  
 $u^*(t) = R^{-1}(t)B^T(t)P(t)x(t)$ , gdje je  $K(t) = R^{-1}(t)B^T(t)P(t)$  i  $P(t)$  simetrična matrica.

### Geometrijski osvrt na pronalazak optimalne (LQR) kontrole konačno-dimenzionalnog problema i opis metode premještanja polova

Djelovati na sistem optimalnom kontrolom na neki način znači moći operirati njegovom potpunom upravljivošću. To bi u drugu ruku značilo da je moguće definirati stanje sistema u bilo kojem vremenu  $t$ . Našavši optimalnu kontrolu  $u^*(t) = -K(t)x(t)$  i vraćajući je natrag u izraz  $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$ , dobije se  $\dot{x}(t) = (A(t) - B(t)K(t))x(t)$ . Već je rečeno da je  $u^*(t)$  birana na način da stabilizira sistem (asimptotička stabilnost). Potpuna upravljivost omogućuje prebacivanje polova sistema sa povratnom vezom ( $-Kx(t)$ ) na bilo koju stranu kompleksne ravnine. Polovi takvog sistema su svojstvene vrijednosti matrice  $A - BK$ . LQR kontrola napravi upravo to ! Prebaci polove u svrhu stabilizacije bez da je na 'aktivnom promatraču' da smišlja gdje će prebaciti polove i koliko puta, te do koje udaljenosti od realne osi. Ona odmah generira  $K$  bez tog dodatnog napora. Neka se lokacije polova trebaju birati.

#### Pravo je pitanje po kojem bi se principu locirala nova mjesta ?

Taj je problem poznat kao Pole-placement ili premještaj polova. Za ODJ 1. i 2. reda bi to bilo lako. Relacije između ulaznog zahtjeva i lokacije polova su poznate, pa se polovi premjeste tako da idu ususret ulaznim zahtjevima. Kod ODJ-a viših redova je ideja polove prebaciti 5 - 10 puta dalje u lijevu poluravninu u odnosu na dominantne polove. Svrha je da imaju što neznatnije utjecaje na ulazni zahtjev. Ako se promatra otvoren sistem (sistem bez povratne veze, izvorne jednadžbe stanja) i onda ubaci odgovarajući  $K$  dobije se povratna veza (feedback ili closed loop) sistema. Umjesto ulaza  $u$ , stoji novi ulaz  $u - Kx$  koji je prebacio polove (odgovarajuće) u svrhu stabilizacije sistema! Neka je  $H$  Hamiltonova matrica, a  $X_1$  stabilan svojstveni potprostor koji je invertibilan i realan, dok je  $X_2$  samo stabilan i realan. Definira se  $H = Im[X_1 X_2]^T$  kao u 4. poglavlju.

## 2.3 Glavni teorem egzistencije optimalne LQR kontrole

Navodi se centralni rezultat problema LQR kontrole.

**Teorem 2.3.1.** *Ako je  $(A,B)$  stabilizabilan par i  $(C,A)$  osmotriv tada algebarska Riccati-jeva jednadžba ima jedinstveno pozitivno semidefinitno rješenje  $P$ , a optimalna kontrola za odgovarajući LQR problem je  $u^*(t) = -R^{-1}B^T P x(t)$ , te je  $(A - BR^{-1}B^T P)$  stabilna .*

*Dokaz.* Ako je par  $(A,B)$  stabilizabilan i par  $(C,A)$  osmotriv tada  $H$  nema svojstvenih vrijednosti na imaginarnim osima ( pokazano u 4. poglavlju) i  $X_1$  je invertibilna matrica. Pretpostavi se da  $X_2 X_1^{-1} = P$  nije stabilizabilan. Tada  $(A - BR^{-1}B^T P)x = \lambda x$ ,  $Re \lambda \geq 0$ ,  $x \neq 0$ .

Ako se izraz  $(A-BK)^T P + P(A-BK) + PBR^{-1}B^T P + Q = 0$  pomnoži s lijeva sa  $x^*$ , a s desna sa  $x$ , te se uvrsti da je  $B^T P x = 0$  i  $C x = 0$ , dobije se  $(\lambda + \lambda^*)x^* P x + x^* PBR^{-1}B^T P x + x^* C^T C x = 0$ . Od tu izlazi da je  $Ax = \lambda x$  i  $Cx = 0$ . Ukoliko je par  $(C, A)$  osmotriv nužno je  $x=0$  tako da  $\lambda$  za koji je  $Re\lambda \geq 0$  ne može biti svojstvena vrijednost od  $A - BK$ . Lako je provjeriti optimalnost, tj. da  $u^* = -Kx$  minimizira  $I$ . Primijeti se da je  $\int_0^\infty \frac{d}{dt}(x^T P x) dt = x^T P x|_{t \rightarrow \infty} - x^T P x|_{t=0}$ . Neka je  $u(t) = -Kx(t) + v(t)$  tako da  $\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) + Bv(t)$  i pretpostavi se da je  $v(t)$  takav da je  $\int_0^\infty v^T(t)v(t)dt < \infty$  i  $x(t) \rightarrow 0$  kad  $t \rightarrow \infty$ . Sada je  $I - x^T(0)Px(0) = \int_0^\infty (x^T[(A - BK)^T P + P(A - BK)]x + x^T[Q + PBR^{-1}B^T P]x + v^T R v) dt$ . Kako je  $(A - BK)^T P + P(A - BK) = -Q - PBR^{-1}B^T P$ , to je  $I = x^T(0)Px(0) + \int_0^\infty v^T R v dt$ . Minimum se postiže za  $v = 0$ . □



## Poglavlje 3

# Primjene LQR kontrole i usporedba sa metodom premještanja polova

### 3.1 Lopta i greda

Prezentiran je primjer iz [9].

#### Uvod

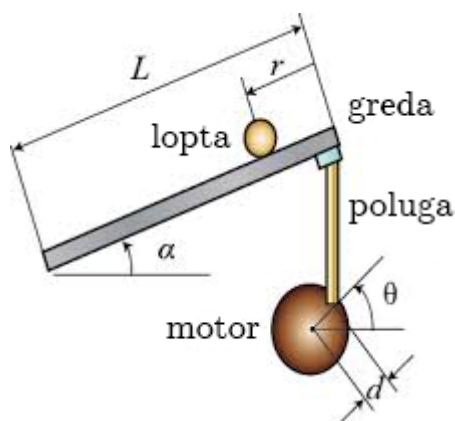


Slika 3.1: Lopta i greda

Zaplovi li se mislima malo dublje u djetinjstvo, zasigurno naviru slike najraznovrsnijih društvenih igara. Većina njih je čist produkt dječje mašte. Zamisli se tanka greda (oblika letve ) duljine 1m sa blagim udubljenjem na sredini. Neka je greda okovana sa strane tako da loptica koja se kotrlja naprijed-nazad nema mogućnost ispadanja po strani. Na kraje-



vima grede nalazi se po jedno dijete koje ju je čvrsto primilo rukama. Cilj igre je dovesti lopticu koja se kotrlja u stanje mirovanja. Pobjednik je onaj par koji za to treba minimalno vremena. Izuzme li se dvostruko hvatište na gredi i greda pričvrsti servo-mehanizmom (elektičnim motorom, recimo) s jedne strane, formuliran je problem koji se upravo želi prikazati. Ukoliko motor napravi pomak za kut  $\theta$ , tada se greda izdigne za kut  $\alpha$ , te se lopta počne gibati. Inspiracijom igara iz djetinjstva nastoji se kontrolirati položaj loptice na gredi. Neka je loptica težine 110g i radijusa 1.5 cm u početku u stanju mirovanja negdje na gredi. Nakon pokretanja motora želi se postići njezino stanje mirovanja u vremenu od maksimalno 3 sekunde, ali i uz uvjet da loptica ide maksimalno 5 cm naprijed-nazad u odnosu na početni položaj. Čak i da je greda u "skoro" horizontalnom položaju, bez kontrole bi loptica kad-tad pala sa grede. Postavljeni su senzori za očitavanje trenutnog nagiba grede i položaja lopte na njoj.

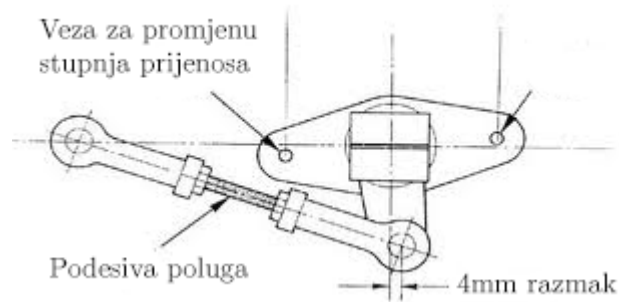


Slika 3.2: Lopta i greda

### Formulacija vremenski neprekidnog sistema diferencijalnih jednadžbi

Problem je izrazito jednostavan. Modelira se problem gibanja loptice naprijed-nazad. Riječ je o 1D-problemu. Neka je  $r$  pozicija lopte na gredi,  $J$  moment inercije lopte na gredi,  $m$  masa lopte,  $L$  duljina grede, te  $g$  gravitacijsko ubrzanje. Trenje između lopte i grede je zanemarivo. Iz Lagrangeove jednadžbe gibanja za loptu dobije se  $0 = (J/R^2 + m)\ddot{r} + mgsin\alpha - mr\dot{\alpha}^2$ . Nužna je linearna aproksimacija sistema, pa se uzima linearizacija oko kuta  $\alpha=0$ . Sada je  $(J/R^2 + m)\ddot{r} = -mg\alpha$ . Kako dovesti u relaciju kuteve  $\theta$  i  $\alpha$ ? Neka je  $d$  razmak između poluge (koja povezuje gredu i motor) i samog motora (3.3).

Tada je  $\alpha = (d/L)\theta$ . Konačno, supstitucijom se dobije  $(J/R^2 + m)\ddot{r} = -mg(d/L)\theta$ . Da bi se dobio sistem diferencijalnih jednadžbi definiraju se položaj lopte  $r$ , brzina gibanja lopte



Slika 3.3: Poluga i motor

$\dot{r}$ , kut  $\alpha$  i promjena nagiba kuta grede  $\dot{\alpha}$ . Sistem jednadžbi je

$$\begin{bmatrix} \dot{r} \\ \ddot{r} \\ \dot{\alpha} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -mg/(J/R^2 + m) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ \dot{r} \\ \alpha \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

Gledajući upravo definirani sistem jasno je da se kontrola pozicije lopte neće izvoditi kontrolom preko  $\theta$  nego kontrolom momenta grede  $\alpha$ . Izlaz je  $y = [1 \ 0 \ 0 \ 0][r \ \dot{r} \ \alpha \ \dot{\alpha}]^T$ , jer je interes pozicija lopte tj.  $r$ .

### Analiza stabilnosti dobivenog sistema

Da bi se vidjelo je li izvedeni sistem diferencijalnih jednadžbi stabilan nađe se transfer funkcija sistema. Koriste se Laplaceove transformacije nad gornjim sistemom jednadžbi, te se dobije  $(J/R^2 + m)R(s)s^2 = -mg(d/L)\theta(s)$ . Transfer funkcija je  $P(s) = R(s)/\theta(s) = -mgd/L(J/R^2 + m)s^2$ . Iz  $\theta(s) = 0$  se dobiju polovi sistema (rješenja kvadratne jednadžbe  $s^2 = -J/(R^2m)$ ).

Što je transfer funkcija općeg sistema s početka rada ?

To je matematička prezentacija relacije između ulaza i izlaza linearnog vremenski- invarijantnog sistema sa trivijalnim početnim uvjetom. Djelujući Laplaceovim transformacijama na taj sistem dobije se novi sistem

$$\begin{aligned} sU(s) &= AU(s) + B\hat{u}(s) \\ Y(s) &= CU(s) + D\hat{u}(s), \end{aligned}$$

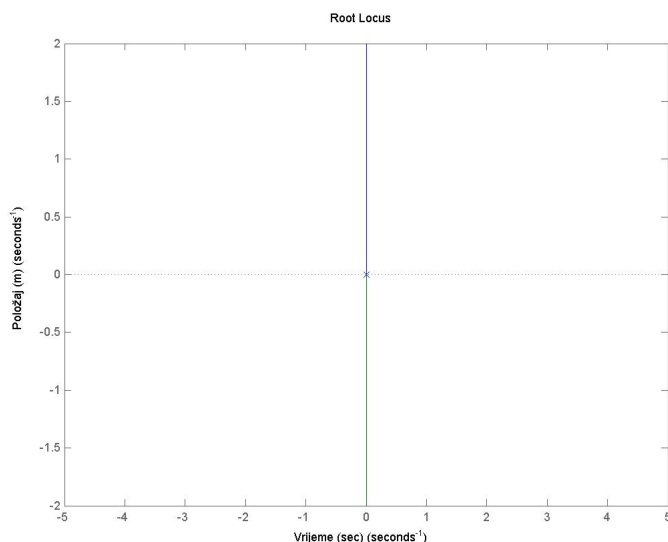
### POGLAVLJE 3. PRIMJENE LQR KONTROLE I USPOREDBA SA METODOM PREMJESTANJA POLOVA

30

gdje je  $\hat{u}(s)$  ulazna informacija u sistem na koju je primjenjena Laplaceova transformacija. Za vremenski neprekidan ulazni signal  $u(t)$  i izlaz  $y(t)$ , transfer funkcija  $P(s)$  je linearno preslikavanje Laplaceove transformacije ulaza -  $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$  u Laplaceovu transformaciju izlaza -  $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ . Odnosno,  $Y(s) = P(s)U(s)$ .  $\mathcal{L}\{u(t)\} = (sI - A)^{-1}B\hat{u}(s)$ , odnosno  $\mathcal{L}\{y(t)\} = (C(sI - A)^{-1}B + D)\hat{u}(s)$ . Unošenjem sljedećih naredbi u programski jezik Matlab

```
1 s=tf('s');  
2 P=-m*g*d/L/(J/R^2 +m)/s^2;  
3 pzmap(P);
```

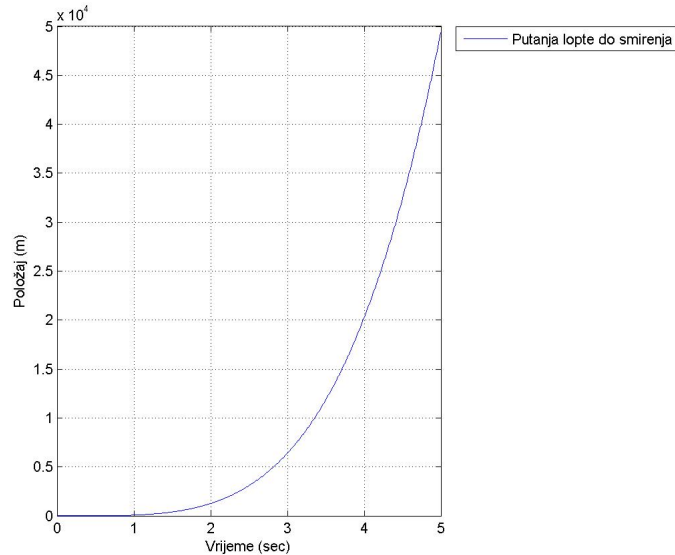
vidi se da je otvoreni sistem (bez povratne veze) 2. reda sa 2 pola u ishodištu koordinatnog sustava. Nestabilan je ( "Geometrijski osvrt" neposredno prije iskaza teorema 2.3.1).



Slika 3.4: Polovi sistema

Kontrolirati ovaj sistem neophodna je stvar. Napravljena je LQR kontrola za stabilizaciju sistema i dana je usporedba sa metodom premještanja polova. Nužni uvjeti za LQR kontrolu sistema diferencijalnih jednadžbi jesu njegova upravljivost i osmotrivost. Poziva se

```
1 ball_ss=ss(A,B,C,D);
```



Slika 3.5: Nestabilan sustav

gdje su korištene sljedeće matrice za formiranje sistema

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -mg/(J/R^2 + m) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T, C = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \text{ i } D = 0.$$

```
1 upravljiv=ctrb(ball.ss);
2 upravljivost=rank(upravljiv);
3 osmotriv=obsv(ball.ss);
4 osmotrivost=rank(osmotriv);
```

Matrice upravljivosti i osmotrivosti su punog ranga (4). Dakle, sva su stanja upravljiva i osmotriva. Mogu se kontrolirati. Za LQR kontrolu nužno je definirati matrice  $Q$  i  $R$  (koje su redom procjene za relative težine odstupanja stanja sistema odnosno ulaza u sistem).  $Q = C^T C =$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Varirane su vrijednosti  $Q(1, 1)$  i  $R$  (koja je u ovom slučaju  $1 \times 1$  matrica). Biran je ulaz vrijednosti  $0.85V$  u sistem (da bi se pratilo gibanje loptice na gredi duljine točno  $1$  m).

Slučaj a)

Za izbor

```
1 Q(1,1)=90;
2 R=0.1;
3 K=lqr(A,B,Q,R);
```

dobije se

$K = [30 \ 20.5933 \ 49.4767 \ 9.9475]$ .

Naredbom

```
1 sys_cl=ss(A-BK,B,C,D);
```

formira se sistem diferencijalnih jednačbi s povratnom vezom (closed-loop sistem ili feedback). Za simulaciju ponašanja dinamičkog sistema obzirom na ulaz korištena je naredba **lsim**. Unošenjem sljedećih naredbi

```
1 t=0:0.01:5;
2 u=0.85*ones(size(t));
3 [y,t,x]=lsim(sys_cl,u,t);
4 plot(t,y);
```

primjeti se gibanje lopte i do  $10$  cm dalje od početnog položaja, te vrijeme potrebno za smirenje lopte od oko  $4.5$  sekundi. Neprihvatljivo ponašanje sistema uzrokovano izborom koeficijenata  $Q(1, 1)$  i  $R$ .

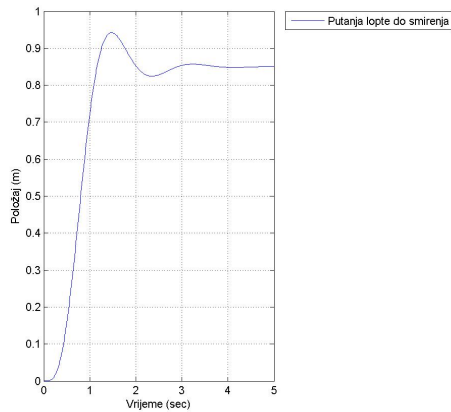
Slučaj b)

Izborom

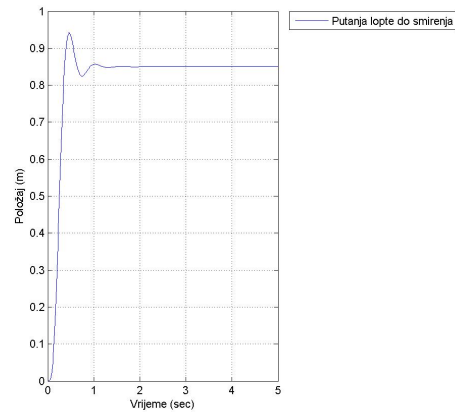
```
1 Q(1,1)=9000;
2 R=0.0001;
```

na iste ulazne podatke i simulacijom na način ekvivalentan prethodnome smanji se vrijeme do smirenja ispod  $2$  sekunde, ali lopta i dalje 'šeće'  $10$  cm dalje od početnog položaja. Kako god se birala ta dva koeficijenta, oscilacije su uvijek jednake dok se vrijeme smirenja uspijeva iskontrolirati. Ako se pogleda

```
1 eig(A-BK);
```



(a) Loša LQR kontrola sistema



(b) Bolja LQR kontrola sistema

primjete se svojstvene vrijednosti oblika

$$-a + bi$$

$$-a - bi$$

$$-b + ai$$

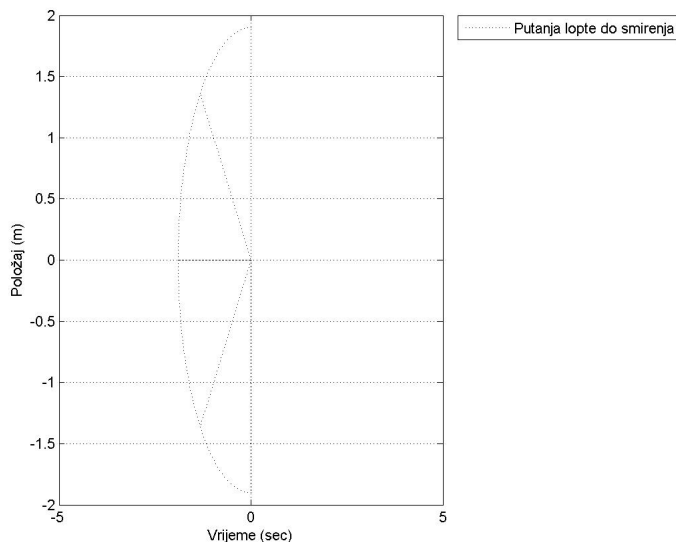
$$-b - ai.$$

Otvoreni sistem ima 2 pola (transfer funkcija je 2. reda), dok zatvoreni sistem ima 4 pola (transfer funkcija je 4. reda). Sistem dakle ima dva dominantna pola koji trebaju imati direktan utjecaj na stabilizaciju, a preostala dva tek neznatan. Ideja je kontrola sistema razmještanjem polova u svrhu boljih rezultata u odnosu na LQR kontrolu.

## Metoda premještanja polova

Za stabilizaciju sistema, a time i dizajn zatvorenog (closed-loop) sistema treba procijeniti pozicije polova za zatvoreni sistem na temelju pozicija otvorenog (open-loop) sistema. Na koji način? Ovdje se navodi algebarski dokaz. Neka su  $\omega_n$  prirodna frekvencija i  $\zeta$  omjer prigušivača. Vrijede sljedeće relacije: dozvoljene oscilacije (u %) =  $100 \exp^{-\zeta\pi\sqrt{1-\zeta^2}} Ts = 4/(\zeta\omega_n)$ , gdje je  $Ts$  vrijeme smirenja. Uvažavajući  $Ts = 3$  sekunde i dozvoljene oscilacije iznosa 5%, dobije se  $\zeta = 0.7$  i  $\omega_n = 1.90$ . Dominantni polovi su rješenja kvadratne jednačbe  $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$ .

Ako se pogleda slika 3.7 jasno je da će se ta prva dva pola birati kao  $-2 + 2i$  i  $-2 - 2i$  ili malo dalje. Preostala dva pola biraju se i od 10 do 40 puta dalje od navedenih, da bi imali što neznatniji utjecaj na stabilizaciju. Kako bi se izbjegla nepomična greška



Slika 3.7: Izbor lokacija za idealne polove

(eng. *steady-state error*) skalira se vrijednost ulaza u sistem, u smislu dodaje se adekvatna konstanta postojećoj referenci. Tu konstantu daje funkcija koju je potrebno vlastoručno implementirati. Ona traži skalar, koji će eliminirati grešku obzirom na ulaz za neprekidan sistem sa jednim ulazom.

Slučaj a)

Izaberu se polovi

- 1  $p_1 = -2 + 2i$ ;
- 2  $p_2 = -2 - 2i$ ;
- 3  $p_3 = -20$ ;
- 4  $p_4 = -80$ ;

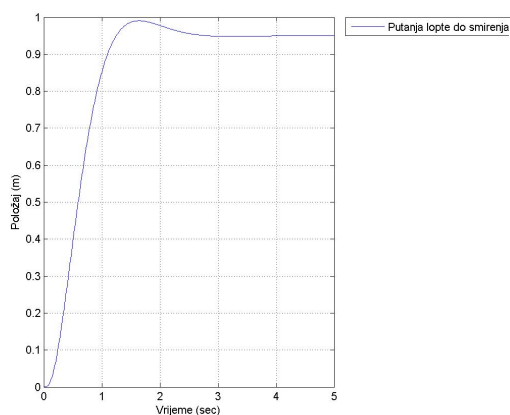
Pozivom

- 1  $K = \text{place}(A, B, [p_1, p_2, p_3, p_4])$ ;

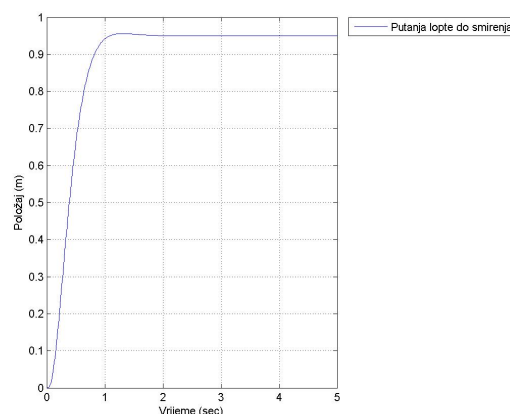
dobije se  $K = 10^3 [1.8286 \ 1.0286 \ 2.008 \ 0.104]$ .

Kao ulaz u sistem izabrana je voltaža jakosti 0.95 V (s ciljem da slika prikazuje gibanje lopte na gredi duljine točno 1 m). Važno je primjetiti kako je riječ o ulazu veće vrijednosti u odnosu na ulaz biran kod LQR kontrole. Zašto? Za ulaz 0.95 V (kod LQR kontrole) lopta padne s grede - ode dalje od 1m. Ako se pak djeluje na sistem s ulazom 0.85 V

(metoda premještanja polova) uoči se lošija kontrola sistema u odnosu na ulaz od 0.95 V. Dakle, moguće je postići bolju stabilnost. Simulacijom dinamičkog sistema se odmah primjeti bolje ponašanje u odnosu na LQR kontrolu. Lopta radi oscilacije manje od 5cm od početnog položaja, ali treba više od 3.5 sekundi za smirenje. Loš izbor polova.



(a) Lošiji izbor polova sistema



(b) Bolji izbor polova sistema

Slučaj b)  
Izborom polova

- 1  $p_1 = -4 + 2.5i$ ;
- 2  $p_2 = -4 - 2.5i$ ;
- 3  $p_3 = -30$ ;
- 4  $p_4 = -90$ ;

dobiju se oscilacije lopte manje od 1 cm, te vrijeme smirenja ispod 2 sekunde.

## Zaključak

Napravljen je detaljni prikaz izbora koeficijenata za matrice  $Q$  i  $R$  iz LQR kontrole, te polova u metodi premještanja polova. Ovo je jedan od primjera u kojem je prikazana uspješnija kontrola premještanjem polova. Da je recimo bilo dovoljno gibanje lopte više od 5 cm od početnog položaja, tada bi se birale manje vrijednosti imaginarnih dijelova svojstvenih vrijednosti u odnosu na realne dijelove. Da je zahtjev bio još manje vrijeme smirenja u odnosu na prethodno izabrano, birali bi se polovi koji su udaljeniji u odnosu na prethodno birane.



Parametri korišteni u modelu

$r$  - pozicija lopte

$\alpha$  - kut nagiba grede

$\theta$  - kut zakreta motora

$J$  - inercija lopte -  $9.99 * 10^{-6} kgm^2$

$L$  - duljina grede  $1m$

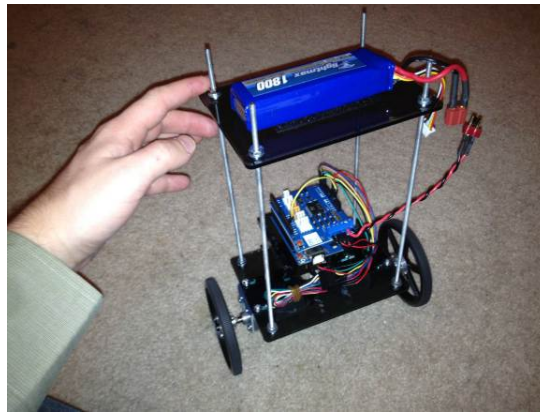
$m$  - masa lopte -  $0.011kg$

$R$  - radijus lopte -  $0.015m$

$d$  - udaljenost poluge do držača na motoru -  $0.03m$

$g$  - gravitacijsko ubrzanje -  $9.81m/s^2$

## 3.2 Robot koji balansira svoju težinu



Slika 3.9: Model

Prezentiran je primjer iz [2], koristeći rezultate iz [8].

### Uvod

Ode li se jednakim brojem koraka nazad u vrijeme, možda ne istog trena, ali je sigurno jedna od slika iz djetinjstva njihaljka. Silom se pokrene njihaljka i sve većim utjecajem te sile, njihanje je sve brže. Njihaljka bi se nakon nekog vremena, ovisno o brzini njihanja (masi djeteta na njoj) zaustavila. Zamisli se njihaljka okrenuta naopako, ali neka mjesto užeta stoji neki kruti nesavitljivi materijal koji ju povezuje sa nekom podlogom. To je problem obrnutog njihala. Njihalo se njiše u obrnutom položaju i nastoji se stabilizirati u nekom kratkom roku radeći male oscilacije. Neka još obrnuto njihalo stoji na dva kotača, tj. moguća su gibanja kompletnog modela u ravnini. U ovom trenu primjeti se analogija ponašanja dosad opisanog modela sa modelom malog robota. Interes je da mali robot stoji na svoja dva kotača i održava uspravan položaj radeći dozvoljene oscilacije. Ukoliko ga se u takvom položaju lagano nagne (pogura se), treba se ponovno vratiti u prethodni položaj za manje od 5 sekundi uz dozvoljene oscilacije od 5 %. Uz navedeno, traži se da radi eventualne pomake od maksimalno 5 cm udaljenosti od početnog položaja. Ulaz u formulirani sistem je voltaža. Robot dobije izvor energije i krene u jednom smjeru. Senzori prepoznaju nagnutost robota u odnosu na vertikalni položaj i ovisno o referentnoj vrijednosti robot se treba kretati u suprotnom smjeru. Što to znači? Dobivši napon, zaputi se u jednom smjeru napravivši neki nagib prema upravo smjeru gibanja. Ukoliko je taj kut nagiba veći od referentnog, senzori mu 'šalju' poruku da se vrati u suprotnom smjeru, a pri

tome se ne pomiče više od 5 cm od početnog položaja. U roku od 5 sekundi je stabilan. To znači da nakon 5-te sekunde samo lagano oscilira oko vertikalnog položaja, bez kretanja, tj. gibanja. Stanja sistema mjere se akcelerometrom i žiroskopom. Osnovna razlika između ta dva senzora je što akcelerometar ne može mjeriti nagib robota obzirom na vertikalnu os. To čini žiroskop. On pomaže akcelerometru u identifikaciji orijentacije. Akcelerometar mjeri linearnu akceleraciju temeljenu na vibraciji i obzirom na informacije iz žiroskopa određuje orijentaciju robota. Problem je što se tijekom mjerenja gravitacijskog ubrzanja na akcelerometru javlja šum, pa izmjereno stanje sistema nije realno. Problem sa žiroskopom je drift (vremenski). Taj vremenski odklon javlja se usred dugoročnog korištenja senzora. Te moguće poremećaje - šumove i vremenske driftove nužno je ukloniti filtrom. Korišten je Kalmanov filtar (sekcija 4.2).

### Formulacija vremenski neprekidnog sistema diferencijalnih jednadžbi

Problem je u odnosu na prethodni slučaj puno složeniji. Formuliraju se jednadžbe koje opisuju dinamiku kretanja robota na način da se najprije opisuje dinamika kretanja kotača, a potom i dinamika promjene nagiba tijela robota na principu obrnutog njihala. Navode se oznake korištene u izvodu.

$M_p \rightsquigarrow$  masa tijela robota (bez kotača)

$M_w \rightsquigarrow$  masa kotača (po 1 na svakoj strani)

$J_w \rightsquigarrow$  moment inercije kotača robota

$J_r \rightsquigarrow$  moment inercije rotora motora

$J_p \rightsquigarrow$  moment inercije tijela robota

$N_L, N_R, R_R, R_L \rightsquigarrow$  sile akcije i reakcije između kotača i postolja na kojem je robot

$R_{wR}, R_{wL} \rightsquigarrow$  sile trenja između zemlje (postolja) i kotača

$L_p \rightsquigarrow$  udaljenost centra kotača i centra gravitacije čitavog robota

$\tau_R \rightsquigarrow$  okretni moment rotora motora (upotrijebljeni)

$\tau_m \rightsquigarrow$  okrenti moment motora

$R \rightsquigarrow$  otpor

$k_f \rightsquigarrow$  konstanta trenja

$k_m \rightsquigarrow$  konstanta okretnog momenta

$k_a \rightsquigarrow$  povratna EMF konstanta ili konstanta brzine motora

$\alpha \rightsquigarrow$  kutna akceleracija vratila (spaja kotače robota)

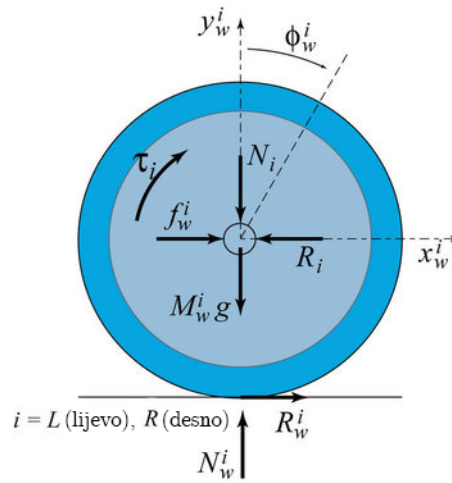
$\theta_{wL}, \theta_{wR} \rightsquigarrow$  kut rotacije kotača (lijevog i desnog)

$\theta_p \rightsquigarrow$  kut rotacije postolja (tijela robota)

$\dot{\theta}_w \rightsquigarrow$  kutna brzina kotača

$V_a \rightsquigarrow$  voltaža

Najprije se izvodi jednadžba gibanja motora. Koristeći se Newtonovim zakonom giba-



Slika 3.10: Desni kotač modela

nja, suma svih sila čije je djelovanje horizontalno obzirom na x-os je  $\sum F_x = Ma$  (gdje je  $M$  masa, a  $a$  akceleracija). Primjenjeno na sliku 3.10 izlazi  $M_w \ddot{x}_{wR} = R_{wR} - R_R$ . Suma sila oko centra kotača je  $\sum M_o = J\alpha$  ( $J$  = inercija,  $\alpha$  = kutna akceleracija), a njezina primijena na sliku 3.10 daje

$$J_w \ddot{\theta}_{wR} = \tau_R - R_{wR} r. \quad (3.1)$$

Neka je okretni moment motora dan sa :  $\tau_m = J_R \frac{dw}{dt} + \tau_R$ . Ako je  $C$  ukupni okretni moment motora, tada je

$C = \tau_m - \tau_R = J_R \frac{dw}{dt} = -(k_m k_a)/R \theta_{wR} + (k_m V_a)/R$  (gdje je  $\frac{dw}{dt} = -((k_m k_a)/(J_R R))w + (1/(J_R R))V_a - \tau_R/J_R$ ,  $\frac{dw}{dt}$  kutna brzina motora). Ako se 3.1 zapiše preko  $C$  izlazi  $J_w \ddot{\theta}_{wR} = -((k_m k_a)/R) \theta_{wR} + (k_m/R)V_a - R_{wR} r$  i može se izraziti  $R_{wR}$ . Dobiju se jednadžbe za lijevi kotač i desni kotač :

$$M_w \ddot{X}_{wL} = -((k_m k_a)/Rr) \theta_{wL} + (k_m/(Rr))V_a - (J_w/r) \ddot{\theta}_{wL} - R_L \quad (3.2)$$

$$M_w \ddot{X}_{wR} = -((k_m k_a)/Rr) \theta_{wR} + (k_m/(Rr))V_a - (J_w/r) \ddot{\theta}_{wR} - R_R. \quad (3.3)$$

Kutna akceleracija se može transformirati u linerano gibanje (jer se ono odvija na centru kotača) jednadžbama:

$$\theta_{wR} r = \dot{X}_{wR} \rightarrow \ddot{\theta}_{wR} = \ddot{X}_{wR}/r$$

$$\theta_{wR} r = X_{wR} \rightarrow \dot{\theta}_{wR} = \dot{X}_{wR}/r$$

(analogno za lijevi kotač).

Ovom supstitucijom 3.2 i 3.3 postaju

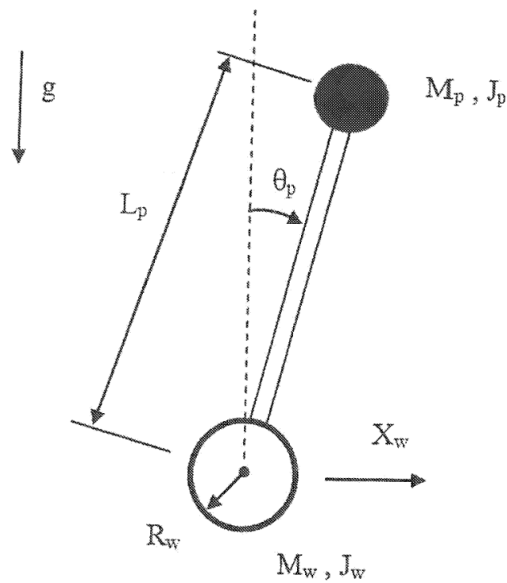
$$M_w \ddot{X}_{wL} = -((k_m k_a)/Rr) \theta_{wL} + (k_m/(Rr)) V_a - J_w/(r^2) \ddot{X}_{wL} - R_L \quad (3.4)$$

$$M_w \ddot{X}_{wR} = -((k_m k_a)/Rr) X_{wR} + (k_m/(Rr)) V_a - J_w/(r^2) \ddot{X}_{wR} - R_R. \quad (3.5)$$

Zajedno daju jednadžbu gibanja kotača robota:

$$2[M_w + J_w/(r^2)] \ddot{X}_w = -2(k_m k_a)/(Rr^2) \dot{X}_w + 2(k_m/(Rr)) V_a - (R_L + R_R).$$

Time je obavljen lakši dio posla. Treba dobiti sustav koji opisuje gibanja postolja robota bez kotača.



Slika 3.11: Postolje modela

Koristi se princip obrnutog njihala, koji predstavlja model za izvod jednadžbi gibanja postolja robota. Suma momenta oko centra mase njihala je:  $\sum M_o = J\alpha$ , a njezina primjena na sliku 3.11 daje

$$-(R_L + R_R)L_p \cos \theta_p - (N_R + N_L)L_p \sin \theta_p - (\tau_R + \tau_L) = J_p \ddot{\theta}_p. \quad (3.6)$$

Okretni moment koji se javlja na njihalu pod utjecajem motora je sličan ukupnom momentu motora  $C$  i iznosi:  $\tau_R + \tau_L = -2(k_m k_a)/(Rr)\dot{X} + 2(k_m/R)V_a$ . Ako se posljednji izraz uvrsti u 3.6 izlazi

$$-(R_L + R_R)L_p \cos \theta_p - (N_R + N_L)L_p \sin \theta_p = ((-2(k_m k_a)/(Rr))\dot{X} + 2(k_m/R)V_a) + J_p \ddot{\theta}_p. \quad (3.7)$$

Pomnoži se 3.6 sa  $-L_p$ , te se iz sustava jednačbi kojeg čine dobivena jednačba i prethodna 3.7 dobije

$$J_p \ddot{\theta}_p - 2k_m k_a/(Rr)\dot{X} + 2(k_m/R)V_a + M_p L_p g \sin \theta_p + M_p L_p^2 \ddot{\theta}_p = -M_p L_p \ddot{X} \cos \theta_p. \quad (3.8)$$

Koristeći se Newtonovim zakonom gibanja, sume sila koje djeluju u horizontalnom položaju su:  $\sum F_x = M_p \ddot{X}$ , a u vertikalnom položaju  $\sum F_{xp} = M_p \ddot{X} \cos \theta_p$ . Primjeni li se to na sliku 3.11 dobije se redom:

$$(R_L + R_R) = M_p \ddot{X} + M_p L_p \ddot{\theta}_p \cos \theta_p - M_p L_p \dot{\theta}_p^2 \sin \theta_p, \quad (3.9)$$

te

$$(R_L + R_R) \cos \theta_p + (P_L + P_R) \sin \theta_p - M_p g \sin \theta_p - M_p L_p \ddot{\theta}_p = M_p \ddot{X} \cos \theta_p \quad (3.10)$$

Da bi se iz jednačbe gibanja kotača robota eliminirao izraz  $(R_R + R_L)$  koristi se jednačba 3.9 kao supstitucija izraza. Slijedi,

$$2(M_w + J_w/r^2)\ddot{X} = -2(k_m k_a)/(Rr^2)\dot{X} + 2(k_m/Rr)V_a - M_p \ddot{X} - M_p L_p \ddot{\theta}_p \cos \theta_p + M_p L_p \dot{\theta}_p^2 \sin \theta_p. \quad (3.11)$$

Jednačbe 3.11 i 3.8 predstavljaju nelinearan model jednačbi koji opisuje gibanje robota! Kao i kod prethodnog primjera jednačbe je potrebno linearizirati. Pretpostavi se  $\theta_p = \pi + \theta$ , gdje je  $\theta$  mali kut koji "gleda" prema gornjoj vertikalnoj osi. Tada je  $\cos \theta_p = -1$ ,  $\sin \theta_p = -\theta$  i  $(\frac{d\theta_p}{dt})^2 = 0$ . Nakon sređivanja dobije se linearni model diferencijalnih jednačbi koje opisuju gibanje robota:

$$\ddot{\theta} = M_p L_p / (J_p + M_p L_p^2) \ddot{X} + 2(k_m k_a) / (Rr(J_p + M_p L_p^2)) \dot{X} - 2k_m / R(J_p + M_p L_p^2) V_a + M_p g L_p / (J_p + M_p L_p^2) \theta$$

$$\ddot{X} = 2k_m / (Rr(2M_w + 2J_w/r^2 + M_p)) V_a - 2(k_m k_a) / Rr^2 (2M_w + 2J_w/r^2 + M_p) \dot{X} + M_p L_p / (2M_w + 2J_w/r^2 + M_p) \ddot{\theta}$$

Sustav linearnih jednadžbi dinamike robota:

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{X} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & Z & (M_p^2 g L_p^2)/\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & Y & M_p g L_p \beta / \alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \dot{X} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2k_m(J_p + M_p L_p^2 - M_p L_p r)/(Rr\alpha) \\ 0 \\ 2k_m k_a(r\beta - M_p L_p)/(Rr\alpha) \end{bmatrix} V_a$$

$$\begin{aligned} Z &= 2k_m k_a (M_p L_p r - J_p - M_p L_p^2) / (Rr^2 \alpha) \\ Y &= 2k_m k_a (r\beta - M_p L_p) / (Rr^2 \alpha) \\ \beta &= (2M_w + 2J_w / (r^2) + M_p) \\ \alpha &= [J_p \beta + 2M_p L_p^2 (M_w + J_w / (r^2))] \end{aligned}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \dot{X} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

Dakle, u izlazu se promatra položaj robota i nagib, tj. kut do vertikalne osi.

### Analiza stabilnosti dobivenog sustava

Kod provjere stabilnosti dobivenog sustava nužno je definirati parametre sustava i promatrati reakciju izlaza obzirom na ulaz. Nakon formiranja sustava i unošenja sljedećih naredbi u Matlab

```
1 t=0:0.1:1;
2 u=4.75*ones(size(t));
3 [y,t]=lsim(transfer_funk,u,t);
4 plot(t,y);
```

gdje je *transfer\_funk* transfer funkcija dobivenog sistema. Sustav je nestabilan - robot padne (slično kao što je i u prethodnom primjeru loptica pala s grede).

Pozivom *eig(A)* dobije se  $eig(A) = [0 \quad -0.0078 \quad -13.1202 \quad 13.1183]^T$ . 2 svojstvene vrijednosti su u desnoj poluravnini pa je nužno stabilizirati sistem, tj. postići da odgovarajućom kontrolom sustava i odabirom ulaza novoformirana matrica sustava ima sve svojstvene vrijednosti u negativnoj poluravnini.

## LQR kontrola sistema

Napravljena je LQR kontrola sistema s korištenjem Kalmanova filtra na sensorima i bez njega. Svrha je bolja predodžba i usporedba. Potom je napravljena usporedba sa metodom premještanja polova. Nužni uvjeti za kontrolu sistema su, kao i obično, njegova upravljivost i osmotrivost. Sistem je upravljiv i osmotriv, što znači da se sva stanja sistema mogu kontrolirati. Matrica  $Q = C^T C =$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Koeficijent  $Q(1, 1)$  je procjena za relativnu težinu odstupanja položaja robota, a  $Q(3, 3)$  kuta.  $R$  je  $1 \times 1$  matrica i to je procjena za relativnu težinu odstupanja ulaza. Uzima se  $R = 1$ , jer je ulaz voltaža pa je pretpostavka da nema odstupanja. Dakle, potrebno je varirati dva koeficijenta matrice  $Q$ .  $Q(1, 1)$  odgovoran je za stabilizaciju položaja i primjeti se da je za veće vrijednosti robot stabilniji.  $Q(3, 3)$  pak odgovara za stabilizaciju nagiba i za manje vrijednosti je kut od vertikalne osi manji. Robotu je dan izvor energije, voltaža jakosti 4.75 V.

Slučaj a)

Za izbor

1  $Q(1, 1) = 500$ ;

2  $Q(3, 3) = 50$ ;

i bez Kalmanova filtriranja mogućih poremećaja dobije se, analognim pozivima kao u primjeru 3.1, da je  $K = 10^3[-0.0224 \quad -0.0297 \quad 1.5982 \quad 0.1236]$ .

Simulacijom dinamičkog sistema vidi se da robot ode na manje od 20 cm udaljenosti od početnog položaja i da je vrijeme umirivanja oko 8 sekundi. Nedopustivo ponašanje! Kako je mogući problem zanemarivanje drifta na žiroskopu i šuma na akcelerometru, to je za isti izbor matrica  $Q$  i  $R$  implementiran Kalmanov filter. Za matrice  $Q_n$  i  $R_n$  izabrane su  $Q_n = 5000$ , te

$$R_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10000 \end{bmatrix}.$$

Sljedećim pozivom

1 `[kest, L, P]=kalman(sys_ss, Q_n, R_n);`



dobije se matrica Kalmanova filtra - *kest*, koja se koristi za dobivanje regulatora sistema. Zadaća regulatora sistema je da poveže matricu - *kest* i linearno-kvadratnu optimalnu matricu *K* na način da stvori novu povratnu vezu koja omogućuje kompenzaciju poremećaja.

```
1 regulator=lqgreg(kest,K);
```

Najprije se filtriraju podaci na akcelerometru, pa su izabrani

$$C_n = [1 \ 0 \ 0 \ 0];$$

$$D_n = 0;$$

Formira se novi sistem

```
1 novi_ss=ss(A-BK,B,C_n,D_n);
```

kojem je potrebno zadati prethodni izlaz kao novi ulaz pomoću povratne veze ili feedbacka pozivom

```
1 novi=feedback(novi_ss,regulator);
```

Ako se unesu naredbe

```
1 t=0:0.01:5;
```

```
2 u=4.75 *ones(size(t));
```

```
3 [y,t]=lsim(novi,u,t);
```

vidi se da je sistem bolje kontroliran. Pomak je oko 18 cm (što je bolje od slučaja bez procjenitelja stanja), a vrijeme smirivanja je ispod 5 sekundi. Kako nisu zadovoljene referentne vrijednosti, nužan je neki drugi izbor koeficijenata matrice  $Q$ . Ako se umjesto  $C_n$  stavi  $C_{n1} = [0 \ 0 \ 1 \ 0]$  i ponovi postupak tada su filtrirani podaci na žiroskopu. Ponovno, napredak je očit, ali nezadovoljavajući.

Slučaj b)

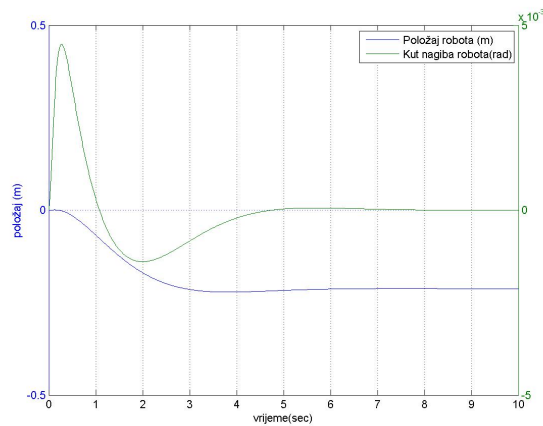
Izborom:

$$Q(1, 1) = 10000;$$

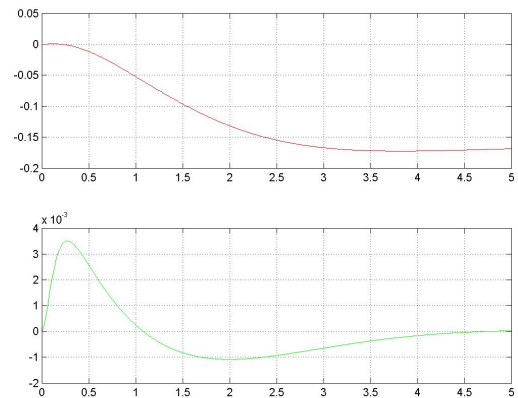
$$Q(3, 3) = 30;$$

$$\text{dobije se } K = 10^3[-0.1 \ -0.07 \ 1.85 \ 0.1451].$$

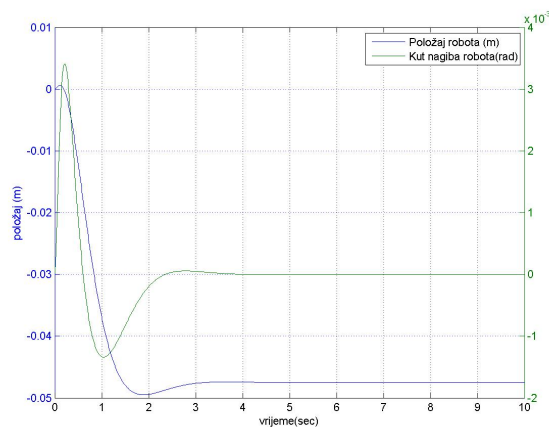
Simulacijom dinamičkog sustava vidi se da robot napravi pomak manji od 5 cm od početnog položaja, ali je i ukupno vrijeme smirenja iznosa manjeg od 5 sekundi. Ako se kao u prethodnom slučaju i za isti izbor matrica  $Q_n$  i  $R_n$  uzme u obzir mogući drift na žiroskopu ili šum na akcelerometru dobije se neznatno brža stabilizacija nagiba robota (za oko 0.5 sekundi), dok je položaj i dalje ispod 5cm.



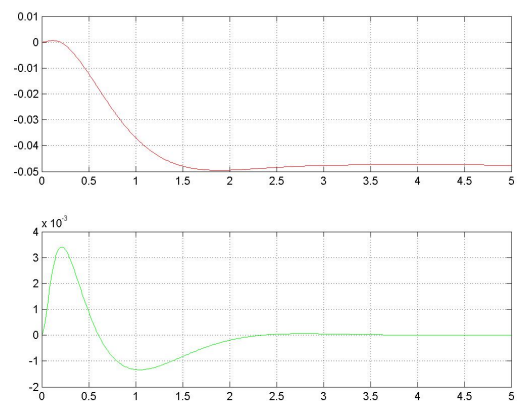
(a) Loš izbor LQR kontrole bez Kalmanova filtra



(b) Loš izbor LQR kontrole sa Kalmanovim filtrom



(a) Dobar izbor LQR kontrole bez Kalmanova filtra



(b) Dobar izbor LQR kontrole sa Kalmanovim filtrom

## Metoda premještanja polova

Ako se pogledaju svojstvene vrijednosti matrice  $A - BK$ , za  $K$  dobiven LQR kontrolom vidi se da je  $\text{eig}(A - BK) = [-13.1172 + 0.0794i; -13.1172 - 0.0794i; -1.8194 + 1.8026i; -1.8194 - 1.8026i]^T$ .

Nužno je izabrati lokaciju 4 pola u lijevoj poluravnini. Za početak, biraju se polovi blizu upravo ispisanim vrijednostima  $\text{eig}(A - BK)$ .

Slučaj a)

Neka je

```
1 P_1=[-10.1410+0.7342i  -10.1410-0.7342i  -1.0818+1.0768i
      -1.0818-1.0768i];
```

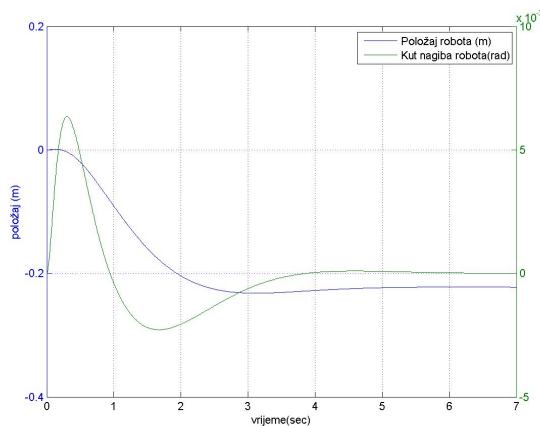
Pozivom

```
1 K=place(A,B,P_1);
```

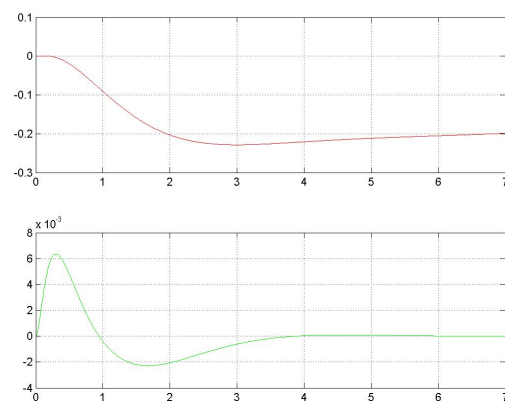
dobije se

$$K = 10^3[-0.0213 \quad -0.0241 \quad 1.3170 \quad 0.0994];$$

Simulacijom dinamičkog sistema uoči se pomak veći od 20 cm i vrijeme do smirenja blizu 7 sekundi.



(a) Loš izbor polova sistema bez Kalmanova filtra



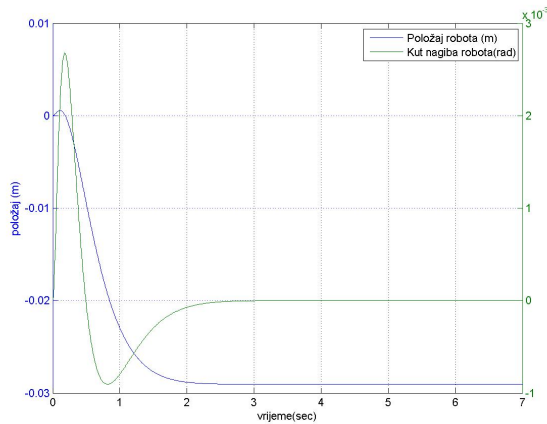
(b) Loš izbor polova sistema sa Kalmanovim filtrom

Slučaj b)

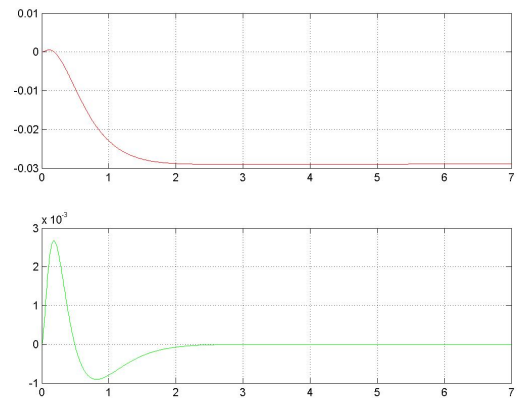
Drugim izborom polova, tako da budu bliži svojstvenim vrijednostima  $A - BK$

```
1 P_2=[-13.1410+0.7342i  -13.1410-0.7342i  -3.0818+1.0768i
      -3.0818-1.0708i];
```

dobije se promjena položaja manja od 3 cm i vrijeme potrebno do smirenja ispod 3 sekunde.



(a) Dobar izbor polova sistema bez Kalmanova filtra



(b) Dobar izbor polova sistema sa Kalmanovim filtrom

## Zaključak

Ponovno je metoda premještanja polova dala bolji rezultat. Moguće je dobro iskontrolirati sustav kombinirajući ove dvije metode. Najprije je pronađen  $K$  pozivom LQR metode, a potom su se polovi u metodi premještanja polova birali obzirom na polove dobivene LQR kontrolom uz velik stupanj slobode oko izbora lokacije za iste.

Korišteni parametri modela su :

$$M_p = 4.325 \text{ kg}$$

$$M_m = 0.671 \text{ kg}$$

$$L_p = 1.5 \text{ cm}$$

$$R = 7.7 \text{ cm}$$

$$d_p = 0.01124 \text{ kg/m}^2$$

$$J_w = 2.3250 \text{ kgm}^2$$

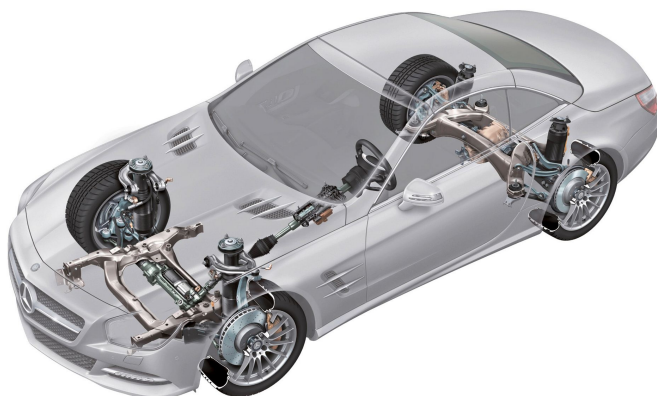
$$k_a = 4.58 * 10^{-2} \text{ (konstanta)}$$

$$k_m = 4.58 * 10^{-2} \text{ (konstanta)}$$

$$R = 2.49 \text{ } \Omega$$

$$V_a = 4.75 \text{ V}$$

### 3.3 Aktivni ovjes kotača sa hidrauličkim aktuatorom



Slika 3.16: Aktivni ovjes 1

Prezentiran je primjer iz [4].

#### Uvod

Vjerojatno je svatko imao priliku nekoliko puta doživjeti neudobnu vožnju nekim vozilom na cesti. Ponekad se čovjek povede mislima pa ne opazi 'ležećeg policajca', te 'preleti' preko istog brzinom većom od propisane. Osjete se jake oscilacije. Štoviše, desi se odskok od sjedišta automobila. Predmet interesa analize ovog problema je da taj vertikalni pomak vozača (moguće i drugih putnika) bude što je manji moguć. Za informaciju o trenutnom vertikalnom položaju korišteni su senzori postavljeni na kotače automobila. Želi se postići udobna vožnja. Referentne vrijednosti su: da oscilacije auta na cesti budu oko 5 % i da nakon što auto naleti na prepreku nastavi mirnu vožnju za oko 3 sekunde vremena. Što to znači? Ako je povišenje na cesti 10 cm, tada je maksimalna dozvoljena oscilacija +5mm ili -5mm. Promatraju se rezultati ponašanja formuliranog dinamičkog sistema obzirom na profil ceste i obzirom na brzinu automobila kojom nalijeće preko postavljenog uzvišenja, a koja se povećava zadajući i veću snagu hidrauličkog aktuatora. Promatrani su naleti automobila na dva različita profila ceste.

### Formulacija vremenski neprekidnog sistema diferencijalnih jednadžbi

Dizajnira se sistem diferencijalnih jednadžbi koji opisuje rad aktivnog ovjesa na jednom kotaču automobila. Drugim riječima, koristi se 1/4 modela radi pojednostavljenja problema. Nomenklatura korištena u zadatku:

$m_p \rightsquigarrow$  masa putnika na sjedištu

$m_s \rightsquigarrow$  masa 1/4 automobila

$m_{us} \rightsquigarrow$  masa ovjesa (sa kotačem)

$k_p \rightsquigarrow$  koeficijent krutosti između sjedišta i 1/4 automobila ( $N/m$ )

$k_s \rightsquigarrow$  koeficijent gipkosti između šasije i auta ( $N/m$ )

$k_t \rightsquigarrow$  koeficijent gipkosti vanjske gume auta ( $N/m$ )

$c_p \rightsquigarrow$  koeficijent prigušenja sjedišta u ( $Ns/m$ )

$c_s \rightsquigarrow$  koeficijent prigušenja ovjesa u ( $Ns/m$ )

$f_a \rightsquigarrow$  snaga hidrauličkog akuatora

$r(t) \rightsquigarrow$  profil ceste



Slika 3.17: Aktivni ovjes 2

Koristeći se Newtonovim zakonom primjenjenim na modelu tipa 3.17 te supstitucijom

$$x_1 = x_p$$

$$x_2 = \dot{x}_p$$

$$x_3 = x_s$$

$$x_4 = \dot{x}_s$$

$$x_5 = x_{us}$$

$$x_6 = \dot{x}_{us}$$

dobiju se tri jednadžbe:

$$m_p \ddot{x}_2 + k_p(x_1 - x_3) + c_p(x_2 - x_4) = 0 \quad / : m_p$$

$$m_s \ddot{x}_4 + k_p(x_3 - x_1) + c_p(x_4 - x_2) + k_s(x_3 - x_5) + c_s(x_4 - x_6) - f_a = 0 \quad / : m_s$$

$$m_{us} \ddot{x}_6 + k_s(x_5 - x_3) + c_s(x_6 - x_4) + k_t(x_5 - r(t)) + f_a = 0 \quad / : m_{us}$$

Nakon dijeljenja sa odgovarajućim masama dobije se :

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= -(k_p/m_p)(x_1 - x_3) - (c_p/m_p)(x_1 - x_3) \\ \dot{x}_4 &= -(k_p/m_s)(x_3 - x_1) - (c_p/m_s)(x_4 - x_2) - (c_s/m_s)(x_4 - x_6) + (f_a/m_s) \\ \dot{x}_6 &= -(k_s/m_{us})(x_5 - x_3) - (c_s/m_{us})(x_6 - x_4) - (k_t/m_{us})(x_5 - r(t)) - (f_a/m_{us}). \end{aligned}$$

Sistem diferencijalnih jednadžbi koji opisuje aktivnu suspenziju na kotaču je :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_p/m_p & -c_p/m_p & k_p/m_p & c_p/m_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ k_p/m_s & c_p/m_s & -(k_p + k_s)/m_s & -(c_p + c_s)/m_s & k_s/m_s & c_s/m_s \\ 0 & 0 & k_s/m_{us} & c_s/m_{us} & -(k_s + k_t)/m_{us} & -c_s/m_{us} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ f_a/m_s \\ k_t/m_{us}r(t) - f_a/m_{us} \end{bmatrix}.$$

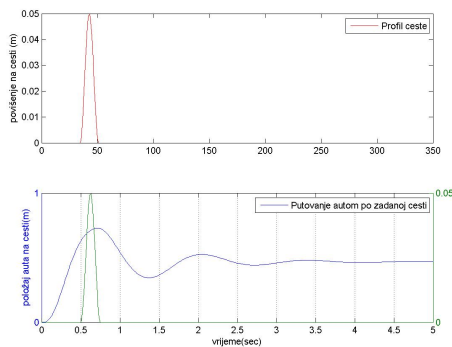
Kompaktniji zapis

$$\dot{x} = Ax + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & (k_t/m_{us}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_a \\ r(t) \end{bmatrix}.$$

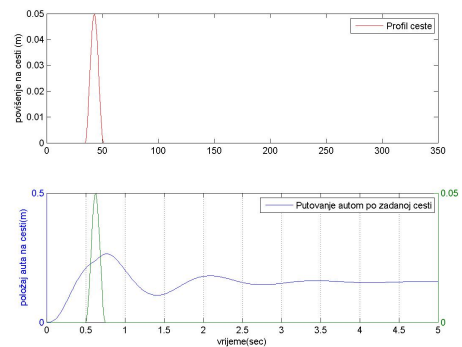
Razlika u odnosu na prethodne primjere je što je broj ulaza dvostruko veći. Ulaz u sistem je profil ceste i snaga aktuatora.  $y = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]x$ , jer je interes udobnost vožnje, tj. vertikalni pomak vozača na sjedištu automobila.

### Analiza stabilnosti dobivenog sistema

Nakon formiranja sustava diferencijalnih jednadžbi zadaje se neki profil ceste na kom se točno vide povišenja, tj. udubljenja. Pozivom  $eig(A)$  dobije se  $eig(A) = [-8.7042 + 58.1381i \ -8.7042 - 58.1381i \ -9.1478 + 12.6558i \ -9.1478 - 12.6558i \ -1.1530 + 4.6507i \ -1.1530 - 4.6507i]$  i čini se kako je sistem stabilan (sve su svojstvene vrijednosti u lijevoj poluravnini). Međutim, njegovo ponašanje ne zadovoljava tražene referentne vrijednosti. Auto prelijeće preko prepreke (5cm povišenja) snagom aktuatora od 15kW (60 kW na čitav automobil) i vide se oscilacije od 25 cm prema gore i 12.5 cm prema dolje, te smirenje do mirne vožnje u trajanju od 4.5 sekundi. Smanji li se snaga aktuatora, tj. nalijeće li se na istu prepreku manjom brzinom, npr. 5 kW (20kW na čitav automobil), ishod je ponovno neprihvatljiv. Oscilacije su preko 12.5 cm gore i oko 5 cm prema dolje. Potrebno vrijeme do mirne vožnje je nešto manje od 4.5 sekundi. Nužna je kontrola sistema !



(a) Nekontroliran sustav s većom brzinom - ulazom



(b) Nekontroliran sustav s manjom brzinom - ulazom

## LQR kontrola sistema

Napravljena je stabilizacija sistema LQR regulatorom sistema te su proučavana ponašanja sistema obzirom na veće ili manje brzine naleta na neki od dva prikazana profila ceste. Prije same kontrole, kao obično, provjerena je upravljivost i osmotrivost sistema. Matrica  $Q = C^T C =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

dok je  $R 2 \times 2$  matrica jer su 2 ulaza u sistem. Potrebno je varirati  $Q(1, 1)$ , te  $x$  i  $y$  koeficijente iz

$$R = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}.$$

$x$  je odgovoran za stabilizaciju obzirom na snagu aktuatora odnosno brzinu, dok je  $y$  odgovoran za stabilizaciju sistema obzirom na profil ceste.

Slučaj a)

Neka je  $Q(1, 1) = 900$ , a  $x = 50, y = 100$  te

$$R = \begin{bmatrix} 50 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix}.$$

Pozivom



**POGLAVLJE 3. PRIMJENE LQR KONTROLE I USPOREDBA SA METODOM  
PREMJESTANJA POLOVA**

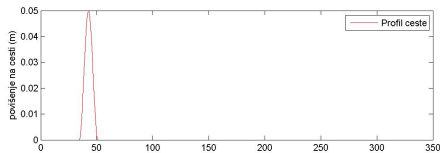
52

1  $K = \text{lqr}(A, B, Q, R)$  ;

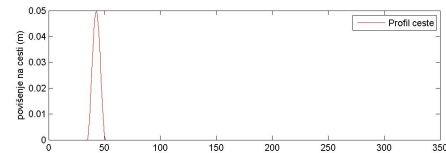
dobije se

$$K = \begin{bmatrix} 0.0268 & 0.0025 & 0.0213 & 0.0047 & -0.0139 & 0.0001 \\ 1.6381 & 0.1255 & 1.1338 & 0.1757 & -0.4896 & 0.0047 \end{bmatrix}.$$

Simulacijom dinamičkog sistema vidi se smirenje na cesti za manje od 1 sekunde. Oscilacije su oko 1.5 cm prema gore, a trebale bi biti oko 1.25 mm na 2.5 cm povišenja (preko kojeg ovaj put automobil prelazi). Kontrola je loša. Čak i uz smanjenje snage aktuatora, tj. naletom manjom brzinom ne dobiju se referentne vrijednosti. Snaga aktuatora smanjena je sa 15 kW na 5 kW. Smirenje do mirne vožnje je ispod 1.5 sekundi, ali su oscilacije na cesti oko 1.25 cm (trebalo bi biti ispod 0.9 mm) na povišenje iznosa 1.8 cm .



(a) Loš izbor LQR kontrole - prva cesta (veća brzina)



(b) Loš izbor LQR kontrole - prva cesta (manja brzina)

Pokaže se da puno manje vrijednosti koeficijenata  $x$  i  $y$  daju puno bolju kontrolu.

Slučaj b)

Za isti profil ceste kao u slučaju a) te isti  $Q(1, 1)$  neka je

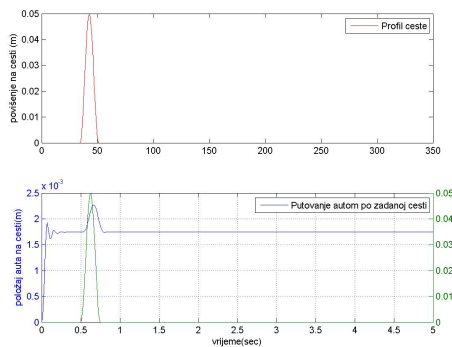
$$R = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}.$$

Tada je

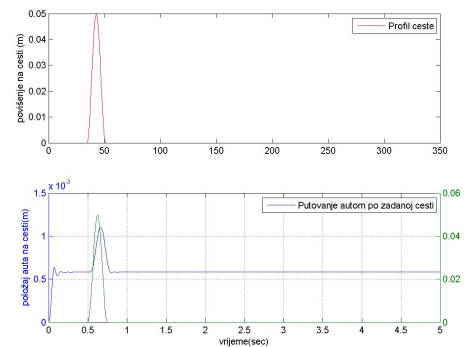
$$K = \begin{bmatrix} 0.9587 & 0.0264 & 0.0819 & 0.0089 & -0.0063 & 0.0003 \\ 85.0971 & 2.7090 & 9.445 & 0.925 & -0.4303 & 0.0365 \end{bmatrix}.$$

Simulacijom se vidi smirenje ispod 1 sekunde, a oscilacije su oko 0.5 mm na 1.5 cm povišenja na cesti (snaga aktuatora je 15 kW). I za manje brzine automobila, recimo snagu

aktuatora 5 kW vide se oscilacije manje od 0.5 mm na 2.8 cm povišenja na cesti i smirenje postignuto za manje od sekunde.



(a) Dobar izbor LQR kontrole - prva cesta (veća brzina)



(b) Dobar izbor LQR kontrole - prva cesta (manja brzina)

Baci li se pogled na svojstvene vrijednosti  $eig(A - BK) =$

$$[-18.8003 + 71.4080i \quad -18.8003 - 71.4080i \quad -44.597 + 29.2368i \quad -44.5971 - 29.2368i \quad -16.6079 \quad -12.0464]$$

primijeti se, kako su od njih 6 ukupno, dvije daleko u lijevoj poluravnini za razliku od  $eig(A)$ . Te dvije imaju neznatan utjecaj na stabilnost sistema. To je važno saznanje za odabir polova u metodi premještanja polova, koja je napravljena radi usporedbe. Slučaj a) i Slučaj b) su primjenjeni na još jedan profil ceste na kojem su 3 uzastopna povišenja i 2 uzastopna udubljenja. Slučaj a) daje očekivano loše rezultate. Naletom na tek neznatno povišenje snagom aktuatora od 15 kW osjete se oscilacije iznosa 5 mm. Snagom aktuatora od 5 kW oscilacije bivaju nešto manje i iznose 0.7 cm na 1.8 cm povišenja. Sveukupno, loše ponašanje sistema!

Slučaj b) pak daje očekivano dobre rezultate. Oscilacije su oko 0.5 mm na 1.5 cm povišenja naletom sa jačom snagom aktuatora. Manjom snagom aktuatora postižu se oscilacije manje od 0.5 mm naletom na oko 2.8 cm povišenja. Vrijeme smirivanja do mirne vožnje je referentno i malo je veće od 1 sekunde.

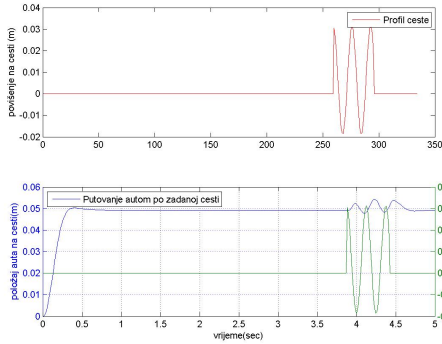
## Metoda premještanja polova

Slučaj a)

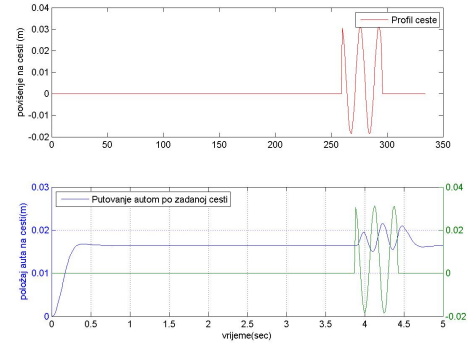
Ovdje je ponovno napravljena usporedba rezultata koje daje LQR regulacija sistema i metoda premještanja polova. Kako je uočeno da su 2 pola udaljenija od preostala 4 izborom

POGLAVLJE 3. PRIMJENE LQR KONTROLE I USPOREDBA SA METODOM  
PREMJESTANJA POLOVA

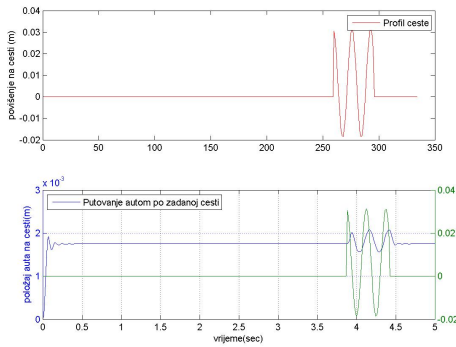
54



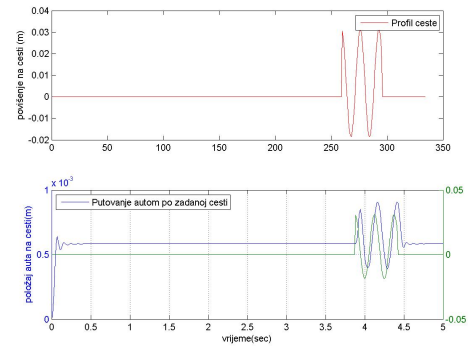
(a) Loš izbor LQR kontrole - druga  
cesta (veća brzina)



(b) Loš izbor LQR kontrole - druga  
cesta (manja brzina)



(a) Dobar izbor LQR kontrole -  
druga cesta (veća brzina)



(b) Dobar izbor LQR kontrole -  
druga cesta (manja brzina)

polova

$$P_1 = \begin{bmatrix} -27.8915 + 7.1878i & -27.8915 - 7.1878i & -7.1426 + 6.0345i & -7.1426 - 6.0345i & -3.7942 & -3.0043 \end{bmatrix}$$

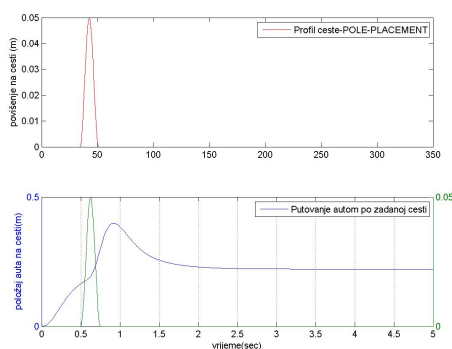
te pozivom

$$K = \text{place}(A, B, P);$$

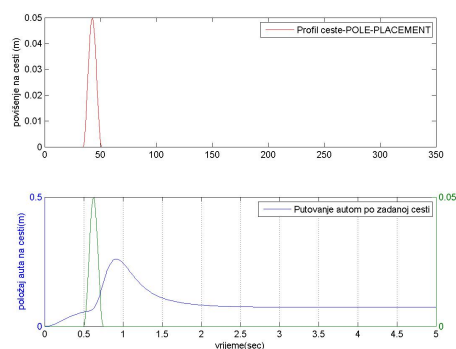
dobije se da je

$$K = \begin{bmatrix} -76.1282 & -8.0153 & 92.4357 & 25.3126 & 32.8296 & -2.9196 \\ -0.0258 & -0.0038 & 0.1161 & 0.0145 & -1.0489 & 0.0033 \end{bmatrix}.$$

Simulacijom dinamičkog sustava sa ovakvim vrijednostima postiže se smirenje automobila do mirne vožnje ispod 2.5 sekundi, ali i oscilacije od preko 10 cm (snaga aktuatora je 15 kW a povišenje 5 cm). To je neprihvatljivo. Smanji li se brzina automobila, smanjenjem snage aktuatora na 5 kW, ponovno se osjete oscilacije koje prelaze okvire referentnih vrijednosti te iznose oko 10 cm, a vrijeme smirenja je oko 2.5 sekundi. Loš izbor polova.



(a) Loš izbor polova - prva cesta  
(veća brzina)



(b) Loš izbor polova - prva cesta  
(manja brzina)

#### Slučaj b)

Ukoliko se 'zadnja' 2 pola u izboru  $P_1$  premjeste puno dalje u lijevu poluravninu i time izgube značaj u sudjelovanju stabilnosti sistema primjeti se referentno ponašanje sistema obzirom na ulaz. Izborom

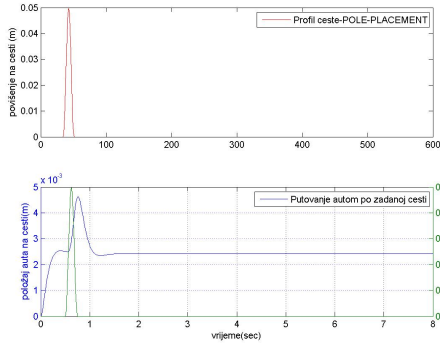
$$P_2 = \begin{bmatrix} -27.8915 + 7.1878i & -27.8915 - 7.1878i & -7.1426 + 6.0345i & -7.1426 - 6.0345i & -360.7942 & -360.0043 \end{bmatrix}$$

uoči se da je vrijeme smirenja ispod 1 sekunde. Oscilacije su oko 2 mm na 2.65 cm (snaga aktuatora je 15 kW) povišenja. Za dostizanje reference smanji se snaga aktuatora na 5 kW. Automobil radi jednake oscilacije (2 mm), ali na povišenja iznosa čak 4.25 cm.

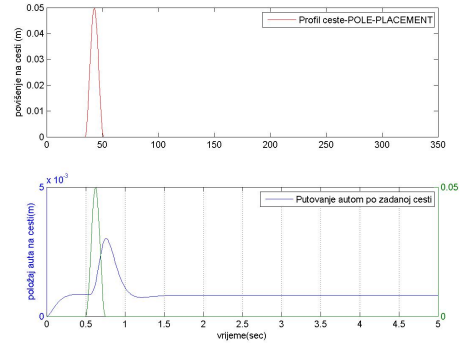
Ukoliko se pogleda 2. profil ceste primjeti se analogno 'ponašanje'. Za isti izbor polova  $P_1$  vrijeme smirenja je oko 2.5 sekundi. Oscilacije su oko 10 cm na 2.8 cm povišenja na cesti. Loš izlaz uoči se i za smanjenu brzinu.

Za izbor polova  $P_2$  postiže se vrijeme smirenja automobila do mirne vožnje u vrijednosti od oko 1.5 sekundi te oscilacije iznosa 0.9 mm na 1.8 cm povišenja. Snaga aktuatora je iznosa 15 kW. Prihvatljivo ponašanje sistema. Smanji li se snaga aktuatora na 5 kW postižu se oscilacije oko 0.8 mm na čak 3 cm povišenja.

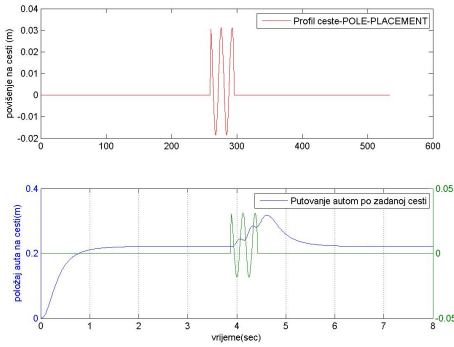
**POGLAVLJE 3. PRIMJENE LQR KONTROLE I USPOREDBA SA METODOM PREMJEŠTANJA POLOVA**



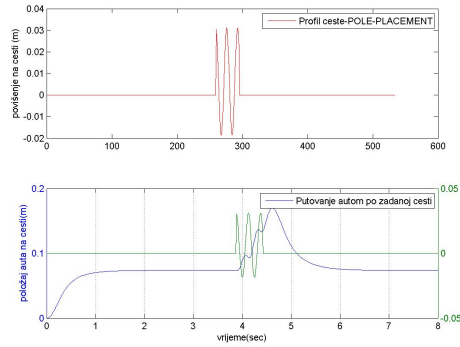
(a) Dobar izbor polova - prva cesta (veća brzina)



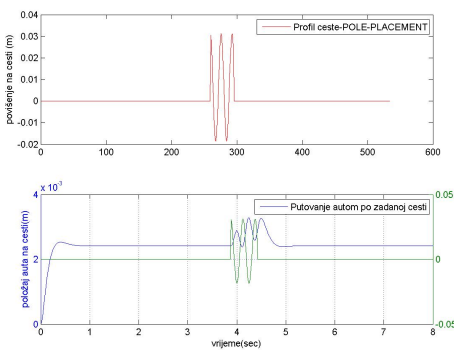
(b) Dobar izbor polova - prva cesta (manja brzina)



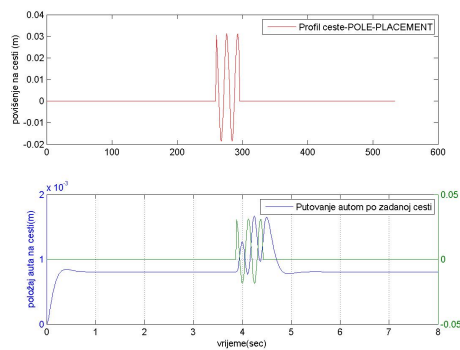
(a) Loš izbor polova - druga cesta (veća brzina)



(b) Loš izbor polova - druga cesta (manja brzina)



(a) Dobar izbor polova - druga cesta (veća brzina)



(b) Dobar izbor polova - druga cesta (manja brzina)

## Zaključak

I metoda premještanja polova i LQR kontrola sistema daju jednake rezultate. Najbolji ishod zabilježen LQR kontrolom sistema jesu oscilacije automobila iznosa 0.5 mm na 2.8 cm povišenja na cesti. Metoda premještanja polova daje sličan ishod  $\leadsto$  0.8 mm na 3 cm povišenja na cesti.

### Parametri korišteni u modelu

$$m_p = 60 \text{ kg}$$

$$m_s = 290 \text{ kg}$$

$$m_{us} = 59 \text{ kg}$$

$$k_p = 10507 \text{ N/m}$$

$$k_s = 16812 \text{ N/m}$$

$$k_t = 190000 \text{ N/m}$$

$$c_p = 875.6 \text{ Ns/m}$$

$$c_s = 1000 \text{ Ns/m}$$

### 3.4 Quadrotor

Za kraj je ilustriran primjer LQR kontrole objekta koji se diže u zrak. Za razliku od prethodnih primjera, ovaj je puno složeniji.



Slika 3.27: Quadrotor

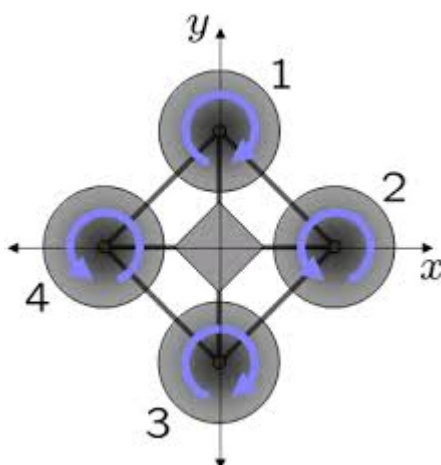
Prezentiran je primjer iz [5].

#### Uvod

Vjerojatno čovjek osjeti veliko zadovoljstvo ukaže li mu se prilika okušati čar vožnje helikopterom ili avionom. Vjerojatno i vožnja helikopterom nije toliko komforna koliko vožnja nekim drugim zračnim prijevozom. Većini puno pristranija i poznatija stvar jest sve veći napredak i modernizacija dječjih igračaka. Auti na daljinsko upravljanje, roboti pa i leteći avioni pravo su malo dječje carstvo. Kako su do sada prikazivani samo primjeri kontrole naprava koje se gibaju na nekoj podlozi, pravi je izazov pokušati iskontrolirati nešto što bi se ponašalo stabilno i u zraku - lebdeći. Quadrotor ili quadcopter je naprava koja izvrsno imitira let helikoptera. Podižu ga i pokreću 4 rotora. Prednost u odnosu na helikopter je što upotrebom četiri rotora, svaki pojedini rotor jest manjeg promjera od odgovarajućeg rotora helikoptera. Postiže se da rotori trebaju manju kinetičku energiju za vrijeme letenja. Svaki rotor proizvodi silu potiska i moment u centru rotacije, te silu otpora u suprotnom smjeru od kretanja letjelice. Ukoliko se svi rotori vrte istom kutnom brzinom tako da se svaka dva nasuprotna vrte u istom smjeru (u smjeru kazaljke na satu ili suprotno

od smjera kazaljke na satu) tada ukupan moment i kutna akceleracija oko vertikalne osi jesu nula. Radi toga rotor za stabilizaciju oko vertikalne osi (kao kod helikoptera) nije potreban. Zakret oko vertikalne osi postiže se razlikom momenata između rotora koji se vrtu u smjeru kazaljke na satu i onih suprotnog smjera kazaljke na satu. Poveća li se potisna sila jednog od rotora u paru i smanji druga postiže se zakret oko pripadne horizontalne osi.

U prvom dijelu kontrole nad ovim objektom promatra se brzina uspinjanja quadrotora u



Slika 3.28: Pozicije rotora na napravi

vremenskom intervalu od 10 sekundi. Zadaju se jednaki potisci na sva 4 rotora i postiže se kretanje quadrotora samo po  $z$ -osi. Želi se postići brzina veća od 15 km/h u zadanom vremenskom roku - 10 sekundi. Prikazuju se ishodi slučajeva kada se u obzir uzima mogući poremećaj uzrokovan zemljinom gravitacijom i bez poremećaja. U drugom dijelu kontrole želi se postići da quadrotor dođe na koordinate (5, 8, 30) - gledajući sve tri  $-x, y, z$  osi u intervalu od 10 sekundi. Za određivanje trenutnog nagiba, orijentacije i položaja quadrotora koristi se senzorska pločica koja sadrži žiroskop, akcelerometar, magnetometar i barometar. Žiroskop služi za dobivanje vrijednosti kutne brzine oko pojedine osi quadrotora. Kratkoročno je točan, no nakon nekog vremena pojavi se drift. Akcelerometar mjeri akceleraciju u pojedinoj osi. Osim dinamičke akceleracije dobije se i vrijednost ubrzanja gravitacijskog polja, te se iz očitavanja pojedinih osi akcelerometra dobije nagib u odnosu na ravninu. Problem je šum koji se javlja na njemu. Uloga magnetometra je račun kuta između čipa i magnetskog polja. Tako se može izračunati smjer u kom je quadrotor okrenut. Barometrom se, mjereći atmosferski tlak, određuje visina na kojoj se letjelica nalazi. Svaki senzor ima određenu grešku, pa se ne može koristiti sam za sebe. Potrebna je fuzija senzora, za što se koristi "Direction cosine matrix", DCM (algoritam) koji se odvija na mikrokontroloru postavljenom na modulu. Radi iznimne složenosti samog problema ne radi



se još i filtriranje podataka kao kod slučaja sa robotom. To sve je uključeno u algoritam implementiran na mikrokontroloru u čiju se dubinu ne zalazi. Stoga se, kontrolirajući polijetanje quadrotora, ponaša kao da tih grešaka nema. Ponovno, najprije je pokazan slučaj kontrole kad nije uključen poremećaj uzrokovan gravitacijom, a potom slučaj kad je poremećaj uključen, pa obzirom na njega sistem u ulazu dobije potrebnu - pojačanu snagu za "pokretanje" naprave u visinu.

### Formulacija vremenski neprekidnog sistema diferencijalnih jednadžbi

Nomenklatura koja će se koristiti u ovom primjeru:

$u, v, w \rightsquigarrow$  brzine u lokalnom koordinatnom sustavu (duž osi  $x, y$  i  $z$ )

$\phi, \theta, \psi \rightsquigarrow$  kutevi zakreta u lokalnom koordinatnom sustavu (duž osi  $x, y$  i  $z$ )

$p, q, r \rightsquigarrow$  kutne brzine u lokalnom koordinatnom sustavu (duž osi  $x, y$  i  $z$ )

$x_e, y_e, z_e \rightsquigarrow$  brzine u globalnom koordinatnom sustavu (duž osi  $x, y$  i  $z$ )

$L \rightsquigarrow$  udaljenost motora do  $z$ -osi

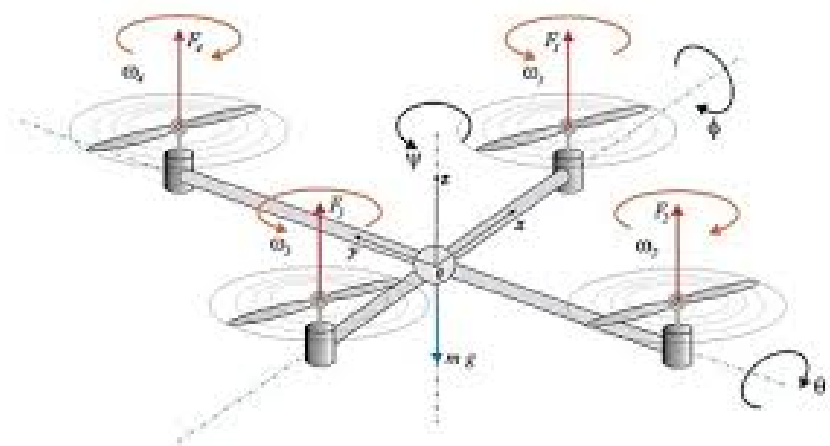
$F \rightsquigarrow$  sile

$m \rightsquigarrow$  masa quadrotora

$g \rightsquigarrow$  gravitacijsko ubrzanje

$M \rightsquigarrow$  moment

$J_{xx}, J_{yy}, J_{zz} \rightsquigarrow$  moment inercije oko  $x, y$  i  $z$  osi



Slika 3.29: Zakreti oko osi koordinatnih sustava (lokalnih i globalnih)

Rotacija oko  $x$ -osi quadrotora dobije se iz jednadžbi dinamike:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x \\ \dot{y} &= y \cos \phi - z \sin \phi \\ \dot{z} &= y \sin \phi + z \cos \phi.\end{aligned}$$

Rotacija oko  $x$ -osi je

$$T_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}.$$

Rotacija oko  $y$ -osi quadrotora dobije se iz jednadžbi dinamike :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= z \sin \phi + x \cos \phi \\ \dot{y} &= y \\ \dot{z} &= z \cos \phi - x \sin \phi.\end{aligned}$$

Rotacija oko  $y$ -osi je

$$T_y = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Rotacija oko  $z$ -osi quadrotora dobije se iz jednadžbi dinamike:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x \cos \psi - y \sin \psi \\ \dot{y} &= x \sin \psi + y \cos \psi \\ \dot{z} &= z.\end{aligned}$$

Rotacija oko  $z$ -osi je

$$T_z = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Da bi se dobila brzina naprave po  $x$ -osi,  $y$ -osi i  $z$ -osi koristi se vektorski umnožak kutnih brzina i ukupne matrice rotacije  $T = T_x T_y T_z$ .

$$T = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & \cos \psi \sin \theta \sin \phi - \cos \phi \sin \psi & \cos \phi \cos \psi \sin \theta + \sin \phi \sin \psi \\ \cos \theta \sin \psi & \cos \phi \cos \psi + \sin \theta \sin \phi \sin \psi & -\cos \psi \sin \phi + \cos \phi \sin \theta \sin \psi \\ -\sin \theta & \cos \theta \sin \phi & \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix}.$$

Tada je brzina u zemljinom koordinatnom sustavu obzirom na brzine  $u, v, w$ :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_e \\ \dot{y}_e \\ \dot{z}_e \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}.$$

Raspisujući taj izraz dobije se :

$$\begin{aligned} \dot{x}_e &= \cos \theta \cos \psi u + (\cos \psi \sin \theta \sin \phi - \cos \phi \sin \psi)v + (\cos \phi \cos \psi \sin \theta + \sin \phi \sin \psi)w \\ \dot{y}_e &= \cos \theta \sin \psi u + (\cos \phi \cos \psi + \sin \theta \sin \phi \sin \psi)v + (-\cos \psi \sin \phi + \cos \phi \sin \theta \sin \psi)w \\ \dot{z}_e &= -\sin \theta u + \cos \theta \sin \phi v + \cos \theta \cos \phi w. \end{aligned}$$

Kutne brzine se dobiju iz Eulerove rotacijske matrice :

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

,tj.

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin \phi \tan \theta & \cos \phi \tan \theta \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi \cos \theta & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}.$$

Ako se uvaži 2. Newtonov zakon mehanike  $F = ma$  i primjeni na ovaj model, tada slijedi

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} + \text{Coriolisov efekt} = \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}.$$

Točnije

$$\left( \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\sin \theta mg \\ \cos \theta \sin \phi mg \\ \cos \theta \cos \phi mg \end{bmatrix} \right) 1/m = \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} qw - rv \\ ru - pw \\ pv - qw \end{bmatrix}.$$

Raspisujući taj izraz izlazi,

$$\dot{u} = \frac{1}{m}(F_x - \sin \theta mg) - qw + rv$$

$$\begin{aligned}\dot{v} &= \frac{1}{m}(F_y + \cos \theta \sin \phi mg) - ru + pw \\ \dot{w} &= \frac{1}{m}(F_z + \cos \theta \cos \phi mg) - pv + qu.\end{aligned}$$

Nadalje, jednadžba momenta je  $M = J\dot{w} + w \times Jw$ , tj.

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} J_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix},$$

dobije se

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/J_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 1/J_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 1/J_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_x - (J_{zz} - J_{yy})qr \\ M_y - (J_{xx} - J_{zz})pr \\ M_z - (J_{yy} - J_{xx})pq \end{bmatrix}.$$

Još se zapiše odnos djelovanja sile potiska na propelerima i momenata na osima naprave:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}.$$

Moment oko  $x$ -osi je  $M_x = L(F_2 - F_4)$ , oko  $y$ -osi  $M_y = L(F_3 - F_1)$ , a moment oko  $z$ -osi se gleda kao momentna reakcija na vrtnju propelera. Recimo propeler koji proizvodi silu potiska  $F_2$  ima pozitivan smjer rotacije gledajući os  $z$ . No, u letjelici stvara reakciju suprotnog smjera, pa se u jednadžbu unosi s negativnim predznakom. Stoga je  $M_z = cL(-F_2 - F_4 + F_1 + F_3)$ . Nelinearizirani model prikaza je

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \\ \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \dot{x}_e \\ \dot{y}_e \\ \dot{z}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -(J_{xx} + J_{yy})/J_{xx}r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(J_{xx} + J_{zz})/J_{yy}r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(J_{yy} + J_{xx})/J_{zz}r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r & -q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r & 0 & p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q & -p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \phi \tan \theta & \cos \phi \tan \theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \phi \cos \theta & \cos \phi \cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta \sin \psi & \cos \phi \cos \psi + \sin \theta \sin \phi \sin \psi & -\cos \psi \sin \theta + \cos \phi \sin \theta \sin \psi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta \sin \theta & \cos \theta \cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ p \\ q \\ r \\ \phi \\ \theta \\ \psi \\ x_e \\ y_e \\ z_e \end{bmatrix}^*$$

**POGLAVLJE 3. PRIMJENE LQR KONTROLE I USPOREDBA SA METODOM  
PREMJESTANJA POLOVA**

64

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \\ u \\ v \\ w \\ \phi \\ \theta \\ \psi \\ x_e \\ y_e \\ z_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & Lk/J_{xx} & 0 & -Lk/J_{xx} \\ -Lk/J_{yy} & 0 & Lk/J_{yy} & 0 \\ cLk/J_{zz} & -cLk/J_{zz} & cLk/J_{zz} & -cLk/J_{zz} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k/m & -k/m & -k/m & -k/m \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\sin \theta \\ \cos \theta \sin \phi \\ \cos \theta \cos \phi \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} g \\
 \\
 y = & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \\ u \\ v \\ w \\ \phi \\ \theta \\ \psi \\ x_e \\ y_e \\ z_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} g
 \end{aligned}$$

Model je potrebno linearizirati. Odabire se sljedeća vrijednost nagiba kuta:  $\theta = 0$  i  $\phi = 0$  - u horizontalnoj orijentaciji naprave. Tada je uvrštavanjem sljedećih vrijednosti:  $\sin \phi = \phi$ ,  $\cos \phi = 1$ ,  $\sin \theta = 1$  i  $\cos \theta = 1$  postignuta linearizacija. Za let u istoj točki sve pozicije, brzine i kutevi brzine su nula osim kutnog zakreta na z-osi. Uzima se  $\psi = \psi_0$ . Tada je linearizirani model:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \\ u \\ v \\ w \\ \phi \\ \theta \\ \psi \\ x_e \\ y_e \\ z_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & Lk/J_{xx} & 0 & -Lk/J_{xx} \\ -Lk/J_{yy} & 0 & Lk/J_{yy} & 0 \\ cLk/J_{zz} & -cLk/J_{zz} & cLk/J_{zz} & -cLk/J_{zz} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k/m & -k/m & -k/m & -k/m \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} g \\
 \\
 y = & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \\ u \\ v \\ w \\ \phi \\ \theta \\ \psi \\ x_e \\ y_e \\ z_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} g
 \end{aligned}$$

**Analiza stabilnosti dobivenog sistema jednadžbi**

Sustav je na granici stabilnosti, tj. labilan  $eig(A) = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ . I najmanji poremećaj uzrokovao bi nestabilnost sistema. Nužno je projektirati regulator za stabiliza-

ciju.

### LQR kontrola sistema

Prije nego se krene sa projektiranjem optimalnog regulatora za quadrotor, potrebno je odrediti svojstva sustava - upravljivost i osmotrivost. Provjerom kao i ranije, sustav je upravljiv i osmotriv. Matrica

$$Q = C^T C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Na poziciji  $Q(4, 4)$ ,  $Q(5, 5)$  i  $Q(10, 10)$ ,  $Q(11, 11)$  nalaze se koeficijenti matrice  $Q$  odgovorni za brzine duž  $x$  i  $y$  osi u lokalnom, tj. globalnom koordinatnom sustavu, čijom varijacijom se postiže kontrola sustava.

$$R = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{bmatrix}$$

Na dijagonali matrice  $R$  biraju se isti koeficijenti, jer su sva četiri motora ista. Zadaje se isti napon na sva četiri motora. Iznos napona je 11V.

Slučaj a)

Izborom  $Q(i, i) = 0.1, i \in \{4, 5, 10, 11\}$ , te  $R(i, i) = 0.01, i \in \{1, 2, 3, 4\}$  i  $R(5, 5) = 100$  postiže se brzina od oko  $0.423529m/s = 1.5247km/h$ , tj. quadrotor se popeo na 3.6 m u vremenu od 8.5 sekundi. Kako bi se uklonilo odstupanje praćenja reference po  $z$  - osi, dodaje se kompenzacija konstantnog poremećaja gravitacije. Vrijednost kompenzacijskog vektora  $v$  odredi se iz  $-k/m(u_1 + u_2 + u_3 + u_4) = -g, v = u_1 = u_2 = u_3 = u_4 \implies -k/m(4v) = -g \implies 4v = gm/k \implies v = gm/(4k)$ . Ta je vrijednost ista za sva četiri motora, jer sva četiri

**POGLAVLJE 3. PRIMJENE LQR KONTROLE I USPOREDBA SA METODOM  
PREMJESTANJA POLOVA**

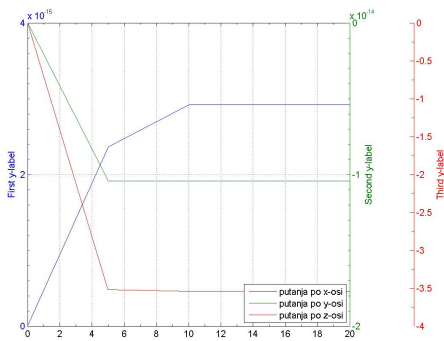
istovremeno rade i svaldavaju gravitaciju. Formira se  $u = -Kx + v$ , umjesto dosadašnjeg  $u = -Kx$ . Ishod je brzina od  $0.55882352941m/s = 2.01176470008km/h$ . Motori su dobili veću snagu obzirom na poremećaj i stvorili veći potisak. No, ponovno nije zadovoljena referentna vrijednost brzine u vremenu 10 sekundi.

Slučaj b)

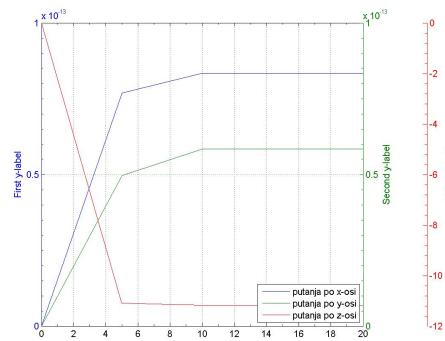
Primjeti se poboljšanje ukoliko se vrijednosti na dijagonali od  $R$  (bez  $R(5, 5)$ ) povećaju. Za izbor  $Q(i, i) = 0.1, i \in \{4, 5, 10, 11\}$  i  $R(i, i) = 0.1, i \in \{1, 2, 3, 4\}$  te  $R(5, 5) = 10$ , pozivom LQR regulatora sistema postiže se brzina iznosa  $1.21m/s = 4.35789km/h$ , a uz kompenzaciju poremećaja  $1.70588m/s = 6.14km/h$ . Izbor matrica  $Q$  i  $R$  je i dalje loš.

Slučaj c)

Izborom  $Q(i, i) = 0.01, i \in \{4, 5, 10, 11\}$  i  $R(i, i) = 1, i \in \{1, 2, 3, 4\}$ , te  $R(5, 5) = 200$  postižu se referentne vrijednosti. Sada je brzina od  $4.23529m/s = 15.247km/h$ . Ako se uključi poremećaj gravitacije postiže se brzina i do  $5.41176m/s = 19.482km/h$ . Qudarotor odlazi na visinu 46 m u roku 8.5 sekundi.



(a) Slučaj a)



(b) Slučaj b)

Ukoliko se želi postići da quadrotor dođe na određene koordinate u prostoru zadaju se najprije različiti naponi na motore. Neka su zadane vrijednosti napona na motorima: 11.2V,

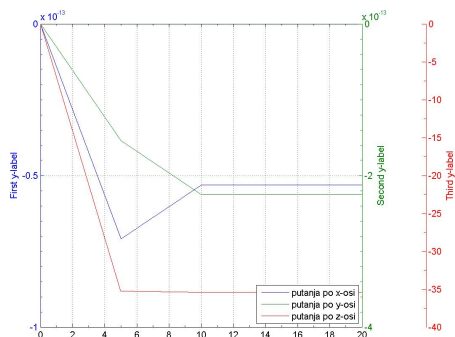
11.7V, 11.12V i 9.995V.

Slučaj a)

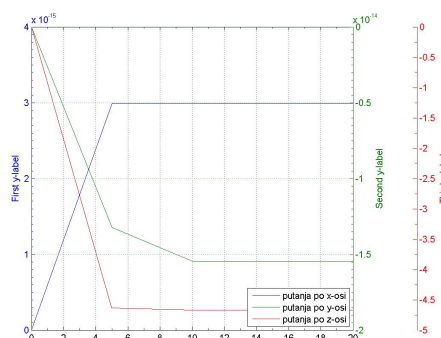
Izborom kao ranije  $Q(i, i) = 0.1, i \in \{4, 5, 10, 11\}$  te  $R(i, i) = 0.1, i \in \{1, 2, 3, 4, \}$ , a  $R(5, 5) = 300$  dobije se sljedeći ishod: quadrotor u vremenu od 10 sekundi, dođe na poziciju (1.6, 2.5, 12). Uključi li se kompenzacija obzirom na poremećaj, letjelica dospije na još manju visinu, jer ovaj put snaga dana motorima treba izdržati i putanje duž  $x$  i  $y$ -osi. Problem je izbor  $Q$  i  $R$  matrica u LQR kontroli.

Slučaj b)

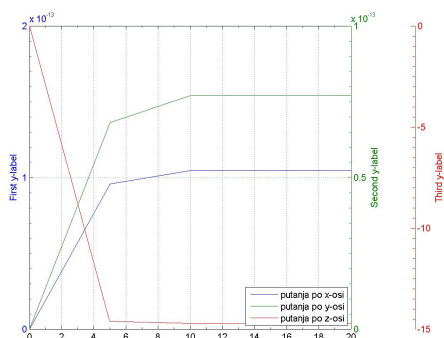
Poveća li se vrijednost koeficijenata  $R(i, i) = 1, i \in \{1, 2, 3, 4\}$ , quadrotor bez uključenog



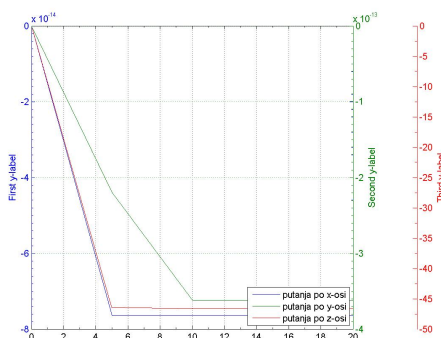
(a) Slučaj c)



(b) Slučaj a) uz kompenzaciju poremećaja gravitacije



(a) Slučaj b) uz kompenzaciju poremećaja gravitacije



(b) Slučaj c) uz kompenzaciju poremećaja gravitacije

poremećaja gravitacije dolazi na koordinate (5.1, 8.1, 38). Promjenivši samo  $R(i, i)$ ,  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ , quadrotor ide prema referentnoj visini od 30 m. Uključi li se poremećaj uzrokovano gravitacijom, naprava dolazi na (5.1, 8.05, 31.5).

Slučaj c)

Malim korekcijama popravljaju se pomaci od (0.1, 0.05, 1.5), te naprava dolazi na koordinate (5, 8.1, 30.5) (uključena je kompenzacija). Korekcija je izbor koeficijenta  $R(5, 5) = 10$ .

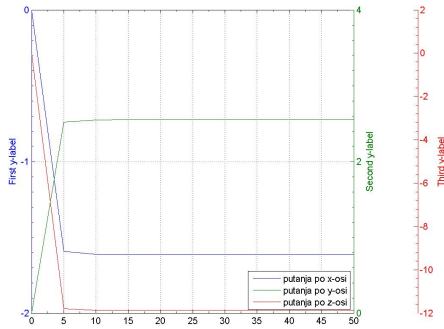
Slučaj d)

Izborom  $R(5, 5) = 5.5$ , dostižu se koordinate (5.1, 8.1, 30.00) u vremenu od 10 sekundi. Ukoliko bi se, rukovodeći se ovom logikom, pokušalo ići prema nižim vrijednostima koeficijenta  $R(5, 5)$ , quadrotor stiže na manje visine (manje od 30 m). Recimo izborom  $R(5, 5) = 5$ . Prihvati se  $R(i, i) = 1$ ,  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $R(5, 5) = 5.5$ , te  $Q(i, i) = 0.1$ ,  $i \in \{4, 5, 10, 11\}$  kao najbolji izbor koeficijenata za LQR kontrolu sistema u svrhu postizanja zadanih koordinata u vremenu od 10 sekundi.

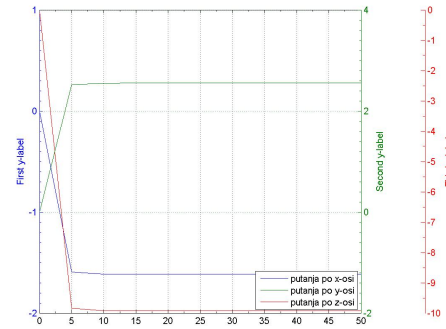


POGLAVLJE 3. PRIMJENE LQR KONTROLE I USPOREDBA SA METODOM  
PREMJESTANJA POLOVA

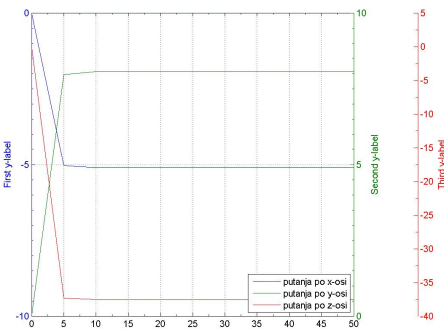
68



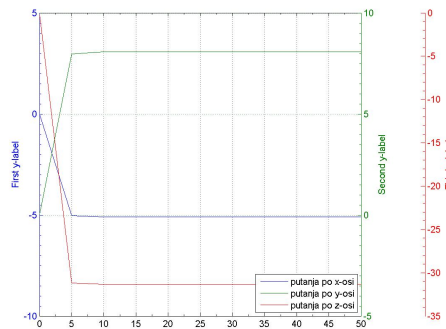
(a) Loš izbor LQR kontrole bez kompenzacije poremećaja gravitacije



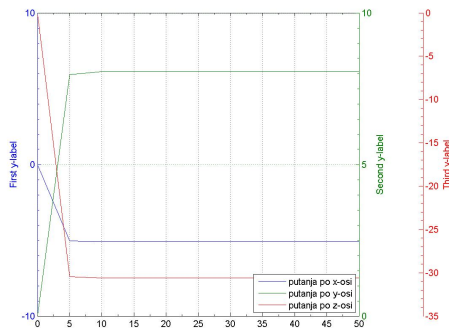
(b) Loš izbor LQR kontrole uz kompenzaciju poremećaja gravitacije



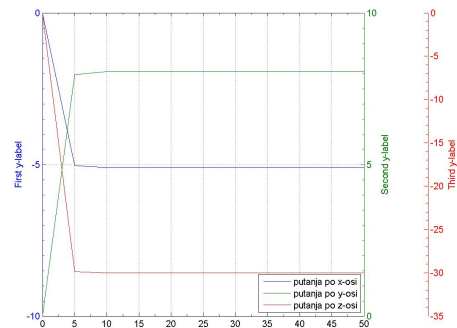
(a) Dobar izbor LQR kontrole bez kompenzacije poremećaja gravitacije



(b) Dobar izbor LQR kontrole uz kompenzaciju poremećaja gravitacije



(a) Quadrotor bliže zadanim koordinatama



(b) Quadrotor pogađa zadane koordinate

#### Parametri korišteni u modelu

$$m = 0.32 \text{ kg}$$

$$L = 0.21 \text{ m}$$

$$k = 0.225 \text{ (konstanta)}$$

$$c = 0.1 \text{ (konstanta)}$$

$$J_{xx} = 0.0142 \text{ kg/m}^2$$

$$J_{yy} = 0.0142 \text{ kg/m}^2$$

$$J_{zz} = 0.0071 \text{ kg/m}^2$$



## Poglavlje 4

# Riccatijeva jednadžba

### 4.1 Simetrična rješenja neprekidne algebarske Riccatijeve jednadžbe

#### Hermitska rješenja

Pozivajući se na [1] i [3] dani su sljedeći rezultati.

Promatra se CARE (eng. *continuous-time algebraic Riccati equation*) oblika  $A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$ . Kompaktniji zapis ove jednadžbe je

$$A^* X + XA + XDX - C = 0, \quad (4.1)$$

gdje je  $A^* = A^T$ ,  $D = -BR^{-1}B^T$ ,  $X = P$ , te  $C = -Q$ . Definiraju se matrice

$$T = \begin{bmatrix} A & D \\ C & -A^* \end{bmatrix}$$

$$M = i \begin{bmatrix} A & D \\ C & -A^* \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} -C & A^* \\ A & D \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{H} = i \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}$$

Najprije se navode rezultati koji daju egzistenciju i jedinstvenost hermitskog rješenja jednadžbe 4.1. Neka je  $\mathcal{G}(X) = \text{rang}[I_n \ X]^T \subset \mathbb{C}^{m+n}$ , gdje je  $X$   $m \times n$  matrica ( $m$  i  $n$  su prirodni brojevi), a  $\mathcal{G}(X)$  je graf od  $X$ .

**Propozicija 4.1.1.** *Ako je  $X$  rješenje algebarske Riccatijeve jednadžbe sa grafom  $\mathcal{G}(X)$  tada je  $X$  hermitsko rješenje akko je  $\mathcal{G}(X)$   $\hat{H}$ -neutralno.  $X$  je hermitsko rješenje akko je  $\mathcal{G}(X)$   $H$ -neutralno.*

Što znači da je potprostor  $H$ -neutralan? Najprije se navodi jedan rezultat sa područja indefinitne linearne algebre. Funkcija  $[\ , \ ] : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$  (gdje je  $\mathbb{C}^n \simeq n$ - dimenzionalan kompleksni Hilbertov prostor) definira indefinitni unutarnji produkt na  $\mathbb{C}^n$  ako vrijedi:

- (i) *linearnost u 1.argumentu:*  $[\alpha x_1 + \beta x_2, y] = \alpha[x_1, y] + \beta[x_2, y]$  za svaka dva  $x_1, x_2 \in \mathbb{C}^n$  i kompleksne brojeve  $\alpha$  i  $\beta$ ,
- (ii) *antisimetričnost:*  $[x, y] = \overline{[y, x]}$  za svaka dva broja  $x, y \in \mathbb{C}^n$
- (iii) ako je za svaki  $y \in \mathbb{C}^n$  i  $x = 0$ ,  $[x, y] = 0$ .

Neka je  $H$  invertibilna hermitska matrica dimenzije  $n \times n$  tada formula  $[x, y] = (Hx, y)$  za svaka dva broja  $x, y \in \mathbb{C}^n$  definira unutarnji indefinitni produkt na  $\mathbb{C}^n$ . Potprostor  $M \subset \mathbb{C}^n$  je  $H$ -neutralan ako za svaki  $x \in M$  vrijedi  $[x, x] = 0$  (gdje je  $[x, y] = (Hx, y)$  za svaka dva  $x, y \in \mathbb{C}^n$ ).

**Teorem 4.1.2.** *Pretpostavi se da je  $D \geq 0$  i da je par  $(A, D)$  upravljiv. Nadalje, neka algebarska Riccatijeve jednadžba ima hermitsko rješenje i neka je  $N_+$  spektralni potprostor od  $M$  sa odgovarajućim svojstvenim vrijednostima u otvorenoj gornjoj poluravnini. Tada za svaki  $M$ -invarijantni potprostor  $N \subset N_+$  postoji jedinstveno hermitsko rješenje  $X$  algebarske Riccatijeve jednadžbe tako da je  $\text{rang}[I \ X] \cap N_+ = N$ . Isto tako, ako je  $X$  hermitsko rješenje algebarske Riccatijeve jednadžbe, tada  $\text{rang}[I \ X] \cap N_+$  jest  $M$ -invarijantan.*

**Lema 4.1.3.** *Neka  $H$ :*

- (a) *nema svojstvenih vrijednosti na imaginarnoj osi*
- (b) *ima stabilan svojstveni potprostor  $X_1$  koji je kompleksan i  $X_2$  koji je kompleksan i invertibilan. Tada je :*
  - (1)  $X_1^* X_2$  hermitsko rješenje, tj.  $(X_1^* X_2)^* = X_1^* X_2$
  - (2)  $P = X_2 X_1^{-1}$  je hermitska matrica, tj.  $P = P^*$ .

4.1. SIMETRIČNA RJEŠENJA NEPREKIDNE ALGEBARSKJE RICCATIJEVE  
JEDNADŽBE

73

*Dokaz.* Za proizvoljnu matricu  $H_-$  vrijedi  $H[X_1 \ X_2]^T = [X_1 \ X_2]H_-$ , gdje je  $H_-$  matrica čiji je spektar u lijevoj otvorenoj poluravnini. Množeći taj izraz sa  $[X_1^* \ X_2^*]J$  dobije se

$$\begin{bmatrix} X_1^* & X_2^* \end{bmatrix} JH \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1^* & X_2^* \end{bmatrix} J \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} H_-. \quad (S)$$

$$JH = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q & A^T \\ A & -BR^{-1}B^T \end{bmatrix}$$

Objе strane od (S) su hermitske. Tada je

$$(-X_1^*X_2 + X_2^*X_1)H_- = H_-[x_1^* \ X_2^*][X_2 \ -X_1]^T = -H_-[-X_1^*X_2 + X_2^*X_1]. \quad (4.2)$$

Jednadžba 4.2 je tipa  $X_3A_3 + A_3^*X_3 = 0$  i kako je  $\sigma(A_3) \subset \mathbb{C}^-$ , jedinstveno rješenje je  $X_3 = 0$ . Tada je  $X_1^*X_2 = X_2^*X_1$  i  $P = X_2X_1^{-1}$  hermitsko rješenje budući da je  $P = (X_1)^{-1*}(X_1^*X_2)X_1^{-1}$  hermitska matrica.

□

Pod kojim uvjetima je  $X_1$  invertibilan? U dokazu leme koristi se najprije sljedeći rezultat.

**Lema 4.1.4.** *H je nesingularna matrica sa inercijom  $(n, n, 0)$  ( $n$  - negativnih,  $n$  - pozitivnih svojstvenih vrijednosti).*

*Dokaz.* Jednadžba 4.1 je invarijantna ako se umjesto  $A$  zapiše  $A + i\alpha I$ , gdje je  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Tada, ako  $H$  nema željenu inerciju,  $A$  se zamjeni sa  $A + i\alpha I$ . Za  $\alpha$  dovoljno velik, inercija od  $H$  jest jednaka inerciji od

$$\begin{bmatrix} 0 & -i\alpha I \\ i\alpha I & 0 \end{bmatrix}.$$

Vidi se da je inercija ove matrice  $(n, n, 0)$ .

□

**Lema 4.1.5.** *Ako H nema svojstvenih vrijednosti na imaginarnoj osi, tada je  $X_1$  invertibilan akko je  $(A, B)$  stabilizabilan.*

*Dokaz.* Ako je  $X_1$  invertibilan, tada je  $P = X_2X_1^{-1}$  stabilizabilno rješenje. To povlači da je  $A - BR^{-1}B^T P$  stabilno što znači da par  $(A, B)$  mora biti stabilan. Neka je  $H[X_1 \ X_2]^T = [X_1 \ X_2]^T H_-$ . Treba pokazati da je  $X_1$  invertibilan. Dokaz se svodi na kontradikciju. Pretpostavi se da postoji  $x \neq 0$  takav da je ili  $X_1x = 0$  ili  $x^*X_1^* = 0$  ili  $x \in \text{Ker}X_1$ .

Ako se  $AX_1 - BR^{-1}B^T X_2 = X_1 H_-$  pomnoži s lijeva sa  $x^* X_2^*$  i s desna sa  $x$  te se iskoristi  $X_1^* X_2 = X_2^* X_1$ , dobije se  $-x^* X_2^* BR^{-1}B^T X_2 x = x^* X_2^* X_1 H_- x = x^* X_1^* X_2 H_- x = 0$ . Od tu izlazi  $x^* X_2^* BR^{-1}B^T X_2 x = 0$  ili  $B^T X_2 x = 0$ . Iz  $AX_1 - BR^{-1}B^T X_2 = X_1 H_-$  dobije se  $X_1 H_- x = 0$ , uz  $H_-(KerX_1) \subset KerX_1$ . Ako je  $KerX_1 \neq 0$  tada postoji  $x \neq 0$  t.d.  $x \in KerX_1$  i  $\lambda \in \mathbb{C}^-$ . Koristeći  $-QX_1 - A^T X_2 = X_2 H_-$  te množeći ga sa  $x$  i uzimajući  $H_- x = \lambda x$  dobije se  $(A^T + \lambda I)X_2 x = 0$  ili  $x^* X_2^* (A + \lambda^* I) = 0$ . Kombinirajući  $B^T X_2 x = 0$  i  $x^* X_2^* (A + \lambda^* I) = 0$  dobije se  $x^* X_2^* [A - (-\lambda^*)I \ B] = 0$ . Kako je  $-\lambda^*$  u desnoj poluravnini, iz stabilizabilnosti od  $(A, B)$  slijedi  $x^* X_2^* = 0$  i  $[X_1 \ X_2]^T x = 0$ .  $[X_1 \ X_2]^T$  ima rang vrijednosti  $n$  pa je stoga  $x = 0$ . Tada  $KerX_1 = 0$  i  $X_1$  je invertibilan.

□

## Realna simetrična rješenja

**Lema 4.1.6.** *Neka  $H$ :*

(a) *nema imaginarnih svojstvenih vrijednosti*

(b) *ima stabilni svojstveni potprostor  $X_1$  koji je realan i  $X_2$  koji je realan i invertibilan, tada  $P = X_2 X_1^{-1}$  jest rješenje algebarske Riccatijeve jednadžbe  $P = X_2 X_1^{-1}$  i  $(A - BR^{-1}B^T P)$  je stabilan.*

*Dokaz.* Neka za neku matricu  $H_-$  (kao u ranijem slučaju) vrijedi

$$\begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} H_-$$

gdje je  $\sigma(H_-)$  u danoj lijevoj poluravnini. Tada

$$\begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ X_2 X_1^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ X_2 X_1^{-1} \end{bmatrix} X_1 H_- X_1^{-1}$$

množeći s lijeva sa  $[-X_2 X_1^{-1} \ I]$  izlazi

$$\begin{bmatrix} -X_2 X_1^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ X_2 X_1^{-1} \end{bmatrix} = 0$$

i  $P = X_2 X_1^{-1}$  rješava algebarsku Riccatijevu jednadžbu. Dobije se  $A - BR^{-1}B^T (X_2 X_1^{-1}) = X_1 H_- X_1^{-1}$  t.d. je  $\sigma(A - BR^{-1}B^T P) = \sigma(H_-)$ . Neka je  $V = Im[X_1 \ X_2]^T T = Im[X_1 T \ X_2 T]^T$ , gdje je  $T$  invertibilan.  $P = (X_2 T)(X_1 T)^{-1} = X_2 X_1^{-1}$  je jedinstveno i stabilno rješenje, jer je  $\sigma(A - BR^{-1}B^T P)$  u otvorenoj lijevoj poluravnini.

□

**Teorem 4.1.7.** *Pretpostavka je da za algebarsku Riccatijevu jednadžbu sa realnim koeficijentima i matricama  $A, D$  i  $C$  vrijedi da je  $D \geq 0$ , a par  $(A, D)$  upravljiv i da postoji najmanje jedno hermitsko rješenje (ne nužno realno i simetrično). Neka je  $\tilde{N}_+$  spektralni potprostor od  $M$  sa odgovarajućim svojstvenim vrijednostima u 1. kvadrantu poluravnine  $\{\lambda \in \mathbb{C} | \text{Im}\lambda > 0, \text{Re}\lambda \geq 0\}$ . Za svaki  $M$ -invarijantni potprostor  $\tilde{\mathcal{L}} \subset \tilde{N}_+$  postoji jedinstveno realno simetrično rješenje  $X$  jednadžbe 4.1 tako da je  $\text{rang}[I \ X]^T \cap \tilde{N}_+ = \tilde{\mathcal{L}}$ . Isto tako, ako je  $X$  realno simetrično rješenje jednadžbe 4.1, tada je potprostor  $\text{rang}[I \ X]^T \cap \tilde{N}_+$   $M$ -invarijantan.*

*Dokaz.* Neka je  $\mathcal{N}_{++}$  spektralni potprostor od  $M$  u otvorenom prvom kvadrantu,  $\{\lambda \in \mathbb{C} | \text{Im}\lambda > 0, \text{Re}\lambda > 0\}$ . Tada je  $\mathcal{N}_{++} \subset \tilde{N}_+ \subset \mathcal{N}_+$  (gdje je  $\mathcal{N}_+$  spektralni potprostor prostora  $M$  koji sadrži svojstvene vrijednosti koje se nalaze u gornjoj kompleksnoj poluravnini). Za dani  $M$ -invarijantni potprostor  $\tilde{\mathcal{L}} \subset \tilde{N}_+$ , neka je  $\mathcal{L}_{++} = \tilde{\mathcal{L}} \cap \mathcal{N}_{++}$ .  $\mathcal{L}$  neka je suma dva potprostora,  $\tilde{\mathcal{L}}$  i  $\overline{\mathcal{L}}_{++} = \{\langle x_1, \dots, x_{2n} \rangle \in \mathbb{C}^{2n} | \langle \overline{x_1}, \dots, \overline{x_{2n}} \rangle \in \mathcal{L}_{++}\}$ . Ako vektori  $\underline{f_0}, \dots, \underline{f_k} \in \mathbb{C}^{2n}$  tvore Jordanov lanac za  $M$  sa svojstvenom vrijednosti  $\lambda_0$  tada vektori  $\underline{f_0}, -\underline{f_1}, \underline{f_2}, \dots, +\underline{f_k}, -\underline{f_k}$  tvore Jordanov lanac za  $M$  sa svojstvenom vrijednosti  $-\overline{\lambda_0}$ . Potprostor  $\overline{\mathcal{L}}_{++}$  je  $M$ -invarijantan i  $\mathcal{L}_{++} \cap \tilde{N}_+ = \{0\}$ . Štoviše, potprostor  $\mathcal{L}$  ima svojstvo da  $\langle x_1, \dots, x_{2n} \rangle \in \mathcal{L}$  implicira

$$\langle \overline{x_1}, \dots, \overline{x_{2n}} \rangle \in \mathcal{L}. \quad (4.3)$$

$\mathcal{L}$  je  $M$ -invarijantan i  $\mathcal{L} \cap \tilde{N}_+ = \tilde{\mathcal{L}}$ . Prema teoremu 4.1.2, postoji jedinstveno hermitsko rješenje  $X$  tako da je  $\text{rang}[I \ X] \cap \mathcal{N}_+ = \mathcal{L}$  i  $X$  je realan.  $\overline{X}$  je rješenje jednadžbe 4.1 i  $\mathcal{L}$  i  $\mathcal{N}_+$  zadovoljavaju svojstvo 4.3. Stoga je  $\text{rang}[I \ X] \cap \mathcal{N}_+ = \mathcal{L}$ . Međutim  $X$  je jedinstveno rješenje, pa je  $\overline{X} = X$ . Postoji realno simetrično rješenje  $X$ , realne algebarske Riccatijeve jednadžbe tako da vrijedi  $\text{rang}[I \ X]^T \cap \tilde{N}_+ = \tilde{\mathcal{L}}$ . Neka su  $X$  i  $Y$  dva realna simetrična rješenja realne algebarske Riccatijeve jednadžbe i pretpostavi se da je

$$\text{rang}[I \ X]^T \cap \tilde{N}_+ = \text{rang}[I \ Y]^T \cap \tilde{N}_+. \quad (4.4)$$

Prema teoremu 4.1.2 je 4.4  $M$ -invarijantan potprostor. Uzimajući kompleksno konjugirane vrijednosti prostora  $\tilde{N}_+$  slijedi :

$$\text{rang}[I \ X]^T \cap \tilde{N}_- = \text{rang}[I \ Y]^T \cap \tilde{N}_- \quad (4.5)$$

gdje je  $\tilde{N}_- = \{\langle x_1, \dots, x_{2n} \rangle \in \mathbb{C}^{2n} | \langle \overline{x_1}, \dots, \overline{x_{2n}} \rangle \in \tilde{N}_+\}$  kompleksno konjugirani prostor prostora  $\tilde{N}_+$ . Ali kako je  $\tilde{N}_-$  spektralni potprostor prostora  $M$  sa odgovarajućim svojstvenim vrijednostima u kvadrantu  $\{\lambda \in \mathbb{C} | \text{Re}\lambda \leq 0, \text{Im}\lambda > 0\}$ , kombinirajući 4.4 i 4.5 dobije se  $\text{rang}[I \ X]^T \cap \mathcal{N}_+ = \text{rang}[I \ Y]^T \cap \mathcal{N}_+$ . Teorem 4.1.2 daje jedinstvenost, pa je  $X = Y$ .  $\square$



## Rješenje Riccatijeve matrične jednadžbe

U korolaru 2.2.1 navodi se da je jedan od uvjeta optimalnosti rješenja problema LQR kontroler postojanje rješenja Riccatijeve matrične jednadžbe. Ako se ta nelinearna matrična jednadžba u iskazu korolaru zapiše u linearnom matričnom obliku

$$\begin{bmatrix} \dot{X}(t) \\ \dot{Y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(t) & -B(t)R^{-1}(t)B^T(t) \\ Q(t) & -A^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} X(T) \\ Y(T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ M \end{bmatrix}$$

izlazi da je  $P(t) = Y(t)X(t)^{-1}$  njezino rješenje.

## 4.2 Kalmanov filter

### Ukratko o Kalmanovu filtru

Teoretski gledano Kalmanov filter je procjenjitelj stanja linearno- kvadratnog sistema koji je uznemiren bijelim šumom. Bijeli šum je neki slučajno generirani signal sa konstantnim iznosom spektralne gustoće. Statistički gledano, on je uvijek optimalan procjenjitelj neke greške u kvadratnoj funkciji. U kontroli dinamičkih sistema nije uvijek poželjno niti moguće mjeriti svaku varijablu koju se želi kontrolirati. Kalmanov filter indirektnim mjerenjima daje značenje o nedostajećim informacijama. On se koristi za predviđanje nekih pojava ili događaja opisanih dinamičkim sistemima kao što su tok rijeka tijekom poplave, gibanja nebeskih tijela ili cijena tržišnih artikala. Čemu naziv 'filter' ? Filter je fizički uređaj za uklanjanje neželjenih dijelova. Dvije najvažnije uloge navedenog filtra su :

#### (a) procjena stanja dinamičkih sistema

Bilo koji događaj koji se želi opisati dinamičkim sistemom ne daje egzaktnu vrijednost nekog sistema. Uvijek se želi neka precizna procjena obzirom na vrijeme. Kalmanov filter dopušta procjenu stanja dinamičkog sistema s random izabranim karakteristikama koristeći statističke informacije.

#### (b) analiza procijenjenih stanja sistema

Koriste se neki mogući tipovi senzora za procjenu stanja odgovarajućih sistema. Cilj analize je izračunati (odrediti) koje tipove senzora (i kako ih ) najbolje koristiti za mjerenje dizajna.

### Neprekidni slučaj Kalmanovog filtra u linearnoj formi

$x \rightsquigarrow$  vektor stanja linearnog dinamičkog sistema ( $n$ -dim)

$z, y \rightsquigarrow$  vektori izmjerenih vrijednosti ( $l$ -dim)

$\omega \rightsquigarrow$  šum u procesu ( $r$ -dim)

$v \rightsquigarrow$  šum izmjeren uređajem (npr. senzorom-  $l$ -dim)  
 $K \rightsquigarrow$  Kalmanova matrica  
 $P \rightsquigarrow$  matrica kovarijance (nesigurno) procijenjenih stanja  
 $Q \rightsquigarrow$  matrica kovarijance šumova u procesu ( $r \times r$ - dim )  
 $R \rightsquigarrow$  matrica kovarijance dobivena mjerenjima ( $l \times l$ - dim)  
 $H \rightsquigarrow$  matrica osjetljivosti mjerenja ( $l \times n$ - dim)  
 $f$  i  $h \rightsquigarrow$  dovoljno glatke funkcije klase  $C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$

Neka je zadan nelinearni dinamički sistem :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t) + \omega(t)$$

sa nelinearnim modelom mjerenja :

$$z(t) = h(x(t), t) + v(t).$$

Tada su diferencijalne jednačbe procjene stanja opisane sa :

$$\dot{\hat{x}}(t) = f(\hat{x}(t), t) + \bar{K}(t)[z(t) - \hat{z}(t)],$$

a  $\hat{z}(t)$  su 'predviđena' mjerenja definirana sa  $\hat{z}(t) = h(\hat{x}(t), t)$ .

Lineariziraju se jednačbe sistema. Linearna aproksimacija jednačbi je:

$$\begin{aligned}
 F^{[1]}(t) &\approx \left. \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}(t)} \\
 H^{[1]}(t) &\approx \left. \frac{\partial h(x,t)}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}(t)}.
 \end{aligned}$$

Jednačbe sa Kalmanovim filtrom su:

$$\begin{aligned}
 \dot{P}(t) &= F^{[1]}(t)P(t) + P(t)F^{[1]T}(t) + G(t)Q(t)G^T(t) - \bar{K}(t)R(t)K^{-T}(t) \\
 \bar{K}(t) &= P(t)H^{[1]}(t)R^{-1}(t).
 \end{aligned}$$

## Stabilnost Kalmanovog filtra

Dinamička stabilnost sistema odnosi se na karakteristike varijabli stanja, a ne na procjenu greške. Zanimare li se akualna mjerenja u procesu, onda rezultirajuće jednačbe karakteriziraju stabilnost samog filtra. U neprekidnom slučaju - to su jednačbe:

$$\dot{\hat{x}}(t) = [F(t) - \bar{K}(t)H(t)]\hat{x}(t).$$

Rješenja jednadžbi Kalmanovog filtra su uniformno asimptotički stabilna. U matematičkom smislu to znači:  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{x}(t)\| = 0$  ili  $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \|\hat{x}_k(+)\| = 0$ .

## Dodatak A

# Rezultati nužni za dokaze teorema o egzistenciji rješenja ODJ-a

**Propozicija A.0.1.** (Lokalno Lipschitzovo svojstvo)

Neka  $f : \mathcal{I} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^n$  zadovoljava pretpostavku (H1) gdje je  $\mathcal{X}$  otvoren u  $\mathbb{R}^n$  i  $\mathcal{I}$  interval. Neka je za svaki  $t \in \mathcal{I}$  funkcija  $f(t, \cdot)$  klase  $C^1$  i za svaki kompaktan skup  $K \subseteq \mathcal{X}$  postoji lokalno integrabilna funkcija  $\alpha : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}_+$  takva da je

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right\| \leq \alpha(t) \quad (\text{A.1})$$

za svaki  $x \in K$ . Tada  $x$  zadovoljava lokalno Lipschitzovo svojstvo iz teorema 1.3.1. Ako je  $f$  nezavisna po  $t$  onda je nejednakost A.1 automatski zadovoljena.

*Dokaz.* Neka je za proizvoljni  $x_o \in X$  i  $\beta$  dana kugla  $K_\beta(x_o) \subseteq X$ . Neka svojstvo iz iskaza vrijedi za svaki kompaktan skup  $K = K_\beta(x_o)$ . Za bilo koja dva elementa  $x$  i  $y$  u  $K$ ,  $z$  između  $x$  i  $y$  i za svaku kooordinatu  $f_i, i = \{1, \dots, n\}$  funkcije  $f$  (koristeći se teoremom srednje vrijednosti primijenjenim na funkcije  $f_i(\gamma x + (1-\gamma)y)$  za  $\gamma \in [0, 1]$ ) vrijedi  $f_i(t, x) - f_i(t, y) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t, z)(x_j - y_j)$ . Za neku konstantu  $c$ , slijedi da je  $\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq c\alpha(t)\|x - y\|$ . Ako je  $f$  nezavisan po  $t$ , tada omeđenost na kompaktnim skupovima osigurava neprekidnost od  $\frac{\partial f}{\partial x}$ .  $\square$

Neka je  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ili  $\mathbb{C}$ ,  $\mathcal{U}$  metrički prostor (potprostor od  $\mathbb{R}^m$  ili  $\mathbb{C}^m$ ), a  $m$  nenegativni cijeli broj.

**Definicija A.0.2.** Neka je  $\mathcal{X}$  otvoren podskup od  $\mathbb{K}^n$  te  $\mathcal{U}$  i  $\mathcal{S}$  dva metrička prostora (međusobno različita). Neka su dane funkcije  $f : \mathbb{R} \times \mathcal{U} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{K}^n$ ,  $\tilde{f} : \mathcal{S} \times \mathcal{X} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{K}^n$  i  $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{S}$ .

Funkcije desne strane (eng. right-hand side functions, RHS) su preslikavanja  $f(t, x, u) = \tilde{f}(\pi(t), x, u)$  za koja vrijede sljedeća svojstva:

- za fiksne  $s$  i  $u$  je  $\tilde{f}(s, \cdot, u)$  klase  $\mathbb{C}^1$
- $\tilde{f}$  i  $\tilde{f}_x$  su neprekidne na  $\mathcal{S} \times \mathcal{X} \times \mathcal{U}$
- $\pi$  je lokalno omeđena i izmjeriva funkcija.

**Napomena A.0.3.** Ako neprekidno diferencijabilna funkcija  $f : \mathcal{X} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{K}^n$  ne ovisi o  $t$ , tada je ona funkcija desne strane.

**Lema A.0.4.** Neka su  $f$  i  $g : \mathcal{L} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^n$  funkcije koje zadovoljavaju hipoteze (H1) i (H2), gdje je  $\mathcal{L}$  interval u  $\mathbb{R}$ . Neka su  $\mathcal{X}^o \subseteq \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$  dva podskupa i  $\xi : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{X}$  i  $\zeta : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{X}^o$  neprekidne funkcije. Neka postoje dvije lokalno integrabilne funkcije  $\alpha, \beta : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}_+$ . Neka za svaki  $x \in \mathcal{X}$ , svaki  $y \in \mathcal{X}$  i za svaki  $t \in \mathcal{L}$  vrijedi  $\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq \alpha(t)\|x - y\|$ . Isto tako neka je  $\|f(t, x) - g(t, x)\| \leq \beta(t)$  za svaki  $x \in \mathcal{X}^o$  i  $t \in \mathcal{L}$ . Tada za proizvoljne  $x^o \in \mathbb{R}^n$ ,  $z^o \in \mathbb{R}^n$ ,  $\sigma^o \in \mathcal{L}$  i

$$\bar{\xi}(t) := x^o + \int_{\sigma^o}^t f(\tau, \sigma(\tau))d\tau \quad (\text{A.2})$$

$$\bar{\zeta}(t) := z^o + \int_{\sigma^o}^t g(\tau, \sigma(\tau))d\tau \quad (\text{A.3})$$

vrijedi

$$\|\bar{\xi}(t) - \bar{\zeta}(t)\| \leq \|x^o - z^o\| + \int_{\sigma^o}^t \alpha(\tau)\|\xi(\tau) - \zeta(\tau)\|d\tau + \int_{\sigma^o}^t \beta(\tau)d\tau \text{ za } t \geq \sigma^o.$$

*Dokaz.*  $f(\tau, \xi) - g(\tau, \zeta) = f(\tau, \xi) - f(\tau, \zeta) + f(\tau, \zeta) - g(\tau, \zeta)$

$$\|f(\tau, \xi) - g(\tau, \zeta)\| \leq \|f(\tau, \xi) - f(\tau, \zeta)\| + \|f(\tau, \zeta) - g(\tau, \zeta)\|$$

$$\|\bar{\xi}(t) - \bar{\zeta}(t)\| = \|x^o - z^o + \int_{\sigma^o}^t f(\tau, \sigma(\tau)) - g(\tau, \sigma(\tau))d\tau\| \leq \|x^o - z^o\| + \int_{\sigma^o}^t \|f(\tau, \xi) - f(\tau, \zeta)\| +$$

$$\|f(\tau, \zeta) - g(\tau, \zeta)\| \leq \|x^o - z^o\| + \int_{\sigma^o}^t \alpha(\tau)\|\xi - \zeta\| + \beta(\tau)d\tau \quad \square$$

**Lema A.0.5.** (Bellman-Gronwallova lema)

Neka je dan interval  $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ , konstanta  $c \geq 0$  i neka su dane dvije funkcije  $\alpha, \beta : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}_+$  takve da je  $\alpha$  lokalno integrabilna funkcija, a  $\beta$  neprekidna. Neka za neki  $\sigma \in \mathcal{I}$  i  $t \in \mathcal{I}$  ( $t \geq$

$\sigma$ ) vrijedi  $\beta(t) \leq \zeta(t) = c + \int_{\sigma}^t \alpha(\tau)\beta(\tau)d\tau$ . Tada je  $\beta(t) \leq ce^{\int_{\sigma}^t \alpha(\tau)d\tau}$ .

*Dokaz.*  $\zeta(t) = \alpha(t)\beta(t) \leq \alpha(t)\zeta(t)$  i  $\dot{\zeta}(t) - \alpha(t)\zeta(t) \leq 0$  za svaki  $t$ . Neka je  $\pi(t) = \zeta(t)e^{-\int_{\sigma}^t \alpha(\tau)d\tau}$  lokalno apsolutno neprekidna funkcija i  $\dot{\pi}(t) = [\dot{\zeta}(t) - \alpha(t)\zeta(t)]e^{-\int_{\sigma}^t \alpha(\tau)d\tau} \leq 0$ .  $\pi$  je nerastuća funkcija i  $\zeta(t)e^{-\int_{\sigma}^t \alpha(\tau)d\tau} = \pi(t) \leq \pi(\sigma) = \zeta(\sigma) = c$ . Slijedi tvrdnja.  $\square$

Također, navodi se jedan rezultat s područja metričkih prostora poznat pod imenom *Teorem kontrakcije*. Koristi se u dokazu glavnog teorema prilikom pokazivanja da je jedno od preslikavanja kontrakcija.

**Definicija A.0.6.** *Neka je  $(X, d)$  metrički prostor. Preslikavanje  $T : X \rightarrow X$  je kontrakcija ako postoji konstanta  $0 \leq c < 1$  takva da je  $d(T(x), T(y)) \leq cd(x, y)$  za svaka dva broja  $x, y \in X$ .*

**Teorem A.0.7.** *(Teorem kontrakcije) Neka je  $(X, d)$  potpun metrički prostor. Neka je  $T : X \rightarrow X$  kontrakcija. Tada postoji točno jedno rješenje  $x \in X$  takvo da je  $T(x) = x$ .*

*Dokaz.* Dokaz je konstruktivan. Neka je  $x_0 \in X$  neka proizvoljna točka. Za svaki  $n \geq 0$  definira se niz  $x_n \in X$  sa  $x_{n+1} = T(x_n)$ . Radi jednostavnije notacije se  $x_n$  označi kao  $x_n = T^n x_0$ .

Najprije se pokaže da je  $x_n$  Cauchyjev niz. Ako je  $n \geq m \geq 1$  tada iz definicije kontrakcije i nejednakosti trokuta vrijedi:  $d(x_n, x_m) = d(T^n x_0, T^m x_0) \leq c^m d(T^{n-m} x_0, x_0) \leq c^m [d(T^{n-m} x_0, T^{n-m-1} x_0) + d(T^{n-m-1} x_0, T^{n-m-2} x_0) + \dots + d(T x_0, x_0)] \leq c^m [\sum_{k=0}^{n-m-1} c^k] d(x_1, x_0) \leq c^m [\sum_{k=0}^{\infty} c^k] d(x_1, x_0) \leq (c^m / (1 - c)) d(x_1, x_0)$ . Slijedi da je niz  $x_n$  Cauchyjev.

Kako je po pretpostavci  $X$  potpun, to  $x_n$  konvergira ka  $x \in X$ . Neprekidnost od  $T$  povlači da je limes fiksna točka  $x \in X : Tx = T \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} T x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x$ . Ako su  $x$  i  $y$  dvije fiksne točke, tada je  $0 \leq d(x, y) = d(Tx, Ty) \leq cd(x, y)$ . Ako je  $c < 1$ , tada je  $d(x, y) = 0$ . To znači da je  $x = y$ . Pa je takva točka jedinstvena.  $\square$



## Dodatak B

# Bellmanova teorija funkcionala

Veza funkcionala  $I$  i Bellmanovog funkcionala je dana sa :

$$V(x(t), t) = \inf_{u[t, T]} \left\{ \int_{t_0}^T \phi(x, u, \tau) d\tau + \theta(x(T), T) \right\} \quad (\text{B.1})$$

za proizvoljni  $t \in [t_0, T]$ . Koristeći se Bellmanovim principom optimalnosti je vrijednost  $V(x(t_0), t_0)$  minimalna za funkcional  $I(t_0, x(t_0), u[t_0, T])$ .

### BELLMANOV PRINCIP OPTIMALNOSTI

$$\begin{aligned} V(x(t), t) &= \inf_{u[t, t_1]} \left[ \int_t^{t_1} \phi(x, u, \tau) d\tau + V(x(t_1), t_1) \right], \text{ gdje je } x(t_1) \text{ stanje sistema u vre-} \\ &\text{menu } t_1. \text{ To se vidi direktnim raspisivanjem. Za izbor } t_1 \in [t, T] \text{ vrijedi } V(x(t), t) = \\ &\inf_{u[t, T]} \left[ \int_t^{t_1} \phi(x, u, \tau) d\tau + \int_{t_1}^T \phi(x, u, \tau) d\tau + \theta(x(T), T) \right] = \\ &= \inf_{u[t, t_1] \cup u[t_1, T]} \left[ \int_t^{t_1} \phi(x, u, \tau) d\tau + \int_{t_1}^T \phi(x, u, \tau) d\tau + \theta(x(T), T) \right] = \\ &= \inf_{u[t, t_1]} \left[ \int_t^{t_1} \phi(x, u, \tau) d\tau + \inf_{u[t_1, T]} \int_{t_1}^T \phi(x, u, \tau) d\tau + \theta(x(T), T) \right]. \end{aligned}$$

### HAMILTON-JACOBI-BELLMANOVE JEDNADŽBE

Diferencijalna forma upravo definiranog Bellmanovog funkcionala  $V(x(t), t)$  (ukoliko  $t_1 \rightarrow t$  i uz odgovarajuću pretpostavku na glatkoću navedenog funkcionala) definira Hamilton-Jacobi -Bellmanove jednađbe. Neka je  $t_1 = t + \Delta t$ . Raspiše se  $V(x(t), t) =$

$$\inf_{u[t, t+\Delta t]} \left[ \int_t^{t+\Delta t} \phi(x, u, \tau) d\tau + V(x(t+\Delta t), t+\Delta t) \right].$$

Ako se primijeni teorem srednje vrijednosti i ako se pretpostavi da se  $V(x(t+\Delta t), t+\Delta t)$  može razviti u Taylorov red oko



$V(x(t), t)$  tada je za neki  $\alpha \in [0, 1]$ :

$$V(x(t), t) = \inf_{u[t, t+\Delta t]} [\phi(x(t+\alpha \Delta t), u(t+\alpha \Delta t), t+\alpha \Delta t) \Delta t + \frac{\partial V^T}{\partial x} \dot{x} \Delta t + \frac{\partial V}{\partial t} \Delta t + O(\Delta t)^2] = V(x(t), t) + \frac{\partial V}{\partial t} \Delta t + \inf_{u[t, t+\Delta t]} [\phi(x(t+\alpha \Delta t), u(t+\alpha \Delta t), t+\alpha \Delta t) \Delta t + \frac{\partial V^T}{\partial x} f(x, u, t) \Delta t + O(\Delta t)^2].$$

Odnosno,  $-\frac{\partial V}{\partial t} = \inf_{u[t, t+\Delta t]} [\phi(x(t+\alpha \Delta t), u(t+\alpha \Delta t), t+\alpha \Delta t) \Delta t + \frac{\partial V^T}{\partial x} f(x, u, t) + O(\Delta t)]$ .

Kad  $\Delta t \rightarrow 0$  tada je  $-\frac{\partial V}{\partial t} = \inf_{u(t)} [\phi(x, u, t) + \frac{\partial V^T}{\partial x} f(x, u, t)]$ . To su tzv. Hamilton- Jacobi- Bellmanove jednadžbe za optimalnost.  $J(x, u, \frac{\partial V}{\partial x}, t) = \phi(x, u, t) + \frac{\partial V^T}{\partial x} f(x, u, t)$  i vrijedi  $\inf_{u(t)} J(x, u, \frac{\partial V}{\partial x}, t) = J^*$ . Dakle,  $-\frac{\partial V}{\partial t} = J^*$  sa rubnim uvjetima  $V(x(T), T) = \theta(x(T), T)$ . Sljedeći teorem daje nužne i dovoljne uvjete za egzistenciju optimalne kontrole koja minimizira vrijednost  $I(t_o, x(t_o), u[t_o, T])$ .

**Teorem B.0.8.** *Neka je funkcija  $V(x, t)$  diferencijabilna i neprekidna i zadovoljava  $-\frac{\partial V}{\partial t} = J^*$  uz rubne uvjete  $V(x(T), T) = \theta(x(T), T)$ . Neka je  $u^*(t) = \text{Arg}[\inf_{u(t)} J(x, u, \frac{\partial V}{\partial x}, t)]$ ,  $t \in [t_o, T]$  po dijelovima neprekidna funkcija koja zadovoljava  $\inf_{u(t)} J(x, u, \frac{\partial V}{\partial x}, t) = J^*$ . Tada  $u^*[t_o, T]$  jest optimalna kontrola koja minimizira funkciju  $I(t_o, x(t_o), u[t_o, T])$  i minimalna vrijednost funkcije je  $V(x(t_o), t_o)$ .*

*Dokaz.*  $\int_{t_o}^T \frac{dV(x(t), t)}{dt} dt = \{ \text{koristeći Newton-Leibnizovu formulu} \} = V(x(t), t) \Big|_{t_o}^T = V(x(T), T) - V(x(t_o), t_o)$ . Označi se :

$$\int_{t_o}^T \frac{dV(x(t), t)}{dt} dt - (V(x(T), T) - V(x(t_o), t_o)) = 0. \quad (\text{B.2})$$

U  $I(t_o, x(t_o), u(t_o))$  se pribroji B.2.  $I(t_o, x(t_o), u[t_o, T]) = \int_{t_o}^T \phi(x, u, \tau) d\tau + \theta(x(T), T) + \int_{t_o}^T \frac{\partial V(x(t), t)}{\partial t} - V(x(T), T) + V(x(t_o), t_o)$ . Ako se u prethodno uvrsti da je  $\frac{dV(x(t), t)}{dt} = \frac{\partial V(x(t), t)}{\partial t} + \frac{\partial V^T(t, x(t))}{\partial x} f(x(t), u(t), t)$  i iskoriste sljedeće jednadžbe

$$J(x, u, \frac{\partial V}{\partial x}, t) = \phi(x, u, t) + \frac{\partial V^T}{\partial x} f(x, u, t). \quad (\text{B.3})$$

$$\inf_{u(t)} J(x, u, \frac{\partial V}{\partial x}, t) = J^*. \quad (\text{B.4})$$

$$-\frac{\partial V}{\partial t} = J^*. \quad (\text{B.5})$$

$$V(x(T), T) = \theta(x(T), T), \quad (\text{B.6})$$

tada daljnjim raspisom slijedi  $\int_{t_o}^T [\phi(x, u, \tau) + \frac{\partial V^T(t, x(t))}{\partial x} f(x(t), u(t), t) + \frac{\partial V(x(t), t)}{\partial t}] dt + \theta(x(T), T) - V(x(T), T) + V(x(t_o), t_o) = V(x(t_o), t_o) + \int_{t_o}^T (J(x, u, \frac{\partial V}{\partial x}, t) - J^*(x, u^*, \frac{\partial V}{\partial x}, t)) dt$ .

Kako je  $J^*(x, u^*, \frac{\partial V}{\partial x}, t) \leq J(x, u, \frac{\partial V}{\partial x}, t)$ , tada  $I(t_o, x(t_o), u[t_o, T])$  ima minimum u 0 koji je postignut za  $u[t_o, T] = u^*[t_o, T]$ . Minimalna vrijednost funkcionala I je u  $V(x(t_o), t_o)$ , te je  $I(t_o, x(t_o), u[t_o, T]) \geq I(t_o, x(t_o), u^*[t_o, T]) = V(x(t_o), t_o)$  za svaki  $u[t_o, T]$ .  $\square$



# Bibliografija

- [1] S. P. Bhattacharyya, A. Datta, L. H. Keel, *Linear Control Theory, Structure, Robustness and Optimization*, USA, 2009., 639-658
- [2] T. Braunl, J. PieThe, *Balancing a Two-Wheeled Autonomous Robot*, School of Mechanical Engineering , University of Western Australia, Final Year Thesis 2003
- [3] I. Gohberg, P. Lancaster, L. Rodman, *Indefinite Linear Algebra and Applications*, Birkhauser, 289-315
- [4] M. S. Kumar, S.Vijayarangan, *Design of LQR controller for active suspension system*, College of Tehnology, India, Department of Mechanical Engineering , 2005.
- [5] M. D. Schmmidt, *Simulation and Control of a Quadrotor unmanned Arial Vehicle*, University of Kentucky Master's Theses , 2011.
- [6] E. D. Sontag, *Mathematical Control Theory, Deterministic Finite Dimensional Systems*, Second Edition, Springer, 25-53, 81-90, 476
- [7] W.M.Wohnman, *Linear Multivariable Control: a Geometric Approach*, New York, Heidelberg, Berlin, Second Edition, 48-51
- [8] *Kalman filter implementation*  
<http://www.mathworks.com/help/control/getstart/functions-for-compensator-design.html>
- [9] *Beam and ball: System Modeling*  
<http://ctms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?example=BallBeam&section=SystemModeling>



# Sažetak

Predmet ovog rada je sustavni pregled problema numeričke matematike koji se javlja u inženjerskim primjenama teorije kontrole i upravljanja. Razrađen je problem postizanja optimalne kontrole nad zadanim objektom koji je prikazan kao linearan sistem jednadžbi:  $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$ , uz poznate vrijednosti početnih podataka  $t_o$  i  $x(t_o)$ .

Primjeri uključuju linearno- kvadratnu regulaciju spomenutog sistema koja je postignuta minimizacijom pripadnog funkcionala :

$$I = \int_{t_o}^T [x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t)]dt + x^T(t)Mx(t).$$

Korištene su Riccatijeve matrične jednadžbe i u tom kontekstu je zapisan navedeni funkcional. U okviru rezultata Riccatijeve teorije dani su i dovoljni rezultati za optimalnost rješenja problema LQR kontrole.

Pokazano je kako se ti koncepti javljaju npr. pri konstrukciji aktivnog ovjesa automobila (kako bi se prigušile oscilacije pri vožnji po neravnoj cesti) ili kod uređaja koji treba balansirati svoju težinu (držeci se u uspravnom položaju na svoja dva kotača uz dopuštene male oscilacije). Moguće šumove na sensorima uklanjalo se Kalmanovim filtrom. Varirao se izbor matrica  $Q$  i  $R$  i ovisno o tome pratilo ponašanje sistema na iste ili različite ulazne podatke. Dana je i usporedba sa metodom premještanja polova, na čijem se principu bazira metoda LQR kontrole.



# Summary

The subject of this paper is a systematic overview of numerical techniques in engineer applications of the control theory. The problem of achieving the optimal control of a system of linear equations-  $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$  is elaborated. Examples include linear-quadratic regulation of the before mentioned system, which is achieved by minimization of the related functional:

$$I = \int_{t_0}^T [x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t)]dt + x^T(t)Mx(t).$$

Riccati matrix equations were used, and in this context, the mentioned functional is noted. Along with the results of Riccati theory, sufficient results of optimality for solving the problem of LQR control are also provided.

It is also illustrated how these concepts appear e.g. in constructing active suspension of cars (in order to dampen the oscillations while driving on bumpy roads) or in appliances that need to regulate their own weight (to maintain an upright position on its two wheels with minute oscillations allowed). Possible buzzes on the sensors were removed by Kalman's filter. The choice of  $Q$  and  $R$  matrices was varied and depending on it, system behavior on the same or different input data was monitored. The comparison with the Pole-placement method, which the LQR method is based on, is provided as well.





# Životopis

Katarina Kešinović rođena je 18. travnja 1990. u Brčkom, BiH. Tijekom domovinskog rata preselila je sa obitelji u Hamburg (Njemačka) i tamo boravila od svoje 2. do 9. godine života. Prva dva razreda osnovne škole pohađala je u Hamburgu i tako naučila njemački kao i materinji jezik. 1999. g seli u Županju (općina Bošnjaci), gdje završava osnovnu školu i Opću gimnaziju. U ljeto 2008. upisuje preddiplomski sveučilišni studij matematike na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno - matematičkog fakulteta u Zagrebu. U ljeto 2012. upisuje diplomski sveučilišni studij Primijenjena matematika na istom.