**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**

**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**

**MATEMATIČKI ODSJEK**

Kristijan Kilassa Kvaternik

# THURSTONOVE GEOMETRIJE

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Željka Milin-Šipuš

Zagreb, 2016.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

# Sadržaj

# Uvod

Za Riemannove dvodimenzionalne mnogostrukosti poznato je da dopuštaju točno jednu od tri geometrijske strukture - euklidsku $E^2$, sfernu $S^2$ ili hiperboličku $H^2$. Zanimljivo je da u slučaju trodimenzionalnih mnogostrukosti ova klasifikacija postaje složenija. William Thurston je 1982. godine iznio geometrizacijsku hipotezu prema kojoj za trodimenzionalne mnogostrukosti postoji točno 8 geometrijskih struktura: $E^3$, $S^3$, $H^3$, $S^2 \times \mathbb{R}$, $H^2 \times \mathbb{R}$, $\widetilde{SL_2\mathbb{R}}$, Nil i Sol. Cilj ovog rada je uvesti temeljne pojmove potrebne za razumijevanje Thurstonovih geometrija te istražiti neke od tih geometrijskih struktura.

U prvom poglavlju najprije se definiraju neki osnovni pojmovi diferencijalne geometrije: (glatka) mnogostrukost, tangencijalni svežanj glatke mnogostrukosti te pojam tenzora. Ovi su pojmovi potrebni za definiciju Riemannove metrike na glatkoj mnogostrukosti te Riemannove mnogostrukosti - jednog od centralnih predmeta proučavanja ovog rada (svih 8 Thurstonovih geometrija su zapravo posebni primjeri trodimenzionalnih homogenih Riemannovih mnogostrukosti). Nakon toga se definiraju neki pojmovi iz algebre i algebarske topologije (djelovanja grupa, prostori natkrivanja) kako bi se mogao definirati pojam geometrijske strukture i iskazati Thurstonov rezultat. Glavna literatura za ovo poglavlje jest skripta [7] i članak [3].

U drugom poglavlju napravljen je pregled geometrijskih struktura. Iskazuje se uniformizacijski teorem za plohe (najavljen i na početku ovog uvoda) i navode se sve tri geometrijske strukture u 2 dimenzije. Za svaku od njih se ukratko opisuje grupa izometrija. Nakon toga se navode i ukratko opisuju neke karakteristike svih 8 Thurstonovih geometrija. Literatura korištena za ovo poglavlje je članak [3].

Nakon opisa svih 8 Thurstonovih geometrija nastavljaju se proučavati dvije od njih, Sol i Nil. U trećem poglavlju određujemo neke klase krivulja u tim geometrijama. Geodetske su krivulje, kao krivulje koje lokalno minimiziraju udaljenost, generalizacija pojma pravca na ”zakrivljene prostore” te ih nalazimo rješavanjem određenog sustava običnih diferencijalnih jednadžbi. Korištenjem posebno definiranih grupovnih operacija u Sol i Nil geometriji (koje generaliziraju translacije) definirat ćemo i odrediti translacijske krivulje - krivulje kojima se tangencijalni vektor u proizvoljnoj točki podudara sa slikom nekog unaprijed zadanog vektora pri translaciji u tu točku. Glavna literatura za ovo poglavlje su članci [2], [8] i [9].

U četvrtom poglavlju određujemo minimalne translacijske plohe u Sol i Nil geometriji. Najprije se definira pojam koneksije na mnogostrukosti pomoću kojeg se definira pojam srednje zakrivljenosti te pojam minimalne plohe kao plohe čija je srednja zakrivljenost u svakoj točki jednaka nuli te se izvodi diferencijalna jednadžba koja daje kriterij određivanja minimalnosti plohe. U euklidskoj geometriji translacijske plohe nastaju translacijom jedne krivulje duž neke druge. Generalizirajući pojam translacije pomoću već spomenutih grupovnih operacija, translacijske plohe ćemo podijeliti na 6 tipova i u svakom od njih odrediti minimalne plohe (ukoliko nije tehnički presloženo). Glavna literatura za ovo poglavlje su članci [4] i [6].

# Poglavlje 1

# Osnovni pojmovi i rezultati

## 1.1 Glatke i Riemannove mnogostrukosti

Najprije ćemo definirati pojmove potrebne za razumijevanje osnovnog objekta ovog rada - pojma Riemannove mnogostrukosti.

### Glatke mnogostrukosti

**Definicija 1.1.1.** ***Topološka mnogostrukost*** *$M$* ***dimenzije*** *$n$ je topološki prostor $M$ za koji vrijedi:*

1° *$M$ je Hausdorffov, tj. za svaki par točaka $p, q \in M$ postoje disjunktni otvoreni skupovi $U, V \subset M$ takvi da $x \in U$, $y \in V$,*

2° *$M$ zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti (postoji prebrojiva baza topologije na $M$),*

3° *za svaku točku od $M$ postoji njena okolina koja je homeomorfna nekom otvorenom podskupu od $\mathbb{R}^n$ (tj. $M$ je lokalno euklidski dimenzije $n$).*

**Definicija 1.1.2.** ***Koordinatna karta*** *na topološkoj mnogostrukosti $M$ je uređen par $(U, \varphi)$, gdje je $U$ otvoren podskup od $M$, a $\varphi\colon U \to \widetilde{U}$ je homeomorfizam sa $U$ u otvoren skup $\widetilde{U} = \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$. Skup $U$ zovemo* ***koordinatnom okolinom*** *ili* ***domenom****, a preslikavanje $\varphi$ (****lokalnim****)* ***koordinatnim preslikavanjem****. Koordinatne funkcije $(x^1, \ldots, x^n)$ od $\varphi$ definirane s*

$$\varphi(p) = (x^1(p), \ldots, x^n(p)), \;\; p \in \mathbb{R}^n,$$

*zovemo* ***lokalne koordinate*** *na $U$.*

**Definicija 1.1.3.** *Za dvije koordinatne karte* $(U, \varphi)$, $(V, \psi)$ *topološke mnogostrukosti* $M$ *kažemo da su* ***glatko povezane*** *ako je* $U \cap V = \emptyset$ *ili ako je preslikavanje*

$$\psi \circ \varphi^{-1} \colon \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$$

*glatki difeomorfizam (otvorenih podskupova od* $\mathbb{R}^n$*).*
***Atlas*** $\mathcal{A}$ *je familija koordinatnih karata čije domene prekrivaju* $M$*. Atlas* $\mathcal{A}$ *zovemo* ***glatkim*** *ako su svake dvije karte u* $\mathcal{A}$ *glatko povezane. Glatki atlas* $\mathcal{A}$ *je* ***maksimalan*** *ako nije sadržan niti u jednom striktno većem glatkom atlasu.*
***Glatka mnogostrukost*** *je uređen par* $(M, \mathcal{A})$*, gdje je* $M$ *topološka mnogostrukost, a* $\mathcal{A}$ *maksimalan glatki atlas na* $M$*.*

## Tangencijalni svežanj

**Definicija 1.1.4.** *Neka je* $M$ *glatka mnogostrukost. Funkcija* $f \colon M \to \mathbb{R}^k$ *se naziva* ***glatkom*** *ako za svaku točku* $p \in M$ *postoji glatka karta* $(U, \varphi)$ *od* $M$ *čija domena sadrži* $p$ *te takva da je preslikavanje*

$$f \circ \varphi^{-1} \colon \varphi(U) \to \mathbb{R}^k$$

*glatka funkcija. Skup svih realnih glatkih funkcija na* $M$ *označavamo* $C^\infty(M)$*.*

Pomoću glatkih karata možemo i općenito definirati glatke funkcije na glatkim mnogostrukostima.

**Definicija 1.1.5.** *Neka su* $M$ *i* $N$ *glatke mnogostrukosti. Preslikavanje* $f \colon M \to N$ *naziva se* ***glatkim*** *ako za svaku točku* $p \in M$ *postoji glatka karta* $(U, \varphi)$ *od* $M$ *koja sadrži* $p$ *i glatka karta* $(V, \psi)$ *od* $N$ *koja sadrži* $f(p)$ *takve da je* $f(U) \subset V$ *i da je preslikavanje*

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} \colon \varphi(U) \to \psi(V)$$

*glatka funkcija.*

**Definicija 1.1.6.** *Neka je* $M$ *glatka mnogostrukost i* $p \in M$*. Linearno preslikavanje* $X \colon C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ *naziva se* ***derivacijom u*** $p$ *ako vrijedi*

$$X(fg) = f(p)Xg + g(p)Xf, \; f, g \in C^\infty(M).$$

*Skup svih derivacija u* $p$ *je vektorski prostor koji se naziva* ***tangencijalnim prostorom od*** $M$ ***u*** $p$ *i označava* $T_pM$*. Elemente tangencijalnog prostora* $T_pM$ *zovemo* ***tangencijalnim vektorima u*** $p$*.*
***Tangencijalni svežanj*** *glatke mnogostrukosti* $M$*,* $TM$*, je disjunktna unija tangencijalnih prostora u svim točkama od* $M$

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_pM\,.$$

*Za element* $(p, X) \in TM$ *(gdje je* $p \in M$*,* $X \in T_pM$*) pišemo* $(p, X) = X_p$*.*

Sada ćemo definirati pojam vektorskog svežnja.

**Definicija 1.1.7.** *Neka je $M$ glatka mnogostrukost.* ***(Glatki) vektorski svežanj ranga*** $k$ ***nad*** *$M$ je glatka mnogostrukost $E$ zajedno s glatkim surjektivnim preslikavanjem $\pi\colon E \to M$ koje zadovoljava*

1° *za svaki $p \in M$, skup $E_p = \pi^{-1}(p) \subset E$ (**vlakno** nad $p$) je snabdjeven strukturom realnog vektorskog prostora,*

2° *za svaki $p \in M$ postoji okolina $U$ od $p$ u $M$ i difeomorfizam $\Phi\colon \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$ tako da vrijedi*

$$\pi = \Phi \circ \pi_1,$$

*(gdje je $\pi_1$ projekcija na prvi faktor) i restrikcija od $\phi$ na $E_p$ je linearni izomorfizam $\Phi|_{E_p}\colon E_p \to \{p\} \times \mathbb{R}^k$.*

*Mnogostrukost $E$ naziva se **totalnim** ili **ukupnim prostorom**, mnogostrukost $M$ **bazom**, a preslikavanje $\pi$ **projekcijom**. Svako preslikavanje $\Phi$ se naziva **lokalnom trivijalizacijom od** $E$ **nad** $U$. Lokalnu trivijalizaciju nad cijelom mnogostrukošću $M$ (ako postoji) zovemo **globalnom trivijalizacijom**, a $E$ u tom slučaju zovemo **trivijalnim svežnjem**.*

Prethodna dva pojma povezuje sljedeći rezultat.

**Propozicija 1.1.8.** *Tangencijalni svežanj $TM$ glatke $n$-mnogostrukosti $M$ je glatki vektorski svežanj ranga $n$.*

**Definicija 1.1.9.** *Neka je $E$ glatki vektorski svežanj nad $M$ i $\pi\colon E \to M$ projekcija svežnja.* ***Prerez od*** *$E$ (**prerez preslikavanja** $\pi$) je neprekidno preslikavanje $\sigma\colon M \to E$ za koje je $\pi \circ \sigma = Id_M$.*

## Tenzori i Riemannove mnogostrukosti

**Definicija 1.1.10.** *Neka je $V$ realan vektorski prostor dimenzije $n$.* ***Kovarijantni*** $k$***-tenzor na*** *$V$ je multilinearno preslikavanje*

$$F\colon \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k} \to \mathbb{R}\,.$$

*Broj $k$ zovemo **rangom** tenzora $F$. Prostor svih kovarijantnih $k$-tenzora na $V$ označavamo $T^k(V)$.*

Ako je $M$ glatka mnogostrukost, promatramo tenzore na tangencijalnom prostoru $T_pM$. Prostor kovarijantnih $k$-tenzora u točki $p \in M$ označavamo $T^k(T_pM)$. Vektorski svežanj kovarijantnih $k$-tenzora je

$$T^k(M) = \bigcup_{p \in M} T^k(T_pM)\,.$$

**Definicija 1.1.11.** ***Tenzorsko polje*** *$\mathcal{T}^k(M)$ je glatki prerez nekog tenzorskog svežnja $T^k(M)$.*

Sada možemo definirati pojam Riemannove mnogostrukosti.

**Definicija 1.1.12.** *Neka je $M$ glatka mnogostrukost dimenzije $n$.* ***Riemannova metrika*** *na $M$ je glatko kovarijantno 2-tenzorsko polje $g \in \mathcal{T}^2(M)$ koje je*

1° *simetrično: $g(X, Y) = g(Y, X)$ za sve $X, Y \in T_pM$,*

2° *pozitivno definitno: $g(X, X) > 0$ za $X \neq 0$.*

*Uređen par $(M, g)$ zovemo* ***Riemannova mnogostrukost****.*

U ovom ćemo radu koristiti i pojam izometrije koji ćemo također definirati. Za to će nam biti potreban pojam povlaka.

**Definicija 1.1.13.** *Neka su $M$ i $N$ glatke mnogostrukosti i $F\colon M \to N$ glatko preslikavanje. Za svaku točku $p \in M$ definiramo* ***push-forward*** *$F_*$ preslikavanja $f$ kao preslikavanje*

$$F_*\colon T_pM \to T_{F(p)}N,\ (F_*X)(f) = X(f \circ F),\ f \in C^\infty(N).$$

*Nadalje, za svaki $k \geqslant 0$ i $p \in M$ definiramo* ***povlak*** *(**pullback**) $F^*$ preslikavanja $F$ kao preslikavanje $F^*\colon T^k(T_{F(p)}N) \to T^k(T_pM)$,*

$$F^*(S)(X_1, \dots, X_k) = S(F_*X_1, \dots, F_*X_k),\ S \in T^k(T_{F(p)}N),\ X_1, \dots, X_k \in T_pM\,.$$

**Definicija 1.1.14.** *Neka su $(M, g)$ i $(M', g')$ Riemannove mnogostrukosti.* ***Izometrija*** *je difeomorfizam $f\colon M \to M'$ takav da $g = f^*g'$ (gdje $f^*$ označava povlak preslikavanja $f$). Ako je $f$ lokalni difeomorfizam, kažemo da je $f$* ***lokalna izometrija****.*
*Kažemo da su mnogostrukosti $M$ i $M'$* ***izometrične*** *i pišemo $M \simeq M'$ ako postoji izometrija $f\colon M \to M'$.*

Skup svih izometrija sa $M$ u $M$ s operacijom kompozicije čini grupu koju označavamo $\mathrm{Isom}(M)$.

## 1.2 Djelovanja grupa, prostori natkrivanja

U ovom ćemo odjeljku sažeto izložiti pojmove i rezultate iz algebre i algebarske topologije koji su potrebni za definiranje pojma geometrijske strukture.

### Djelovanja grupa

**Definicija 1.2.1.** *Neka je G grupa, a M skup.* ***Lijevo djelovanje*** *G na M je preslikavanje*

$$G \times M \to M,\ (g, m) \mapsto g \cdot m,\ g \in G, m \in M,$$

*takvo da vrijedi*

1° $g_1 \cdot (g_2 \cdot m) = (g_1 g_2) \cdot m$, $g_1, g_2 \in G$, $m \in M$,

2° $e \cdot m = m$, $m \in M$ *(e je neutralni element grupe G).*

*Analogno definiramo desno djelovanje G na M.*

**Definicija 1.2.2.** *Neka je dano lijevo djelovanje grupe G na skupu M.* ***Orbita*** *elementa $m \in M$ je skup*

$$\mathrm{orb}(m) = \{g \cdot m \colon g \in G\},$$

*a* ***stabilizator*** *(ili* ***izotropna podgrupa****) elementa m je skup*

$$\mathrm{stab}(m) = G_m = \{g \in G \colon g \cdot m = m\} < G.$$

Sada možemo definirati relaciju na $M$ na sljedeći način:

$$m_1 \sim m_2 \Leftrightarrow m_1 \in \mathrm{orb}(m_2).$$

Lako se vidi da je ovime definirana relacija ekvivalencije na $M$ te da su orbite elemenata skupa $M$ pripadne klase ekvivalencije. Odgovarajući kvocijentni skup označimo sa $M/G$.

**Definicija 1.2.3.** *Kažemo da je djelovanje grupe G na skup M* ***tranzitivno*** *ako za sve $m, n \in M$ postoji $g \in G$ takav da*

$$m = g \cdot n.$$

*Drugim riječima, grupa G djeluje tranzitivno na M ako je skup M/G jednočlan.*

Mi ćemo promatrati slučaj kada je $M$ Riemannova mnogostrukost i $G$ grupa izometrija od $M$ (koju ćemo označiti sa $\Gamma$). Definiramo djelovanje grupe $\Gamma$ na $M$ s

$$\gamma \cdot q = \gamma(q),\ \gamma \in \Gamma, q \in M.$$

## Prostori natkrivanja

**Definicija 1.2.4.** *Neka su $X$ i $Y$ topološki prostori te $p\colon Y \to X$ neprekidna surjekcija. Za uređeni par $(Y, p)$ kažemo da je* ***prostor natkrivanja*** *od $X$ ako za svaki $x \in X$ postoji otvorena okolina $U$ od $x$ u $X$ i indeksirana familija $(V_\alpha)_{\alpha\in A}$ otvorenih podskupova od $Y$ tako da vrijedi*

1° $V_\alpha \cap V_\beta = \emptyset$ *za* $\alpha \neq \beta$,

2° $p^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha\in A} V_\alpha$,

3° $p|_{V_\alpha}\colon V_\alpha \to U$ *je homeomorfizam za svaki* $\alpha \in A$.

*Preslikavanje $p$ zovemo* ***natkrivajuće preslikavanje****.*
*Ako je $(Y, p)$ prostor natkrivanja topološkog prostora $X$, onda se grupa svih homeomorfizama $\psi\colon Y \to Y$ takvih da $p = p \circ \psi$ (tj. takvih da donji dijagram komutira) zove* ***grupa natkrivanja*** *i označava $C(Y, p, X)$.*

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "p"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & Y \arrow[dl, "p"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

Neka je $X$ topološki prostor i $x_0 \in X$. Sa $\pi_1(X, x_0)$ označavamo fundamentalnu grupu od $X$ u $x_0$, a sa $[u]$ označavamo klasu pridruženu petlji $u$ u $X$ oko $x_0$ (tj. element $[u] \in \pi_1(X, x_0)$).

**Definicija 1.2.5.** *Neka su $X$ i $Y$ topološki prostori, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ te $h\colon X \to Y$ neprekidna funkcija takva da $h(x_0) = y_0$. Definiramo preslikavanje*

$$h_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0),\; h_*([u]) = [h \circ u]\,.$$

**Definicija 1.2.6.** *Neka je $(Y, p)$ prostor natkrivanja topološkog prostora $X$, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ i $p(y_0) = x_0$. Definiramo grupu*

$$H_0 = p_*(\pi_1(Y, y_0))\,.$$

*Kažemo da je $p$* ***regularno natkrivajuće preslikavanje*** *ako je $H_0$ normalna podgrupa od $\pi_1(X, x_0)$.*

**Teorem 1.2.7.** *Neka je $p\colon Y \to X$ regularno natkrivajuće preslikavanje i $C$ odgovarajuća grupa natkrivanja. Tada postoji homeomorfizam $k\colon Y/C \to X$ takav da $p = k \circ \pi$, gdje je $\pi\colon Y \to Y/C$ projekcija.*

Mi ćemo promatrati prostore natkrivanja mnogostrukosti. Budući da je natkrivajuće preslikavanje (prema svojoj definiciji) lokalni homeomorfizam, prostor natkrivanja (topološke, Riemannove) mnogostrukosti također će biti (topološka, Riemannova) mnogostrukost (zgodno je napomenuti i da obrat ove tvrdnje općenito ne vrijedi).

## 1.3 Geometrijska struktura

Pojam geometrijske strukture najprije ćemo definirati za 2-mnogostrukosti.

**Definicija 1.3.1.** *Neka je $X$ jedno od $E^2$, $S^2$ ili $H^2$, gdje je $E^2$ euklidska, $S^2$ sferna, a $H^2$ hiperbolička ravnina. Neka je $\Gamma$ podgrupa od* $\mathrm{Isom}(X)$*. Ako je $F$ 2-mnogostrukost takva da $F \simeq X/\Gamma$ i projekcija $X \to X/\Gamma$ je natkrivajuće preslikavanje, kažemo da $F$* ***ima geometrijsku strukturu modeliranu na*** *$X$.*

Ovu ćemo definiciju iskoristiti za generalizaciju pojma geometrijske strukture u tri dimenzije. No, postoji i općenitija definicija geometrijske strukture u proizvoljnoj dimenziji.

**Definicija 1.3.2.** *Metrika na mnogostrukosti $M$ je* ***lokalno homogena*** *ako za sve točke $x, y \in M$ postoje okoline $U, V$ od $x, y$ respektivno i izometrija $f\colon U \to V$.*
*Metrika na mnogostrukosti $M$ je* ***homogena*** *ako za sve točke $x, y \in M$ postoji izometrija od $f\colon M \to M$ takva da $f(x) = y$.*
*Riemannova mnogostrukost $M$ je* ***potpuna*** *ako je potpuna kao metrički prostor (tj. svaki Cauchyev niz u $M$ konvergira).*

**Definicija 1.3.3.** *Mnogostrukost $M$* ***dopušta geometrijsku strukturu*** *ako se može snabdjeti potpunom lokalno homogenom metrikom.*

Ukoliko je mnogostrukost Riemannova, definicija 1.3.3 povlači definiciju 1.3.1. Prije iskaza i dokaza samog rezultata navodimo još jednu definiciju vezanu uz prostore natkrivanja.

**Definicija 1.3.4.** *Neka je $(Y, p)$ prostor natkrivanja topološkog prostora $X$. Kažemo da je $(Y, p)$* ***univerzalan prostor natkrivanja*** *od $X$ ako je $Y$ jednostavno povezan topološki prostor (svaka petlja u $Y$ je nul-homotopna).*

**Lema 1.3.5.** *Neka je $M$ Riemannova $n$-mnogostrukost koja dopušta geometrijsku strukturu u smislu definicije 1.3.3 i $(X, p)$ univerzalan prostor natkrivanja od $M$. Tada postoji podgrupa $\Gamma$ od* $\mathrm{Isom}(X)$ *takva da je $M \simeq X/\Gamma$. Posebno, $\Gamma$ je grupa natkrivanja od $X$.*

*Dokaz.* Neka je $d$ potpuna lokalno homogena metrika na $M$ i neka je $(\widetilde{M}, \widetilde{p})$ neki prostor natkrivanja od $M$. Tada $\widetilde{M}$ na prirodan način nasljeđuje metriku povlačenjem, tj. na $\widetilde{M}$ možemo definirati metriku

$$\widetilde{d} = \widetilde{p}^* d$$

tako da je $\widetilde{p}\colon \widetilde{M} \to M$ lokalna izometrija. Ovako definirana metrika $\widetilde{d}$ je također potpuna i lokalno homogena.

Sada ćemo iskoristiti činjenicu da je lokalno homogena metrika na jednostavno povezanoj mnogostrukosti homogena ([3, lema 2.3.1.]). Iz ove činjenice slijedi da je metrika $d'$ na $X$ naslijeđena od $M$ homogena.

Znamo da za svake dvije točke $x, y \in X$ postoji $\gamma \in \mathrm{Isom}(X)$ tako da $\gamma(x) = y$. U terminima djelovanja grupe $\mathrm{Isom}(X)$ na $X$, vidimo da se svaka točka iz $X$ nalazi u istoj orbiti. Dakle, ako $M$ dopušta geometrijsku strukturu u smislu definicije 1.3.3, onda grupa izometrija univerzalnog prostora natkrivanja $X$ djeluje tranzitivno na $X$.

Neka je $C$ odgovarajuća grupa natkrivanja. Ako je $\psi \in C$, onda je $\psi$ lokalna izometrija. Naime, za proizvoljnu točku $x \in X$ postoji otvorena okolina $U \subset X$ od $X$ takva da je $p|_U$ izometrija. Sada na tom skupu imamo

$$\psi^* d' = \psi^* p^* d = (p \circ \psi)^* d = [\psi \in C] = p^* d = d' .$$

No, budući da je $\psi$ difeomorfizam, $\psi$ mora biti (globalna) izometrija. Dakle, grupa natkrivanja od $X$ je podgrupa grupe izometrija od $X$, $C < \mathrm{Isom}(X)$.

Budući da je $(X, p)$ univerzalan prostor natkrivanja, fundamentalna grupa $\pi_1(X, x_0)$ je trivijalna pa je grupa $H_0 = p_*(\pi_1(X, x_0))$ također trivijalna, a time i normalna podgrupa od $\mathrm{Isom}(X)$ (za svaku točku $x_0 \in X$). Dakle, $p$ je regularno natkrivajuće preslikavanje pa su prema teoremu 1.2.7 $M$ i $X/C$ izometrični. Zato $\Gamma = C$ zadovoljava tvrdnju teorema. □

Sada pojam geometrijske strukture možemo definirati na sljedeći način.

**Definicija 1.3.6.** ***Geometrija*** *je uređen par* $(X, G)$*, gdje je* $X$ *jednostavno povezana, potpuna i homogena Riemannova mnogostrukost, a* $G$ *grupa izometrija od* $X$*.*
*Mnogostrukost* $M$ ***ima geometrijsku strukturu modeliranu na*** $X$ *ako je* $M \simeq X/\Gamma$*, gdje je* $\Gamma$ *podgrupa od* $\mathrm{Isom}(X)$*.*

Ovu definiciju možemo proširiti s nekoliko (tehničkih) uvjeta.

**Definicija 1.3.7.** *Geometrije* $(X, G)$ *i* $(X', G')$ *su* ***ekvivalentne*** *ako su grupe* $G$ *i* $G'$ *izomorfne i postoji ekvivarijantno preslikavanje* $\varphi\colon X \to X'$*, tj. preslikavanje takvo da*

$$\varphi(g \cdot x) = g' \cdot \varphi(x), \ x \in X, g \in G ,$$

*gdje je* $g'$ *izomorfna slika od* $g$ *u* $G'$*.*

**Definicija 1.3.8.** *Geometrija* $(X, G)$ *je* ***maksimalna*** *ako ne postoji geometrija* $(X, G')$ *takva da* $G \subsetneq G'$*.*

**Definicija 1.3.9.** *Geometrija* $(X, G)$ ***dopušta kompaktni kvocijent*** *ako postoji podgrupa* $H < G$ *koja djeluje na* $X$ *kao grupa natkrivanja i ima kompaktan kvocijent, tj. projekcija* $X \to X/H$ *je natkrivajuće preslikavanje i kvocijent* $X/H$ *je kompaktan.*

Ove su definicije potrebne za klasifikaciju svih mogućih geometrijskih struktura u danoj dimenziji. Thurston je identificirao postojanje osam geometrijskih struktura u 3 dimenzije.

**Teorem 1.3.10** (Thurston)**.** *Svaka maksimalna, jednostavno povezana, trodimenzionalna geometrija koja dopušta kompaktni kvocijent ekvivalentna je geometriji* $(X, \mathrm{Isom}(X))$*, gdje je* $X$ *jedno od* $E^3$, $S^3$, $H^3$, $S^2 \times \mathbb{R}$, $H^2 \times \mathbb{R}$, $\widetilde{SL_2\mathbb{R}}$, Nil *ili* Sol.

Dakle, za shvaćanje geometrija u danoj dimenziji potrebno je odrediti moguće univerzalne prostore natkrivanja $X$ i njihove grupe izometrija. Zanima nas koje će podgrupe grupe izometrija generirati Riemannovu mnogostrukost s geometrijskom strukturom modeliranom na $X$. Takve ćemo grupe zvati diskretnima. U tu svrhu uvodimo sljedeće definicije.

**Definicija 1.3.11.** *Grupa* $G$ *djeluje* ***adekvatno diskontinuirano*** *na topološkom prostoru* $X$ *ako je za svaki kompaktni podskup* $K \subset X$ *skup*

$$\{g \in G \colon gK \cap K \neq \emptyset\}$$

*konačan.*

**Napomena 1.3.12.** *Ako* $G$ *djeluje adekvatno diskontinuirano na* $X$ *i* $x \in X$*, onda je stabilizator od* $x$*,* $\mathrm{stab}(x)$*, konačan skup. U suprotnom bi za kompakt* $K \subset X$ *koji sadrži* $x$ *postojalo beskonačno mnogo* $g \in G$ *takvih da* $x \in K$ *i* $x \in gK$*.*

**Definicija 1.3.13.** *Kažemo da grupa* $G$ ***djeluje slobodno*** *na topološkom prostoru* $X$ *ako je za svaki* $x \in X$ *stabilizator* $\mathrm{stab}(x)$ *trivijalna grupa.*

**Teorem 1.3.14.** *Neka je* $X$ *povezana glatka mnogostrukost i* $\Gamma$ *konačna ili prebrojivo beskonačna grupa s diskretnom topologijom koja djeluje glatko, slobodno i adekvatno diskontinuirano na* $X$*. Tada je kvocijentni prostor* $X/\Gamma$ *topološka mnogostrukost i ima jedinstvenu glatku strukturu takvu da je* $\pi \colon X \to X/\Gamma$ *glatko normalno natkrivajuće preslikavanje.*

Dokaz ovog teorema (u nešto općenitijoj verziji) može se naći u [5, teorem 21.10.] (teorem o kvocijentnoj mnogostrukosti).

Ako $G$ djeluje slobodno i adekvatno diskontinuirano na mnogostrukosti $X$, onda je projekcija $\pi \colon X \to X/G$ natkrivajuće preslikavanje s grupom natkrivanja $G$.

**Napomena 1.3.15.** *Neka su* $X$ *i* $Y$ *topološki prostori i* $C(X, Y)$ *skup svih neprekidnih funkcija sa* $X$ *u* $Y$*. Neka je* $K \subseteq X$ *kompaktan, a* $U \subseteq V$ *otvoren. Stavimo*

$$V(K, U) = \{f \in C(X, Y) \colon f(K) \subset U\}.$$

*Na* $C(X, Y)$ *možemo definirati* ***kompaktno-otvorenu topologiju*** *kao topologiju čija je podbaza familija* $\{V(K, U) \colon K \subseteq X \text{ kompaktan, } U \subseteq Y \text{ otvoren}\}$*.*

Neka je $C(X)$ prostor svih neprekidnih funkcija $f\colon X \to X$ s kompaktno-otvorenom topologijom. Ako $G$ djeluje adekvatno diskontinuirano na $X$, onda je $G$ diskretan podskup od $C(X)$.

No ako je $X$ potpuna Riemannova mnogostrukost, a $G$ grupa izometrija od $X$ koja je diskretan podskup od $C(X)$, tada $G$ djeluje adekvatno diskontinuirano na $X$.

Dakle, ako je $X$ potpuna Riemannova mnogostrukost, tada je podgrupa grupe izometrija od $X$ diskretna ako i samo ako djeluje adekvatno diskontinuirano. Zato uvodimo sljedeću definiciju.

**Definicija 1.3.16.** ***Diskretna grupa*** *$G$ je podgrupa grupe izometrija mngostrukosti $X$ takva da $G$ djeluje slobodno i adekvatno diskontinuirano na $X$.*

# Poglavlje 2

# Pregled geometrija u 2 i 3 dimenzije

## 2.1 Dvodimenzionalne geometrije

Za kompaktne povezane plohe (2-mnogostrukosti) poznato je da dopuštaju točno 3 geometrijske strukture. Preciznije, vrijedi sljedeći rezultat.

**Teorem 2.1.1** (Uniformizacijski teorem)**.** *Svaka kompaktna povezana ploha dopušta geometrijsku strukturu modeliranu na* $E^2$*,* $S^2$ *ili* $H^2$*.*

Dokaz koji se temelji na topološkoj klasifikaciji ploha može se naći u [3, teorem 3.1.1.]. Kako bismo opisali ove geometrije na 2-mnogostrukostima, potrebno je poznavati grupu izometrija prostora (za što je potrebno poznavanje metrike), njene diskretne podgrupe te odgovarajuće kvocijentne prostore.

### Metrika na Riemannovim mnogostrukostima

Neka je $(M, g)$ Riemannova mnogostrukost i $c\colon I \to M$ dopustiva (po dijelovima regularna) krivulja ($I \subset \mathbb{R}$ je interval). Tada duljinu luka krivulje $c$ možemo definirati kao

$$L(c) = \int_I \sqrt{g(\dot{c}(t), \dot{c}(t))}dt\,.$$

Pomoću ovog pojma možemo definirati metriku $d$ na $M$ tako da za dvije točke $p, q \in M$ stavimo da je $d(p, q)$ jednako infimumu duljina luka svih dopustivih krivulja od $p$ do $q$. Pokazuje se da se topologija inducirana ovom metrikom podudara s topologijom na mnogostrukosti $M$.

Ovu ćemo ideju precizirati uvođenjem pojma prve fundamenalne forme.

**Definicija 2.1.2.** *Neka je $(M, g)$ Riemannova mnogostrukost i $p \in M$.* ***Prva fundamentalna forma*** *je preslikavanje*

$$I_p \colon T_pM \to \mathbb{R}, \quad I_p(w) = g(w, w)\,.$$

Za $v, w \in T_pM$ pisat ćemo $g(v, w) = \langle v, w\rangle_p$.

Neka je sada $w \in T_pS$ gdje je $S$ neka ploha. Tada je $w$ tangencijalni vektor neke krivulje $c \colon I \to S$ takve da $c(0) = p$. Krivulju $c$ možemo parametrizirati u koordinatnoj karti $\mathbf{x}$ plohe $S$ tako da $c(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ za svaki $t \in I$ (gdje su $u$ i $v$ lokalne koordinate na $S$). Imamo $p = c(0) = \mathbf{x}(u(0), v(0))$ i $w = \dot{c}(0) = \mathbf{x}_u(u(0), v(0))u'(t) + \mathbf{x}_v(u(0), v(0))v'(t)$. Zato je prva fundamentalna forma vektora $w$ jednaka

$$\begin{aligned} I_p(w) &= \langle \dot{c}(0), \dot{c}(0)\rangle_p \\ &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\rangle_p (u'(0))^2 + 2\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\rangle_p (u'(0)v'(0)) + \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v\rangle_p (v'(0))^2 \\ &= E(u'(0))^2 + 2F(u'(0)v'(0)) + G(v'(0))^2\,, \end{aligned}$$

gdje su

$$E = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u\rangle_p\,, \quad F = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\rangle_p\,, \quad G = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v\rangle_p$$

fundamentalne veličine prvog reda (koeficijenti prve fundamentalne forme u bazi $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ prostora $T_pS$).

Prvu fundamentalnu formu možemo iskoristiti za određivanje udaljenosti na plohi bez referiranja na ambijentni prostor. Naime, ako je $c \colon [0, 1] \to S$ krivulja na plohi $S$ parametrizirana s $c(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$, tada je duljina luka te krivulje

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{I_p(\dot{c}(\tau))}d\tau = \int_0^t \sqrt{E(u'(\tau))^2 + 2F(u'(\tau)v'(\tau)) + G(v'(\tau))^2}d\tau\,,$$

što zapisano u obliku diferencijala daje

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2\,.$$

## Euklidska geometrija $E^2$

Prostor $E^2$ je opskrbljen standardnom euklidskom metrikom $ds^2 = dx^2 + dy^2$. Znamo da su izometrije euklidskog prostora translacije, osne simetrije, rotacije i klizne simetrije (kompozicije osne simetrije s obzirom na pravac $l$ i translacije duž tog pravca). Svaka se izometrija $\alpha \in \mathrm{Isom}(E^2)$ može zapisati u obliku $\alpha(x) = Ax + b$, gdje je $A$ ortogonalna matrica reda 2, a $b \in \mathbb{R}^2$ vektor translacije. Zato možemo na prirodan način definirati homomorfizam grupa $\phi\colon\ \mathrm{Isom}(E^2) \to O(2)$ čija je jezgra grupa translacija od $E^2$.

Zanimaju nas diskretne podgrupe od $\mathrm{Isom}(E^2)$. Neka je $G < \mathrm{Isom}(E^2)$. Ako $G$ djeluje slobodno na $E^2$, onda niti jedna izometrija $g \in G$ koja nije identiteta nema fiksnih točaka.

Zato $G$ ne sadrži osne simetrije ni rotacije. Prema [3], postoje 4 tipa diskretnih podgrupa od $\mathrm{Isom}(E^2)$. Prvi tip su podgrupe generirane jednom translacijom, i odgovarajuća kvocijentna mnogostrukost je beskonačni cilindar. Drugi tip su podgrupe generirane dvjema translacijama s torusom kao rezultirajućom kvocijentnom mnogostrukosti. Treći tip su podgrupe generirane jednom kliznom simetrijom, a kvocijentna mnogostrukost je Möbiusova vrpca. Četvrti tip su podgrupe generirane jednom translacijom i kliznom simetrijom te je u ovom slučaju kvocijentna mnogostrukost Kleinova boca.

## Sferna geometrija $S^2$

Sfera se može uložiti u $\mathbb{R}^3$ pa je zato metrika na $S^2$ inducirana iz $\mathbb{R}^3$, tj. $ds^2 = dx^2+dy^2+dz^2$. Restrikcija svake izometrije od $E^3$ koja fiksira ishodište jest izometrija od $S^2$ i obratno, svaka izometrija od $S^2$ može se proširiti do izometrije od $E^3$ koja fiksira ishodište. Budući da je svaka izometrija od $E^3$ koja fiksira ishodište reprezentirana ortogonalnom matricom reda 3, imamo $\mathrm{Isom}(S^2) \cong O(3)$.

Svaka izometrija od $S^2$ koja čuva orijentaciju mora fiksirati pravac kroz ishodište ili neku glavnu kružnicu sfere. Zato je jedina izometrija od $S^2$ koja djeluje slobodno na $S^2$ antipodalno preslikavanje. Podgrupa $G$ generirana ovim preslikavanjem je reda 2 i kvocijentna ploha $S^2/G$ je projektivna ravnina.

## Hiperbolička geometrija $H^2$

$H^2$ možemo definirati kao gornju kompleksnu poluravninu $\mathbb{C}^+ = \{x + iy\colon y > 0\}$ zajedno s metrikom $ds^2 = \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2)$. Grupa $\mathrm{Isom}(H^2)$ sadržana je u skupu Möbiusovih tranformacija, preslikavanja oblika

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d},$$

gdje $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. Pokazuje se da je skup svih izometrija od $H^2$ koje čuvaju orijentaciju

$$\left\{z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}\colon a, b, c, d \in \mathbb{R},\ ad - bc > 0\right\}.$$

Promotrimo dvije diskretne podgrupe od $\mathrm{Isom}(H^2)$. Prva je grupa $G$ koja je generirana izometrijom $z \mapsto \lambda z$ za $\lambda > 1$. Orbita točke $w \in H^2$ je $\mathrm{orb}(w) = \{z \in H^2\colon z = \lambda w\}$ i ovaj se skup točaka nalazi na zraci koja prolazi ishodištem i točkom $w$. Kvocijentna mnogostrukost $H^2/G$ je kružni vijenac. Ukoliko za $G$ odaberemo podgrupu generiranu izometrijom $z \mapsto \lambda\bar{z}$ za $\lambda > 1$, umjesto kružnog vijenca dobit ćemo Möbiusovu vrpcu.

## 2.2 Trodimenzionalne geometrije

### Euklidska geometrija $E^3$

Euklidski prostor $E^3$ je prostor $\mathbb{R}^3$ zajedno s metrikom $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$.

Svaka se izometrija od $E^3$ može zapisati kao preslikavanje $x \mapsto Ax + b$, gdje je $A$ ortogonalna matrica reda 3, a $b \in \mathbb{R}^3$ vektor translacije. Zato možemo na prirodan način definirati homomorfizam grupa $\phi\colon \operatorname{Isom}(E^3) \to O(3)$ čija je jezgra grupa translacija od $E^3$.

Prema Bieberbachovom teoremu, ako je $G$ diskretna podgrupa od $\operatorname{Isom}(E^n)$, tada $G$ ima slobodnu Abelovu podgrupu konačnog indeksa u $G$ i ranga ne većeg od $n$. U slučaju $n = 3$ može se pokazati da to znači da je ili translacijska podgrupa od $G$ konačnog indeksa u $G$, ili je $G$ konačno proširenje od $\mathbb{Z}$, gdje $\mathbb{Z} \cong \{g\colon g \text{ je translacija}\}$.

### Sferna geometrija $S^3$

Sfernu geometriju čine 3-sfera i njena grupa izometrija. $S^3$ se može uložiti u $\mathbb{R}^4$ pa je zato metrika na $S^3$ inducirana iz $\mathbb{R}^4$, tj. $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + dw^2$.

Grupa izometrija od $S^3$ je $O(3)$, grupa ortogonalnih matrica reda 3. Svaka izometrija od $S^3$ koja mijenja orijentaciju ima fiksnu točku; zato se diskretne podgrupe od $\operatorname{Isom}(S^3)$ svode na podgrupe od $SO(3)$.

### Hiperbolička geometrija $H^3$

Hiperbolički se prostor može definirati kao gornji poluprostor euklidskog prostora, $\mathbb{R}^3_+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon z > 0\}$, zajedno s metrikom $ds^2 = \frac{1}{z^2}(dx^2 + dy^2 + dz^2)$.

Grupa izometrija od $H^3$ je generirana zrcaljenjima s obzirom na ravnine okomite na $xy$-ravninu i inverzijama s obzirom na sferu sa središtem na $xy$-ravnini. Svaka izometrija od $H^3$ koja čuva orijentaciju može se identificirati s Möbiusovom transformacijom. Ako točku $(x, y, z) \in H^3$ identificiramo s kvaternionom $w = x + yi + zj$, tada je Möbiusova transformacija preslikavanje

$$w \mapsto \frac{aw + b}{cw + d},$$

gdje $a, b, c \in \mathbb{C}$ i $ad - bc \neq 0$.

### Geometrija $S^2 \times \mathbb{R}$

Prostor $S^2 \times \mathbb{R}$ je Kartezijev produkt jedinične 2-sfere i realnog pravca s produktnom metrikom. Grupa izometrija od $S^2 \times \mathbb{R}$ se identificira s produktom grupa $\operatorname{Isom}(S^2)$ i $\operatorname{Isom}(\mathbb{R})$, tj. $\operatorname{Isom}(S^2 \times \mathbb{R}) \cong \operatorname{Isom}(S^2) \times \operatorname{Isom}(\mathbb{R})$. Postoji točno 7 mnogostrukosti bez ruba koje imaju geometrijsku strukturu modeliranu na $S^2 \times \mathbb{R}$.

## Geometrija $H^2 \times \mathbb{R}$

Prostor $H^2 \times \mathbb{R}$ je Kartezijev produkt hiperboličke ravnine i realnog pravca s produktnom metrikom. Njegova je grupa izometrija $\mathrm{Isom}(H^2 \times \mathbb{R}) \cong \mathrm{Isom}(H^2) \times \mathrm{Isom}(\mathbb{R})$.

Ako je $H$ je hiperbolička ploha, tada $H \times S^1$ i $H \times \mathbb{R}$ imaju geometrijsku strukturu modeliranu na $H^2 \times \mathbb{R}$. Budući da postoji beskonačno mnogo hiperboličkih ploha, postoji beskonačno mnogo mnogostrukosti koje imaju geometrijsku strukturu modeliranu na $H^2 \times \mathbb{R}$.

## Geometrija $\widetilde{SL_2\mathbb{R}}$

Grupa $SL_2\mathbb{R}$ je grupa realnih matrica reda 2 čija je determinanta jednaka 1 (i to je Liejeva grupa), a prostor $\widetilde{SL_2\mathbb{R}}$ je univerzalni prostor natkrivanja te grupe. Metriku na $\widetilde{SL_2\mathbb{R}}$ možemo izvesti na sljedeći način: jedinični tangencijalni svežanj od $H^2$ može se identificirati s $PSL_2\mathbb{R} = SL_2\mathbb{R}/\{\pm I\}$ (gdje $I$ predstavlja jediničnu matricu reda 2) koji je pokriven s $SL_2\mathbb{R}$. Sada povlačenjem metrike na $H^2$ možemo inducirati metriku na $\widetilde{SL_2\mathbb{R}}$.

## Nil **geometrija**

Nil geometrija je trodimenzionalna Liejeva grupa realnih gornje trokutastih matrica reda 3 oblika

$$\begin{bmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

zajedno sa svojom grupom izometrija. Geometrija se zove Nil jer je ova Liejeva grupa nilpotentna. Nil se može identificirati s $\mathbb{R}^3$ zajedno s metrikom $ds^2 = dx^2+dy^2+(dz-xdy)^2$.

## Sol **geometrija**

Sol je također Liejeva grupa. Sol možemo identificirati s $\mathbb{R}^3$ zajedno s množenjem danim s

$$(x, y, z)(x', y', z') = (x + e^{-z}x', y + e^{z}y', z + z') .$$

Metrika je tada dana s $ds^2 = e^{2z}dx^2 + e^{-2z}dy^2 + dz^2$. Geometrija se zove Sol jer je ova grupa rješiva.

# Poglavlje 3

# Geodetske i translacijske krivulje

## 3.1 Uvod

U diferencijalnoj geometriji pojam geodetske krivulje generalizira pojam pravca u ravnini.

**Definicija 3.1.1.** *Neka je $(M, g)$ Riemannova mnogostrukost. Kažemo da je $\gamma\colon I \to M$* ***geodetska krivulja*** *ako je vektorsko polje $t \mapsto \dot{\gamma}(t)$ paralelno duž $\gamma$ (u smislu Levi-Civita koneksije na $M$).*

Za geodetske je krivulje na Riemannovim mnogostrukostima poznato da lokalno minimiziraju duljinu luka između dvije svoje točke (koje su *dovoljno blizu*). Također, duljina vektora brzine geodetske krivulje je konstantna duž čitave krivulje, tj. $|\dot{\gamma}(t)|_g = \text{const}$.

Koristeći Einsteinovu konvenciju o indeksima ($i, j, k, l \in \{1, 2, 3\}$, $u^1 = x$, $u^2 = y$, $u^3 = z$), može se pokazati da geodetske krivulje zadovoljavaju sljedeći sustav običnih diferencijalnih jednadžbi drugog reda

$$\frac{d^2u^k}{dt^2} + \Gamma^k_{ij}\frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt} = 0\,, \tag{3.1}$$

gdje su $u^1$, $u^2$ i $u^3$ koordinatne komponente parametriziranih geodetskih krivulja, a $\Gamma^k_{ij}$ Christoffelovi simboli druge vrste koje računamo prema izrazu

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l}\right)g^{lk}\,, \tag{3.2}$$

gdje $(g^{lk})$ označava inverz matrice $g = (g_{ij})$.

Translacije se na Riemannovim 3-mnogostrukostima mogu uvesti na prirodan način. Ukoliko je zadan jedinični vektor u ishodištu te geodetska krivulja koja počinje u smjeru tog vektora, svaki se drugi vektor u ishodištu može translatirati duž te krivulje i na ovaj su način geodetske translacije definirane kao lokalne izometrije duž geodetskih krivulja.

No ukoliko je Riemannova mnogostrukost homogena (u smislu definicije 1.3.2), postoje izometrije koje svaku točku mogu preslikati u proizvoljnu odabranu drugu točku. Posebno, u homogenim Thurstonovim geometrijama $S^2\times\mathbb{R}$, $H^2\times\mathbb{R}$, Nil, Sol i $\widetilde{SL_2\mathbb{R}}$ translacije se mogu uvesti na prirodan način, uključujući i invarijantnu Riemannovu metriku (što je za neke od tih geometrija i opisano u prehodnom poglavlju).

Geodetske će se translacije u $\widetilde{SL_2\mathbb{R}}$, Nil i Sol geometriji razlikovati od gore spomenutih specifičnih translacija u tim geometrijama te ćemo uz ove translacije vezati posebnu klasu krivulja blisku geodetskima čiji naziv preuzimamo iz [9].

**Definicija 3.1.2.** *Neka je zadan jedinični vektor u ishodištu. Kažemo da je $\gamma\colon I \to M$* ***translacijska krivulja*** *ako se tangencijalni vektor u svakoj njenoj točki podudara sa slikom prethodno zadanog vektora pri translaciji u točku te krivulje.*

Iz ove definicije vidimo da se problem nalaženja translacijskih krivulja svodi na rješavanje sustava običnih diferencijalnih jednadžbi prvog reda - zato su translacijske krivulje jednostavnije od geodetskih.

U ovom ćemo poglavlju odrediti geodetske i translacijske krivulje u Sol i Nil geometriji.

**Napomena 3.1.3.** *Zbog homogenosti* Sol *i* Nil *geometrije (kao i svih 8 Thurstonovih geometrija), bez smanjenja općenitosti pretpostavljat ćemo da sve krivulje koje tražimo počinju u ishodištu u smjeru nekog zadanog jediničnog vektora.*

## 3.2 Geodetske krivulje u Sol geometriji

Kao što je već spomenuto u prethodnom poglavlju, Sol geometriju možemo identificirati s $\mathbb{R}^3$ pri čemu je grupovna struktura dana sljedećom operacijom množenja

$$(a, b, c)(x, y, z) = (x + ae^{-z}, y + be^{z}, z + c) \tag{3.3}$$

koje predstavlja translacije u ovoj geometriji (u ovom slučaju, translaciju točke $(a, b, c)$ za vektor $(x, y, z)$). U afinim koordinatama ovu operaciju možemo zapisati kao desno djelovanje

$$\begin{bmatrix} 1 & a & b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x & y & z \\ 0 & e^{-z} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x + ae^{-z} & y + be^{z} & z + c \end{bmatrix}. \tag{3.4}$$

Dakle, translaciju $T$ u Sol geometriji možemo zapisati kao preslikavanje

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x & y & z \\ 0 & e^{-z} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & z \end{bmatrix}. \tag{3.5}$$

Inverz ovog preslikavanja dan je s

$$\begin{bmatrix} 1 & x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -xe^{z} & -ye^{-z} & -z \\ 0 & e^{z} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

te definira povlak koordinatnih diferencijala $(0, dx, dy, dz)$ u točki $(1, x, y, z)$ na $(0, d\bar{x}, d\bar{y}, d\bar{z})$ u ishodištu $(1, 0, 0, 0)$ tako da vrijedi

$$\begin{bmatrix} 0 & dx & dy & dz \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -xe^{z} & -ye^{-z} & -z \\ 0 & e^{z} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & d\bar{x} & d\bar{y} & d\bar{z} \end{bmatrix}. \tag{3.7}$$

Odavde za Riemannovu metriku $g$ dobivamo

$$g = (d\bar{x})^2 + (d\bar{y})^2 + (d\bar{z})^2 = e^{2z}(dx)^2 + e^{-2z}(dy)^2 + (dz)^2,$$

drugačije zapisano,

$$(g_{ij}) = \begin{bmatrix} e^{2z} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2z} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.8}$$

Sada iz (3.2) direktnim računom dobivamo da su ne-nul Christoffelovi simboli jednaki

$$
\begin{aligned}
\Gamma^1_{13} &= \Gamma^1_{31} = 1\,,\\
\Gamma^2_{23} &= \Gamma^2_{32} = -1\,,\\
\Gamma^3_{11} &= -e^{2z}\,,\\
\Gamma^3_{22} &= e^{-2z}\,,
\end{aligned}
$$

pa iz sustava diferencijalnih jednadžbi (3.1) za geodetske krivulje dobivamo

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\frac{dx(t)}{dt}\frac{dz(t)}{dt} = 0\,,\\
&\frac{d^2y(t)}{dt^2} - 2\frac{dy(t)}{dt}\frac{dz(t)}{dt} = 0\,,\\
&\frac{d^2x(t)}{dt^2} - e^{2z(t)}\frac{dx(t)}{dt}\frac{dx(t)}{dt} + e^{-2z(t)}\frac{dy(t)}{dt}\frac{dy(t)}{dt} = 0\,,
\end{aligned}
$$

tj. u skraćenoj notaciji

$$\ddot{x} + 2\dot{x}\dot{z} = 0\,, \tag{3.9a}$$

$$\ddot{y} - 2\dot{y}\dot{z} = 0\,, \tag{3.9b}$$

$$\ddot{z} - e^{2z}\,(\dot{x})^2 + e^{-2z}\,(\dot{y})^2 = 0\,. \tag{3.9c}$$

Dobiveni sustav rješavamo uz početne uvjete

$$
\begin{aligned}
x(0) &= 0\,, &\qquad \dot{x}(0) &= u\,,\\
y(0) &= 0\,, &\qquad \dot{y}(0) &= v\,,\\
z(0) &= 0\,, &\qquad \dot{z}(0) &= w\,,
\end{aligned}
$$

tj. pretpostavljamo da krivulja prolazi ishodištem i da je u ishodištu zadan tangencijalni vektor $(u, v, w)$ na tu krivulju. Pretpostavimo dodatno i $u^2 + v^2 + w^2 = 1$ (odakle zapravo slijedi da je krivulja parametrizirana duljinom luka).

Pretpostavimo najprije $uvw \neq 0$. Tada iz jednadžbi (3.9a) i (3.9b) dobivamo

$$\frac{\ddot{x}}{\dot{x}} = -2\dot{z}\,, \qquad \frac{\ddot{y}}{\dot{y}} = 2\dot{z}$$

na nekoj okolini $t = 0$. Uvaživši početne uvjete, slijedi

$$\dot{x} = ue^{-2z}\,, \tag{3.10}$$

odakle dobivamo

$$x(t) = u\int_0^t e^{-2z(\tau)}d\tau\,. \tag{3.11}$$

Slično, imamo

$$\dot{y} = ve^{2z}\,, \tag{3.12}$$

odakle slijedi

$$y(t) = v\int_0^t e^{2z(\tau)}d\tau\,. \tag{3.13}$$

Uvrštavanjem (3.10) i (3.12) u (3.9c) slijedi

$$\ddot{z} - u^2e^{-2z} + v^2e^{2z} = 0\,.$$

Množenjem ove jednadžbe sa $2\dot{z}$, integriranjem i korištenjem početnih uvjeta dobivamo jednadžbu

$$(\dot{z})^2 + u^2e^{-2z} + v^2e^{2z} = 1 \tag{3.14}$$

koja se svodi na sljedeću jednadžbu sa separiranim varijablama

$$dt = \frac{\operatorname{sgn}(w)}{\sqrt{1 - u^2e^{-2z} - v^2e^{2z}}}dz\,, \tag{3.15}$$

čije rješenje nije elementarna funkcija (vidjeti [2]).

Pretpostavimo sada $uv \neq 0$ i $w = 0$. Iz (3.14) te $u^2 + v^2 = 1$ slijedi $\dot{z} = 0$ pa zbog početnih uvjeta imamo $z = 0$. Koristeći formule (3.11) i (3.13) dobivamo da je u ovom slučaju rješenje dano s

$$\begin{aligned} x(t) &= ut\,,\\ y(t) &= vt\,,\\ z(t) &= 0\,. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Promotrimo sada slučaj $u \neq 0$ i $v = 0$, tj. $u^2+w^2 = 1$. Tražimo $\dot{y}$ u obliku $\dot{y}(t) = c(t)e^{2z(t)}$. Iz (3.9b) dobivamo $\dot{c}(t) = 0$ pa zbog početnih uvjeta slijedi $c(t) = 0$, tj. $y(t) = 0$. Sada uvrštavanjem (3.10) u (3.9c) dobivamo jednadžbu

$$\ddot{z} - u^2e^{-2z} = 0\,.$$

Množenjem ove jednadžbe sa $\dot{z}$, integriranjem te uvažavanjem početnih uvjeta dobivamo

$$(\dot{z})^2 - u^2e^{-2z} = 1\,,$$

a zbrajanjem ove posljednje dvije jednadžbe slijedi

$$\ddot{z} + (\dot{z})^2 = 1\,.$$

Uvođenjem supstitucije $a(t) = e^{z(t)}$ imamo

$$\begin{aligned} \dot{a}(t) &= e^{z(t)}\dot{z}(t)\,, \\ \ddot{a}(t) &= e^{z(t)}(\dot{z}(t))^2 + e^{z(t)}\ddot{z}(t) \\ &= e^{z(t)}\left(\ddot{z}(t) + (\dot{z}(t))^2\right) \\ &= a(t)\,. \end{aligned}$$

Dakle, $a$ je zadovoljava Cauchyjevu zadaću

$$\begin{aligned} \ddot{a} - a &= 0\,, \\ \dot{a}(0) &= w\,, \\ a(0) &= 1 \end{aligned}$$

čije je rješenje $a(t) = \operatorname{ch} t + w \operatorname{sh} t$.

Uvedimo još i funkciju $b(t) = x(t)a(t)$. Prema Leibnizovom je pravilu

$$\ddot{b} = \ddot{x}a + 2\dot{x}\dot{a} + x\ddot{a}\,.$$

S druge strane, iz (3.10) slijedi $\dot{x}a^2 = u$ pa deriviranjem ove jednakosti dobivamo

$$\ddot{x}a + 2\dot{x}\dot{a} = 0\,,$$

a odavde dobivamo $\ddot{b} = x\ddot{a} = xa = b$. Dakle, $b$ zadovoljava Cauchyjevu zadaću

$$\begin{aligned} \ddot{b} - b &= 0\,, \\ \dot{b}(0) &= u\,, \\ b(0) &= 0 \end{aligned}$$

čije je rješenje $b(t) = u \operatorname{sh} t$. Zato u ovom slučaju dobivamo rješenje

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{b(t)}{a(t)} = u\frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t + w \operatorname{sh} t}\,, \\ y(t) &= 0\,, \\ z(t) &= \ln(a(t)) = \ln(\operatorname{ch} t + w \operatorname{sh} t)\,. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Sličnim računom u slučaju $u = 0$ i $v \neq 0$ dobivamo rješenje

$$\begin{aligned} x(t) &= 0\,, \\ y(t) &= v\frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t - w \operatorname{sh} t}\,, \\ z(t) &= -\ln(\operatorname{ch} t - w \operatorname{sh} t)\,. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Konačno, promotrimo slučaj $u =$, $v = 1$, $w^2 = 1$. Tada $\dot{x}$ i $\dot{y}$ tražimo u obliku

$$\dot{x}(t) = a(t)e^{-2z(t)}, \quad \dot{y}(t) = b(t)e^{2z(t)}.$$

Jednadžbe (3.9a) i (3.9b) povlače $a(t) = b(t) = 0$ pa slijedi $x(t) = y(t) = 0$. Uvrštavanjem u (3.9c) i uvažavanjem početnih uvjeta dobivamo da je rješenje u ovom slučaju

$$\begin{aligned} x(t) &= 0\,, \\ y(t) &= 0\,, \\ z(t) &= \operatorname{sgn}(w)t\,. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Sve dosad izrečeno možemo formalizirati u obliku sljedećeg teorema.

**Teorem 3.2.1.** *Geodetske su krivulje u* Sol *geometriji, uz početne uvjete*

$$\begin{aligned} x(0) &= 0\,, & \dot{x}(0) &= u\,, & & \\ y(0) &= 0\,, & \dot{y}(0) &= v\,, & u^2 + v^2 + w^2 &= 1\,, \\ z(0) &= 0\,, & \dot{z}(0) &= w\,, & & \end{aligned}$$

*dane sljedećim formulama:*

1° *u slučaju* $uvw \neq 0$*, formulama (3.11), (3.13) i (3.15),*

2° *u slučaju* $uv \neq 0$*,* $w = 0$*, formulama (3.16),*

3° *u slučaju* $uw \neq 0$*,* $v = 0$*, formulama (3.17),*

4° *u slučaju* $vw \neq 0$*,* $u = 0$*, formulama (3.18),*

5° *u slučaju* $u = 0$*,* $v = 0$*,* $w^2 = 1$*, formulama (3.19).*

## 3.3 Translacijske krivulje u Sol geometriji

Sada ćemo odrediti novu klasu krivulja u Sol geometriji. Za zadani vektor u ishodištu $(1, 0, 0, 0)$

$$u = \dot{x}(0)\,, \quad v = \dot{y}(0)\,, \quad w = \dot{z}(0)\,,$$

definiramo njegovu sliku u točki $(1, x(t), y(t), z(t))$ krivulje pomoću inverza formule (3.4) tako da vrijedi

$$\begin{bmatrix} 0 & u & v & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x(t) & y(t) & z(t) \\ 0 & e^{-z(t)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{z(t)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dot{x}(t) & \dot{y}(t) & \dot{z}(t) \end{bmatrix}. \tag{3.20}$$

Odavde dobivamo sljedeći sustav diferencijalnih jednadžbi

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= ue^{-z(t)}\,, \\ \dot{y}(t) &= ve^{z(t)}\,, \\ \dot{z}(t) &= w\,, \end{aligned} \tag{3.21}$$

uz početne uvjete

$$\begin{aligned} x(0) &= 0\,, \qquad & \dot{x}(0) &= u\,, \\ y(0) &= 0\,, \qquad & \dot{y}(0) &= v\,, \\ z(0) &= 0\,, \qquad & \dot{z}(0) &= w\,. \end{aligned}$$

Iz ovog sustava direktnim računamo dobivamo

$$\begin{aligned} z(t) &= wt\,, \\ y(t) &= \int_0^t ve^{w\tau} d\tau = \frac{v}{w}(e^{wt} - 1)\,, \\ x(t) &= \int_0^t ue^{-w\tau} d\tau = -\frac{u}{w}(e^{-wt} - 1)\,. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Vidimo da su krivulje opisane ovim formulama jednostavnije (i prirodnije) u Sol geometriji nego geodetske krivulje. Kao u [9], zvat ćemo ih **translacijske krivulje**.

Ukoliko su translacijske krivulje parametrizirane duljinom luka, formulama (3.22) možemo definirati sferu radijusa $r$ sa središtem u ishodištu i parametrima dužine i širine $\varphi$ i $\theta$ tim redom. Uvođenjem standardnih sfernih koordinata

$$\begin{aligned} u &= \cos\theta \cos\varphi\,, \qquad & -\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi\,, \\ v &= \cos\theta \sin\varphi\,, \qquad & -\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\,, \\ w &= \sin\theta\,, \end{aligned}$$

dobivamo

$$\begin{aligned} x(\theta,\varphi) &= (1 - e^{-r\sin\theta})\operatorname{ctg}\theta\cos\varphi\,, \\ y(\theta,\varphi) &= (e^{r\sin\varphi} - 1)\operatorname{ctg}\theta\sin\varphi\,, \\ z(\theta,\varphi) &= r\sin\theta\,. \end{aligned} \tag{3.23}$$

**Teorem 3.3.1.** *Translacijske krivulje u* Sol *geometriji koje počinju u ishodištu u smjeru* $(u, v, w)$ *opisane su formulama (3.22). Translacijske krivulje parametrizirane duljinom luka opisuju translacijsku sferu sa središtem u ishodištu formulama (3.23).*

## 3.4 Geodetske krivulje u Nil geometriji

Nil geometrija je geometrija realne Heisenbergove grupe $L(\mathbb{R})$, tj. grupe svih realnih gornje trokutastih matrica oblika

$$\begin{bmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Standardno definirana operacija matričnog množenja

$$\begin{bmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a+x & c+xb+z \\ 0 & 1 & b+y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

definira grupovnu operaciju među točkama

$$(x, y, z)(a, b, c) = (a + x, b + y, c + xb + z) \tag{3.24}$$

koju ponovno možemo interpretirati kao translaciju (točke $(a, b, c)$ za vektor $(x, y, z)$). Ovu operaciju također možemo zapisati u afinim koordinatama (matrično) kao

$$\begin{bmatrix} 1 & a & b & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & x & y & z \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x+a & y+b & z+bx+c \end{bmatrix}. \tag{3.25}$$

Iz inverza ovog preslikavanja možemo dobiti već spomenuti povlak koordinatnih diferencijala $(0, dx, dy, dz)$ u točki $(1, x, y, z)$ na $(0, d\bar{x}, d\bar{y}, d\bar{z})$ u ishodištu $(1, 0, 0, 0)$

$$\begin{bmatrix} 0 & dx & dy & dz \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -x & -y & xy-z \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & d\bar{x} & d\bar{y} & d\bar{z} \end{bmatrix} \tag{3.26}$$

te će za Riemannovu metriku slijediti

$$\begin{aligned} g &= (d\bar{x})^2 + (d\bar{y})^2 + (d\bar{z})^2 \\ &= (dx)^2 + (dy)^2 + (-xdy + dz)^2 \\ &= (dx)^2 + (1 + x^2)(dy)^2 - 2xdydz + (dz)^2 . \end{aligned}$$

Drugačije zapisano,

$$(g_{ij}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+x^2 & -x \\ 0 & -x & 1 \end{bmatrix}, \tag{3.27}$$

a odavde za inverz imamo

$$(g^{lk}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & x & 1+x^2 \end{bmatrix}. \tag{3.28}$$

Sada iz (3.2) dobivamo da su ne-nul Christoffelovi simboli jednaki

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{22} &= \frac{1}{2}(0+0-2x)\cdot 1 = -x\,,\\
\Gamma^1_{23} = \Gamma^1_{32} &= \frac{1}{2}(0+0-(-1))\cdot 1 = \frac{1}{2}\,,\\
\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} &= \frac{1}{2}(2x+0-0)\cdot 1 + \frac{1}{2}(-1+0-0)\cdot x = \frac{1}{2}x\,,\\
\Gamma^2_{13} = \Gamma^2_{31} &= \frac{1}{2}(-1+0-0)\cdot x + \frac{1}{2}(0+0-0)\cdot x = -\frac{1}{2}\,,\\
\Gamma^3_{12} = \Gamma^3_{21} &= \frac{1}{2}(2x+0-0)\cdot x + \frac{1}{2}(-1+0-0)\cdot(1+x^2) = \frac{1}{2}(x^2-1)\,,\\
\Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} &= \frac{1}{2}(-1+0-0)\cdot x + \frac{1}{2}(0+0-0)\cdot(1+x^2) = -\frac{1}{2}x\,,
\end{aligned}$$

pa iz (3.1) dobivamo sljedeći sustav diferencijalnih jednadžbi za geodetske krivulje

$$\ddot{x} - (\dot{y})^2 x + \dot{y}\dot{z} = 0\,, \tag{3.29a}$$

$$\ddot{y} + \dot{x}\dot{y}x - \dot{x}\dot{z} = 0\,, \tag{3.29b}$$

$$\ddot{z}\dot{x}\dot{y}(x^2-1) + \dot{x}\dot{z}x = 0\,. \tag{3.29c}$$

Sustav rješavamo uz početne uvjete

$$\begin{aligned}
x(0) &= 0\,, & \dot{x}(0) &= u\,,\\
y(0) &= 0\,, & \dot{y}(0) &= v\,,\\
z(0) &= 0\,, & \dot{z}(0) &= w\,,
\end{aligned}$$

te uz pretpostavku $u^2 + v^2 + w^2 = 1$ (tj. da je krivulja parametrizirana duljinom luka). Kao u [8], sustav (3.29) svest ćemo na sustav običnih diferencijalnih jednadžbi prvog reda.

Množenjem jednadžbe (3.29b) sa $-x$ i zbrajanjem s (3.29c) dobivamo

$$-\ddot{y}x + \ddot{z} - \dot{x}\dot{y} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}(\dot{z} - x\dot{y}) = 0\,,$$

a odavde integriranjem i uvažavanjem početnih uvjeta slijedi

$$\dot{z} = w + x\dot{y} \Leftrightarrow z = wt + \int_0^t x(\tau)\dot{y}(\tau)d\tau\,. \tag{3.30}$$

Uvrštavanjem ove jednakosti u (3.29a) i (3.29b), tim redom, dobivamo

$$\ddot{x} + w\dot{y} = 0\,,$$
$$\ddot{y} - w\dot{x} = 0\,,$$

a odavde integriranjem i uvažavanjem početnih uvjeta slijedi

$$\dot{x} + wy = u\,, \tag{3.31a}$$
$$\dot{y} - wx = v\,. \tag{3.31b}$$

Sada razlikujemo slučajeve u ovisnosti o $w$. Ukoliko je $w = 0$, iz sustava (3.31) i jednakosti (3.30) direktnim računom dobivamo

$$\begin{aligned} x(t) &= ut\,, \\ y(t) &= vt\,, \\ z(t) &= \frac{uv}{2}t^2\,. \end{aligned} \tag{3.32}$$

Ukoliko je $w \neq 0$, tada deriviranjem jednadžbe (3.31a) i uvrštavanjem u (3.31b) dobivamo običnu diferencijalnu jednadžbu drugog reda

$$\ddot{x} + w^2 x + wv = 0\,,$$

čije je rješenje (uz zadane početne uvjete)

$$x(t) = \frac{1}{w}\left[u \sin wt + v \cos wt - v\right]\,. \tag{3.33}$$

Sada iz (3.31a) direktnim računom slijedi

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{w}\left[-u \cos wt + v \sin wt + u\right]\,, \\ z(t) &= wt + \frac{u^2+v^2}{2w}t - \frac{1}{w^2}\Big[(u^2 - v^2)\sin wt \cos wt \\ &\quad +2v^2 \sin wt + 2uv(\cos^2 wt + \cos wt - 2)\Big]\,. \end{aligned} \tag{3.34}$$

**Teorem 3.4.1.** *Geodetske su krivulje u* Nil *geometriji, uz početne uvjete*

$$\begin{aligned} x(0) &= 0\,, \qquad \dot{x}(0) = u\,, \\ y(0) &= 0\,, \qquad \dot{y}(0) = v\,, \\ z(0) &= 0\,, \qquad \dot{z}(0) = w\,, \end{aligned}$$

*dane sljedećim formulama:*

1° *u slučaju* $w \neq 0$, *formulama (3.33) i (3.34),*

2° *u slučaju* $w = 0$, *formulama (3.32).*

## 3.5 Translacijske krivulje u Nil geometriji

Pomoću formule (3.25) možemo odrediti translacijske krivulje analogno kao u Sol geometriji. Za zadani vektor u ishodištu $(1, 0, 0, 0)$

$$u = \dot{x}(0)\,, \quad v = \dot{y}(0)\,, \quad w = \dot{z}(0)\,,$$

definiramo njegovu sliku u točki $(1, x(t), y(t), z(t))$ krivulje tako da vrijedi

$$\begin{bmatrix} 0 & u & v & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -x(t) & -y(t) & x(t)y(t) - z(t) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -x(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dot{x}(t) & \dot{y}(t) & \dot{z}(t) \end{bmatrix}, \tag{3.35}$$

odakle dobivamo sustav diferencijalnih jednadžbi

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= u\,, \\ \dot{y}(t) &= v\,, \\ \dot{z}(t) &= vx(t) + w\,, \end{aligned} \tag{3.36}$$

uz početne uvjete

$$\begin{aligned} x(0) &= 0\,, & \dot{x}(0) &= u\,, \\ y(0) &= 0\,, & \dot{y}(0) &= v\,, \\ z(0) &= 0\,, & \dot{z}(0) &= w\,. \end{aligned}$$

Direktnim računom dobivamo rješenje

$$\begin{aligned} x(t) &= ut\,, \\ y(t) &= vt\,, \\ z(t) &= \frac{uv}{2}t^2 + wt\,. \end{aligned} \tag{3.37}$$

Analogno se definiraju i translacijske sfere: uz $u^2+v^2+w^2 = 1$, stavljanjem $u = \cos\theta\cos\varphi$, $v = \cos\theta\sin\varphi$, $w = \sin\theta$ imamo

$$\begin{aligned} x(\theta, \varphi) &= r\cos\theta\cos\varphi\,, \\ y(\theta, \varphi) &= r\cos\theta\sin\varphi\,, \\ z(\theta, \varphi) &= \frac{r^2}{2}\cos^2\theta\cos\varphi\sin\varphi + r\sin\theta\,. \end{aligned} \tag{3.38}$$

**Teorem 3.5.1.** *Translacijske krivulje u* Nil *geometriji koje počinju u ishodištu u smjeru* $(u, v, w)$ *opisane su formulama (3.37). Translacijske krivulje parametrizirane duljinom luka opisuju translacijsku sferu sa središtem u ishodištu formulama (3.38).*

# Poglavlje 4

# Minimalne translacijske plohe

## 4.1 Koneksija

**Definicija 4.1.1.** *Neka je $\pi\colon E \to M$ vektorski svežanj na $M$ te $\mathcal{E}(M)$ prostor glatkih prereza od $E$.* ***Koneksija*** *od $E$ je preslikavanje*

$$\nabla\colon \mathcal{T}(M) \times \mathcal{E}(M) \to \mathcal{E}(M)$$

*koje označavamo $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$ i koje zadovoljava sljedeća svojstva*

1° $\nabla_X Y$ *je $C^\infty(M)$-linearno u $X$,*

2° $\nabla_X Y$ *je $\mathbb{R}$-linearno u $Y$,*

3° $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + (Xf)Y$.

*$\nabla_X Y$ čitamo* ***kovarijantna derivacija*** *od $Y$ u smjeru $X$. Ukoliko je $E$ upravo tangencijalni svežanj $TM$, pripadnu koneksiju zovemo* ***linearna koneksija****.*

Ukoliko je $\{E_i\}$ lokalni reper za $TM$ na otvorenom skupu $U \subset M$, koristeći Einsteinovu konvenciju o indeksima pišemo

$$\nabla_{E_i} E_j = \Gamma^k_{ij} E_k,$$

gdje su funkcije $\Gamma^k_{ij}$ **Christoffelovi simboli** (korišteni za određivanje geodetskih krivulja u prethodnom poglavlju).

**Definicija 4.1.2.** *Neka je $(M, g)$ Riemannova mnogostrukost. Za linearnu koneksiju $\nabla$ na $M$ kažemo da je* ***usklađena*** *ili* ***kompatibilna*** *sa $g$ ako vrijedi*

$$\nabla_X g(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z).$$

**Definicija 4.1.3.** *Za glatka vektorska polja $V, W$ na glatkoj mnogostrukosti $M$ definira se njihova* ***Liejeva zagrada***

$$[V, W]\colon C^\infty(M) \to C^\infty(M), \quad [V, W]f = VWf - WVf.$$

**Definicija 4.1.4.** *Za linearnu koneksiju kažemo da je* ***simetrična*** *ako vrijedi*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y].$$

**Teorem 4.1.5** (Fundamentalni teorem Riemannove geometrije)**.** *Neka je $(M, g)$ Riemannova mnogostrukost. Tada postoji jedinstvena linearna koneksija $\nabla$ na $M$ koja je simetrična i usklađena sa $g$.*

**Definicija 4.1.6.** *Linearna koneksija iz prethodnog teorema zove se* ***Riemannova*** *ili* ***Levi-Civita koneksija*** *od $g$.*

Dokaz teorema 4.1.5 može se naći u [7, teorem 8.6.]. Pojam (Riemannove) koneksije iskoristit ćemo kako bismo u idućem odjeljku definirali pojmove srednje zakrivljenosti i minimalne plohe.

## 4.2 Srednja zakrivljenost i minimalne plohe

Plohe u Thurstonovim geometrijama shvaćat ćemo kao imerzirane podmnogostrukosti, tj. slike injektivnih imerzija. Za početak uvodimo sljedeću definiciju.

**Definicija 4.2.1.** *Neka su $M$ i $N$ glatke mnogostrukosti. Za glatko preslikavanje $F\colon M \to N$ kažemo da je **imerzija** ako je push-forward tog preslikavanja, $F_*\colon T_pM \to T_{F(p)}N$, injektivan u svakoj točki od $M$.*

Neka je $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ Riemannova mngostrukost i $\widetilde{\nabla}$ pripadna Riemannova koneksija od $\widetilde{g}$ (u našem će slučaju ovo biti neka Thurstonovih geometrija Sol ili Nil). Nadalje, neka je $M$ orijentabilna ploha, $x\colon M \to \widetilde{M}$ izometrička imerzija. Označimo sa $g := x^*\widetilde{g}$ te $\nabla$ induciranu Riemannovu metriku i koneksiju na $M$ (tim redom). Neka je $N$ Gaussovo preslikavanje od $M$ (preslikavanje koje svakoj točki od $M$ pridružuje jedinični vektor normale na $M$ u toj točki).

**Definicija 4.2.2.** *Uz prethodno navedene oznake, definiramo **drugu fundamentalnu formu** imerzije $x$ kao preslikavanje*

$$\sigma : \mathcal{T}M \times \mathcal{T}M \to \mathbb{R}, \quad \sigma(X,Y) = \widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_X Y, N).$$

Vrijedi Gaussova formula

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \sigma(X,Y)N. \tag{4.1}$$

**Definicija 4.2.3.** *Za $p \in M$ definiramo **Weingartenovo preslikavanje** (**operator oblika plohe**)*

$$A_p\colon T_pM \to T_pM, \quad A_p(v) = -\widetilde{\nabla}_X(N),$$

*gdje je $X$ tangencijalno vektorsko polje na $M$ koje proširuje $v$ u točki $p$.*

Weingartenovo preslikavanje $A_p$ je samoadjungirani endomorfizam u odnosu na metriku na $M$, tj. $g(A_p(u), v) = g(u, A_p(v))$. Također, veza Weingartenovog preslikavanja i druge fundamentalne forme dana je relacijom

$$\sigma(X,Y) = \widetilde{g}(A_pX, Y)$$

što je direktna posljedica relacije $-\widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_X N, Y) = \widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_X Y, N)$ (vidjeti [6] ili [4]).

**Definicija 4.2.4.** ***Srednja zakrivljenost** imerzije u točki $p \in M$ definira se kao*

$$H(p) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(A_p).$$

**Definicija 4.2.5.** *Kažemo da je M* **minimalna ploha** *ukoliko srednja zakrivljenost iščezava u svakoj njenoj točki, tj. ako za svaku točku $p \in M$ vrijedi $H(p) = 0$.*

Uzmimo sada u svakoj tangencijalnoj ravnini bazu $\{e_1, e_2\}$ te zapišimo

$$A_p(e_1) = -\widetilde{\nabla}_{e_1} N = a_{11} e_1 + a_{12} e_2,$$

$$A_p(e_2) = -\widetilde{\nabla}_{e_2} N = a_{21} e_1 + a_{22} e_2.$$

Ukoliko sa $E$, $F$ i $G$ označimo koeficijente prve fundamentalne forme na $M$, tj.

$$E = \widetilde{g}(e_1, e_1), \quad F = \widetilde{g}(e_1, e_2), \quad \widetilde{g}(e_2, e_2),$$

množenjem gornjih jednakosti redom sa $e_1$ i $e_2$ dobivamo

$$a_{11} = \frac{\begin{vmatrix} -\widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_{e_1} N, e_1) & F \\ -\widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_{e_1} N, e_2) & G \end{vmatrix}}{EG - F^2} = \frac{\begin{vmatrix} -\widetilde{g}(N, \widetilde{\nabla}_{e_1} e_1) & F \\ -\widetilde{g}(N, \widetilde{\nabla}_{e_1} e_2) & G \end{vmatrix}}{EG - F^2},$$

$$a_{22} = \frac{\begin{vmatrix} E & -\widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_{e_2} N, e_1) \\ F & -\widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_{e_2} N, e_2) \end{vmatrix}}{EG - F^2} = \frac{\begin{vmatrix} E & -\widetilde{g}(N, \widetilde{\nabla}_{e_2} e_1) \\ F & -\widetilde{g}(N, \widetilde{\nabla}_{e_2} e_2) \end{vmatrix}}{EG - F^2}.$$

Dakle, srednja je zakrivljenost dana izrazom

$$H = \frac{1}{2}(a_{11} + a_{22}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{G\widetilde{g}(N, \widetilde{\nabla}_{e_1} e_1) - 2F\widetilde{g}(N, \widetilde{\nabla}_{e_1} e_2) + E\widetilde{g}(N, \widetilde{\nabla}_{e_2} e_2)}{EG - F^2}.$$

U slučaju minimalne plohe (kada je brojnik gornjeg izraza jednak nuli), vektor $N$ možemo zamijeniti njemu proporcionalnim vektorom $\overline{N}$. Tada je ploha minimalna ako i samo ako vrijedi

$$G\widetilde{g}(\overline{N}, \widetilde{\nabla}_{e_1} e_1) - 2F\widetilde{g}(\overline{N}, \widetilde{\nabla}_{e_1} e_2) + E\widetilde{g}(\overline{N}, \widetilde{\nabla}_{e_2} e_2) = 0. \tag{4.2}$$

## 4.3 Minimalne translacijske plohe u Sol geometriji

### Translacijske plohe

Kažemo da je ploha $M$ u euklidskom prostoru translacijska ploha ukoliko je dana grafom $z(x,y) = f(x) + g(y)$, gdje su $f$ i $g$ glatke funkcije definirane na nekom otvorenom intervalu na $\mathbb{R}$. Scherk je 1835. godine pokazao da su, uz ravnine, jedine minimalne translacijske plohe dane grafom

$$z(x,y) = \frac{1}{a}\ln|\cos(ax)| - \frac{1}{a}\ln|\cos(ay)| = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{\cos(ax)}{\cos(ay)}\right|$$

za $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Znamo da je u Sol geometriji grupovna struktura dana operacijom $*$ definiranom izrazom

$$(a,b,c) * (x,y,z) = (x + ae^{-z}, y + be^{z}, z + c).$$

Ova grupovna operacija omogućava definiciju translacijske plohe analognu onoj u euklidskoj geometriji.

**Definicija 4.3.1.** ***Translacijska ploha*** *$M(\alpha,\beta)$ u* Sol *geometriji dana je parametrizacijom $x(s,t) = \alpha(s) * \beta(t)$, gdje su $\alpha\colon I \to$* Sol*, $\beta\colon J \to$* Sol *krivulje smještene u dvjema koordinatnim ravninama od $\mathbb{R}$ (a $I, J \subset \mathbb{R}$ su otvoreni intervali).*

Budući da operacija $*$ nije komutativna, za svaki izbor krivulja $\alpha$ i $\beta$ možemo konstruirati dvije različite translacijske plohe, $M(\alpha,\beta)$ i $M(\beta,\alpha)$. Razlikovat ćemo 6 tipova translacijskih ploha

$$\begin{array}{lll}
M(\alpha,\beta) \text{ i } M(\beta,\alpha), & \alpha\subset\{z=0\},\ \beta\subset\{y=0\}, & \text{(tipovi I i IV)},\\
M(\alpha,\beta) \text{ i } M(\beta,\alpha), & \alpha\subset\{z=0\},\ \beta\subset\{x=0\}, & \text{(tipovi II i V)},\\
M(\alpha,\beta) \text{ i } M(\beta,\alpha), & \alpha\subset\{y=0\},\ \beta\subset\{x=0\}, & \text{(tipovi III i VI)}.
\end{array}$$

Za svaki od tipova I, II i III promotrit ćemo jednadžbu (4.2) koja je kriterij određivanja minimalnih ploha u navedenim tipovima (naravno, račun za tipove IV, V i VI provodi se analogno). Za svaki od navednih tipova ploha jednadžba (4.2) bit će obična diferencijalna jednadžba drugog reda; za tip III, zbog kompliciranog oblika koji ta jednadžba poprima, navest ćemo samo primjere minimalnih ploha.

### Klasifikacija minimalnih translacijskih ploha tipa I

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su obje krivulje $\alpha$ i $\beta$ grafovi glatkih funkcija (budući da minimalne translacijske plohe proučavamo lokalno). Dakle, u ovom slučaju promatramo krivulje $\alpha(s) = (s, f(s), 0)$ te $\beta(t) = (t, 0, g(t))$. Pripadna translacijska ploha $M(\alpha,\beta)$ dana je parametrizacijom

$$x(s,t) = \alpha(s) * \beta(t) = (s + t, f(s), g(t)).$$

Ortonormiran reper $\{E_1, E_2, E_3\}$ za tangencijalni prostor u Sol geometriji dan je s

$$E_1 = e^{-z}\frac{\partial}{\partial x}, \quad E_2 = e^{z}\frac{\partial}{\partial y}, \quad E_3 = \frac{\partial}{\partial z},$$

te je Riemannova koneksija $\widetilde{\nabla}$ Sol geometrije obzirom na ovaj reper dana s (vidjeti [6])

$$\widetilde{\nabla}_{E_1}E_1 = -E_3, \quad \widetilde{\nabla}_{E_1}E_2 = 0, \quad \widetilde{\nabla}_{E_1}E_3 = -E_1,$$

$$\widetilde{\nabla}_{E_2}E_1 = 0, \quad \widetilde{\nabla}_{E_2}E_2 = E_3, \quad \widetilde{\nabla}_{E_2}E_3 = -E_2,$$

$$\widetilde{\nabla}_{E_3}E_1 = 0, \quad \widetilde{\nabla}_{E_3}E_3 = 0, \quad \widetilde{\nabla}_{E_3}E_3 = 0.$$

Za vektore baze tangencijalne ravnine plohe $M$ imamo

$$e_1 = x_s = (1, f', 0) = e^g E_1 + f' e^{-g} E_2,$$

$$e_2 = x_t = (1, 0, g') = e^g E_1 + g' E_3,$$

te je vektor normale plohe dan s

$$\overline{N} = (f'g'e^{-g})E_1 - (g'e^g)E_2 - f'E_3.$$

Koeficijenti prve fundamentalne forme dani su s

$$E = e^{2g} + f'^2 e^{-2g}, \quad F = e^{2g}, \quad G = e^{2g} + g'^2.$$

S druge strane,

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_{e_1}e_1 &= e^g\widetilde{\nabla}_{E_1}(e^g E_1 + f'e^{-g}E_2) + f'e^{-g}\widetilde{\nabla}_{E_2}(e^g E_1 + f'e^{-g}E_2) \\
&= e^g(e^g(-E_3) + e^{-g}\cdot 0\cdot E_1 + f'e^{-g}\cdot 0 + e^{-g}\cdot 0\cdot E_2) \\
&\quad + f'e^{-g}\left(e^g\cdot 0 + e^g\cdot 0\cdot E_1 + f'e^{-g}E_3 + e^g\cdot\frac{f''}{f'}\cdot e^{-g}E_2\right) \\
&= f''e^{-g}E_2 + (f'^2e^{-2g} - e^{2g})E_3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_{e_1}e_2 &= e^g\widetilde{\nabla}_{E_1}(e^g E_1 + g'E_3) + f'e^{-g}\widetilde{\nabla}_{E_2}(e^g E_1 + g'E_3) \\
&= e^g(e^g(-E_3) + e^{-g}\cdot 0\cdot E_1 + g'E_1 + e^{-g}\cdot 0\cdot E_3) \\
&\quad + f'e^{-g}(e^g\cdot 0 + e^g\cdot 0\cdot E_1 + g'(-E_2) + e^g\cdot 0\cdot E_3) \\
&= g'e^g E_1 - f'g'e^{-g}E_2 - e^{-2g}E_3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_{e_2} e_2 &= e^g \widetilde{\nabla}_{E_1}(e^g E_1 + g' E_3) + g' \widetilde{\nabla}_{E_3}(e^g E_1 + g' E_3) \\
&= e^g(e^g(-E_3) + e^{-g} \cdot 0 \cdot E_1 + g' E_1 + e^{-g} \cdot 0 \cdot E_3) \\
&\quad + g' \left( e^g \cdot 0 + e^g E_1 + g' \cdot 0 + \frac{g''}{g'} \cdot E_3 \right) \\
&= 2g' e^g E_1 + (g'' - e^{2g}) E_3,
\end{aligned}$$

pa imamo

$$\begin{aligned}
\widetilde{g}(\overline{N}, \widetilde{\nabla}_{e_1} e_1) &= -f'' g' - f'^3 e^{-2g} + f' e^{2g}, \\
\widetilde{g}(\overline{N}, \widetilde{\nabla}_{e_1} e_1) &= 2f' g'^2 + f' e^{2g}, \\
\widetilde{g}(\overline{N}, \widetilde{\nabla}_{e_1} e_1) &= 2f' g'^2 - f' g'' + f' e^{2g}.
\end{aligned}$$

Sada iz jednadžbe (4.2) slijedi da je ploha $M$ minimalna ako i samo ako vrijedi

$$-f'' g'^3 - e^{2g}(f'' g' + f' g'^2 + f' g'') + e^{-2g} f'^3 (g'^2 - g'') = 0. \tag{4.3}$$

Promotrimo najprije neke jednostavnije slučajeve. Uočimo da vrijedi (4.3) ukoliko je neka od funkcija $f$ ili $g$ konstantna. Ukoliko je $f$ konstantna, tj. $f(s) = y_0$, tada je ploha $M(\alpha, \beta)$ zapravo ravnina $y = y_0$. Ukoliko je $g$ konstantna, tj. $g(t) = z_0$, tada je ploha $M(\alpha, \beta)$ ravnina $z = z_0$.

**Napomena 4.3.2.** *Ukoliko krivulje $\alpha$ i $\beta$ zapišemo kao $\alpha(s) = (f(s), s, 0)$ te $\beta(t) = (g(t), 0, t)$, parametrizacija plohe $M(\alpha, \beta)$ dana je s $x(s,t) = (f(s) + g(t), s, t)$. Pretpostavimo da su obje funkcije $f$ i $g$ konstantne (tj. $f' = 0$ i $g' = 0$). Tada imamo*

$$e_1 = (0, 1, 0) = e^{-g} E_2, \quad e_2 = (0, 0, 1) = E_3,$$

*pa za vektor normale na plohu možemo uzeti $\overline{N} = E_1$. Budući da su odgovarajuće kovarijantne derivacije*

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_{e_1} e_1 &= e^{-g} \widetilde{\nabla}_{E_2} e^{-g} E_2 \\
&= e^{-g}(e^{-g} E_3 + e^t \cdot 0 \cdot E_2) \\
&= e^{-2g} E_3,
\end{aligned}$$

$$\widetilde{\nabla}_{e_1} e_2 = e^{-g} \widetilde{\nabla}_{E_2} E_3 = -e^{-g} E_2,$$

$$\widetilde{\nabla}_{e_2} e_2 = \widetilde{\nabla}_{E_3} E_3 = 0,$$

*vidimo da je*

$$\widetilde{g}(\overline{N}, \widetilde{\nabla}_{e_1} e_1) = \widetilde{g}(\overline{N}, \widetilde{\nabla}_{e_1} e_2) = \widetilde{g}(\overline{N}, \widetilde{\nabla}_{e_2} e_2) = 0,$$

*pa očito vrijedi (4.2). Dakle, u slučaju da su $f$ i $g$ konstantne, pripadna ploha je minimalna. Drugim riječima, ravnine $x = x_0$ su također minimalne translacijske plohe tipa I.*

Od sada pa nadalje pretpostavimo da su obje funkcije $f$ i $g$ nekonstantne. Podijelimo jednadžbu (4.3) sa $f'^3 g'^3$:

$$-\frac{f''}{f'^3} - e^{2g}\left(\frac{f''}{f'^3}\cdot\frac{1}{g'^2} + \frac{1}{f'^2}\cdot\frac{1}{g'} + \frac{g''}{g'^3}\cdot\frac{1}{f'^2}\right) + e^{-2g}\cdot\frac{g'^2 - g''}{g'^3} = 0. \tag{4.4}$$

Uočimo da su prvi i treći pribrojnik u (4.4) redom funkcije koje ovise samo o $s$ i $t$. Zato deriviranjem obzirom na $S$ i $t$ dobivamo

$$\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}\left[e^{2g}\left(\frac{f''}{f'^3}\cdot\frac{1}{g'^2} + \frac{1}{f'^2}\cdot\frac{1}{g'} + \frac{g''}{g'^3}\cdot\frac{1}{f'^2}\right)\right] = 0.$$

Raspisivanjem dobivamo

$$\left(\frac{f''}{f'^3}\right)\left(\frac{1}{g'} - \frac{g''}{g'^3}\right) - 2\frac{f''}{f'^3} - \left(\frac{f''}{f'^3}\right)\left(\left(\frac{g''}{g'^3}\right)' + \frac{g''}{g'^2}\right) = 0. \tag{4.5}$$

Razlikujemo nekoliko slučajeva.

1. Pretpostavimo $f'' = 0$. Tada je $f(s) = as + b$ za neke $a, b \in \mathbb{R}$. Iz jednadžbe (4.3) slijedi

   $$e^{2g}(g'' + g'^2) = a^2 e^{-2g}(-g'' + g'^2).$$

   Uvedimo supstituciju $g(t) = h(t) + m$, pri čemu $m$ biramo tako da je $a^2 = e^{4m}$, te označimo još $\zeta(t) = 2h(t)$. Iz posljednje jednadžbe dobivamo $2\zeta''(e^{\zeta} + e^{-\zeta}) = -\zeta'^2(e^{\zeta} - e^{-\zeta})$, tj.

   $$2\zeta''\operatorname{ch}\zeta = -\zeta'^2\operatorname{sh}\zeta.$$

   Množenjem ove jednadžbe sa $\zeta'$ slijedi

   $$(\zeta'^2\operatorname{ch}\zeta)' = 0,$$

   odakle dobivamo

   $$\zeta'^2 = \frac{c^2}{\operatorname{ch}\zeta}, \quad c > 0.$$

   Korjenovanjem i integriranjem imamo

   $$\int_0^t \sqrt{\operatorname{ch}\zeta(\tau)}\zeta'(\tau)d\tau = ct + d, \quad d \in \mathbb{R}.$$

   Uočimo da stavljanjem $t = 0$ dobivamo $d = 0$. Budući da je funkcija $I(t) = \int_0^t \sqrt{\operatorname{ch}\tau}d\tau$ strogo rastuća (jer je podintegralna funkcija pozitivna), to jednadžba $I(\zeta(t)) = ct$ ima jedinstveno rješenje $\zeta(t) = I^{-1}(ct)$.

2. Pretpostavimo sada $g'' - g'^2 = 0$. Budući da $g$ nije konstantna, iz ove pretpostavke (ukoliko ju shvatimo kao običnu diferencijalnu jednadžbu sa separiranim varijablama po $g'$) slijedi $g(t) = -\ln|t+\lambda| + \mu$, gdje su $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Sada (4.3) povlači

$$(1 + e^{2\mu})f'' \cdot (t + \lambda) - 2e^{2\mu} f' = 0.$$

   Lijeva strana ove jednakosti je polinom $t$ pa slijedi $f' = f'' = 0$, što je kontradikcija s pretpostavkom da $f$ nije konstantna.

3. Pretpostavimo sada $f''(g'' - g^2) \neq 0$. Iz (4.5) slijedi da postoji $a \in \mathbb{R}$ takav da

$$\frac{\left(\frac{f''}{f'^3}\right)'}{\left(\frac{f''}{f'^3}\right)} = a = \frac{\left(\frac{g''}{g'^3}\right)' + \frac{g''}{g'^2} + 2}{\frac{1}{g'} - \frac{g''}{g'^3}}. \tag{4.6}$$

   (a) Pretpostavimo $a = 0$. Tada je $f'' = bf'^3$ za neki $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Odavde slijedi

$$\frac{1}{f'^2} = -2bs + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

   S druge strane iz druge jednakosti u (4.6) slijedi

$$\left(\frac{g''}{g'^3} - \frac{1}{g'}\right)' + 2 = 0, \tag{4.7}$$

   tj.

$$\frac{g''}{g'^3} - \frac{1}{g'} = -2t + d, \quad d \in \mathbb{R}.$$

   Uvrštavanjem dobivenih izraza za $f$ i $g$ u (4.4) imamo

$$-b\left(1 + \frac{e^{2g}}{g'^2}\right) + (2bs - c)e^{2g}\left(\frac{g''}{g'^3} + \frac{1}{g'}\right) - e^{-2g}\left(\frac{g''}{g'^3} - \frac{1}{g'}\right) = 0. \tag{4.8}$$

   Budući da je lijeva strana ove jednadžbe polinom u $s$, zbog $b \neq 0$ slijedi da mora biti

$$\frac{g''}{g'^3} + \frac{1}{g'} = 0.$$

   Zajedno s (4.7) ovo daje

$$\frac{1}{g'} = t - \frac{d}{2},$$

   odnosno,

$$g(t) = \ln\left(t - \frac{d}{2}\right) + \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Za slobodni koeficijent polinoma u (4.8) sada imamo

$$-b\left(1+e^{2\alpha}\left(t-\frac{d}{2}\right)^4\right)+\frac{2e^{-2\alpha}}{t-\frac{d}{2}}=0.$$

Raspisivanjem (korištenjem binomne formule) dobivamo polinom u $t$ čiji je vodeći koeficijent $be^{2\alpha}$. Dakle, mora biti $b=0$, kontradikcija.

(b) Promotrimo sada slučaj $a\neq 0$. Iz prve jednakosti u (4.6) dobivamo da postoji $b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ takav da

$$\frac{f''}{f'^3}=be^{as}. \tag{4.9}$$

Zato postoji $c\in\mathbb{R}$ takav da

$$-\frac{1}{2f'^2}=\frac{b}{a}e^{as}+c. \tag{4.10}$$

Uvrštavanjem (4.9) i (4.10) u (4.4) slijedi

$$-be^{as}\left[1+e^{2g}\left(\frac{1}{g'^2}-\frac{2}{a}\left(\frac{1}{g'}+\frac{g''}{g'^3}\right)\right)\right]+2ce^{2g}\left(\frac{1}{g'}+\frac{g''}{g'^3}\right)+e^{-2g}\left(\frac{1}{g'}-\frac{g''}{g'^3}\right)=0.$$

Ovo je polinom u $e^{as}$ pa oba njegova koeficijenta moraju biti jednaka nuli. Slijedi da $g$ rješava sljedeće dvije diferencijalne jednadžbe

$$1+e^{2g}\left(\frac{1}{g'^2}-\frac{2}{a}\left(\frac{1}{g'}+\frac{g''}{g'^3}\right)\right)=0, \tag{4.11}$$

$$2ce^{2g}\left(\frac{1}{g'}+\frac{g''}{g'^3}\right)+e^{-2g}\left(\frac{1}{g'}-\frac{g''}{g'^3}\right)=0. \tag{4.12}$$

Ukoliko je $c=0$, iz (4.12) slijedi $g''-g'^2=0$. Kontradikcija, dakle, $c\neq 0$. Iz (4.6) dobivamo diferencijalnu jednadžbu za $\varphi=\frac{1}{g'}-\frac{g''}{g'^3}$:

$$\varphi'+a\varphi-2=0$$

čije je rješenje

$$\varphi=\frac{1}{g'}-\frac{g''}{g'^3}=\frac{2}{a}+\lambda e^{-at},\quad \lambda\in\mathbb{R}. \tag{4.13}$$

Uvrštavanjem (4.13) u (4.12) slijedi

$$2ce^{2g}\left(\frac{2}{g'}-\frac{2}{a}-\lambda e^{-at}\right)+e^{-2g}\left(\frac{2}{a}+\lambda e^{-at}\right)=0.$$

Odavde slijedi

$$\frac{1}{g'} = \frac{1}{4ac}e^{-at-4g}(-1+2ce^{4g})(2e^{at}+a\lambda). \tag{4.14}$$

Ponovnim uvrštavanjem u (4.13) imamo

$$a\lambda + 4c^2e^{8g(t)}(2e^{at}+a\lambda) - 4ce^{4g(t)}(3e^{at}+a\lambda) = 0.$$

Rješavanjem dobivene kvadratne jednadžbe u $e^{4g(t)}$ slijedi

$$e^{4g(t)} = \frac{3e^{at}+a\lambda \pm \sqrt{9e^{2at}+4a\lambda e^{at}}}{2c(2e^{at}+a\lambda)}.$$

Bez smanjenja općenitosti odaberimo pozitivan predznak ispred korijena u gornjoj jednakosti (analogno ćemo zaključivati i ako odaberemo negativan predznak). Zajedno sa (4.14) dobivamo

$$24e^{at} + 11a\lambda + 4\sqrt{9e^{2at}+4a\lambda e^{at}} + 3a\lambda e^{-at}\sqrt{9e^{2at}+4a\lambda e^{at}} = 0.$$

Kvadriranjem i sređivanjem dobivamo da se gornja jednakost može zapisati kao polinom u $e^{at}$ (vidjeti [6])

$$108e^{3at} + 62a\lambda e^{2at} - 14a^2\lambda^2e^{at} - 9a^3\lambda^2 = 0.$$

S jedne strane imamo polinom kojemu svi koeficijenti nisu 0, a s druge strane imamo nulpolinom. Kontradikcija.

Ovim smo razmatranjima u potpunosti odredili minimalne translacijske plohe tipa I.

**Teorem 4.3.3.** *Minimalne translacijske plohe u* Sol *geometriji tipa I su ravnine* $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ *te plohe čija je parametrizacija dana s* $x(s,t) = (s+t, f(s), g(t))$, *gdje je* $f(s) = as + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ *i*

$$g(t) = \frac{1}{2}I^{-1}(ct) + m, \quad I(t) = \int_0^t \sqrt{\operatorname{ch}\tau}\,d\tau,\ e^{4m} = a^2.$$

## Klasifikacija minimalnih translacijskih ploha tipa II

Neka sada $\alpha$ leži u ravnini $z = 0$ i $\beta$ u ravnini $x = 0$. Ponovno (bez smanjenja općenitosti) možemo pretpostaviti da su obje krivulje grafovi glatkih funkcija te uzimamo $\alpha(s) = (s, f(s), 0)$ i $\beta(t) = (0, t, g(t))$. Parametrizacija pripadne translacijske plohe $M(\alpha,\beta)$ dana je s

$$x(s,t) = \alpha(s) * \beta(t) = (s, t + f(s), g(t)).$$

Za vektore baze tangencijalne ravnine plohe $M$ imamo

$$e_1 = x_s = (1, f', 0) = e^g E_1 + e^{-g} f' E_2,$$

$$e_2 = x_t = (0, 1, g') = e^{-g} E_2 + g' E_3.$$

Koeficijenti prve fundamentalne forme su

$$E = e^{2g} + f'^2 e^{-2g}, \quad F = f' e^{-2g}, \quad G = e^{-2g} + g'^2.$$

Za vektor normale na plohu $M$ možemo uzeti $\overline{N} = (f'g'e^{-g})E_1 - g'e^g E_2 + E_3$. Kovarijantne derivacije su

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_{e_1} e_1 &= e^g \widetilde{\nabla}_{E_1}(e^g E_1 + e^{-g} f' E_2) + e^{-g} f' \widetilde{\nabla}_{E_2}(e^g E_1 + e^{-g} f' E_2) \\
&= e^g (e^g(-E_3) + e^{-g} \cdot 0 \cdot E_1 + e^{-g} f' \cdot 0 + e^{-g} \cdot e^{-g} f'' E_2) \\
&\quad + e^{-g} f' (e^g \cdot 0 + e^g \cdot 0 \cdot E_1 + e^{-g} f' E_3 + e^g \cdot 0 \cdot E_2) \\
&= f'' e^{-g} E_2 + (f'^2 e^{-2g} - e^{2g}) E_3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_{e_1} e_2 &= e^g \widetilde{\nabla}_{E_1}(e^{-g} E_2 + g' E_3) + e^{-g} f' \widetilde{\nabla}_{E_2}(e^{-g} E_2 + g' E_3) \\
&= e^g (e^{-g} \cdot 0 + e^{-g} \cdot 0 \cdot E_2 + g' E_1 + e^{-g} \cdot 0 \cdot E_3) \\
&\quad + e^{-g} f' (e^{-g} E_3 + e^g \cdot 0 \cdot E_2 + g'(-E_2) + e^g \cdot 0 \cdot E_3) \\
&= g' e^g E_1 - f' g' e^{-g} E_2 + e^{-2g} f' E_3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_{e_2} e_2 &= e^{-g} \widetilde{\nabla}_{E_2}(e^{-g} E_2 + g' E_3) + g' \widetilde{\nabla}_{E_3}(e^{-g} E_2 + g' E_3) \\
&= e^{-g} (e^{-g} E_3 + e^g \cdot 0 \cdot E_2 + g'(-E_2) + e^{-g} \cdot 0 \cdot E_3) \\
&\quad + g' \left( e^{-g} \cdot 0 + (-e^{-g}) E_2 + g' \cdot 0 + \frac{g''}{g'} \cdot E_3 \right) \\
&= -2g' e^{-g} E_2 + (g'' + e^{-2g}) E_3.
\end{aligned}$$

Nadalje,

$$\widetilde{g}(\overline{N}, \widetilde{\nabla}_{e_1} e_1) = -f'' g' + f'^2 e^{-2g} - e^{2g},$$

$$\widetilde{g}(\overline{N}, \widetilde{\nabla}_{e_1} e_2) = 2 f' g'^2 + f' e^{-2g},$$

$$\widetilde{g}(\overline{N}, \widetilde{\nabla}_{e_1} e_1) = 2 g'^2 + g'' + e^{-2g}.$$

Sada iz jednadžbe (4.2) dobivamo da je ploha minimalna ako i samo ako vrijedi

$$-f'' g'^3 + e^{-2g}(f'^2 (g'' - g'^2) - f'' g') + e^{2g}(g'' + g'^2) = 0. \tag{4.15}$$

Kao i slučaju ploha tipa I, promotrimo najprije neke jednostavnije slučajeve. Ukoliko je $f' = 0$, tj. $f$ je konstantna, gornja se jednadžba svodi na

$$g'' + g'^2 = 0.$$

Ako je $g' = 0$, tada je $g$ konstantna ($g(t) = z_0$) i ploha $M(\alpha,\beta)$ je ravnina $z = z_0$. Nekonstantna rješenja ove diferencijalne jednadžbe dana su s

$$g(t) = \ln|t + \lambda| + \mu, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

**Napomena 4.3.4.** *Stavljanjem $\alpha(s) = (f(s), 0, s)$ i uzimanjem da je $f$ konstantna analogno kao u slučaju ploha tipa I također dobivamo da su ravnine $x = x_0$ minimalne translacijske plohe tipa II (vidjeti [6] za oblik jednadžbe (4.2) u ovom slučaju).*

Pretpostavimo sada da su $f$ i $g$ nekonstantne. Podijelimo jednadžbu (4.15) sa $g'^3$

$$-f'' + e^{-2g}\left(f'^2\left(\frac{g''}{g'^3} - \frac{1}{g'}\right) - f'' \cdot \frac{1}{g'^2}\right) + e^{2g}\left(\frac{g''}{g'^3} + \frac{1}{g'}\right) = 0. \tag{4.16}$$

Budući da su prvi i treći pribrojnik u gornjoj jednadžbi redom funkcije koje ovise samo o $s$ i $t$, deriviranjem po $s$ i $t$ dobivamo

$$\frac{\partial^2}{\partial s \partial t}\left[e^{-2g}\left(\frac{f''}{g'^2} + \frac{f'^2}{g'} - f'^2 \cdot \frac{g''}{g'^3}\right)\right] = 0.$$

Raspisivanjem slijedi

$$f'f''\left(\frac{g''}{g'^3}\right)' - f'f'' \cdot \frac{g''}{g'^2} + f''' \cdot \frac{g''}{g'^3} + 2f'f'' + \frac{f'''}{g'} = 0,$$

odnosno,

$$f'f''\left(\left(\frac{g''}{g'^3}\right)' - \frac{g''}{g'^2} + 2\right) + f'''\left(\frac{g''}{g'^3} + \frac{1}{g'}\right) = 0. \tag{4.17}$$

Sada ponovno razlikujemo slučajeve.

1. Pretpostavimo $f'' = 0$. Tada $f(s) = as + b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Iz (4.15) slijedi

   $$a^2 e^{-2g}(g'' - g'^2) + e^{2g}(g'' + g'^2) = 0.$$

   Supstitucijom $\zeta(t) = 2(g(t) - m)$, $e^{4m} = a^2$ dobivamo

   $$\zeta'^2 = \frac{c^2}{\operatorname{ch}\zeta}, \quad c > 0,$$

   odakle izvodimo rješenje analogno kao u slučaju ploha tipa I.

2. Pretpostavimo $g'' + g'^2 = 0$. Budući da $g$ nije konstantna, slijedi

$$g'(t) = \ln|t + \lambda| + \mu, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

a jednadžba (4.15) postaje

$$(1 + e^{2\mu})f'' \cdot (t + \lambda) + 2f' = 0.$$

Odavde slijedi $f'' = f' = 0$, tj. da je $f$ konstantna. Kontradikcija.

3. Pretpostavimo sada $f''(g'' + g'^2) = 0$. Iz (4.17) slijedi da postoji $a \in \mathbb{R}$ takav da

$$-\frac{f'''}{f'f''} = a = \frac{\left(\frac{g''}{g'^3}\right)' - \frac{g''}{g'^2} + 2}{\frac{g''}{g'^3} + \frac{1}{g'}}. \tag{4.18}$$

(a) U slučaju $a = 0$ imamo $f'(s) = bs + c$, $b, c \in \mathbb{R}$. Jednadžba (4.15) povlači

$$-bg'^3 + e^{-2g}((bs + c)^2(g'' - g^2) - bg') + e^{2g}(g'' + g'^2) = 0. \tag{4.19}$$

Desna strana ove jednadžbe je polinom u $s$ pa njegov vodeći koeficijent mora biti jednak nuli. Zato $g'' - g'^2 = 0$ pa

$$g(t) = -\ln(-dt + \alpha), \quad d, \alpha \in \mathbb{R},\ d \neq 0.$$

Budući da i slobodni član u (4.19) mora bit jednak nuli, imamo

$$-b \cdot \frac{d^3}{(-dt + \alpha)^3} - bd(-dt + \alpha) + \frac{2d^2}{(-dt + \alpha)^4} = 0,$$

odnosno,

$$2d^2 - bd^3(-dt + \alpha) - db(-dt + \alpha)^3 = 0.$$

Posljednja jednakost povlači $db = 0$. Kontradikcija.

(b) Neka je $a \neq 0$. Prve jednakost u (4.18) daje

$$\frac{f'''}{f''} = -af', \quad a \in \mathbb{R}$$

odnosno,

$$f'' = be^{-af}, \quad b \neq 0.$$

Množenjem sa $f'$ dobivamo $f'f'' = bf0e^{-af}$, a odavde

$$f'^2 = -\frac{2b}{a}e^{-af} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Uvrštavanjem dobivenih vrijednosti od $f$ i pripadnih derivacija u (4.17) dobivamo

$$-be^{-af}\left[1+e^{-2g}\cdot\frac{1}{g'^2}+\frac{2}{a}\left(\frac{g''}{g'^3}-\frac{1}{g'}\right)\right]+2ce^{-2g}\left(\frac{g''}{g'^3}-\frac{1}{g'}\right)+e^{2g}\left(\frac{g''}{g'^3}-\frac{1}{g'}\right)=0.$$

Budući da je $b \neq 0$ i $f \neq 0$, zaključujemo

$$1+e^{-2g}\cdot\frac{1}{g'^2}+\frac{2}{a}\left(\frac{g''}{g'^3}-\frac{1}{g'}\right)=0, \tag{4.20}$$

$$2ce^{-2g}\left(\frac{g''}{g'^3}-\frac{1}{g'}\right)+e^{2g}\left(\frac{g''}{g'^3}+\frac{1}{g'}\right)=0. \tag{4.21}$$

Iz (4.18), stavljanjem $\varphi = \frac{g''}{g'^3}+\frac{1}{g'}$, dobivamo diferencijalnu jednadžbu

$$\varphi' - a\varphi + 2 = 0$$

čije je rješenje

$$\frac{g''}{g'^3}+\frac{1}{g'}=\frac{2}{a}+\lambda e^{at}, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{4.22}$$

Iz (4.21) i (4.22) slijedi

$$2ce^{-2g}\left(-\frac{2}{g'}+\frac{2}{a}+\lambda e^{at}\right)+e^{2g}\left(\frac{2}{a}+\lambda e^{at}\right)=0.$$

Sada imamo

$$\frac{1}{g'}=\frac{(2c+e^{4g})(2+a\lambda e^{at})}{4ac}. \tag{4.23}$$

Uvrštavanjem (4.23) u (4.22) dobivamo

$$a\lambda e^{at+8g}+4c^2(2+a\lambda e^{at})+4c(3+a\lambda e^{at})e^{4g}=0.$$

Rješavanjem kvadratne jednadžbe i logaritmiranjem slijedi

$$g(t)=\frac{1}{4}\ln\left(\frac{2ce^{-at}}{a\lambda}(-(3+a\lambda e^{at})\pm\sqrt{9+4a\lambda e^{at}})\right).$$

Računanjem $g'$ i uvrštavanjem u (4.23) dobivamo

$$4(6+\sqrt{9+4a\lambda e^{at}})+a\lambda e^{at}(11+3\sqrt{9+4a\lambda e^{at}})=0.$$

Kvadriranjem i sređivanjem dobivamo

$$36a^3\lambda^3e^{3at}+56a^2\lambda^2e^{2at}-248a\lambda e^{at}-432=0,$$

odakle dobivamo kontradikciju kao i u slučaju ploha tipa I.

**Teorem 4.3.5.** *Minimalne translacijske plohe u* Sol *geometriji tipa II su ravnine* $x = x_0$ *i* $z = z_0$ *te plohe čija je parametrizacija* $x(s,t) = (s, t + f(s), g(t))$*, gdje su mogućnosti za funkcije* $f$ *i* $g$*:*

*1°* $f(s) = a$ *i* $g(t) = \ln|t + \lambda| + \mu$*,* $a, \lambda\mu \in \mathbb{R}$*,*

*2°* $f(s) = as + b$*,* $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *i* $g(t) = \frac{1}{2}I^{-1}(ct) + m$*, gdje je* $I(t) = \int_0^t \sqrt{\operatorname{ch}\tau}\,d\tau$*,* $c > 0$*,* $e^{4m} = a^2$*.*

## Primjeri minimalnih translacijskih ploha tipa III

U ovom slučaju promatramo krivulje $\alpha(s) = (s, 0, f(s))$ i $\beta(t) = (0, t, g(t))$. Pripadna translacijska ploha $M(\alpha,\beta)$ parametrizirana je s

$$x(s,t) = (s, te^{f(s)}, f(s) + g(t)).$$

Za ovaj tip ploha račun je nešto kompliciraniji u odnosu na one za prva dva tipa. Navest ćemo samo konačne rezultate računa (vidjeti [6]) i opisati neke posebne slučajeve za dobiveni oblik jednadžbe (4.2). Vektori baze za tangencijalnu ravninu plohe $M$ su

$$e_1 = (1, tf'e^f, f') = e^{f+g}E_1 + tf'e^{-g}E_2 + f'E_3,$$

$$e_2 = (0, e^f, g') = e^{-g}E_2 + g'E_3.$$

Koeficijenti prve fundamentalne forme (fundamentalne veličine prvog reda) su

$$E = e^{2(f+g)} + t^2 f'^2 e^{-2g}, \quad F = tf'e^{-2g} + f'g', \quad G = e^{-2g} + g'^2.$$

Vektor normale je dan s

$$\overline{N} = f'(1 - tg')e^{-(f+g)}E_1 + g'e^g E_2 - E_3.$$

Kovarijantne derivacije su

$$\widetilde{\nabla}_{e_1} e_1 = (2f'e^{f+g})E_1 + t(f'' - f'^2)e^{-g}E_2 + (f'' - e^{2(f+g)} + t^2 f'^2 e^{-2g})E_3,$$

$$\widetilde{\nabla}_{e_1} e_2 = g'e^{f+g}E_1 - tf'g'e^{-g}E_2 + tf'e^{-2g}E_3,$$

$$\widetilde{\nabla}_{e_2} e_2 = -2g'e^{-g}E_2 + (g'' + e^{-2g})E_3.$$

Množenjem sa $\overline{N}$ slijedi

$$\widetilde{g}(\overline{N}, \widetilde{\nabla}_{e_1} e_1) = 2f'^2 - 3tf'^2 g' + tf'' g' - f'' e^{2(f+g)} - t^2 f'^2 e^{-2g},$$

$$\widetilde{g}(\overline{N}, \widetilde{\nabla}_{e_1} e_2) = f' g' - 2tf' g'^2 - tf' e^{-2g},$$

$$\widetilde{g}(\overline{N}, \widetilde{\nabla}_{e_2} e_2) = -2g'^2 - g'' - e^{-2g}.$$

Jednadžba (4.2) postaje

$$\begin{aligned} &- e^{2(f+g)}(g'' + g'^2) + e^{-2g}(t^2 f'^2 g'^2 + f'^2 - t^2 f'^2 g'' - 3tf'^2 g' + tf'' g' - f'') \\ &\qquad - 2f' g'^2 + tf'^2 g'^3 + tf'' g'^3 - f'' g'^2 - f'^2 g'' = 0. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Kao što je već rečeno, zbog kompleksnosti dobivene jednadžbe promotrit ćemo samo neke posebne slučajeve.

1. Neka je $f$ konstantna. Tada iz (4.24) slijedi $g'' + g'^2 = 0$. Iz prijašnjeg računa znamo da su rješenja ove jednadžbe dana s $g(t) = k$ ($k \in \mathbb{R}$) te $g(t) = \ln|t + \lambda| + \mu$ ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$). Također znamo da je u slučaju da je $g$ konstantna ploha $M$ zapravo ravnina $z = z_0$.

2. Ako je $g$ konstantna, iz (4.24) dobivamo $e^{f'^2 - f''} = 0$. Analogno kao u prethodnom slučaju dobivamo rješenja $f(t) = k$ za $k \in \mathbb{R}$ (i ploha $M$ je ravnina $z = z_0$) te $f(s) = -\ln|s + \lambda| + \mu$ za $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

3. U slučaju $tg' - 1 = 0$, tj. $g(t) = \ln|t| + \mu$, $\mu \in \mathbb{R}$, (4.24) vrijedi za svaki izbor funkcije $f$.

4. Neka je $f'' = 0$, tj. $f(s) = bs + c$, $b, c \in \mathbb{R}$. Jednadžba (4.24) postaje

   $$-e^{2(f+g)}(g'^2 + g'') + b^2(-2g'^2 + tg'^3 - g'') + b^2 e^{-2g}(1 - 3tg' + t^2 g'^2 - t^2 g'') = 0.$$

   Iz ove jednadžbe slijedi da je $e^{-2(f+g)}(g'' + g'^2)$ funkcija koja ovisi samo o $t$. Zbog $b \neq 0$, slijedi $g'' + g'^2 = 0$, tj. $g(t) = \ln|t + \lambda| + \mu$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Uvrštavanjem dobivenih izraza za $f$ i $g$ u (4.24) dobivamo

   $$\lambda b^2 e^{-2\mu}((1 + e^{2\mu})t + \lambda(e^{2\mu} - 1)) = 0.$$

   Dobiveni izraz je polinom u $t$ pa slijedi $\lambda = 0$. Tada je $tg' - 1 = 0$ pa se ovaj slučaj svodi na prethodni.

5. Neka je $g'' + g'^2 = 0$, tj. $g(t) = \ln|t + \lambda| + \mu$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Jednadžba (4.24) postaje

$$\lambda((\lambda(-1 + e^{2\mu}) + (1 + e^{2\mu})t)f'^2 + (1 + e^{2\mu})(t + \mu)f'') = 0.$$

   Ukoliko je $\lambda = 0$, imamo $tg' - 1 = 0$, tj. problem smo ponovno sveli na 3. slučaj. Ukoliko je $\lambda \neq 0$, lijeva strana gornje jednadžbe je polinom u $t$ pa dobivamo dvije diferencijalne jednadžbe

$$(-1 + e^{2\mu})f'^2 + (1 + e^{2\mu})f'' = 0, \quad f'' + f'^2 = 0.$$

   Shvaćanjem ovih jednadžbi kao sustava dvije linearne jednadžbe s nepoznanicama $f''$ i $f'^2$ dobivamo $f'^2 = 0$, tj. $f$ je konstatna funkcija. Ovime smo ovaj slučaj sveli na prvi.

**Propozicija 4.3.6.** *Neke minimalne translacijske plohe tipa u III u* Sol *geometriji su ravnine $x = x_0$ i $z = z_0$ te plohe čija je parametrizacija $x(s,t) = (s, te^{f(s)}, f(s) + g(t))$, gdje su mogućnosti za funkcije $f$ i $g$:*

*1°* $f(s) = a$ *i* $g(t) = \ln|t + \lambda| + \mu$, $a, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

*2°* $f(s) = -\ln|s + \lambda| + \mu$, $g(t) = a$, $a, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

*3°* $g(t) = \ln|t| + \mu$, *$f$ proizvoljna glatka funkcija.*

## 4.4 Minimalne translacijske plohe u Nil geometriji

U ovom ćemo odjeljku model Nil geometrije korišten u prethodnom poglavlju reparametrizirati (i time redefinirati grupovnu operaciju potrebnu za definiciju translacijskih ploha). Označimo sa $g = dx^2 + dy^2 + (-xdy + dz)^2$ Riemannovu metriku u modelu Nil geometrije korištenom u prethodnom poglavlju, tj.

$$g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+x^2 & -x \\ 0 & -x & 1 \end{bmatrix}.$$

**Propozicija 4.4.1.** *Preslikavanje*

$$\Phi\colon (\mathbb{R}^3, g) \to (\mathbb{R}^3, \widetilde{g}), \quad \Phi(x,y,z) = \left(x, y, z - \frac{1}{2}xy\right),$$

*je izometrički difeomorfizam, pri čemu je*

$$\widetilde{g} = \begin{bmatrix} 1+\frac{y^2}{4} & -\frac{1}{4}xy & \frac{y}{2} \\ -\frac{1}{4}xy & 1+\frac{x^2}{4} & -\frac{x}{2} \\ \frac{y}{2} & -\frac{x}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Metriku $\widetilde{g}$ možemo zapisati i kao

$$\widetilde{g} = dx^2 + dy^2 + \left(dz + \frac{1}{2}(ydx - xdy)\right)^2.$$

Dakle, $(\mathbb{R}^3, \widetilde{g})$ možemo shvaćati kao novi model Nil geometrije.

**Napomena 4.4.2.** *U ovom, tzv.* linearnom modelu Nil *geometrije, translacijske krivulje postaju pravci (ova tvrdnja direktno slijedi iz definicije preslikavanja* $\Phi$ *te jednadžbi translacijskih krivulja iz prethodnog poglavlja; za više detalja vidjeti [1]). Zato je ovaj model* Nil *geometrije pogodan za njenu lakšu vizualizaciju.*

**Propozicija 4.4.3.** *U linearnom je modelu* Nil *geometrije grupovna operacija* $*$*, tj. translacija točke* $(a,b,c)$ *za vektor* $(x,y,z)$ *dana izrazom*

$$(a,b,c) * (x,y,z) = \left(a + x, b + y, c + z + \frac{ay - xb}{2}\right).$$

Dokaz ove propozicije može se naći u [1, 3. poglavlje] gdje se uvodi linearni model Nil geometrije. Do kraja ovog odjeljka sve račune izvodit ćemo (bez naglašavanja) isključivo u ovom modelu.

Definicija translacijske plohe u Nil geometriji potpuno je analogna onoj u Sol geometriji (do na grupovnu operaciju).

**Definicija 4.4.4.** ***Translacijska ploha*** *$M(\alpha,\beta)$ u* Nil *geometriji dana je parametrizacijom $x(s,t) = \alpha(s) * \beta(t)$, gdje su $\alpha\colon I \to$* Nil*, $\beta\colon J \to$* Nil *krivulje smještene u dvjema koordinatnim ravninama od $\mathbb{R}$ (a $I, J \subset \mathbb{R}$ su otvoreni intervali).*

Prema [4], ponovno ćemo razlikovati 6 tipova translacijskih ploha

$$\begin{array}{lll} M(\alpha,\beta) \text{ i } M(\beta,\alpha), & \alpha \subset \{y=0\},\ \beta \subset \{x=0\}, & \text{(tipovi I i IV)}, \\ M(\alpha,\beta) \text{ i } M(\beta,\alpha), & \alpha \subset \{y=0\},\ \beta \subset \{z=0\}, & \text{(tipovi II i V)}, \\ M(\alpha,\beta) \text{ i } M(\beta,\alpha), & \alpha \subset \{x=0\},\ \beta \subset \{z=0\}, & \text{(tipovi III i VI)}. \end{array}$$

Minimalne translacijske plohe odredit ćemo potpuno analogno kao u Sol geometriji - za svaki od tih tipova ponovno ćemo promotriti oblik koji poprima jednadžba (4.2).

Ortonormiran reper $\{E_1, E_2, E_3\}$ za tangencijalni prostor u Nil geometriji (obzirom na metriku $\widetilde{g}$) dan je s (vidjeti [4])

$$E_1 = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2}\frac{\partial}{\partial z}, \quad E_2 = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2}\frac{\partial}{\partial z}, \quad E_3 = \frac{\partial}{\partial z}$$

te je Riemannova (Levi-Civita) koneksija $\widetilde{\nabla}$ Nil geometrije obzirom na ovaj reper dana s

$$\begin{array}{lll} \widetilde{\nabla}_{E_1} E_1 = 0, & \widetilde{\nabla}_{E_1} E_2 = \frac{1}{2} E_3, & \widetilde{\nabla}_{E_1} E_3 = -\frac{1}{2} E_2, \\ \widetilde{\nabla}_{E_2} E_1 = -\frac{1}{2} E_3, & \widetilde{\nabla}_{E_2} E_2 = 0, & \widetilde{\nabla}_{E_2} E_3 = \frac{1}{2} E_1, \\ \widetilde{\nabla}_{E_3} E_1 = -\frac{1}{2} E_2, & \widetilde{\nabla}_{E_3} E_3 = \frac{1}{2} E_1, & \widetilde{\nabla}_{E_3} E_3 = 0. \end{array}$$

## Klasifikacija minimalnih translacijskih ploha tipa I

Promatramo krivulje $\alpha(s) = (s, 0, f(s))$ i $\beta(t) = (0, t, g(t))$. Pripadna translacijska ploha $M(\alpha,\beta)$ dana je parametrizacijom

$$x(s,t) = \left(s, t, f(s) + g(t) + \frac{st}{2}\right).$$

Vektori baze tangencijalne ravnine plohe $M$ dani su s

$$e_1 = x_s = \left(1, 0, f' + \frac{t}{2}\right) = E_1 + (f' + t)E_3,$$

$$e_2 = x_t = \left(0, 1, g' + \frac{s}{2}\right) = E_2 + g' E_3.$$

Za vektor normale možemo uzeti

$$\overline{N} = (f' + t)E_1 + g' E_2 - E_3.$$

Koeficijenti prve fundamentalne forme dani su s

$$E = 1 + (f' + t)^2, \quad F = (f' + t)g', \quad G = 1 + g'^2.$$

Odgovarajuće kovarijantne derivacije su jednake

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_{e_1} e_1 &= \widetilde{\nabla}_{E_1}(E_1 + (f' + t)E_3) + (f' + t)\widetilde{\nabla}_{E_3}(E_1 + (f' + t)E_3) \\
&= 0 + (f' + t)\left(-\frac{1}{2}E_2\right) + \left(f'' - \frac{t}{2} \cdot 0\right)E_3 + (f' + t)\left(\left(-\frac{1}{2}E_2\right) + (f' + t) \cdot 0 + 0 \cdot E_3\right) \\
&= -(f' + t)E_2 + f''E_3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_{e_1} e_2 &= \widetilde{\nabla}_{E_1}(E_2 + g'E_3) + (f' + t)\widetilde{\nabla}_{E_3}(E_2 + g'E_3) \\
&= \frac{1}{2}E_3 + g'\left(-\frac{1}{2}E_2\right) + \left(0 - \frac{t}{2} \cdot 0\right)E_3 + (f' + t)\left(\frac{1}{2}E_1 + g' \cdot 0 + 0 \cdot E_3\right) \\
&= \frac{1}{2}(f' + t)E_1 - \frac{1}{2}g'E_2 + \frac{1}{2}E_3, \\
\widetilde{\nabla}_{e_2} e_2 &= \widetilde{\nabla}_{E_2}(E_2 + g'E_3) + g'\widetilde{\nabla}_{E_3}(E_2 + g'E_3) \\
&= 0 + g' \cdot \left(\frac{1}{2}E_1\right) + \left(g'' + \frac{s}{2} \cdot 0\right)E_3 + g'\left(\frac{1}{2}E_1 + g' \cdot 0 + 0 \cdot E_3\right) \\
&= g'E_1 + g''E_3.
\end{aligned}$$

Množenjem sa $\overline{N}$ slijedi

$$\begin{aligned}
\widetilde{g}(\overline{N}, \widetilde{\nabla}_{e_1} e_1) &= -g'(f' + t) - f'', \\
\widetilde{g}(\overline{N}, \widetilde{\nabla}_{e_1} e_2) &= -\frac{1}{2}(f' + t)^2 - \frac{1}{2}g'^2 - \frac{1}{2}, \\
\widetilde{g}(\overline{N}, \widetilde{\nabla}_{e_2} e_2) &= g'(f' + t) - g''.
\end{aligned}$$

Uvrštavanjem dobivenih izraza u jednadžbu (4.2) i sređivanjem dobivamo

$$f''(1 + g'^2) - g'(f' + t) + g''\left[1 + (f' + t)^2\right] = 0. \tag{4.25}$$

Dijeljenjem ove jednadžbe sa $1 + g'^2 > 0$ dobivamo

$$f'' - (f' + t) \cdot \frac{g'}{1 + g'^2} + \frac{g''}{1 + g'^2}\left[1 + (f' + t)^2\right] = 0.$$

Deriviranjem obzirom na $s$ slijedi

$$f''' - f'' \cdot \frac{g'}{1 + g'^2} + 2 \cdot \frac{g''}{1 + g'^2} \cdot (f' + t)f'' = 0.$$

Pretpostavimo najprije da je $f'' \neq 0$. Dijeljenjem posljednje jednadžbe sa $f''$ imamo

$$\frac{f'''}{f''} - \frac{g'}{1+g'^2} + 2 \cdot \frac{g''}{1+g'^2} \cdot (f' + t) = 0.$$

Deriviranjem ove jednadžbe obzirom na $t$ slijedi

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{g'}{1+g'^2}\right) + 2(f'+t) \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{g''}{1+g'^2}\right) + 2 \cdot \frac{g''}{1+g'^2} = 0. \tag{4.26}$$

U slučaju

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{g''}{1+g'^2}\right) \neq 0$$

slijedi da izraz $f' + t$ ovisi samo o $t$, što povlači da je $f'$ konstantna, tj. $f'' = 0$. Kontradikcija. Dakle, vrijedi

$$\frac{g''}{1+g'^2} = a, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Uvrštavanjem ovog izraza u (4.26) dobivamo

$$-\frac{g''}{1+g'^2} + \frac{2g'^2 g''}{(1+g'^2)^2} + 2a = 0,$$

ili ekvivalentno,

$$a\left(1 + \frac{2g'^2}{1+g'^2}\right) = 0.$$

Slijedi $a = 0$, tj. $g'' = 0$.

Dakle, ukoliko je $M$ minimalna ploha, mora biti $f'' = 0$ ili $g'' = 0$. Nadalje, ukoliko je $g'' = 0$, imamo $g'(t) = c$, $c \in \mathbb{R}$. Uvrštavanjem u (4.25) dobivamo

$$f''(1 + c^2) - c(f' + t) = 0.$$

Lijeva strana ove jednakosti (za fiksni $s$) je polinom u $t$ s vodećim koeficijentom $c$. Dakle, $c = 0$ i $f'' = 0$. Dakle, za svaku minimalnu translacijsku plohu tipa I mora biti $f'' = 0$, tj. $f(s) = ms + n$, $m, n \in \mathbb{R}$. Uvrštavanjem u (4.25) dobivamo diferencijalnu jednadžbu

$$-(m+t)g' + g''(1 + (m+t)^2) = 0$$

čije je rješenje

$$g(t) = p\left[(m+t)\sqrt{1+(m+t)^2} + \ln\left(m + t + \sqrt{1+(m+t)^2}\right)\right] + q, \quad p, q \in \mathbb{R}. \tag{4.27}$$

**Teorem 4.4.5.** *Minimalne translacijske plohe tipa I u* Nil *geometriji dane su parametrizacijom*

$$x(s,t) = \left(s, t, f(s) + g(t) + \frac{st}{2}\right),$$

*gdje je $f(s) = ms + n$, $m, n \in \mathbb{R}$, a funkcija $g$ je dana izrazom (4.27).*

## Klasifikacija minimalnih translacijskih ploha tipa II

Promatramo krivulje $\alpha(s) = (s, 0, f(s))$ i $\beta(t) = (g(t), t, 0)$. Pripadna translacijska ploha $M(\alpha, \beta)$ ima parametrizaciju

$$x(s,t) = \left(s + g(t), t, f(s) + \frac{st}{2}\right).$$

Vektori baze za $T_pM$ su

$$e_1 = x_s = \left(1, 0, f' + \frac{t}{2}\right) = E_1 + (f' + t)E_3,$$

$$e_2 = x_t = \left(g', 1, \frac{s}{2}\right) = g'E_1 + E_2 + \left(\frac{1}{2}tg' - \frac{1}{2}g\right)E_3.$$

Za vektor normale možemo uzeti

$$\overline{N} = (f' + t)E_1 - \left(f'g' + \frac{1}{2}tg' + \frac{1}{2}g\right)E_2 - E_3.$$

Koeficijenti prve fundamentalne forme su

$$E = 1 + (f' + t)^2, \quad F = g' + (f' + t)\left(\frac{1}{2}tg' - \frac{1}{2}g\right), \quad G = g'^2 + 1 + \left(\frac{1}{2}tg' - \frac{1}{2}g\right)^2.$$

Kovarijantne derivacije su jednake (služimo se računom za tip I)

$$\widetilde{\nabla}_{e_1} e_1 = -(f' + t)E_2 + f''E_3,$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_{e_1} e_2 &= \widetilde{\nabla}_{E_1}\left(g'E_1 + E_2 + \left(\frac{1}{2}tg' - \frac{1}{2}g\right)E_3\right) + (f' + t)\widetilde{\nabla}_{E_3}\left(g'E_1 + E_2 + \left(\frac{1}{2}tg' - \frac{1}{2}g\right)E_3\right) \\
&= g' \cdot 0 + 0 \cdot E_1 + \frac{1}{2}E_3 + \left(\frac{1}{2}tg' - \frac{1}{2}g\right)\left(-\frac{1}{2}E_2\right) + 0 \cdot E_3 \\
&\quad + (f' + t)\left(g'\left(-\frac{1}{2}E_2\right) + 0 \cdot E_1 + \frac{1}{2}E_1 + \left(\frac{1}{2}tg' - \frac{1}{2}g\right) \cdot 0 + 0 \cdot E_3\right) \\
&= \frac{1}{2}(f' + t)E_1 - \frac{1}{2}\left(f'g' + \frac{3}{2}tg' - \frac{1}{2}g\right)E_2 + \frac{1}{2}E_3,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_{e_1} e_2 &= g' \widehat{\nabla}_{E_1} \left( g' E_1 + E_2 + \left( \frac{1}{2} t g' - \frac{1}{2} g \right) E_3 \right) \\
&\quad + \widehat{\nabla}_{E_2} \left( g' E_1 + E_2 + \left( \frac{1}{2} t g' - \frac{1}{2} g \right) E_3 \right) + \left( \frac{1}{2} t g' - \frac{1}{2} g \right) \\
&\quad + \widehat{\nabla}_{E_3} \left( g' E_1 + E_2 + \left( \frac{1}{2} t g' - \frac{1}{2} g \right) E_3 \right) \\
&= g' \left( g' \cdot 0 + 0 \cdot E_1 + \frac{1}{2} E_3 + \left( \frac{1}{2} t g' - \frac{1}{2} g \right) \left( -\frac{1}{2} E_2 \right) + 0 \cdot E_3 \right) \\
&\quad + g' \left( -\frac{1}{2} E_3 \right) + g'' E_1 + 0 + \left( \frac{1}{2} t g' - \frac{1}{2} g \right) \left( \frac{1}{2} E_1 \right) + \frac{1}{2} t g'' E_3 \\
&\quad + \left( \frac{1}{2} t g' - \frac{1}{2} g \right) \left( g' \left( -\frac{1}{2} E_2 \right) + 0 \cdot E_1 + \frac{1}{2} E_1 + \left( \frac{1}{2} t g' - \frac{1}{2} g \right) \cdot 0 + 0 \cdot E_3 \right) \\
&= \left( g'' + \frac{1}{4} t g' - \frac{1}{4} g + \frac{1}{2} \right) E_1 - g' \left( \frac{1}{2} t g' - \frac{1}{2} g \right) E_2 + \frac{1}{2} t g'' E_3 .
\end{aligned}
$$

Množenjem ovih izraza sa $\overline{N}$, uvrštavanjem u (4.2) i sređivanjem dobivamo jednadžbu

$$
\begin{gathered}
2g(t + f' - t g' f'') - 2g'(2 + t^2 + t f') \\
-2g''(t + 2f')(1 + t^2 + 2t f' + f'^2) \\
+f''(4 + g^2 + (4 + t^2) g'^2) = 0.
\end{gathered}
$$

Uvedimo oznake

$$
\begin{aligned}
T_0(t) &= 4 + 4g'(t)^2 + (g(t) - t g'(t))^2, \\
T_1(t) &= 2[g(t) - t g'(t) - 2(1 + 2t^2) g''(t)], \\
T_2(t) &= -10 t g''(t), \\
T_3(t) &= -4 g''(t), \\
T_4(t) &= 2t g(t) - 2(2 + t^2) g'(t) - 2t(1 + t^2) g''(t).
\end{aligned}
\tag{4.28}
$$

Prethodna se jednadžba sada može zapisati kao

$$
T_0 f'' + T_1 f' + T_2 f'^2 + T_3 f'^3 + T_4 = 0. \tag{4.29}
$$

Budući da je $T_0 > 0$, jednadžbu (4.29) možemo podijeliti sa $T_0$ te derivirati redom obzirom na $s$ i $t$. Dobivamo

$$
\frac{d}{dt} \left( \frac{T_1}{T_0} \right) f'' + 2 \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{T_2}{T_0} \right) f' f'' + 3 \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{T_3}{T_0} \right) f'^2 f'' = 0.
$$

Pretpostavimo sada $f'' \neq 0$. Uzastopnim dijeljenjem sa $f''$ i deriviranjem po $t$ dobit ćemo

$$\cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{T_3}{T_0}\right) f'' = 0.$$

Odavde (uvrštavanjem u prethodnu jednadžbu te ponovnim dijeljenjem sa $f''$ i deriviranjem po $t$) slijedi

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{T_1}{T_0}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{T_2}{T_0}\right) = \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{T_3}{T_0}\right) = 0.$$

Iz oblika funkcija $T_2$ i $T_3$ te dobivenih jednakosti slijedi $g'' = 0$, tj. $g(t) = at + d$, $a, d \in \mathbb{R}$. Sada se početna jednadžba (uvjet minimalnosti plohe) svodi na

$$-4a + 2dt + 2df' + (4 + 4a^2 + d^2)f'' = 0,$$

odakle slijedi (lijeva strana je polinom u $t$) $d = 0$ i

$$f(s) = \frac{a}{2(1 + a^2)} \cdot s^2 + bs + c, \quad b, c \in \mathbb{R}.$$

Preostaje komentirati slučaj $f'' = 0$. Tada imamo $f(s) = as + k$ ($a, k \in \mathbb{R}$) te uvjet minimalnosti postaje

$$(a + t)g - [2 + t(a + t)]g' - (2a + t)[1 + (a + t)^2]g'' = 0.$$

Označimo $h(t) = (2a + t)g(t)$. Gornja se jednažba sada može zapisati kao

$$(a + t)h' = [1 + (a + t)^2]h''.$$

Ukoliko je $h$ konstantna, imamo $g(t) = t + 2a$. Ukoliko $h' \neq 0$, rješavanjem dobivene diferencijalne jednadžbe dobivamo

$$h(t) = \frac{c}{2}(a + t)\sqrt{1 + (a + t)^2} + \frac{c}{2}\ln\left(a + t + \sqrt{1 + (a + t)^2}\right) + b, \quad b, c \in \mathbb{R}.$$

Uočimo da je prethodnim obuhvaćen i slučaj $h' = 0$. Slijedi

$$g(t) = \frac{b}{2a + t} + \frac{c}{2(2a + t)}\left[(a + t)\sqrt{1 + (a + t)^2} + \ln\left(a + t + \sqrt{1 + (a + t)^2}\right)\right]. \tag{4.30}$$

**Teorem 4.4.6.** *Minimalne translacijske plohe tipa II u* Nil *geometriji dane su parametrizacijom*

$$x(s, t) = \left(s + g(t), t, f(s) + \frac{st}{2}\right),$$

*gdje su mogućnosti za funkcije $f$ i $g$:*

*1°* $f(s) = \frac{a}{2(1+a^2)} \cdot s^2 + bs + c$ *i* $g(t) = at + d$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$,

*2°* $f(s) = as + k$, $a, k \in \mathbb{R}$, *a $g$ je dana izrazom (4.30).*

## Klasifikacija minimalnih translacijskih ploha tipa III

Promatramo krivulje $\alpha(s) = (0, s, f(s))$ i $\beta(t) = (t, g(t), 0)$. Pripadna translacijska ploha $M(\alpha, \beta)$ ima parametrizaciju

$$x(s,t) = \left(t, x + g(t), f(s) - \frac{st}{2}\right).$$

Analognim računom kao za plohe tipa II, koristeći oznake (4.28), pokazuje se (vidjeti [4]) da se uvjet minimalnosti plohe u ovom slučaju zapisuje u obliku

$$T_0 f'' + T_1 f' - T_2 f'^2 + T_3 f'^3 - T_4 = 0.$$

Primjenjujući istu tehniku kao u slučaju ploha tipa II dobivamo sljedeći rezultat.

**Teorem 4.4.7.** *Minimalne translacijske plohe tipa III u* Nil *geometriji dane su parametrizacijom*

$$x(s,t) = \left(t, x + g(t), f(s) - \frac{st}{2}\right),$$

*gdje su mogućnosti za funkcije $f$ i $g$:*

*1°* $f(s) = \frac{a}{2(1+a^2)} \cdot s^2 + bs + c$, $g(t) = -at + d$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$,

*2°* $f(s) = as + k$,

$$g(t) = \frac{b}{2a - t} + \frac{c}{2(2a - t)} \left[(a - t)\sqrt{1 + (a - t)^2} + \ln\left(a - t + \sqrt{1 + (a - t)^2}\right)\right],$$

*gdje* $a, b, c, k \in \mathbb{R}$.

## Klasifikacija minimalnih translacijskih ploha tipa IV, V i VI

Slučajevi translacijskih ploha tipa IV, V i VI, kao i u Sol geometriji, analogni su slučajevima translacijskih ploha tipa I, II i III respektivno. Zato će i odgovarajuće jednadžbe koje određuju uvjet minimalnosti za ova tri tipa ploha biti slične onima za prva tri tipa i rješavat će se istim tehnikama. Ovdje ćemo samo navesti gotove rezultate koji su preuzeti iz [4].

**Teorem 4.4.8.** *Minimalne translacijske plohe tipa IV u* Nil *geometriji dane su parametrizacijom*

$$x(s,t) = \left(s, t, f(s) + g(t) - \frac{st}{2}\right),$$

*gdje*

$$f(s) = d\left[(a + t)\sqrt{1 + (a + t)^2} + \ln\left(a + t + \sqrt{1 + (a + t)^2}\right)\right] + b,$$

*i* $g(t) = -at + d$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

**Teorem 4.4.9.** *Minimalne translacijske plohe tipa V u* Nil *geometriji dane su parametrizacijom*

$$x(s,t) = \left(s + g(t), t, f(s) - \frac{st}{2}\right),$$

*gdje su mogućnosti za funkcije $f$ i $g$:*

*1°* $f(s) = c$ *i* $g(t) = \frac{a}{t} + b$, $a, b, c \in \mathbb{R}$,

*2°* $g(t) = at + b$,

$$f(s) = -\frac{as^2 + abs + c}{2(1+a^2)} + d\left(\frac{s}{2} + \frac{b}{4}\right)\sqrt{4(1+a^2) + (2s+b)^2} \\ + d(1+a^2)\ln\left(2s + b + \sqrt{4(1+a^2) + (2s+b)^2}\right),$$

*gdje* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

**Teorem 4.4.10.** *Minimalne translacijske plohe tipa VI u* Nil *geometriji dane su parametrizacijom*

$$x(s,t) = \left(t, s + g(t), f(s) + \frac{st}{2}\right),$$

*gdje su mogućnosti za funkcije $f$ i $g$:*

*1°* $f(s) = c$, $g(t) = \frac{a}{t} + b$, $a, b, c \in \mathbb{R}$,

*2°* $g(t) = at + b$,

$$f(s) = \frac{as^2 + abs + c}{2(1+a^2)} + d\left(\frac{s}{2} + \frac{b}{4}\right)\sqrt{4(1+a^2) + (2s+b)^2} \\ + d(1+a^2)\ln\left(2s + b + \sqrt{4(1+a^2) + (2s+b)^2}\right),$$

*gdje* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

# Bibliografija


[1] K. Brodaczewska, *Elementargeometrie in* Nil, Disertacija, Technische Universität Dresden, Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften, 2014.

[2] A. Bölcskei i B. Szilágy, *Frenet formulas and geodesics in* Sol *geometry*, Beiträge Algebra Geom. (Contr. Alg. Geom.) **48** (2007), br. 2, 411–421.

[3] N. Grady, *The eight geometries of the geometrization conjecture*, `https://ir.library.oregonstate.edu/xmlui/handle/1957/25249`, online verzija, 2011.

[4] J. Inoguchi, R. López i M. I. Munteanu, *Minimal translation surfaces in the Heisenberg group* $\mathrm{Nil}_3$, Geom. Dedicata **161** (2012), 221–231.

[5] J. M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, Graduate Texts in Mathematics 218, Springer, New York, 2003.

[6] R. López i M. I. Munteanu, *Minimal translation surfaces in* $\mathrm{Sol}_3$, J. Math. Soc. Japan **64** (2012), br. 3, 985–1003.

[7] Ž. Milin-Šipuš i J. Šiftar, *Glatke i Riemannove mnogostrukosti*, `https://web.math.pmf.unizg.hr/~milin/skripta.pdf`, predavanja s poslijediplomskog studija, 2009.

[8] E. Molnár, *On* Nil *geometry*, Period. Polytech. Mech. Engrg. **47** (2003), br. 1, 41–49.

[9] E. Molnár i B. Szilágy, *Translation curves and their spheres in homogeneous geometries*, Publ. Math. Debrecen **78** (2011), br. 2, 327–346.

# Sažetak

Na početku ovog rada definiramo osnovne pojmove potrebne za razumijevanje Thurstonovih geometrija: pojmove Riemannove mnogostrukosti i geometrijske strukture. Nakon toga dajemo kratki pregled geometrijskih struktura u 2 i 3 dimenzije te opisujemo svih 8 Thurstonovih geometrija. U dvjema od tih geometrija, Sol i Nil, određujemo neke klase krivulja i ploha (geodetske i translacijske krivulje te minimalne translacijske plohe).

# Summary

At the beginning of this thesis we define basic notions necessary for understanding Thurston geometries: the notion of Riemannian manifold and geometric structure. After that we give a short review of all geometric structures in 2 and 3 dimensions and describe all of 8 Thurston geometries. In two of them, Sol and Nil, we determine some classes of curves and surfaces (geodesics, translation curves and minimal translation surfaces).

# Životopis

Rođen sam 27. listopada 1992. godine gdje sam pohađao Osnovnu školu Vrbani (u razdoblju od 1999. do 2007.) te V. gimnaziju (u razdoblju od 2007. do 2011.). Tijekom osnovne i srednje škole sudjelovao sam i ostvario zapažene rezultate na državnim natjecanjima iz matematike, debate, logike i fizike, a 2010. godine osvojio sam brončanu medalju na Srednjoeuropskoj matematičkoj olimpijadi (MEMO) u Poznańu (Poljska). Preddiplomski studij matematike na PMF-u u Zagrebu upisao sam 2011. te ga završio 2014. s odličnim uspjehom i time stekao titulu sveučilišnog prvostupnika matematike. Iste godine upisao sam na istom fakultetu diplomski studij Teorijska matematika. Tijekom fakultetskog obrazovanja bio sam demonstrator na nizu kolegija te sam kao volonter u udrugama Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić" i Hrvatsko debatno društvo pripremao učenike osnovnih i srednjih škola za natjecanja iz matematike i debate te sudjelovao u nizu drugih aktivnosti tih udruga. Autor sam članka *Udaljenosti karakterističnih točaka trokuta* koji je objavljen u Matematičko-fizičkom listu 2013. godine.