Malfattijev problem

Šašo, Mateja

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Mateja Šašo

MALFATTIJEV PROBLEM

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Juraj Šiftar

Zagreb, rujan, 2015.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Velika hvala mojim roditeljima na svim godinama strpljenja prilikom moga studiranja. Nadalje, željela bih se zahvaliti svom mentoru, prof. dr. sc. Juraju Šiftaru na velikoj pomoći pri izradi ovog rada. Zahvaljujem se i svim profesorima s kojima sam se susretala u svom dugogodišnjem obrazovanju, bilo na fakultetu, srednjoj ili osnovnoj školi. Da nije bilo njih, ne bih bila ovdje gdje sam sada.

Sadržaj

Uvod

Tema ovog diplomskog rada je Malfattijev problem, nazvan po talijanskom matematičaru Gian Francescu Malfattiju te glasi:

U zadani trokut upiši tri kružnice koje se ne sijeku tako da pripadni krugovi zauzimaju najveću moguću površinu.

Malfatti je problem postavio i diskutirao u svom radu iz 1803. godine, no u matematičkoj literaturi je spominjan i ranije. Rukopis Gilia di Cecca iz Montepulciana iz 1384. godine spominje navedeni problem te ga u 18. stoljeću postavlja i japanski matematičar Ajima Naonobu.

Gian Francesco Malfatti je slutio kako rješenje problema čine tri kružnice od kojih svaka dodiruje dvije stranice trokuta i ostale dvije kružnice te je uspio i konstruirati takve kružnice.

Međutim, 1930. godine Lob i Richmond opovrgnuli su Malfattijevu izvornu pretpostavku, opažajući kako već u jednakostraničnom trokutu Malfattijeva konfiguracija ne daje maksimalnu površinu. Kasnija istraživanja pokazala su da takozvani pohlepni algoritam, u ovom slučaju postupak u kojem se polazi od kružnice upisane trokutu i dalje u svakom koraku uzima kružnica najvećeg dopustivog polumjera, za bilo koji trokut daje veću površinu nego Malfattijeva konfiguracija. Primjerice, u jednakokračnom trokutu s vrlo malenim kutom nasuprot osnovice, tri kružnice postavljene jedna povrh druge tako da dodiruju krakove trokuta, a prva od njih je trokutu upisana kružnica, određuju površinu gotovo dvostruko veću od Malfattijeve konfiguracije. Potpuno rješenje objaviti su 1994. godine Zalgaller i Los, analizom svih mogućih slučajeva s obzirom na raspored kružnica unutar zadanog trokuta.

U ovom radu bit će prikazani najvažniji rezultati koji su proistekli iz izvornog Malfattijevog problema. To obuhvaća neka konstrukcijska rješenja za Malfattijevu konfiguraciju te osnovne elemente pristupa koji je doveo do konačnog rješenja problema najveće površine tri kruga unutar trokuta.

Detaljnu priču o tom 200 godina starom problemu vrijedno je izložiti ne samo zbog konačnih rezultata, nego i kao primjer kako se razvija pristup određenom matematičkom problemu, kakvi su različiti pristupi mogući u njegovu rješenju i kako se početna slutnja ne mora na kraju pokazati ispravnom, ali pruža poticaj za zanimljiva istraživanja, poopćenja i primjene.

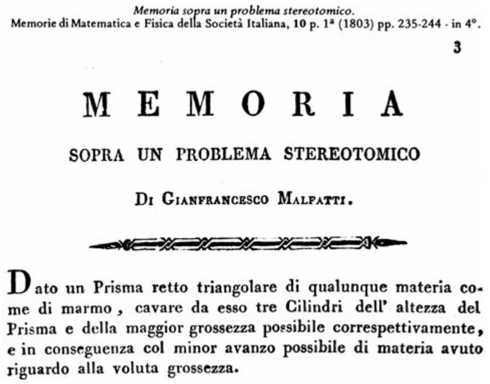
Gian Francesco Malfatti je bio istaknuti talijanski matematičar rođen 1731. u malom naselju u talijanskim Alpama, Ala, u blizini Trenta. Najprije je studirao u isusovačkoj školi u Veroni, zatim na Sveučilištu Bologna pod mentorstvom V. Riccatija, F.M. Zanottija i G. Manfreda. Po završetku studiranja, 1754. je otišao u Ferraru gdje je učio matematiku i fiziku. Malfatti je bio jedan od utemeljitelja Odjela za matematiku Sveučilišta u Ferrari. Umro je u Ferrari 1807. godine.

Kao vrlo aktivni intelektualac u doba prosvjetiteljstva, posvetio se promicanju mnogih novih ideja i napisao brojne radove u različitim područjima matematike uključujući algebru, geometriju i teoriju vjerojatnosti. On je igrao važnu ulogu u stvaranju *Nuova Enciclopedia Italiana* (1779.), u duhu Francuske enciklopedije koju su uredili Diderot i d'Alembert. Njegovi matematički radovi su prikupljeni od strane Talijanskog Matematičkog društva. O njegovoj povijesnoj ličnosti je raspravljano u nizu radova.

Poglavlje 1

Izvorni Malfattijev problem

Pojam stereotomija u naslovu Malfattijevog rada (grčki *stereo* = $\sigma\tau\epsilon\rho\epsilon o$, što znači čvrsto, kruto i *tomija* = $\tau o\mu\iota a$, što znači rezati, dio) odnosi se na umjetnost rezanja krute tvari u određene figure ili dijelove, kao lukove i slično; to se posebno odnosi na umjetnost klesanja.



Memoria sopra un problema stereotomico.
Memorie di Matematica e Fisica della Società Italiana, 10 p. 1ª (1803) pp. 235-244 - in 4°.

3

MEMORIA

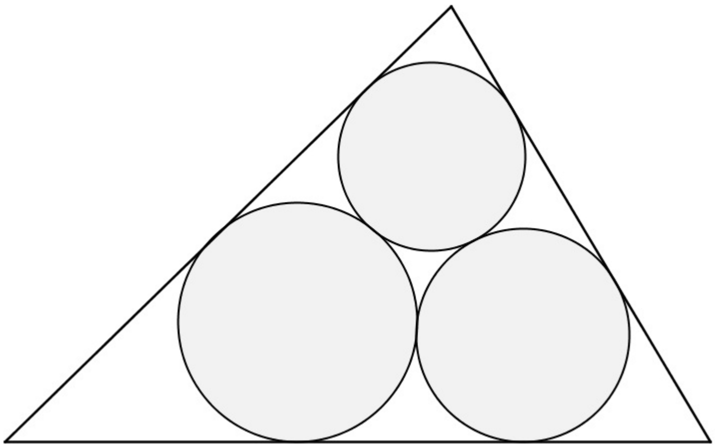
SOPRA UN PROBLEMA STEREOTOMICO

DI GIANFRANCESCO MALFATTI.

Dato un Prisma retto triangolare di qualunque materia come di marmo, cavare da esso tre Cilindri dell' altezza del Prisma e della maggior grossezza possibile correspettivamente, e in conseguenza col minor avanzo possibile di materia avuto riguardo alla voluta grossezza.

Slika 1.1: Naslovna strana Malfattijevog rada

Izvorni Malfattijev problem spomenut u radu odnosi se na izrezivanje tri valjka jednake visine iz uspravne trostrane mramorne prizme tako da volumen valjaka bude maksimalan, to jest s minimalnim otpadom materijala u pogledu volumena. Malfatti je istaknuo da njegov problem može biti sveden, stereotomijom, na planimetrijski problem. Iako to nije izričito navedeno u radu, taj planimetrijski problem glasi: *U zadani trokut upiši tri kruga tako da zbroj njihovih površina bude maksimalan.* Danas je taj problem poznat pod nazivom *Malfattijev problem mramora.* Zatim, bez obrazloženja, Malfatti je primijetio da se problem svodi na upisivanje tri kruga u trokut na način da svaki krug dodiruje druga dva i u isto vrijeme dvije stranice trokuta. Danas znamo da je Malfattijeva pretpostavka bila kriva. Malfattijeva konfiguracija nije rješenje Malfattijevog problema mramora, ali ostatak Malfattijevog rada je ispravan. Malfatti je konstruirao jedinstvenu konfiguraciju tri kruga na slici 1.2 koji danas nosi njegovo ime. Po njegovim riječima '... *tražeći rješenje tog drugog problema, našao sam se uronjen u dugačka izračunavanja i zakučaste formule...*'



Slika 1.2: Malfattijeva konfiguracija

Tako je početni Malfattijev problem, formuliran u terminima stereometrije, zapravo doveo do dva međusobno povezana, ali ne i ekvivalentna planimetrijska problema:

1. Konstrukcija Malfattijeve konfiguracije za zadani trokut.
2. Pronalaženje tri kruga unutar zadanog trokuta tako da njihova površina bude najveća moguća.

Poglavlje 2

Problem konstrukcije Malfattijeve konfiguracije

Definicija 2.0.1. *Malfattijeve kružnice danog trokuta su tri kružnice od kojih svaka dotiče preostale dvije kružnice i dvije stranice trokuta.*

U daljnjem, radi jednostavnosti, trokut i njegove tri Malfattijeve kružnice zajednički ćemo nazivati Malfattijevom konfiguracijom.

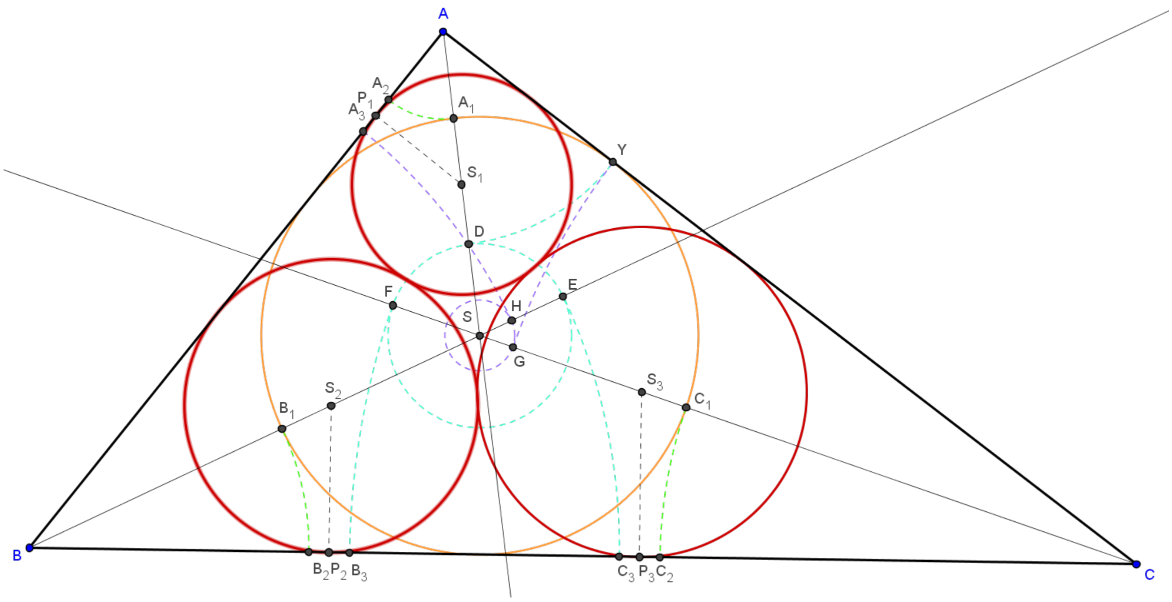
Problem je naoko jednostavan, ali konstrukcija nije nimalo lagana. Jasno je da se središta upisanih kružnica nalaze na simetrali kutova danog trokuta. Budući da se sve tri kružnice moraju dodirivati, pitamo se na kojoj udaljenosti od vrhova trokuta treba postaviti središta kružnica.

Dakle, postavlja se pitanje postojanja Malfattijeve konfiguracije za bilo koji zadani trokut, a također i problem konstrukcije takve konfiguracije. Najprije ćemo pokazati kako konstruirati Malfattijeve kružnice.

2.1 Malfattijeva konstrukcija

Malfatti je bez dokaza naveo sljedeću konstrukciju. Ta konstrukcija je relativno komplicirana kao što ćemo vidjeti usporedbom s drugima.

Neka je ABC dani trokut sa stranicama a, b, c i kutovima α, β, γ. Simetrale unutarnjih kutova α, β, γ trokuta ABC su s_α, s_β, s_γ i sijeku se u jednoj točki S koja je središte upisane kružnice k_u tom trokutu. Točke A_1, B_1 i C_1 su sjecišta upisane kružnice k_u sa simetralama kutova s_α, s_β, s_γ redom. Kružnica sa središtem u A polumjera $|AA_1|$ siječe stranicu $\overline{AB}$ u A_2, kružnica sa središtem u B polumjera $|BB_1|$ siječe stranicu $\overline{BC}$ u B_2 i kružnica sa središtem u C polumjera $|CC_1|$ siječe stranicu $\overline{BC}$ u C_2. Upisana kružnica k_u dira stranicu $\overline{AC}$ u točki Y. Kružnica sa središtem u A polumjera $|AY|$ siječe $\overline{AS}$ u D. Kružnica sa središtem u S polumjera $|SD|$ siječe pravac BS u točki E s time da točka E ne pripada dužini $\overline{BS}$ i pravac CS u točki F s time da točka F ne pripada dužini $\overline{CS}$. Kružnica sa središtem u C polumjera $|CF|$ siječe dužinu $\overline{BC}$ u B_3 te kružnica sa središtem u B polumjera $|BE|$ siječe istu dužinu u C_3. Kružnica sa središtem u C polumjera $|CY|$ siječe dužinu $\overline{CS}$ u G. Kružnica sa središtem u S polumjera $|SG|$ siječe simetralu kuta β u točki H s time da točka H ne pripada dužini $\overline{BS}$. Kružnica sa središtem u B polumjera $|BH|$ siječe $\overline{AB}$ u A_3. Točke P_1, P_2, P_3 su polovišta dužina $\overline{A_2A_3}, \overline{B_2B_3}, \overline{C_2C_3}$ redom. Pravac okomit na stranicu $\overline{AB}$ u P_1 siječe simetralu kuta α u S_1. Okomit pravac na stranicu $\overline{BC}$ u P_2 siječe simetralu kuta β u S_2 te pravac okomit na istu stranicu, ali u točki P_3 siječe kut γ u točki S_3. Točke S_1, S_2, S_3 su središta Malfattijevih kružnica.

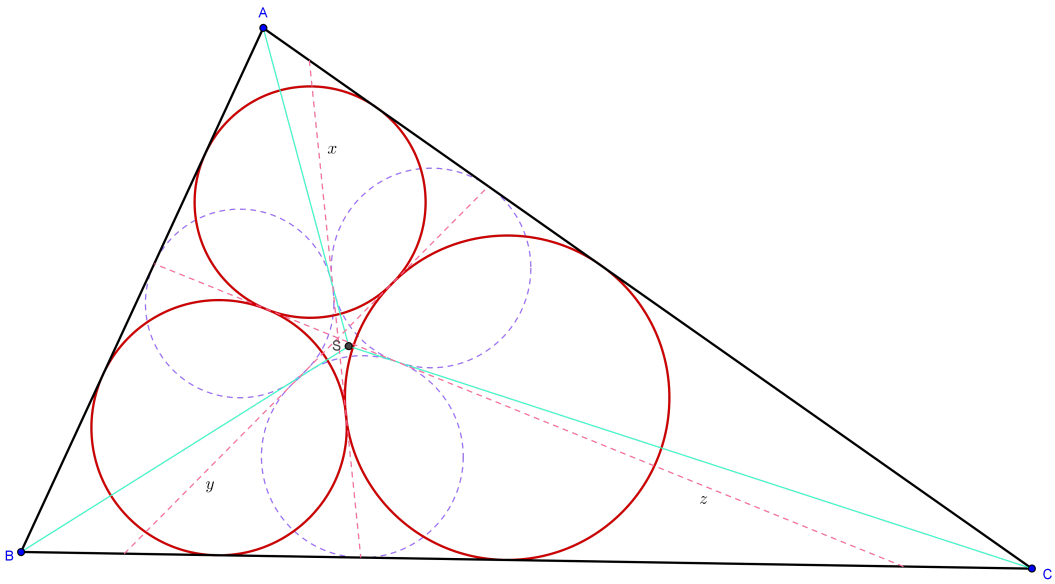


Slika 2.1: Malfattijeva konfiguracija

2.2 Steinerova konstrukcija Malfattijeve konfiguracije

Godine 1826. Jakob Steiner je dao sljedeće jednostavno konstrukcijsko rješenje Malfattijevog rasporeda:

Dan je trokut ABC sa stranicama a, b, c i kutovima α, β, γ. Središta Malfattijevih kružnica moraju se nalaziti na simetralama unutarnjih kutova trokuta. Središte S upisane kružnice zadanog trokuta se nalazi na sjecištu simetrala unutarnjih kutova. Dužine $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ dijele trokut ABC na tri trokuta ABS, BCS, ACS. Svakom od tri manja trokuta treba upisati kružnicu. Svaki par kružnica ima zajedničke četiri tangente, no samo dvije diraju kružnice i prolaze između njih. Jedna od tih tangenata je simetrala kuta. Druge tangente nazovimo x, y, z tako da je x tangenta onih dviju kružnica koji ne diraju stranicu a, y tangenta onih kružnica koji ne diraju stranicu b te z tangenta onih kružnica koji ne diraju stranicu c. Malfattijeve kružnice su kružnice upisane četverokutima određenim pravcima $abyx, aczx, bczy$. Tangente x, y, z sijeku treću kružnicu upravo u točki u kojoj ona dodiruje stranicu trokuta.



Slika 2.2: Steinerova konstrukcija Malfattijeve konfiguracije

Hartov dokaz

Jakob Steiner je gore navedeno konstrukcijsko rješenje dao bez dokaza. Postoji više dokaza Steinerove konstrukcije, no ovdje ćemo izložiti Hartov dokaz iz 1856.

Pretpostavimo da je Malfattijev problem riješen, to jest da su trokutu upisane tri kružnice koje se međusobno dodiruju u točkama P_1, P_2, P_3 i pritom svaka dira dvije stranice trokuta te da im pripadni krugovi zauzimaju najveću površinu. Svaki par kružnica ima zajedničku tangentu koja prolazi točkama P_1, P_2, P_3 i siječe stranice a, b, c u točkama D_1, D_2, D_3. Pravci D_1P_1, D_2P_2, D_3P_3 sijeku se u jednoj točki K te vrijedi $|KP_1| = |KP_2| = |KP_3|$.

Treba pokazati da kružnice c_1, c_2, c_3 upisane trokutima $KE_2E_3, KE_3E_1, KE_1E_2$, gdje su točke E_1, E_2, E_3 sjecišta pravaca D_1K, D_2K, D_3K sa pravcima na kojima leže stranice trokuta, diraju stranice trokuta točno u točkama D_1, D_2, D_3.

Zapravo,

$$\begin{aligned}|E_1D_3| - |E_2D_3| &= |E_1C_2| - |E_2B_3| \\ &= |E_1P_1| - |E_2P_2| \\ &= |E_1K| - |E_2K|.\end{aligned}$$

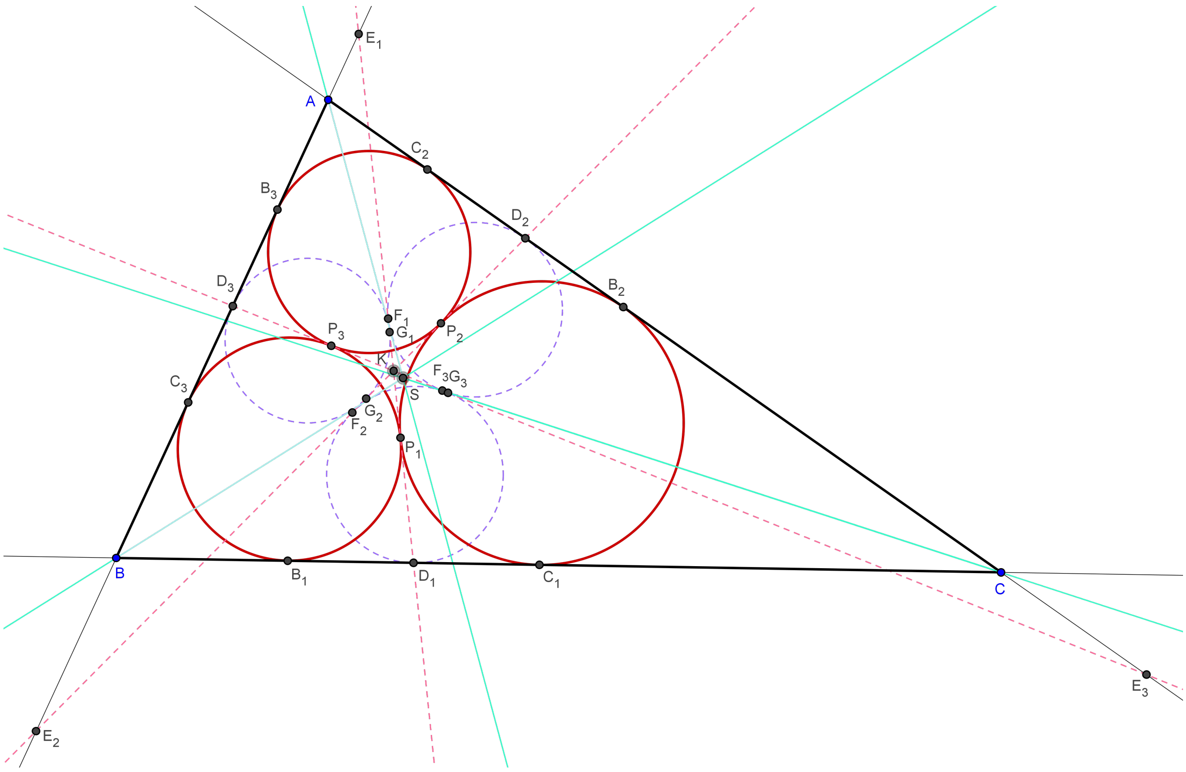
To pokazuje da je D_3 dodirna točka kružnice upisane trokutu KE_1E_2 i stranice $\overline{AB}$. Analogno se dokaže za točke D_1 i D_2.

Sljedeće što trebamo dokazati je da su pravci koji nisu D_1E_1, D_2E_2, D_3E_3 također unutarnje tangente kružnica c_1, c_2, c_3. Ti pravci L_1, L_2, L_3 prolaze točkom S koja je središte upisane kružnice trokuta i oni su zapravo simetrale unutarnjih kutova trokuta ABC, no to tek treba dokazati.

Prvo pokazujemo da pravci L_1, L_2, L_3 prolaze kroz njegove vrhove trokuta ABC. Kružnice c_1, c_2, c_3 diraju pravce D_1E_1, D_2E_2, D_3E_3 u točkama F_1, G_1, F_2, G_2, F_3, G_3. Zbog simetričnosti relacije pravaca L_1, L_2, L_3 i pravaca D_1E_1, D_2E_2, D_3E_3, dovoljno je pokazati da $|F_1G_1| = |AD_2| - |AD_3|$ kako bi L_1 prolazio kroz vrh A trokuta ABC. Imamo

$$\begin{aligned}|AD_2| - |AD_3| &= |C_2D_2| - |B_3D_3| \\ &= |P_3G_3| - |P_2F_2| \\ &= |F_1G_1|,\end{aligned}$$

što znači da L_1 prolazi kroz vrh A. Analogno se dokazuje za L_2 i L_3.



Slika 2.3: Hartov dokaz Steinerove konstrukcije Malfattijeve konfiguracije

Kako bismo pokazali da je L_1 zapravo simetrala kuta CAB, trebamo ustanoviti da se kružnice c_2 i c_3 vide iz točke A pod jednakim kutom. U tu svrhu primijenit ćemo na c_2 i c_3 pojam i karakteristična svojstva takozvane kružnice sličnosti dviju kružnica (vidi: [8]). Kružnica, označimo je k_s, čiji promjer je dužina koja spaja vanjski i unutarnji centar homotetije kružnica c_2 i c_3, geometrijsko je mjesto točaka iz kojih se c_2 i c_3 vide pod jednakim kutom. Svaka točka na kružnici k_s ima karakteristično svojstvo da ako se iz nje povuku tangente na c_2 i c_3 koje ne razdvajaju središta kružnica c_2 i c_3, onda spojnica dirališta tih tangenti odsijeca tetive jednake duljine na kružnicama c_2 i c_3. Stoga je u našem slučaju potrebno ustanoviti da dužina $\overline{D_2D_3}$ (jer su D_2 i D_3 dirališta tangenti iz A na c_2 i c_3) odsijeca tetive jednake duljine na c_2 i c_3. Taj uvjet može se pomoću potencije točke prikazati kao jednakost $p(D_2, c_3) = p(D_3, c_2)$, što je ekvivalentno jednakosti $|D_2F_2| = |D_3G_3|$. Ova jednakost vrijedi jer

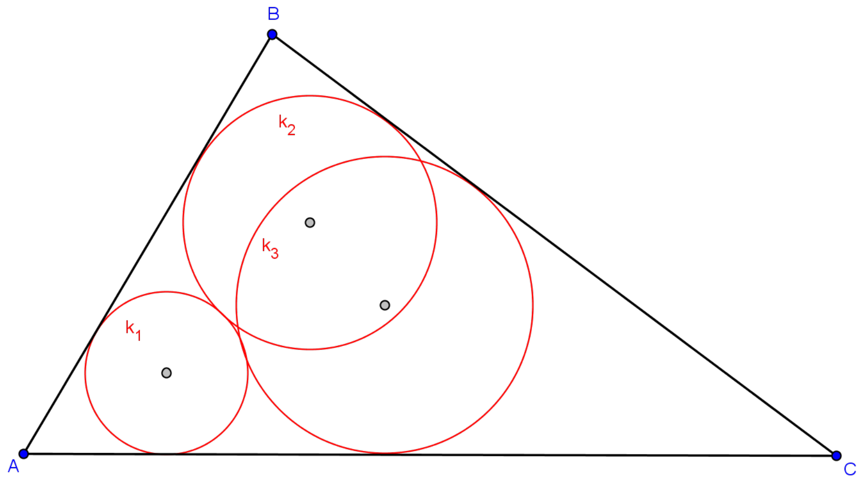
$$\begin{aligned}|D_3G_3| &= |D_3P_3| + |P_3G_3| \\ &= |D_3B_3| + |D_2C_2| \\ &= |P_2F_2| + |D_2P_2| \\ &= |D_2F_2|.\end{aligned}$$

Sada možemo reći da je pravac L_1 simetrala kuta CAB. Analogni postupci dovode do toga da su pravci L_2 i L_3 također simetrale preostalih dviju unutarnjih kutova trokuta ABC.

Ti argumenti pokazuju da ako postoji rješenje, ono se dobiva postupkom koji je predložio Steiner. Dalje se postavlja pitanje da li rješenje uopće postoji. Hart je dokazao i to.

Hartov dokaz postojanja rješenja

Hartov dokaz postojanja rješenja uključuje neprekidnost. Promatramo kružnicu k_1 malog polumjera koja dira stranice $\overline{AB}, \overline{AC}$ i preostale dvije kružnice k_2 i k_3 koje diraju po dvije stranice trokuta.



Slika 2.4: Trokut ABC

Pretpostavimo najprije da je polumjer kružnice k_1 čvrsta vrijednost r_1. Nije teško izraziti polumjer r_2 kružnice k_2 i udaljenost njezina središta od vrha B kao (neprekidne) funkcije od r_1. Također, polumjer r_3 i udaljenost središta kružnice k_3 od vrha C mogu se izraziti kao (neprekidne) funkcije od r_1.

Kružnice k_2 i k_3 diraju se ako je međusobna udaljenost njihovih središta jednaka $r_2 + r_3$. Očito je da postoji izbor ('mala vrijednost') r_1 tako da se k_2 i k_3 sijeku, kao i takav izbor ('velika vrijednost') r_1 da k_2 i k_3 nemaju zajedničkih točaka.

Označimo li s d međusobnu udaljenost središta k_2 i k_3, može se $d - (r_2 + r_3)$ izraziti kao neprekidna funkcija od r_1 koja poprima pozitivne i negativne vrijednosti. Stoga postoji vrijednost r_1 za koju je $d - (r_2 + r_3) = 0$, to jest za koju se kružnice k_2 i k_3 dodiruju. Obje kružnice također diraju i k_1 jer to svojstvo imaju sve promatrane kružnice k_2 i k_3.

2.3 Schellbachova konstrukcija Malfattijeve konfiguracije

Lema 2.3.1. *Neka je dan trokut ABC sa središtem upisane kružnice S i polumjerom r. Neka su x, y, z duljine odsječaka tangenata povučenih iz vrhova trokuta na tu kružnicu. Tada vrijedi*

$$r^2 = \frac{xyz}{s},$$

pri čemu je s poluopseg trokuta.

Dokaz. Pokazat ćemo kako se dolazi do relacije $r^2 = \frac{xyz}{s}$. Iz slike 2.5 vidimo da je

$$\begin{aligned}|AL| + |LB| &= c,\\ |BJ| + |JC| &= a,\\ |CK| + |KA| &= b.\end{aligned}$$

Odatle slijedi da je

$$\begin{aligned}|AL| &= s - |BC|,\\ |BJ| &= s - |AC|,\\ |CK| &= s - |AB|,\end{aligned}$$

to jest

$$\begin{aligned}x &= s - a,\\ y &= s - b,\\ z &= s - c,\end{aligned} \tag{2.1}$$

gdje je $s = \dfrac{a+b+c}{2}, |BC| = a, |AC| = b, |AB| = c$ i $|AL| = x, |BJ| = y, |CK| = z$.

Površina trokuta, kojem su poznate duljine svih triju stranica a, b, c računa se pomoću Heronove formule

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Površina trokuta može se izračunati i primjenom formule

$$P = sr.$$

Sada, iz ovih dviju formula za površinu trokuta, slijedi

$$sr = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

odnosno, nakon kvadriranja

$$s^2r^2 = s(s-a)(s-b)(s-c),$$

pa zbog (2.1) možemo pisati

$$s^2r^2 = sxyz.$$

Odavde slijedi da je $r^2 = \frac{xyz}{s}$ do čega je valjalo doći.

□

Sljedeće konstrukcijsko rješenje dao je Schellbach, a objavljeno je u 45. svesku *Crelleovog žurnala*.

Neka je dan trokut ABC sa stranicama a, b, c, opsega $2s$ i kutovima α, β, γ. Središta traženih kružnica su S_1, S_2, S_3, a polumjeri r_1, r_2, r_3. Središte kružnice S_1 nalazi se na simetrali kuta α, S_2 na simetrali kuta β te središte S_3 na simetrali kuta γ. Neka su duljine odsječaka tangenata od vrhova trokuta do dirališta kružnica sa stranicom trokuta t_1, t_2, t_3, tj.

$$t_1 = |AH| = |AG|,$$
$$t_2 = |BI| = |BD|,$$
$$t_3 = |CE| = |CF|,$$

gdje su točke D, E, F, G, H, I dirališta traženih kružnica sa stranicama a, b, c redom.

Neka je S središte trokutu upisane kružnice, a r njezin polumjer. Neka su, nadalje, x, y, z duljine odsječaka tangenata od vrhova trokuta do dirališta kružnice sa stranicom trokuta na tu kružnicu, tj. neka je

$$x = |AL| = |AK|,$$
$$y = |BL| = |BJ|,$$
$$z = |CJ| = |CK|,$$

gdje su točke J, K, L dirališta trokutu upisane kružnice sa stranicama a, b, c redom.

Trokuti AHS_2 i ALS su slični po teoremu SKS, pa iz te sličnosti slijedi da je

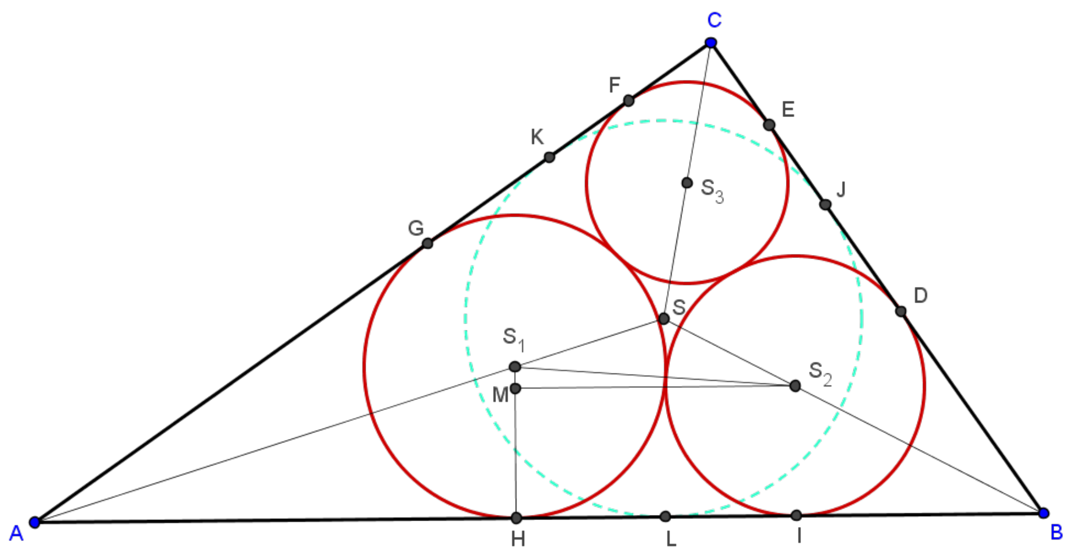
$$r_1 : r = t_1 : x,$$

odnosno

$$r_1 = \frac{rt_1}{x}. \tag{2.2}$$

Sličnim zaključivanjem nalazimo da je

$$r_2 = \frac{rt_2}{y}. \tag{2.3}$$



Slika 2.5: Schellbachova konstrukcija Malfattijeve konfiguracije

Dirališta Malfattijevih kružnica sa stranicom c označimo sa H i I. Udaljenost tih dviju dirališta označimo sa $d = |HI|$.

Iz pravokutnog trokuta MS_2S_1, gdje je M točka sjecišta dužine $\overline{S_1H}$ i pravca paralelnog stranici c koji prolazi kroz S_2, primjenom Pitagorinog poučka, slijedi

$$|S_1S_2|^2 = |S_1M|^2 + |MS_2|^2,$$

odnosno

$$(r_1 + r_2)^2 = (r_1 - r_2)^2 + d^2.$$

Iz posljednje jednakosti slijedi da je

$$d = 2\sqrt{r_1 r_2}.$$

Uvrštavanjem vrijednosti za r_1 i r_2 iz (2.2) i (2.3) slijedi:

$$d = 2\sqrt{\frac{r^2 t_1 t_2}{xy}},$$

odnosno, drugačije zapisano,

$$d = 2\sqrt{t_1 t_2} \cdot \sqrt{\frac{r^2}{xy}}.$$

Budući da je po lemi 2.3.1. $r^2 = \frac{xyz}{s}$, uvrštavanjem u posljednju jednakost imamo

$$d = 2\sqrt{t_1 t_2} \cdot \sqrt{\frac{xyz}{sxy}} = 2\sqrt{t_1 t_2} \cdot \sqrt{\frac{z}{s}}.$$

Dakle,

$$c = t_1 + t_2 + 2\sqrt{t_1 t_2} \cdot \sqrt{\frac{z}{s}}. \tag{2.4}$$

Sličnim zaključivanjem imamo da je

$$a = t_2 + t_3 + 2\sqrt{t_2 t_3} \cdot \sqrt{\frac{x}{s}}, b = t_1 + t_3 + 2\sqrt{t_1 t_3} \cdot \sqrt{\frac{y}{s}}. \tag{2.5}$$

Uzmemo li da je polovica opsega jednaka jedinici, tj. $s = 1$, tada su veličine a, b, c te t_1, t_2, t_3 pravi razlomci. To znači da se mogu izraziti kao kvadrati sinusa od šest pomoćnih kuteva $\lambda, \mu, \nu, \varphi, \psi$ i ξ i to ovako

$$a = \sin^2\lambda, b = \sin^2\mu, c = \sin^2\nu,$$

$$t_1 = \sin^2\varphi, t_2 = \sin^2\psi, t_3 = \sin^2\xi.$$

Iz jednakosti

$$x = s - a, y = s - b, z = s - c,$$

gdje je $s = \dfrac{a+b+c}{2}$, slijedi

$$x = 1 - a, y = 1 - b, z = 1 - c,$$

pa je

$$\cos^2\lambda = 1 - \sin^2\lambda = 1 - a = x,$$

te

$$\cos^2\mu = y, \cos^2\nu = z.$$

Sada jednakosti (2.4) i (2.5) poprimaju sljedeći oblik

$$\begin{aligned} \sin^2\varphi + \sin^2\xi + 2\sin\varphi\sin\xi\cos\lambda &= \sin^2\lambda, \\ \sin^2\psi + \sin^2\xi + 2\sin\psi\sin\xi\cos\mu &= \sin^2\mu, \\ \sin^2\psi + \sin^2\varphi + 2\sin\psi\sin\varphi\cos\nu &= \sin^2\nu. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Objasnimo značenje ovih jednakosti. Crtamo trokut MKG s unutarnjim kutovima φ i ξ, te λ kao vanjskim kutom na trećem vrhu. Vidimo da je $\varphi + \xi = \lambda$.

Uzmemo li da je promjer opisane kružnice tom trokutu $2r = 1$, imamo da su duljine stranica tog trokuta

$$|MK| = \sin(180^\circ - \lambda) = \sin\lambda,$$

$$|KG| = \sin\varphi,$$

$$|GM| = \sin\xi.$$

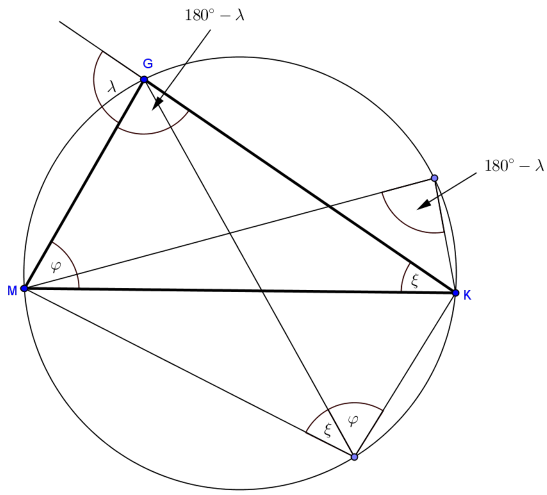
Primjenom kosinusovog poučka na trokut MKG imamo da je

$$|MK|^2 = |MG|^2 + |KG|^2 - 2|MG|\cdot|KG|\cdot\cos(180^\circ - \lambda),$$

odnosno

$$\sin^2\lambda = \sin^2\xi + \sin^2\varphi + 2\sin\xi\sin\varphi\cos\xi.$$

Dobili smo prvu jednakost u (2.6).



Slika 2.6: Trokut MKG

Sličnim zaključivanjem nalaze se i preostale dvije jednakosti u (2.6).

Iz ovoga možemo zaključiti da nam jednakosti (2.6) daju sljedeće izraze

$$\varphi + \xi = \lambda,$$

$$\xi + \psi = \mu,$$

$$\psi + \varphi = \nu.$$

Ako uzmemo da je $\sigma = \dfrac{\lambda + \mu + \nu}{2}$, tada slijedi

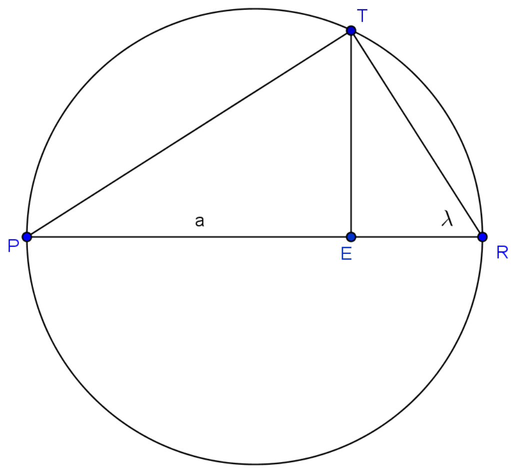
$$\varphi = \sigma - \mu,$$

$$\psi = \sigma - \lambda,$$

$$\xi = \sigma - \nu.$$

Provedenim razmatranjem došli smo do toga da se Malfattijev problem može riješiti. Konstrukcija se provodi na sljedeći način:

Nacrtamo tri kuta λ, μ, ν kojih su kvadrati sinusa jednaki duljinama stranica zadanog trokuta. Pritom pretpostavimo da je poluopseg trokuta jednak 1.



Slika 2.7: Trokut PRT

Na promjeru $|PR| = s = 1$ kružnice nanesemo dužinu $\overline{PE} = a$. U točki E povučemo okomicu koja siječe kružnicu u točki T. Budući da je

$$\sin^2 \lambda = \frac{|ET|^2}{|TR|^2},$$

imamo da je kut $PRT = \lambda$. Primjenom poznatih relacija koje slijede iz sličnosti pravokutnih trokuta TPR, ETR i EPT imamo da je

$$\sin^2 \lambda = \frac{|PE| \cdot |ER|}{|PR| \cdot |ER|} = |PE| = a.$$

Sličnim zaključivanjem imamo da je

$$\sin^2 \mu = b,$$

$$\sin^2 \nu = c.$$

Dalje konstruiramo

$$\sigma = \frac{\lambda + \mu + \nu}{2},$$

$$\psi = \sigma - \lambda, \varphi = \sigma - \mu, \xi = \sigma - \nu.$$

Na sličan način možemo konstruirati

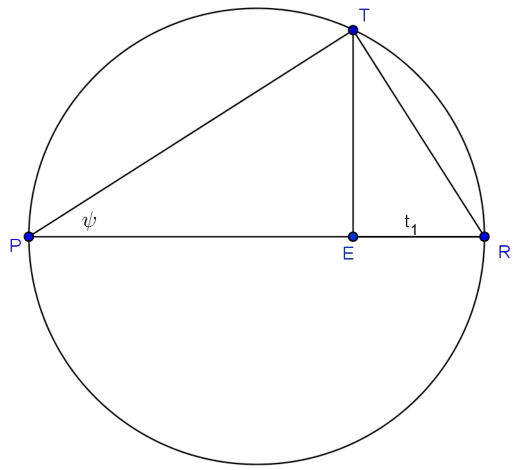
$$\sin^2 \psi = u, \sin^2 \varphi = v, \sin^2 \xi = w.$$

Naime, znamo li kut ψ, tada je

$$\sin^2\psi = \frac{|ET|^2}{|PT|^2} = \frac{|PE|\cdot|ER|}{|PR|\cdot|PE|} = |ER| = t_1.$$

Sličnim zaključivanjem imamo da je

$$\sin^2\varphi = t_2, \sin^2\xi = t_3.$$



Slika 2.8: Trokut *PRT*

Dobili smo dužine odsječaka tangenata koje su iz vrhova A, B i C povučene na Malfattijeve kružnice.

Dalje je konstrukcija jednostavna. Počevši od vrha A trokuta ABC na stranice b i c nanosimo dužinu t_1 i dobivamo točke G i H. U tim točkama povlačimo okomicu na stranicu na kojoj se nalaze. Presjek tih dviju okomica je točka S_1 koja je središte jedne od tri Malfattijeve kružnice.

Sličnim postupkom nalazimo središta preostalih dviju kružnica.

Time je Malfattijev problem riješen.

2.4 Polumjeri Malfattijevih kružnica

Neka je dan trokut ABC sa stranicama a, b, c, poluopsegom s te kutovima $2\alpha, 2\beta, 2\gamma$ i neka je k kružnica upisana trokutu ABC sa središtem S radijusa r. Tada su polumjeri Malfattijevih kružnica dani s

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{s}{2(s-a)}(s - r - (|SB| + |SC| - |SA|), \\ r_2 &= \frac{s}{2(s-b)}(s - r - (|SC| + |SA| - |SB|), \\ r_3 &= \frac{s}{2(s-c)}(s - r - (|SA| + |SB| - |SC|). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Te rezultate dao je sam Malfatti i objavljeni su posthumno.

Gore navedene formule također možemo pisati kao

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{(|SB| + r - (s-b))(|SC| + r - (s-c))}{2(|SA| + r - (s-a))}, \\ r_2 &= \frac{(|SC| + r - (s-c))(|SA| + r - (s-a))}{2(|SB| + r - (s-b))}, \\ r_3 &= \frac{(|SA| + r - (s-a))(|SB| + r - (s-b))}{2(|SC| + r - (s-c))}. \end{aligned}$$

Formule (2.7) možemo zapisati i u terminima trigonometrijskih funkcija

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{(1 + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2})(1 + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2})}{1 + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{r}{2}, \\ r_2 &= \frac{(1 + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2})(1 + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2})}{1 + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}} \cdot \frac{r}{2}, \\ r_3 &= \frac{(1 + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2})(1 + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2})}{1 + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}} \cdot \frac{r}{2}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Dokaz ovih formula nije nimalo lagan te ga ovdje nećemo izložiti. Polazište za izračunavanje r_1, r_2 i r_3 možemo naći u relacijama na stranici 3-14 uz sliku (2.5). Naime, tamo su izračunate duljine odsječaka između dirališta Malfattijevih kružnica i stranica trokuta:

$$|HI| = 2\sqrt{r_1 r_2},$$

i analogno

$$|DE| = 2\sqrt{r_2 r_3},$$
$$|FG| = 2\sqrt{r_1 r_3}.$$

Duljina svake stranice trokuta može se izraziti na dva načina, npr.

$$\begin{aligned} |AB| &= |AL| + |LB| \\ &= |AH| + |HI| + |IB|. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Iz pravokutnih trokuta ALS i BLS imamo $\operatorname{tg}\alpha = \frac{r}{|AL|}$, odnosno $|AL| = r\operatorname{ctg}\alpha$ i $\operatorname{tg}\beta = \frac{r}{|BL|}$, odnosno $|BL| = r\operatorname{ctg}\beta$.

Nadalje, iz trokuta AHS_1 imamo $|AH| = r_1\operatorname{ctg}\alpha$, a iz trokuta BIS_2 imamo $|BI| = r_2\operatorname{ctg}\beta$.

Uvrštavanjem u (2.9) dobivamo

$$\begin{aligned} |AB| &= r(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta) \\ &= r_1\operatorname{ctg}\alpha + 2\sqrt{r_1 r_2} + r_2\operatorname{ctg}\beta. \end{aligned}$$

Analogno računamo $|BC|$ i $|CA|$ pa dobivamo sustav od tri jednadžbe za r_1, r_2 i r_3.

Glavna poteškoća je rješavanje tog sustava. Primjerice, Lob i Richmond u [3] uvode supstituciju $r_1 = x^2 r, r_2 = y^2 r$ i $r_3 = z^2 r$ kako bi pojednostavnili sustav i dobili sustav od tri jednadžbe stupnja 2 u nepoznanicama x, y, z. Pritom, oni označavaju $\operatorname{ctg}\alpha = l, \operatorname{ctg}\beta = m, \operatorname{ctg}\gamma = n$ i koriste poznatu trigonometrijsku formulu za kotangense kutova trokuta koja glasi

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}.$$

Na taj način dobivaju sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} lx^2 + 2xy + my^2 &= l + m \\ my^2 + 2yz + nz^2 &= m + n \\ nz^2 + 2zx + lx^2 &= n + l, \end{aligned}$$

uz koji vrijedi uvjet $lmn = l + m + n$.

Složenim postupkom, uz različite transformacije, dobivaju se rješenja u obliku 2.8.

Jasno je da su x^2, y^2 i z^2 pozitivni, a nije teško vidjeti da su sve tri vrijednosti manje od 1. Odatle se zaključuje da kružnice s ovim polumjerima leže unutar trokuta i jednoznačno određuju Malfattijevu konfiguraciju.

Poglavlje 3

Opće rješenje i pohlepan algoritam

U uvodu ovog rada je napomenuto kako su Lob i Richmond prvi opovrgnuli Malfattijevu slutnju. Oni su ustanovili da se za neke tipove trokuta, najveća površina dobiva pohlepnim algoritmom: to ovdje znači da se prvo upiše kružnica k_1 upisana trokutu, zatim kružnica k_2 koja dira k_1 i stranice uz najmanji kut u trokutu, a za k_3 se uzme kružnica upisana u područje najveće površine među preostalih pet područja unutar trokuta.

No, opće rješenje dali su Zalgaller i Los, pokazavši da pohlepni algoritam uvijek daje najveću ukupnu površinu, s tim što se to ostvaruje kroz jednu od dvije različite konfiguracije, ovisno o jednom uvjetu na kutove trokuta.

Neka je dan trokut ABC s kutovima $2\alpha, 2\beta, 2\gamma$. Za formulaciju glavnog rezultata pretpostavimo da vrijedi:

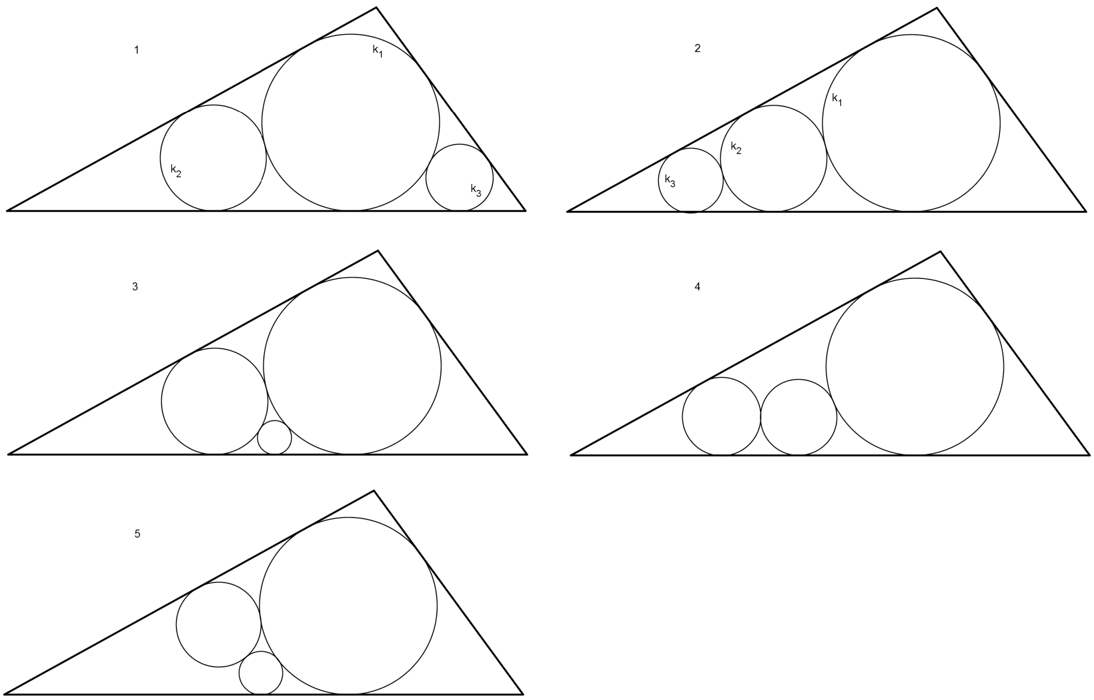
$$0 < \alpha \leq \beta \leq \gamma < \frac{\pi}{2}.$$

Glavni rezultat: Tri kruga, smještena unutar zadanog trokuta tako da nikoja dva od njih nemaju zajedničkih unutarnjih točaka, imaju najveću ukupnu površinu ako se rasporede na sljedeći način:

Kružnica k_1 je kružnica upisana trokutu ABC. Kružnica k_2 dira stranice $\overline{AB}, \overline{AC}$ i kružnicu k_1. U slučaju da vrijedi $\sin\alpha > \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$, kružnica k_3 dira stranice $\overline{BA}, \overline{BC}$ i kružnicu k_1. U slučaju $\sin\alpha < \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$, kružnica k_3 dira stranice $\overline{AB}, \overline{AC}$ i kružnicu k_2. Za $\sin\alpha = \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$ kružnica k_3 može se izabrati na bilo koji od spomenuta dva načina, koji predstavljaju bitno različite konfiguracije.

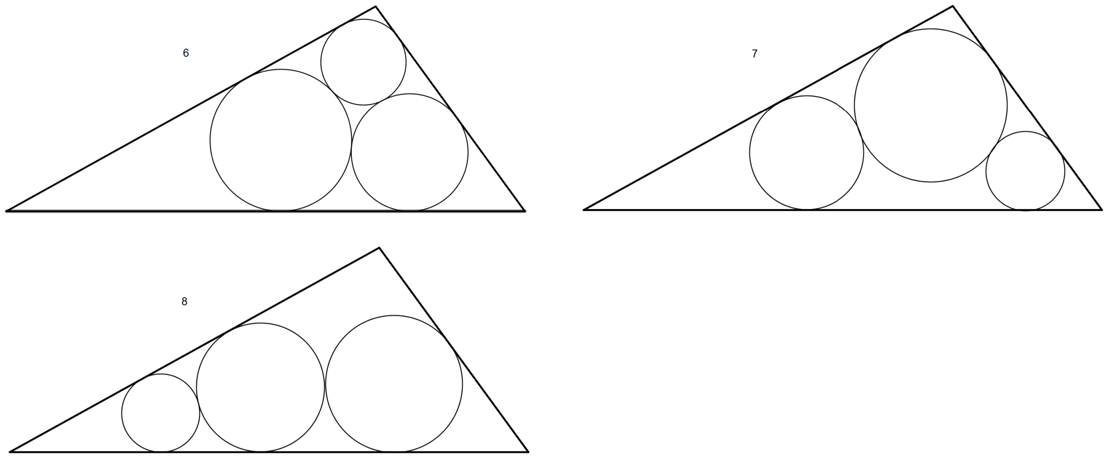
Do ovog rezultata dolazi se tako da se najprije odrede sve moguće bitno različite konfiguracije. Zalgaller i Los popisali su točno 14 slučajeva grupiranih u 4 skupine:

1. Kružnica k_1 dodiruje sve tri stranice trokuta, dakle ona je upisana kružnica zadanom trokutu te trokut dijeli u tri područja koja nisu pokrivena njezinim pripadnim krugom. Ako preostale dvije kružnice leže u različitim područjima, imamo konfiguraciju 1 na slici 3.1. Ako k_2 i k_3 leže u istom području, tada ili svaka dira dvije stranice trokuta (konfiguracija 2 na slici 3.1 ili jedna dira dvije stranice trokuta, a druga samo jednu (konfiguracije 3 i 4 na slici 3.1, ovisno o tome diraju li se prve dvije kružnice ili ne) ili svaka dira samo jednu stranicu trokuta kao što je prikazano u konfiguraciji 5 na slici 3.1.



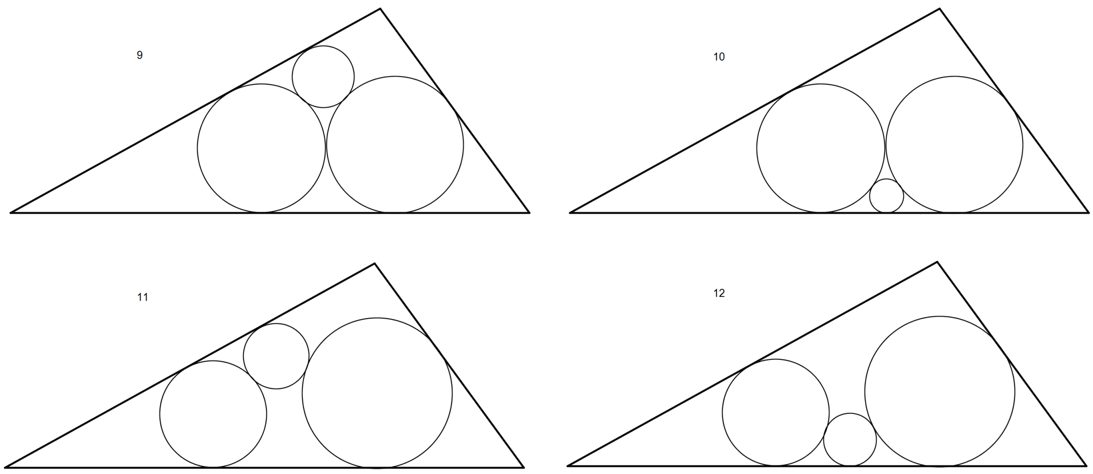
Slika 3.1: Prva skupina

2. Pretpostavimo da svaka kružnica dodiruje točno dvije stranice trokuta. Ako središta svih kružnica leže na različitim simetralama kutova tada ili svaka kružnica dira preostale dvije kružnice (konfiguracija 6 na slici 3.2) ili jedna kružnica dira ostale kružnice koje se ne diraju međusobno (konfiguracija 7 na slici 3.2). Ako središta dviju kružnica leže na simetrali istog kuta, tada imamo situaciju prikazanu u konfiguraciji 8 na slici 3.2. Situaciju da središta svih triju kružnica leže na istoj simetrali već smo naveli u prvoj skupini i vidljiva je u konfiguraciji 2 na slici 3.1.



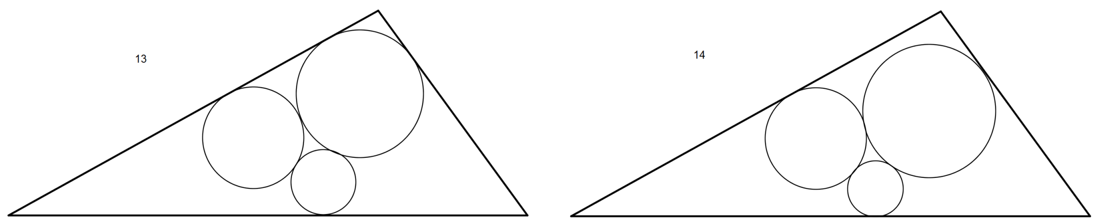
Slika 3.2: Druga skupina

3. Pretpostavimo da dvije kružnice diraju po dvije stranice trokuta i da treća kružnica dira samo jednu stranicu. Tada se prve dvije kružnice ili diraju (konfiguracije 9 i 10 na slici 3.3) ili ne diraju (konfiguracije 11 i 12 na slici 3.3).



Slika 3.3: Treća skupina

4. Ako jedna kružnica dira dvije stranice trokuta, a preostale dvije kružnice diraju samo jednu stranicu trokuta, onda imamo situaciju prikazanu u konfiguraciji 13 na slici 3.4. Ako svaka kružnica dira samo po jednu stranicu trokuta, tada imamo situaciju prikazanu u konfiguraciji 14 na slici 3.4.



Slika 3.4: Četvrta skupina

Nadalje, pokazuje se da samo konfiguracije 1 i 2 na slici 3.1 mogu dati maksimalnu površinu, a međusobnom usporedbom tih dviju konfiguracija pokazuje se da uvjet na kutove $\left(\sin\alpha < \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} \text{ ili } \sin\alpha > \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right)$ naveden u glavnom rezultatu određuje koja od njih daje veću površinu (odnosno da su u posebnom slučaju $\sin\alpha = \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$ površine jednake za obje konfiguracije).

Eliminacija konfiguracija 3-14 predstavlja najteži dio rada. Među njima posebno je zanimljiva konfiguracija broj 6, jer upravo to je Malfattijeva konfiguracija.

Zato nju izabiremo kao primjer da konfiguracije 1 ili 2 na slici 3.1 uvijek daju bolje rješenje.

Usporedba konfiguracija 1 i 2: U konfiguraciji 1, kružnice k_2 i k_3 smještavamo u dva manja kuta trokuta dok su u konfiguraciji 2 kružnice k_2 i k_3 'stisnute' u isti kut trokuta. Ako je kružnica k polumjera r upisana u kut 2δ, tada kružnica upisana u isti kut, ali bliže vrhu trokuta koja pritom dira kružnicu k, ima polumjer x koji ćemo sada izračunati

Iz dva slična pravokutna trokuta imamo

$$|OP| = \frac{x}{\sin\delta}, \tag{3.1}$$

i

$$|OS| = \frac{r}{\sin\delta}. \tag{3.2}$$

Udaljenost između točaka O i S možemo pisati kao

$$|OS| = |OP| + x + r. \tag{3.3}$$

Uvrštavanjem jednakosti (3.1) i (3.2) u (3.3) imamo

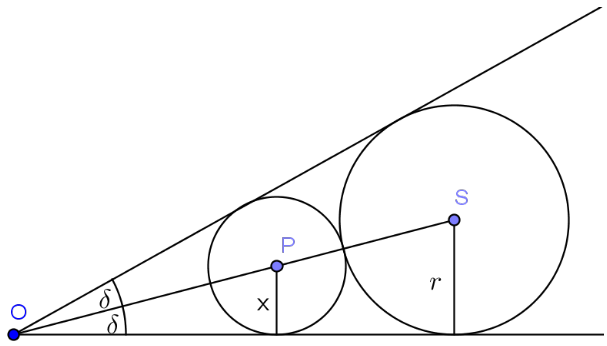
$$\frac{x}{\sin\delta} + x + r = \frac{r}{\sin\delta}$$

Odavde lako dobivamo

$$x = r \cdot \frac{1 - \sin\delta}{1 + \sin\delta}. \tag{3.4}$$

Sada je povoljno preći na kut $\dfrac{\delta}{2}$. Pomoću poznatih trigonometrijskih relacija lako dobivamo

$$\sin\delta = 2 \cdot \frac{\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\delta}{2}}.$$



Slika 3.5: Kut 2δ

Sada formulu 3.4 možemo pisati kao

$$\begin{aligned}
x &= r \cdot \frac{1-\sin\delta}{1+\sin\delta} \\
&= r \cdot \frac{1 - 2 \cdot \frac{\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\delta}{2}}}{1 + 2 \cdot \frac{\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\delta}{2}}} \\
&= r \cdot \frac{1+\operatorname{tg}^2\frac{\delta}{2} - 2\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\delta}{2} + 2\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}} \\
&= r \cdot \frac{(1-\operatorname{tg}\frac{\delta}{2})^2}{(1+\operatorname{tg}\frac{\delta}{2})^2}.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Usporedba konfiguracija 1 i 2 sada se svodi na ispitivanje nejednakosti

$$r \cdot \left(\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}}\right)^2 \geq r \cdot \left(\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}\right)^2,$$

koja se zbog uvjeta $0 < \alpha \leq \beta$ lako pojednostavni na $\sin\alpha \geq \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$.

Dakle, konfiguracija 1 je rješenje ako je $\sin\alpha > \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$, konfiguracija 2 ako je $\sin\alpha < \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$, a u slučaju $\sin\alpha = \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$ obje (bitno različite) konfiguracije daju istu ukupnu površinu.

Eliminacija Malfattijeve konfiguracije: Još ćemo ukratko izložiti kako se pokazuje da Malfattijeva konfiguracija daje slabiji rezultat. Iz (2.8) znamo da su polumjeri Malfattijevih kružnica jednaki

$$\begin{aligned}
r_1 &= \frac{(1+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2})(1+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2})}{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{r}{2}, \\
r_2 &= \frac{(1+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2})(1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2})}{1+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}} \cdot \frac{r}{2}, \\
r_3 &= \frac{(1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2})(1+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2})}{1+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}} \cdot \frac{r}{2}.
\end{aligned}$$

Pripadna površina iznosi $(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)^2\pi$.

S druge strane, površina za konfiguracije 1 ili 2 izražena je pomoću r^2 i neka dva kvadrata polumjera oblika $r \cdot \frac{1-\sin\delta}{1+\sin\delta}$, gdje je δ polovina odgovarajućeg kuta trokuta. Označimo s $r_\alpha, r_\beta, r_\gamma$ te polumjere.

Dovoljno je pokazati da

$$r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 < r^2 + \frac{2}{3}(r_\alpha^2 + r_\beta^2 + r_\gamma^2).$$

Naime, ako vrijedi ova nejednakost, onda lijeva strana ne može biti veća ili jednaka svim trima izrazima

$$r^2 + r_\alpha^2 + r_\beta^2, r^2 + r_\beta^2 + r_\gamma^2, r^2 + r_\gamma^2 + r_\alpha^2,$$

jer u tom slučaju zbrajanjem triju nejednakosti dobivamo

$$3(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) \geq 3r^2 + 2(r_\alpha^2 + r_\beta^2 + r_\gamma^2)$$

$$r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 \geq r^2 + \frac{2}{3}(r_\alpha^2 + r_\beta^2 + r_\gamma^2).$$

Uz pomoć trigonometrijskih transformacija tražena nejednakost pretvara se u oblik

$$\frac{(1+\operatorname{tg}\alpha')^4 + (1+\operatorname{tg}\beta')^4 + (1+\operatorname{tg}\gamma')^4}{(1+\operatorname{tg}\alpha')^2(1+\operatorname{tg}\beta')^2(1+\operatorname{tg}\gamma')^2} < 1 + \frac{2}{3}(\operatorname{tg}^4\alpha' + \operatorname{tg}^4\beta' + \operatorname{tg}^4\gamma'),$$

pri čemu su umjesto α, β, γ uvedene oznake

$$2\alpha' = \frac{\pi}{2} - \alpha, 2\beta' = \frac{\pi}{2} - \beta, 2\gamma' = \frac{\pi}{2} - \gamma.$$

Uočimo da su i $2\alpha', 2\beta', 2\gamma'$ također kutovi jednog šiljastokutnog trokuta, jer su i $2\alpha, 2\beta, 2\gamma$ takvi, a pritom vrijedi

$$2(\alpha' + \beta' + \gamma') = \frac{3\pi}{2} - (\alpha + \beta + \gamma) = \pi.$$

Ovdje se primjenjuje nejednakost koju je Zalgaller dokazao i objavio u prethodnom broju istog časopisa, a glasi

$$\frac{(1+\operatorname{tg}\alpha')^4 + (1+\operatorname{tg}\beta')^4 + (1+\operatorname{tg}\gamma')^4}{(1+\operatorname{tg}\alpha')^2(1+\operatorname{tg}\beta')^2(1+\operatorname{tg}\gamma')^2} \leq C + \frac{2}{3}(\operatorname{tg}^4\alpha' + \operatorname{tg}^4\beta' + \operatorname{tg}^4\gamma'),$$

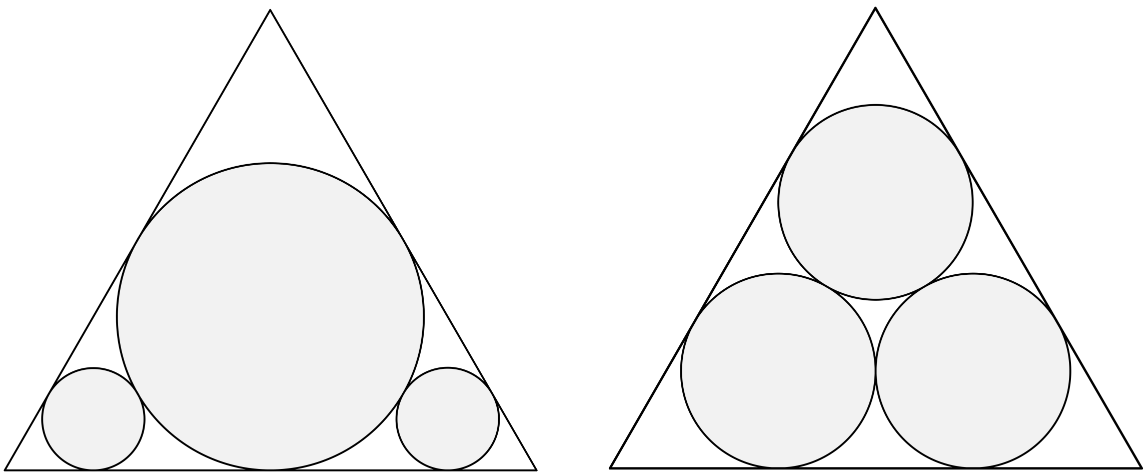
gdje je

$$C = \frac{9}{(\sqrt{3}+1)^2} - \frac{2}{9} \approx 0.98355 < 1.$$

Kako je $C < 1$, vrijedi nejednakost koju je trebalo dokazati.

Već ovaj primjer dobro ilustrira težinu eliminacije ostalih konfiguracija koje ne daju optimalan rezultat. Zapravo, u članku Zalgallera i Losa vidi se da je eliminacija preostalih slučajeva još znatno teža te se ne može ukratko izložiti u ovom radu.

Na kraju, pokazat ćemo da u slučaju jednakostraničnog trokuta, pohlepni algoritam daje veću površinu nego Malfattijeva konfiguracija.



Slika 3.6: Jednakostranični trokut

Za jednakostranični trokut, relacije (2.8) daju

$$r_1 = r_2 = r_3 = \frac{r}{2} \cdot \left(1 + \operatorname{tg} \frac{\pi}{12}\right).$$

Kako je $\operatorname{tg} \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$, imamo $r_1 = \frac{r}{2}(3 - \sqrt{3})$.

Ukupna površina krugova iz Malfattijeve konfiguracije stoga iznosi

$$9\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) r^2 \pi.$$

S druge strane, ako uzmemo kružnicu upisanu u jednakostraničan trokut i dvije kružnice upisane u različite kutove trokuta, koje diraju upisanu kružnicu, zbroj površina iznosi

$$(r^2 + 2x^2)\pi,$$

pri čemu iz relacije (3.5)

$$x = r \cdot \left(\frac{1 - \operatorname{tg} \frac{\pi}{12}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\pi}{12}} \right)^2 .$$

Sada je

$$r^2 + 2x^2 = r^2 \left[1 + 2 \left(\frac{1 - \operatorname{tg} \frac{\pi}{12}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\pi}{12}} \right)^4 \right].$$

Izraz u uglatoj zagradi jednak je

$$1 + 2 \left(\frac{\sqrt{3} - 1}{3 - \sqrt{3}} \right)^4 = 1 + 2 \cdot \frac{1}{9}.$$

Preostaje usporediti $1 + \frac{2}{9}$ i $9 \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$.

Dobivamo da je

$$1 + \frac{2}{9} > 9 \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right),$$

jer se pojednostavljivanjem ova nejednakost svodi na

$$\sqrt{3} > \frac{140}{81} \approx 1.728395.$$

Dakle, konfiguracija dobivena pohlepnim algoritmom doista daje površinu veću nego Malfattijeva. Pritom, kako je

$$\sqrt{3} - \frac{140}{81} < 0.015,$$

razlika površina manja je od 1.5%.

Bibliografija

1. M. Andreatta, A. Bezdek, J.P. Boronski, *The problem of Malfatti: Two centuries of debate*, The Mathematical Intelligencer 33 (1) (2010.), 72.-76., dostupno na:

   http://alpha.science.unitn.it/ andreatt/Malfatti.pdf (svibanj, 2015.)

2. V. Kadum, *Malfattijev problem*, Matematički obzori 2 (2007.), 127.-133.

3. H. Lob, H. W. Richmond, *The solution of Malfatti's problem for a triangle*,, Proceedings of the London Mathematical Society 30 (1) (1930.), 287.-304.

4. M. Goldberg, *On the original Malfatti problem*, Mathematics Magazine 40 (1967.), 241.-247.

5. M. R. Stevanović, *Triangle Centers Associated with the Malfatti Circles*, Forum Geometricorum 3 (2003.), 83.-93.

6. M. Trplan, *Steiner - Malfattijev problem*, diplomski rad, Sveučilište u Mariboru, Maribor, 2009.

7. V. A. Zalgaller, G.A. Los, *The solution of Malfatti's problem*, Journal of Mathematical Sciences 72 (4) (1994.), 3163.-3177.

8. *Circle of similitude of two circles*, dostupno na:

   http://www.math.uoc.gr/ pamfilos/eGallery/problems/CirclesSimilar.html (rujan, 2015.)

9. *Gian Francesco Malfatti*, dostupno na:

   http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Malfatti.html (svibanj, 2015.)

10. *Malfatti circles*, dostupno na:

    https://en.wikipedia.org/wiki/Malfatti circles (kolovoz, 2015.)

11. *Malfatti's problem*, dostupno na:

    http://www.math.uoc.gr/ pamfilos/eGallery/problems/Malfatti.html (kolovoz, 2015.)

Sažetak

U radu su izloženi glavni rezultati vezani uz klasični Malfattijev problem iz 1803. godine izrezivanja tri valjka iz uspravne trostrane prizme tako da njihov ukupni volumen bude maksimalan. Ovaj stereometrijski zadatak očito se svodi na planimetrijski problem smještavanja tri kruga unutar zadanog trokuta tako da njihova ukupna površina bude najveća moguća.

Malfattijeva slutnja da optimalan raspored čine tri kružnice takve da se svake dvije dodiruju međusobno, a svaka pritom dira dvije stranice trokuta pokazala se pogrešnom, ali je potaknula razne konstrukcije takve konfiguracije kružnica, kao i izračunavanje njihova položaja primjenom algebarskih i geometrijskih metoda.

Problem najveće površine pokazao se vrlo teškim te je cjelovito rješenje postignuto tek potkraj 20. stoljeća, rezultatom da pohlepni algoritam uvijek daje optimalan raspored kružnica, površine veće nego za Malfattijevu konfiguraciju.

Summary

In this diploma thesis we exhibit the main results related to the classical Malfatti's problem (1803.) of cutting out three cylinders with maximal total volume out of a triangular prism. This stereometric riddle can obviously be reduced to the planimetric problem of placing three circles inside a given triangle so that they cover the largest possible area.

Malfatti's conjecture that the optimal arrangement is achieved for three circles such that each one is tangent to the other two and to two sides of the triangle turned out to be wrong. However, this assumption initiated various constructions of such a configuration of circles, as well as calculations of their position using algebraic and geometric methods.

The problem of maximizing the area proved to be very hard and the complete solution was accomplished in the late 20th century. The result shows that a greedy algorithm always yields the optimal arrangement of circles, with the corresponding area larger than the one obtained by the Malfatti's configuration.

Životopis

Rođena sam 18. ožujka 1990. godine u Sisku. Osnovnoškolsko obrazovanje započinjem 1996. godine u Područnoj školi Žažina u Žažini te nastavljam 2000. godine u Osnovnoj školi Sela u Selima. Godine 2004. upisujem se u Ekonomsku školu Sisak u Sisku, gdje sam 2008. godine maturirala i branila završni rad na temu *Potrošačka košarica*. Iste godine nastavljam daljnje obrazovanje na Prirodoslovno - matematičkom fakultetu u Zagrebu te 2013. godine završavam preddiplomski studij matematike, smjer: nastavnički. Nakon toga upisujem diplomski sveučilišni studij matematike, smjer: nastavnički.