Skupovne interpretacije modalne logike

Kiršek, Filip

Master's thesis / Diplomski rad

2016

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Filip Kiršek

SKUPOVNE INTERPRETACIJE MODALNE LOGIKE

Diplomski rad

Voditelji rada:
izv. prof. dr. sc.
Mladen Vuković
dr. sc.
Tin Perkov

Zagreb, rujan 2016.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Obitelji i prijateljima, zbog razumjevanja.
Leonori, zbog potpore tokom studija.
Mentorima, zbog strpljenja.

Sadržaj

Uvod

Povijest modalne logike počinje već s Aristotelom u 4. stoljeću pr.n.e. koji uvodi ideje nužnosti i mogućnosti. Dapače, postoje naznake u nekim njegovim radovima da je razmatrao te pojmove u relaciji s vremenom, dajući time prve naznake temporalne logike. No, mnogi kasniji logičari, poput Jana Łukasiewicza, su njegov rad na modalnoj logici smatrali manjkavim i inkonzistentnim.

Iako su se i mnogi kasniji logičari, poput Avicenna ili Abelarda, bavili modalnom logikom, ona se u modernom smislu počinje razvijati radovima C. I. Lewisa i Saula Kripkea u 20. stoljeću. Upravo Kripke uvodi formalnu semantiku modalnih sustava koja je najkorištenija danas. Naglim razvojem matematike u 20. stoljeću se događa i razvoj modalne logike, primjerice uvođenjem temporalnih logika. Jedan od pravaca razvoja je i interpretacija operatora $\Box$ kao predikata dokazivosti u sustavu Peanovih aksioma. To pak vodi do proučavanja i drugih semantika, primjerice onih dobivenim interpretiranjem operatora $\Box$ kao istinitosti u određenoj klasi modela.

S druge strane, teorija skupova je poprilično moderna matematička teorija. Iako postoje dokazi da se ideje skupova pojavljuju već u antici, tek s radovima Georga Cantora se može pričati o njenom pravom razvoju. Otkrivanje paradoksa u naivnoj teoriji skupova, te kasnija formalizacija aksiomatske teorije skupova nazvane Zermelo-Fraenkelove teorija skupova (kratko ZF) vode do iznimno raširenog proučavanja teorije skupova u matematici. Jedan od razloga njenoj raširenosti je činjenica da je to dovoljno snažna teorija da se sustav ZF može koristiti kao temelj skoro svakog aksiomatiziranja grane matematike (je li to korisno je rasprava za neki drugi rad). Gödelovi teoremi nepotpunosti su otvorili i filozofska pitanja o samoj ideji matematike. Matematičke posljedice Gödelovih teorema nepotpunosti su se pokazale puno dalekosežnijima nego što se to na prvi pogled činilo. Tako su dodale i posve drugačije načine proučavanja matematičkih teorija, jedan od kojih inkorporira upravo modalnu logiku.

Neke od najvažnijih radova na području logike dokazivosti je napisao Robert Martin Solovay. Njegovi radovi iz 1976. su se pokazali temeljnima u dokazivanju potpunosti interpretiranja formula modalne logike kroz sustav ZF.

U prvom poglavlju ovog rada formalno uvodimo pojmove vezane za modalnu logiku kao što su: alfabet i Kripkeova semantika. Dokazujemo teoreme potpunosti za modalne sustave K, GL (Gödel-Löb) i I. Ti sustavi su poprilično standardni u modalnoj logici, kao i dokazi njihove potpunosti. Većina sadržaja je bazirana na knjizi Boolosa, [1], te Vukovića, [5].

U drugom poglavlju uvodimo i prezentiramo neke osnovne pojmove i teoreme vezane za Zermelo-Fraenkelovu teoriju skupova. Zbog širine područja, navedeni su tek oni koji su neophodni u razumijevanju trećeg poglavlja. Teoremi i pojmovi koji se pojavljuju u ovom poglavlju su većinom bazirani na [2], [3] te [4].

U trećem poglavlju prezentiramo Solovayove teoreme aritmetičke potpunosti, te dokazujemo drugi Solovayov teorem. Solovayi teoremi upravo povezuju skupovnu semantiku modalnih formula, te dokazivost tih formula u (određenim) modalnim sustavima.

Poglavlje 1

Modalna logika

U ovom poglavlju su izloženi osnovni pojmovi modalnih sustava, definirani modalni sustavi K, GL i I, definirana Kripkeova semantika, te dokazani teoremi adekvatnosti i potpunosti za te sustave.
Spomenuta Kripkeova semantika nije jedina moguća semantika tih sustava. Primjerice, sustav GL je logika dokazivosti za dokazivost u sustavu Peanove aritmetike. No, time je moguće povezati dokazivost u PA s Kripkeovom semantikom, preko sustava GL, što pruža i druge zanimljive rezultate o samom PA.

1.1 Definicije i osnovni sustavi

Modalni alfabet i formule

Definicija 1.1.1. Alfabet modalne logike *je unija sljedećih skupova:*

$$A_1 = \{p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$$

$$A_2 = \{\rightarrow, \bot, \Box\}$$

$$A_3 = \{(,)\}$$

gdje je A_1 *prebrojiv skup čije elemente nazivamo* propozicionalne varijable*,* A_2 *skup* logičkih veznika i modalnog operatora $\Box$ *te* A_3 *skup* pomoćnih simbola *(zagrada).*

U ovom radu promatramo samo modalne sustave čiji su jezici bazirani na prethodnom alfabetu. Moguće je, međutim, promatrati i druge modalne alfabete, s primjerice dva (bimodalne logike) ili više (polimodalne logike) modalnih operatora.

Definicija 1.1.2. Atomarne formule *su sve propozicionalne varijable i* $\bot$*. Pojam* modalne formule *definiramo rekurzivno na sljedeći način:*

1. *Sve atomarne formule su formule.*
2. *Ako su A i B formule, onda su formule i* $\Box(A)$ *te* $(A \to B)$.

Modalne formule nekad zovemo i modalnim rečenicama. Radi lakše čitljivosti, malim slovima p, q,... su nekad označene propozicionalne varijable p_0, p_1 ..., dok velika slova A, B, ... označavaju varijable nad modalnim formulama. Iz istog razloga umjesto formula $(A \to B)$ i $\Box(A)$ često pišemo $A \to B$ te $\Box A$.

Jedini dodatak u odnosu na logiku sudova je modalni operator nužnosti, $\Box$. Intuitivno, a i po klasičnoj interpretaciji, $\Box P$ označava da je P nužan, tj. da je istinit u svim dostiživim svjetovima. Ova intuicija je i formalizirana semantikom Kripkeovih okvira, koje definiramo kasnije. Međutim, moguće su i druge semantike, ovisno o korištenom modalnom sustavu.
Iako nije uobičajeno koristiti $\bot$ kao logički veznik, pošto bi se moglo tvrditi da potpada pod semantiku, neke ideje je lakše formalizirati njegovim korištenjem. Ostali često korišteni logički veznici se, jednostavnosti radi, definiraju pomoću veznika u $\to$, $\bot$ te $\Box$. Primjerice, $\neg A = A \to \bot$, te $A \vee B = \neg A \to B$.
Dalje pretpostavljamo da su svi ostali uobičajeni veznici, $\{\neg, \wedge, \vee, \leftrightarrow\}$ definirani, na uobičajene načine.
Modalni operator mogućnosti $\Diamond$ predstavlja da je sud koji ga slijedi moguć, tj. istinit u barem nekom od dostiživih svjetova. On se definira pomoću $\Box$ kao:

$$\Diamond A = \neg\Box\neg A$$

što se prikladno poklapa s intuicijom; ukoliko je nešto moguće (dakle istinito barem u nekom od dostiživih svjetova), onda nije moguće da je njegova negacija istina u svim dostiživim svjetovima.
Dodatno, definirajmo $\boxdot A = \Box A \wedge A$.

Definicija 1.1.3. *Za modalnu formulu A rekurzivno definiramo pojam* podformule *na sljedeći način:*

1. *A je podformula formule A.*
2. *Ako je* $B \to C$ *podformula od A, onda su B i C podformule.*
3. *Ako je* $\Box B$ *podformula od A, onda je i B podformula od A.*

Modalni sustavi

Za razliku od logike sudova, gdje su na različite načine definirani ekvivalentni sustavi, postoje mnogi modalni sustavi koji se razlikuju u odabiru aksioma. Za ovaj rad su najbitniji sustavi GL te I, koji su definirani u ovom odlomku.

Sve tautologije logike sudova se mogu dobiti iz nekog konačnog skupa shema aksioma korištenjem samo pravila izvoda modusa ponens. Frege-Łukasiewiczev sustav je jedan takav primjer shema aksioma, te se u [5] nalaze dokazi njegove adekvatnosti i potpunosti.

Modalni sustavi bi se na sličan način mogli svesti na konačan skup shema aksioma. No, jednostavnosti radi, sustavi modalne logike koji će ovdje biti izloženi će sadržavati sve tautologije logike sudova, te formule dobivene supstitucijom modalnih formula u njih. Primjerice, pošto je $p \vee \neg p$ tautologija, ti modalni sustavi sadrže i $\Box p \vee \neg \Box p$.

Definicija 1.1.4. *Modalni sustav je uređeni par (A, P), gdje je A skup modalnih formula koje nazivamo* aksiomi*, a P skup relacija nad skupom svih modalnih formula, koje nazivamo* pravila izvoda*.*
Za modalnu rečenicu B kažemo da je dobivena pravilom izvoda R iz formula $A_1, \ldots, A_n$ ako je $(A_1, \ldots, A_n, B) \in R$.
Dokaz *u (nekom) sustavu modalne logike je konačan niz modalnih formula od kojih je svaka formula u nizu aksiom, ili je dobivena nekim od pravila izvoda iz prethodnih formula. Zadnja formula dokaza je teorem tog sustava.*
Sa $L \vdash B$ označavamo da je B teorem sustava L.

Definicija 1.1.5. Modus ponens *je pravilo izvoda koje sadrži sve trojke $((A \to B), A, B)$, gdje su A i B proizvoljne formule.*
Nužnost *je pravilo izvoda koje sadrži sve parove $(A, \Box A)$, gdje je A proizvoljna formula.*

Definicija 1.1.6. Aksiom distributivnosti *je svaka formula oblika*

$$(\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)),$$

gdje su A i B proizvoljne formule.

Definicija 1.1.7. *Za modalni sustav L kažemo da je* normalan *ako skup njegovih teorema sadrže sve tautologije, sve aksiome distributivnosti, te je zatvoren na pravila izvoda modus ponens i nužnost.*

Dalje predstavljamo nekoliko normalnih modalnih sustava.

Definicija 1.1.8. *Svaki od dalje navedenih sustava sadrži za aksiome sve tautologije i sve aksiome distributivnosti, te su im jedina pravila izvoda modus ponens i nužnost.*

Modalni sustav K ne sadrži dodatne aksiome, osim tautologija i aksioma distributivnosti.
Sustav K4 za aksiome sadrži i formule oblika $\Box A \to \Box\Box A$.
Sustav GL (Gödel-Löb) za aksiome sadrži i formule oblika $\Box(\Box A \to A) \to \Box A$. *Sustav I za aksiome sadrži i formule oblika* $\Box(\Box A \to A) \to \Box A$ *te formule oblika* $\Box(\Box A \to \Box B) \vee \Box(\Box B \to \boxdot A)$

Sljedeći teoremi normalnih sustava, s dokazom u [1, poglavlju 1., teoremi 1. do 3], su potrebni u dokazima teorema 1.1.10.

Lema 1.1.9. *Neka je L normalan sustav. Tada za proizvoljne modalne formule A i B vrijedi:*

a) $L \vdash (A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$

b) $L \vdash (A \leftrightarrow B) \to (\Box A \leftrightarrow \Box B)$

c) $L \vdash \Box(A \wedge B) \leftrightarrow (\Box A \wedge \Box B)$

Sustav L' *proširuje* sustav L ako su svi teoremi sustava L ujedno i teoremi sustava L'. Očito je da su svi ostali sustavi proširenja sustava K, te da sustav I proširuje GL. Može se pokazati i da GL proširuje K4 (pa ga proširuje i I), što dokazuje sljedeći teorem.

Teorem 1.1.10. *Za proizvoljnu modalnu formulu A vrijedi:*

$$GL \vdash \Box A \to \Box\Box A$$

Dokaz. Svaka formula oblika $A \to ((B \wedge C) \to (C \wedge A))$ je tautologija, pa i za $B = \Box\Box A$ te $C = \Box A$ slijedi:

$$\mathrm{GL} \vdash A \to ((\Box\Box A \wedge \Box A) \to (\Box A \wedge A))$$

iz čega, zbog normalnosti GL-a (i tvrdnje c) prethodnog teorema) slijedi

$$\mathrm{GL} \vdash A \to ((\Box(\Box A \wedge A)) \to (\Box A \wedge A)).$$

Ponovno, po normalnosti (točnije, po nužnosti i aksiomima distributivnosti)

$$\mathrm{GL} \vdash \Box A \to \Box(\Box(\Box A \wedge A) \to (\Box A \wedge A)).$$

Kako je svaka formula oblika $\Box(\Box D \to D) \to \Box D$ aksiom GL-a, za $D = (\Box A \wedge A)$ je to:

$$\mathrm{GL} \vdash \Box(\Box(\Box A \wedge A) \to (\Box A \wedge A)) \to \Box(\Box A \wedge A).$$

Formula $(D \to E) \to ((E \to F) \to (D \to F))$ je tautologija za proizvoljne formule D, E, F. Uz $D = \Box A$, $E = \Box(\Box(\Box A \wedge A) \to (\Box A \wedge A))$ i $F = \Box(\Box A \wedge A)$, dvostrukom primjenom pravila izvoda modus ponens iz prethodne dvije tvrdnje slijedi:

$$\mathrm{GL} \vdash \Box A \to \Box(\Box A \wedge A). \tag{1.1}$$

Također, iz tautologije $(B \wedge C) \to C$, te uz distributivnost $\Box$ na $\wedge$ slijedi:

$$\mathrm{GL} \vdash \Box(\Box A \wedge A) \to \Box\Box A. \tag{1.2}$$

Sada, iz (1.1) i (1.2) na isti način kao i prije slijedi:

$$\mathrm{GL} \vdash \Box A \to \Box\Box A. \tag{1.3}$$

$\Box$

1.2 Semantika modalnih sustava

Semantika logike sudova je pridruživanje istinosnih vrijednosti propozicionalnim varijablama, te proširivanje istih na složenije formule. Intuitivno shvaćanje toga je pridruživanje vrijednosti "istina" ili "laž" nekim osnovnim tvrdnjama, ovisno o našim saznanjima o svijetu. Vrijednosti složenijih tvrdnji se tada izračunavaju iz vrijednosti osnovnih.

Ovo intuitivno shvaćanje logike sudova se prilično glatko preslikava na njenu najčešću upotrebu u logici i matematici. Naravno, formalnu semantiku možemo interpretirati (u neformalnom smislu) i na druge načine - primjerice stanja sklopova u digitalnoj logici.

Osnovne ideje nužnosti i mogućnosti su, slično logici sudova, relativno jasne. Nužni sudovi su oni za koje nije moguća njihova negacija - tj. $\Box A = \neg\Diamond\neg A$. Zato i ne čudi da se već Aristotel bavio modalnom logikom. Međutim, iako je teoriju silogizama usavršio, njegov rad na modalnoj logici je imao mnoge mane, i nije se smatralo da je od posebne važnosti. I zaista, iako su osnovni pojmovi nužnosti i mogućnosti shvatljivi, nije posve jasno kako shvatiti složenije sudove. Što, primjerice, predstavlja $\Box A \to \Box\Box A$?
Saul Kripke je formalizirao uobičajenu semantiku modalnih logika. Ideja je slična Leibnizovoj filozofiji o mogućim svjetovima: promatramo skup svjetova i relacije dostiživosti između tih svjetova. U svakom svijetu promatramo istinosne vrijednosti propozicionalnih varijabli, tj. tvrdnje koje vrijede u njemu. Za vrijednost suda $\Box A$ promatramo dostižive svjetove iz odabranog svijeta. Ukoliko u svim dostiživim svjetovima vrijedi A, sud je istinit u polaznom svijetu. Slično je s operatorom mogućnosti $\Diamond$; dovoljno je pronaći jedan dostiživ svijet u kojem vrijedi A kako bi sud $\Diamond A$ bio istinit.

Kripkeova semantika nije jedina; moguće je promatrati operator $\Box$ i kao dokazivost u nekom sustavu. Zaista, ispostavlja se da je GL upravo logika dokazivosti sustava Peanove aritmetike.

Proučavanje modalnih sustava započinjemo definiranjem Kripkeove semantike.

Definicija 1.2.1. *Neka je W neki neprazan skup, te $R \subseteq W \times W$ proizvoljna binarna relacija. Tada uređeni par (W, R) nazivamo* Kripkeov okvir, *ili kratko* okvir. *Elemente skupa W nazivamo svjetovi, a relaciju R nazivamo* relacija dostiživosti.
Kripkeov model $\mathfrak{M}$ *je uređena trojka $(W, R, \Vdash)$, gdje je (W, R) okvir, a $\Vdash$ je binarna relacija između svjetova i formula, koju nazivamo* relacija forsiranja, *ako za svaki svijet $w \in W$ i proizvoljne formule A, B vrijedi:*

$w \nVdash \bot$

$w \Vdash A \to B$ *ako i samo ako* $w \nVdash A$ *ili* $w \Vdash B$

$w \Vdash \Box A$ *ako i samo ako, za svaki* $v \in W$ *takav da* wRv *vrijedi* $v \Vdash A$.

Slično kao i za funkcije interpretacije logike sustava, relaciju forsiranja zadajemo definiranjem njenih vrijednosti za sve svjetove i propozicionalne varijable, te proširivanjem po gore navedenim svojstvima. Ostale logičke veznike $(\neg, \wedge, \vee, \leftrightarrow)$ te modalni operator mogućnosti $\Diamond$ promatramo po njihovim definicijama preko osnovnih simbola.
To znači da, po definiciji operatora $\Diamond$ i svojstava relacije $\Vdash$, vrijedi:

$w \Vdash \Diamond A$ ako i samo ako postoji $v \in W$ takav da vrijedi wRv i $v \Vdash A$.

Definicija 1.2.2. *Neka je* $\mathfrak{M} = (W, R, \Vdash)$ *Kripkeov model.*
Kažemo da je formula F istinita u svijetu w *modela* $\mathfrak{M}$ *ako* $w \Vdash F$.
Kažemo da je formula F istinita na modelu $\mathfrak{M}$ *ako za sve svjetove* $w \in W$ *vrijedi* $\mathfrak{M}, w \Vdash F$. *To kratko označavamo sa* $\mathfrak{M} \vDash F$.
Neka je $\mathcal{F} = (W, R)$ *Kripkeov okvir, te* F *formula. Kažemo da je formula* F *valjana na okviru* $\mathcal{F}$ *ako za svaku relaciju* $\Vdash$ *na* $\mathcal{F}$ *za model* $\mathfrak{M} = (W, F, \Vdash)$ *vrijedi* $\mathfrak{M} \vDash F$. *Oznaka:* $\mathcal{F} \vDash F$.
Kažemo da je formula F valjana *ako je valjana na svim Kripkeovima okvirima.*

Dodajmo još definicije modalne posljedice i ekvivalencije formula. Ne iznenađuje previše da se one poklapaju s intuicijom koju nam pruža definicija ekvivalentnih formula u logici sudova.

Definicija 1.2.3. *Neka su* A *i* B *proizvoljne modalne formule. Kažemo da je* B modalna posljedica formule A, *oznaka* $A \Rightarrow B$, *ako za svaki model* $(W, R, \Vdash)$ *i svaki svijet* $w \in W$ *vrijedi da* $w \Vdash A$ *povlači* $w \Vdash B$. *Za formule* A *i* B *kažemo da su* modalno ekvivalentne *ako vrijedi* $A \Rightarrow B$ *i* $B \Rightarrow A$.

1.3 Adekvatnost i potpunost modalnih sustava

Ovdje će biti predstavljeni teoremi adekvatnosti i potpunosti za sustave K, GL i I; slični rezultati postoje i za ostale sustave, ali oni nisu od velikog značaja u proučavanju semantike modalne logike u teoriji skupova. Ovdje je ključan pojam adekvatnosti.

Sustav K dokazuje upravo one, i samo one, formule koje su valjane na svim okvirima. Njegova adekvatnost zapravo ne iznenađuje previše. Već je poznata potpunost i adekvatnost logike sudova; time je opravdano uključivanje svih tautologija i pravila modus ponens. To dokazuje i sljedeća lema.

Lema 1.3.1. *Neka je $F(p_1, \ldots, p_n)$ tautologija logike sudova, te neka je*

$$F' = F(A_1/p_1, \ldots, A_n/p_n)$$

formula modalne logike nastala iz F simultanom supstitucijom propozicionalnih varijabli $p_1, \ldots, p_n$ proizvoljnim modalnim formulama $A_1, \ldots, A_n$. Tada je F' valjana formula.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji tautologija $F(p_1, \ldots, p_n)$ i F', formula modalne logike takva da $F' = F(A_1/p_1, \ldots, A_n/p_n)$, te model $\mathfrak{M} = (W, R, \Vdash)$ u kojem postoji $w \in W$ za koji $w \nVdash F'$. Definirajmo interpretaciju I na sljedeći način: $I(p_i) = 1$ ako i samo ako $w \Vdash A_i$.
Sada indukcijom po složenosti formule dokazujemo da za proizvoljnu formulu A koja ne sadrži druge propozicionalne varijable osim onih u F vrijedi $I(A)$ ako i samo ako je $w \Vdash A'$, gdje je A' formula $A' = A(A_1/p_1, \ldots, A_n/p_n)$.
Baza indukcije vrijedi po definiciji interpretacije I. Za korak indukcije je dovoljno provjeriti definiciju vrijednosti I na formuli oblika $A \to B$, te svojstva relacije $\Vdash$.
No, kako $w \nVdash F'$, slijedi $I(F) = 0$, što je u kontradikciji s pretpostavkom da je F tautologija. Dakle, F' je valjana formula. □

Teorem 1.3.2. *[Adekvatnost sustava K] Neka je A modalna formula. Ako $K \vdash A$, onda je A valjana formula.*

Dokaz. Dokaz ćemo provesti indukcijom po duljini dokaza u sistemu K. Ako je duljina dokaza jednak 1, tada je A neki aksiom sistema K, tj. A je tautologija (u modalnom jeziku), ili instanca sheme aksioma distributivnosti.
Ako je A tautologija, tada njena valjanost slijedi iz leme 1.3.1.
Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve dokaze duljine manje od n, za neki $n \in \mathbb{N}, n > 1$. Formulu A je tada moguće dobiti na kraju dokaza duljine n na sljedeća tri načina:

a) formula A je aksiom sistema K

b) koristeći pravilo izvoda modus ponens

c) koristeći pravilo izvoda nužnost.

Slučaj a) je identičan kao u bazi indukcije. U slučaju b) postoje formule B i C takve da $C = B \to A$, koje se nalaze ranije u dokazu. No, skraćeni dokaz formule A, upravo je dokaz za B, tj. C pa su, po pretpostavci indukcije, one valjane. Tada, za proizvoljan model i proizvoljan svijet w vrijedi $w \Vdash B$ i $w \Vdash B \to A$. Međutim, tada je očito $w \Vdash A$, pa je i A valjana.

Preostaje samo slučaj c). Neka je $A = \Box B$. Tada je dokaz za B duljine manje od n upravo dio dokaza za A do retka u kojem se pojavljuje B. Tada slijedi, po pretpostavci indukcije, da je B valjana. Stoga za proizvoljan model $\mathfrak{M}$ u proizvoljnom svijetu w vrijedi $w \Vdash \Box B$, jer je B valjana pa vrijedi u svim svjetovima, pa tako i u svim dostiživim iz w. Dakle, $w \Vdash \Box B$, to jest $w \Vdash A$. $\Box$

Teoremi adekvatnosti sustava K4, GL i I

Sljedeća lema veže dodatni aksiom sustava K4 uz tranzitivne okvire. Može se pokazati da su upravo takvi prikladni za dokazivanje adekvatnosti i potpunosti sustava K4. Kako su GL, pa time i I, proširenja od K4, sljedeća lema će poslužiti u dokazivanju njihove adekvatnosti.

Lema 1.3.3. *Sve formule oblika $\Box A \to \Box\Box A$ su valjane na nekom okviru (W, R) ako i samo ako je R tranzitivna relacija.*

Dokaz. Pretpostavimo da je R tranzitivna relacija. Neka je $\Vdash$ proizvoljna relacija forsiranja. Pretpostavimo $w \Vdash \Box A$ i wRx. Ako je xRy tada, iz tranzitivnosti relacije R slijedi, wRy i zato $y \Vdash A$. Dakle, $x \Vdash \Box A$ pa $w \Vdash \Box\Box A$.

Obratno, pretpostavimo da su sve takve formule valjane na okviru (W, R). Tada je i $\Box p \to \Box\Box p$ valjana u tom okviru. Neka su $w, x, y \in W$ proizvoljni takvi da wRx i xRy. Definiramo $\Vdash$ takvu da, za proizvoljan $z \in W$, $z \Vdash p$ ako i samo ako wRz. Tada $w \Vdash \Box p$. No tada i $w \Vdash \Box\Box p$, pošto je $\Box p \to \Box\Box p$ valjana na okviru (W, R). Slijedi $x \Vdash \Box p$, $y \Vdash p$ i konačno wRy, zbog definicije relacije $\Vdash$. Pošto su w, x, y proizvoljni, R je tranzitivna relacija.

$\Box$

Definicija 1.3.4. *Za relaciju $R \subseteq W \times W$ kažemo da je* dobro fundirana *ako i samo ako za svaki neprazan $X \subseteq W$ postoji minimalan element, tj. $w \in X$ takav da ne postoji $x \in X$ za koji je xRw.*
Za relaciju R kažemo da je inverzno dobro fundirana *ako je relacija R^{-1} dobro fundirana.*

Ekvivalentna definiciji inverzne dobre fundiranosti relacije R je tvrdnja da ne postoji niz (x_n) takav da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijede lanci $x_n R x_{n+1}$.

Definicija 1.3.5. Konačni predure đaj *je okvir* (W, R) *gdje je* W *konačan,* R *tranzitivna i irefleksivna relacija takva da za sve* $w, x, y \in W$*, vrijedi: ako je* wRx*, onda je* wRy *ili* yRx*.*

Za okvir (W, R), odnosno model $(W, R, \Vdash)$ kažemo da je tranzitivan, irefleksivan, dobro utemeljen, simetričan ili slično ako pripadna relacija R ima ta svojstva. Slično, za okvir, odnosno model, kažemo da je konačan ako je skup W konačan.

Lema 1.3.6. *Neka je* (W, R) *konačan, tranzitivan i irefleksivan okvir. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

(a) (W, R) *je konačan predure đaj.*

(b) Postoji funkcija $f : W \to \mathbb{N}$ *za koju vrijedi: za sve* $w, x \in W$*,* $f(w) > f(x)$ *ako i samo ako je* wRx*.*

Dokaz. Dokažimo da (a) povlači (b). Neka je (W, R) konačan, tranzitivan i irefleksivan okvir, te neka je dodatno konačan predure đaj . Tada su, za proizvoljan $w \in W$ svi R-nizovi konačni. Naime, W je konačan, pa je nemoguće imati beskonačno različitih elemenata niza. S druge strane, ukoliko bi niz sadržavao neki element koji se ponavlja, označimo ga s u, zbog tranzitivnosti bi vrijedilo uRu. No, to je nemoguće zbog irefleksivnosti okvira.
Definirajmo sada $f : W \to \mathbb{N}$ tako da je $f(w)$ duljina najduljeg R niza koji počinje sa w, ne uključujući sam w. Tada je, primjerice, za w za koji ne postoji $x \in W$ takav da je wRx, $f(w) = 0$.
Dokažimo sada da je f upravo tražena funkcija. Sada je očito da za $w, x \in W$ takve da je wRx vrijedi $f(w) \geq f(x) + 1$, pa je $f(w) > f(x)$.
Obratno, pretpostavimo $i = f(w) > f(x) = j$. Tada je za neke $w_i, \dots, w_0$, $x_j, \dots, x_0$, $w = w_i, x = x_j$ i $w_i R \dots R w_0$ te $x_j R \dots R x_0$. Sada zbog tranzitivnosti imamo wRw_j (te su očito različiti zbog $i > j$). Zbog svojstva predure đaja je tada ili wRx ili xRw_j. No, kada bi bilo xRw_j, tada bi postojao niz $xRw_j R \dots R w_0$ čija je duljina veća od j, pa je $f(x) \geq j + 1$, što je u kontradikciji s pretpostavkom. Dakle, wRx.
Dokažimo sada da (b) povlači (a). Pretpostavimo da postoji funkcija f takva da je za sve $w, x \in W$, $f(w) > f(x)$ ako i samo ako je wRx. Uzmimo $w, x \in W$ takve da je $f(w) > f(x)$, te uzmimo $y \in W$. Zbog $f(w) > f(x)$, mora vrijediti barem jedno od sljedećeg: $f(y) > f(x)$, ili $f(w) > f(y)$. Zbog svojstva funkcije f, u prvom slučaju bi bilo yRx, a drugom wRy. Dakle, (W, R) je konačan predure đaj. □

Neka je (W, R) konačan predure đaj. Tada, po prethodnoj lemi, postoji funkcija f sa svojstvima opisanim u (b) dijelu. Kako je W konačan, očito je da postoji n takav da je $f(w) \leq n$, za svaki svijet $w \in W$. Također, iz konstrukcije funkcije f u dokazu leme slijedi da možemo pretpostaviti da su svi prirodni brojevi $i \leq n$ u slici funkcije f. Dokaz te tvrdnje ide indukcijom po maksimalnoj vrijednosti funkcije f. Ukoliko je $max f$ jednak 0, tvrdnja očito vrijedi. Nadalje, pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $max f$ manji od n. Neka je $W' = \{w : w \in W, f(w) < n\}$, i R' restrikcija relacije R na W'. Tada restrikcija funkcije f na W' i dalje zadovoljava svojstvo (b) prethodne leme na okviru (W', R'). Kako je (W', R') također konačan, tranzitivan i irefleksivan okvir (konačnost i irefleksivnost vrijede očito, dok za tranzitivnost možemo primjetiti da za nijedan uklonjen svijet nije postojao $x \in W$ takav da xRw). Po pretpostavci indukcije, svi prirodni brojevi manji od n su u slici od restrikcije od f, pa tvrdnja vrijedi i za f.

Neka su $R_i \subseteq W$ praslike od i po funkciji f. Svi skupovi R_i su konačni i neprazni. Neka je r_i broj elemenata od R_i. Sada za svaki R_i uzmemo jednu bijekciju g_i sa skupa R_i u skup $\{0, \dots, r_i - 1\}$. Neka je sada $g(w) = g_f(w)(w)$

Neka je sada $W' = \{(f(w), g(w)) : w \in W\}$. Neka je R' relacija nad W' takva da $(i, j)R'(k, l)$ ako i samo ako je $i > k$. Po načinu konstrukcije okvira (W', R') je jasno da je on izomorfan sa (W, R). Naime, za $w, x \in W$ i $(f(w), g(w)), (f(x), g(x)) \in W'$ vrijedi wRx ako i samo ako $f(w) > f(x)$ što je, po definiciji od R', ako i samo ako $(f(w), g(w))R'(f(x), g(x))$. Funkcija $g(w)$ služi samo za razlikovanje svijetova kojima je vrijednost po f ista.

Nekad je korisnije promatrati (W', R') umjesto (W, R), a prethodno razmatranje nam omogućava da to radimo bez smanjenja općenitosti.

Različiti modalni sustavi odgovaraju različitim klasama Kripkeovih okvira. Zato za odabrane normalne sustave definiramo pojam adekvatnih okvira.

Definicija 1.3.7. *(a) Svaki okvir je* adekvatan za modalni sustav K.

(b) Za okvir (W, R) *kažemo da je* adekvatan za modalni sustav K4 *ako i samo ako je tranzitivan.*

(c) Za okvir (W, R) *kažemo da je* adekvatan za modalni sustav GL *ako i samo ako je tranzitivan i inverzno dobro fundiran.*

(d) Za okvir (W, R) *kažemo da je* adekvatan za modalni sustav I *ako i samo ako je konačan preduređaj.*

Za model $(W, R, \Vdash)$ *kažemo da je adekvatan za normalni modalni sustav L ako i samo ako je* (W, R) *okvir adekvatan za sustav L, gdje je L jedan od sustava K, K4, GL i I.*

Sustav I je proširenje sustava GL. Stoga ne čudi da postoji veza između klase okvira adekvatnih za I i klase okvira adekvatnih za GL.

Teorem 1.3.8. *Neka je* $\mathcal{F} = (W, R)$ *konačan i tranzitivan okvir. Tada je* $\mathcal{F}$ *irefleksivan ako i samo ako je inverzno dobro fundiran.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $\mathcal{F}$ inverzno dobro fundiran i pretpostavimo da postoji $w \in W$ takav da je wRw. No, tada postoji odozgo R-neograničen lanac (x_n) takav da $x_n R x_{n+1}$ ako uzmemo $x_n = w$, za svaki n, što je nemoguće. Dakle, $\mathcal{F}$ je irefleksivan.
Dokažimo obrat. Pretpostavimo da je $\mathcal{F}$ irefleksivan okvir. Pretpostavimo da postoji beskonačan niz svijetova (x_n) u (W, R) takav da $x_i R x_{i+1}$. Međutim, zbog konačnosti od W je nemoguće da su svi x_i različiti svjetovi. Dakle, postoje $i, j \in \mathbb{N}$ takvi da $x_i = x_j$. Zbog tranzitivnosti, $x_i R x_i$. No, to je nemoguće zbog irefleksivnosti relacije R. Dakle, (x_n) ne može biti beskonačan, pa je i relacija R inverzno dobro fundirana.

$\square$

Sljedeća dva teorema vežu dodatne aksiome sustava GL i I s posebnim okvirima, te time daju osnovu dokaza njihove adekvatnosti.

Teorem 1.3.9. *Neka je (W, R) konačan predureďaj . Tada je na njemu valjana formula*

$$S = \square(\square p \to \square q) \vee \square(\square q \to \boxdot p)$$

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji (W, R) konačan predureďaj na kojem formula S nije valjana. Tada postoje relacija forsiranja $\Vdash$ i svijet $w \in W$ takvi da $w \nVdash S$. Tada $w \Vdash \neg S$, a formula $\neg S$ je ekvivalentna formuli

$$(\Diamond(\square p \wedge \neg\square q) \wedge \Diamond(\square q \wedge (\neg\square p \vee \neg p)))\,.$$

Tada postoje svijetovi $x, y \in W$, ne nužno različiti, takvi da wRx, wRy i $x \Vdash \square p \wedge \neg\square q$ te $y \Vdash \square q \wedge (\neg\square p \vee \neg p)$.
Pošto vrijedi $x \Vdash \neg\square q$, postoji svijet $z \in W$ takav da je xRz te $z \Vdash \neg q$. Pošto je (W, R) konačan predureďaj, vrijedi xRy ili yRz.
Pretpostavimo da je yRz. No, zbog $y \Vdash \square q$ slijedi $z \Vdash q$, što je nemoguće zbog prethodnog. Promotrimo onda slučaj kada vrijedi xRy. Tada, zbog $x \Vdash \square p$ slijedi $y \Vdash p$, pa zbog $y \Vdash \neg\square p \vee \neg p$ slijedi da postoji $v \in W$ takav da yRv te $v \Vdash \neg p$. No, zbog tranzitivnosti relacije R slijedi xRv, pa i $v \Vdash p$, što je ponovno kontradikcija.

$\square$

Teorem 1.3.10. *Sve formule oblika $\square(\square A \to A) \to \square A$, gdje je A proizvoljna modalna formula, su valjane na okviru (W, R) ako i samo ako je okvir tranzitivan i inverzno dobro fundiran.*

Dokaz. Pretpostavimo da je svaka formula oblika $\square(\square A \to A) \to \square A$ valjana na okviru $\mathcal{F}$. Iz teorema 1.3.2 slijedi da su na okviru $\mathcal{F}$ valjani svi teoremi sustava K. Slijedeći dokaz teorema 1.1.10, te činjenicu da modus ponens i nužnost čuvaju valjanost na okviru (kao što je pokazano u teoremu 1.3.2), vidimo da su tada na okviru $\mathcal{F}$ valjane i sve formule oblika

$\Box A \to \Box\Box A$. Iz leme 1.3.3 slijedi da je $\mathcal{F}$ tranzitivan.
Također je i inverzno dobro fundiran. Pretpostavimo, naime, da postoji neprazan podskup $X \subseteq W$ bez R-maksimalnog elementa. Neka je $w \in X$ te $\Vdash$ takva da za svaki $a \in W$, $a \Vdash p$ ako i samo ako $a \notin X$. Pokazat ćemo $w \Vdash \Box(\Box p \to p)$ te $w \nVdash \Box p$, što je u kontradikciji s pretpostavkom valjanosti formule $\Box(\Box p \to p) \to \Box p$ na ovom okviru.
Neka je x proizvoljan svijet takav da wRx i $x \nVdash p$ (x postoji zbog $w \in X$). Tada je $x \in X$, i zato postoji $y \in X$ takav da xRy i $y \nVdash p$. Dakle, $x \nVdash \Box p$. Dakle, $x \Vdash \Box p \to p$, pa $w \Vdash \Box(\Box p \to p)$.
Ali, isto tako je $x \nVdash p$, pa $w \nVdash \Box p$. Slijedi tvrdnja.

Obratno, pretpostavimo da je (W, R) tranzitivan i inverzno dobro fundiran, te neka je $\Vdash$ proizvoljan na tom okviru. Za svaki $w \in W$, ako vrijedi $w \Vdash \Box A$, vrijedi i $w \Vdash \Box(\Box A \to A) \to \Box A$.
Pretpostavimo onda da $w \nVdash \Box A$. Neka je $X = \{x \in W \mid wRx \land x \nVdash A\}$. Po pretpostavci, X je neprazan pa, po inverznoj dobroj fundiranosti, postoji $x \in X$ takav da nije xRy ni za jedan $y \in X$. Zbog $x \in X$ je također wRx te $x \nVdash A$. Pretpostavimo xRy. Tada $y \notin X$ i, zbog tranzitivnosti wRy, pa $y \Vdash A$. Dakle, $x \Vdash \Box A$, $x \nVdash \Box A \to A$ pa $w \nVdash \Box(\Box A \to A)$. Dakle $w \Vdash \Box(\Box A \to A) \to \Box A$.
Slijedi da je formula $\Box(\Box A \to A) \to \Box A$ valjana na danom okviru. $\Box$

Sada, konačno, imamo:

Teorem 1.3.11 (Adekvatnost za K4, GL i I)**.**

a) *Ako K4 $\vdash$ A, onda je formula A valjana u svim tranzitivnim okvirima.*

b) *Ako GL $\vdash$ A, onda je formula A valjana u svim tranzitivnim i inverzno dobro fundiranim okvirima*

c) *Ako I $\vdash$ A, onda je formula A valjana u svim konačnim predurеđajima.*

Dokaz. a) Ova tvrdnja se dokazuje sasvim analogno kao teorem adekvatnosti za sistem K, tj. teorem 1.3.2, uz dodatak za slučaj $n = 1$ i dodatni aksiom sustava K4 - tada se pozivamo na teorem 1.3.3.

b) Analogno kao prethodno, s tim da se za slučaj $n = 1$ i dodatni aksiom sustava GL pozivamo na teorem 1.3.10.

c) Analogno kao prethodno. Za slučaj $n = 1$ i dodatni aksiom sustava GL, s obzirom na sustav K, se pozivamo na teorem 1.3.8 i primijetimo da je (W, R) onda i inverzno dobro fundiran okvir. Sada se možemo pozvati na teorem 1.3.10.
Za slučaj $n = 1$ i dodatni aksiom sustava I, s obzirom na GL, pozivamo se na teorem

1.3.9.
Ostatak indukcije ide analogno kao u teoremu 1.3.2.

□

Teoremi potpunosti sustava K, K4, GL i I

U sljedećem dijelu su prezentirani dokazi teorema potpunosti modalnih sustava K, GL i I, te iskazan teorem potpunosti za K4. Točnije, iskazat ćemo i dokazati teoreme oblika "Ako je formula A valjana u svim konačnim okvirima adekvatnima za L, onda L $\vdash A$", gdje je L jedan od navedenih sustava. Dakle, teorem adekvatnosti te teorem potpunosti za K dokazuju ekvivalenciju sljedećih tvrdnji:

(i) A je valjana u svim okvirima

(ii) A je valjana u svim konačnim okvirima

(iii) K $\vdash A$.

Analogne tvrdnje vrijede i za sustave K4, GL te I.

Definicija 1.3.12. *Neka je L normalni modalni sustav, te D modalna formula koja nije teorem sustava L. Za modalnu formulu B kažemo da je* termin *formule D ako je podformula formule D, ili je negacija neke podformule formule D.*
Skup formula X je L-konzistentan *ako* $L \nvdash \neg \bigwedge X$.
Skup termina X modalne formule D je maksimalan L-konzistentan *ako je L-konzistentan i za svaku B podformulu formule D vrijedi* $B \in X$ *ili* $\neg B \in X$.

Pošto su modalne formule konačni nizovi znakova, jasno je da i termina neke modalne formule ima konačno.
Daljnje dvije leme ćemo koristiti u dokazima potpunosti sustava K, K4 i GL. No, one vrijede i za ostale normalne sustave, te se mogu koristiti u dokazima potpunosti za neke od njih.
Sustav I će ipak koristiti nešto drugačije konstrukcije u dokazima teorema potpunosti, iako tvrdnje sljedećih dviju lema vrijede i za njega.

Lema 1.3.13. *Neka je L proizvoljan normalni modalni sustav. Neka je X neki L-konzistentan skup termina neke formule D, gdje D nije teorem sustava L. Vrijede sljedeće tvrdnje:*

a) Neka je također X maksimalno L-konzistentan. Neka su $A_1, \ldots, A_n \in X$ *neki termini formule D, te neka vrijedi* $L \vdash (A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \to B$, *za neku podformulu B od D. Tada je i* $B \in X$.

b) X je podskup nekog maksimalno L-konzistentnog skupa.

Dokaz. a) Pretpostavimo suprotno, tj. da $B \notin X$. Tada je $\neg B \in X$. Primijetimo da je formula $(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow B$ ekvivalentna formuli $\neg(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge \neg B)$. Također, primijetimo da je
$\neg(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge \neg B) \rightarrow \neg \bigwedge X$ aksiom svih normalnih sustava dobiven iz tautologije (zbog $A_1, \ldots, A_n, \neg B \in X$). No, tada iz $\mathrm{L} \vdash \neg(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge \neg B)$ slijedi i $\mathrm{L} \vdash \neg \bigwedge X$.

b) Za proizvoljne formule A i B, formula A je ekvivalentna formuli $(A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)$. Tu činjenicu ćemo koristiti više puta u ovom dokazu.
Neka je $S = \{S_1, \ldots, S_r\}$ skup koji sadrži sve podformule formule D koje se ne nalaze u skupu X, te njihova negacija nije u skupu X.
Koristeći formulu s početka dokaza, dobijemo $M_0 = (S_1 \wedge (\bigwedge X)) \vee (\neg S_1 \wedge (\bigwedge X))$, koja je ekvivalentna formuli $\bigwedge X$. Na sličan način dodajemo S_2, pa imamo formulu $M_1' = (M_0 \wedge S_2) \vee (M_0 \wedge \neg S_2)$ koja je (i dalje) ekvivalentna formuli $\bigwedge X$.
Primijetimo također da je formula $(M_0 \wedge S_2)$ ekvivalentna formuli $(S_1 \wedge S_2 \wedge (\bigwedge X)) \vee (\neg S_1 \wedge S_2 \wedge (\bigwedge X))$.
Slično, formula $(M_0 \wedge \neg S_2)$ je ekvivalentna formuli $(S_1 \wedge \neg S_2 \wedge (\bigwedge X)) \vee (\neg S_1 \wedge \neg S_2 \wedge (\bigwedge X))$. Zamjenom tih ekvivalentnih formula u formulu M_1' dobijemo formulu M_1.
Nastavkom takve konstrukcije je moguće dodati sve elemente skupa S; označimo dobivenu formulu sa E.
Sada je E oblika $E_1 \vee \ldots \vee E_n$, gdje je svaki E_i konjunkcija koja sadrži sve elemenate skupa X, te za svaki $S_j \in S$ sadrži ili S_j kao konjunkt, ili $\neg S_j$.
Iz načina konstrukcije je jasno da je formula E također ekvivalentna formuli $\bigwedge X$.

Sada ćemo pokazati da postoji E_i takav da vrijedi $\mathrm{L} \nvdash \neg E_i$. U suprotnom bi $\mathrm{L} \vdash (\neg E_1 \wedge \ldots \wedge \neg E_n)$, pa tada i $\mathrm{L} \vdash \neg(E_1 \vee \ldots \vee E_n)$. No, kako je E ekvivalentna formuli $\bigwedge X$, tada i $\mathrm{L} \vdash \neg \bigwedge X$. Neka je E_i konjunkcija oblika $F_1 \wedge \ldots \wedge F_m$. Sada je očito skup $F = \{F_i : 1 \leq i \leq m\}$ maksimalno L-konzistentan skup. Također, iz konstrukcije formule E je jasno kako svaki disjunkt E_j sadrži sve elemente skupa X kao konjunkte. Dakle, $X \subseteq F$, pa je F upravo tražen skup.

□

Neka je L normalan modalni sustav, te D modalna formula takva da $L \nvdash D$. Za dokaze potpunosti sustava GL, odnosno K ćemo konstruirati, koristeći maksimalno konzistentne skupove, okvire koji će zadovoljavati uvjete sljedeće leme. Lema sama će opisati dovoljne uvjete kako formula D ne bi bila valjana na takvom okviru.

Pojam adekvatnog okvira je do sada definiran samo za sustave K, K4, GL i I. Sljedeća lema je mogla biti dana samo za sustave K, K4, GL i I, pošto smo samo za njih definirali pojam adekvatnog okvira. Međutim, definicija adekvatnosti okvira za normalan modalan

sustav se može preformulirati tako da opisuje proizvoljan normalni modalni sustav.
Za proizvoljni modalni sustav L i okvir (W, R) kažemo da je (W, R) adekvatan za sustav L ako i samo ako su na (W, R) valjani svi teoremi sustava L.

Prethodno navedene definicije su opravdane teoremima adekvatnosti za sustave K, K4, GL i I. Više detalja o adekvatnim okvirima za ostale normalne modalne sustave može se naći u [1].

Iako lema vrijedi i za sustav I, za dokaz njegove potpunosti je potrebna drugačija konstrukcija okvira, kao i drugačija definicija maksimalno konzistentnih skupova.

Lema 1.3.14. *Neka je L proizvoljan normalan modalni sustav, te neka je D modalna formula takva da $L \nvdash D$. Neka je W skup svih maksimalno L-konzistentnih skupova termina od D. Neka je $R \subseteq W \times W$ takva da zadovoljava sljedeće uvjete:*

(1) Za svaku $\Box B$ podformulu od D, i svaki $w \in W$, vrijedi: $\Box B \in w$ ako i samo ako za svaki x za koji je wRx također vrijedi $B \in x$.

(2) (W, R) je okvir adekvatan za L.

Neka je $\Vdash$ relacija forsiranja na W takva da vrijedi: $w \Vdash p$ ako i samo ako se p pojavljuje u formuli D i $p \in w$.
Tada za svaku podformulu A formule D i svaki $w \in W$ vrijedi: $A \in w$ ako i samo ako $w \Vdash A$.

Dokaz. Tvrdnju dokazujemo indukcijom po duljini formule. Formule duljine 1 su propozicionalne varijable, ili $\bot$. Za $A = \bot$ vrijedi $L \vdash \neg\bot$ pošto je to tautologija logike sudova. Ako je $A = p_i$, tada je $p \in w$ ako i samo ako je $w \Vdash p$ po uvjetima leme.

Pretpostavimo sada da tvrdnja vrijedi za podformulu od D duljine manje od n, te da je $A = (B \to C)$ podformula od D duljine n. Tada tvrdnja vrijedi za B i C, pošto su to također podformule od D duljine manje od n. Tada vrijedi $L \vdash \neg A \to B$, $L \vdash \neg A \to \neg C$ te $L \vdash B \to (\neg C \to \neg A)$. Naime, sve te formule su aksiomi sustava L dobiveni iz tautologija logike sudova; kad se u obzir uzme $A = (B \to C)$.
Tada $A \notin w$ ako i samo ako $\neg A \in w$ (zbog maksimalne konzistentnosti). No, $\neg A \in w$ ako i samo ako $B \in w$ i $\neg C \in W$. Naime, iz prethodne tri formule, te a) dijela leme 1.3.13 imamo da iz $\neg A \in w$ i $L \vdash \neg A \to B$ slijedi $B \in w$. Analogno, $\neg C \in w$. Obratno, iz $B \in w$, $\neg C \in w$ te z L-konzistentnosti skupa w slijedi $A \notin w$. Naime, $A = B \to C$. Tada, iz prethodnog, $\neg A \in w$. No, $B \in w$ i $\neg C \in W$ je istina ako i samo ako je $B \in w$ te $C \notin w$. Po pretpostavci indukcije, $B \in w$ te $C \notin w$ vrijedi ako i samo ako $w \Vdash B$ i $w \nVdash C$. Konačno, $w \Vdash B$ i $w \nVdash C$ vrijedi ako i samo ako je $w \Vdash A$. Dakle, imamo $A \in w$ ako i samo ako $w \Vdash A$.
Neka je sada $A = \Box B$ formula duljine n. Tada je B podrečenica od D duljine manje od n. Tada je $A \in w$ ako i samo ako, prema uvjetu (1), za svaki x takav da je wRx vrijedi $B \in x$. Po pretpostavci indukcije, $B \in x$ ako i samo ako $w \Vdash B$. No tada je $A \in w$ ako i samo ako

je, za svaki x za koji je wRx, $x \Vdash B$. Naravno, $x \Vdash B$ za svaki x takav da je wRx vrijedi ako i samo ako $w \Vdash \Box B$, čime je tvrdnja dokazana. $\square$

Primijetimo da je u dokazu leme uvjet adekvatnosti korišten neizravno, ukoliko se držimo samo originalne definicije dane za sustave K, K4, GL i I. Točnije, korišteni su teoremi adekvatnosti za te sustave.

Lema 1.3.15. *Neka je L proizvoljan normalan modalni sustav, te neka je D modalna formula takva da $L \nvdash D$. Neka je W skup svih maksimalno L-konzistentnih skupova termina od D. Neka je R relacija takva da okvir (W, R) zadovoljava uvjete leme 1.3.14. Tada formula D nije valjana na okviru (W, R).*

Dokaz. Prema lemi 1.3.13, za formulu D takvu da $L \nvdash D$, skup $\{\neg D\}$ je sadržan u nekom maksimalno L-konzistentnom skupu y. Tada $D \notin y$ pa, po lemi 1.3.14, $y \nVdash D$. Sada slijedi da formula D nije valjana na okviru (W, R) koji je po uvjetu (2) leme 1.3.14 adekvatan za L. Time je dokazano da, ako $\mathrm{L} \nvdash D$, i moguće je konstruirati relaciju R, onda postoji konačan okvir u kojem formula D nije valjana. $\square$

Dakle, za dokaz teorema potpunosti za K i GL je dovoljno za proizvoljnu formulu D takvu da $L \nvdash D$ naći relaciju R koja će zadovoljavati uvjete leme 1.3.14 na (W, R).

Teorem 1.3.16. *Ako je formula A valjana u svim konačnim okvirima, onda $K \vdash A$.*

Dokaz. Neka je formula D takva da $K \nvdash D$, te neka su W i $\Vdash$ kao u uvjetima leme 1.3.14. Neka je relacija R definirana na sljedeći način: wRx ako i samo ako za sve formule $\Box B \in w$ vrijedi $B \in x$. Uvjet (2) iz leme 1.3.14 je očito zadovoljen (jer su svi okviri adekvatni za sustav K). Također, iz same definicije relacije R je jasno da jedan smjer uvjeta (1) vrijedi, jer ako je $\Box B \in w$ i wRx, sigurno je $B \in x$. Drugi smjer dokazujemo tako da pokažemo da za proizvoljnu formulu $\Box B \notin w$ postoji svijet x takav da wRx i $B \notin x$.
Neka je $X = \{\neg B\} \cup \{C \mid \Box C \in w\}$. Pretpostavimo da skup formula X nije K-konzistentan. Tada $\mathrm{K} \vdash \neg \bigwedge X$; dakle $\mathrm{K} \vdash \neg(\neg B \wedge C_1 \wedge \ldots \wedge C_n)$, gdje vrijedi $\Box C_1, \ldots, \Box C_n \in w$. No tada $\mathrm{K} \vdash C_1 \wedge \ldots \wedge C_n \to B$, pa po lemi 1.1.9 vrijedi $\mathrm{K} \vdash \Box C_1 \wedge \ldots \wedge \Box C_n \to \Box B$. Tada je po lemi 1.3.13 $\Box B \in w$. No, kako smo uzeli da $\Box B \notin w$, slijedi da je skup X K-konzistentan, pa postoji njegov maksimalno K-konzistentan nadskup; označimo ga sa x. Pošto $\neg B \in x$, i skup x je maksimalno K-konzistentan, vrijedi $B \notin x$. No, također je za sve $\Box C \in w$ i $C \in X \subseteq x$, pa je i wRx. $\square$

Teorem 1.3.17. *Ako je formula A valjana u svim konačnim inverzno dobro fundiranim okvirima, onda $GL \vdash A$.*

Dokaz. Neka su W i $\Vdash$ kao u uvjetima leme 1.3.14, te neka je relacija R definirana na sljedeći način: wRx ako i samo ako za sve $\Box B \in w$ vrijedi $\Box B \in x$ i $B \in x$, te postoji $\Box E \in x$ takav da $\neg\Box E \in w$.
Pretpostavimo da vrijedi wRx i xRy. Tada je za $\Box C \in w$ također i $\Box C \in x$, pa i $\Box C, C \in y$. Nadalje, zbog wRx postoji $\Box E \in x$ za koji je $\neg\Box E \in w$. No, po definiciji je i $\Box E \in y$. Dakle, wRy, pa je R tranzitivna relacija.
Pretpostavimo da postoji w za koji je wRw. No, tada bi postojao $\Box E \in w$ za koji je $\neg\Box E \in w$, što je nemoguće. Dakle, R je irefleksivna. Okvir (W, R) je dakle konačan, tranzitivan i irefleksivan, pa je po lemi 1.3.8 i inverzno dobro fundiran. To znači da je uvjet (2) leme 1.3.14 zadovoljen. Pokažimo sada da vrijedi uvjet (1) iz leme 1.3.14.
Ako je $\Box B \in w$ i wRx, onda $B \in x$ po definiciji.
Neka je sada $X = \{\neg B, \Box B\} \cup \{C, \Box C \mid \Box C \in w\}$, gdje je $\Box B \notin w$. Pretpostavimo da je X GL-inkonzistentan. Tada:

$$\mathrm{GL} \vdash \neg(\neg B \wedge \Box B \wedge C_1 \wedge \Box C_1 \wedge \ldots \wedge C_n \wedge \Box C_n)$$

pa, po De Morganovim zakonima,

$$\mathrm{GL} \vdash (C_1 \wedge \Box C_1 \wedge \ldots \wedge C_n \wedge \Box C_n) \rightarrow (\Box B \rightarrow B)$$

Iz posljednjeg i leme 1.1.9 slijedi

$$\mathrm{GL} \vdash (\Box C_1 \wedge \Box\Box C_1 \wedge \ldots \wedge \Box C_n \wedge \Box\Box C_n) \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow B).$$

No, kako znamo da

$$\mathrm{GL} \vdash \Box(\Box B \rightarrow B) \rightarrow \Box B$$

iz aksioma GL-a, te, po lemi 1.1.10,

$$\mathrm{GL} \vdash \Box C \rightarrow \Box\Box C$$

slijedi konačno

$$\mathrm{GL} \vdash (\Box C_1 \wedge \ldots \wedge \Box C_n) \rightarrow \Box B.$$

No, zbog maksimalne konzistentnosti skupa w bi tada vrijedilo $\Box B \in w$; dakle, X je ipak konzistentan. Neka je x neki maksimalan GL-konzistentan skup takav da $X \subseteq x$. Tada, zbog $\neg B \in X$ vrijedi $B \notin x$. Ako je $\Box C \in w$, onda su i $\Box C, C \in x$. Štoviše, zbog $\Box B \notin w$, $\neg\Box B \in w$, te $\Box B \in x$. Tada je wRx po definiciji, pa vrijedi i (1). Iz leme 1.3.14 slijedi tvrdnja. $\Box$

Dokaz potpunosti sustava I se ipak razlikuje od prethodna dva dokaza po konstrukciji skupa W. Iz tog razloga su potrebni dokazi dodatnih tvrdnji o samom sustavu I, kao i varijanta dokaza leme 1.3.13.
Prvo navodimo teorem potpunosti sustava K4, bez dokaza. Dokaz se može naći u [1]. Sam teorem će biti korišten samo u dokazima pomoćnih tvrdnji potrebnih u dokazu teorema potpunosti za sustav I.

Teorem 1.3.18. *Ako je formula A valjana u svim tranzitivnim okvirima, onda $K4 \vdash A$.*

Sljedeća lema će dati neke teoreme sustava I koji su potrebni za dokaz njegove potpunosti. Zbog njihove duljine, dokaz će biti dan samo za neke od navedenih teorema sustava I. Također, iako se dokaz poziva na prethodni teorem, moguće bi ga bilo sprovesti i izravno, navođenjem dokaza u sustavu I.

Lema 1.3.19. *Neka su C, D proizvoljne modalne formule. Tada vrijedi:*

(a) $I \vdash \Box(\Box D \to \boxdot C) \to [\boxdot(\Box C \to \Box D) \lor \boxdot(\Box D \to C)]$

(b) $I \vdash \Box(\Box D \to \boxdot C) \to [\boxdot(\Box C \to \Box D) \lor \boxdot(\Box D \to \Box C)]$

(c) $I \vdash \Box(\Box C \to \Box D) \to [\boxdot(\Box C \to \Box D) \lor (\boxdot(\Box D \to \Box C) \land \boxdot(\Box D \to C))]$

(d) $I \vdash \boxdot(\Box C \to \Box D) \lor (\boxdot(\Box D \to \Box C) \land \boxdot(\Box D \to C))$

Dokaz. Slijedi dokaz za tvrdnju (a); dokazi za (b) i (c) su analogni.
Dokazat ćemo da je formula $F = \Box(\Box D \to \boxdot C) \to [\boxdot(\Box C \to \Box D) \lor \boxdot(\Box D \to C)]$ teorem sustava K4. Kako je sustav I proširenje sustava K4, slijedi tvrdnja.
Pretpostavimo suprotno, tj. da vrijedi $K4 \nvdash F$. Po teoremu 1.3.18, tada postoji model $(W, R, \Vdash)$ i svijet $w \in W$ takav da $w \nVdash F$.
Tada redom vrijedi:

1) $w \Vdash \Box(\Box D \to \boxdot C)$

2) $w \Vdash \neg \boxdot (\Box D \to C)$.

3) $w \Vdash \neg \boxdot (\Box C \to \Box D)$

Kako su formule $\Box(\Box D \to (\Box C \land C))$ i $\Box(\Box D \to \Box C) \land \Box(\Box D \to C)$ ekvivalentne, slijedi $w \Vdash \Box(\Box D \to C)$.
Formula $\neg \boxdot (\Box D \to C)$ je ekvivalentna formuli $\neg\Box(\Box D \to C) \lor \neg(\Box D \to C)$.
Iz dviju prethodnih tvrdnji slijedi $w \Vdash \neg(\Box D \to C)$. Tada $w \Vdash (\Box D \land \neg C)$.
Formula $\neg \boxdot (\Box C \to \Box D)$ je ekvivalentna formuli $\neg\Box(\Box C \to \Box D) \lor \neg(\Box C \to \Box D)$.
Sada iz $w \Vdash (\Box D \land \neg C)$ znamo da $w \nVdash (\Box C \to \Box D)$, pa iz prethodnog znamo $w \Vdash \neg\Box(\Box C \to \Box D)$.
Tada je $w \Vdash \Diamond(\Box C \land \neg\Box D)$. Dakle, postoji svijet $x \in W$ takav da wRx i $x \Vdash \Box C \land \neg\Box D$. Iz toga slijedi da postoji svijet $y \in W$ takav da xRy i $y \Vdash \neg D$.
Međutim, (W, R) je tranzitivan okvir, pa također vrijedi i wRy. no, iz $w \Vdash \Box D$ slijedi $y \Vdash D$, što je nemoguće. Time smo dokazali tvrdnju (a).
Kako je $\Box(\Box C \to \Box D) \lor \Box(\Box \to \boxdot C)$ aksiom sustava I, iz (a), (b), (c) i prethodnog slijedi $I \vdash \boxdot(\Box C \to \Box D) \lor (\boxdot(\Box D \to \Box C) \land \boxdot(\Box D \to C))$. Time je dokazana tvrdnja (d).

$\Box$

Kao što smo već spomenuli, konstrukcija okvira na kojima neka formula A koja nije teorem sustava I će biti drugačija nego u dosadašnjim dokazima teorema potpunosti. Sljedeća lema govori o konstrukciji skupa W.

Lema 1.3.20. *Neka je A formula takva da $I \nvdash A$. Neka je $\mathscr{A}$ skup svih termina formule A. Neka je $\mathscr{B} = \{\boxdot(E \to F) : E, F \in \mathscr{A}\}$.*
Neka su $B_1, \dots, B_r$ svi elementi skupa $\mathscr{B}$. Neka je $\mathscr{C}_1 = \{B_1\}$ ako je skup $\{\neg A\} \cup \{B_1\}$ I-konzistentan, a $\mathscr{C}_1 = \{\neg B_1\}$ inače.
Neka je, za $i < r$, $\mathscr{C}_{i+1} = \mathscr{C}_i \cup \{B_{i+1}\}$, ako je skup $\{\neg A\} \cup \mathscr{C}_i \cup \{B_{i+1}$ I-konzistentan $\}$; a $\mathscr{C}_{i+1} = \mathscr{C}_i \cup \{\neg B_{i+1}\}$ inače.
Tada vrijedi:

(a) Za svaki $i \leq r$ je skup $\{\neg A\} \cup \mathscr{C}_i$ I-konzistentan.

(b) Neka je $\Delta = \bigwedge(\mathscr{C}_r \cap \mathscr{B})$. Tada $I \nvdash \Delta \to A$, i $I \vdash \Delta \to \Box\Delta$.

Dokaz. Tvrdnja (a) slijedi izravno iz definicije skupa $\mathscr{C}_i$.
Dokažimo tvrdnju (b). Za proizvoljnu formulu M vrijedi $I \vdash \boxdot M \to \Box M$, iz aksioma $(A \wedge B) \to B$. Tada $I \vdash \Box M \to \Box\Box M$, po teoremu 1.1.10. Iz prethodnog te aksioma $\Box M \to \Box M$ imamo $I \vdash (\Box M \wedge M) \to (\Box\Box M \wedge \Box M)$. Uz primjenu tvrdnje c) leme 1.1.9 dobijamo $I \vdash \boxdot M \to \Box \boxdot M$. Kako je Δ konjunkcija rečenica oblika $\boxdot M$, uz prethodno i lemu 1.1.9 slijedi $I \vdash \Delta \to \Box\Delta$.

□

Dokažimo sada lemu koja će igrati sličnu ulogu kao lema 1.3.13 u prethodnim dokazima potpunosti.

Lema 1.3.21. *Neka je A formula takva da $I \nvdash A$. Neka je Δ kao u tvrdnji (b) leme 1.3.20. Neka je W skup svih maksimalnih podskupova w skupa $\mathscr{A}$ takvih da $I \nvdash \Delta \to \neg \bigwedge w$.*
Tada vrijede sljedeće tvrdnje:

1. *Ako je $w \in W$ i $B \to C \in \mathscr{A}$, onda je $B \to C \in w$ ako i samo ako je $B \notin w$ ili $C \in w$.*

2. *Ako je $X \subseteq \mathscr{A}$, i $I \nvdash \Delta \to \neg \bigwedge X$, onda postoji $w \in W$ takav da $X \subseteq w$.*

Dokaz. 1. Pretpostavimo da je $B \to C \in w$, te pretpostavimo $B \in w$ i $C \notin w$. Primijetimo da je $(B \to C) \wedge B$ ekvivalentno sa $(B \to C) \wedge B \wedge C$. No, w je maksimalan podskup od $\mathscr{A}$ takav da $I \nvdash \Delta \to \neg \bigwedge w$. Dakle, ukoliko $\neg \bigwedge w$ sadrži formule $(B \to C)$ i B kao konjunkte, po prethodnom mora sadržavati i formulu C. No, to je nemoguće. Drugi smjer se dokaže posve analogno.

2. Analogno kao u dokazu b) dijela leme 1.3.13, konstruiramo formulu $E = E_1 \vee \ldots \vee E_n$ koja ima sljedeća svojstva:

- ekvivalentna je formuli $\bigwedge X$,
- svaki E_i je konjunkcija koja sadrži sve elemente skupa X, za svaku od preostalih podformula formule A sadrži bilo tu podformulu, bilo njenu negaciju.

Sada iz $I \nvdash \Delta \to \neg \bigwedge X$ slijedi $I \nvdash \Delta \to \neg E$.
Za barem jedan E_i vrijedi $I \nvdash \Delta \to \neg E_i$. U suprotnom bi, za svaki i takav da $1 \le i \le n$ vrijedilo $I \vdash \Delta \to \neg E_i$. No, onda vrijedi i $I \vdash \Delta \to \neg E$.
Uzmimo E_i takav da $I \nvdash \Delta \to \neg E_i$. Neka je E_i oblika $F_1 \wedge \ldots \wedge F_m$. Sada je skup $F = \{F_j : 1 \le j \le m\}$ traženi maksimalan podskup skupa $\mathscr{A}$.

□

Lema 1.3.22. *Neka je A formula takva da A nije teorem sustava I, te neka su Δ i W kao u iskazu leme 1.3.21. Neka je relacija R definirana na sljedeći način: za $w, x \in W$ vrijedi wRx ako i samo ako, za svaki $\Box C \in w$ vrijedi $\Box C \in x$, $C \in x$ i postoji $\Box D \in x$ takav da $\neg\Box D \in w$.*
Tada je okvir (W, R) konačan predurеđaj.

Dokaz. Najprije primijetimo da je skup W konačan.
Nadalje, pokažimo da je R irefleksivna relacija. Iz definicije relacije R slijedi da, kada bi postojao svijet $w \in W$ takav da je wRw, onda bi postojala formula $\Box D \in w$ takva da je $\neg\Box D \in w$. No, tada bi vrijedilo $I \vdash \Delta \to \neg \bigwedge w$, što je suprotno s definicijom skupa W.
Dalje, dokažimo da je R tranzitivna relacija. Neka su $w, x, y \in W$ takvi da wRx i xRy. Neka je $\Box C \in w$ proizvoljna formula. Tada je $\Box C \in x$ i $C \in x$. Iz $\Box C \in x$ i xRy slijedi $\Box C \in y$ i $C \in y$. Također, zbog xRy znamo da postoji $\Box D \in y$ takav da je $\neg\Box D \in x$. Treba pokazati da vrijedi $\neg\Box D \in w$. Pretpostavimo suprotno. Kao i u dokazu leme 1.3.21, iz $\neg\Box D \notin w$ slijedi $\Box D \in w$. No, tada bi vrijedilo i $\Box D \in x$, iz definicije relacije R. Dakle, $\neg\Box D \in w$, pa je wRy.

Sada ćemo dokazati da je (W, R) konačan predurеđaj koristeći lemu 1.3.6.
Za svaki svijet $w \in W$ označimo s $f(w)$ broj svih formula oblika $\neg\Box C$ koje su elementi skupa w. Neka je $x \in W$ proizvoljan svijet za kojeg vijedi wRx. Svijet w očito sadrži barem jednu formulu oblika $\neg\Box B$ koju svijet x ne sadrži. Također, kada bi postojala formula oblika $\neg\Box B \in x$ takva da $\neg\Box B \notin w$, zbog maksimalnosti skupa w bi vrijedilo $\Box B \in w$. Međutim, zbog wRx bi tada vrijedilo $\Box B \in x$, što je u suprotnosti s definicijom skupa W.
Dokažimo sada drugi smjer. U tu svrhu, pretpostavimo $f(w) > f(x)$. Tada postoji formula $\Box D \in \mathscr{A}$ takva da $\neg\Box D \in w$ i $\Box D \in x$. Kako bi dokazali da je wRx dovoljno je pokazati da za svaku formulu $\Box C \in w$ vrijedi $\Box C \in x$ i $C \in x$.
Neka je dakle $\Box C \in w$ proizvoljna formula. Po lemi 1.3.19 vrijedi I $\vdash \boxdot(\Box C \to \Box D) \vee (\boxdot(\Box D \to \Box C) \wedge \boxdot(\Box D \to C))$. Pošto su formule $\Box C, \Box D \in \mathscr{A}$, slijedi da je $\boxdot(\Box C \to \Box D)$ konjunkt u formuli Δ, ili su to formule $\boxdot(\Box D \to \Box C)$ i $\boxdot(\Box D \to C)$).

Pretpostavimo da je $\boxdot(\Box C \to \Box D)$ konjunkt u Δ. Tada $I \vdash \Delta \to \neg(\Box C \wedge \neg\Box D)$, pa vrijedi $I \vdash \Delta \to \neg \bigwedge w$, što je u suprotnosti s pretpostavkom $w \in W$.
Dakle, $\boxdot(\Box D \to \Box C)$ i $\boxdot(\Box D \to C))$ su konjunkti u Δ. Tada vrijedi $I \vdash \Delta \to \neg(\Box D \wedge \neg\Box C)$ i $I \vdash \Delta \to \neg(\Box D \wedge \neg C)$.
Kada bi vrijedilo $\Box C \notin x$, ili $C \notin x$, onda bi imali $\neg\Box C \in x$ ili $\neg C \in x$, pa bi tada vrijedilo $I \vdash \Delta \to \neg \bigwedge x$, što je nemoguće. Dakle, vrijedi $\Box C \in x$ i $C \in x$. Sada, po lemi 1.3.6 vrijedi da je (W, R) konačan preduređaj. □

Preostaje pokazati analogon leme 1.3.14 za sustav I.

Lema 1.3.23. *Neka je A formula takva da $I \nvdash A$. Neka su skupovi $\mathscr{A}$, Δ i W kao u iskazu leme 1.3.21. Neka je relacija R definirana kao u iskazu leme 1.3.22.*
Neka je $\Vdash$ relacija forsiranja na okviru (W, R) takva da za svaku propozicionalnu varijablu p i svaki svijet $w \in W$ vrijedi: $w \Vdash p$ ako i samo ako $p \in \mathscr{A}$ i $p \in w$.
Neka su $w \in W$ i $B \in \mathscr{A}$. Tada vrijedi: $w \Vdash B$ ako i samo ako $B \in w$.

Dokaz. Tvrdnju dokazujemo indukcijom po složenosti formule B. Baza indukcije, i korak za $B = C \to D$ dokazuju se sasvim jednako kao u dokazu leme 1.3.17. Razmotrimo detaljnije slučaj kad je formula B oblika $\Box C$, za neku formulu C. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve formule duljine manje od n, te neka je B formula duljine n.
Pretpostavimo prvo da vrijedi $\Box C \in w$. Tada, za svaki svijet $x \in W$ takav da wRx vrijedi $C \in x$, po definiciji relacije R. Po pretpostavci indukcije tada imamo $x \Vdash C$. Pošto je svijet x bio proizvoljan, tada vrijedi i $w \Vdash \Box C$.
Prepostavimo sada $\Box C \notin w$. Tada vrijedi $\neg\Box C \in w$. Neka su $\Box D_1, \ldots, \Box D_m$ sve rečenice oblika $\Box D$ u skupu w. Neka je $X = \{\Box D_1, D_1, \ldots, \Box D_n, D_n, \Box C, \neg C\}$.
Pretpostavimo prvo $I \vdash \Delta \to \neg \bigwedge X$. Tada

$$I \vdash \Delta \to ((\Box D_1 \wedge D_1 \wedge \ldots \wedge \Box D_n \wedge D_n) \to (\Box C \to C))).$$

Istom argumentacijom kao u dokazu leme 1.3.17, i pošto je I proširenje sustava GL, slijedi

$$I \vdash \Box\Delta \to ((\Box D_1 \wedge D_1 \wedge \ldots \wedge \Box D_n \wedge D_n) \to \Box C).$$

Po lemi 1.3.20 znamo $I \vdash \Delta \to \Box\Delta$, pa slijedi

$$I \vdash \neg(\Box D_1 \wedge D_1 \wedge \ldots \wedge \Box D_n \wedge D_n \wedge \neg\Box C).$$

No, tada bi vrijedilo $I \vdash \Delta \to \neg \wedge w$, što je u suprotnosti s definicijom skupa W.
Dakle, $I \nvdash \Delta \to \neg \wedge w$. Po lemi 1.3.21, postoji svijet $x \in W$ takav da $X \subseteq x$. Slijedi wRx, po definiciji relacije R.
Nadalje, kako je $\neg C \in X \subseteq x$, vrijedi $C \notin x$, pa po pretpostavci indukcije $x \nVdash C$. Tada $w \nVdash \Box C$. □

Konačno, možemo dokazati teorem potpunosti za sustav I.

Teorem 1.3.24. *Ako je A valjana u svim konačnim predurеđenim okvirima, onda $I \vdash A$.*

Dokaz. Neka je A formula takva da $I \nvdash A$, te neka je okvir (W, R) kao u iskazu leme 1.3.23. Iz leme 1.3.21 slijedi da postoji $w_0 \in W$ takav da $\neg A \in w_0$, pa imamo $A \notin w_0$. Iz leme 1.3.23 slijedi da formula A nije valjana na okviru (W, R). Iz leme 1.3.22 znamo da je (W, R) konačan preduređaj. □

Poglavlje 2

Zermelo-Fraenkelova teorija skupova

Povijest teorije skupova započinje s radom Georga Cantora "O svojstvima kolekcije svih realnih algebarskih brojeva" objavljenim 1874. Međutim, Bertrand Russell i Ernst Zermelo neovisno otkrivaju poznati Russellov paradoks u Cantorovoj teoriji skupova. No, otkriće tih paradoksa nije dovelo do prestanka rada na teoriji skupova. Tako se na temelju Zermelova rada iz 1908. te rada Abrahama Fraenkela iz 1922. zasniva jedna od najpopularnijih aksiomatizacija poznata kao ZFC teorija skupova.

Slijedi vrlo kratak pregled Zermelo-Fraenkelova teorije skupova. Često ćemo samo kratko pisati ZF, ili ZFC ukoliko uključujemo aksiom izbora. Detaljniji pregled se može naći u [2] ili [3], kao i u mnogim drugim knjigama. Područje koje ona obuhvaća je vrlo opširno, pa je većina teorema i lema dana bez dokaza, uz istaknute iznimke.

2.1 Osnovni pojmovi

U sljedećem dijelu navodimo aksiome teorije ZFC, pojam ordinalnog broja te istaknute leme potrebne za daljnje proučavanje.

Aksiomi ZFC

Zermelo-Fraenkelova teorija skupova je teorija prvog reda čiji se skup nelogičkih simbola sastoji od dvomjesnih relacijskih simbola $=$ i $\in$. U sljedećoj definiciji navodimo njene nelogičke aksiome, bez aksioma jednakosti.

Definicija 2.1.1. *Nelogički aksiomi Zermelo-Fraenkelove teorije skupova su:*

1. ***Aksiom ekstenzionalnosti.*** *Ako skupovi X i Y sadrže iste elemente, onda $X = Y$, Formalno:*
$$\forall u(u \in X \leftrightarrow u \in Y) \rightarrow X = Y.$$

2. ***Aksiom para.*** *Za sve skupove a, b postoji skup $\{a, b\}$ koji sadrži njih, i samo njih. Formalno:*
$$\forall a \forall b \exists c \forall x(x \in c \leftrightarrow x = a \vee x = b).$$

3. ***Shema aksioma separacije.*** *Ako je P svojstvo (s parametrom p), onda za sve skupove X i p postoji skup $Y = \{u \in X \mid P(u, p)\}$ koji sadrži točno one $u \in X$ koji imaju svojstvo P. Formalno, za svaku formulu φ vrijedi:*
$$\forall X \forall p \exists Y \forall u(u \in Y \leftrightarrow u \in X \wedge \varphi(u, p)).$$

4. ***Aksiom unije.*** *Za svaki skup X postoji skup $Y = \bigcup X$, unija svih elemenata iz X. Formalno:*
$$\forall X \exists Y \forall u(u \in Y \leftrightarrow \exists z(z \in X \wedge u \in z))$$

5. ***Aksiom partitivnog skupa.*** *Za svaki skup X postoji skup $Y = P(X)$, tj. skup svih podskupova od X. Formalno:*
$$\forall X \exists Y \forall u(u \in Y \leftrightarrow \forall z(z \in u \rightarrow z \in X))$$

6. ***Aksiom beskonačnosti.*** *Postoji induktivan skup. Formalno:*
$$\exists S\, (\emptyset \in S \,\wedge\, (\forall x \in S)(x \cup \{x\} \in S))$$

7. ***Shema aksioma zamjene.*** *Ako relacija F ima funkcijsko svojstvo, onda za svaki X postoji skup $Y = F(X) = \{F(x) \mid x \in X\}$. Formalno, za svaku formulu $\varphi(x, y, p)$ vrijedi:*
$$\forall x \forall y \forall z(\varphi(x, y, p) \wedge \varphi(x, z, p) \rightarrow y = z) \rightarrow \forall X \exists Y \forall y(y \in Y \leftrightarrow (\exists x \in X)\varphi(x, y, p))$$

8. ***Aksiom regularnosti.*** *Svaki neprazan skup ima $\in$-minimalan element. Formalno:*
$$\forall S\ [S \neq \emptyset \rightarrow (\exists x \in S)(S \cap x = \emptyset)]$$

Aksiomi 3. i 7. su zapravo sheme aksioma; svaka formula nastala iz njih zamjenom formulom φ je aksiom ZF-a. Može se pokazati da ZF nije konačno aksiomatizabilna teorija.

Definicija 2.1.2. *Ako je S familija skupova, $\emptyset \notin S$, onda je* funkcija izbora *za S funkcija f na S za koju vrijedi*

$$f(X) \in X$$

za svaki $X \in S$.

Definicija 2.1.3. ***Aksiom izbora (AC).*** *Za svaku familiju nepraznih skupova postoji funkcija izbora.*

$$\forall X \left[\emptyset \notin X \to \exists f \colon X \to \bigcup X \quad \forall A (A \in X \to f(A) \in A) \right].$$

Teoriji ZF se često dodaje aksiom izbora; tu teoriju označavamo ZFC (C kao *choice*). Radi jednostavnijeg opisa, koristimo neformalan pojam *klase*. Za formulu $\varphi(x, p_1, \ldots, p_n)$ klasa je:

$$C = \{x \mid \varphi(x, p_1, \ldots, p_n)\}.$$

Elementi klase su skupovi, ali sama klasa nije (nužno) skup - izjednačavanje klasa i skupova je i dovelo do paradoksa koji su inspirirali formalnu aksiomatizaciju teorije skupova. *Univerzalna klasa* ili *univerzum* je klasa svih skupova:

$$V = \{x \mid x = x\}.$$

Ordinalni brojevi

Ordinalne brojeve uvodi Georg Cantor u radu izdanom 1883. Pojam ordinalnog broja se pokazao iznimno bitnim u proučavanju teorije ZFC.
Međutim, u daljnjem proučavanju koristit ćemo von Neumannovu definiciju ordinalnog broja.
Za početak je potrebno definirati pojam tranzitivnog skupa.

Definicija 2.1.4. *Za skup T kažemo da je* tranzitivan *ako i samo ako je svaki element skupa T ujedno i njegov podskup.*

Ekvivalentno prethodnoj definiciji, za skup T možemo reći da je tranzitivan ako vrijedi $\bigcup T \subset T$, ili $T \subset P(T)$. Sada možemo definirati pojam ordinalnog broja.

Definicija 2.1.5. *Za skup kažemo da je* ordinalan broj *(ili kratko* ordinal*) ako je tranzitivan i dobro uređen s obzirom na relaciju $\in$.*

Ordinale označavamo malim slovima grčkog alfabeta $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$. Klasa svih ordinala je označena sa *Ord*.
Lako se pokaže da je $\emptyset$ ordinal te da je za α ordinal i $\alpha \cup \{\alpha\}$ također ordinal koji nazivamo *ordinalni sljedbenik* i označavamo $\alpha + 1$. Sve ordinale koji nisu $\emptyset$ i nisu sljedbenici nazivamo *granični ordinalni brojevi*.
Kada govorimo o ordinalnim brojevima, često se $\emptyset$ označava sa 0.

Definicija 2.1.6. *Za skupova X i Y kažemo da imaju istu* kardinalnost *ako postoji bijekcija $f : X \to Y$. To označavamo $|X| = |Y|$*
Za ordinal α kažemo da je kardinalni broj *ako za svaki $\beta \in \alpha$ vrijedi $|\alpha| \neq |\beta|$.*
Za skup X kažemo da ima kardinalni broj α ako je α kardinalni broj i $|X| = |\alpha|$.

U ZF se može dokazati da svaki dobro uređen skup ima kardinalni broj. Uz aksiom izbora je moguće dokazati da se svaki skup može dobro urediti, pa time i da svaki skup ima kardinalni broj.

Definicija 2.1.7. *Za ordinal α kažemo da je* prirodan broj *ako i samo ako vrijedi:*

$$\forall \beta \leq \alpha (\beta = 0 \vee \beta \textit{ je ordinalni sljedbenik nekog ordinala }).$$

Napomenimo da se relacija $\leq$ na ordinalima definira s $\alpha \leq \beta$ ako i samo ako $\alpha \in \beta \vee \alpha = \beta$.

Ukoliko krenemo od 0 i promatramo samo ordinale sljedbenike, dakle samo prirodne brojeve, nikako ne možemo konstruirati beskonačni ordinal. Njegovu egzistenciju garantira tek aksiom beskonačnosti. Naime, aksiom beskonačnosti garantira postojanje skupa S koji, među ostalima, sadrži sve prirodne brojeve. Koristeći shemu aksioma separacije, možemo dokazati postojanje njegovog podskupa koji sadrži isključivo prirodne brojeve; za svojstvo uzmemo upravo ono dano u prethodnoj definiciji. Označimo taj skup sa ω.
Skup ω možemo poistovjetiti sa $\mathbb{N}$, onim što se standardno smatra pod skupom prirodnih brojeve. Može se zatim dokazati da ordinalni sljedbenik i relacija $\in$ na ω imaju svojstva zadana aksiomima Peanove aritmetike. Na sličan način je moguće zadati funkciju $+$ na ω, te dokazati da na ω vrijedi matematička indukcija. Ove tvrdnje su sadržane u [3, Teorem 7.16]. Definicije funkcija koje zadovoljavaju ostale aksiome Peanove aritmetike, tj. $+$ i $\cdot$, je moguće naći u [4]

Teorija ZFC je dakle dovoljno snažna da opiše Peanovu aritmetiku. Dapače, koristeći ZF(C), moguće je opisati mnoge druge "standardne" dijelove matematike, poput definiranja realnih brojeva, a time i realne analize, i daljih rezultata. No, Peanova aritmetika je ovdje važna iz drugog razloga: Gödelove aritmetizacije, koja je djelomično opisana u kasnijem dijelu.

Teorem 2.1.8 (Transfinitna indukcija)**.** *[3, Teorem 2.14] Neka je C klasa ordinala za koju vrijedi:*

(i) $0 \in C$;

(ii) Ako je $\alpha \in C$, onda je i $\alpha + 1 \in C$;

(iii) Ako je α granični ordinal i za sve $\beta \in \alpha$ je $\beta \in C$, onda je i $\alpha \in C$.

Tada je $C = Ord$.

Definicija 2.1.9. *Transfinitnom rekurzijom je definirano:*

(i) $V_0 = \emptyset$

(ii) $V_{\alpha+1} = P(V_\alpha)$

(iii) $V_\alpha = \bigcup_{\beta\in\alpha} V_\beta$, *za α granični ordinalni broj.*

Iz aksioma regularnosti se može dokazati sljedeća lema:

Lema 2.1.10. *Za svaki skup x postoji ordinal α takav da je $x \in V_\alpha$. Formalno:*

$$\bigcup_{\alpha\in Ord} V_\alpha = V.$$

Dokaz se nalazi u [2].

Osim skupova V_α, definiramo klasu skupova L_α koje zovemo *konstruktibilni* skupovi. Za skup X kažemo da je *definabilan* nad $(M, \in)$, gdje je M skup, ako postoji formula φ jezika $\{\in\}$ i skupovi $a_1, \ldots, a_n \in M$ takvi da $X = \{x \in M : (M, \in) \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]\}$.

Definicija 2.1.11. *Za skup M definiramo $def(M)$ kao:*

$$def(M) = \{X \subset M : X \text{ je definabilan nad } (M, \in)\}.$$

Slijedi definicija konstruktibilnih skupova.

Definicija 2.1.12. *Transfinitnom rekurzijom definiramo:*

(i) $L_0 = \emptyset$

(ii) $L_{\alpha+1} = def(L_\alpha)$

(iii) $L_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} L_\beta$, *za α granični ordinalni broj*

(iv) $L = \bigcup_{\alpha\in Ord} L_\alpha$.

Sve elemente klase L nazivamo *konstruktibilni* skupovi. Tvrdnju $V = L$, tj. rečenicu teorije ZFC koja kaže da je svaki skup konstruktibilan, nazivamo *Aksiom konstruktibilnosti*.

Sada za konstruktibilne skupove vrijedi analogon leme 2.1.10.

Lema 2.1.13. *Za svaki ordinalni broj α vrijedi $\alpha \subset L_\alpha$.*

Dokaz se nalazi u [2, 13.2.].

U dijelovima koji slijede ćemo pokazati da su, za određenu klasu ordinala α, skupovi V_α i L_α modeli teorije ZF. Naravno, kada bi ZF mogao dokazati postojanje svojeg modela, time bi dokazivao i svoju konzistentnost. Tada bi, po Gödelovom drugom teoremu potpunosti, ZF bila inkonzistentna teorija. Dakle, ako pretpostavimo ZF konzistentna teorija, onda ZF ne može dokazati postojanje takvih ordinala α.

2.2 Tranzitivni modeli

U proučavanju teorije skupova je izrazitno bitna konstrukcija modela kako bi se dobili rezultati relativne konzistentnosti raznih aksioma i teorema. Zato i ne čudi što su te tehnike bitne i u dokazivanju Solovayevih teorema aritmetičke potpunosti. Stoga u ovom poglavlju definiramo neke osnovne pojmove te iskazujemo potrebne teoreme.
Napomenimo još da ćemo koristiti definicije pojmova σ-strukture, nosača, σ-interpretacija i podstruktura iz [5, 2.3], tj. iz kolegija Matematička logika.

Definicija 2.2.1. *Neka je M klasa, E binarna relacija na M i neka je $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ formula jezika teorije ZF. Tada je* relativizacija *formule φ u odnosu na M i E formula:*

$$\varphi^{M,E}(x_1, \ldots, x_n)$$

definirana induktivno sa:

$$(x \in y)^{M,E} \text{ je } xEy$$

$$(x = y)^{M,E} \text{ je } x = y$$

$$(\neg\varphi)^{M,E} \text{ je } \neg\varphi^{M,E}$$

$$(\varphi \wedge \psi)^{M,E} \text{ je } \varphi^{M,E} \wedge \psi^{M,E}$$

$$(\exists x\varphi)^{M,E} \text{ je } (\exists x \in M)\varphi^{M,E}$$

te analogno za ostale logičke veznike i kvantifikator $\forall$.

Kada je E upravo $\in$ pišemo φ^M.

Po Gödelovom drugom teoremu nepotpunosti, nemoguće je dokazati konzistentnost ZF unutar same teorije ZF. Zato je, unutar ZF, zapravo nemoguće dokazati nezavisnost aksioma, ili nezavisnost raznih tvrdnji o ZF. Ono što se zapravo dokazuje su rezultati *relativne konzistentnosti*.

Definicija 2.2.2. *Neka je T matematička teorija (u našem slučaju ZF ili ZFC), te neka je A neki dodatni aksiom. Kažemo da je T+A* teorija konzistentna relativno s obzirom na T *(ili jednostavno A* konzsitentna sa *T) ako vrijedi sljedeća implikacija:*

ako je T konzistentna, onda je i T+A.

Ako su formule A i ¬A konzistentne sa T kažemo da je A formula nezavisna *u odnosu na T.*

3

U ostatku rada ćemo često neformalno koristiti "u modelu M je istinita formula φ" kao formulu logike sudova. Formalno, ta rečenica je zapravo formula φ^M.
S druge strane, kada kažemo o tome da je neki skup aksioma T istinit u modelu M, tj. da je M model za neku teoriju T (primjerice, ZF samu, ili neko proširenje od ZF), zapravo formalno govorimo da iz teorije ZF možemo dokazati sve formule φ^M, za φ aksiom iz T. Dubljim proučavanjem relativizacije može se pokazati da, za rečenice $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi$ takve da $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \psi$ vrijedi $\vdash (\exists x M(x) \wedge \varphi_1^M \wedge \ldots \wedge \varphi_n^M) \rightarrow \psi$, primjerice po [3, poglavlje 4., lema 8.1.] Formula $\exists x M(x)$ samo govori da je M neprazna klasa, što je potrebno da bi klasu M uopće smatrali modelom.

Često ćemo neformalno koristiti kao rečenicu teorije ZF i "postoji model M u kojem..." ili "u svim tranzitivnim modelima M vrijedi...". Ukoliko bi promatrali samo modele M koji su skupovi, mogli bi koristit $\exists M$ kao dio formule koja to formalizira. No, želimo promatrati i prave klase. Formalno se zapravo promatra relacija $R(x, v)$, gdje v smatramo parametrom, pa se promatra postojanje parametra koji će definirati traženi model. Primjerice, ukoliko tvrdimo postojanje skupa kao modela, onda je R upravo $\in$, pa možemo koristiti $\exists v \exists x R(x, v)$ kao tvrdnju da postoji neprazan skupovni model.

Gornja napomena omogućuje da nove potencijalne modele od neke teorije, u našem slučaju ZF, tj. ZFC, opisujemo unutar tih samih teorija. Neformalno ćemo to često koristiti u ostatku rada. Formalniji pregled relativizacije je moguće naći u [3, 4.poglavlje] i [2].

Korištenjem modela (i relativizacije) je moguće dokazivanje konzistentnosti nekog dodatnog aksioma A s teorijom ZF, tj. ZFC. Naime, pretpostavimo postojanje modela M teorije ZF, gdje M može biti i prava klasa, takvog da $M \vDash A$. Tada je A konzistentan sa ZF. U suprotnom bi ZF dokazivao $\neg A$, a pošto je M model teorije ZF, u M bi bila istinita formula $\neg A$. No, u M ne mogu biti istinite istovremeno formule A i $\neg A$.

Do modela M se dolazi iz pretpostavke postojanja nekog drugog modela teorije ZF, te pokazivanjem da tada postoji model M s traženim svojstvima. Cohenov dokaz neovisnosti hipoteze kontinuuma koristi metodu forcinga za dobivanje novih modela. Varijanta njegovog dokaza je potrebna u dokazu povezanosti dokazivosti u ZF i u modalnom sustavu I.

Definicija 2.2.3. *Za model* $(M, \in)$ *kažemo da je* tranzitivan model *ako je* M *tranzitivna klasa, tj. da za sve skupove* X, Y *takve da* $X \in Y$ *i* $Y \in M$ *vrijedi* $X \in M$.

Za tranzitivne modele ćemo promatrati posebno svojstvo formula teorije skupova.

Definicija 2.2.4. *Neka je* M *tranzitivna klasa, i* φ *rečenica teorije skupova. Za* φ *kažemo da je* apsolutna za model $(M, \in)$ *ako su formule* φ *i* φ^M *logički ekvivalentne.*

Posebna klasa formula apsolutnih za sve tranzitivne modele je klasa Δ_0 formula.

Definicija 2.2.5. *Pojam* Δ_0 *formule definiramo rekurzivno na sljedeći način:*

(i) Svaka formula koja ne sadrži kvantifikatore je Δ_0 *formula;*

(ii) Ako su φ, ψ Δ_0 *formule, onda su* Δ_0 *formule i* $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\neg\varphi$, $\varphi \rightarrow \psi$, *te* $\varphi \leftrightarrow \psi$;

(iii) Ako je φ Δ_0 *formula, onda su i* $(\exists x \in y)\varphi$ *i* $(\forall x \in y)\varphi$ *također* Δ_0 *formule;*

Kao što smo najavili, sljedeći teorem govori o vezi Δ_0 formula i tranzitivnih modela.

Lema 2.2.6. *Neka je* φ *neka* Δ_0 *formula. Tada je* φ *apsolutna za sve tranzitivne modele.*

Dokaz. Dokaz ćemo provesti indukcijom po složenosti formule φ. Neka je M proizvoljna tranzitivna klasa. Ako je φ atomarna formula, tvrdnja vrijedi trivijalno. Pretpostavimo sada da tvrdnja vrijedi za formule složenosti manje od n, te neka je φ formula složenosti n. Neka je φ oblika $\neg\psi$. Tada iz pretpostavke imamo da u M vrijedi $\psi^M \leftrightarrow \psi$. Tada očito u M vrijedi $\varphi^M \leftrightarrow \varphi$ ako i samo ako vrijedi $\psi^M \leftrightarrow \psi$. Slično i za ostale logičke veznike.
Neka je sada φ oblika $(\exists u \in x)\psi$. Pretpostavimo prvo da u M vrijedi φ^M. Tada vrijedi $(\exists u(u \in x \wedge \varphi))^M$, tj. $(\exists u \in M)(u \in x \wedge \varphi^M)$. Iz pretpostavke indukcije imamo $\varphi^M \leftrightarrow \varphi$, pa slijedi $(\exists u \in x)\varphi$. S druge strane, pretpostavimo $(\exists u \in x)\varphi$. Iz tranzitivnosti klase M, slijedi da je u element te klase. Pošto vrijedi $\varphi(u, x, \dots) \leftrightarrow \varphi^M(u, x, \dots)$, iz pretpostavke, slijedi $((\exists u \in x)\varphi)^M$. □

Apsolutnost formule za tranzitivne modele se koristi u dokazivanju da je istinitost određenih aksioma očuvana u konstrukciji novih modela, često upravo koristeći činjenicu da su Δ_0 formule apsolutne. U kasnijim dokazima ćemo često prešutno koristiti činjenicu da se radi o Δ_0 formuli, ili formuli čija je apsolutnost dokaziva iz Δ_0 formula.

Za tranzitivnu klasu M kažemo da je *unutarnji model* teorije ZF ako je model teorije ZF, i sadrži sve ordinalne brojeve. Može se pokazati da je L najmanji unutarnji model teorije ZF. Štoviše,u modelu L vrijede ujedno i aksiom konstruktibilnosti, $(V = L)$, te aksiom izbora. Detaljni dokazi tih tvrdnji se mogu naći, kao i ranije, u [2] i [3].

2.3 Nedostiživi kardinali

Nedostižive kardinale nazivamo tako zato što ih je nemoguće dobiti standardnim skupovnim operacijiama unije i partitivnog skupa iz manjih kardinala. Spomenuli smo ranije da, bez aksioma beskonačnosti ne bi bilo moguće dokazati postojanje kardinala $\aleph_0$. Dapače, $\aleph_0$ je na taj način nedostiživ iz konačnih ordinala, te je potreban aksiom beskonačnosti kako bi dokazali njegovo postojanje. Spomenuli smo da je $\aleph_0$ model teorije ZF bez aksioma beskonačnosti. Na sličan način, za neke nedostižive kardinale κ će vrijediti da je V_κ model za ZFC.

U ovom dijelu navodimo tek definicije i iskaze teorema. Kao i ranije, više detalja se može vidjeti u [2].

Počinjemo s nekim pomoćnim definicijama.

Definicija 2.3.1. *Neka je β ordinalan broj. Za funkciju a kažemo da je* transfinitan niz *ukoliko je domena funkcije ordinalan broj β. To još nazivamo β-niz, tj.* niz duljine *β, te označavamo sa $(a_\xi), \xi \in \beta$.*
Za β-niz kažemo da je rastući *ako za sve $\xi_1, \xi_2 \in \beta$ takve da $\xi_1 < \xi_2$ vrijedi $a_{\xi_1} < a_{\xi_2}$.*
Neka je β granični ordinalan broj i $(a_\xi), \xi \in \beta$ neki rastući β-niz. Limes niza (a_ξ) definiramo kao

$$lim_{\xi \to \beta} = sup\{\alpha_\xi : \xi < \beta\}.$$

Sada, iz definicija β-nizova i limesa je moguće definirati kofinalnost niza, te kofinalnost ordinalnog broja.

Definicija 2.3.2. *Neka su α i β granični ordinalni broj. Kažemo da je rastući β-niz (a_ξ)* kofinalan *u α ako je $lim_{\xi \to \beta} \alpha_\xi = \alpha$.*

Definicija 2.3.3. *Neka je α granični ordinalni broj. Tada je* kofinalnost *ordinala α najmanji granični ordinalni broj β takav da postoji rastući β-niz (a_ξ) koji je kofinalan u α. Kofinalnost ordinala α označavamo sa $cf\, \alpha$.*

Nedostiživim kardinalima su se isprva smatrali ono što sada nazivamo slabo nedostiživi kardinali.

Definicija 2.3.4. *Neka je κ kardinalan broj. Za κ kažemo da je* regularan *ako vrijedi $cf\, \kappa = \kappa$. Za κ kažemo da je* slabo nedostiživ *ako je granični kardinalni broj, te je regularan.*

Može se pokazati da je postojanje slabo nedostiživih kardinalnih brojeva nedokazivo u ZFC. Definirajmo sad jako nedostižive kardinalne brojeve.

Definicija 2.3.5. *Neka je κ kardinalan broj.*

- *Za κ kažemo da je* jako granični *kardinalan broj ako za svaki $\lambda < \kappa$ vrijedi $2^\lambda < \kappa$.*

- *Za κ kažemo da je* jako nedostiživ kardinalan broj*, ako vrijedi:*
  - *κ je jako granični kardinalan broj,*
  - $\kappa > \aleph_0$,
  - *κ je regularan kardinalan broj.*

Sada, kao što smo najavili, navodimo važne rezultate o jako nedostiživim kardinalnim brojevima.

Lema 2.3.6. *Neka je κ jako nedostiživ kardinalan broj. Tada je V_κ model teorije ZFC.*

Teorem 2.3.7. *Postojanje nedostiživih kardinala je nemoguće dokazati u teoriji ZFC. Štoviše, nemoguće je dokazati, u teoriji ZFC, da je postojanje nedostiživih kardinala konzistentno s teorijom ZFC*

Dokazi obje prethodne tvrdnje se nalazi u [2, 12. poglavlje].

Može se pokazati da je klasa konstruktibilnih skupova L model za ZF, te da u L tada vrijede aksiom izbora i aksiom konstruktibilnosti. Dalje se može pokazati da je svaki kardinal koji je slabo nedostiživ u L ujedno i jako nedostiživ u L, te da vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 2.3.8. *Neka je κ nedostiživ u L. Tada je $L_\kappa = V_\kappa^L = V_\kappa \cap L$, i L_κ je model za ZFC + $((V = L))$.*

Tvrdnje 2.3.6 i 2.3.8 su potrebni za dokaze Solovayevih teorema aritmetičke potpunosti. Kako postojanje slabo nedostiživih i nedostiživih kardinala nije moguće dokazati, pretpostavke njihovog postojanja su nužne za dokaze tih teorema.

Na sljedeća dva teorema ćemo se pozivati tek u ilustraciji konstrukcije forcinga. Ovdje su dani tek radi potpunosti.

Teorem 2.3.9 (Gödel)**.** *Ako vrijedi $(V = L)$, tada je $2^{\aleph_0} = \aleph_{\alpha+1}$, za svaki ordinalan broj α.*

Dokaz se nalazi u [2, 13.20]

Teorem 2.3.10 (Gödel)**.** *Aksiom konstruktibilnosti $(V = L)$ povlači aksiom izbora.*

Dokaz se nalazi u [2, 13.18]

2.4 Gödelova aritmetizacija

Kao što smo već napomenuli, u ZF je moguće naći model za Peanovu aritmetiku. U sljedećem dijelu opisujemo na koji način je PA dovoljno snažna za opisivanje tvrdnji o samoj sebi. Analogna konstrukcija se može izvesti u ZF(C), s aksiomima ZF(C), koristeći ω.

Gödel je ovakvo kodiranje, poznato još i kao aritmetizacija, koristio u dokazima teorema nepotpunosti. Peanova aritmetika je teorija prvog reda s jednakošću čiji je skup nelogičkih simbola $\{=, 0, s, +, \cdot\}$, gdje je 0 konstantski simbol, s je jednomjesni funkcijski simbol, a $+$ i $\cdot$ su dvomjesni funkcijski simboli. Uobičajeno je pisati $x + y$, $x \cdot y$ i $x = y$ umjesto formula $+(x, y)$, $\cdot(x, y)$ te $= (x, y)$.
Logički aksiomi, te pravila izvoda sustava PA su dani, primjerice, u [5, 2.42 i 2.101]. Ovdje navodimo samo njegove nelogičke aksiome, bez aksioma jednakosti.

Definicija 2.4.1. *Skup nelogičkih aksioma teorije PA se sastoji od sljedećih formula:*

(1) $s(x) = s(y) \to x = y$

(2) $0 \neq s(x)$

(3) $x + 0 = x$

(4) $x + s(y) = s(x + y)$

(5) $x \cdot 0 = 0$

(6) $x \cdot s(y) = x \cdot y + x$

(7) Shema aksioma indukcije:

$$A(0) \to \Big(\forall x(A(x) \to A(s(x))) \to \forall x A(x)\Big),$$

gdje je A(x) proizvoljna formula

Napomenimo samo da ostale prirodne brojeve u formulama teorije PA, osim 0, koristimo samo kao pokratu. Tako je 1 pokrata za $s(0)$, 2 je pokrata za $s(s(0))$, itd.

Sada ćemo u osnovnim crtama opisati ideje aritmetizacije sustava PA. Svi detalji su dani u [1].

Ideja aritmetizacije je sljedeća: definiraju se predikati $Prim(x)$, $Exp(x, y, z)$, $Div(x, y)$ i slični koji redom izražavaju: x prost, $x = y^z$ i y dijeli x. Primjerice, $Prim(x)$ bi definirali kao:

$$(p \neq 1 \land \forall d(Div(p, d) \to d = 1 \lor d = p).$$

Ti predikati će biti bitni u kodiranju nizova prirodnih brojeva.

Dalje je bitna odlučivost tih predikata. Za predikat P kažemo da je odlučiv u PA ako za svaki i vrijedi: PA $\Vdash P(i)$ ili PA $\Vdash \neg P(i)$. Štoviše, PA će dokazivati $P(i)$ onda i samo onda kad je on istinit. Dakle, vrijedi PA $\vdash Prim(i)$ ako i samo ako je i prost broj.
Svakom znaku jezika PA se na jedinstven način pridružuje neki prirodan broj. Primjerice, znaku $\forall$ pridružimo 1, $\neg$ pridružimo 2, $=$ pridružimo 3, svakoj varijabli x_i broj 5^i i slično. Za svako to pridruživanje se definira (odlučiv) predikat $Forall(x)$, $Not(x)$, $Equals(x)$, $Var(x)$ i tako dalje. Tako formula $Forall(i)$ označava da je i upravo kod simbola 1. Zatim, formula $Not(i)$ izražava da je i upravo simbol 2, $Var(i)$ da je i oblika 5^x, za neki x, i tako dalje.
Svakom konačnom nizu znakova je tada moguće pridružiti prirodan broj. Neka je $z_1, \dots, z_n$ niz znakova, te neka su $z'_1, \dots, z'_n$ njima pridruženi prirodni brojevi. Tada će kod tog niza biti $p_1^{z'_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{z'_n}$, gdje je p_i niz prvih n prostih brojeva.

Dakle, sada je svakoj rečenici A sustava PA moguće pridružiti broj $[A]$ koji nazivamo Gödelovim brojem rečenice A.

Tada se može definirati predikat $Form(x)$ koji će biti dokaziv u PA ako, i samo ako je x kod konačnog niza koji je pravilno sastavljena formula jezika PA. $Form$ je i dalje odlučiv predikat. Dalje se definiraju predikati $Axm(x)$ koji provjerava zadovoljava li x predikat $Form$, te, ukoliko zadovoljava, je li formula koju predstavlja jedan od aksioma PA.

Također je potrebno definirati funkciju $sub(t, i, x)$ koja će zamijeniti sve pojave varijable x_i u formuli koju kodira x termom kojeg predstavlja t (ukoliko t nije kod terma, ili x nije kod formule, funkcija vraća 0).

Tada su potrebni i predikati $ConseqByModPon(x, y, z)$ te $ConseqByGen(x, y)$ (ponovno odlučivi) koji su istiniti ako su x, y, z, tj. x, y, formule, te je moguće dobiti z iz x i y korištenjem pravila izvoda modus ponens, tj. y iz x korištenjem pravila generalizacije.

Sada je moguće definirati kod niza formula. Pošto smo već definirali kodiranje konačnih nizova brojeva, te definirali kako se formulama mogu pridružiti brojevi, niz formula se kodira na očekivani način.

Koristeći prethodne definicije, definiramo predikat $Proof(x, y)$ koji će biti istinit ako, i samo ako je x kod dokaza za formulu koju kodira y. Naravno, bit će neistinit ako x nije uopće kod niza formula, ili ako y nije kod nijedne formule. Formula $Proof$ se definira koristeći prethodno spomenute predikate Axm, $ConseqByModPon$ te $ConseqByGen$, i funkciju sub.

Konačno, predikat dokazivosti se definira kao $Bew(x) = \exists y Proof(y, x)$. Predikat Bew

nije odlučiv. Naime, kad bi bio odlučiv, vrijedilo bi PA $\vdash Bew(\#\bot)$ ili PA $\vdash \neg Bew(\#\bot)$, gdje je $\bot$ ili kod simbola dodanog u jezik PA, ili kod neke antitautologije. No, u prvom slučaju bi imali dokaz inkonzistentnosti PA. No, ako pretpostavimo PA $\vdash \neg Bew(\#\bot)$, imamo dokaz PA dokazuje svoju konzistentnost. Po drugom Gödelovom teoremu nepotpunosti, tada PA ne bi bila konzistentna.

Detaljnija konstrukcija predikata *Bew* se nalazi u 2. poglavlju knjige [1], dok se dokaz svojstava predikata *Bew*, te Gödelovog drugog teorema nepotpunosti, nalaze u 3. poglavlju.

Poglavlje 3

Solovayevi teoremi aritmetičke potpunosti

U ovom poglavlju navodimo Solovayeve teoreme aritmetičke potpunosti. Aritmetičku potpunost za sustav GL i teoriju PA samo navodimo; izrazito detaljan dokaz je moguće pronaći u [1].
Za dokaze tih teorema je bitan pojam pojam Gödelove aritmetizacije koji smo neformalno uveli u prethodnom poglavlju, te su zato neke tvrdnje iskazane neformalno.

3.1 Dokazivost u sustavu ZF

Kako bi iskazali vezu između modalne logike i sustava PA (pa potom i ZF), potrebno je povezati modalne rečenice i rečenice sustava PA.

Definicija 3.1.1. *Neka je $*$ funkcija sa skupa propizicionalnih varijabli u skup rečenica sustava PA. Induktivno proširujemo vrijednost funkcije $*$ na skup svih modalnih rečenica na sljedeći način:*

(1) $*(\bot) = \bot$

(2) $*(A \to B) = *(A) \to *(B)$

(3) $*(\Box A) = Bew[*(A)]$

Tako proširenu funkciju $*$ tada nazivamo aritmetička interpretacija.

Često se koristi A^* kao pokrata za $*(A)$.
Dakle, kao što je najavljeno u prvom poglavlju, $\Box$ prevodimo u predikat dokazivosti u sustavu PA. Kao što će pokazati idući teorem, tada je dokazivost u PA opisana upravo sustavom GL.

Teorem 3.1.2 (Solovayev prvi teorem)**.** *Neka je A modalna rečenica. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

*(A) Za sve interpretacije *,* $PA \vdash A^*$

(B) $GL \vdash A$

Dokaz se nalazi u [1, poglavlje 9.].
Međutim, kao što govori Gödelov drugi teorem nepotpunosti, dokazivost i istinitost neke formule se ne poklapaju u potpunosti u PA. Stoga uvodimo sustav GLS (Gödel-Löb-Solovay),

Definicija 3.1.3. *Sustav GLS sadrži za aksiome sve teoreme sustava GL, te sve rečenice oblika* $\Box A \to A$*, a jedino pravilo izvoda je* modus ponens.

Sljedeći teorem pokazuje da je GLS upravo modalna logika istinitosti u PA.

Teorem 3.1.4 (Solovayev drugi teorem)**.** *Neka je A modalna rečenica. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

*(A) Za sve interpretacije *, rečenica* A^* *je istinita u standardnom modelu PA.*

(B) $GLS \vdash A$.

Dokaz se nalazi u [1, poglavlje 9.].
Sustav GLS nije normalan sustav; njegovi teoremi nisu zatvoreni na pravilo izvoda nužnost. Primjerice, $\neg\Box\bot$ je aksiom sustava GLS (tj., formula $\Box\bot \to \bot$). No, kada bi $\Box\neg\Box\bot$ bio teorem sustava GLS, onda bi, po prethodnom teoremu, $(\Box\neg\Box\bot)^*$ bila istinita formula, pa bi PA dokazivala svoju konzistentnost, što je u suprotnosti s Gödelovim drugim teoremom nepotpunosti.

No, sistem GLS je zatvoren na pravilo mogućnosti, tj. ako $GLS \vdash A$, onda $GLS \vdash \Diamond A$. Naime, ako uzmemo da $GLS \vdash A$, iz aksioma $\Box\neg A \vdash \neg A$ te $(\Box\neg A \to \neg A) \to (A \to \neg\Box\neg A)$ slijedi $GLS \vdash \neg\Box\neg A$, tj. upravo $GLS \vdash \Diamond A$. To se poklapa s interpretiranjem operatora $\Diamond$; kako smo $\Box$ preveli kao "dokazivo je u PA", onda je $\Diamond$ "nije oborivo u PA". Kako je GLS logika istinitosti sustava PA, ovo nam zapravo govori da PA ne dokazuje tvrdnje koje nisu istinite. No, to nije veliko iznenađenje. Naime, za dokaze prethodnih teorema za sustave GL i GLS je potrebno pretpostaviti neke činjenice o sustavu PA, poput njegove konzistentnosti, koje nije moguće dokazati u samom PA.

Kao što smo prethodno napomenuli, Gödelovu aritmetizaciju je moguće provesti i za ZF, tj. ZFC. Dapače, moguće je dokazati analogone prethodna dva teorema, tj. da je GL logika dokazivosti sustava ZF, a GLS logika istinitosti. Dapače, dokazi oba teorema se mogu ponoviti bez nekih velikih promjena. Također, kao i za PA, potrebno je pretpostaviti činjenice o teoriji ZF koje teorija ZF sama ne dokazuje.

Međutim, ZF je puno bogatija teorija od PA. Dapače, kao što smo već napomenuli, ω je model za PA koji je moguće definirati unutar ZF. Teoriju ZF je moguće promatrati kroz različite klase modela, te kroz druge sustave modalnih logika.

3.2 Istinitost u svim tranzitivnim modelima

Definirajmo prvo interpretacije za teoriju ZF.

Definicija 3.2.1. *Neka je $*$ funkcija sa skupa propizicionalnih varijabli u skup rečenica sustava ZF. Induktivno proširujemo vrijednost funkcije $*$ na skup svih modalnih rečenica na sljedeći način:*

(1) $*(\bot) = \bot$

(2) $*(A \to B) = *(A) \to *(B)$

(3) $*(\Box A)$ = *rečenica teorije ZF koja govori "Formula A^* je istinita u svim tranzitivnim modelima teorije ZF".*

Tako proširenu funkciju $*$ tada nazivamo interpretacija.

Logika istinitosti u svim tranzitivnim modelima teorije ZF je sustav I, što dokazuje sljedeći teorem. Napomenimo samo da je za dokaz aritmetičke potpunosti sustava I potrebno pretpostaviti postojanje beskonačno mnogo slabo nedostižnih kardinala α kako bi mogli koristiti postojanje beskonačno mnogo L_α modela teorije $ZF + (V = L)$.

Teorem 3.2.2 (Aritmetička potpunost sustava I)**.** *Neka je A modalna rečenica. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

*(A) Za sve interpretacije *, $ZF \vdash A^*$*

(B) Formula A je valjana na svim konačnim preduređajima.

(C) $I \vdash A$.

Primijetimo da je implikacija (B) $\implies$ (C) dio teorema potpunosti za sustav I.
Dokaz da vrijedi (A) $\implies$ (B) ćemo provesti uz pomoć sljedeće leme.

Lema 3.2.3. *Neka je (W, R) konačan preduređaj, te neka je $0 \in W$ svijet takav da, za sve svjetove $x \in W, x \neq 0$ vrijedi $0Rx$. Neka je $\Vdash$ relacija forsiranja na (W, R), te neka su modalna formula A i svijet $w \in W$ takvi da $w \nVdash A$.*
Neka su S_x, za $x \in W$ svijet, rečenice sustava ZF takve da vrijedi:

(a) Ako je $x \neq y$, onda ZF $\vdash \neg(S_x \wedge S_y)$

(b) Ako je xRy, onda ZF $\vdash S_x \to$ "S_y je istinita na nekom tranzitivnom modelu"

(c) Za $x \neq 0$, ZF $\vdash S_x \to$ "$\bigvee_{y:xRy} S_y$ je istinita na svim tranzitivnim modelima"

(d) S_0 je istinita u V.

Neka je interpretacija $*$ definirana kao: $p^* = \bigvee\{S_x \mid x \Vdash p\}$. Tada vrijede sljedeće tvrdnje:

(1) Za sve podrečenice B od A vrijedi: ako $x \Vdash B$, onda ZF $\vdash S_x \to B^*$; a ako $x \nVdash B$, onda ZF $\vdash S_x \to \neg B^*$.

(2) ZF $\nvdash A^*$.

Dokaz. Dokažimo tvrdnju (1) indukcijom po složenosti formule B. Pretpostavimo prvo da je $B = p$. Tada je $B^* = \bigvee\{S_x \mid x \Vdash p\}$.
Ako $x \Vdash p$, onda je S_x sadržan u disjunkciji u B^*, pa trivijalno slijedi da ZF $\vdash S_x \to B^*$. Naime, $A \to (A \vee B)$ je tautologija logike sudova za proizvoljne A i B, a ZF sadrži iste logičke aksiome, pa zbog potpunosti logike sudova imamo da ZF dokazuje sve tautologije. Nadalje, ako $x \nVdash p$, onda je S_x različita od svih disjunkta u p^*. Tada, prema uvjetu (a), za sve S_y u p^* vrijedi ZF $\vdash \neg S_x \vee \neg S_y$. Tada, ako promatramo sve svijetove y takve da je S_y u disjunkciji p^* slijedi ZF $\vdash S_x \to \neg p^*$, tj. ZF $\vdash S_x \to \neg B^*$.
Pretpostavimo sada da je $B = \bot$. Tada za sve svjetove x vrijedi $x \nVdash B$. No, očito vrijedi i ZF $\vdash S_x \to \neg\bot$.
Provedimo sada korak indukcije.

Pretpostavimo prvo da je $B = C \to D$. Tada je $B^* = C^* \to D^*$. Neka je $x \in W$ proizvoljan svijet i pretpostavimo $x \Vdash B$. Tada vrijedi $x \Vdash D$ ili $x \Vdash \neg C$. Pretpostavimo da vrijedi $x \Vdash D$. Tada, po pretpostavci indukcije vrijedi ZF $\vdash S_x \to D^*$, pa onda vrijedi i ZF $\vdash S_x \to (C^* \to D^*)$. Pretpostavimo onda da $x \Vdash \neg C$. Tada $x \nVdash C$, pa po pretpostavci indukcije ZF $\vdash S_x \to \neg C^*$, iz čega slijedi ZF $\vdash S_x \to (C^* \to D^*)$.
Pretpostavimo sada da $x \nVdash B$. Tada $x \Vdash C$ i $x \nVdash D$. Po pretpostavci indukcije sada vrijedi ZF $\vdash S_x \to \neg D^*$ i ZF $\vdash S_x \to C^*$. Kako je $\neg(C^* \to D^*)$ ekvivalentna formuli $C^* \wedge \neg D^*$, slijedi da ZF $\vdash S_x \to \neg(C^* \to D^*)$.

Provjerimo sada slučaj $B = \Box C$. Tada je $B^* =$ *"C^* je istinita na nekom tranzitivnom modelu za ZF"*.
Pretpostavimo da $x \Vdash B$. Tada za sve y takve da je xRy vrijedi $y \Vdash C$. Po pretpostavci indukcije, tada je ZF $\vdash S_y \rightarrow C^*$. Tada ZF $\vdash \bigvee\{S_y \mid xRy\} \rightarrow C^*$. No, kako je $x \in W$, prema svojstvu (d) vrijedi i $ZF \vdash S_x \rightarrow$ " $\bigvee_{y:xRy} S_y$ *je istinita na svim tranzitivnim modelima"*. Iz prethodne dvije tvrdnje slijedi ZF $\vdash S_x \rightarrow$ *"C^* je istinita na svim tranzitivnim modelima"*. Dakle, ZF $\vdash S_x \rightarrow B^*$.
Pretpostavimo sada da $x \nVdash B$. Tada postoji barem jedan y takav da je xRy te $y \nVdash C$. Po (b) sada vrijedi ZF $\vdash S_x \rightarrow$ *"S_y je istinit na nekom tranzitivnom modelu"*. Također, po pretpostavci indukcije vrijedi ZF $\vdash S_y \rightarrow \neg C^*$. Dakle, zbog istog argumenta kao u prethodnom, vrijedi ZF $\vdash S_x \rightarrow$ *"$\neg C^*$ je istinit na nekom tranzitivnom modelu"*, dakle ZF $\vdash S_x \rightarrow \neg$ *"C^* je istinit u svim tranzitivnim modelima"*, pa konačno ZF $\vdash \neg B^*$.

Pokažimo sada tvrdnju (2), tj. da $ZF \nvdash A^*$. Po (1) znamo da postoji svijet w takav da $w \nVdash A$, pa vrijedi

$$ZF \vdash S_w \rightarrow \neg A^*.$$

Po uvjetu (b) i nepraznosti skupa W vrijedi

$$ZF \vdash S_0 \rightarrow \neg S_w.$$

Zbog uvjeta (d) znamo sada da vrijedi "$\neg A^*$ vrijedi na nekom tranzitivnom modelu". Zbog konzistentnosti teorije ZF, sada slijedi $ZF \nvdash A^*$. □

Naravno, konzistentnost teorije ZF nije dokaziva u samoj teoriji ZF, pa je zadnji argument nemoguće formalizirati unutar ZF.

Prije dokaza prve implikacije teorema 3.2.2, spomenimo da je zadovoljavanje uvjeta (d) prethodne leme isto tako nemoguće formalizirati unutar ZF-a. Rečenica S_0 će biti izjava o broju tranzitivnih modela teorije $ZF + V = L$. Kako smo spomenuli, pretpostavljamo postojanje beskonačno mnogo slabo nedostiživih kardinala. Preciznije, pretpostavljamo da imamo univerzum V u kojem postoje ti kardinali, pa imamo model u kojem će vrijediti S_0. Taj dio dokaza je, naravno, nemoguće formalizirati unutar same teorije ZF.

Potreban je još jedan djelić slagalice kojeg se nismo dotakli u do sada: metoda forcinga. Nju uvodi Cohen u svom dokazu nezavisnosti hipoteze kontinuuma 1963. Ukratko, u originalnom Cohenovom dokazu, Cohen pretpostavlja postojanje prebrojivog, tranzitivnog modela M teorije ZF, i iz njega konstruira model $M[G]$ u kojem neće vrijediti hipoteza kontinuuma. Preciznije, ordinalu $2^{\aleph_0}$ dodaje podskup koji je unutar M i unutar $M[G]$ kardinalnosti $\aleph_2$, pa je unutar $M[G]$, $card(2^{\aleph_0}) \geq \aleph_2$. Pregled ovog dokaza je moguće naći u [3].

U kasnijim razmatranjima, Cohenov originalan dokaz je prilagođen, pa se ne počinje od prebrojivog, tranzitivnog modela M (čije je postojanje jača tvrdnja od tvrdnje konzistentnosti teorije ZFC), već od univerzuma V, pa se konstruira, na sličan način, $V[G]$ u kojem će također vrijediti $card(2^{\aleph_0}) \geq \aleph_2$. Izlaganje ovog pristupa je moguće naći u [2].

Za upotpunjavanje sljedećeg dokaza je potrebno iz modela L_α teorije $ZF+(V = L)$, za α slabo nedostiživ, konstruirati model za $2^{\aleph_0} = \aleph_j$, za $j \geq 1$, te koji će sadržavati iste ordinale. Iz načina konstrukcije od $M[G]$, odnosno $V[G]$, jasno je da je odabir $n = 2$ proizvoljan, te je moguće uzeti veći n, čime bi se dobili modeli u kojima vrijedi $card(2^{\aleph_0}) \geq \aleph_2$, kao što je primjerice vidljivo iz dokaza korolara VII lema 5.15. u [3]. Kako bi vrijedila jednakost, potreban je teorem 2.3.9.

Dokaz da je tu konstrukciju zaista moguće provesti nad L_α bi daleko nadišao opseg ovog rada. Sada navodimo tek osnovne korake.

Sljedeća lema vrijedi samo u modelima u kojima su istiniti aksiom izbora, i generalizirana hipoteza kontinuuma. Na sreću, po teoremima 2.3.9 i 2.3.10, za α slabo nedostiživ su L_α upravo takvi modeli.

Lema 3.2.4. *Neka su κ i λ kardinalni brojevi u modelu $\mathscr{M}$ teorije ZFC + GHC, $\lambda \geq 2$, i neka je barem jedan beskonačan. Tada u $\mathscr{M}$ vrijedi da $\lambda < cf(\kappa)$ povlači $\kappa^\lambda = \kappa$.*

Dokaz se može naći u [3, I teorem 10.41]. Sljedeće definicije su potrebne samo za iskaz leme koja daje postojanje traženog proširenja.

Definicija 3.2.5. *Neka je $(P, \leq)$ parcijalno uređen skup. Skup $F \subset P$ je* filter *na P ako vrijedi:*

(i) F je neprazan;

(ii) Ako je $p \leq q$, i $p \in F$, onda $q \in F$

(iii) Ako su $p, q \in F$, onda postoji $r \in F$ takav da je $r \leq p$ i $r \leq q$.

Definicija 3.2.6. *Neka su I, J skupovi. Tada skup svih konačnih parcijalnih funkcija iz I u J označavamo sa $Fn(I, J)$. Standardni uređaj nad $Fn(I, J)$ definiramo kao: $p \leq q$ ako i samo ako $p \supset q$.*

Definicija 3.2.7. *Neka je $\mathbb{P}$ parcijalan uređaj. Za skup G kažemo da je $\mathbb{P}$-generičan nad M ako je G filter na $\mathbb{P}$, i za sve guste podskupove D od $\mathbb{P}$, $D \in M \to G \cap D \neq \emptyset$.*

Sada, konačno, imamo:

Lema 3.2.8. *Neka je κ beskonačan kardinalan broj u M takav da $(\kappa^\omega = \kappa)^M$. Neka je $\mathbb{P} = Fn(\kappa \times \omega, 2)$. Neka je G skup $\mathbb{P}$-generičan nad M. Tada postoji model $M[G]$ u kojem je $(2^\omega = \kappa)^{M[G]}$.*

Dokaz se može naći u [3, VII lema 5.14]. Kako smo vidjeli, po teoremima 2.3.9 i 2.3.10, u L_α vrijede i aksiom izbora i generalizirana hipoteza kontinuuma, pa po 3.2.4, za svaki $\aleph_j$, $j \geq 1$, možemo primijeniti prethodnu lemu. Problem je pronaći G koji će biti $\mathbb{P}$-generičan; diskusiju o pronalaženju, ili pretpostavci postojanja, generičnih skupova je moguće naći u već spomenutoj literaturi.

Treća tvrdnja, koju iznosimo bez dokaza, a koja je potrebna za dokaz teorema, je da je svojstvo "biti tranzitivan model teorije $ZF + (V = L)$" apsolutno za L_α, tj. da je očuvano u novo dobivenom modelu. Ovo ne vrijedi općenito, no u dokazu teorema 13.16 u [2] se navode uvjeti koji bi se trebali zadovoljiti kako bi funkcija $\alpha \mapsto L_\alpha$ bila apsolutna, tj. kako bi očuvali sve L_α u novom modelu. Naime, pretpostavili smo, u prethodnom, da novi model sadrži iste ordinalne brojeve. Iz tih svojstava će slijediti da su ti isti L_α elementi proširenog modela, te da su i dalje modeli za $ZF + (V = L)$. No, ponovno, dokazivanje ovoga nadilazi okvire rada.

Zbog nedostataka koje vidimo u prethodnim napomenama, ovdje ne možemo dati detaljan dokaz implikacije (A) $\implies$ (B), pa prezentiramo tek grubu skicu.

Vrlo gruba skica dokaza implikacije (A) $\implies$ (B) teorema 3.2.2 . Uzmimo, za početak, da je (W, R) konačan preduređaj, te da je $\Vdash$ relacija forsiranja i svijet $w \in W$ takvi da je $w \nVdash A$. Dokazat ćemo, koristeći prethodnu lemu, da tada postoji interpretacija $*$ takva da ZF $\nvdash A^*$. Po razmatranjima poslije leme 1.3.6 je jasno da bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da postoje prirodni brojevi $n, r_0, \ldots, r_n$ takvi da je $W = \{(i, j) \mid i \leq n, j \leq r_i\}$ te $(i, j)R(k, m)$ ako i samo ako je $i > k$.
Neka su $W' = W \cup \{0\}$ te $R' = R \cup \{(0, z) \mid z \in W\}$. Dalje trebamo naći za svaki $x \in W'$ formule S_x takve da vrijede uvjeti leme 3.2.3.

Neka je S_0 rečenica koja izražava "postoji barem $n + 1$ tranzitivnih modela teorije $ZF + (V = L)$". Po pretpostavci navedenoj prije iskaza teorema, S_0 je istinit.

Neka je svijet $(i, j) \in W$ proizvoljan. Ukoliko vrijedi $j < r_i$, onda definiramo rečenicu $S_{(i,j)}$ koja izražava " $2^{\aleph_0} = \aleph_{j+1}$ i postoji točno i tranzitivnih modela teorije $ZF + (V = L)$". Ukoliko pak vrijedi $j = r_i$, definiramo $S_{(i,j)}$ kao "$2^{\aleph_0} \geq \aleph_{r_i+1}$, i postoji točno i tranzitivnih modela teorije $ZF + (V = L)$".

Pokažimo sada da vrijede uvjeti leme 3.2.3. Pokažimo prvo da vrijedi uvjet (a). Neka su $x, y \in W', x \neq y$ proizvoljni. Primjetimo da se u ZF može dokazati da je $\aleph_k \neq \aleph_l$, za $i \neq j$. Tada ZF dokazuje i $\neg(2^{\aleph_0} = \aleph_k \wedge 2^{\aleph_0} = \aleph_l)$. Dakle, ukoliko su $x = (i, k)$ i $y = (j, l)$ takvi da $k \neq l$, očito vrijedi da ZF $\vdash \neg(S_x \wedge S_y)$. Ukoliko je pak $x = (i, k)$ i $y = (j, l)$ te $i \neq j$, ili je jedan od x, y upravo 0, dovoljno je primjetiti da su rečenice "postoji točno i tranzitivnih modela" i "postoji točno j tranzitivnih modela" (tj. barem $n+1$, u slučaju da je jedan 0) kontradiktorne. Tada će ponovno ZF dokazivati negaciju njihove disjunkcije, pa

time i negaciju disjunkcije $S_x \vee S_y$. Dakle, vrijedi uvjet (a).
Uvjet (d) smo već komentirali. Pokažimo da vrijedi i uvjet (b).
Neka su svijetovi $x, y \in W'$ takvi da $xR'y$ i $y = (k, m)$. Uzmimo kao pretpostavku S_x. Tada, po definiciji relacije R' i rečenice S_x, postoji barem $k + 1$ tranzitivnih modela teorije $ZF + (V = L)$. Uzmimo upravo $(k + 1)$-ti model te teorije, gdje minimalni model brojimo kao prvi. Taj model možemo tada proširiti do tranzitivnog modela $\mathscr{M}$ za $2^{\aleph_0}$ koji sadrži iste ordinale. To proširenje je opisano u diskusiji poslije leme 3.2.8. Kako $\mathscr{M}$ sadrži iste ordinale, on sadrži i sve manje modele L_α teorije $ZF+V = L$, pa je uvjet (b) zadovoljen.

Dokažimo sada da vrijedi i uvjet (c). Neka je $x \in W$ takav da $x = (i, j)$. Tada je $\bigvee_{y:xRy} S_y$ ekvivalentno rečenici "postoji manje od i tranzitivnih modela teorije $ZF + V = L$". Sada, pretpostavimo S_x. Tada postoji točno i tranzitivnih modela teorije $ZF + V = L$. Neka je $\mathscr{M}$ tranzitivan model teorije ZF. Trebamo dokazati da u $\mathscr{M}$ vrijedi $\bigvee_{y:xRy} S_y$. No, $\mathscr{M} \cap L$ je tranzitivan model teorije $ZF + (V = L)$, s istim ordinalima kao i $\mathscr{M}$. Tada $\mathscr{M} \cap L$ nije element modela $\mathscr{M}$, pa u njemu postoji manje od i modela teorije $ZF + V = L$. Dakle, $\bigvee_{y:xRy} S_y$ je istinit na $\mathscr{M}$, pa je uvjet (d) zadovoljen. Sada, po lemi 3.2.3 slijedi da $ZF \nvdash A^*$.

Za dokaz implikacije $(C) \implies (A)$ teorema 3.2.2 je potreban sljedeći teorem. U njegovom iskazu, a i nadalje, $|x|$ označava ordinalni broj skupa x.

Teorem 3.2.9 (Jensen-Karp)**.** *Neka su $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ tranzitivni modeli takvi da $|\mathcal{C}| < |\mathcal{D}|$, te neka je formula χ takva da $\mathcal{C} \vDash \chi$. Tada vrijedi $\mathcal{D} \vDash$"χ je istinita na nekom tranzitivnom modelu".*

Dokaz se nalazi u [1, 9. poglavlje].
Sada možemo dokazati posljednji dio teorema 3.2.2.

Gruba skica dokaza implikacije $C \implies A$. Napomenimo prvo da sva daljnja razmatranja o modelima provodimo unutar same teorije ZF, te zbog toga i možemo izvlačiti zaključke o dokazivosti u ZF iz svojstava tih modela.

Dokaz ćemo provesti indukcijom po duljini dokaza u sustavu I. Pretpostavimo da je formula A aksiom sustava I.
Uzmimo prvo da je A tautologija. Tada će i A^* biti tautologija u ZF. Zbog potpunosti logike sudova iz logičkih aksioma sustava ZF je moguće dokazati sve tautologije, pa tako i A.
Uzmimo sada da je A oblika $\Box(\Box B \to B) \to \Box B$, te neka je $*$ proizvoljna interpretacija. Pretpostavimo da vrijedi ZF $\vdash (\Box(\Box B \to B))^*$. Promotrimo onda, unutar ZF, proizvoljan tranzitivan model $\mathscr{N}$ teorije ZF. Pretpostavimo, također, da u $\mathscr{N}$ nije istinita formula $\Box B$. Tada postoji, u $\mathscr{N}$, model $\mathscr{O}$ u kojem ne vrijedi $\neg B^*$. Tada postoji najmanji ordinal α takav da $\neg B^*$ vrijedi u tranzitivnom modelu $\mathscr{M}$ takvom da $|\mathscr{M}| = \alpha$. Kako ne postoji tranzitivan model formule $\neg B^*$ u $\mathscr{M}$, slijedi da je $\mathscr{M}$ također tranzitivan model za "Formula

B^* je istinita na svim tranzitivnim modelima". Dakle, u $\mathscr{M}$ vrijedi $(\Box B \wedge \neg B)^*$, pa ZF $\vdash$ $(\Diamond(\Box B \wedge \neg B))^*$. Kako je formula $\Diamond(\Box B \wedge \neg B)$ ekvivalentna formuli $\neg\Box(\Box B \to B)$, slijedi da u $\mathscr{M}$ ne vrijedi $(\Box(\Box B \to B))^*$. No, iz ZF $\vdash (\Box(\Box B \to B))^*$ imamo kontradikciju. Pošto su sva razmatranja napravljena unutar ZF, slijedi ZF $\vdash (\Box B)^*$. Dakle, iz ZF $\vdash (\Box(\Box B \to B))^*$ smo dokazali ZF $\vdash (\Box B)^*$, pa slijedi ZF $\to A^*$.

Promotrimo sada slučaj kada je A oblika $\Box(\Box C \to \Box D) \vee \Box(\Box D \to \boxdot C)$.

Sljedeće razmatranje, ponovno, radimo unutar ZF. Neka je $*$ proizvoljna interpretacija. Označimo C^* sa σ, i D^* sa τ. Pretpostavimo da postoje modeli $\mathscr{M}$ i $\mathscr{N}$ takvi da vrijedi:

(a) $\mathscr{M} \vDash$ "Formula σ je istinita na svim tranzitivnim modelima "

(b) $\mathscr{M} \vDash$ "Postoji tranzitivan model na kojem je formula $\neg\tau$ istinita "

(c) $\mathscr{N} \vDash$ "Formula τ je istinita na svim tranzitivnim modelima "

(d) vrijedi bar jedno od sljedećeg:

(1) $\mathscr{N} \vDash \neg\sigma$

(2) $\mathscr{N} \vDash$ "Formula σ je istinita na svim tranzitivnim modelima" .

Neka je $\mathscr{A}$ tranzitivan model formule $\neg\tau$ koji pripada modelu $\mathscr{M}$. Tada $|\mathscr{A}| < |\mathscr{M}|$. Sada imamo da je $|\mathscr{N}| \leq |\mathscr{A}|$. Naime, kada bi vrijedilo suprotno, $|\mathscr{A}| < |\mathscr{N}|$, po teoremu 3.2.9 bi vrijedilo $\mathscr{N} \vDash$" Formula $\neg\tau$ je istinita na nekom tranzitivnom modelu", što je u suprotnost s tvrdnjom (c). Dakle, $|\mathscr{N}| < |\mathscr{M}|$.
Pretpostavimo sada da vrijedi (1), tj. $\mathscr{N} \vDash \neg\sigma$. No, po teoremu 3.2.9 tada $\mathscr{M} \vDash$" Formula $\neg\sigma$ je istinita na nekom tranzitivnom modelu", što je u suprotnosti s tvrdnjom (a).
Dakle, vrijedi (2), pa $\mathscr{N}$ sadrži neki tranzitivan model $\mathscr{B}$ takav da $\mathscr{B} \vdash \neg\sigma$ i $|\mathscr{B}| < |\mathscr{N}|$. No, tada također vrijedi $|\mathscr{B}| < |\mathscr{M}|$, pa po teoremu 3.2.9 slijedi $\mathscr{M} \vDash$ ' Formula $\neg\sigma$ je istinita na nekom tranzitivnom modelu", što je u suprotnosti sa (a).

Dakle, dokazali smo, unutar ZF, da ne postoje modeli $\mathscr{N}$ i $\mathscr{M}$ s danim svojstvima. Kako su $\mathscr{M}$ i $\mathscr{N}$ proizvoljni modeli unutar ZF. Primjetimo da je uvjet (a) zapravo $\mathscr{M} \vDash (\Box C)^*$, (b) je $\mathscr{M} \vDash \neg(\Box C)^*$, (c) je $\mathscr{N} \vDash (\Box D)^*$, a (d) je $\mathscr{N} \vDash \neg(C \wedge \Box C)^*$. Kako ZF dokazuje da u svim modelima ne vrijedi barem jedan od uvjeta (a) do (d), slijedi da ZF dokazuje upravo $(\Box(\Box C \to \Box D) \vee \Box(\Box D \to \boxdot C)^*$, što je i trebalo dokazati.

Preostaje dokazati korak indukcije. Slučaj kada je formula A dobivena pravilom *modus ponens* slijedi izravno iz pretpostavke indukcije, definicije vrijednosti interpretacije $*$ na formulama oblika $B \to C$, te činjenice da je modus ponens također pravilo izvoda sustava ZF.

Promotrimo sada još samo pravilo nužnosti. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve modalne formule čiji je dokaz u sustavu I kraći od n, te neka je A formula čiji je dokaz u sustavu I duljine n, te koja je dobivena pravilom nužnosti iz prethodne. Tada je A oblika $\Box B$, te za B postoji dokaz duljine manje od n, pa, po pretpostavci indukcije, ZF $\vdash B^*$. No, tada ZF $\vdash A^*$.

3.3 Istinitost u svim univerzumima

Univerzum je svaki skup V_κ, gdje je κ nedostiživ kardinal. Po teoremu 2.3.6, za nedostižive κ, V_κ je model teorije ZFC. Naravno, kao što smo spomenuli, postojanje nedostiživih kardinala je nemoguće dokazati u samoj teoriji ZFC. Slično kao i u prethodnom dijelu, pretpostavit ćemo da postoji beskonačno mnogo nedostiživih kardinalnih brojeva. Sada nanovo definiramo interpretacije $*$.

Definicija 3.3.1. *Neka je $*$ funkcija sa skupa propozicionalnih varijabli u skup rečenica sustava ZF. Induktivno proširujemo vrijednost funkcije $*$ na skup svih modalnih rečenica na sljedeći način:*

(1) $*(\bot) = \bot$

(2) $*(A \to B) = *(A) \to *(B)$

(3) $*(\Box A)$ = *rečenica teorije ZF koja govori "Formula A^* je istinita u svim univerzumima".*

Tako proširenu funkciju $*$ tada nazivamo interpretacija.

Sada definiramo novi modalni sustav, J.

Definicija 3.3.2. *Modalni sustav J je proširenje sustava GL koje za aksiome dodatno sadrži sve formule oblika*

$$\Box(\Box A \to B) \lor \Box(\boxdot B \to A)$$

za proizvoljne modalne formule A i B.

Konačno, iskažimo aritmetičku potpunost sustava J.

Teorem 3.3.3. *Neka je A modalna rečenica. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

(A) Za sve interpretacije $*$, ZFC $\vdash A^*$

(B) Formula A je valjana na svim konačnim totalno uređenim okvirima.

(C) $J \vdash A$.

Dokaz ovog teorema se nalazi u [1, 13. poglavlje].

Bibliografija

[1] G. Boolos, *The Logic of Provability*, Cambridge University Press, 1995, ISBN 9780521483254, `https://books.google.hr/books?id=WekaT3OLoUcC`.

[2] T. Jech, *Set Theory*, Perspectives in Mathematical Logic, Springer Berlin Heidelberg, 2013, ISBN 9783662224007, `https://books.google.hr/books?id=GHjmCAAAQBAJ`.

[3] K. Kunen, *Set Theory: An Introduction to Independence Proofs*, Mathematical Programming Study, North-Holland Publishing Company, 1980, ISBN 9780444854018, `https://books.google.hr/books?id=9vG6lAEACAAJ`.

[4] M. Vuković, *Teorija skupova - predavanja*, 2015, `https://www.math.pmf.unizg.hr/sites/default/files/pictures/ts-skripta-2015.pdf`.

[5] M. Vuković, *Matematička logika*, Udžbenici Sveučilišta u Zagrebu, Element, 2009, ISBN 9789531975193, `https://books.google.hr/books?id=fLtFMwEACAAJ`.

Sažetak

Modalna logika se bavi idejama nužnosti i mogućnosti. U ovom radu definiramo modalne sustave K, K4, GL i I, te dokazujemo standardne teoreme adekvatnosti i potpunosti tih sustava sa Kripkeovom semantikom.
Zatim ponovno predstavljamo aksiome Zermelo-Fraenkelove teorije skupova, te uvodimo pojam relativizacije formule, te pojam tranzitivnih modela. Potom predstavljamo pregled ideje Gödelove aritmetizacije sustava Peanovih aksioma i Zermelo-Fraenkelove teorije skupova. Koristeći te pojmove razmatramo kako teorija ZF može govoriti o dokazivosti te relativnoj nezavisnosti i konzistentnosti svojih aksioma.
Konačno, iskazujemo Solovayeve teoreme aritmetičke potpunosti za modalne sustave GL, GLS, I i J, te predstavljamo skicu dokaza aritmetičke potpunosti za sustav I. Za upotpunjavanje te skice dokaza je potrebna, među ostalima, metoda forcinga.

Summary

Modal logic is concerned with the notions of necessity and possibility. This thesis defines the modal systems K, K4, GL and I, and contains proofs of soundness and completeness theorems of those systems in standard Kripkean semantics.
The axioms of the Zermelo-Fraenkel set theory are then presented, and the notions of relativizations and transitive models of ZF are defined. The idea behind Gödel numbering of PA and ZF formulas is presented as well. Using those notions, the idea of formalizing the method of ZF proving relative consistency and independence of its axioms is described.
Finally, Solovay's theorems of arithmetical completeness for modal systems GL, GLS, I and J are then presented, and a rough overview of the proof of arithmetical completeness of system I, concerning transitive models of ZF, is explored. The notion of forcing, among other ideas, is needed for completing the proof.

Životopis

Dana 12.3.1992. sam rođen u Zagrebu. Osnovnu školu Đulovac pohađam do 7. razreda, te potom završavam osnovnoškolsko obrazovanje u OŠ Vladimira Nazora u Daruvaru. Od 2006. pohađam opći smjer Gimnazije Daruvar, tokom kojeg sudjelujem na brojnim državnim natjecanjima iz matematike, fizike i logike. 2008. osvajam treću nagradu na Državnom natjecanju iz Fizike, dok 2010. osvajam prvo mjesto na Državnom natjecanju iz Matematike, B kategorije.

Gimnaziju završavam iste te 2010. i upisujem preddiplomski studij Matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Preddiplomski studij završavam 2013., te sam nagrađen za izniman uspjeh na preddiplomskom studiju. Te iste godine nastavljam obrazovanje upisivanjem diplomskog studija Računarstva i Matematike na istom fakultetu.

Tokom studija sam bio studentski demonstrator iz kolegija “Integrali funkcija više varijabli” te “Matematička logika”. Zbog interesa prema logici i funkcijskom programiranju, upisujem i polažem Programiranje u Haskellu na Fakultetu elektrotehnike i računarstva. Van studija sudjelujem u izradi, ispravljanju natjecanja iz Logike, te mentoriranju srednjoškolskih učenika u logici. Član sam Hrvatskog logičkog udruženja, te dio njegovog Upravnog odbora. Sudjelovao sam na studentskom projektu na Ericsson Summer Camp 2014. godine, studentskom projektu u tvrtki Buckell, te radim u Nanobitu od prosinca 2015.