SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Viktorija Kišak

VARIJACIJSKI RAČUN I NEGLATKA ANALIZA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Marko Vrdoljak

Zagreb, rujan, 2014

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Zahvaljujem svom mentoru prof. dr. sc. Marku Vrdoljaku na stručnoj pomoći i vodstvu pri pisanju ovoga rada.
Na poseban način zahvaljujem svojoj obitelji na materijalnoj i nematerijalnoj potpori koju su mi nesebično pružali tokom cjelokupnog obrazovanja.

Sadržaj

Uvod

Varijacijski račun je grana matematičke analize koja se bavi problemom egzistencije, jedinstvenosti i određivanja funkcija koje zadanom funkcionalu daju ekstremnu vrijednost. Problematika varijacijskog računa je problematika određivanja ekstrema funkcije, s tom razlikom što je pri određivanju ekstrema riječ o određivanju vrijednosti argumenta iz $\mathbb{R}$ za koji funkcija poprima ekstrem, dok se u varijacijskom računu traže funkcije određenih svojstava koje promatranom funkcionalu daju ekstremnu vrijednost.
Varijacijski račun kao matematička disciplina datira od 1696., kada je John Bernoulli postavio tzv. problem brahistohrone. Za rješenje ostalih problema i razvoj teorije vezane uz varijacijski račun najzahvalniji su Leonhard Euler i Joseph-Louis Lagrange te J. B. le R. d'Alembert, C. G. Jacobi, K. Weierstrass i D. Hilbert.
Problem varijacijskog računa često se može svesti na diferencijalnu jednadžbu, no mi ćemo se baviti kompliciranijim slučajevima, a to su neglatke funkcije. U varijacijskom računu neglatke funkcije se javljaju kroz dva efekta: neglatka rješenja i zadaće s neglatkom podintegralnom (Lagrangeovom) funkcijom. U prvom slučaju rješenje tražimo u prostorima apsolutno neprekinutih odnosno Lipschitzovih funkcija, dok u slučaju neglatke Lagrangeove funkcije izvod nužnih uvjeta optimalnosti zahtijeva korištenje neglatke analize.

U prvom poglavlju iskazani su osnovni pojmovi i rezultati koje koristimo u radu. Također, iznosimo pojmove i rezultate vezane uz konveksne funkcije. U primijenjenoj optimizaciji često se nađemo u situaciji da funkcija koju treba miniminizirati ili maksimizirati nije nužno diferencijabilna. Na primjer, ekonomski modeli poreza sadrže različite elemente koji imaju prekidne gradijente. Tada umjesto gradijenata koristimo njihovu generalizaciju, tj. subgradijente i subdiferencijale koje smo definirali za konveksne funkcije. Osim toga dokazali smo nužne i dovoljne uvjete da bi funkcija bila konveksna, te definirali pojam derivacije u smjeru.

U drugom poglavlju bavimo se generalizacijom subgradijenata i subdiferencijala, što nam je potrebno za rješavanje varijacijskog računa s neglatkom Lagrangeovom funkcijom. Nakon što smo definirali Clarkeovu generaliziranu derivaciju, uveli smo pojam Clarkeovog subgradijenta i Clarkeovog subdiferencijala. Osim same definicije, dokazali smo različita svojstva Clarkeovih subdiferencijala.

Konačno, u posljednjom poglavlju bavimo se varijacijskim računom. Osnovni problem varijacijskog računa čine dva važna elemenata. Prvi je Lagrangeova funkcija Λ definirana s $\Lambda : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Tri varijable (t, x, v) o kojima Λ ovisi su vrijeme, stanje i brzina. Drugi element je funkcija $x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ koji predstavlja argument funkcionala J. Neka x pripada klasi funkcija X. Tada je osnovni problem varijacijskog racuna dan s

$$\min J(x) = \int_0^t \Lambda(t, x(t), x'(t))\, dt \text{ na } X,\ \ x(a) = A,\ \ x(b) = B \quad (\mathbf{P})$$

gdje su A i B rubni uvjeti koji mogu i ne moraju biti dani. Klasa funkcija X ima važnu ulogu. U prvom potpoglavlju uzimamo $X = C^2[a, b]$, a u drugom $X = \mathrm{Lip}[a, b]$. Prvo sistematično rješenje dao je Euler koji je 1774. godine objavio osnovne nužne uvjete optimalnosti rješenja koje navodimo u posljednjem potpoglavlju. Osim nužnog Euler-Lagrangeovog uvjeta, uveli smo i Erdmannov nužni uvjet, uvjet transverzalnosti, Legendreov nužni uvjet teorem regularnosti i Weierstrassov nužni uvjet.

Poglavlje 1

Konveksna analiza

1.1 Osnovni pojmovi i rezultati

U prvom odjeljku uvest ćemo osnovne pojmove i teoreme koje koristimo u ovom radu. Podrazumijevat ćemo $f : \mathbb{R}^n \to (-\infty, +\infty]$. Označimo sa

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |f(x)| < \infty\}$$

efektivnu domenu funkcije f. Pretpostavimo da vrijedi $\mathcal{D} \neq \emptyset$.

Definicija 1.1.1. *Funkcija f je **pozitivno homogena** stupnja k ako vrijedi*

$$f(tx) = t^k f(x) \text{ za svaki } x \in \mathcal{D}, t > 0.$$

Definicija 1.1.2. *Funkcija f je **odozgo poluneprekidna** u $x_0 \in \mathcal{D}$ ako za svaki $x \in \mathcal{D}$ vrijedi*

$$\limsup_{x \to x_0} f(x) \leq f(x_0).$$

Funkcija f je odozgo poluneprekidna ako je odozgo poluneprekidna u svakoj točci $x_0 \in \mathcal{D}$.

Definicija 1.1.3. *Funkcija f je **subaditivna** ako za svaki $x, y \in \mathcal{D}$ vrijedi*

$$f(x + y) \leq f(x) + f(y).$$

Definicija 1.1.4. *Funkciju f nazivamo **Lipschitzova** funkcija ako postoji konstanta $M \geq 0$ takva da za svaki $x, y \in \mathcal{D}$ vrijedi*

$$\| f(x) - f(y) \| \leq M \| x - y \| .$$

M se naziva Lipschitzova konstanta funkcije f.

Definicija 1.1.5. *Funkciju f nazivamo* ***lokalno Lipschitzova****, odnosno Lipschitzova u okolini točke $x \in \mathcal{D}$, ako postoji okolina U točke x takva da je $f|_U$ Lipschitzova.*

Lema 1.1.6. *Ako je f neprekidno diferencijabilna u x, tada je f Lipschitzova u okolini točke x.*

Dokaz. Neprekidna diferencijabilnost funkcije f implicira postojanje konstanti $\varepsilon > 0$ i $M > 0$ takvih da

$$\| \nabla f(w) \| \leq M \text{ za svaki } w \in B(x;\varepsilon).$$

Neka su $y, y' \in B(x;\varepsilon)$. Tada po teoremu srednje vrijednosti postoji $z \in (y, y') \subseteq B(x;\varepsilon)$ takav da

$$f(y) - f(y') = \nabla f(z)^T (y - y').$$

Tada

$$|f(y) - f(y')| \leq \| \nabla f(z) \| \| y - y' \| \leq M \| y - y' \|$$

što je Lipschitzov uvjet u okolini točke x. □

Sljedeće rezultate navest ćemo bez dokaza.

Teorem 1.1.7. *Neka su C i D kompaktni i konveksni skupovi u $\mathbb{R}^n$. Tada je $C \subseteq D$ ako i samo ako vrijedi $\max_{c \in C} c^T x \leq \max_{d \in D} d^T x$ za svaki $x \in \mathbb{R}^n$.*

Lema 1.1.8. *Neka je f konveksna funkcija te neka*

$$\Delta = \operatorname{conv}\{x_1, ..., x_n\} \equiv \left\{ x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \mid \alpha_i \geq 0, \ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \right\}.$$

Tada $\max_{x \in \Delta} f(x) = \max_{1 \leq i \leq n} f(x_i)$.

Teorem 1.1.9. ***(Hahn-Banach)*** *Neka je X realni vektorski prostor te $Y \subseteq X$. Ako je $p : X \to \mathbb{R}$ pozitivno homogen i subaditivan funkcional i $f : Y \to \mathbb{R}$ linearni funkcional takav da $f(y) \leq p(y)$ za svaki $y \in Y$, tada postoji linearni funkcional $F : X \to \mathbb{R}$ takav da vrijedi $F(y) = f(y)$ za svaki $y \in Y$ i $F(x) \leq p(x)$ za svaki $x \in X$.*

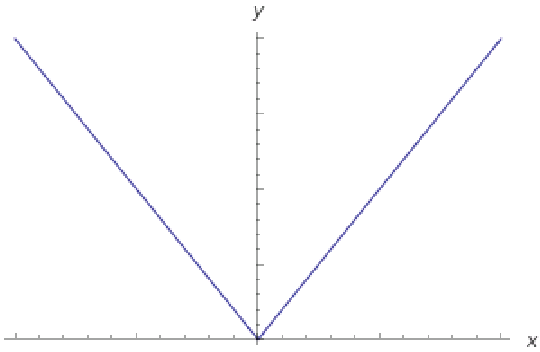
1.2 Neglatke konveksne funkcije

Kao što je bilo spomenuto u uvodu rada, osnovni pojam kojim se bavimo je pojam konveksne funkcije.

Definicija 1.2.1. *Funkcija f naziva se* ***konveksna funkcija*** *ako je njena efektivna domena konveksna te ako za svaki $x, y \in \mathcal{D}$ i $\alpha \in [0,1]$ vrijedi*

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y). \tag{1.1}$$

Funkcija f je ***konkavna*** *ako je $-f$ konveksna.*



Slika 1.1: $f(x) = |x|$

Na slici (1.1) vidimo primjer neglatke konveksne funkcije.
Sljedeća dva teorema daju nam nužne i dovoljne uvjete da bi funkcija f bila konveksna.

Teorem 1.2.2. *Funkcija f je konveksna ako i samo ako za svaki $x, y \in \mathcal{D}$ i $\beta \geq 0$ takav da $y + \beta(y-x) \in \mathcal{D}$ vrijedi*

$$f(y + \beta(y-x)) \geq f(y) + \beta(f(y) - f(x)). \tag{1.2}$$

Dokaz. Neka je f konveksna funkcija. Označimo $\alpha = \frac{\beta}{1+\beta}$ i $u = y + \beta(y-x)$. Tada

$$y = \frac{1}{1+\beta}(u + \beta x) = (1-\alpha)u + \alpha x.$$

Tada vrijedi

$$f(y) = f((1-\alpha)u + \alpha x) \leq (1-\alpha)f(u) + \alpha f(x) = \frac{1}{1+\beta}f(u) + \frac{\beta}{1+\beta}f(x)$$

što zadovoljava (1.2).

Obrnuto, neka vrijedi (1.2). Fiksiramo $x, y \in \mathcal{D}$ i $\alpha \in (0,1]$. Označimo $\beta = \frac{1-\alpha}{\alpha}$ i $u = \alpha x + (1-\alpha)y$. Tada

$$x = \frac{1}{\alpha}(u - (1-\alpha)y) = u + \beta(u - y).$$

Tada vrijedi

$$f(x) = f(u + \beta(u-y)) \geq f(u) + \beta(f(u) - f(x)) = \frac{1}{\alpha}f(u) - \frac{1-\alpha}{\alpha}f(y)$$

□

Teorem 1.2.3. *Funkcija f je konveksna ako i samo ako je njezin epigraf*

$$\mathrm{epi}(f) = \{(x,t) \in \mathcal{D} \times \mathbb{R} \mid t \geq f(x)\}$$

konveksan skup.

Dokaz. Neka je f konveksna funkcija te neka su $(x_1, t_1), (x_2, t_2) \in \mathrm{epi}(f)$. Tada za svaki $\alpha \in [0,1]$ imamo

$$\alpha t_1 + (1-\alpha)t_2 \geq \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2) \geq f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2).$$

Dakle, $(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2, \alpha t_1 + (1-\alpha)t_2) \in \mathrm{epi}(f)$.

Neka je $\mathrm{epi}(f)$ konveksan skup. Primijetimo da za $x_1, x_2 \in \mathcal{D}$ vrijedi $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)) \in \mathrm{epi}(f)$. Zbog konveksnosti vrijedi $(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2, \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2)) \in \mathrm{epi}(f)$. Tada je

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)$$

čime je zadovoljeno (1.1).

□

Definicija 1.2.4. *Konveksna funkcija f je* ***zatvorena*** *ako je njen epigraf zatvoren skup.*

Primjer 1.2.5. *Promotrimo sljedeće funkcije*

i) funkcija $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$, je konveksna i zatvorena jer je njen epigraf

$$\{(x,t) \mid t \geq x,\ t \geq -x\}$$

konveksan skup, te je presjek dva zatvorena skupa.

ii) funkcija $f(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$, *je konveksna i zatvorena*

iii) funkcija $f(x) = \| x \|$, *gdje je* $\| \cdot \|$ *bilo koja norma, je konveksna i zatvorena. Zaista za svaki* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ *i* $\alpha \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) &= \| \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \| \\ &\leq \| \alpha x_1 \| + \| (1-\alpha)x_2 \| \\ &= \alpha \| x_1 \| + (1-\alpha) \| x_2 \| \end{aligned}$$

Nadalje ćemo promatrati konveksnu funkciju na interioru njene efektivne domene.

Lema 1.2.6. *Neka je funkcija* f *konveksna i* $x \in \operatorname{int}(\mathcal{D})$. *Tada je* f *odozgo ograničena u okolini točke* x.

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$ takav da $x \pm \varepsilon e_i \in \operatorname{int}(\mathcal{D}), i = 1, ..., n$, gdje su e_i jedinični vektori iz $\mathbb{R}^n$. Označimo $\Delta = \operatorname{conv}\{x \pm \varepsilon e_i, i = 1, ..., n\}$. Pokažimo da $B(x; \widetilde{\varepsilon}) \subseteq \Delta$, gdje je $\widetilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$. Neka je

$$y = x + \sum_{i=1}^{n} h_i e_i, \quad \sum_{i=1}^{n} h_i^2 \leq \widetilde{\varepsilon}.$$

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da $h_i \geq 0$ za svaki $i = 1, ...n$. U suprotnom možemo staviti $-e_i$ umjesto e_i.
Tada

$$\beta \equiv \sum_{i=1}^{n} h_i \leq \sqrt{n} \sum_{i=1}^{n} h_i^2 \leq \varepsilon.$$

Dakle, za $y \in B(x; \widetilde{\varepsilon})$ i $\widetilde{h_i} = \frac{1}{\beta} h_i$ imamo

$$\begin{aligned} y &= x + \beta \sum_{i=1}^{n} \widetilde{h}_i e_i \\ &= x + \frac{\beta}{\varepsilon} \sum_{i=1}^{n} \varepsilon \widetilde{h}_i e_i \\ &= \left(1 - \frac{\beta}{\varepsilon}\right) x + \frac{\beta}{\varepsilon} \sum_{i=1}^{n} \widetilde{h}_i (x + \varepsilon e_i) \in \Delta. \end{aligned}$$

Tada po teoremu 1.1.7 i lemi 1.1.8 slijedi

$$M \equiv \max_{y \in B(x;\varepsilon)} f(y) \leq \max_{y \in \Delta} f(x) \leq \max_{1 \leq i \leq n} f(x + \varepsilon e_i).$$

$\square$

Teorem 1.2.7. *Neka je f konveksna i neka je $x \in \mathrm{int}(\mathcal{D})$. Tada je f Lipschitzova u okolini točke x.*

Dokaz. Neka je $B(x;\varepsilon) \subseteq \mathcal{D}$ i $\sup\{f(x) \mid x \in B(x;\varepsilon)\} \leq M$ (M je konačan po prethodnoj lemi) te $y \in B(x;\varepsilon)$ takav da $y \neq x$. Označimo

$$\alpha = \frac{1}{\varepsilon} \parallel y - x \parallel, \quad z = x + \frac{1}{\alpha}(y - x).$$

Očito $\parallel z - x \parallel = \frac{1}{\alpha} \parallel y - x \parallel = \varepsilon$. Tada $\alpha \leq 1$ i $y = \alpha z + (1-\alpha)x$. Stoga po definiciji konveksnosti slijedi

$$\begin{aligned} f(y) &\leq \alpha f(z) + (1-\alpha) f(x) \\ &\leq f(x) + \alpha(M - f(x)) \\ &= f(x) + \frac{M - f(x)}{\varepsilon} \parallel y - x \parallel \end{aligned}$$

Nadalje, označimo $u = x + \frac{1}{\alpha}(x - y)$. Tada $\parallel u - x \parallel = \varepsilon$ i $y = x + \alpha(x - u)$. Kako je f konveksna, po teoremu 1.2.2 slijedi

$$\begin{aligned} f(y) &\geq f(x) + \alpha(f(x) - f(u)) \\ &\geq f(x) - \alpha(M - f(x)) \\ &= f(x) - \frac{M - f(x)}{\varepsilon} \parallel y - x \parallel \end{aligned}$$

Dakle

$$|f(y) - f(x)| \leq \frac{M - f(x)}{\varepsilon} \parallel y - x \parallel .$$

□

Konveksne funkcije imaju važno svojstvo koje je veoma slično diferencijabilnosti.

Definicija 1.2.8. *Neka je $x \in \mathcal{D}$. f je derivabilna u smjeru v u točki x ako postoji limes*

$$f'(x;v) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t}. \tag{1.3}$$

Vrijednost $f'(x;v)$ se naziva ***derivacija funkcije*** *f* ***u smjeru*** *v u točki x.*

Teorem 1.2.9. *Konveksna funkcija f je diferencijabilna u svakom smjeru u svakoj točki iz interiora efektivne domene.*

Dokaz. Neka je $x \in \text{int}(\mathcal{D})$. Promatramo funkciju

$$\phi(t) = \frac{f(x+tv) - f(x)}{t}, \ t > 0.$$

Neka je $t \in (0, \varepsilon]$ takav da $x + \varepsilon v \in \mathcal{D}$ te neka je $\alpha \in [0, 1]$. Tada

$$f(x + \alpha tv) = f((1-\alpha)x + \alpha(x+tv)) \leq (1-\alpha)f(x) + \alpha f(x+tv).$$

Stoga vrijedi

$$\phi(\alpha t) = \frac{f(x+\alpha tv) - f(x)}{\alpha t} \leq \phi(t)$$

iz čega slijedi da je $\phi(t)$ padajuća funkcija za $t \downarrow 0$. Neka je $\beta \in (0, 1]$ takav da $x - \beta v \in \mathcal{D}$. Zbog konveksnosti funkcije f, prema teoremu 1.2.2 imamo

$$\phi(t) \geq \frac{f(x) - f(x-\beta v)}{\beta}.$$

Tada limes (1.3) postoji.

□

Lema 1.2.10. *Neka je funkcija f konveksna i $x \in \text{int}(\mathcal{D})$. Tada je $f'(x; v)$ konveksna funkcija u v te pozitivno homogena stupnja 1. Za svaki $y \in \mathcal{D}$ vrijedi*

$$f(y) \geq f(x) + f'(x; y - x). \tag{1.4}$$

Dokaz. Prvo ćemo dokazati da je derivacija u smjeru pozitivno homogena funkcija. Za $v \in \mathbb{R}^n$ i $\tau > 0$ imamo

$$\begin{aligned} f'(x; \tau v) &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(x+\tau tv) - f(x)}{t} \\ &= \tau \lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{f(x+\alpha v) - f(x)}{\alpha} \\ &= \tau f'(x; v) \end{aligned}$$

gdje je $\alpha = \tau t$. Nadalje, za svaki $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ i $\beta \in [0, 1]$ slijedi

$$\begin{aligned} f'(x; \beta v_1 + (1-\beta)v_2) &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(x + t(\beta v_1 + (1-\beta)v_2)) - f(x)}{t} \\ &\leq \lim_{t \downarrow 0} \frac{\beta[f(x+tv_1) - f(x)] + (1-\beta)[f(x+tv_2) - f(x)]}{t} \\ &= \beta f'(x; v_1) + (1-\beta) f'(x; v_2) \end{aligned}$$

Dakle, $f'(x;v)$ je konveksna funkcija u v.
Neka je $t \in (0,1], y \in \mathcal{D}$ i $y_t = x + t(y-x)$. Po teoremu 1.2.2 vrijedi

$$f(y) = f(y_t + \frac{1}{t}(1-t)(y_t - x)) \geq f(y_t) + \frac{1}{t}(1-t)[f(y_t) - f(x)].$$

Kada promatramo limes u $t \downarrow 0$ dobivamo tvrdnju teorema.

□

Sada smo u spremni uvesti pojam subgradijenata i subdiferencijala.

Definicija 1.2.11. *Neka je f konveksna funkcija. Vektor ξ nazivamo* ***subgradijent*** *funkcije f u točki $x \in \mathcal{D}$ ako za svaki $y \in \mathcal{D}$ vrijedi*

$$f(y) \geq f(x) + \langle \xi, y-x \rangle. \tag{1.5}$$

Skup svih subgradijenta od f u točki x nazivamo ***subdiferencijal*** *funkcije f u točki x, u oznaci $\partial f(x)$.*

Primjer 1.2.12. *Izračunajmo subgradijent funkcije $f(x) = |x|$ iz primjera 1.2.5(i). Za svaki $y \in \mathbb{R}$ i $\xi \in [-1,1]$ imamo*

$$f(y) = |y| \geq \xi \cdot y = f(0) + \xi \cdot (y-0).$$

Dakle, subgradijent funkcije f u 0 nije jedinstven nego je jednak cijelom segmentu $[-1,1]$, tj. $\partial f(0) = [-1,1]$.

Skup nejednakosti u (1.5) možemo promatrati kao skup linearnih ograničenja čime je definiran skup $\partial f(x)$, pa je po definiciji subdiferencijal zatvoren konveksan skup. Sljedeća lema nam dokazuje da subdiferencijabilnost funkcije povlači njenu konveksnost.

Lema 1.2.13. *Neka je za svaki $x \in \mathcal{D}$ subdiferencijal $\partial f(x)$ neprazan skup. Tada je f konveksna funkcija.*

Dokaz. Neka su $x, y \in \mathcal{D}$, $\alpha \in [0,1]$ te $y_\alpha = x + \alpha(y-x)$. Neka je $\xi \in \partial f(y_\alpha)$. Tada

$$f(y) \geq f(y_\alpha) + \langle \xi, y - y_\alpha \rangle = f(y_\alpha) + (1-\alpha)\ \langle \xi, y-x \rangle$$

$$f(x) \geq f(y_\alpha) + \langle \xi, x - y_\alpha \rangle = f(y_\alpha) - \alpha\ \langle \xi, y-x \rangle$$

Množenjem prve nejednakosti sa α, druge sa $(1-\alpha)$ te zbrajanjem nejednadžbi, dobivamo

$$\alpha f(y) + (1-\alpha) f(x) \geq f(y_\alpha).$$

□

Također, možemo dokazati i obrnutu tvrdnju.

Teorem 1.2.14. *Neka je f zatvorena konveksna funkcija te neka je $x \in \text{int}(\mathcal{D})$. Tada je $\partial f(x)$ neprazan ograničen skup.*

U dokazu ovog teorema potreban je sljedeći teorem čiji dokaz možete pronaći u [5], str 126.

Teorem 1.2.15. *Neka je Q zatvoren konveksan skup i x pripada granici skupa Q. Tada postoji potporna hiperravnina $\mathcal{H}(g,\gamma)$ za Q koja prolazi kroz x.*

Dokaz. Nastavimo sa dokazom teorema 1.2.14. Primijetimo da $(x, f(x)) \in \text{epi}(f)$. Prema prethodnom teoremu, postoji potporna hiperravnina epigrafa funkcije f u $(x, f(x))$

$$-\alpha\tau + \langle d, y\rangle \leq -\alpha f(x) + \langle d, x\rangle \tag{1.6}$$

za svaki $(y,\tau) \in \text{epi}(f)$. Neka je $\| d \|^2 + \| \alpha \|^2 = 1$. Za svaki $\tau \geq f(x)$ točka $(x,\tau) \in \text{epi}(f)$ pa možemo zaključiti $\alpha \geq 0$.
Prema lemi 1.2.6 konveksna funkcija je lokalno odozgo ograničena na efektivnoj domeni, odnosno postoje $\varepsilon > 0$ i $M > 0$ takvi da vrijedi $B(x;\varepsilon) \subseteq \mathcal{D}$ i

$$f(y) - f(x) \leq M \| y - x \|$$

za svaki $y \in B(x;\varepsilon)$. Tada po (1.6) za svaki takav y vrijedi

$$\langle d, y - x\rangle \leq \alpha(f(y) - f(x)) \leq \alpha M \| y - x \| .$$

Za $y = x + \varepsilon d$ imamo $\| d \|^2 \leq \alpha M \| d \|$. Tada $\alpha \geq \frac{1}{\sqrt{1+M^2}}$.
Stoga, za $\xi = \frac{d}{\alpha}$ dobivamo

$$f(y) \geq f(x) + \langle \xi, y - x\rangle.$$

Neka je $\xi \in \partial f(x)$. Tada za $y = x + \frac{\varepsilon\xi}{\|\xi\|}$ vrijedi

$$\varepsilon \| \xi \| = \langle \xi, y - x\rangle \leq f(y) - f(x) \leq M \| y - x \| = M\varepsilon,$$

odnosno $\partial f(x)$ je ograničen skup.

$\square$

Sljedeći teorem iskazuje nam važnu relaciju između subdiferencijala i derivacija u smjeru konveksnih funkcija.

Teorem 1.2.16. *Neka je f konveksna funkcija. Za svaki $x \in \text{int}(\mathcal{D})$ i $v \in \mathbb{R}^n$ vrijedi* *i)* $f'(x;v) = \max\{\langle \xi, v\rangle \mid \xi \in \partial f(x)\}$

ii) $\partial f(x) = \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid f'(x;v) \geq \langle \xi, v\rangle\}$

Dokaz. i) Primijetimo da za proizvoljni $\xi \in \partial f(x)$

$$f'(x;v) = \lim_{t\downarrow 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t} \geq \langle \xi, v\rangle. \tag{1.7}$$

Subdiferencijal funkcije $f'(x;v)$ u $v = 0$ je neprazan te $\partial f(x) \subseteq \partial f'(x;0)$.
Prema lemi 1.2.10 funkcija $f'(x;v)$ je konveksna u v pa za svaki $y \in \mathcal{D}$ imamo

$$f(y) \geq f(x) + f'(x;y-x) \geq f(x) + \langle \xi, y - x\rangle,$$

gdje je $\xi \in \partial f'(x;0)$. Tada $\partial f'(x;0) \subseteq \partial f(x)$. Dakle, $\partial f'(x;0) \equiv \partial f(x)$.
Neka je $\xi' \in \partial f'(x;v)$. Tada za svaki $w \in \mathbb{R}^n$ i $\tau > 0$ iz leme 1.2.10 dobivamo

$$\tau f'(x;w) = f'(x;\tau w) \geq f'(x;v) + \langle \xi', \tau w - v\rangle.$$

Za $\tau \to \infty$ vrijedi

$$f'(x,w) \geq \langle \xi', w\rangle \implies \xi' \in \partial f'(x;0) = \partial f(x)$$

Za $\tau \to 0$

$$f'(x;v) - \langle \xi', v\rangle \leq 0 \tag{1.8}$$

Dakle, iz (1.7) i (1.8) slijedi $\langle \xi', v\rangle = f'(x;v)$ čime je dokazana tvrdnja teorema.

ii) Neka je $K = \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid f'(x;v) \geq \langle \xi, v\rangle\}$ te neka je $\xi \in K$ proizvoljan. Tada za svaki $y \in \mathbb{R}^n$, zbog konveksnosti funkcije f, vrijedi

$$\begin{aligned}\langle \xi, y\rangle \leq f'(x;y) &= \lim_{t\downarrow 0} \frac{f((1-t)x + t(x-y)) - f(x)}{t} \\ &\leq \lim_{t\downarrow 0} \frac{(1-t)f(x) + tf(x+y) - f(x)}{t} \\ &= f(x+y) - f(x)\end{aligned}$$

za $t \leq 1$. Za $y = x' - x$ slijedi $\xi \in \partial f(x)$.
S druge strane, neka je $\xi \in \partial f(x)$. Tada za svaki $y \in \mathbb{R}^n$ vrijedi

$$f'(x;y) = \lim_{t\downarrow 0} \frac{f(x+ty) - g(x)}{t} \geq \lim_{t\downarrow 0} \frac{\langle \xi, x + ty - x\rangle}{t} \geq \langle \xi, y\rangle.$$

Dakle, $\xi \in K$, odnosno tvrdnja je time dokazana.

$\square$

Teorem 1.2.17. *Vrijedi:* $f(x^*) = \min_{x \in \mathcal{D}} f(x)$ *ako i samo ako* $0 \in \partial f(x^*)$.

Dokaz. Ako $0 \in \partial f(x^*)$, tada $f(x) \geq f(x^*) + \langle 0, x - x^* \rangle = f(x^*)$ za svaki $x \in \mathcal{D}$. Obrnuto, ako $f(x) \geq f(x^*)$ za svaki $x \in \mathcal{D}$ $0 \in \partial f(x^*)$ po definiciji subgradijenta. $\square$

Poglavlje 2

Subdiferencijali neglatkih funkcija

Nakon što smo u prethodnom poglavlju uveli pojam derivacija u smjeru, ovdje ćemo promatrati generalizaciju derivacije u smjeru, odnosno Clarkeovu generaliziranu derivaciju u smjeru. Clarkeove generalizirane derivacije u smjeru ćemo promatrati na Lipschitzovim funkcijama te u konačnodimenzionalnim prostorima. Osim toga, definirat ćemo subdiferencijal i subgradijent u odnosu na Clarkeove generalizirane derivacije u smjeru te regularnu funkciju i iskazati nekoliko teorema koji će nam pomoći u računanju navedenog u praksi.

Primjer 2.0.18. *Kod primijenjene optimizacije često se u obzir moraju uzeti različite neizvjesnosti. Primjerice, u dizajniranju proizvoda inženjeri imaju na raspolaganju parametar dizajna x za kojeg troškovi $f(x)$ moraju biti minimalni. Međutim, u proizvodnji se javlja poremećaj q. Pretpostavimo da je q element određenog kompaktnog skupa Q. Konačnu netočnost označit ćemo sa $e(x,q)$ i pretpostaviti da je e neprekidno diferencijabilna te da ne može biti viša od određene prihvatljive razine E. Kako je poremećaj q nepoznat, parametar x izabrat ćemo tako da $g(x) \leq 0$ gdje je*

$$g(x) = \max_{q \in Q} e(x,q) - E.$$

Funkcija g općenito nije diferencijabilna ni konveksna, ali je lokalno Lipschitzova. Dakle, minimizacija funkcije f je problem uz ograničenje neglatkom i nekonveksnom funkcijom.
Ovakvi problemi su motivacija za razmatranje optimizacije neglatkih i nekonveksnih podataka koji se pojavljuju u područjima optimalnog dizajna, svojstvenih vrijednosti plasmana, elastičnosti i mnogim drugim.

2.1 Generalizacija derivacije u smjeru

Definicija 2.1.1. *Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Lipschitzova funkcija u okolini točke $x \in \mathbb{R}^n$.* ***Clarkeova generalizirana derivacija*** *funkcije f u točci x u smjeru $v \in \mathbb{R}^n$ je definirana s*

$$f^0(x; v) = \limsup_{y \to x, t \downarrow 0} \frac{f(y + tv) - f(y)}{t}. \tag{2.1}$$

U nastavku ćemo prikazati osnovna svojstva Clarkeovih generaliziranih derivacija.

Teorem 2.1.2. *Neka je f Lipschitzova funkcija u okolini točke x s konstantom Lipschitzovosti K. Tada vrijedi:*

i) funkcija $v \mapsto f^0(x; v)$ je pozitivno homogena i subaditivna na $\mathbb{R}^n$ sa

$$|f^0(x; v)| \leq K \parallel v \parallel$$

ii) $f^0(x; v)$ je odozgo poluneprekidna kao funkcija od $(x; v)$ i Lipschitzova s konstantom Lipschitzovosti K kao funkcija od v na $\mathbb{R}^n$

iii) $f^0(x; -v) = (-f)^0(x; v)$

Dokaz. i)

$$\begin{aligned} |f^0(x; v)| &= \left| \limsup_{y \to x, t \downarrow 0} \frac{f(y + tv) - f(y)}{t} \right| \\ &\leq \limsup_{y \to x, t \downarrow 0} \frac{|f(y + tv) - f(y)|}{t} \end{aligned}$$

Zbog Lipschitzovog uvjeta za svaki $y, y + tv \in B(x; \varepsilon)$ vrijedi

$$\begin{aligned} |f^0(x; v)| &\leq \limsup_{y \to x, t \downarrow 0} \frac{K \parallel y + tv - y \parallel}{t} \\ &\leq \limsup_{y \to x, t \downarrow 0} \frac{Kt \parallel v \parallel}{t} \\ &= K \parallel v \parallel . \end{aligned}$$

Pokazat ćemo da je Clarkeova generalizirana derivacija u smjeru pozitivno homogena. Neka je $\lambda > 0$. Tada vrijedi

$$\begin{aligned} f^0(x;\lambda v) &= \limsup_{y\to x, t\downarrow 0} \frac{f(y+t\lambda v)-f(y)}{t} \\ &= \limsup_{y\to x, t\downarrow 0} \lambda \cdot \frac{f(y+t\lambda v)-f(y)}{\lambda t} \\ &= \lambda \limsup_{y\to x, t\downarrow 0} \frac{f(y+t\lambda v)-f(y)}{\lambda t} = \lambda \cdot f^0(x;v). \end{aligned}$$

Pokažimo da vrijedi i subaditivnost. Neka su $v, w \in \mathbb{R}^n$ proizvoljni. Tada slijedi

$$\begin{aligned} f^0(x;v+w) &= \limsup_{y\to x, t\downarrow 0} \frac{f(y+t(v+w))-f(y)}{t} \\ &= \limsup_{y\to x, t\downarrow 0} \frac{f(y+tv+tw)-f(y+tw)+f(y+tw)-f(y)}{t} \\ &\leq \limsup_{y\to x, t\downarrow 0} \frac{f((y+tw)+tv)-f(y+tw)}{t} + \limsup_{y\to x, t\downarrow 0} \frac{f(y+tw)-f(y)}{t} \\ &= f^0(x;v) + f^0(x;w). \end{aligned}$$

Iz ovoga slijedi da je funkcija $v \mapsto f^0(x;v)$ subaditivna i homogena, čime smo u potpunosti dokazali $i)$

ii) Neka su nizovi $(x_i), (v_i) \subseteq \mathbb{R}^n$ takvi da $x_i \to x$ i $v_i \to v$. Prema definiciji limesa superiora postoje nizovi $(y_i) \subseteq \mathbb{R}^n$ i $(t_i) \subseteq \mathbb{R}$ takvi da za svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$t_i > 0$$
$$f^0(x;v) \leq \frac{f(y_i+tv_i)-f(y_i)}{t_i} + \frac{1}{i}$$
$$\| y_i - x_i \| + t_i < \frac{1}{i}$$

Sada slijedi

$$\begin{aligned} f^0(x_i;v_i) - \frac{1}{i} &= \limsup_{y\to x_i, t\downarrow 0} \frac{f(y+tv_i)-f(y)}{t} - \frac{1}{i} \\ &\leq \frac{f(y_i+t_iv_i)-f(y_i)}{t_i} \\ &= \frac{f(y_i+t_iv)-f(y_i)}{t_i} + \frac{f(y_i+t_iv_i)-f(y_i+t_iv)}{t_i}. \end{aligned}$$

Prema Lipschitzovom uvjetu tada vrijedi

$$\frac{|f(y_i + t_i v_i) - f(y_i + t_i v)|}{t_i} \leq \frac{K \parallel t_i v_i - t_i v \parallel}{t_i} = K \parallel v_i - v \parallel \longrightarrow 0.$$

Kada $i \to \infty$, slijedi $y_i + t_i v_i, y_i + t_i v \in B(x; \varepsilon)$. Dobivamo

$$\limsup_{i \to \infty} f^0(x_i; v_i) \leq \limsup_{i \to \infty} \frac{f(y_i + t_i v) - f(y_i)}{t_i} \leq f^0(x; v),$$

što dokazuje poluneprekidnost odozgo funkcije $(x; v) \mapsto f^0(x; v)$.

Neka su dani $v, w \in \mathbb{R}^n$. Ako vrijedi $y + tv, y + tw \in B(x; \varepsilon)$, tada vrijedi

$$f(y + tv) - f(y + tw) \leq Kt \parallel v - w \parallel$$

iz čega slijedi

$$\limsup_{y \to x, t \downarrow 0} \frac{f(y + tv) - f(y)}{t} - \limsup_{y \to x, t \downarrow 0} \frac{f(y + tw) - f(y)}{t} \leq K \parallel v - w \parallel,$$

odnosno

$$f^0(x; v) - f^0(x; w) \leq K \parallel v - w \parallel .$$

Zamjenom mjesta v i w dobijemo

$$f^0(x; w) - f^0(x; v) \leq K \parallel w - v \parallel .$$

Ovime smo dokazali da je funkcija $v \mapsto f^0(x; v)$ Lipschitzova s konstantom Lipschitzovosti K, tj. da vrijedi

$$|f^0(x; v) - f^0(x; w)| \leq K \parallel v - w \parallel .$$

iii) Po definiciji (2.1) vrijedi

$$\begin{aligned} f^0(x; -v) &= \limsup_{y \to x, t \downarrow 0} \frac{f(y - tv) - f(y)}{t} \\ &= \limsup_{u \to x, t \downarrow 0} \frac{(-f)(u + tv) - (-f)(u)}{t} \end{aligned}$$

gdje je $u := y - tv$. Dakle

$$f^0(x; -v) = (-f)^0(x; v).$$

□

Nakon definicije Clarkeove generalizirane derivacije u smjeru i iskazanih svojstava, možemo definirati sljedeće.

Definicija 2.1.3. *Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lokalno Lipschitzova funkcija.* ***Clarkeov subdiferencijal*** *funkcije f u točki x je skup*

$$\partial_C f(x) := \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid f^0(x; v) \geq \xi^T v, \forall v \in \mathbb{R}^n\}. \tag{2.2}$$

Svaki element $\xi \in \partial_C f(x)$ zovemo ***Clarkeov subgradijent*** *funkcije f u x.*

Nadalje, promotrimo osnovna svojstva Clarkeovog subdiferencijala.

Teorem 2.1.4. *Neka je f Lipschitzova funkcija u okolini točke x s konstantom Lipschitzovosti K. Tada vrijedi :*

i) $\partial_C f(x)$ *je neprazan, konveksan i kompaktan skup takav da vrijedi* $\partial_C f(x) \subseteq B(0; K)$

ii) $f^0(x; v) = \max\{\xi^T v \mid \xi \in \partial_C f(x)\}$ *za svaki* $v \in \mathbb{R}^n$

Dokaz. i) Prema teoremu 2.1.2, i), vrijedi da je $f^0(x; \cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ pozitivno homogena i subaditivna funkcija, pa prema Hanh-Banachovom teoremu postoji vektor $\xi \in \mathbb{R}^n$ takav da $\xi^T v \leq f^0(x; v)$ za svaki $v \in \mathbb{R}^n$, pa po definiciji (2.2) slijedi da je $\partial_C f(x) \neq \emptyset$.

Neka su $\xi, \xi' \in \partial_C f(x)$ i $\lambda \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned}(\lambda\xi + (1-\lambda)\xi')^T v &= \lambda\xi^T v + (1-\lambda)(\xi')^T v \\ &\leq \lambda f^0(x; v) + (1-\lambda) f^0(x; v) = f^0(x; v)\end{aligned}$$

odakle slijedi $\lambda\xi + (1-\lambda)\xi' \in \partial_C f(x)$, tj. $\partial_C f(x)$ je konveksan skup.

Preostaje nam dokazati da je $\partial_C f(x)$ kompaktan skup. Po teoremu 2.1.2, i), za $\xi \in \partial_C f(x)$ vrijedi:

$$\| \xi \|^2 = \xi^T \xi \leq |f^0(x; \xi)| \leq K \| \xi \|$$

iz čega dobivamo

$$\| \xi \| \leq K.$$

Dakle, $\partial_C f(x)$ je ograničen. Pokažimo da je i zatvoren. Neka je niz $(\xi_i) \subseteq \partial_C f(x)$ takav da $\xi_i \to \xi$. Tada

$$\xi^T v = \lim_{i \to \infty} \xi_i^T v \leq f^0(x; v),$$

iz čega slijedi $\xi \in \partial_C f(x)$, što povlači zatvorenost skupa $\partial_C f(x)$.

ii) Iz definicije Clarkeovog subdiferencijala (2.2) dobivamo

$$f^0(x;v) \geq \max\{\xi^T v \mid \xi \in \partial_C f(x)\}, \forall v \in \mathbb{R}^n.$$

Pretpostavimo da postoji $v_1 \in \mathbb{R}^n$ takav da

$$f^0(x;v_1) > \max\{\xi^T v_1 \mid \xi \in \partial_C f(x)\},$$

tada prema Hahn-Banachovom teoremu postoji $\xi_1 \in \mathbb{R}^n$ takav da $f^0(x;v) \geq \xi_1^T v$ za svaki $v \in \mathbb{R}^n$ i $f^0(x;v_1) = \xi_1^T v_1$. Tada slijedi da je $\xi_1 \in \partial_C f(x)$ i

$$f^0(x;v_1) > \max\{\xi^T v_1 \mid \xi \in \partial_C f(x)\} \geq \xi_1^T v_1 = f^0(x;v_1),$$

što je kontradiktorno. Dakle

$$f^0(x;v) = \max\{\xi^T v \mid \xi \in \partial_C f(x)\}, \forall v \in \mathbb{R}^n.$$

□

Primjer 2.1.5. *Neka je $f(x) = \| x \|$. Očito je f Lipschitzova ranga 1. Po teoremu 2.1.2(i) vrijedi $f^0(0;v) \leq \| v \|, \forall v \in \mathbb{R}^n$. S druge strane, derivacija u smjeru $f'(0;v)$ je dana s $\| v \|$. Po definiciji Clarkeove derivacije slijedi $f^0(0;v) \geq f'(0;v)$. Dakle*

$$f^0(0;v) = \| v \|, \forall v \in \mathbb{R}^n.$$

Izračunajmo $\partial_C f(0)$. Po definiciji (2.2) ξ je element od $\partial_C f(0)$ ako i samo ako vrijedi

$$f^0(0;v) = \| v \| \geq \xi^T v, \forall v \in \mathbb{R}^n,$$

iz čega slijedi $\partial_C f(0) = B(0;1)$.

Primjer 2.1.6. *Pokažimo da ako je f Lipschitzova u okolini točke x, za svaki $\lambda \in \mathbb{R}$ vrijedi*

$$\partial_C(\lambda f)(x) = \lambda \partial_C f(x).$$

λf je očito lokalno Lipschitzova funkcija. Za $\lambda \geq 0$ vrijedi $(\lambda f)^0 = \lambda \cdot f^0$ pa slijedi $\partial_C(\lambda f)(x) = \lambda \partial_C f(x)$. Dovoljno je pokazati da tvrdnja vrijedi za $\lambda = -1$.

$$\begin{aligned}
\xi \in \partial_C(-f)(x) &\iff (-f)^0(x;v) \geq \xi^T v \quad \forall v \in \mathbb{R}^n \\
&\iff f^0(x;-v) \geq \xi^T v \quad \forall v \in \mathbb{R}^n \\
&\iff f^0(x;-v) \geq (-\xi)^T(-v) \quad \forall (-v) \in \mathbb{R}^n \\
&\iff -\xi \in \partial_C f(x) \\
&\iff \xi \in -\partial_C f(x)
\end{aligned}$$

iz čega slijedi tvrdnja.

Lema 2.1.7. *Ako je f Lipschitzova funkcija u okolini točke x te postiže ekstrem u x, tada*

$$0 \in \partial_C f(x).$$

Dokaz. Pretpostavimo da f postiže lokalni minimum u x. Tada postoji $\varepsilon > 0$ takav da $f(x+tv) - f(x) \geq 0$ za svaki $0 < t < \varepsilon$ i $v \in \mathbb{R}^n$. Tada vrijedi

$$f^0(x;v) = \limsup_{y \to x, t \downarrow 0} \frac{f(y+tv) - f(y)}{t} \geq \limsup_{t \downarrow 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t} \geq 0.$$

Dakle

$$f^0(x;v) \geq 0 = 0^T v \ \forall v \in \mathbb{R}^n$$

što po definiciji Clarkeovog subdiferencijala daje $0 \in \partial_C f(x)$.
Nadalje, pretpostavimo da f postiže lokalni maksimum u x. Tada $-f$ postiže lokalni minimum u x i prema prethodnom dijelu vrijedi $0 \in \partial_C(-f)(x)$. Prema primjeru 2.1.6 slijedi tvrdnja. □

Clarkeove subgradijente ćemo rijetko računati iz definicije te ćemo zbog toga iskazati nekoliko različitih pravila koja će nam pomoći u računu.

Teorem 2.1.8. *Ako je f neprekidno diferencijabilna u x, vrijedi*

$$\partial_C f(x) = \{\nabla f(x)\}. \tag{2.3}$$

Dokaz. Prema lemi 1.1.6 funkcija f je lokalno Lipschitzova. U odjeljku 1.2 smo dokazali da za svaki $v \in \mathbb{R}^n$ postoji derivacija u smjeru te da vrijedi $f'(x;v) = \nabla f(x)^T v$. Neka $x_i \to x$, zbog neprekidne diferencijabilnosti vrijedi $\nabla f(x_i) \to \nabla f(x)$. Za svaki $v \in \mathbb{R}^n$ računamo

$$\begin{aligned}
f'(x;v) &= \nabla f(x)^T v \\
&= \lim_{x_i \to x} \nabla f(x_i)^T v \\
&= \lim_{x_i \to x} f'(x_i;v) \\
&= \lim_{x_i \to x, t \downarrow 0} \frac{f(x_i+tv) - f(x_i)}{t} \\
&= \limsup_{x_i \to x, t \downarrow 0} \frac{f(x_i+tv) - f(x_i)}{t} \\
&= f^0(x;v)
\end{aligned}$$

Prema tome vrijedi $f^0(x;v) = \nabla f(x)^T v$ za svaki $v \in \mathbb{R}^n$. Po definiciji Clarkeovog subdiferencijala slijedi da je $\nabla f(x)$ jedinstveni subgradijent od x čime je teorem dokazan. □

Sljedeći teorem nam pokazuje da je Clarkeov subdiferencijal lokalno Lipschitzove funkcije generalizacija subdiferencijala konveksnih funkcija.

Teorem 2.1.9. *Neka je funkcija* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *konveksna. Tada vrijedi*

i) $f'(x; v) = f^0(x; v)$ *za svaki* $v \in \mathbb{R}^n$

ii) $\partial f(x) = \partial_C f(x)$

Dokaz. i) Po definiciji Clarkeove generalizirane derivacije vrijedi $f^0(x; v) \geq f'(x; v)$ za svaki $v \in \mathbb{R}^n$.

Suprotno, za fiksan $\delta > 0$ vrijedi

$$\begin{aligned} f^0(x; v) &= \limsup_{x' \to x, t \downarrow 0} \frac{f(x' + tv) - f(x')}{t} \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sup_{\|x' - x\| < \varepsilon\delta} \sup_{0 < t < \varepsilon} \frac{f(x' + tv) - f(x')}{t}. \end{aligned}$$

U dokazu teorema 1.2.9 smo pokazali da je funkcija $\phi(t) = (1/t)(f(x' + tv) - f(x'))$ padajuća pa možemo zapisati

$$f^0(x; v) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sup_{\|x' - x\| < \varepsilon\delta} \frac{f(x' + \varepsilon v) - f(x')}{\varepsilon}.$$

Iz Lipschitzovog uvjeta za svaki $x' \in B(x; \varepsilon\delta)$ slijedi

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x' + \varepsilon v) - f(x')}{\varepsilon} - \frac{f(x + \varepsilon v) - f(x)}{\varepsilon} \right| &\leq \left| \frac{f(x' + \varepsilon v) - f(x + \varepsilon v)}{\varepsilon} \right| + \left| \frac{f(x) - f(x')}{\varepsilon} \right| \\ &\leq \frac{K}{\varepsilon} \parallel x' - x \parallel + \frac{K}{\varepsilon} \parallel x' - x \parallel \\ &\leq \frac{2K}{\varepsilon} \varepsilon\delta \\ &= 2K\delta. \end{aligned}$$

Sada imamo

$$f^0(x; v) \leq \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{f(x + \varepsilon v) - f(x)}{\varepsilon} + 2K\delta = f'(x; v) + 2K\delta.$$

Kako je δ proizvoljan, možemo zaključiti

$$f^0(x; v) \leq f'(x; v)$$

čime smo dokazali jednakost.

ii) Kako smo dokazali i), ova tvrdnja slijedi direktno iz definicije subdiferencijala i teorema 1.2.16, (ii).

□

2.2 Računanje subdiferencijala

Kao što je bilo najavljeno, u ovom poglavlju ćemo prikazati neke rezultate koji će nam pomoći u radu sa Clarkeovim subdiferencijalima u praksi. Također, vidjet ćemo da su ovi rezultati zapravo generalizacija pravila klasičnih diferencijabilnih funkcija gdje nam se umjesto znakova jednakosti pojavljuju inkluzije te upravo zbog toga definiramo pojam regularne funkcije.

Definicija 2.2.1. *Funkcija* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *se naziva* ***regularna funkcija*** *u točki* $x \in \mathbb{R}^n$ *ako za svaki* $v \in \mathbb{R}^n$ *postoji derivacija* $f'(x; v)$ *u smjeru* v *u točki* x *te vrijedi*

$$f'(x; v) = f^0(x; v). \tag{2.4}$$

Sljedeći teorem iskazuje dovoljne uvjete regularnosti funkcije.

Teorem 2.2.2. *Neka je* f *Lipschitzova funkcija u okolini točke* x. f *je regularna u* x *ako vrijedi barem jedan od sljedećih uvjeta*

i) f *je neprekidno diferencijabilna u* x*,*

ii) f *je konveksna,*

iii) $f = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i$*, gdje je* $\lambda_i > 0$ *i* f_i *je regularna u* x *za svaki* $i = 1, 2, \dots, m$.

Dokaz. i) Ako je f neprekidno diferencijalna funkcija, postoji derivacija $f'(x; v)$ u smjeru, a iz iz dokaza teorema 2.1.8 slijedi da za svaki $v \in \mathbb{R}^n$ vrijedi $f'(x; v) = f^0(x; v)$.

ii) Ova tvrdnja slijedi direktno iz teorema 1.2.16 i 2.1.9.

iii) Ako je f regularna u x i $\lambda > 0$, tada vrijedi

$$(\lambda f)^0(x; v) = \lambda \cdot f^0(x; v) = \lambda \cdot f'(x; v) = (\lambda f)'(x; v) \text{ za svaki } v \in \mathbb{R}^n$$

tj. λf je regularna u x.
Neka je $m = 2$ i neka su f_1, f_2 regularne u x. Tada uvijek postoji derivacija u smjeru $(f_1 + f_2)'$ i vrijedi $(f_1 + f_2)' = f_1' + f_2'$. Po definiciji Clarkeove derivacije

slijedi $(f_1+f_2)^0 \geq (f_1+f_2)'$. Suprotno,

$$\begin{aligned}(f_1+f_2)^0(x;v) &= \limsup_{y\to x, t\downarrow 0} \frac{(f_1+f_2)(y+tv)-(f_1+f_2)(y)}{t} \\ &= \limsup_{y\to x, t\downarrow 0} \frac{f_1(y+tv)+f_2(y+tv)-f_1(y)-f_2(y)}{t} \\ &\leq \limsup_{y\to x, t\downarrow 0} \frac{f_1(y+tv)-f_1(y)}{t} + \limsup_{y\to x, t\downarrow 0} \frac{f_2(y+tv)-f_2(y)}{t} \\ &= f_1^0(x;v)+f_2^0(x;v)\end{aligned}$$

$$(f_1+f_2)' = f_1'+f_2' = f_1^0+f_2^0 \geq (f_1+f_2)^0.$$

Dakle

$$(f_1+f_2)' = (f_1+f_2)^0.$$

Za $f=\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2$ tvrdnja je time dokazana, a dokaz ide dalje indukcijom po m.

□

Teorem 2.2.3. ***(Pravilo zbrajanja)****Ako su funkcije $f_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ lokalno Lipschitzove za svaki $i=1,\ldots,m$, tada za svaki skalar $\lambda_i\in\mathbb{R}$ vrijedi*

$$\partial_C\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i f_i\right)(x) \subseteq \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x).$$

Specijalno, jednakost vrijedi ako su funkcije f_i regularne u x i $\lambda_i>0$ za svaki $i=1,\ldots,m$.

Dokaz. Teorem ćemo dokazati za $m=2$, općeniti slučaj slijedi indukcijom po m. Već smo dokazali (teorem 2.2.2) da $(f_1+f_2)^0(x;v)\leq f_1^0(x;v)+f_2^0(x;v)$, pa po definiciji Clarkeovog subdiferencijala vrijedi

$$\partial_C(f_1+f_2)(x)\subseteq \partial_C f_1(x)+\partial_C f_2(x).$$

Zbog $\partial_C(\lambda f)(x)=\lambda\partial_C f(x)$ slijedi

$$\partial_C(\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2)(x)\subseteq \partial_C(\lambda_1 f_1)(x)+\partial_C(\lambda_2 f_2)(x)=\lambda_1\partial_C f_1(x)+\lambda_2\partial_C f_2(x)$$

Neka su f_i regularne u x i $\lambda_i>0$ za $i=1,2$. Po teoremu 2.2.2 $\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2$ je također regularna funkcija u x, odnosno

$$(\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2)^0 = (\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2)' = \lambda_1 f_1'+\lambda_2 f_2' = \lambda_1 f_1^0+\lambda_2 f_2^0,$$

iz čega jasno slijedi

$$\partial_C(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x) = \lambda_1 \partial_C f_1(x) + \lambda_2 \partial_C f_2(x).$$

□

Kao što je Lagrangeov teorem srednje vrijednosti jedan od najvažnijih rezultata diferencijalnog računa, tako i sljedeći teorem ima važnu ulogu u subdiferencijalnom računu.

Teorem 2.2.4. ***(Teorem srednje vrijednosti)*** *Neka su $x, y \in \mathbb{R}^n, x \neq y$ i neka je funkcija f Lipschitzova na otvorenom skupu $U \subseteq \mathbb{R}^n$ takvom da $[x, y] \subseteq U$. Tada postoji točka $u \in (x, y)$ takva da vrijedi*

$$f(y) - f(x) \in \partial_C f(u)^T (y - x).$$

Dokaz. Za dokaz ovog teorema trebat ćemo sljedeću lemu

Lema 2.2.5. *Neka je funkcija $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definirana sa $g(t) := f(x + t(y - x))$. Tada je g Lipschitzova na $[0, 1]$ i vrijedi $\partial_C g(t) \subseteq \partial_C f(x + t(y - x))^T (y - x)$*

Dokaz. Označimo sa $x_t := x + t(y - x)$. Sljedeći račun dokazuje da je funkcija g Lipschitzova na $[0, 1]$

$$\begin{aligned} |g(t) - g(t')| &= |f(x_t) - f(x_{t'})| \leq K \parallel x_t - x_{t'} \parallel \\ &= K \parallel (t - t')(y - x) \parallel = K \parallel y - x \parallel |t - t'| \\ &= \widetilde{K}|t - t'| \text{ za svaki } t, t' \in [0, 1], \end{aligned}$$

gdje je $\widetilde{K} = K \parallel y - x \parallel$.
Po teoremu 2.1.4(i) vrijedi da su skupovi $\partial_C g(t)$ i $\partial_C f(x_t)^T (y-x)$ kompaktni i konveksni, a kako čine podskupe od $\mathbb{R}$, moraju biti zatvoreni intervali na $\mathbb{R}$ pa je dovoljno pokazati da za $v = \pm 1$ vrijedi

$$\max\{\xi^T v | \ \xi \in \partial_C g(t)\} \leq \max\{\xi^T v(y - x) \mid \xi \in \partial_C f(x_t)^T (y - x)\}$$

. Iz tvrdnje (ii) istog teorema, slijedi

$$\begin{aligned} \max\{\xi^T v | \ \xi \in \partial_C g(t)\} &= g^0(t; v) = \limsup_{s \to t, \lambda \downarrow 0} \frac{g(s + \lambda v) - g(s)}{\lambda} \\ &= \limsup_{s \to t, \lambda \downarrow 0} \frac{f(x + [s + \lambda v](y - x)) - f(x + s(y - x))}{\lambda} \\ &\leq \limsup_{y' \to x_t, \lambda \downarrow 0} \frac{f(y' + \lambda v(y - x)) - f(y')}{\lambda} \\ &= f^0(x_t; v(y - x)) = \max\{\xi^T v(y - x) \mid \xi \in \partial_C f(x_t)^T (y - x)\} \end{aligned}$$

Dakle, po teoremu 1.1.7 slijedi

$$\partial_C g(t) \subseteq \partial_C f(x_t)^T (y - x).$$

□

Vratimo se na dokaz teorema srednje vrijednosti.
Definiramo funkciju $\Theta : [0,1] \to \mathbb{R}$ tako da $\Theta(t) = f(x_t) + t[f(x) - f(y)]$. Θ je očito neprekidna funkcija i vrijedi $\Theta(0) = \Theta(1) = f(x)$. Prema tome, postoji točka $t_0 \in (0,1)$ takva da funkcija $\Theta(t)$ u njoj poprima lokalni ekstrem. Iz leme 2.1.7 znamo da $0 \in \partial_C \Theta(t_0)$. Koristeći pravilo zbrajanja subdiferencijala dobivamo

$$\partial_C \Theta(t) = \partial_C[f(x_t) + t(f(x) - f(y))] \subseteq \partial_C f(x_t) + [f(x) - f(y)]\partial_C(t),$$

iz čega po prethodnoj lemi slijedi

$$0 \in \partial_C f(x_t)^T (y - x) + [f(x) - f(y)]\ \partial_C(t).$$

Kako je $\partial_C(t) = 1$, uz oznaku $u := x_t \in (x, y)$ vrijedi tvrdnja teorema

$$f(y) - f(x) \in \partial_C f(u)^T (y - x).$$

□

Teorem 2.2.6. ***(Lančano pravilo)*** *Neka su funkcije $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ i $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ takve da je svaka komponenta $h_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$ Lipschitzova u okolini točke $x \in \mathbb{R}^n$, a g Lipschitzova u okolini točke $h(x) \in \mathbb{R}^m$. Tada je kompozicija funkcija $f = g \circ h$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Lipschitzova u okolini točke x te vrijedi*

$$\partial_C f(x) \subseteq \operatorname{conv}\left\{ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \xi_i \mid \xi_i \in \partial_C h_i(x) \text{ i } \alpha \in \partial_C g(h(x)) \right\}. \tag{2.5}$$

Jednakost vrijedi ukoliko je zadovoljena barem jedna od sljedećih tvrdnji :

i) Funkcija g je regularna u $h(x)$, h_i su regularne u x, $\alpha \in \partial_C g(h(x))$ i $\alpha_i \geq 0$ za svaki $i = 1, \dots, m$. Tada je funkcija f regularna u x.

ii) Funkcija g je regularna u $h(x)$ i h_i su neprekidno diferencijabilne u x za svaki $i = 1, \dots, m$.

iii) Funkcija g je neprekidno diferencijabilna u x i $m = 1$.

Dokaz. f je kompozicija lokalno Lipschitzovih funkcija, pa je očito i sama lokalno Lipschitzova.
Označimo

$$S := \left\{ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \xi_i \mid \xi_i \in \partial_C h_i(x) \text{ i } \alpha \in \partial_C g(h(x)) \right\}.$$

Skupovi $\partial_C h_i(x)$ i $\partial_C g(h(x))$ su kompaktni, što povlači kompaktnost skupa S, pa je i konveksna ljuska od S kompaktan skup. Prema teoremu 1.1.7 slijedi $\partial_C f(x) \subseteq \text{conv}S$ ako i samo ako vrijedi

$$f^0(x;v) = \max_{\xi \in \partial_C f(x)} \{\xi^T v\} \leq \max_{\eta \in \text{conv}S} \{\eta^T v\} \text{ za svaki } v \in \mathbb{R}^n \tag{2.6}$$

Neka je $\eta \in \text{conv}S$. Tada imamo $\eta = \sum_{j=1}^{k} \lambda^j s^j$ gdje su $s^j \in S$, $\sum_{j=1}^{k} \lambda^j = 1$ i $\lambda^j \geq 0$ te za svaki $v \in \mathbb{R}^n$ vrijedi

$$\eta^T v = \sum_{j=1}^{k} \lambda^j (s^j)^T v \leq \sum_{j=1}^{k} \lambda^j \max_{s \in S} s^T v = \max_{s \in S} s^T v,$$

iz čega slijedi

$$\max_{\eta \in \text{conv}S} \eta^T v = \max_{s \in S} s^T v \text{ za svaki } v \in \mathbb{R}^n.$$

Definiramo

$$q_\varepsilon(v) := \max \left\{ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \xi_i^T v \mid \xi_i \in \partial_C h_i(x_i), \alpha \in \partial_C g(u), x_i \in B(x;\varepsilon), u \in B(h(x);\varepsilon) \right\}.$$

$$\implies q_0(v) = \max \left\{ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \xi_i^T v \mid \xi_i \in \partial_C h_i(x), \alpha \in \partial_C g(h(x)) \right\} = \max_{s \in S} s^T v.$$

Ako pokažemo da za svaki $\varepsilon > 0$ i svaki $v \in \mathbb{R}^n$ vrijedi $f^0(x;v) - \varepsilon \leq q_\varepsilon(v)$ te $q_\varepsilon(v) \to q_0(v)$ kada $\varepsilon \downarrow 0$, tada očito vrijedi i (2.6). Dokaz sljedeće leme dan je u [4], str 43.

Lema 2.2.7. $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} q_\varepsilon = q_0$

Pokažimo da vrijedi $f^0(x;v) - \varepsilon \leq q_\varepsilon(v)$. Neka je $\varepsilon > 0$. Po definiciji Clarkeove derivacije postoje $x' \in \mathbb{R}^n$ i $t > 0$ takvi da

$$f^0(x;v) \leq \frac{f(x'+tv) - f(x')}{t} + \varepsilon \tag{2.7}$$

te $x', x' + tv \in B(x; \varepsilon)$ i $h(x'), h(x' + tv) \in B(h(x); \varepsilon)$. Po teoremu srednje vrijednosti postoji $\alpha \in \partial_C g(u)$ takav da $u \in [h(x' + tv), h(x')] \subseteq B(h(x); \varepsilon)$ i

$$\begin{aligned} f(x' + tv) - f(x') &= g(h(x' + tv)) - g(h(x')) \\ &= \alpha^T (h(x' + tv) - h(x')) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \alpha_i [h_i(x' + tv) - h_i(x')]. \end{aligned}$$

Također, teorem srednje vrijednosti iskoristimo za funkcije $h_i, i = 1, \ldots, m$. Tada postoje Clarkeovi subgradijenti $\xi_i \in \partial_C h_i(x_i)$ takvi da $x_i \in [x' + tv, x'] \subseteq B(x; \varepsilon)$ te

$$\begin{aligned} f(x' + tv) - f(x') &= \sum_{i=1}^{m} \alpha_i [h_i(x' + tv) - h_i(x')] \\ &= \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \xi_i^T (x' + tv - x') \\ &= \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \xi_i^T (tv). \end{aligned}$$

Sada iz (2.7) slijedi

$$\begin{aligned} f^0(x; v) &\leq \frac{f(x' + tv) - f(x')}{t} + \varepsilon = \frac{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \xi_i^T (tv)}{t} + \varepsilon \\ &= \frac{t \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \xi_i^T v}{t} + \varepsilon = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \xi_i^T v + \varepsilon \\ &\leq q_\varepsilon(v) + \varepsilon \quad za \text{ za svaki } v \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Ovime smo dokazali glavnu tvrdnju teorema. Slijede nam dokazi dodatnih tvrdnji.

i) Neka vrijede dane pretpostavke. Da bismo dokazali jednakost u (2.5) dovoljno je pokazati da vrijedi

$$f^0(x; v) = q_0(v) \; za \; svaki \; v \in \mathbb{R}^n.$$

Ranije smo pokazali da je $f^0(x; v) \leq q_0(v)$ *za svaki* $v \in \mathbb{R}^n$. Obrnuto, $\alpha_i \geq 0$,

h_i regularne u x, $i = 1, \ldots, m$ i g regularna u $h(x)$ povlači

$$\begin{aligned}
q_0(v) &= \max\{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \xi_i^T v \mid \xi_i \in \partial_C h_i(x), \alpha \in \partial_C g(h(x))\} \\
&\leq \max\{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \max_{\xi_i \in \partial_C h_i(x)} \xi_i^T v \mid \alpha \in \partial_C g(h(x))\} \\
&= \max\{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i h_i^0(x; v) \mid \alpha \in \partial_C g(h(x))\} \\
&= \max\{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i h_i'(x; v) \mid \alpha \in \partial_C g(h(x))\} \\
&= g^0(h(x); h'(x; v)) \\
&= g'(h(x); w)
\end{aligned}$$

gdje je $w_i = h_i'(x; v)$. Po definiciji derivacije u smjeru vrijedi

$$\begin{aligned}
g'(h(x); w) &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{g(h(x) + tw) - g(h(x))}{t} \\
&= \lim_{t \downarrow 0} \{\frac{g(h(x + tv)) - g(h(x))}{t} + T\}
\end{aligned}$$

gdje je $T = g(h(x) + tw) - g(h(x + tv))/t$. Zbog Lipschitzovog svojstva funkcije g vrijedi

$$\begin{aligned}
T &\leq \frac{|g(h(x) + tw) - g(h(x + tv))|}{t} \leq \frac{K \parallel h(x) + tw - h(x + tv) \parallel}{t} \\
&= K \parallel w - \frac{h(x + tv) - h(x)}{t} \parallel \longrightarrow K \parallel h'(x; v) - h'(x; v) \parallel = 0, \quad \text{kada } t \downarrow 0.
\end{aligned}$$

Dakle

$$q_0(v) \leq \lim_{t \downarrow 0} \frac{g(h(x + tv)) - g(h(x))}{t} = f'(x; v) \leq f^0(x; v).$$

Ovime je dokazano da vrijedi $q_0(v) = f^0(x; v)$, odnosno f je regularna u x te vrijedi jednakost u (2.5)

ii) Po teoremu 2.3 slijedi

$$
\begin{aligned}
q_0(v) &= \max \left\{ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \xi_i^T v \mid \xi_i \in \partial_C h_i(x) = \{\nabla h_i(x)\}, \alpha \in \partial_C g(h(x)) \right\} \\
&= \max \left\{ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \nabla h_i(x)^T v \mid \alpha \in \partial_C g(h(x)) \right\} \\
&= \max \left\{ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i h_i'(x; v) \mid \alpha \in \partial_C g(h(x)) \right\}.
\end{aligned}
$$

Analogno dokazu u i) dijelu, možemo pokazati da vrijedi $q_0(v) \leq f^0(x; v)$ što na isti način dokazuje tvrdnju ii).

iii) Neka je $m = 1$ i neka je funkcija g neprekidno diferencijabilna u $h(x)$. Tada vrijedi

$$
\alpha = g'(h(x)) = \lim_{y \to x} \frac{g(h(x)) - g(h(y))}{h(x) - h(y)}.
$$

Također vrijedi $\lim_{x' \to x} g'(h(x')) = \alpha$. Možemo pretpostaviti da je $\alpha \geq 0$, tada

$$
\begin{aligned}
q_0(v) &= \max\{\alpha \xi^T v \mid \xi \in \partial_C h(x)\} = \alpha \cdot h^0(x; v) \\
&= \limsup_{x' \to x, t \downarrow 0} \frac{\alpha[h(x' + tv) - h(x')]}{t} \\
&= \limsup_{x' \to x, t \downarrow 0} \frac{g'(h(x))[h(x' + tv) - h(x')]}{t} \\
&= \limsup_{x' \to x, t \downarrow 0} \frac{g(h(x' + tv)) - g(h(x'))}{t} = f^0(x; v), \text{ za svaki } v \in \mathbb{R}^n.
\end{aligned}
$$

Teorem je sada u potpunosti dokazan.

□

U nastavku ćemo navesti nekoliko teorema (bez dokaza) koji će nam biti potrebni u kasnijem računu. Dokaze možete vidjeti u [4], str 46 - 49 te [2], str 209 - 210.

Teorem 2.2.8. ***(Pravilo produkta)*** *Neka su f_1 i f_2 lokalno Lipschitzove funkcije. Tada je funkcija $f_1 f_2$ lokalno Lipschitzova i vrijedi*

$$
\partial_C(f_1 f_2)(x) \subseteq f_2(x) \partial_C f_1(x) + f_1(x) \partial_C f_2(x) \tag{2.8}
$$

Specijalno, jednakost vrijedi u slučaju kada su $f_1(x), f_2(x) \geq 0$ i f_1, f_2 su regularne u x. Tada je $f_1 f_2$ regularna u x.

Teorem 2.2.9. ***(Pravilo kvocijenta)*** *Neka su f_1 i f_2 lokalno Lipschitzove funkcije u $x \in \mathbb{R}^n$ i $f_2(x) \neq 0$. Tada je funkcija f_1/f_2 lokalno Lipschitzova i vrijedi*

$$\partial_C \left(\frac{f_1}{f_2} \right)(x) \subseteq \frac{f_2(x)\partial_C f_1(x) - f_1(x)\partial_C f_2(x)}{f_2^2(x)} \tag{2.9}$$

Specijalno, jednakost vrijedi u slučaju kada su $f_1(x) \geq 0, f_2(x) > 0$ i f_1, f_2 su regularne u x. Tada je f_1/f_2 regularna u x.

Teorem 2.2.10. *Neka je f lokalno Lipschitzova funkcija. Neka je E skup mjere 0 u $\mathbb{R}^n$, a E_f skup točaka u kojima f nije diferencijabilna funkcija. Tada*

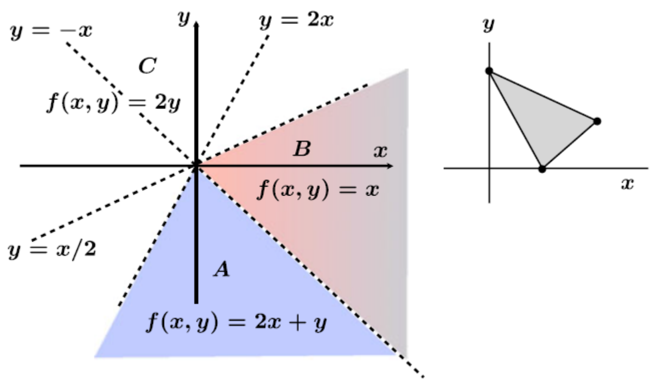
$$\partial_C f(x) = \mathrm{conv}\{\lim_{i\to\infty} \nabla f(x_i) \mid x_i \to x,\ x_i \notin E \cup E_f\} \tag{2.10}$$

Primjer 2.2.11. *Neka je $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dana sa*

$$f(x,y) = \max\ \{\ \min\ \{2x + y,\ x\},\ 2y\ \}.$$

Izračunajmo $\partial_C f(0,0)$. Vidimo da vrijedi

$$f(x,y) = \begin{cases} 2x + y & \text{za } (x,y) \in A = \{(x,y) \mid y \leq 2x \text{ i } y \leq -x\} \\ x & \text{za } (x,y) \in B = \{(x,y) \mid y \leq x/2 \text{ i } y \geq -x\} \\ 2y & \text{za } (x,y) \in C = \{(x,y) \mid y \geq 2x \text{ ili } y \geq x/2\} \end{cases}$$



Slika 2.1: $A \cup B \cup C$

Primjetimo da je $A \cup B \cup C = \mathbb{R}^2$ te da granice ova tri skupa sadrže $(0,0)$ i čine skup E mjere 0. Ako $(x,y) \notin E$, funkcija f je diferencijabilna u (x,y) i $\nabla f(x,y)$ je jednak jednoj od točaka $(2,1)$, $(1,0)$, $(0,2)$. Prema prethodnom teoremu (2.2.10) $\partial_C f(0,0)$ čini trokut dan s konveksnom ljuskom ove tri točke.

Poglavlje 3

Varijacijski račun

U prvom odjeljku ovog poglavlja iznosimo klasičnu teoriju varijacijskog računa. Zatim ćemo promatrati temeljni problem ovog rada odnosno varijacijski račun neglatkih funkcija kao što je bilo navedeno u uvodu.

Primjer 3.0.12. *Tvrtka je primila narudžbu da B jedinica proizvoda bude isporučeno do vremena T. Potrebno je napraviti raspored proizvodnje uz minimalne troškove imajući na umu da trošak proizvodne jedinice raste linearno s povećanjem proizvodne stope te da je trošak skladištenja konstantan za svaku jedinicu proizvoda.*
Neka $x(t)$ označava ukupan inventar u trenutku t, tj. količinu jedinica proizvedenih do trenutka t. Tada je $x(0) = 0$, a želimo postići $x(T) = B$. Stopa promjene inventara je proizvodna stopa $dx/dt = x'(t)$. Tada su ukupni troškovi dani sa

$$(c_1 x'(t))x'(t) + c_2 x(t) = c_1 x'^2(t) + c_2 x(t)$$

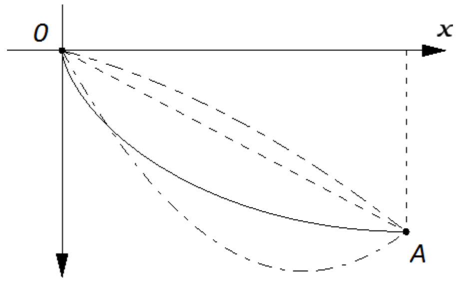
gdje prvi pribrojnik označava ukupne troškove proizvodnje (jedinični torškovi i razina inventara), drugi pribrojnik troškove skladištenja inventara, a c_1 i c_2 su nenegativne konstante. Problem minimizacije troškova tada je

$$\min \int_0^T [c_1 x'^2(t) + c_2 x(t)]\, dt \quad x(0) = 0,\ x(T) = B,\ x'(t) \geq 0$$

Primjer 3.0.13. ***(Problem najkraćeg vremena)*** *Zanima nas kako odrediti krivulju koja spaja ishodište 0 i točku $A = (a, b)$ po kojoj se tijelo giba od 0 do A u polju sile teže bez trenja u najkraćem vremenu.*

Krivulja s takvim svojstvom se zove ***brahistohrona*** *(slika 3.1).*
Neka su $(x(t), y(t))$ koordinate tijela u trenutku t. Neka je s prijeđeni put, v brzina i m masa tijela te g ubrzanje sile teže. Zakon o očuvanju mehaničke energije glasi

$$E_k + E_p = 0$$



Slika 3.1: Problem najkraćeg vremena

Znamo da je $E_k = \frac{mv^2}{2}$ *i* $E_p = -mgx$ *pa gornja jednadžba daje*

$$\frac{mv^2}{2} = mgx,$$

$$v = \sqrt{2mx}$$

Brzina je dana sa $v = \frac{ds}{dt}$, *a element duljine luka* $ds = \sqrt{1+y'^2}dx$ *pa vrijedi*

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{1+y'^2}\frac{dx}{dt}$$

odnosno

$$dt = \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gx}}dx.$$

Tada je vrijeme gibanja po krivulji dano sa

$$J(y) = \int_0^a \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gx}}dx$$

Kako je $\frac{1}{\sqrt{2g}}$ *konstantno, problem najkraćeg vremena svodi se na*

$$\min \quad J(y) = \int_0^a \sqrt{\frac{1+y'^2}{x}}dx, \ y(0) = 0, \ y(a) = b.$$

3.1 Klasična teorija

Osnovni problem varijacijskog računa je minimizacija funkcionala

$$J(x) = \int_a^b \Lambda\ (t,\ x(t),\ x'(t))\ dt$$

s obzirom na klasu funkcija x definiranih na intervalu $[a, b] \in \mathbb{R}$, koje poprimaju određene vrijednosti u a i b. Λ je funkcija tri varijable, odnosno $\Lambda(t, x(t), x'(t))$ predstavlja Lagrangeovu funkciju gdje t označava vrijeme, $x(t)$ stanje i $x'(t)$ brzinu. U ovome će poglavlju sve varijable biti jednodimenzionalne, a sve funkcije glatke.
Neka je $\Lambda : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dva puta neprekidno diferencijabilna funkcija te neka je $x : [a, b] \to \mathbb{R}$ takav da $x \in C^2[a, b]$. Tada je $J(x)$ dobro definiran. Neka su A i B točke u $\mathbb{R}$.
Osnovni problem varijacijskog računa tada je:

$$\min \;\; J(x) \; : \; x \in C^2[a, b], \; x(a) = A, \; x(b) = B. \qquad (\mathbf{P})$$

Definicija 3.1.1. *Funkcija $x : [a, b] \to \mathbb{R}$ je **dopustiva** za problem ($\boldsymbol{P}$) ako zadovoljava zadane rubne uvjete te ako pripada određenoj klasi funkcija (u ovom slučaju $C^2[a, b]$).*
*Dopustiva funkcija x_* je **rješenje problema** ($\boldsymbol{P}$) ako vrijedi $J(x_*) \le J(x)$ za svaku dopustivu funkciju x. x_* tada nazivamo minimizator problema ($\boldsymbol{P}$).*

U nastavku ćemo navesti nekoliko važnijih teorema klasične teorije varijacijskog računa čije dokaze možete vidjeti u [2], str 289 - 291.
Slijedeći teorem iskazuje prvi nužan uvjet koji funkcija x mora zadovoljavati da bi bila rješenje problema ($\mathbf{P}$). Parcijalne derivacije funkcije $\Lambda(t, x, v)$ označene su sa Λ_x, odnosno Λ_v respektivno x, odnosno v.

Teorem 3.1.2. ***(Euler-Lagrangeova jednadžba)*** *Ako je x_* rješenje problema ($\boldsymbol{P}$), tada x_* zadovoljava Euler-Lagrangeovu jednadžbu*

$$\frac{d}{dt}\Lambda_v(t, x_*(t), x_*'(t)) = \Lambda_x(t, x_*(t), x_*'(t)) \; \forall t \in [a, b] \tag{3.1}$$

*Funkcija $x_* \in C^2[a, b]$ koja zadovoljava Euler-Lagrangeovu jednadžbu naziva se **ekstremala**.*

Definicija 3.1.3. *Dopustiva funkcija x_* problema ($\boldsymbol{P}$) se naziva **slabi lokalni minimizator** ako za neki $\varepsilon > 0$ i svaku dopustivu funkciju x takvu da $\| x - x_* \| \le \varepsilon$ i $\| x' - x_*' \| \le \varepsilon$ vrijedi $J(x_*) \le J(x)$, gdje promatramo max-normu, tj. $\| x \| = \max\{|x(t)| \mid t \in [a, b]\}$.*

Definicija 3.1.4. *Lagrangeova funkcija $\Lambda(t, x, v)$ je **samostalna** ako eksplicitno ne ovisi o varijabli t.*

Propozicija 3.1.5. *Neka je x_* slabi lokalni minimizator za problem ($\boldsymbol{P}$), te neka je Λ samostalna funkcija. Tada x_* zadovoljava **Erdmannov uvjet**: za neku konstantu h vrijedi*

$$x_*'(t)\Lambda_v(x_*(t), x_*'(t)) - \Lambda(x_*(t), x_*'(t)) = h, \; t \in [a, b]$$

Teorem 3.1.6. ***(Legendre)*** *Neka je x_* slabi lokalni minimizator problema (**P**). Tada vrijedi*

$$\Lambda_{vv}(t, x_*(t), x_*'(t)) \geq 0 \ \forall t \in [a, b].$$

Promotrimo problem

$$\min \quad l(x(b)) + \int_a^b \Lambda(t, x(t), x'(t))dt \quad x(a) = A \quad (\mathbf{P'}).$$

Funkcija l je neprekidno diferencijabilna te odgovara ekstra trošku ovisnom o vrijednosti $x(b)$.

Teorem 3.1.7. *Neka je x_* slabi lokalni minimizator problema (**P'**). Tada je x_* ekstremala za Λ te zadovoljava uvjet transverzalnosti:*

$$-\Lambda_v(b, x_*(b), x_*'(b)) = l'(x_*(b))$$

Primjer 3.1.8. *Vratimo se na primjer 3.0.12. Osnovni problem je*

$$\min \int_0^T [c_1 x'^2(t) + c_2 x(t)] \ dt \quad x(0) = 0, \ x(T) = B, \ x'(t) \geq 0.$$

Pretpostavimo da optimalno rješenje zadovoljava pretpostavku $x'(t) \geq 0$. Lagrangeova funkcija je

$$\Lambda(t, x, v) = c_1 v^2 + c_2 x$$

Kako $\Lambda_x = c_2$ i $\Lambda_v = c_1 v$, Euler-Lagrangeova jednadžba se svodi na

$$2c_1 x''(t) = c_2 \quad \Longrightarrow \quad x''(t) = \frac{c_2}{2c_1}.$$

Integracijom dobivamo

$$x(t) = \frac{c_2 t^2}{4c_1} + k_1 t + k_2$$

gdje su k_1 i k_2 konstante integracije te ćemo ih izračunati iz rubnih uvjeta.

$$x(0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad k_2 = 0, \quad x(T) = B \quad \Longrightarrow \quad k_1 = \frac{B}{T} - \frac{c_2 T}{4c_1}.$$

Dakle

$$x(t) = \frac{c_2 t(t-T)}{4c_1} + \frac{Bt}{T}$$

Provjerimo da li za takav $x(t)$ vrijedi $x'(t) \geq 0$. Iz Euler-Lagrangeove jednadžbe vidimo da je $x''(t) > 0$ za svaki $t \in [0, T]$. Slijedi da je $x'(t)$ rastuća funkcija. $x'(t) \geq 0$ za svaki $t \in [0, T]$ ako i samo ako $x'(0) = k_1 \geq 0$, tj. ako i samo ako vrijedi

$$B \geq \frac{c_2 T^2}{4c_1}.$$

Dakle, $x(t) = \frac{c_2 t(t-T)}{4c_1} + \frac{Bt}{T}$ je rješenje problema ako je traženi broj proizvedenih jedinica B dovoljno velik u odnosu na vremensko razdoblje T, odnosno ako je trošak skladištenja c_2 dovoljno mali u odnosu na jedinični proizvodni trošak c_1. Ukoliko ovaj uvjet nije zadovoljen, početak proizvodnje biti će odgođen da bi se postigao optimalni plan.

Primjer 3.1.9. ***(Opna od sapunice)*** *Neka je opna od sapunice razapeta s dvije koncentrične kružnice radijusa A i B. Zadatak je naći plohu koja povezuje ove dvije kružnice, s uvjetom da površina te plohe bude minimalna. Pretpostavimo da točke (t_A, x_A), (t_B, x_B) leže na kružnici radijusa A, odnosno B te da su povezane krivuljom $x(t)$. Tada možemo zamisliti da tražena ploha nastaje rotacijom krivulje $x(t)$ oko osi x.*
Površina dA elementa plohe tada je prstenastog oblika i jednaka je $dA = (2x\pi)ds$, a duljina luka je $ds = \sqrt{dt^2 + dx^2} = \sqrt{1 + x'^2(t)}dt$.
Tada je problem opne od sapunice minimizacija funkcionala

$$2\pi \int_a^b x(t)\sqrt{1 + x'(t)^2}dt, \quad x(a) = A, \; x(b) = B.$$

Multiplikativni faktor 2π možemo zanemariti jer ne utječe na minimizaciju. Lagrangeova funkcija se svodi na

$$\Lambda(t, x, v) = x\sqrt{1 + v^2}.$$

Pretpostavimo da je x_* slabi lokalni minimizator danog problema i $x_*(t) > 0$. Euler-Lagrangeova jednadžba dana je s

$$x_*''(t) = (1 + x_*'(t)^2)/x_*(t).$$

Slijedi da je x_*' strogo rastuća funkcija, pa je x_* strogo konveksna. Primijetimo da je Λ samostalna funkcija pa možemo iskoristiti Erdmannov uvjet. Dakle, postoji konstanta h takva da

$$x_*'(t)^2 = \frac{x_*(t)^2}{h^2} - 1, \; t \in [a, b].$$

Neka je x_*' pozitivna na intervalu $[a, b]$. Tada ovu jednadžbu možemo riješiti separabilnom diferencijalnom jednadžbom $dt = \frac{hdx}{\sqrt{x^2 - h^2}}$ čijim rješavanjem dobijemo rješenje

$$x_*(t) = h \cosh(\frac{t + c}{h})$$

Ovakva krivulja naziva se ***katemptota*** *ili* ***lančanica****.*
Analogno, kada je x_* negativna na intervalu $[a,b]$, dobijemo rješenje

$$x_*(t) = h_1 \cosh(\frac{t+c_1}{h_1})$$

Kako je x_*' strogo rastuća funkcija, odnosno x_*' je negativna do neke točke τ, a nakon toga postaje pozitivna, tako je x_* krivulja koju u jednom dijelu čini katemptota s konstantama c_1 i h_1, a na nju se nastavlja katemptota s konstantama c i h.

3.2 Neglatke ekstremale i neglatke Lagrangeove funkcije

Nakon što smo upoznali klasičnu teoriju varijacijskog računa, fokusirati ćemo se na varijacijski račun gdje funkcije nisu glatke. Upravo takvi problemi se najčešće javljaju u praksi. U ovom poglavlju razviti ćemo teoriju varijacijskog računa za Lipschitzove funkcije te neglatke Lagrangeove funkcije.

Proširimo osnovni problem varijacijskog računa iz prethodnog poglavlja. Neka je $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$. Dopustiva klasa funkcija sada postaju Lipschitzove funkcije, u oznaci $\mathrm{Lip}[a,b]$. Svaka komponenta od x tada je element iz vektorskog prostora $AC^\infty[a,b]$. Tada je osnovni problem varijacijskog računa dan sa

$$\min \quad J(x) : x \in \mathrm{Lip}[a,b],\ x(a) = A,\ x(b) = B \qquad (\mathbf{P})$$

U ovom poglavlju pretpostavljamo da gradijenti Λ_x i Λ_v postoje te da su neprekidni isto kao i funkcija $\Lambda(t,x,v)$. Tada je funkcional

$$J(x) = \int_a^b \Lambda(t, x(t), x'(t)dt$$

dobro definiran (kao Lebesgueov integral) za svaku funkciju $x \in \mathrm{Lip}[a,b]$.
Može se pokazati da je minimum na $C^2[a,b]$, ako postoji, također minimum na $\mathrm{Lip}[a,b]$, pa možemo jednostavno proširiti klasičnu teoriju na Lipschitzove funkcije.
Nakon što smo definirali osnovni problem $(\mathbf{P})$, izvesti ćemo teorem koji nam daje nužan uvjet da bi x_* bio slabi lokalni minimizator problema. Definicija slabog lokalnog minimizatora ostaje nepromijenjena, uz napomenu da sada promatramo L^∞ normu.

Teorem 3.2.1. ***(Integralna Euler-Lagrangeova jednadžba)*** *Neka je $x_* \in \mathrm{Lip}[a,b]$ slabi lokalni minimizator osnovnog problema $(\mathbf{P})$. Tada x_* zadovoljava integralnu*

Euler-Lagrangeovu jednadžbu: za neku konstantu $c \in \mathbb{R}^n$ vrijedi

$$\Lambda_v\ (t,\ x_*(t),\ x_*'(t)) = c + \int_a^t \Lambda_x(s,\ x_*(s),\ x_*'(s)\ ds,\ t \in [a,b]\quad \text{g.s.}$$

Dokaz. Iako je Eulerov dokaz dobiven sa diskretizacijom, standardni dokaz ovog teorema dan je Lagrangeovom idejom, tj. varijacijama. Varijacija je funkcija $y \in \mathrm{Lip}_0[a,b]$, odnosno vrijedi $y(a) = y(b) = 0$. Fiksiramo y i definiramo funkciju

$$g(\lambda) = J(x_* + \lambda y) = \int_a^b \Lambda(t,\ x_* + \lambda y,\ x_*' + \lambda y)\ dt$$

Diferencijalni kvocijent čiji je limes $g'(0)$ dan je s

$$\int_a^b \frac{\Lambda(t, x_* + \lambda y, x_*' + \lambda y') - \Lambda(t, x_*, x_*')}{\lambda} dt.$$

Pretpostavka o Λ implicira da je Λ Lipschitzova funkcija u odnosu na (x, v) na ograničenom skupu. Sve funkcije koje se pojavljuju unutar integrala su ograničene pa postoji konstanta K takva da je za svaki λ oko 0 integrand ograničen sa $K|(y(t), y'(t))|$. Prema Lebesgueovom teoremu o dominantnoj konvergenciji postoji $g'(0)$ te je dana s

$$g'(0) = \int_a^b [\alpha \cdot y(t) + \beta \cdot y'(t)]\ dt = 0,$$

gdje

$$\alpha(t) = \Lambda_x(t, x_*(t), x_*'(t)),\quad \beta(t) = \Lambda_v(t, x_*(t), x_*'(t)).$$

Očito, sve ove funkcije su ograničene. Primjenom parcijalne integracije na prvom integrandu dobijemo

$$\int_a^b \left[\beta(t) - \int_a^t \alpha(s)ds\right] \cdot y'(t)\ dt = 0$$

Također, za svaki $c \in \mathbb{R}^n$ i vrijedi

$$\int_a^b \left[\beta(t) - c - \int_a^t \alpha(s)ds\right] \cdot y'(t)\ dt = 0.$$

Dakle, ovo vrijedi za svaku Lipschitzovu varijaciju y i svaku konstantu $c \in \mathbb{R}^n$. Izaberemo konstantu c takvu da funkcija

$$y(t) = \int_a^t \left[\beta(t) - c - \int_a^t \alpha(s)ds\right]\ dt$$

definira varijaciju, tj. da vrijedi $y(b) = 0$. S takvim izborom konstante c i varijacije y vrijedi

$$\int_a^b \left|\beta(t) - c - \int_a^t \alpha(s)ds\right|^2 dt = 0$$

iz čega uvrštavanjem $\alpha(t)$ i $\beta(t)$ dobijemo tvrdnju teorema.

□

Očito, za $x \in C^2[a,b]$ i $n = 1$ integralna Euler-Lagrangeova jednadžba ekvivalentna je Euler-Lagrangeovoj jednadžbi iz teorema 3.1.2.

Primjer 3.2.2. *Vratimo se na primjer 3.0.13. Problem najkraćeg vremena dan je s*

$$\min \quad J(y) = \int_0^a \sqrt{\frac{1+y'^2}{x}} dx \; y(0) = 0, \; y(a) = b.$$

Lagrangeova funkcija je

$$\Lambda(t,x,v) = \sqrt{\frac{1+v^2}{x}}.$$

Integralna Euler-Lagrangeova jednadžba svodi se na

$$\frac{y'}{\sqrt{x(1+y'^2)}} = c$$

za neku konstantu c. Uz malo sređivanja dobijemo

$$y' = c\sqrt{\frac{x}{1-c^2x}},$$

odnosno

$$dy = c\sqrt{\frac{x}{1-c^2x}}\, dx.$$

Integriranjem dobijemo

$$y = c\int \sqrt{\frac{x}{1-c^2x}}\, dx = \begin{pmatrix} x = \frac{1}{c^2}(1-\cos(t)) \\ dx = \frac{1}{c^2}\sin(t)dt \end{pmatrix} = \frac{1}{2c^2}(t - \sin(t)) + c_1$$

gdje je c_1 konstanta integracije koju ćemo odrediti iz rubnog uvjeta problema $y(0) = 0$.

$$x(t) = 0 \implies \cos(t) = 1 \implies t = 0 \implies c_1 = 0.$$

Uz oznaku $a = \frac{1}{2c^2}$ *dobivamo*

$$x(t) = a(1 - \cos(t)) \quad y(t) = a(t - \sin(t))$$

Primijetimo da je dobiveno rješenje cikloida.

Provjerimo dovoljne uvjete ekstremala. Kako je

$$\Lambda_{vv} = \frac{1}{(1+v^2)\sqrt{1+v^2}} > 0$$

zaključujemo da se zaista radi o minimumu.

Primjer 3.2.3. *Pretpostavimo da se čestica mase* m *slobodno kreće po* $x - y$ *ravnini pod utjecajem polja sile* F *s potencijalom* V *danim sa* $F(x,y) = -\nabla V(x,y)$*. U ovom je slučaju kretanje čestice opisano s*

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{m}{2} \mid (x'(t), y'(t)) \mid^2 - V(x(t), y(t)) \right] dt.$$

Lagrangeova funkcija je

$$\Lambda(t, x, y, v, w) = \frac{m}{2} \mid (v, w) \mid^2 - V(x, y).$$

Prema Euler-Lagrangeovoj jednadžbi slijedi

$$\frac{d}{dt}\big[mx'(t), my'(t)\big] = -\nabla V(x(t), y(t)) = F(x(t), y(t))$$

iz čega prepoznajemo 2. Newtonov zakon $F = mA$*, gdje je* A *akceleracija.*

Definirajmo

$$p(t) = c + \int_a^t \Lambda_x(s, x_*(s), x_*'(s))ds = \Lambda_v(t, x_*(t), x_*'(t)). \tag{3.2}$$

Tada funkcija $p : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ pripada $\mathrm{Lip}[a,b]$ te zadovoljava

$$(p'(t), p(t)) = \nabla_{x,v}\Lambda(t, x_*(t), x_*'(t)) \quad \text{g.s.}$$

U klasičnoj mehanici p se odnosi na generalizirani moment. Sinonim je i pridodana varijabla. U području optimalnog upravljanja, p se pojavljuje u Pontryaginovom principu maksimuma gdje se naziva adjungirana funkcija. Taj ćemo naziv koristiti u ovom radu.

Adjungirana funkcija će nam pomoći za lakše izražavanje transverzalnog uvjeta kada rubne vrijednosti od x nisu egzaktno dane. S proširenjem $n > 1$, prema teoremu 3.1.7 transverzalni uvjet je

$$-p(b) = \nabla l(x_*(b)).$$

Teorem regularnosti nam dokazuje da uz određene dodatne pretpostavke, rješenje osnovnog problema (**P**) može ležati u klasi funkcija manjoj od one u kojoj je problem definiran. Odnosno, dokazati ćemo da je moguće postići $x_* \in C^1[a,b]$ iako su funkcije koje formuliraju problem iz klase $\text{Lip}[a,b]$.

Teorem 3.2.4. *Neka $x_* \in \text{Lip}[a,b]$ zadovoljava integralnu Euler-Lagrangeovu jednadžbu gdje je za gotovo svaki $t \in [a,b]$ funkcija $v \mapsto \Lambda(t, x_*(t), v)$ strogo konveksna. Tada $x_* \in C^1[a,b]$.*

Dokaz. Cilj je pronaći neprekidnu funkciju $\widetilde{v}$ na $[a,b]$ takvu da se podudara sa x_*' gotovo svugdje. Za takvu funkciju vrijedi

$$x_*(t) = x_*(a) + \int_a^t x_*'(s)ds = x_*(a) + \int_a^t \widetilde{v}(s)ds \quad \forall t \in [a,b]$$

iz čega slijedi da je $x_* \in C^1[a,b]$.
Definiramo skup

$$W = \{\ t \in [a,b] \ :\ x_*'(t) \text{ postoji i } p(t) = \Lambda_v(t, x_*(t), x_*'(t))\ \}$$

Skup W tada ima punu mjeru. Fiksiramo $\tau \in [a,b]$. Neka su nizovi (s_i), $(r_i) \in W$ takvi da konvergiraju prema τ te postoje limesi

$$l_s := \lim_{i\to\infty} x_*'(s_i), \quad l_r := \lim_{i\to\infty} x_*'(r_i)$$

Promatrajući limese, jednadžba $p(s_i) = \Lambda_v(s_i, x_*(s_i), x_*'(s_i))$ daje $p(\tau) = \Lambda_v(\tau, x_*(\tau), l_s)$. Analogno, vrijedi $p(\tau) = \Lambda_v(\tau, x_*(\tau), l_r)$. Slijedi da strogo konveksna funkcija $v \mapsto \Lambda(\tau, x_*(\tau), v)$ ima isti gradijent u l_s i l_r, odnosno $l_s = l_r$.
Sada definiramo funkciju $\widetilde{v}$: neka niz $(s_i) \in W$ konvergira prema τ i neka postoji $\lim_{i\to\infty} x_*'(s_i)$. Takav niz postoji jer je W skup pune mjere i funkcija x_*' je ograničena; definiramo $\widetilde{v}(\tau) = \lim_{i\to\infty} x_*'(s_i)$. $\widetilde{v}$ je očito dobro definirana i neprekidna te se podudara sa x_*' na cijelom W.

□

Uz određene uvjete, rješenje osnovnog problema može naslijediti potpunu regularnost od Lagrangeove funkcije. To nam dokazuje sljedeći teorem.

Teorem 3.2.5. ***(Hilbert-Weierstrass)*** *Neka $x_* \in \mathrm{Lip}[a,b]$ zadovoljava integralnu Euler-Lagrangeovu jednadžbu gdje je Λ iz klase C^m, $(m \geq 2)$, i vrijedi*

$$t \in [a,b],\ v \in \mathbb{R}^n \Longrightarrow \Lambda_{vv}(t, x_*(t), v) > 0 \ \ \text{(pozitivno definitna)}.$$

Tada x_* pripada $C^m[a,b]$.

Dokaz. Iz pretpostavke slijedi da je funkcija $v \mapsto \Lambda(t, x_*(t), v)$ strogo konveksna za svaki t pa po prethodnom teoremu x_* pripada $C^1[a,b]$. Prema integralnoj Euler-Lagrangeovoj jednadžbi $p'(t) = \Lambda_x(t, x_*(t), x_*'(t))$ je neprekidno na $[a,b]$ iz čega slijedi da p pripada $C^1[a,b]$.
Primijetimo, zbog $\Lambda_{vv} > 0$ za svaki fiksni t jedinstveno rješenje v jednadžbe $p(t) = \Lambda_v(t, x_*(t), v)$ je $v = x_*'(t)$. Kako je $p \in C^1$ i $\Lambda_v \in C^{m-1}, m \geq 2$ slijedi $x_*' \in C^1[a,b]$. Tada je $x_* \in C^2[a,b]$. Analogno, $p' \in C^1$ i $p \in C^2$. Za $m > 2$ $x_*' \in C^2$, odnosno $x_* \in C^3$. Nastavimo induktivno do $x_*' \in C^{m-1}[a,b]$ iz čega slijedi $x_* \in C^m[a,b]$.

□

Teorem 3.2.6. *Neka je $x_* \in \mathrm{Lip}[a,b]$ dopustiva funkcija za **(P)** i neka zadovoljava integralnu Euler-Lagrangeovu jednadžbu. Pretpostavimo da je $\Lambda(t,x,v)$ konveksna u (x,v) za svaki t. Tada je x_* globalni minimizator za **(P)**.*

Dokaz. Neka je $x \in \mathrm{Lip}[a,b]$ bilo koja dopustiva funkcija za $(\mathbf{P})$ te neka je p adjungirana funkcija u odnosu na x_*. Tada

$$\begin{aligned} J(x) - J(x_*) &= \int_a^b \{\Lambda(t,x,x') - \Lambda(t,x_*,x_*')\}\, dt \\ &\geq \int_a^b (p',p) \cdot (x - x_*, x' - x_*')\, dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt}\{p \cdot (x - x_*)\}\, dt = 0 \end{aligned}$$

jer su x i x_* jednaki u a i b, a gornja nejednakost slijedi zbog $(p',p) = \nabla_{x,v}\Lambda(t,x_*,x_*')$ g.s. Dakle

$$J(x) \geq J(x_*).$$

□

Promotrimo slučaj neglatke Lagrangeove funkcije. Tada izvod nužnih uvjeta optimalnosti rješenja zahtijeva korištenje neglatke analize. Iako je Λ nediferencijabilna, uz pretpostavku da je lokalno Lipschitzova, osnovni problem (**P**) je dobro definiran. Podsjetimo se, za adjungiranu funkciju $p(t)$ definiranu u (3.2) vrijedi

$$(p'(t), p(t)) = \nabla_{x,v}\Lambda(t, x_*(t), x_*'(t)) \text{ g.s..}$$

S obzirom na tu definiciju možemo iskazati sljedeći teorem čiji dokaz možete vidjeti u [1], str 36-37.

Teorem 3.2.7. *Neka je Λ lokalno Lipschitzova funkcija te neka je $x_* \in \mathrm{Lip}[a,b]$ rješenje osnovnog problema (**P**). Tada postoji Lipschitzova funkcija p takva da vrijedi*

$$(p'(t), p(t)) \in \partial_C\Lambda(t, x_*(t), x_*'(t)) \text{ g.s.,} \tag{3.3}$$

gdje je $\partial_C\Lambda$ Clarkeov subdiferencijal s obzirom na (x, v).

Primjer 3.2.8. *Promotrimo osnovni problem*

$$\min \int_0^1 x'(t)^3 dt,\ x(0) = 0,\ x(1) = 1.$$

Integralna Euler-Lagrangeova jednadžba (u terminu adjungirane funkcije) je

$$(p'(t), p(t)) = (0, 3x'(t)^2) \text{ g.s.}$$

Tada je $x'(t)^2 = c^2$ za neku konstantu c.
Ako promatramo x na $C^2[a,b]$, tada je rješenje jedinstveni dopustivi ekstremal $x_*(t) = t$. No, ukoliko promatramo x na $\mathrm{Lip}[a,b]$ postoji beskonačno mnogo mogućih rješenja. Za svaki $c > 1$ rješenje može biti bilo koja dopustiva po dijelovima afina funkcija čija je derivacija $\pm c$ gotovo svugdje.

Posljednji primjer pokazuje potrebu za uvođenjem dodatnih uvjeta koji će nam pomoći u reduciranju broja kandidata za rješenje osnovnog problema (**P**). U tome će nam pomoći Weierstrassov nužan uvjet.

Teorem 3.2.9. ***(Weierstrass)*** *Ako je $x_* \in \mathrm{Lip}[a,b]$ jaki lokalni minimizator za (**P**), tada za gotovo svaki $t \in [a,b]$ vrijedi*

$$\Lambda(t, x_*(t), x_*'(t) + v) - \Lambda(t, x_*(t), x_*'(t)) \geq \langle p(t), v\rangle\ \forall v \in \mathbb{R}^n.$$

Primjer 3.2.10. *Vratimo se na prethodni primjer*

$$\min \int_0^1 x'(t)^3 dt,\ x(0) = 0,\ x(1) = 1.$$

Vidjeli smo da je $x_*(t) = t$ slabi lokalni minimizator u $C^2[0,1]$. Tada je $x_*(t) = t$ slabi lokalni minimizator i za $\mathrm{Lip}[0,1]$. No, uvjeti teorema 3.2.9 očito nisu zadovoljeni ni u jednoj točci jer je subdiferencijal funkcije $v \mapsto v^3$ svugdje prazan. Možemo zaključiti da x_* nije jaki lokalni minimizator.

Bibliografija

[1] F. H. Clarke, *Methods of Dynamic and Nonsmooth Optimization*, SIAM, Philadelphia, 1989.

[2] F. Clarke, *Functional Analysis, Calculus of Variations and Optimal Control*, Springer, London, 2013.

[3] M. I. Kamien i N. L Schwartz, *Dynamic Optimization : The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management*, North-Holland, Amsterdam, 1991.

[4] M. M. Mäkelä i P. Neittaanmäki, *Nonsmooth Optimization : Analysis and Algorithms with Applications to Optimal Control*, World Scientific Publishing, Singapur, 1992.

[5] Y. Nesterov, *Introductory Lectures on Convex Optimization : A Basic Course*, Kluwer Academic Publishers, London, 2004.

[6] College of Arts i Sciences Miami University, *Calculus of variations*, `http://www.physics.miami.edu/~nearing/mathmethods/variational.pdf`.

[7] B. V. Ramana, *Calculus of Variation*, 2006.

[8] I. Slapničar, *Višestruki integrali : varijacioni račun*, `http://lavica.fesb.hr/mat2/PDF/predavanja.pdf`.

[9] Fakultet strojarstva i brodogradnje, *Osnove varijacijskog računa*, `http://zrno.fsb.hr/katedra/download/materijali/251.pdf`.

Sažetak

Osnovni cilj ovog rada je upoznati čitatelja s varijacijskim računom neglatkih funkcija. Nakon što smo uveli elementarne pojmove neglatke analize, bili smo spremni riješiti osnovni problem. U varijacijskom računu neglatke funkcije se javljaju kroz dva efekta: neglatka ekstremala x i neglatka Lagrangeova funkcija Λ.

Neka je $x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ takav da $x \in \mathrm{Lip}[a, b]$. $\Lambda(t, x, x') : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ predstavlja Lagrangeovu funkciju gdje t označava vrijeme, x stanje i x' brzinu. Tada je osnovni problem varijacijskog računa dan sa

$$\min \ J(x) = \int_a^b \Lambda(t, x(t), x'(t)) \, dt : x \in \mathrm{Lip}[a, b], \ x(a) = A, \ x(b) = B. \qquad (\mathbf{P})$$

Glavni rezultat ovog rada, u slučaju neglatkog rješenja x_* je teorem koji nam daje nužan uvjet optimalnosti rješenja : neka je $x_* \in \mathrm{Lip}[a, b]$ slabi lokalni minimizator problema $(\mathbf{P})$, tada x_* zadovoljava integralnu Euler-Lagrangeovu jednadžbu

$$\Lambda_v \ (t, \ x_*(t), \ x'_*(t)) = c + \int_a^t \Lambda_x(s, \ x_*(s), \ x'_*(s) \ ds, \ t \in [a, b] \ \text{ g.s.}$$

gdje je $c \in \mathbb{R}^n$.

U slučaju neglatke Lagrangeove funkcije Λ nužan uvjet optimalnost dan je teoremom : neka je Λ lokalno Lipschitzova funkcija te neka je $x_* \in \mathrm{Lip}[a, b]$ rješenje osnovnog problema $(\mathbf{P})$. Tada postoji Lipschitzova funkcija p takva da vrijedi

$$(p'(t), p(t)) \in \partial_C \Lambda(t, x_*(t), x'_*(t)) \text{ g.s.},$$

gdje je $\partial_C \Lambda$ Clarkeov subdiferencijal s obzirom na (x, v).

Kroz nekoliko zanimljivih primjera pokazali smo čitatelju na koje se sve načine koristi varijacijski račun te postavili temelje za daljnje razmatranje teorije varijacijskog računa.

Summary

The main aim of this master thesis is to familiarize the reader with calculus of variations of nonsmooth functions. After introducing the basic concepts of nonsmooth analysis, we were ready to solve the basic problem. In calculus of variations, nonsmooth functions surge through two effects: nonsmooth extremal x and nonsmooth Lagrangian Λ.

Let $x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ be such that $x \in \text{Lip}[a, b]$. $\Lambda(t, x, x') : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ presents Lagrangian where t denotes time, x state and x' velocity. Than the basic problem of calculus of variations is given with

$$\min \ J(x) = \int_a^b \Lambda(t, x(t), x'(t)) \ dt : x \in \text{Lip}[a, b], \ x(a) = A, \ x(b) = B. \qquad (\mathbf{P})$$

The main result of this thesis in case of nonsmooth extremal x_* is theorem which gives us the necessary condition of the optimality of the solution : let $x_* \in \text{Lip}[a, b]$ be a weak local minimizer for the basic problem $(\mathbf{P})$, than x_* satisfies the integral Euler-Lagrange equation

$$\Lambda_v \ (t, \ x_*(t), \ x_*'(t)) = c + \int_a^t \Lambda_x(s, \ x_*(s), \ x_*'(s) \ ds, \ t \in [a, b] \ \text{ g.s.}$$

where $c \in \mathbb{R}^n$.

In case of nonsmooth Lagrangian Λ, the necessary condition of optimality is given with theorem : let Λ be locally Lipschitz function and let $x_* \in \text{Lip}[a, b]$ be solution of the basic problem $(\mathbf{P})$. Than there exists Lipschitz function p such that

$$(p'(t), p(t)) \in \partial_C \Lambda(t, x_*(t), x_*'(t)) \text{ g.s.},$$

where the Clarke subdifferential $\partial_C \Lambda$ is taken with respect to (x, v).

With a few interesting examples we have shown the reader the numerous ways in which calculus of variations can be used and we have set the basis for further consideration of the theory of calculus of variations.

Životopis

Rođena sam 12. travnja 1990. godine u Varaždinu, Hrvatska. Osnovnu školu sam završila u Novom Marofu. Nakon toga sam upisala Prvu gimnaziju Varaždin te je završila kao odlična učenica. Akademske godine 2009./2010. upisala sam Prirodoslovno-matematički fakultet, preddiplomski studij Matematika na Matematičkom odsjeku. Titulu prvostupnika matematike stekla sam 2012. godine. Iste godine upisala sam diplomski studij Financijske i poslovne matematike također na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu.