Modeli urni i martingalne metode

Šebek, Stjepan

Master's thesis / Diplomski rad

2014

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Stjepan Šebek

MODELI URNI I MARTINGALNE METODE

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Zoran Vondraček

Zagreb, 2014.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Pólyine urne je zajednički naziv za modele koji uključuju jednu urnu koja sadrži kuglice jedne, dvije ili više različitih boja. Iz urne na slučajan način izvlačimo jednu kuglicu te, ovisno o boji izvučene kuglice, dodamo (ili oduzmemo) deterministički ili slučajan broj kuglica pojedine boje u urnu i taj postupak ponavljamo. Nas prije svega zanima asimptotsko ponašanje distribucije broja kuglica pojedine boje u urni. Jasno je da pravila treba pažljivo definirati tako da bi uopće bilo moguće ponavljati taj postupak beskonačno mnogo puta i da bi uopće imalo smisla raspravljati o asimptotskim rezultatima. Pod nazivom Pólyine urne se podrazumijevaju isključivo one urne kod kojih su pravila izmjena sadržaja urni, nakon izvlačenja kuglice određene boje, definirana tako da je postupak zaista moguće beskonačno puta ponoviti. Takve urne ćemo zvati i održivima. Povijesno gledano, modeli urni su jako stari. Urne se spominju još u Starom Zavjetu, a u svojim radovima ih spominje i puno matematičara kao što su Huygens, de Moivre, Laplace i Bernoulli. Ono što danas nazivamo Pólyine urne prvi uvodi matematičar Markov.

Pólyina urna može sadržavati kuglice k različitih boja ($k \in \mathbb{N}$). Promjene u sadržaju urne se događaju u diskretnim trenucima. U svakom koraku prvo dobro promiješamo našu urnu i nakon toga izvlačimo jednu kuglicu iz nje (pri čemu je vjerojatnost izvlačenja bilo koje od kuglica jednaka te iznosi jedan kroz trenutni broj kuglica u urni). Kada izvučemo kuglicu, pogledamo koje je ona boje i vratimo je natrag u urnu. Ako je boja izvučene kuglice jednaka i, gdje je $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, onda u urnu stavljamo A_{ij} kuglica boje j, $j \in \{1, 2, \ldots k\}$. Općenito, A_{ij} može biti deterministička ili slučajna vrijednost te može biti pozitivna ili negativna. Uobičajeno je pravila izmjene sadržaja urni, ovisno o boji izvučene kuglice, zapisati matrično. Tu matricu nazivamo shema izmjena. U ovom općenitom slučaju shema izmjena izgleda ovako

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1k} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{k1} & A_{k2} & \ldots & A_{kk} \end{pmatrix}$$

pri čemu elementi u i-tom retku predstavljaju koliko se kuglica pojedine boje stavlja u urnu ako je boja izvučene kuglice i, a elementi u j-tom stupcu predstavljaju broj kuglica

j-te boje koji stavljamo u urnu ovisno o tom koje je boje izvučena kuglica.

Modeli urni imaju dosta široke primjene. U [5] autor navodi dva velika područja u kojima se koriste modeli urni. Prvo je informatika gdje se modeli urni, između ostalog, koriste za modeliranje stabla traženja, a drugo je bioznanost gdje se modelima urni modelira evolucija pojedinih vrsta i širenje epidemija. Mi ćemo se u ovom radu baviti isključivo teorijskim aspektom tih modela te ćemo postaviti temelje za daljnje proučavanje modela urni i eventualno nekih njihovih primjena.

Kroz povijest se raznim problemima koji su mogu opisati na jeziku urni pristupalo na razne načine. Nama je u središtu interesa martingalni pristup tim problemima kojeg ćemo ilustrirati na jednom konkretnom modelu koji se u literaturi naziva Bagchi-Pal model urne.

Rad je organiziran tako da na samom početku, u poglavlju 1, navodimo razne rezultate koji će nam kasnije biti potrebni. Nakon toga, u poglavlju 2, donosimo vrlo kratak uvod u teoriju martingala. U poglavlju 3 opisujemo nekoliko različitih modela urni. Jedan od njih je Bagchi-Pal model na kojem ćemo ilustrirati martingalni pristup rješavanju ključnih pitanja koja se pojavljuju kod modela urni, a druga dva su shema Georgea Pólye i shema Bernarda Friedmana što su dva najpoznatija modela urni u literaturi. Poglavlje 4 posvećeno je prvom velikom rezultatu kojeg donosimo u ovom radu, a to je jaki zakon velikih brojeva za urne. Nakon jakog zakona velikih brojeva za urne, u poglavlju 5 dokazujemo drugi veliki rezultat, a to je centralni granični teorem za urne. Na kraju, teoreme dokazane u poglavljima 4 i 5 ilustriramo simulacijama. Rezultati dobiveni simulacijama prikazani su u poglavlju 6.

Poglavlje 1

Definicije i teoremi

U ovom dijelu rada navest ćemo najvažnije definicije i teoreme koji će nam kasnije biti potrebni, a nisu usko vezani uz samu temu rada. Neke rezultate ćemo dokazati, a za neke ćemo samo dati referencu na izvor u kojem su dokazani.

Prvi takav rezultat koji će nam biti važan je asimptotski rezultat za omjer gama funkcija.

Teorem 1.1. *Neka su r i s realni brojevi. Tada vrijedi*

$$\frac{\Gamma(x+r)}{\Gamma(x+s)} = x^{r-s} + O(x^{r-s-1}), \quad x \to +\infty.$$

Dokaz navedenog teorema se može naći u [6].

Napomena 1.2. *Uočimo da iz tvrdnje Teorema 1.1 slijedi da je za dovoljno velike $x > 0$*

$$\frac{\Gamma(x+r)}{\Gamma(x+s)} \leqslant C x^{r-s},$$

gdje je $C > 0$ neka konstanta. Naime, tvrdnja teorema zapravo znači da postoje $x_0, C_1 > 0$ takvi da vrijedi

$$\left| \frac{\Gamma(x+r)}{\Gamma(x+s)} - x^{r-s} \right| \leqslant C_1 x^{r-s-1}, \quad x \geqslant x_0.$$

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $x_0 > \max\{1, |r|, |s|\}$ pa imamo

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(x+r)}{\Gamma(x+s)} - x^{r-s} &= \left| \frac{\Gamma(x+r)}{\Gamma(x+s)} \right| - |x^{r-s}| \\ &\leqslant \left| \frac{\Gamma(x+r)}{\Gamma(x+s)} - x^{r-s} \right| \\ &\leqslant C_1 x^{r-s-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leqslant C_1 x^{r-s-1} \cdot x \\ &= C_1 x^{r-s}, \quad x \geqslant x_0 \end{aligned}$$

iz čega direktno slijedi

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(x+r)}{\Gamma(x+s)} &\leqslant C_1 x^{r-s} + x^{r-s} \\ &= (C_1+1)x^{r-s} \\ &= Cx^{r-s}, \quad x \geqslant x_0 \end{aligned}$$

što smo i htjeli pokazati.

Sljedeći rezultat je jedna tehnička lema koju ćemo i dokazati, a njena tvrdnja je:

Lema 1.3. *Neka je $p \in \mathbb{R}$, $p < 1$ i $p \neq 0$. Tada vrijedi*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p}}{\frac{n^{1-p}}{1-p}} = 1. \tag{1.1}$$

Dokaz. Zapišimo prvo dotični limes na sljedeći način

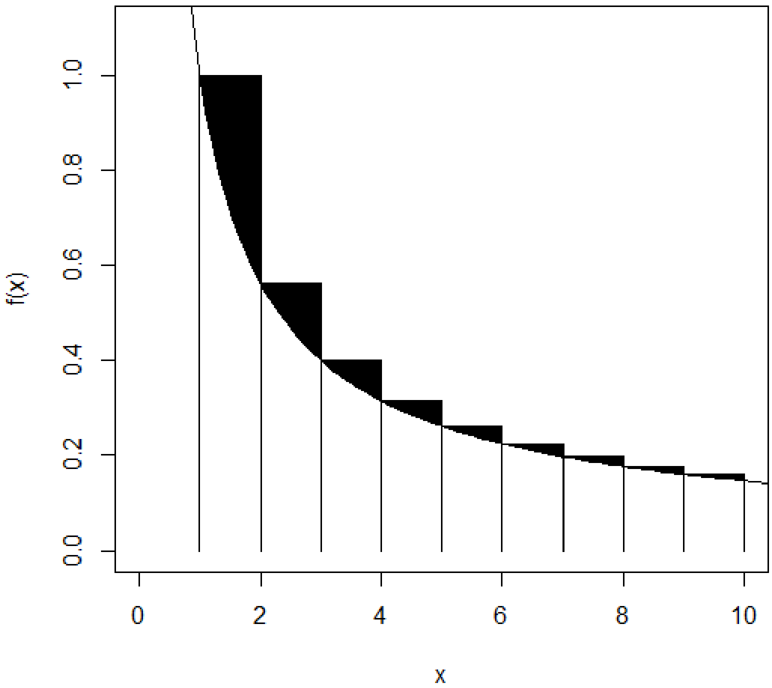
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p}}{\frac{n^{1-p}}{1-p}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p}}{\int_1^{n+1} \frac{1}{x^p}\,dx} \frac{\int_1^{n+1} \frac{1}{x^p}\,dx}{\frac{n^{1-p}}{1-p}}. \tag{1.2}$$

Razmotrimo sada posebno prvi i drugi razlomak u gornjem izrazu. Prilikom računanja limesa prvog razlomka koristit ćemo činjenicu da je

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p} = \int_1^{n+1} \frac{1}{x^p}\,dx + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k^p} - \int_k^{k+1} \frac{1}{x^p}\,dx \right)$$

što se jasno vidi sa slike 1.1. Dokaz ćemo provesti za $0 < p < 1$, ali posve analogan dokaz prolazi i u slučaju $p < 0$. Izračunajmo prvo čemu je jednak $\int_1^{n+1} \frac{1}{x^p}\,dx$.

$$\begin{aligned} \int_1^{n+1} \frac{1}{x^p}\,dx &= \int_1^{n+1} x^{-p}\,dx \\ &= \left. \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right|_1^{n+1} \\ &= \frac{(n+1)^{-p+1}}{-p+1} - \frac{1^{-p+1}}{-p+1} \end{aligned}$$



Slika 1.1: Na slici je prikazan graf funkcije $f(x) = \frac{1}{x^p}$ te je označena razlika između sume $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p}$ i integrala $\int_1^{n+1} \frac{1}{x^p}\,dx$. Za ovaj konkretan graf uzete su vrijednosti $p = \frac{5}{6}$ te $n = 9$.

$$= \frac{(n+1)^{1-p} - 1}{1-p}. \tag{1.3}$$

Sada ćemo malo detaljnije pogledati izraz $\frac{1}{k^p} - \int_k^{k+1} \frac{1}{x^p}\,dx$, $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Budući da je

$$\frac{1}{k^p} \geqslant \frac{1}{x^p} \geqslant \frac{1}{(k+1)^p}, \quad \forall\, x \in [k, k+1]$$

zaključujemo da je

$$\frac{1}{k^p} = \int_k^{k+1} \frac{1}{k^p}\,dx \geqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x^p}\,dx \geqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{(k+1)^p}\,dx = \frac{1}{(k+1)^p}, \quad k \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Korištenjem gornjih nejednakosti dobivamo

$$0 \leqslant \frac{1}{k^p} - \int_k^{k+1} \frac{1}{x^p}\,dx \leqslant \frac{1}{k^p} - \frac{1}{(k+1)^p}, \quad k \in \{1, 2, \ldots, n\}. \tag{1.4}$$

Iz relacije (1.4) trivijalno slijedi

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k^p} - \int_k^{k+1} \frac{1}{x^p}\, dx \right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k^p} - \frac{1}{(k+1)^p} \right) = 1 - \frac{1}{(n+1)^p}. \tag{1.5}$$

Uočimo da u ovom našem slučaju kada je $0 < p < 1$, za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p} \geqslant \int_1^{n+1} \frac{1}{x^p}\, dx \tag{1.6}$$

što se lako vidi sa slike 1.1. Sada korištenjem (1.5) i (1.6) dobivamo

$$\begin{aligned}
1 &\leqslant \lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p}}{\int_1^{n+1} \frac{1}{x^p}\, dx} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{\int_1^{n+1} \frac{1}{x^p}\, dx + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k^p} - \int_k^{k+1} \frac{1}{x^p}\, dx \right)}{\int_1^{n+1} \frac{1}{x^p}\, dx} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{\int_1^{n+1} \frac{1}{x^p}\, dx}{\int_1^{n+1} \frac{1}{x^p}\, dx} + \lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k^p} - \int_k^{k+1} \frac{1}{x^p}\, dx \right)}{\int_1^{n+1} \frac{1}{x^p}\, dx} \\
&\leqslant 1 + \lim_{n\to+\infty} \frac{1 - \frac{1}{(n+1)^p}}{\frac{(n+1)^{1-p}-1}{1-p}} \\
&= 1 + (1-p) \lim_{n\to+\infty} \frac{1 - \frac{1}{(n+1)^p}}{(n+1)^{1-p} - 1} \\
&= 1 + (1-p)\, \frac{1-0}{+\infty - 1} = 1.
\end{aligned}$$

Po teoremu o sendviču iz gornjeg raspisa slijedi

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p}}{\int_1^{n+1} \frac{1}{x^p}\, dx} = 1.$$

Sada još samo treba pokazati

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\int_1^{n+1} \frac{1}{x^p}\, dx}{\frac{n^{1-p}}{1-p}} = 1$$

i onda će iz relacije (1.2) slijediti tvrdnja leme. Korištenjem relacije (1.3) dobivamo

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\int_1^{n+1} \frac{1}{x^p}\, dx}{\frac{n^{1-p}}{1-p}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(n+1)^{1-p}-1}{1-p}}{\frac{n^{1-p}}{1-p}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{1-p} - 1}{n^{1-p}}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1-p} - \frac{1}{n^{1-p}} \right] = 1.$$

Dakle,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p}}{\frac{n^{1-p}}{1-p}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p}}{\int_1^{n+1} \frac{1}{x^p}\, dx} \frac{\int_1^{n+1} \frac{1}{x^p}\, dx}{\frac{n^{1-p}}{1-p}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p}}{\int_1^{n+1} \frac{1}{x^p}\, dx} \lim_{n\to+\infty} \frac{\int_1^{n+1} \frac{1}{x^p}\, dx}{\frac{n^{1-p}}{1-p}} = 1 \cdot 1 = 1$$

što je i trebalo pokazati. □

Još jedan rezultat koji će nam kasnije biti potreban je tzv. Toeplitzova lema koja glasi:

Lema 1.4. *Neka je $(a_{nj} : n, j \in \mathbb{N})$ dvostruki niz realnih brojeva takav da vrijedi*

(i) $\exists C > 0$ *t.d.* $\sum_{j=1}^{\infty} |a_{nj}| \leqslant C, \quad \forall n \in \mathbb{N}$,

(ii) $\lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj} = 1$,

(iii) $\lim_{n\to+\infty} a_{nj} = 0, \quad \forall j \in \mathbb{N}$.

Neka je $(x_n : n \in \mathbb{N})$ niz u Banachovom prostoru $(X, \|\cdot\|)$ takav da je $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$. Definiramo niz $(y_n : n \in \mathbb{N})$ na sljedeći način

$$y_n := \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj} x_j.$$

Tada vrijedi

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = x.$$

Dokaz. Uočimo kao prvo da je niz $(y_n : n \in \mathbb{N})$ dobro definiran. Naime, vrijedi

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|a_{nj} x_j\| = \sum_{j=1}^{\infty} |a_{nj}|\, \|x_j\| \leqslant \left(\sup_{j\in\mathbb{N}} \|x_j\|\right) \sum_{j=1}^{\infty} |a_{nj}| < +\infty$$

što jasno slijedi iz (i) i činjenice da je svaki konvergentan niz omeđen. Dakle, red $\sum_{j=1}^{\infty} a_{nj} x_j$ je apsolutno konvergentan pa je i konvergentan. Zbog (ii), bez smanjenja općenitosti, možemo pretpostaviti da je $x = 0$. Pretpostavimo da je tvrdnja dokazana u slučaju kada je $x = 0$. Neka je sada $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$, pri čemu je $x \neq 0$. Definiramo

$$x'_n := x_n - x, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Jasno je da vrijedi $\lim_{n\to+\infty} x'_n = 0$ pa iz pretpostavke da tvrdnja teorema vrijedi za nizove koji konvergiraju u 0 slijedi

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj} x'_j = 0 &\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj}(x_j - x) = 0 \\
&\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj} x_j - \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj} x = 0 \\
&\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj} x_j = x \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj} \\
&\overset{(ii)}{\Rightarrow} \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj} x_j = x
\end{aligned}$$

što je upravo tvrdnja leme. Dakle, zaista je dovoljno dokazati lemu samo u slučaju kada je $x = 0$, tj. dovoljno je pokazati da je u tom slučaju $\lim_{n\to+\infty} y_n = 0$. Neka je sada $\epsilon > 0$ proizvoljan, ali fiksan. Budući da je $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$, jasno je da za naš $\epsilon > 0$ postoji $N \in \mathbb{N}$ takav da je $\|x_j\| < \frac{\epsilon}{2C}$, $j \geqslant N$. Također, uočimo da zbog (iii) vrijedi

$$\begin{aligned}
\exists\, n_1 \in \mathbb{N}, n \geqslant n_1 &\Rightarrow |a_{n1}| \leqslant \frac{\epsilon}{2\sum_{j=1}^{N} \|x_j\|}, \\
\exists\, n_2 \in \mathbb{N}, n \geqslant n_2 &\Rightarrow |a_{n2}| \leqslant \frac{\epsilon}{2\sum_{j=1}^{N} \|x_j\|}, \\
&\vdots \\
\exists\, n_N \in \mathbb{N}, n \geqslant n_N &\Rightarrow |a_{nN}| \leqslant \frac{\epsilon}{2\sum_{j=1}^{N} \|x_j\|}.
\end{aligned}$$

Neka je sada $n_0 := \max\{n_1, n_2, \ldots, n_N\}$. Tada $n \geqslant n_0$ povlači

$$|a_{nj}| \leqslant \frac{\epsilon}{2\sum_{j=1}^{N} \|x_j\|}, \quad \forall\, j \in \{1, 2, \ldots, N\}.$$

Dakle, za $n \geqslant n_0$ vrijedi:

$$\|y_n\| \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \|a_{nj} x_j\|$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{N} |a_{nj}|\,\|x_j\| + \sum_{j=N+1}^{\infty} |a_{nj}|\,\|x_j\| \\
&< \frac{\epsilon}{2\sum_{j=1}^{N}\|x_j\|} \sum_{j=1}^{N}\|x_j\| + \frac{\epsilon}{2C} \sum_{j=N+1}^{\infty} |a_{nj}| \\
&\leqslant \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2C} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{nj}| \\
&\overset{(i)}{\leqslant} \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2C} C = \epsilon.
\end{aligned}
$$

Uočimo da gornja nejednakost trivijalno vrijedi i u slučaju kad je izraz $\sum_{j=1}^{N}\|x_j\|$ jednak nuli jer je tada $\|x_1\| = \|x_2\| = \ldots = \|x_N\| = 0$ pa je prvi pribrojnik u drugom redu gornje relacije jednak nuli. Zbog proizvoljnosti od ϵ, ovime smo pokazali da za svaki $\epsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geqslant n_0$ vrijedi $\|y_n\| < \epsilon$ što po definiciji znači da niz $(y_n : n \in \mathbb{N})$ konvergira u 0 što smo i trebali pokazati. □

Nakon same Toeplitzove leme navodimo i jednu njenu trivijalnu posljedicu i upravo je to rezultat koji ćemo iskoristiti u nastavku rada.

Korolar 1.5. *Neka je $(a_{nj} : n, j \in \mathbb{N})$ dvostruki niz realnih brojeva te neka vrijede pretpostavke (i) i (iii) kao u Lemi 1.4. Neka umjesto pretpostavke (ii) vrijedi malo općenitija pretpostavka*

$$
\lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj} = a > 0. \tag{1.7}
$$

Neka je $(x_n : n \in \mathbb{N})$ niz u X koji konvergira prema x te neka je niz $(y_n : n \in \mathbb{N})$ definiran sa

$$
y_n := \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj} x_j.
$$

Tada vrijedi

$$
\lim_{n\to+\infty} y_n = ax.
$$

Dokaz. Iz dokaza Leme 1.4 znamo da je niz $(y_n : n \in \mathbb{N})$ dobro definiran. Definirajmo sada dvostruki niz realnih brojeva $(a'_{nj} : n, j \in \mathbb{N})$ tako da je

$$
a'_{nj} := \frac{a_{nj}}{a}, \quad \forall\, n, j \in \mathbb{N}.
$$

Za dvostruki niz realnih brojeva $(a'_{nj} : n, j \in \mathbb{N})$ vrijedi

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a'_{nj}| = \sum_{j=1}^{\infty} \left| \frac{a_{nj}}{a} \right| = \frac{1}{a} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{nj}| \overset{(i)}{\leqslant} \frac{C}{a}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \tag{1.8}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a'_{nj} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_{nj}}{a} = \frac{1}{a} \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj} \overset{(1.7)}{=} 1, \tag{1.9}$$

$$\lim_{n\to+\infty} a'_{nj} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{nj}}{a} = \frac{1}{a} \lim_{n\to+\infty} a_{nj} \overset{(iii)}{=} 0, \quad \forall\, j \in \mathbb{N}. \tag{1.10}$$

Sada iz (1.8), (1.9) i (1.10), korištenjem Leme 1.4 slijedi

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a'_{nj} x_j = x$$

iz čega trivijalno imamo

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj} x_j = a \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_{nj}}{a} x_j = a \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a'_{nj} x_j = ax$$

što je i trebalo pokazati. □

Sljedeći rezultat koji navodimo u ovom poglavlju govori o tome uz koje uvjete konvergencija po mjeri povlači konvergenciju u srednjem reda p. Dokaz teorema se može pronaći u [2] na 71. stranici (Teorem 7.8).

Teorem 1.6. *Neka je $(f_n : n \in \mathbb{N})$ niz funkcija u L^p prostoru koje konvergiraju po mjeri prema funkciji f, te neka je $g \in L^p$ takva da vrijedi*

$$|f_n(x)| \leqslant g(x),\ g.s.$$

Tada je $f \in L^p$ i niz $(f_n : n \in \mathbb{N})$ konvergira prema funkciji f u L^p.

Na kraju ovog poglavlja navodimo još jednu definiciju i jedan teorem.

Definicija 1.7. *Suma recipročnih vrijednosti prvih n prirodnih brojeva naziva se n-ti harmonijski broj. Označavamo ga s H_n. Dakle*

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Teorem koji zadnji navodimo u ovom poglavlju govori o asimptotskom ponašanju gore definiranih harmonijskih brojeva i trebat će nam prilikom dokazivanja najvažnijeg rezultata našeg rada, a to je takozvani centralni granični teorem za urne.

Teorem 1.8. *Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$H_n = \log n + \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

gdje je $\gamma \in \mathbb{R}$ Eulerova konstanta.

Dokaz navedenog teorema može se pronaći u [1] na 55. stranici (Teorem 3.2).

Poglavlje 2

Osnovno o martingalima

U ovom poglavlju uvodimo pojam martingala. Na početku dajemo formalnu definiciju diskretno vremenskog slučajnog procesa.

Definicija 2.1. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F})$ *izmjeriv prostor te neka je za svaki* $n \in \mathbb{Z}_+$ X_n *slučajna varijabla na* $(\Omega, \mathcal{F})$*. Familija* $X = (X_n : n \geqslant 0)$ *naziva se slučajni proces (s diskretnim vremenom).*

Prije same definicije martingala, moramo još uvesti pojam filtracije i adaptiranosti slučajnog procesa s obzirom na neku filtraciju.

Definicija 2.2. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F})$ *izmjeriv prostor. Familija* $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n : n \geqslant 0)$ σ*-podalgebri od* $\mathcal{F}$ *takvih da je* $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_{n+1}$ *za svaki* $n \geqslant 0$ *zove se filtracija. Slučajni proces* $X = (X_n : n \geqslant 0)$ *zove se adaptiran s obzirom na filtraciju* $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n : n \geqslant 0)$ *ako je za svaki* $n \geqslant 0$ *slučajna varijabla* X_n $\mathcal{F}_n$ *izmjeriva.*

Sada smo spremni definirati pojam martingala.

Definicija 2.3. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *vjerojatnosni prostor,* $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n : n \geqslant 0)$ *filtracija te* $X = (X_n : n \geqslant 0)$ *slučajni proces. Pretpostavimo da je* X *adaptiran s obzirom na* $\mathbb{F}$ *te da je* $\mathbb{E}|X_n| < +\infty$ *za svako* $n \geqslant 0$*.* X *se zove martingal (preciznije,* $(\mathbb{F}, \mathbb{P})$*-martingal) ako vrijedi*

$$\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = X_n \ g.s., \quad \forall n \geqslant 0.$$

Osim pojma martingala, u nastavku rada će jako bitnu ulogu imati pojam martingalnog niza.

Definicija 2.4. *Neka je* $(X_{n,i}, \mathcal{F}_{n,i}, 1 \leqslant i \leqslant k_n)$ *martingal za svaki* $n \geqslant 1$*, neka dvostruki niz* σ*-algebri* $(\mathcal{F}_{n,i}, 1 \leqslant i \leqslant k_n, n \geqslant 1)$ *zadovoljava* $\mathcal{F}_{n,i} \subseteq \mathcal{F}_{n+1,i}$*,* $1 \leqslant i \leqslant k_n$*,* $n \geqslant 1$*, te neka je* $(k_n : n \in \mathbb{N})$ *rastući niz prirodnih brojeva za koji vrijedi* $\lim_{n\to+\infty} k_n = +\infty$*. Tada dvostruki* *niz* $(X_{n,i}, \mathcal{F}_{n,i}, 1 \leqslant i \leqslant k_n, n \geqslant 1)$ *zovemo martingalni niz. Niz* $(S_{n,i}, 1 \leqslant i \leqslant k_n, n \geqslant 1)$ *gdje je* $S_{n,i} = X_{n,i} - X_{n,i-1}$, $1 \leqslant i \leqslant k_n, n \geqslant 1$, $(X_{n0} = 0)$ *zovemo niz martingalnih razlika.*

Na kraju ovog kratkog uvoda u teoriju martingala navodimo jedan veoma važan teorem. To je centralni granični teorem za martingale. Nakon samog teorema, navest ćemo i jedan njegov korolar. Upravo taj korolar ćemo kasnije iskoristiti da bismo dobili najvažniji rezultat koji navodimo u ovom radu. Prije samog teorema i korolara definirat ćemo pojam kvadratno-integrabilnog slučajnog procesa.

Definicija 2.5. *Slučajni proces* $(X_n : n \geqslant 0)$ *za koji vrijedi* $\mathbb{E}X_n^2 < +\infty$ *za sve* $n \geqslant 0$ *zove se kvadratno-integrabilni slučajni proces.*

Sada smo spremni za iskaz martingalnog CGT.

Teorem 2.6. *Neka je* $(X_{n,i}, \mathcal{F}_{n,i}, 1 \leqslant i \leqslant k_n, n \geqslant 1)$ *kvadratno-integrabilni martingalni niz s očekivanjem nula te s pripadnim nizom martingalnih razlika* $(S_{n,i}, 1 \leqslant i \leqslant k_n, n \geqslant 1)$ *i neka je* η^2 *gotovo sigurno konačna slučajna varijabla. Pretpostavimo da vrijedi*

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant k_n} |S_{n,i}| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \tag{2.1}$$

$$\sum_{i=1}^{k_n} S_{n,i}^2 \xrightarrow{\mathbb{P}} \eta^2, \tag{2.2}$$

$$\mathbb{E}\left[\max_{1 \leqslant i \leqslant k_n} S_{n,i}^2\right] \leqslant D, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{2.3}$$

gdje je $D > 0$ *neka konstanta. Tada niz* $(X_{n,k_n} : n \in \mathbb{N})$ *konvergira po distribuciji prema slučajnoj varijabli* Z*, tj. vrijedi*

$$X_{n,k_n} = \sum_{i=1}^{k_n} S_{n,i} \xrightarrow{\mathrm{d}} Z,$$

gdje je Z *slučajna varijabla s karakterističnom funkcijom*

$$\varphi_Z(t) = \mathbb{E}\left[\exp\left(-\frac{1}{2}\eta^2 t^2\right)\right].$$

Dokaz navedenog teorema može se pronaći u [4] na 60. stranici (Teorem 3.2). Korolar navedenog teorema, koji će nama kasnije trebati, glasi:

Korolar 2.7. *Neka je* $(X_{n,i}, \mathcal{F}_{n,i}, 1 \leqslant i \leqslant k_n, n \geqslant 1)$ *kvadratno-integrabilni martingalni niz s očekivanjem nula te s pripadnim nizom martingalnih razlika* $(S_{n,i}, 1 \leqslant i \leqslant k_n, n \geqslant 1)$ *i neka je* η^2 *gotovo sigurno konačna slučajna varijabla. Ako pretpostavke* (2.1) *i* (2.3) *iz Teorema 2.6 zamijenimo s uvjetnim Lindebergovim uvjetom*

$$\sum_{i=1}^{k_n} \mathbb{E}[S_{n,i}^2 \mathbb{1}_{\{|S_{n,i}|>\epsilon\}} \mid \mathcal{F}_{n,i-1}] \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \quad \forall \epsilon > 0 \tag{2.4}$$

te ako pretpostavku (2.2) *iz Teorema 2.6 zamijenimo analognim uvjetom na uvjetnu varijancu*

$$U_{n,k_n}^2 = \sum_{i=1}^{k_n} \mathbb{E}[S_{n,i}^2 \mid \mathcal{F}_{n,i-1}] \xrightarrow{\mathbb{P}} \eta^2 \tag{2.5}$$

tada tvrdnja Teorema 2.6 i dalje vrijedi.

Poglavlje 3

Opis modela urni

3.1 Bagchi-Pal model urne

Nakon što smo se upoznali s pojmom martingala i martingalnog niza, prelazimo na opis konkretnog modela na kojem ćemo ilustrirati martingalni pristup rješavanju problema urni.

Pretpostavimo da imamo održivu urnu koja sadrži bijele i zelene kuglice pri čemu shema izmjena izgleda ovako

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

Kao što je već ranije objašnjeno, prvi redak, odnosno prvi stupac se odnosi na bijele kuglice, a drugi redak i drugi stupac se odnose na zelene kuglice, tj. ako izvučemo bijelu kuglicu, nakon što ju vratimo natrag u urnu, ubacit ćemo u urnu još a bijelih i b zelenih kuglica, a ako izvučemo zelenu kuglicu ćemo, nakon što tu zelenu kuglicu vratimo natrag, ubaciti još c bijelih i d zelenih kuglica u urnu. Urne kod kojih se javljaju samo dvije različite boje kuglica nazivamo dikromatskim urnama. Mi ćemo u ovom radu razmatrati samo jednu klasu dikromatskih urni. To su takozvane Bagchi-Pal urne. Pretpostavka kod te klase modela je ta da je zbroj elemenata u svakom retku sheme izmjena jednak, tj. da vrijedi $a + b = c + d$, uz oznake kao u (3.1). Označimo s K tu zajedničku sumu elemenata u pojedinom retku. Dakle,

$$K = a + b = c + d.$$

Kako ne bismo imali problema s održivosti urne, dodatno ćemo pretpostaviti da su svi elementi sheme izmjena (3.1) pozitivni. To posebno znači i da je $K > 0$. Iako bi sve rezultate mogli izraziti u terminima matričnih elemenata sheme izmjena, puno je ljepše prijeći na svojstvene vrijednosti matrice A, definirane u (3.1). Pokazat ćemo da su svojstvene vrijednosti dotične matrice jednake $\lambda_1 = K$ te $\lambda_2 = a - c$. Uočimo da je slučaj kada je $\lambda_2 = 0$, tj.

kada je $a = c$ zapravo trivijalan. Naime, u tom slučaju shema izmjena ima oblik

$$A = \begin{pmatrix} a & K-a \\ a & K-a \end{pmatrix},$$

a takav model nema u sebi nikakvu slučajnost jer se u svakom koraku, bez obzira na boju izvučene kuglice, u urnu dodaje a kuglica bijele i $K - a$ kuglica zelene boje. Stoga nećemo razmatrati slučaj kada je $\lambda_2 = 0$. Osim što ćemo u nastavku rada razmatrati samo situaciju kada je $\lambda_2 \neq 0$ i kada su svi elementi sheme izmjena pozitivni, ključna pretpostavka svih asimptotskih rezultata vezanih uz Bagchi-Pal model urne, koje ćemo dokazati, će biti da je $\lambda_2 < \frac{1}{2}\lambda_1$, tj. iskazano u terminima matričnih elemenata

$$a - c < \frac{1}{2}(a + b). \tag{3.2}$$

Prije no što krenemo u detaljnije razmatranje Bagchi-Pal modela urne, tj. asimptotskog ponašanja distribucije broja kuglica pojedine boje u tom modelu, spomenut ćemo dva, povijesno gledano, najpoznatija modela urni. Oni su u literaturi poznati kao shema Georgea Pólye, odnosno shema Bernarda Friedmana. Svaku od tih shema ćemo ukratko opisati te ćemo navesti najvažnije rezultate vezane uz asimptotsko ponašanje distribucije broja kuglica u tim modelima. Također ćemo se osvrnuti i na to kako se ti modeli uklapaju u model za koji dokazujemo asimptotske rezultate i na kojem ilustriramo martingalni pristup rješavanju problema urni, a to je već spomenuti Bagchi-Pal model koji dodatno zadovoljava pretpostavku (3.2).

3.2 Shema Georgea Pólye

Shema izmjena u slučaju modela Georga Pólye ima sljedeći oblik

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Dakle, ako u nekom koraku iz urne izvučemo kuglicu bijele boje, nakon što ju vratimo u urnu, u urnu ćemo staviti još a kuglica bijele boje (a je pozitivan cijeli broj), a ako izvučemo zelenu kuglicu, u urnu ćemo staviti još a zelenih kuglica, nakon što vratimo izvučenu kuglicu u urnu. Znači, svaki put kada izvučemo kuglicu iz urne, vratimo je u urnu, te dodamo još a kuglica izvučene boje. Uočimo da je ovaj model samo jedan poseban slučaj općenitog Bagchi-Pal modela urne jer i ovdje vrijedi da je suma elemenata svakog pojedinog retka sheme izmjena jednaka. Ipak, rezultati koje ćemo dokazati neće vrijediti za model Georgea Pólye jer on ne zadovoljava relaciju (3.2). Naime, u slučaju sheme Georgea Pólye vrijedi $a - c = a$ i $a + b = a$ tako da taj model očito ne zadovoljava ključnu pretpostavku (3.2).

Prije nego što navedemo najvažniji asimptotski rezultat vezan uz shemu Georgea Pólye, moramo uvesti neke oznake. Neka je W_n broj bijelih kuglica u Pólyinoj urni nakon n izvlačenja, G_n broj zelenih kuglica nakon n izvlačenja, a τ_n ukupan broj kuglica u urni nakon n koraka, tj. $\tau_n = W_n + G_n$. Posebno, W_0, G_0 i τ_0 označavaju broj bijelih, zelenih, odnosno ukupni broj kuglica u urni prije prvog koraka. To su takozvani početni uvjeti. U slučaju Pólyine urne vrijedi sljedeći teorem:

Teorem 3.1. *Neka je W_n broj bijelih, a τ_n ukupan broj kuglica u Pólyinoj urni nakon n izvlačenja te neka je shema izmjena dotične urne dana s* (3.3). *Tada vrijedi*

$$\frac{W_n}{\tau_n} \xrightarrow{\mathrm{d}} \beta\left(\frac{W_0}{a}, \frac{G_0}{a}\right).$$

Teorem su dokazali Pólya i Eggenberger 1923. godine i dokaz se može naći u [5] na 53. stranici (Teorem 3.2). Vrlo zanimljivo je uočiti da je asimptotska distribucija u potpunosti određena početnim uvjetima.

3.3 Shema Bernarda Friedmana

Model urne Bernarda Friedmana opisan je sljedećom shemom izmjena:

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & a \end{pmatrix}.$$

Dakle, u urni opet imamo kuglice dvije različite boje i svaki put kada izvučemo kuglicu iz urne, vratimo je u urnu, te dodamo još a kuglica izvučene boje te c kuglica suprotne boje, gdje su a i c pozitivni cijeli brojevi. Također, pretpostavljamo da su a i c međusobno različiti jer inače imamo degenerirani slučaj u kojem nema nikakve slučajnosti.

Kao i u prošlom odjeljku, s W_n ćemo označiti broj bijelih kuglica, s G_n broj zelenih kuglica, a s τ_n ukupan broj kuglica u urni nakon n izvlačenja. Može se pokazati da za model urne Bernarda Friedmana vrijedi

$$\frac{W_n}{\tau_n} \xrightarrow{g.s.} \frac{1}{2}$$

neovisno o a i c. U slučaju $a \gg c$ to je prilično začuđujuće.

Što se tiče rezultata vezanih uz asimptotsku distribuciju broja kuglica određene boje u urni, situacija je vrlo zanimljiva. Prije navođenja samih rezultata, radi jednostavnosti uvedimo oznaku

$$\rho = \frac{a - c}{a + c}.$$

Asimptotska distribucija se bitno razlikuje u ovisnosti o tome da li je $\rho < \frac{1}{2}$, $\rho = \frac{1}{2}$ ili $\rho > \frac{1}{2}$. Teoreme koje navodimo dokazao je Freedman 1965. godine u [3]. Prvi od njih glasi:

Teorem 3.2. *Neka je W_n broj bijelih kuglica u nedegeneriranoj urni Bernarda Friedmana nakon n izvlačenja. Ako je $\rho < \frac{1}{2}$, onda vrijedi*

$$\frac{W_n - \frac{1}{2}(a+c)n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\text{d}} N\left(0, \frac{(a-c)^2}{4(1-2\rho)}\right).$$

Tvrdnja ovog teorema će biti trivijalna posljedica teorema kojeg ćemo dokazati na samom kraju ovog rada. Sljedeći slučaj koji promatramo je slučaj kada je $\rho = \frac{1}{2}$. Tada vrijedi teorem:

Teorem 3.3. *Neka je W_n broj bijelih kuglica, a G_n broj zelenih kuglica u nedegeneriranoj urni Bernarda Friendmana nakon n izvlačenja. Ako je $\rho = \frac{1}{2}$, onda vrijedi*

$$\frac{W_n - G_n}{\sqrt{n \log n}} \xrightarrow{\text{d}} N(0, (a-c)^2).$$

Zanimljivo je da se u gornjem teoremu u nazivniku lijeve strane ne pojavljuje veličina $\sqrt{n}$, koja je tipična za centralne granične teoreme kod kojih je granična distribucija normalna, nego je ovdje za konvergenciju po distribuciji prema normalnoj razdiobi potrebno dijeljenje s $\sqrt{n \log n}$.

Zadnja situacija koju razmatramo je kada je $\rho > \frac{1}{2}$. U tom slučaju je asimptotsko ponašanje distribucije broja kuglica u urni bitno drugačije nego u slučajevima kada je $\rho \leqslant \frac{1}{2}$. Naime, u tom slučaju vrijedi sljedeći teorem:

Teorem 3.4. *Neka je W_n broj bijelih kuglica, G_n broj zelenih kuglica, a τ_n ukupan broj kuglica u nedegeneriranoj urni Bernarda Friendmana nakon n izvlačenja. Ako je $\rho > \frac{1}{2}$, onda vrijedi*

$$\frac{W_n - G_n}{\tau_n^{\rho}} \xrightarrow{\text{d}} Z,$$

gdje je Z nedegenerirana slučajna varijabla.

O distribuciji slučajne varijable Z se zna jako malo. Može se pokazati da u slučaju kada je $W_0 = G_0$ vrijedi da je Z simetrična slučajna varijabla, ali nije normalna. Kao što smo napomenuli, slučaj kada je $\rho < \frac{1}{2}$ je poseban slučaj Bagchi-Pal modela urne kojeg razmatramo u nastavku rada, a o ostala dva slučaja se više informacija može naći u [3] i [5].

Poglavlje 4

Zakon velikih brojeva za urne

Nakon što smo u prethodnom poglavlju napravili kratak pregled rezultata vezanih uz dva najpoznatija i najvažnija modela urni u literaturi, u ovom dijelu rada počinjemo detaljno proučavati Bagchi-Pal model urne te navodimo rezultat kojeg ćemo zvati slabi zakon velikih brojeva za urne. On govori o tome kako se asimptotski ponaša omjer broja kuglica pojedine boje i broja koraka i to baš u slučaju Bagchi-Pal modela urne koji zadovoljavaju više puta spomenutu pretpostavku (3.2).

Neka je i ovdje W_n i G_n broj bijelih, odnosno zelenih kuglica u urni nakon n izvlačenja te neka je $\tau_n = W_n + G_n$ ukupan broj kuglica u urni nakon n izvlačenja. Budući da mi promatramo klasu urni u kojima je zbroj elemenata u svim recima sheme izmjena jednak, jasno je da se u svakom koraku ukupni broj kuglica u urni poveća za točno K, odnosno λ_1. Dakle, vrijedi

$$\tau_n = Kn + \tau_0 = \lambda_1 n + \tau_0, \tag{4.1}$$

gdje je τ_0 početni broj kuglica u urni. Iz (4.1) trivijalno slijedi

$$\frac{\tau_n}{n} \longrightarrow \lambda_1. \tag{4.2}$$

Označimo s $v = (v_1, v_2)^T$ svojstveni vektor matrice A^T pridružen svojstvenoj vrijednosti λ_1 te s $u = (u_1, u_2)^T$ svojstveni vektor matrice A pridružen svojstvenoj vrijednosti λ_2. Iz tehničkih razloga ćemo pretpostaviti (što možemo napraviti bez smanjenja općenitosti jer ćemo vidjeti da u slučaju koji je nama od interesa vrijedi $v_1+v_2 \neq 0$) da je suma komponenti vektora v jednaka 1. Dakle, za vektore u i v vrijedi

$$\begin{aligned} A^T v &= \lambda_1 v, \\ Au &= \lambda_2 u, \\ v_1 + v_2 &= 1. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Budući da ćemo na jako puno mjesta koristiti spomenute svojstvene vrijednosti λ_1 i λ_2, te pripadne svojstvene vektore u i v, sada ćemo ih eksplicitno izračunati. Neka je

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

matrica za koju vrijedi $a + b = c + d = K$. Odredimo prvo karakteristični polinom te matrice.

$$\begin{aligned} k_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (a-\lambda)(d-\lambda) - bc \\ &= \lambda^2 - a\lambda - d\lambda + ad - bc \\ &= \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad-bc). \end{aligned}$$

Sada koristeći $b = K - a$, $d = K - c$ te činjenicu da su svojstvene vrijednosti matrice zapravo nultočke njenog karakterističnog polinoma imamo

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{(a+d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}}{2} \\ &= \frac{(a+d) \pm \sqrt{a^2 + 2ad + d^2 - 4ad + 4bc}}{2} \\ &= \frac{(a+d) \pm \sqrt{a^2 - 2ad + d^2 + 4bc}}{2} \\ &= \frac{(a+d) \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2} \\ &= \frac{(a+(K-c)) \pm \sqrt{(a+c-K)^2 + 4(K-a)c}}{2} \\ &= \frac{(a+K-c) \pm \sqrt{a^2 + c^2 + K^2 + 2ac - 2aK - 2Kc + 4Kc - 4ac}}{2} \\ &= \frac{(a+K-c) \pm \sqrt{a^2 + c^2 + K^2 - 2ac - 2aK + 2Kc}}{2} \\ &= \frac{(a+K-c) \pm \sqrt{(a-c-K)^2}}{2} \\ &= \frac{(a+K-c) \pm |a-c-K|}{2}. \end{aligned}$$

Dakle, svojstvene vrijednosti su

$$\lambda_1 = \frac{a + K - c - a + c + K}{2} = K,$$

$$\lambda_2 = \frac{a + K - c + a - c - K}{2} = a - c. \tag{4.4}$$

Znamo da za realne matrice vrijedi $\sigma(A) = \sigma(A^T)$ što posebno znači da je λ_1 ujedno i svojstvena vrijednost matrice A^T. Sada ćemo izračunati vektore u i v. Znamo da je vektor v svojstveni vektor matrice A^T pridružen svojstvenoj vrijednosti λ_1, dakle, $v \in \mathrm{Ker}(A^T - \lambda_1 I)$. Analogno, $u \in \mathrm{Ker}(A - \lambda_2 I)$. Vrijedi sljedeće:

$$\begin{aligned}
A^T - \lambda_1 I &= \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - K & c \\ b & d - K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b & c \\ b & -c \end{pmatrix}, \\
A - \lambda_2 I &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - (a - c) & b \\ c & d - (a - c) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & b \\ c & b \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Budući da mi promatramo isključivo modele kod kojih su svi elementi sheme izmjena pozitivni, trivijalno slijedi

$$\begin{aligned}
v &= \left(\frac{c}{b + c}, \frac{b}{b + c} \right)^T, \\
u &= \left(\frac{-b}{c}, 1 \right)^T.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Neka je sada

$$Z_n = \begin{pmatrix} W_n \\ G_n \end{pmatrix}, \quad n \geqslant 0$$

te neka je

$$X_n = u^T Z_n, \quad n \geqslant 0.$$

Uočimo da je za dovoljno velike n, $|X_n|$ ograničen s $C'n$, gdje je $C' = 2\lambda_1 \max\{|u_1|, |u_2|\}$. Naime, vrijedi

$$\begin{aligned}
|X_n| &= |u^T Z_n| \\
&= \left| (u_1, u_2) \begin{pmatrix} W_n \\ G_n \end{pmatrix} \right| \\
&= |u_1 W_n + u_2 G_n| \\
&\leqslant |u_1| W_n + |u_2| G_n \\
&\leqslant \max\{|u_1|, |u_2|\}(W_n + G_n) \\
&= \max\{|u_1|, |u_2|\}\tau_n \\
&= \max\{|u_1|, |u_2|\}(\lambda_1 n + \tau_0) \\
&\leqslant \max\{|u_1|, |u_2|\}(\lambda_1 n + \lambda_1 n)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\max\{|u_1|, |u_2|\}\lambda_1 n \\
&= C'n,
\end{aligned}
$$

pri čemu smo iskoristili da je $\tau_n = \lambda_1 n + \tau_0$ te da je $\tau_0 \leqslant \lambda_1 n$ za dovoljno velike n što je istina jer je $\lambda_1 = a + c$, a pretpostavka je da su svi elementi sheme izmjena pozitivni. Pokazat ćemo da iz ovoga slijedi da postoji konstanta C_1 takva da je $|X_n| \leqslant C_1 n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Neka je $n_1 \in \mathbb{N}$ takav da je $|X_n| \leqslant C'n$ za $n \geqslant n_1$. Definirajmo C'' na sljedeći način

$$C'' := \max\{|X_1|, |X_2|, \ldots, |X_{n_1}|\}.$$

Očito vrijedi

$$|X_n| \leqslant C'' \leqslant C''n, \quad n \leqslant n_1.$$

Znači, imamo

$$
\begin{aligned}
|X_n| &\leqslant C''n, \quad n \leqslant n_1, \\
|X_n| &\leqslant C'n, \quad n \geqslant n_1.
\end{aligned}
$$

Uzmimo sada $C_1 = \max(C', C'')$. Jasno je da tada vrijedi

$$|X_n| \leqslant C_1 n, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{4.6}$$

Označimo s $\mathcal{F}_j$ σ-algebru generiranu s $X_0, X_1, \ldots, X_j$. Sljedeće što želimo izračunati je $\mathbb{E}[\nabla X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}]$, gdje je $\nabla X_n = X_n - X_{n-1}$. U samom računu pojavit će se izrazi $\mathbb{E}[W_n \mid \mathcal{F}_{n-1}]$ i $\mathbb{E}[G_n \mid \mathcal{F}_{n-1}]$ pa ćemo se prvo malo više posvetiti njima. $\mathbb{E}[W_n \mid \mathcal{F}_{n-1}]$ je očekivani broj bijelih kuglica u urni nakon n koraka, ako znamo sve što se događalo do prethodnog koraka, tj. u prvih $n-1$ koraka. Budući da je shema izmjena za našu urnu dana s

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

lako se vidi da je

$$\mathbb{E}[W_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] = W_{n-1} + a\frac{W_{n-1}}{\tau_{n-1}} + c\frac{G_{n-1}}{\tau_{n-1}}. \tag{4.7}$$

Naime, očekivani broj bijelih kuglica u urni nakon n koraka jednak je broju bijelih kuglica u urni nakon $n-1$ koraka (što je upravo W_{n-1}) uvećanom za a ako u n-tom koraku izvučemo bijelu kuglicu, odnosno uvećanom za c ako u n-tom koraku izvučemo zelenu kuglicu. To se jasno vidi iz sheme izmjena. Sada je još samo pitanje kolika je vjerojatnost da mi u n-tom koraku izvučemo bijelu, odnosno zelenu kuglicu. Pa budući da je u trenutku $n-1$ u urni τ_{n-1} kuglica od kojih je W_{n-1} bijelih te G_{n-1} zelenih, a vjerojatnost izvlačenja svake od kuglica je jednaka i iznosi jedan kroz ukupan broj kuglica u urni, očito je vjerojatnost izvlačenja bijele kuglice u n-tom koraku jednaka $\frac{W_{n-1}}{\tau_{n-1}}$, a vjerojatnost izvlačenja zelene kuglice u n-tom koraku je $\frac{G_{n-1}}{\tau_{n-1}}$. Na posve analogan način dolazimo i do relacije

$$\mathbb{E}[G_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] = G_{n-1} + b\frac{W_{n-1}}{\tau_{n-1}} + d\frac{G_{n-1}}{\tau_{n-1}}.$$

Sada smo spremni za računanje izraza $\mathbb{E}[\nabla X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}]$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\nabla X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] &= \mathbb{E}[X_n - X_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1}] \\
&= \mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] - \mathbb{E}[X_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1}] \\
&= \mathbb{E}[u^T Z_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] - X_{n-1} \\
&= \mathbb{E}[u_1 W_n + u_2 G_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] - X_{n-1} \\
&= u_1 \mathbb{E}[W_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] + u_2 \mathbb{E}[G_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] - X_{n-1} \\
&= u_1\left(W_{n-1} + a\frac{W_{n-1}}{\tau_{n-1}} + c\frac{G_{n-1}}{\tau_{n-1}}\right) + u_2\left(G_{n-1} + b\frac{W_{n-1}}{\tau_{n-1}} + d\frac{G_{n-1}}{\tau_{n-1}}\right) - X_{n-1} \\
&= (u_1 W_{n-1} + u_2 G_{n-1}) + \frac{1}{\tau_{n-1}}((u_1 a + u_2 b)W_{n-1} + (u_1 c + u_2 d)G_{n-1}) - X_{n-1} \\
&= X_{n-1} + \frac{1}{\tau_{n-1}}(u_1, u_2)\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} W_{n-1} \\ G_{n-1} \end{pmatrix} - X_{n-1} \\
&= \frac{1}{\tau_{n-1}} u^T A^T Z_{n-1} \\
&= \frac{1}{\tau_{n-1}} (Au)^T Z_{n-1} \\
&= \frac{1}{\tau_{n-1}} (\lambda_2 u)^T Z_{n-1} \\
&= \frac{\lambda_2}{\tau_{n-1}} (u^T Z_{n-1}) \\
&= \frac{\lambda_2}{\tau_{n-1}} X_{n-1}.
\end{aligned}$$

Dakle,

$$\mathbb{E}\left[\nabla X_n - \frac{\lambda_2}{\tau_{n-1}} X_{n-1} \,\middle|\, \mathcal{F}_{n-1}\right] = 0. \tag{4.8}$$

Definirajmo sada slučajni proces $(M_n : n \in \mathbb{N})$ tako da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$M_n = \nabla X_n - \frac{\lambda_2}{\tau_{n-1}} X_{n-1}.$$

Iz (4.8) vidimo da je $\mathbb{E}[M_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] = 0$, tj. da proces $(M_n : n \in \mathbb{N})$ predstavlja martingalne razlike. Također, bitno je uočiti da vrijedi

$$\mathbb{E}[M_n] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[M_n \mid \mathcal{F}_{n-1}]] = 0. \tag{4.9}$$

Sljedeće što želimo je naći konstante $\beta_{j,n} \in \mathbb{R}$, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ takve da izraz

$$V_n = \sum_{j=1}^{n} \beta_{j,n} M_j$$

bude dobra aproksimacija za X_n, tj. želimo da vrijedi

$$V_n = \sum_{j=1}^{n} \beta_{j,n} M_j = X_n + \epsilon_n,$$

gdje je ϵ_n greška koja je dovoljno mala da ne utječe na asimptotske rezultate. Tada će asimptotski rezultat za V_n ujedno biti i asimptotski rezultat za X_n. Uočimo da iz (4.9) i linearnosti očekivanja trivijalno slijedi

$$\mathbb{E}[V_n] = \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{n} \beta_{j,n} M_j\right] = \sum_{j=1}^{n} \beta_{j,n} \mathbb{E}[M_j] = 0. \tag{4.10}$$

Da bismo došli do željene aproksimacije, tj. do koeficijenata $\beta_{j,n}$, izjednačavamo koeficijente uz X_k, $k \in \{0, 1, \ldots n\}$ u izrazu $X_n + \epsilon_n = V_n$. Dakle, imamo

$$\begin{aligned}
X_n + \epsilon_n &= V_n \\
&= \sum_{j=1}^{n} \beta_{j,n} M_j \\
&= \beta_{n,n} M_n + \beta_{n-1,n} M_{n-1} + \beta_{n-2,n} M_{n-2} + \ldots + \beta_{1,n} M_1 \\
&= \beta_{n,n}\left(X_n - X_{n-1} - \frac{\lambda_2}{\tau_{n-1}} X_{n-1}\right) + \beta_{n-1,n}\left(X_{n-1} - X_{n-2} - \frac{\lambda_2}{\tau_{n-2}} X_{n-2}\right) \\
&\quad + \beta_{n-2,n}\left(X_{n-2} - X_{n-3} - \frac{\lambda_2}{\tau_{n-3}} X_{n-3}\right) \\
&\quad \vdots \\
&\quad + \beta_{1,n}\left(X_1 - X_0 - \frac{\lambda_2}{\tau_0} X_0\right).
\end{aligned}$$

Pažljivim izjednačavanjem koeficijenata uz X_k s lijeve i desne strane gornje jednakosti dobivamo

$$X_n = \beta_{n,n} X_n$$

$$
\begin{aligned}
0 &= -\beta_{n,n}X_{n-1} - \beta_{n,n}\frac{\lambda_2}{\tau_{n-1}}X_{n-1} + \beta_{n-1,n}X_{n-1} \\
0 &= -\beta_{n-1,n}X_{n-2} - \beta_{n-1,n}\frac{\lambda_2}{\tau_{n-2}}X_{n-2} + \beta_{n-2,n}X_{n-2} \\
&\vdots \\
\epsilon_n &= -\beta_{1,n}X_0 - \beta_{1,n}\frac{\lambda_2}{\tau_0}X_0. \qquad (4.11)
\end{aligned}
$$

Iz prve jednadžbe, tj. izjednačavanjem koeficijenata uz X_n na lijevoj i desnoj strani dobivamo $\beta_{n,n} = 1$. Druga jednadžba daje

$$
\begin{aligned}
\beta_{n-1,n} &= \beta_{n,n} + \beta_{n,n}\frac{\lambda_2}{\tau_{n-1}} \\
&= \beta_{n,n}\left(1 + \frac{\lambda_2}{\tau_{n-1}}\right) \\
&= 1 + \frac{\lambda_2}{\tau_{n-1}}.
\end{aligned}
$$

Iz treće jednadžbe slijedi

$$
\begin{aligned}
\beta_{n-2,n} &= \beta_{n-1,n} + \beta_{n-1,n}\frac{\lambda_2}{\tau_{n-2}} \\
&= \beta_{n-1,n}\left(1 + \frac{\lambda_2}{\tau_{n-2}}\right) \\
&= \left(1 + \frac{\lambda_2}{\tau_{n-1}}\right)\left(1 + \frac{\lambda_2}{\tau_{n-2}}\right).
\end{aligned}
$$

Lako se vidi da, ako induktivno nastavimo, za ostale $\beta_{j,n}$ dobivamo

$$
\beta_{j,n} = \prod_{k=j}^{n-1}\left(1 + \frac{\lambda_2}{\tau_k}\right). \qquad (4.12)
$$

Na kraju, iz jednakosti (4.11) dobivamo

$$
\begin{aligned}
\epsilon_n &= -\beta_{1,n}X_0 - \beta_{1,n}\frac{\lambda_2}{\tau_0}X_0 \\
&= -\beta_{1,n}X_0\left(1 + \frac{\lambda_2}{\tau_0}\right) \\
&= -X_0\left(1 + \frac{\lambda_2}{\tau_0}\right)\prod_{k=1}^{n-1}\left(1 + \frac{\lambda_2}{\tau_k}\right)
\end{aligned}
$$

$$= -X_0 \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 + \frac{\lambda_2}{\tau_k}\right). \tag{4.13}$$

Sada nas zanima asimptotsko ponašanje koeficijenata $\beta_{j,n}$. Vrijedi sljedeći niz jednakosti

$$\begin{aligned}
\beta_{j,n} &= \prod_{k=j}^{n-1} \left(1 + \frac{\lambda_2}{\tau_k}\right) \\
&= \prod_{k=j}^{n-1} \left(\frac{\tau_k + \lambda_2}{\tau_k}\right) \\
&= \prod_{k=j}^{n-1} \left(\frac{\tau_0 + \lambda_1 k + \lambda_2}{\tau_0 + \lambda_1 k}\right) \\
&= \prod_{k=j}^{n-1} \left(\frac{k + \frac{\tau_0+\lambda_2}{\lambda_1}}{k + \frac{\tau_0}{\lambda_1}}\right) \\
&= \frac{\prod_{k=j}^{n-1} \left(k + \frac{\tau_0+\lambda_2}{\lambda_1}\right)}{\prod_{k=j}^{n-1} \left(k + \frac{\tau_0}{\lambda_1}\right)} \\
&= \frac{\Gamma\left(n + \frac{\tau_0+\lambda_2}{\lambda_1}\right)}{\Gamma\left(n + \frac{\tau_0}{\lambda_1}\right)} \frac{\Gamma\left(j + \frac{\tau_0}{\lambda_1}\right)}{\Gamma\left(j + \frac{\tau_0+\lambda_2}{\lambda_1}\right)}.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Iz Teorema 1.1, tj. iz Napomene 1.2 znamo da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geqslant n_0$ vrijedi

$$\frac{\Gamma\left(n + \frac{\tau_0+\lambda_2}{\lambda_1}\right)}{\Gamma\left(n + \frac{\tau_0}{\lambda_1}\right)} \leqslant C n^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$$

za neku konstantu $C > 0$, pri čemu smo iskoristili

$$\frac{\tau_0 + \lambda_2}{\lambda_1} - \frac{\tau_0}{\lambda_1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}.$$

Sada ćemo ocijeniti koeficijente $\beta_{j,n}$ ovisno o tome da li je $j < n_0$ ili $j \geqslant n_0$. Budući da nas zanimaju asimptotski rezultati kad n teži u beskonačno, uvijek ćemo pretpostavljati da je n dovoljno velik, tj. u ovom slučaju, da je $n \geqslant n_0$. Razmotrimo prvo situaciju kada je $j < n_0$, $n \geqslant n_0$. Definirajmo M na slijedeći način

$$M := \max\left\{\frac{\Gamma\left(j + \frac{\tau_0}{\lambda_1}\right)}{\Gamma\left(j + \frac{\tau_0+\lambda_2}{\lambda_1}\right)}, j = 1, 2, \ldots, n_0 - 1\right\}.$$

Jasno je da za $j < n_0$, $n \geqslant n_0$ vrijedi sljedeće

$$\begin{aligned}\beta_{j,n} &= \frac{\Gamma\Big(n + \frac{\tau_0+\lambda_2}{\lambda_1}\Big)}{\Gamma\Big(n + \frac{\tau_0}{\lambda_1}\Big)} \frac{\Gamma\Big(j + \frac{\tau_0}{\lambda_1}\Big)}{\Gamma\Big(j + \frac{\tau_0+\lambda_2}{\lambda_1}\Big)} \\ &\leqslant M \frac{\Gamma\Big(n + \frac{\tau_0+\lambda_2}{\lambda_1}\Big)}{\Gamma\Big(n + \frac{\tau_0}{\lambda_1}\Big)} \\ &\leqslant MCn^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Iz ovog direktno slijedi da je

$$\beta_{j,n}^2 \leqslant M^2C^2n^{\frac{2\lambda_2}{\lambda_1}} = \widehat{C}n^{\frac{2\lambda_2}{\lambda_1}} \tag{4.16}$$

za neki $\widehat{C} > 0$ i za svaki $j < n_0$, $n \geqslant n_0$. Promotrimo sada detaljnije situaciju kada je $j, n \geqslant n_0$. U toj situaciji opet možemo primijeniti Teorem 1.1 (odnosno Napomenu 1.2) na izraz

$$\frac{\Gamma\Big(n + \frac{\tau_0+\lambda_2}{\lambda_1}\Big)}{\Gamma\Big(n + \frac{\tau_0}{\lambda_1}\Big)},$$

ali ovog puta i na izraz

$$\frac{\Gamma\Big(j + \frac{\tau_0}{\lambda_1}\Big)}{\Gamma\Big(j + \frac{\tau_0+\lambda_2}{\lambda_1}\Big)},$$

čime dobivamo

$$\begin{aligned}\beta_{j,n} &= \frac{\Gamma\Big(n + \frac{\tau_0+\lambda_2}{\lambda_1}\Big)}{\Gamma\Big(n + \frac{\tau_0}{\lambda_1}\Big)} \frac{\Gamma\Big(j + \frac{\tau_0}{\lambda_1}\Big)}{\Gamma\Big(j + \frac{\tau_0+\lambda_2}{\lambda_1}\Big)} \\ &\leqslant Cn^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} C j^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \\ &= C^2 \left(\frac{n}{j}\right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \end{aligned} \tag{4.17}$$

iz čega direktno slijedi

$$\beta_{j,n}^2 \leqslant C^4 \left(\frac{n}{j}\right)^{\frac{2\lambda_2}{\lambda_1}} = \widetilde{C} \left(\frac{n}{j}\right)^{\frac{2\lambda_2}{\lambda_1}} \tag{4.18}$$

za neki $\widetilde{C} > 0$ i za svaki $j \geqslant n_0$, $n \geqslant n_0$. Analogno, također koristeći Teorem 1.1, dobivamo

$$\epsilon_n = O\Big(n^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}\Big). \tag{4.19}$$

Naime, vrijedi sljedeći niz jednakosti

$$
\begin{aligned}
\epsilon_n &\overset{(4.13)}{=} -X_0\left(1+\frac{\lambda_2}{\tau_0}\right)\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{\lambda_2}{\tau_k}\right)\\
&\overset{(4.12)}{=} -X_0\left(1+\frac{\lambda_2}{\tau_0}\right)\beta_{1,n}\\
&\overset{(4.14)}{=} -X_0\left(1+\frac{\lambda_2}{\tau_0}\right)\frac{\Gamma\left(n+\frac{\tau_0+\lambda_2}{\lambda_1}\right)}{\Gamma\left(n+\frac{\tau_0}{\lambda_1}\right)}\frac{\Gamma\left(1+\frac{\tau_0}{\lambda_1}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{\tau_0+\lambda_2}{\lambda_1}\right)}\\
&= \left[-X_0\left(1+\frac{\lambda_2}{\tau_0}\right)\frac{\Gamma\left(1+\frac{\tau_0}{\lambda_1}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{\tau_0+\lambda_2}{\lambda_1}\right)}\right]\frac{\Gamma\left(n+\frac{\tau_0+\lambda_2}{\lambda_1}\right)}{\Gamma\left(n+\frac{\tau_0}{\lambda_1}\right)}\\
&= O\left(n^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}\right).
\end{aligned}
$$

Nakon što smo u (4.16) i (4.18) našli gornje ograde za koeficijente $\beta_{j,n}^2$ spremni smo dokazati jednu tehničku lemu čiji ćemo rezultat iskoristiti na nekoliko različitih mjesta u nastavku rada.

Lema 4.1. *Neka je $\lambda_2 < \frac{1}{2}\lambda_1$. Tada vrijedi*

$$\sum_{j=1}^{n}\beta_{j,n}^2 \leqslant \widetilde{D}n, \quad \forall\, n\in\mathbb{N}$$

gdje je $\widetilde{D} > 0$ neka konstanta.

Dokaz.

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n}\beta_{j,n}^2 &= \sum_{j=1}^{n_0-1}\beta_{j,n}^2 + \sum_{j=n_0}^{n}\beta_{j,n}^2\\
&\leqslant \sum_{j=1}^{n_0-1}\widehat{C}n^{\frac{2\lambda_2}{\lambda_1}} + \sum_{j=n_0}^{n}\widetilde{C}\left(\frac{n}{j}\right)^{\frac{2\lambda_2}{\lambda_1}}\\
&\leqslant \widehat{C}(n_0-1)n^{\frac{2\lambda_2}{\lambda_1}} + \widetilde{C}n^{\frac{2\lambda_2}{\lambda_1}}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{j}\right)^{\frac{2\lambda_2}{\lambda_1}}\\
&\leqslant \widehat{C}(n_0-1)n + \widetilde{C}n^{\frac{2\lambda_2}{\lambda_1}}\frac{2n^{1-\frac{2\lambda_2}{\lambda_1}}}{1-\frac{2\lambda_2}{\lambda_1}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \widehat{C}(n_0 - 1)n + \frac{2\widetilde{C}}{1 - \frac{2\lambda_2}{\lambda_1}} n \\
&= \left(\widehat{C}(n_0 - 1) + \frac{2\widetilde{C}}{1 - \frac{2\lambda_2}{\lambda_1}} \right) n, \qquad (4.20)
\end{aligned}
$$

gdje drugi red slijedi iz (4.16) i (4.18), treći iz činjenice da smo u sumu iz drugog retka dodali nenegativne članove, a četvrti iz pretpostavke da je $\lambda_2 < \frac{1}{2}\lambda_1$ i Leme 1.3. Naime, u Lemi 1.3 je pokazano da vrijedi

$$
\lim_{n \to +\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p}}{\frac{n^{1-p}}{1-p}} = 1
$$

za $p \in \mathbb{R}$, $p < 1$ i $p \neq 0$. Budući da je pretpostavka leme koju dokazujemo da je $\lambda_2 < \frac{1}{2}\lambda_1$ te da je općenita pretpostavka našeg modela da je $\lambda_2 \neq 0$, jer u tom slučaju nemamo nikakvu slučajnu komponentu, zaključujemo da vrijedi

$$
\frac{2\lambda_2}{\lambda_1} \in \mathbb{R}, \frac{2\lambda_2}{\lambda_1} < 1, \frac{2\lambda_2}{\lambda_1} \neq 0
$$

što znači da tvrdnju Leme 1.3 možemo primijeniti za $p = \frac{2\lambda_2}{\lambda_1}$. Dakle, vrijedi

$$
\lim_{n \to +\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{2\lambda_2}{\lambda_1}}}{\frac{n^{1-\frac{2\lambda_2}{\lambda_1}}}{1-\frac{2\lambda_2}{\lambda_1}}} = 1.
$$

To znači da za dovoljno veliki n vrijedi

$$
\frac{\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{2\lambda_2}{\lambda_1}}}{\frac{n^{1-\frac{2\lambda_2}{\lambda_1}}}{1-\frac{2\lambda_2}{\lambda_1}}} \leqslant 2. \qquad (4.21)
$$

što je ekvivalentno s

$$
\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{2\lambda_2}{\lambda_1}} \leqslant \frac{2n^{1-\frac{2\lambda_2}{\lambda_1}}}{1 - \frac{2\lambda_2}{\lambda_1}},
$$

a upravo je to ocjena koju smo iskoristili u četvrtom retku raspisa (4.20). Dakle, tvrdnja leme koju dokazujemo vrijedi za dovoljno velike n-ove. Sada posve analogno kao u dokazu relacije (4.6) možemo pokazati da postoji konstanta $\widetilde{D} > 0$ takva da nejednakost u iskazu leme zaista vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$. □

Zadnja stvar koju moramo pokazati, da bismo bili spremni za dokaz slabog zakona velikih brojeva za proporcije kuglica pojedinih boja u urni, je da uz uvjet $\lambda_2 < \frac{1}{2}\lambda_1$ vrijedi $\frac{V_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ i $\frac{X_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.

Lema 4.2. *Neka je $\lambda_2 < \frac{1}{2}\lambda_1$. Tada vrijedi*

$$\frac{X_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$$

Dokaz. Izračunajmo prvo $\mathrm{Var}(V_n)$. U (4.10) smo vidjeli da je $\mathbb{E}[V_n] = 0$ pa stoga vrijedi

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(V_n) &= \mathbb{E}[V_n^2] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=1}^{n} \beta_{j,n} M_j\right)^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{n} \beta_{j,n}^2 M_j^2\right] + 2\mathbb{E}\left[\sum_{1 \leqslant r < s \leqslant n} \beta_{r,n}\beta_{s,n} M_r M_s\right].
\end{aligned}$$

Uočimo da je drugi član u gornjoj sumi jednak 0. To jasno slijedi iz linearnosti očekivanja i jednakosti

$$\mathbb{E}[\beta_{r,n}\beta_{s,n}M_rM_s] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\beta_{r,n}\beta_{s,n}M_rM_s \mid \mathcal{F}_{s-1}]] = \mathbb{E}[\beta_{r,n}\beta_{s,n}M_r\mathbb{E}[M_s \mid \mathcal{F}_{s-1}]] = 0.$$

Koristeći to dobivamo

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(V_n) &= \sum_{j=1}^{n} \beta_{j,n}^2 \mathbb{E}[M_j^2] \\
&= \sum_{j=1}^{n} \beta_{j,n}^2 \mathbb{E}\left[\left((X_j - X_{j-1}) - \frac{\lambda_2 X_{j-1}}{\tau_{j-1}}\right)^2\right] \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{n} \beta_{j,n}^2 \mathbb{E}\left[\left(|X_j - X_{j-1}| + \frac{|\lambda_2||X_{j-1}|}{\tau_{j-1}}\right)^2\right] \\
&= \beta_{1,n}^2 \mathbb{E}\left[\left(|X_1 - X_0| + \frac{|\lambda_2||X_0|}{\tau_0}\right)^2\right] + \sum_{j=2}^{n} \beta_{j,n}^2 \mathbb{E}\left[\left(|X_j - X_{j-1}| + \frac{|\lambda_2||X_{j-1}|}{\tau_{j-1}}\right)^2\right].
\end{aligned}$$

Uočimo da za svaki $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ vrijedi

$$\begin{aligned}
|X_j - X_{j-1}| &= |u^T Z_j - u^T Z_{j-1}| \\
&= |u^T (Z_j - Z_{j-1})|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left|(u_1, u_2)\left(\begin{pmatrix} W_j \\ G_j \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} W_{j-1} \\ G_{j-1} \end{pmatrix}\right)\right| \\
&= \left|(u_1, u_2)\begin{pmatrix} \nabla W_j \\ \nabla G_j \end{pmatrix}\right| \\
&= |u_1 \nabla W_j + u_2 \nabla G_j| \\
&\leqslant |u_1||\nabla W_j| + |u_2||\nabla G_j|
\end{aligned}
$$

Neka je sada

$$
\begin{aligned}
D_1 &= \max\{|u_1|, |u_2|\} \\
D_2 &= \max\{|a|, |b|, |c|, |d|\}
\end{aligned}
$$

Budući da je $|\nabla W_j| \leqslant D_2$ i $|\nabla G_j| \leqslant D_2$ slijedi da je

$$
|X_j - X_{j-1}| \leqslant D_1 D_2 + D_1 D_2 =: D, \quad j \in \{1, 2, \ldots, n\}.
$$

Prije nego se vratimo izrazu za $\mathrm{Var}(V_n)$, uočimo da vrijedi i

$$
\begin{aligned}
|X_0| &= |u^T Z_0| \\
&= \left|(u_1, u_2)\begin{pmatrix} W_0 \\ G_0 \end{pmatrix}\right| \\
&= |u_1 W_0 + u_2 G_0| \\
&\leqslant |u_1||W_0| + |u_2||G_0| \\
&\leqslant D_1(W_0 + G_0) \\
&= D_1 \tau_0.
\end{aligned}
$$

Iz relacije (4.6) znamo da je

$$
|X_{j-1}| \leqslant C_1(j-1), \quad j \in \{2, 3, \ldots, n\}
$$

pa je

$$
\begin{aligned}
\frac{|X_{j-1}|}{\tau_{j-1}} &\leqslant \frac{C_1(j-1)}{\tau_0 + \lambda_1(j-1)} \\
&\leqslant \frac{C_1(j-1)}{\lambda_1(j-1)} \\
&= \frac{C_1}{\lambda_1}, \quad j \in \{2, 3, \ldots, n\}.
\end{aligned}
$$

Koristeći gornje relacije dobivamo

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(V_n) &\leqslant \beta_{1,n}^2 \mathbb{E}\left[D + \frac{|\lambda_2| D_1 \tau_0}{\tau_0}\right] + \sum_{j=2}^{n} \beta_{j,n}^2 \mathbb{E}\left[D + \frac{|\lambda_2| C_1}{\lambda_1}\right] \\
&= \beta_{1,n}^2 \mathbb{E}\left[D + |\lambda_2| D_1\right] + \sum_{j=2}^{n} \beta_{j,n}^2 \mathbb{E}\left[D + \frac{|\lambda_2| C_1}{\lambda_1}\right] \\
&= (D + |\lambda_2| D_1)\beta_{1,n}^2 + \left(D + \frac{|\lambda_2| C_1}{\lambda_1}\right) \sum_{j=2}^{n} \beta_{j,n}^2.
\end{aligned}$$

Neka je sada

$$C_2 = \max\left\{D + |\lambda_2| D_1, D + \frac{|\lambda_2| C_1}{\lambda_1}\right\}.$$

Očito za konstantu C_2 vrijedi

$$\mathrm{Var}(V_n) \leqslant C_2 \sum_{j=1}^{n} \beta_{j,n}^2.$$

Iz gornje nejednakosti i Leme 4.1 direktno slijedi

$$\mathrm{Var}(V_n) \leqslant C_2 \sum_{j=1}^{n} \beta_{j,n}^2 \leqslant C_2 \widetilde{D} n = C_3 n.$$

Sada iz Čebiševljeve nejednakosti slijedi

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{V_n}{n}\right| > \epsilon\right) = \mathbb{P}\left(|V_n - \mathbb{E}[V_n]| > n\epsilon\right) \leqslant \frac{\mathrm{Var}(V_n)}{(n\epsilon)^2} \leqslant \frac{C_3 n}{n^2 \epsilon^2} = \frac{C_3}{n\epsilon^2} \longrightarrow 0,$$

tj.

$$\frac{V_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0. \tag{4.22}$$

Direktna posljedica (4.22) je

$$\frac{X_n}{n} = \frac{V_n - \epsilon_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$$

jer još iz (4.19) znamo da je $\epsilon_n = \mathcal{O}\left(n^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}\right) = o(n)$ jer je $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 1$. □

Sada smo spremni za dokaz glavnog teorema u ovom odjeljku. Pretpostavka tog teorema je da vrijedi $\lambda_2 < \frac{1}{2}\lambda_1$. Kao što smo ranije spomenuli, taj uvjet možemo iskazati i u terminima matričnih elemenata sheme izmjena i on glasi

$$a - c < \frac{1}{2}(a + b).$$

Teorem 4.3. *Neka je W_n broj bijelih kuglica, a G_n broj zelenih kuglica u Bagchi-Pal modelu urne nakon n izvlačenja. Neka su λ_1, λ_2, u i v kao u* (4.3) *te neka je $\lambda_2 < \frac{1}{2}\lambda_1$. Tada vrijedi*

$$\frac{W_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \lambda_1 v_1,$$
$$\frac{G_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \lambda_1 v_2.$$

Dokaz. Označimo s e vektor $(1,1)^T$. Lako se vidi da je vektor u linearno nezavisan od vektora e. Naime, pokazali smo da vrijedi $u = \left(\frac{-b}{c}, 1\right)^T$, a pretpostavka našeg modela je da su svi elementi sheme izmjena pozitivni. Dakle, trivijalno slijedi da vektori u i e zaista jesu linearno nezavisni, tj. da čine bazu vektorskog prostora $\mathbb{R}^2$. Prema tome, za proizvoljan vektor $y = (y_1, y_2)^T \in \mathbb{R}^2$ postoje jedinstveni skalari $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ takvi da vrijedi

$$y = \alpha_1 e + \alpha_2 u. \tag{4.23}$$

Sada iz (4.23), pretpostavke da je suma komponenti vektora v jednaka 1 i činjenice da su vektori u i v okomiti (što se trivijalno vidi iz (4.5)) dobivamo

$$y^T v = (\alpha_1 e + \alpha_2 u)^T v = \alpha_1 e^T v + \alpha_2 u^T v = \alpha_1(v_1 + v_2) + 0 = \alpha_1. \tag{4.24}$$

Koristeći (4.23) i (4.24) dobivamo

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n} y^T Z_n &= \frac{1}{n}(\alpha_1 e + \alpha_2 u)^T Z_n \\
&= \frac{1}{n}\alpha_1 e^T Z_n + \frac{1}{n}\alpha_2 u^T Z_n \\
&= \frac{1}{n} y^T v e^T \begin{pmatrix} W_n \\ G_n \end{pmatrix} + \frac{1}{n}\alpha_2 X_n \\
&= \frac{1}{n} y^T v (W_n + G_n) + \alpha_2 \frac{X_n}{n} \\
&= \frac{\tau_n}{n} y^T v + \alpha_2 \frac{X_n}{n}.
\end{aligned}$$

Iz relacije (4.2) i Leme 4.2 slijedi

$$\frac{1}{n} y^T Z_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \lambda_1 y^T v.$$

Budući da je y bio proizvoljan vektor, možemo umjesto njega uvrstiti bilo koji vektor iz $\mathbb{R}^2$. Sada trivijalno uvrštavanjem vektora $(1,0)^T$, odnosno $(0,1)^T$ dobivamo tvrdnju teorema. $\square$

Napomena 4.4. *Kao što smo prije samog iskaza i dokaza gornjeg teorema iskazali pretpostavku $\lambda_2 < \frac{1}{2}\lambda_1$ u terminima matričnih elemenata sheme izmjena, možemo i samu tvrdnju teorema također iskazati u terminima matričnih elemenata sheme izmjena. Iz* (4.4) *i* (4.5) *se lako vidi da je*

$$\lambda_1 v_1 = \frac{(a+b)\,c}{b+c}$$
$$\lambda_1 v_2 = \frac{(a+b)\,b}{b+c}.$$

Dakle, gornji teorem tvrdi da ako je

$$a - c < \frac{1}{2}(a+b)$$

onda vrijedi

$$\frac{W_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \frac{(a+b)\,c}{b+c},$$
$$\frac{G_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \frac{(a+b)\,b}{b+c}.$$

Na kraju ovog poglavlja navest ćemo jedan korolar Teorema 4.3 čija tvrdnja će nam kasnije trebati.

Korolar 4.5. *Neka je W_n broj bijelih, G_n broj zelenih te $\tau_n = W_n + G_n$ ukupan broj kuglica u Bagchi-Pal modelu urne nakon n izvlačenja. Neka su λ_1, λ_2, u i v kao u* (4.3) *te neka je $\lambda_2 < \frac{1}{2}\lambda_1$. Tada vrijedi*

$$\frac{W_{n-1}}{\tau_{n-1}} \xrightarrow{\mathbb{P}} v_1$$
$$\frac{G_{n-1}}{\tau_{n-1}} \xrightarrow{\mathbb{P}} v_2.$$

Dokaz. Iz Teorema 4.3 i relacije (4.2) trivijalno slijedi

$$\frac{W_{n-1}}{\tau_{n-1}} = \frac{W_{n-1}}{n-1}\frac{n-1}{\tau_{n-1}} \xrightarrow{\mathbb{P}} \lambda_1 v_1 \frac{1}{\lambda_1} = v_1$$
$$\frac{G_{n-1}}{\tau_{n-1}} = \frac{G_{n-1}}{n-1}\frac{n-1}{\tau_{n-1}} \xrightarrow{\mathbb{P}} \lambda_1 v_2 \frac{1}{\lambda_1} = v_2.$$

□

Poglavlje 5

Centralni granični teorem za urne

U ovom poglavlju, baš kao i u prošlom, promatramo determinističku, dikromatsku Bagchi-Pal urnu za čiju shemu izmjena vrijedi da su joj svi elementi pozitivni te da ima dvije realne svojstvene vrijednosti λ_1 i λ_2 koje zadovoljavaju nejednakost $\lambda_1 > 2\lambda_2$. Nakon što smo uspjeli pronaći slabi zakon velikih brojeva za broj kuglica u urni nakon velikog broja izvlačenja, želimo pronaći i neku verziju centralnog graničnog teorema za broj kuglica određene boje u urni. Bez smanjenja općenitosti promatramo ponašanje broja bijelih kuglica.

Neka je

$$W_n^* = W_n - v_1\tau_n. \tag{5.1}$$

Budući da vrijedi

$$\frac{W_n^*}{n} = \frac{W_n - v_1\tau_n}{n} = \frac{W_n}{n} - \frac{v_1\tau_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \lambda_1 v_1 - v_1\lambda_1 = 0,$$

vrijednosti W_n^* možemo promatrati kao asimptotski centrirane vrijednosti W_n. Naš cilj je pronaći koeficijente $\beta_{j,n}^* \in \mathbb{R}$ i niz martingalnih razlika $(M_j^* : j \in \mathbb{N})$ tako da izraz

$$V_n^* = \sum_{j=1}^{n} \beta_{j,n}^* M_j^*$$

bude dobra aproksimacija za vrijednost W_n^*, tj. želimo da vrijedi $V_n^* = W_n^* + \epsilon_n^*$, gdje je ϵ_n^* greška koja je dovoljno mala da ne utječe na asimptotske rezultate. Do koeficijenata $\beta_{j,n}^*$ te vrijednosti ϵ_n^* dolazimo posve analogno kao do koeficijenata $\beta_{j,n}$ u prošlom poglavlju. Tim postupkom dobivamo

$$\beta_{j,n}^* = \prod_{k=j}^{n-1} \left(1 + \frac{\lambda_2}{\tau_k}\right) = \beta_{j,n} \tag{5.2}$$

te posebno za ϵ_n^*

$$\epsilon_n^* = -X_0 \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 + \frac{\lambda_2}{\tau_k}\right) = \epsilon_n. \tag{5.3}$$

Uočimo prvo da je vrijednost W_n linearno ograničena. Naime, vrijedi

$$W_n \leqslant \tau_n = \tau_0 + \lambda_1 n \leqslant 2\lambda_1 n, \quad n > n_1.$$

Sada definiramo $\tilde{C}$ na sljedeći način

$$\tilde{C} := \max\{W_1, W_2, \dots, W_{n_1}\}.$$

Jasno je da vrijedi

$$\begin{aligned} W_n &\leqslant \tilde{C} n, \quad n \leqslant n_1 \\ W_n &\leqslant 2\lambda_1 n, \quad n > n_1. \end{aligned}$$

Ako sada definiramo C_4 kao

$$C_4 := \max\{\tilde{C}, 2\lambda_1\},$$

imamo

$$W_n \leqslant C_4 n, \quad n \geqslant 1.$$

U (4.7) smo pokazali da vrijedi:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[W_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] &= W_{n-1} + a\frac{W_{n-1}}{\tau_{n-1}} + c\frac{G_{n-1}}{\tau_{n-1}} \\ &= W_{n-1} + a\frac{W_{n-1}}{\tau_{n-1}} + c\frac{\tau_{n-1} - W_{n-1}}{\tau_{n-1}}. \end{aligned}$$

Iz gornje jednakosti i formule (5.1) slijedi

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[W_n^* + v_1\tau_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] &= W_{n-1}^* + v_1\tau_{n-1} + a\frac{W_{n-1}^* + v_1\tau_{n-1}}{\tau_{n-1}} + c\frac{\tau_{n-1} - W_{n-1}^* - v_1\tau_{n-1}}{\tau_{n-1}} \\ &= W_{n-1}^* + v_1\tau_{n-1} + a\frac{W_{n-1}^*}{\tau_{n-1}} + av_1 + c - c\frac{W_{n-1}^*}{\tau_{n-1}} - cv_1 \\ &= W_{n-1}^* + v_1\tau_{n-1} + (a-c)\frac{W_{n-1}^*}{\tau_{n-1}} + (a-c)v_1 + c. \end{aligned}$$

Prebacivanjem izraza W_{n-1}^* na lijevu stranu, a izraza $v_1\tau_n$ na desnu stranu te korištenjem jednakosti $\lambda_1 = K$, $\lambda_2 = a - c$ i $v_1 = \frac{c}{K-a+c}$ dobivamo

$$\mathbb{E}[W_n^* - W_{n-1}^* \mid \mathcal{F}_{n-1}] = v_1(\tau_{n-1} - \tau_n) + (a-c)\frac{W_{n-1}^*}{\tau_{n-1}} + (a-c)v_1 + c$$

$$
\begin{aligned}
&= -\lambda_1 v_1 + (a-c)\frac{W^*_{n-1}}{\tau_{n-1}} + (a-c)v_1 + c \\
&= -\frac{Kc}{K-a+c} + \lambda_2 \frac{W^*_{n-1}}{\tau_{n-1}} + \frac{(a-c)c}{K-a+c} + c \\
&= \lambda_2 \frac{W^*_{n-1}}{\tau_{n-1}} + \frac{ac-c^2-Kc}{K-a+c} + c \\
&= \lambda_2 \frac{W^*_{n-1}}{\tau_{n-1}} + \frac{c(-K+a-c)}{K-a+c} + c \\
&= \lambda_2 \frac{W^*_{n-1}}{\tau_{n-1}} - c + c \\
&= \lambda_2 \frac{W^*_{n-1}}{\tau_{n-1}}
\end{aligned}
$$

Sada definiramo

$$
M^*_n := \nabla W^*_n - \frac{\lambda_2}{\tau_{n-1}} W^*_{n-1}.
$$

Budući da vrijedi $\mathbb{E}[M^*_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] = 0$ zaključujemo da je $(M^*_n : n \in \mathbb{N})$ niz martingalnih razlika. Vrijednosti M^*_n su uniformno ograničene. Naime, vrijedi

$$
\begin{aligned}
|M^*_n| &\leqslant |\nabla W^*_n| + \frac{|\lambda_2|}{\tau_{n-1}} |W^*_{n-1}| && (5.4) \\
&= |W^*_n - W^*_{n-1}| + \frac{|\lambda_2|}{\tau_{n-1}} |W_{n-1} - v_1 \tau_{n-1}| \\
&\leqslant |W_n - v_1\tau_n - W_{n-1} + v_1 \tau_{n-1}| + \frac{|\lambda_2|}{\tau_{n-1}} (|W_{n-1}| + |v_1 \tau_{n-1}|) \\
&= |\nabla W_n - v_1 \nabla \tau_n| + \frac{|\lambda_2|}{\tau_{n-1}} (W_{n-1} + v_1 \tau_{n-1}) \\
&\leqslant |\nabla W_n| + v_1 \nabla \tau_n + |\lambda_2| \frac{W_{n-1}}{\tau_{n-1}} + |\lambda_2| \frac{v_1 \tau_{n-1}}{\tau_{n-1}} \\
&\leqslant \max\{|a|, |c|\} + v_1 \lambda_1 + |\lambda_2|(1 + v_1) =: C_5. && (5.5)
\end{aligned}
$$

Sada ćemo izračunati i uvjetne druge momente izraza M^*_n što će nam kasnije biti korisno.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[(M^*_n)^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}] =& \mathbb{E}[(\nabla W^*_n - \frac{\lambda_2}{\tau_{n-1}} W^*_{n-1})^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}] \\
=& \mathbb{E}[(\nabla W^*_n)^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}] + \frac{\lambda_2^2}{\tau_{n-1}^2} \mathbb{E}[(W^*_{n-1})^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}] - \frac{2\lambda_2}{\tau_{n-1}} \mathbb{E}[\nabla W^*_n W^*_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1}] \\
=& \mathbb{E}[(\nabla W_n - v_1 \nabla \tau_n)^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}] + \frac{\lambda_2^2 (W^*_{n-1})^2}{\tau_{n-1}^2} - \frac{2\lambda_2 W^*_{n-1}}{\tau_{n-1}} \mathbb{E}[\nabla W^*_n \mid \mathcal{F}_{n-1}]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&=\mathbb{E}[(\nabla W_n)^2 - 2\lambda_1 v_1 \nabla W_n + \lambda_1^2 v_1^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}] + \frac{\lambda_2^2 (W_{n-1}^*)^2}{\tau_{n-1}^2} \\
&- \frac{2\lambda_2 W_{n-1}^*}{\tau_{n-1}} \mathbb{E}[\nabla W_n - v_1 \nabla \tau_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] \\
&=\mathbb{E}[(\nabla W_n)^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}] - 2\lambda_1 v_1 \mathbb{E}[\nabla W_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] + \lambda_1^2 v_1^2 + \frac{\lambda_2^2 (W_{n-1}^*)^2}{\tau_{n-1}^2} \\
&- \frac{2\lambda_2 W_{n-1}^*}{\tau_{n-1}} (\mathbb{E}[\nabla W_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] - \lambda_1 v_1) \\
&=\mathbb{E}[(\nabla W_n)^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}] - \left(2\lambda_1 v_1 + \frac{2\lambda_2 W_{n-1}^*}{\tau_{n-1}}\right) \mathbb{E}[\nabla W_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] \\
&+ \lambda_1^2 v_1^2 + \frac{\lambda_2^2 (W_{n-1}^*)^2}{\tau_{n-1}^2} + \frac{2\lambda_1 \lambda_2 v_1 W_{n-1}^*}{\tau_{n-1}} \\
&=\left(a^2 \frac{W_{n-1}}{\tau_{n-1}} + c^2 \frac{G_{n-1}}{\tau_{n-1}}\right) - \left(2\lambda_1 v_1 + \frac{2\lambda_2 W_{n-1}^*}{\tau_{n-1}}\right)\left(a\frac{W_{n-1}}{\tau_{n-1}} + c\frac{G_{n-1}}{\tau_{n-1}}\right) \\
&+ \lambda_1^2 v_1^2 + \frac{\lambda_2^2 (W_{n-1}^*)^2}{\tau_{n-1}^2} + \frac{2\lambda_1 \lambda_2 v_1 W_{n-1}^*}{\tau_{n-1}}.
\end{aligned}
$$

Pogledajmo sada kako se asimptotski ponaša uvjetni drugi moment od M_n^*. Da bismo to odredili, moramo prvo izračunati kako se asimptotski ponašaju pojedini dijelovi izraza za $\mathbb{E}[(M_n^*)^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}]$. Iz Korolara 4.5 znamo da vrijedi

$$
\begin{aligned}
\frac{W_{n-1}}{\tau_{n-1}} &\xrightarrow{\mathbb{P}} v_1 \\
\frac{G_{n-1}}{\tau_{n-1}} &\xrightarrow{\mathbb{P}} v_2.
\end{aligned}
$$

Osim toga, vrijedi i

$$
\begin{aligned}
\frac{W_{n-1}^*}{\tau_{n-1}} &= \frac{W_{n-1}^*}{n-1} \frac{n-1}{\tau_{n-1}} \\
&= \frac{W_{n-1} - v_1 \tau_{n-1}}{n-1} \frac{n-1}{\tau_{n-1}} \\
&= \left(\frac{W_{n-1}}{n-1} - v_1 \frac{\tau_{n-1}}{n-1}\right) \frac{n-1}{\tau_{n-1}} \xrightarrow{\mathbb{P}} (\lambda_1 v_1 - v_1 \lambda_1) \frac{1}{\lambda_1} = 0,
\end{aligned}
$$

iz čega odmah slijedi i

$$
\left(\frac{W_{n-1}^*}{\tau_{n-1}}\right)^2 \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.
$$

Primjenom navedenih asimptotskih rezultata dobivamo

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[(M_n^*)^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}] \xrightarrow{\mathbb{P}} &(a^2 v_1 + c^2 v_2) - (2\lambda_1 v_1 + 2\lambda_2 \cdot 0)(a v_1 + c v_2) \\
&+ \lambda_1^2 v_1^2 + \lambda_2^2 \cdot 0 + 2\lambda_1\lambda_2 v_1 \cdot 0 \\
&= (a^2 v_1 + c^2 v_2) - 2\lambda_1 v_1 (a v_1 + c v_2) + \lambda_1^2 v_1^2 \\
&= a^2 v_1 + c^2 v_2 - 2\lambda_1 a v_1^2 - 2\lambda_1 c v_1 v_2 + \lambda_1^2 v_1^2 \\
&= a v_1 (a - 2\lambda_1 v_1) + c v_2 (c - 2\lambda_1 v_1) + \lambda_1^2 v_1^2 \\
&=: C_6.
\end{aligned} \tag{5.6}
$$

Polako se približavamo najvažnijem rezultatu ovog rada, a kao što smo već naveli, za taj rezultat će nam biti potreban korolar centralnog graničnog teorema za martingale (Korolar 2.7). Vidjeli smo da se tvrdnje Teorema 2.6 i Korolara 2.7 odnose na martingalne nizove. Upravo zato je naš sljedeći cilj definirati dvostruki niz slučajnih varijabli i σ-algebri te pokazati da se zaista radi o martingalnom nizu i da taj martingalni niz zadovoljava sve pretpostavke Korolara 2.7.

Neka je $(X_{n,i}, \mathcal{F}_{n,i}, 1 \leqslant i \leqslant k_n, n \geqslant 1)$ dvostruki niz slučajnih varijabli i σ-algebri pri čemu je

$$
\begin{aligned}
k_n &= n, \quad n \geqslant 1, \\
X_{n,i} &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{i} \beta_{j,n}^* M_j^*, \quad 1 \leqslant i \leqslant n, n \geqslant 1, \\
\mathcal{F}_{n,i} &= \mathcal{F}_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant n, n \geqslant 1.
\end{aligned}
$$

Dodatno stavljamo $X_{n0} = 0$, $n \geqslant 1$ te $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$. Pokažimo prvo da $(X_{n,i}, \mathcal{F}_{n,i}, 1 \leqslant i \leqslant n, n \geqslant 1)$ zaista je martingalni niz, tj. da je za svaki $n \geqslant 1$, niz $(X_{n,i}, \mathcal{F}_{n,i}, 1 \leqslant i \leqslant n)$ martingal.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_{n,i} \mid \mathcal{F}_{n,i-1}] &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{i} \beta_{j,n}^* M_j^* \,\middle|\, \mathcal{F}_{i-1} \right] \\
&= \mathbb{E}\left[\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{j,n}^* M_j^* + \frac{1}{\sqrt{n}} \beta_{i,n}^* M_i^* \,\middle|\, \mathcal{F}_{i-1} \right] \\
&= \mathbb{E}\left[\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{j,n}^* M_j^* \,\middle|\, \mathcal{F}_{i-1} \right] + \mathbb{E}\left[\frac{1}{\sqrt{n}} \beta_{i,n}^* M_i^* \,\middle|\, \mathcal{F}_{i-1} \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{j,n}^* M_j^* + \frac{1}{\sqrt{n}} \beta_{i,n}^* \mathbb{E}\left[M_i^* \mid \mathcal{F}_{i-1} \right]
\end{aligned}
$$

$$= X_{n,i-1},$$

gdje predzadnja jednakost slijedi iz činjenice da su slučajne varijable $M_1^*, M_2^*, \ldots, M_{i-1}^*$ $\mathcal{F}_{i-1}$ izmjerive, a zadnja jednakost slijedi iz činjenice da je $(M_n^* : n \geqslant 1)$ niz martingalnih razlika, tj. iz činjenice da je $\mathbb{E}[M_i^* \mid \mathcal{F}_{i-1}] = 0$ i definicije od $X_{n,i}$. Budući da se, iz načina na koji smo definirali k_n, $n \geqslant 1$ te $\mathcal{F}_{n,i}$, $1 \leqslant i \leqslant k_n$, $n \geqslant 1$, trivijalno vidi da $(k_n : n \in \mathbb{N})$ zaista je rastući niz prirodnih brojeva za koji vrijedi $\lim_{n\to+\infty} k_n = +\infty$, te da dvostruki niz σ-algebri $(\mathcal{F}_{n,i}, 1 \leqslant i \leqslant k_n, n \geqslant 1)$ zadovoljava $\mathcal{F}_{n,i} \subseteq \mathcal{F}_{n+1,i}$, $1 \leqslant i \leqslant k_n$, $n \geqslant 1$, iz Definicije 2.4 slijedi da $(X_{n,i}, \mathcal{F}_{n,i}, 1 \leqslant i \leqslant n, n \geqslant 1)$ zaista je martingalni niz.

Sada krećemo na dokazivanje svih pretpostavki Korolara 2.7. Prvo dokazujemo da naš martingalni niz ima očekivanje 0.

$$\mathbb{E}[X_{n,i}] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{i} \beta_{j,n}^* M_j^*\right] = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{i} \beta_{j,n}^* \mathbb{E}[M_j^*] = 0,$$

gdje smo iskoristili linearnost očekivanja i relaciju

$$\mathbb{E}[M_n^*] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[M_n^* \mid \mathcal{F}_{n-1}]] = 0.$$

Sljedeća pretpostavka Korolara 2.7 je da je naš martingalni niz kvadratno-integrabilan.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_{n,i}^2] &= \mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{i} \beta_{j,n}^* M_j^*\right)^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{i} (\beta_{j,n}^*)^2 (M_j^*)^2 + \frac{2}{n} \sum_{1 \leqslant r < s \leqslant i} \beta_{r,n}^* \beta_{s,n}^* M_r^* M_s^*\right] \\
&= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{i} (\beta_{j,n}^*)^2 \mathbb{E}[(M_j^*)^2] + \frac{2}{n} \sum_{1 \leqslant r < s \leqslant i} \beta_{r,n}^* \beta_{s,n}^* \mathbb{E}[M_r^* M_s^*] \\
&= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{i} (\beta_{j,n}^*)^2 \mathbb{E}[(M_j^*)^2] \\
&\leqslant \frac{C_5^2}{n} \sum_{j=1}^{i} (\beta_{j,n}^*)^2 \\
&\leqslant \frac{C_5^2}{n} \sum_{j=1}^{n} (\beta_{j,n}^*)^2 \\
&\leqslant \frac{C_5^2}{n} \widetilde{D} n
\end{aligned}$$

$$= C_5^2 \widetilde{D} < +\infty. \tag{5.7}$$

gdje četvrta jednakost slijedi iz

$$\mathbb{E}[M_r^* M_s^*] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[M_r^* M_s^* \mid \mathcal{F}_{s-1}]] = \mathbb{E}[M_r^* \mathbb{E}[M_s^* \mid \mathcal{F}_{s-1}]] = 0.$$

Nejednakost u petom redu gornjeg raspisa slijedi iz (5.4). Naime, u (5.4) je pokazano da je $|M_n^*| \leqslant C_5$ što znači da je $(M_n^*)^2 = |M_n^*|^2 \leqslant C_5^2$ pa je i $\mathbb{E}[(M_n^*)^2] \leqslant C_5^2$. Nejednakost u sljedećem redu vrijedi jer smo u sumu iz prethodnog retka dodali nenegativne članove. Posljednja nejednakost slijedi iz (5.2) i Leme 4.1. Dakle, naš martingalni niz zaista je kvadratno-integrabilan. Sljedeća pretpostavka Korolara 2.7 je pretpostavka (2.4), u literaturi poznata kao uvjetni Lindebergov uvjet. Da bismo pokazali da je uvjetni Lindebergov uvjet u našem slučaju zaista ispunjen, iskoristit ćemo činjenicu da naš martingalni niz $(X_{n,i}, \mathcal{F}_{n,i}, 1 \leqslant i \leqslant n, n \geqslant 1)$, odnosno pripadni niz martingalnih razlika $(S_{n,i}, 1 \leqslant i \leqslant n, n \geqslant 1)$, zadovoljava relaciju

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} |S_{n,i}| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0. \tag{5.8}$$

Prvo ćemo dokazati relaciju (5.8), a zatim ćemo pokazati kako iz nje slijedi uvjetni Lindebergov uvjet. Dakle, sada ćemo malo detaljnije pogledati kako se ponašaju moduli martingalnih razlika za neki fiksni n. Budući da nas, kao i do sada, zanimaju samo veliki n-ovi, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $n \geqslant n_0$. Promatrat ćemo dva slučaja i pritom koristiti relacije (4.15) i (4.17). Neka je prvo $i < n_0$, $n \geqslant n_0$. Tada vrijedi

$$\begin{aligned}
|S_{n,i}| &= |X_{n,i} - X_{n,i-1}| \\
&= \left| \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{i} \beta_{j,n}^* M_j^* - \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{j,n}^* M_j^* \right| \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} |\beta_{i,n}^* M_i^*| \\
&\leqslant \frac{C_5}{\sqrt{n}} |\beta_{i,n}| \\
&\leqslant \frac{C_5}{\sqrt{n}} M C n^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \\
&= C_5 M C n^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1} - \frac{1}{2}},
\end{aligned} \tag{5.9}$$

gdje četvrti redak slijedi iz relacija (5.2) i (5.4), a peti redak iz relacije (4.15). Slučaj kada su $i, n \geqslant n_0$ ćemo rastaviti na dva podslučaja s obzirom na to da li je $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} > 0$ ili $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 0$. Pretpostavimo da je $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} > 0$. Tada imamo

$$|S_{n,i}| = \frac{1}{\sqrt{n}} |\beta_{i,n}^* M_i^*|$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \frac{C_5}{\sqrt{n}}|\beta_{i,n}| \\
&\leqslant \frac{C_5}{\sqrt{n}}C^2\left(\frac{n}{i}\right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \\
&\leqslant \frac{C_5}{\sqrt{n}}C^2 n^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \\
&= C_5 C^2 n^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}-\frac{1}{2}},
\end{aligned} \tag{5.10}
$$

gdje drugi redak slijedi iz relacija (5.2) i (5.4), treći redak iz relacije (4.17), a četvrti redak iz činjenice da je preslikavanje $x \mapsto x^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$ rastuće na $\langle 0, +\infty\rangle$ u slučaju kada je $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} > 0$. Ukoliko je $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 0$ onda vrijedi

$$
\begin{aligned}
|S_{n,i}| &= \frac{1}{\sqrt{n}}|\beta^*_{i,n}M^*_i| \\
&\leqslant \frac{C_5}{\sqrt{n}}|\beta_{i,n}| \\
&\leqslant \frac{C_5}{\sqrt{n}}C^2\left(\frac{n}{i}\right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \\
&\leqslant \frac{C_5}{\sqrt{n}}C^2 1^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \\
&= C_5 C^2 n^{-\frac{1}{2}},
\end{aligned} \tag{5.11}
$$

gdje predzadnji redak slijedi iz činjenice da je preslikavanje $x \mapsto x^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$ padajuće na $\langle 0, +\infty\rangle$ u slučaju kada je $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 0$. Budući da je pretpostavka našeg modela da je $\lambda_2 < \frac{1}{2}\lambda_1$, tj. $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} < \frac{1}{2}$, na temelju relacija (5.9), (5.10) i (5.11) zaključujemo da je

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}|S_{n,i}| \leqslant D' n^{\alpha}$$

za neku konstantu $D' > 0$ i neki $\alpha < 0$ iz čega posebno slijedi i

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}|S_{n,i}| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \tag{5.12}$$

što smo i htjeli pokazati. Sada smo spremni pokazati da naš martingalni niz $(X_{n,i}, \mathcal{F}_{n,i}, 1 \leqslant i \leqslant n, n \geqslant 1)$, odnosno pripadni niz martingalnih razlika $(S_{n,i}, 1 \leqslant i \leqslant n, n \geqslant 1)$ zadovoljava uvjetni Lindebergov uvjet. Budući da je $S^2_{n,i} \geqslant 0$, te da za svako $\epsilon > 0$ vrijedi

$$\{|S_{n,i}| > \epsilon\} \subseteq \{\max_{1\leqslant i\leqslant n}|S_{n,i}| > \epsilon\} =: A_n, \quad \forall\, i \in \{1, 2, \ldots, n\},$$

slijedi da je

$$S_{n,i}^2 \mathbb{1}_{\{|S_{n,i}|>\epsilon\}} \leqslant S_{n,i}^2 \mathbb{1}_{A_n}, \quad \forall\, i \in \{1,2,\ldots,n\}.$$

Sada imamo

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[S_{n,i}^2 \mathbb{1}_{\{|S_{n,i}|>\epsilon\}}] &\leqslant \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[S_{n,i}^2 \mathbb{1}_{A_n}] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\beta_{i,n}^* M_i^*\right)^2 \mathbb{1}_{A_n}\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\beta_{i,n}^2 (M_i^*)^2 \mathbb{1}_{A_n}\right] \\
&\leqslant \frac{C_5^2}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[\beta_{i,n}^2 \mathbb{1}_{A_n}] \\
&= \frac{C_5^2}{n} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{A_n} \sum_{i=1}^{n} \beta_{i,n}^2\right] \\
&\leqslant \frac{C_5^2}{n} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_n} \widetilde{D} n] \\
&= \frac{C_5^2}{n} \widetilde{D} n\, \mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_n}] \\
&= C_5^2 \widetilde{D}\, \mathbb{P}(A_n).
\end{aligned}$$

Iz definicije skupa A_n, relacije (5.12) te gornjeg raspisa slijedi

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[S_{n,i}^2 \mathbb{1}_{\{|S_{n,i}|>\epsilon\}}] = 0. \tag{5.13}$$

Definirajmo sada

$$Z_n := \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[S_{n,i}^2 \mathbb{1}_{\{|S_{n,i}|>\epsilon\}} \mid \mathcal{F}_{n,i-1}].$$

Budući da je

$$S_{n,i}^2 \mathbb{1}_{\{|S_{n,i}|>\epsilon\}} \geqslant 0, \quad i \in \{1,2,\ldots,n\}$$

slijedi da je

$$\mathbb{E}[S_{n,i}^2 \mathbb{1}_{\{|S_{n,i}|>\epsilon\}} \mid \mathcal{F}_{n,i-1}] \geqslant 0 \ g.s., \quad i \in \{1,2,\ldots,n\}.$$

To znači da je $Z_n = |Z_n|$ gotovo sigurno. Dakle, imamo

$$\mathbb{E}[|Z_n|] = \mathbb{E}[Z_n]$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[S_{n,i}^2 \mathbb{1}_{\{|S_{n,i}|>\epsilon\}} \mid \mathcal{F}_{n,i-1}]\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[\mathbb{E}[S_{n,i}^2 \mathbb{1}_{\{|S_{n,i}|>\epsilon\}} \mid \mathcal{F}_{n,i-1}]] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[S_{n,i}^2 \mathbb{1}_{\{|S_{n,i}|>\epsilon\}}].
\end{aligned}
$$

Sada iz (5.13) slijedi

$$
\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[|Z_n|] = 0 \Rightarrow Z_n \xrightarrow{L^1} 0 \Rightarrow Z_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0,
$$

gdje L^1 označava konvergenciju u Banachovom prostoru $L^1(\Omega)$ koja povlači konvergenciju po vjerojatnosti. Iz gornje relacije i definicije od Z_n slijedi da naš martingalni niz $(X_{n,i}, \mathcal{F}_{n,i}, 1 \leqslant i \leqslant n, n \geqslant 1)$, odnosno pripadni niz martingalnih razlika $(S_{n,i}, 1 \leqslant i \leqslant n, n \geqslant 1)$ zaista zadovoljava uvjetni Lindebergov uvjet. Jedina pretpostavka Korolara 2.7 koju još trebamo pokazati da bismo mogli primijeniti taj korolar na naš martingalni niz je takozvani uvjet na uvjetnu varijancu. Točnije treba pokazati da niz $(U_n^2 : n \in \mathbb{N})$, gdje je U_n^2 definiran s

$$
U_n^2 := \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[S_{n,i}^2 \mid \mathcal{F}_{n,i-1}]
$$

konvergira po vjerojatnosti prema gotovo sigurno konačnoj slučajnoj varijabli η^2. Mi ćemo pokazati da u našem slučaju niz $(U_n^2 : n \in \mathbb{N})$ konvergira po vjerojatnosti prema konstanti

$$
\frac{av_1(a - 2\lambda_1 v_1) + cv_2(c - 2\lambda_1 v_1) + \lambda_1^2 v_1^2}{1 - \frac{2\lambda_2}{\lambda_1}}.
$$

Za brojnik smo već u (5.6) uveli oznaku C_6, a izraz $\frac{2\lambda_2}{\lambda_1}$ iz nazivnika ćemo, radi jednostavnosti, u nastavku rada označavati s p. Budući da je svaka konstanta posebno i gotovo sigurno konačna slučajna varijabla, nakon što dokažemo da

$$
U_n^2 \xrightarrow{\mathbb{P}} \frac{C_6}{1-p}, \tag{5.14}
$$

moći ćemo primijeniti Korolar 2.7 na naš martingalni niz. U dokazu relacije (5.14) koristit ćemo Toeplitzovu lemu, točnije Korolar 1.5. Stavimo da je

$$
Y_n := \mathbb{E}[(M_n^*)^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}]. \tag{5.15}
$$

Tada vrijedi

$$
|Y_n| = |\mathbb{E}[(M_n^*)^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}]| = \mathbb{E}[|M_n^*|^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}] \leqslant \mathbb{E}[C_5^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}] = C_5^2 \ \ g.s.
$$

Budući da je svaka konstanta integrabilna funkcija na prostoru konačne mjere, slijedi da je

$$\mathbb{E}|Y_n| \leqslant \mathbb{E}[C_5^2] < +\infty$$

pa zaključujemo da je $(Y_n : n \in \mathbb{N})$ niz u Banachovom prostoru $L^1(\Omega)$. Još u (5.6) pokazali smo da $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} C_6$. Sada korištenjem Teorema 1.6 trivijalno slijedi

$$Y_n \xrightarrow{L^1} C_6. \tag{5.16}$$

Sada kada imamo konvergentan niz u Banachovom prostoru, želimo na prikladan način definirati dvostruki niz realnih brojeva $(a_{nj} : n, j \in \mathbb{N})$ tako da on zadovoljava pretpostavke Korolara 1.5. Vrijednosti a_{nj} definiramo na sljedeći način:

$$a_{nj} = \begin{cases} \frac{(\beta^*_{j,n})^2}{n} = \frac{\beta^2_{j,n}}{n} & , 1 \leqslant j \leqslant n \\ 0 & , j > n. \end{cases} \tag{5.17}$$

Pokažimo sada da dvostruki niz realnih brojeva $(a_{nj} : n, j \in \mathbb{N})$ zadovoljava pretpostavke Korolara 1.5. Kao prvo, vrijedi sljedeće

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{nj}| &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\beta^2_{j,n}}{n} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \beta^2_{j,n} \\ &\leqslant \frac{1}{n} \widetilde{D} n \\ &= \widetilde{D}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \end{aligned} \tag{5.18}$$

pri čemu predzadnji redak slijedi iz Leme 4.1. Sljedeće što želimo pokazati je

$$\lim_{n \to +\infty} a_{nj} = 0, \quad \forall\, j \in \mathbb{N}. \tag{5.19}$$

Promatrat ćemo dva slučaja s obzirom na to da li je $j < n_0$ ili $j \geqslant n_0$ pri čemu je n_0 isti onaj koji se javlja u izvodu nejednakosti (4.16) i (4.18). Budući da promatramo limes kad n teži u beskonačno, za n možemo pretpostaviti da je $n \geqslant n_0$. Kao što smo već spomenuli, radi jednostavnosti ćemo razlomak $\frac{2\lambda_2}{\lambda_1}$ označiti s p. Isto tako, već od prije znamo da je nama od interesa samo slučaj kada je $\lambda_2 < \frac{1}{2}\lambda_1$, tj. $p < 1$. Za $j < n_0$, $n \geqslant n_0$ imamo

$$\lim_{n \to +\infty} a_{nj} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\beta^2_{j,n}}{n} \overset{(4.16)}{\leqslant} \lim_{n \to +\infty} \frac{\widehat{C} n^p}{n} = 0,$$

jer je $p < 1$. U slučaju kada je $j, n \geqslant n_0$ imamo

$$\lim_{n\to+\infty} a_{nj} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\beta_{j,n}^2}{n} \overset{(4.18)}{\leqslant} \lim_{n\to+\infty} \frac{\widetilde{C}\left(\frac{n}{j}\right)^p}{n} = \frac{\widetilde{C}}{j^p} \lim_{n\to+\infty} \frac{n^p}{n} = 0,$$

jer je $p < 1$. Dakle, vrijedi (5.19). Zadnja stvar koju želimo dokazati je

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \beta_{j,n}^2 = \frac{1}{1-p}. \tag{5.20}$$

Uočimo prvo da iz Leme 1.3 slijedi

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{n}{j}\right)^p = \frac{1}{1-p}.$$

Naime, vrijedi

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^p}}{\frac{n^{1-p}}{1-p}} = 1 &\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{(1-p)\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^p}}{\frac{n}{n^p}} = 1 \\
&\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{n^p}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^p} = \frac{1}{1-p} \\
&\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{n}{j}\right)^p = \frac{1}{1-p}
\end{aligned}$$

što smo i tvrdili. Pogledajmo sada čemu je jednak izraz $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \beta_{j,n}^2$.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \beta_{j,n}^2 &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left[\beta_{j,n}^2 - \left(\frac{n}{j}\right)^p + \left(\frac{n}{j}\right)^p\right] \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left[\beta_{j,n}^2 - \left(\frac{n}{j}\right)^p\right] + \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{n}{j}\right)^p \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left[\beta_{j,n}^2 - \left(\frac{n}{j}\right)^p\right] + \frac{1}{1-p}.
\end{aligned}$$

Dakle, preostalo nam je dokazati da vrijedi

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left[\beta_{j,n}^2 - \left(\frac{n}{j}\right)^p\right] = 0, \tag{5.21}$$

što je ekvivalentno s

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left|\sum_{j=1}^{n}\left[\beta_{j,n}^{2}-\left(\frac{n}{j}\right)^{p}\right]\right|=0.$$

Pogledajmo prvo čemu je jednak $\beta_{j,n}$:

$$\begin{aligned}
\beta_{j,n} &= \frac{\Gamma\left(n+\frac{\tau_0+\lambda_2}{\lambda_1}\right)}{\Gamma\left(n+\frac{\tau_0}{\lambda_1}\right)}\frac{\Gamma\left(j+\frac{\tau_0}{\lambda_1}\right)}{\Gamma\left(j+\frac{\tau_0+\lambda_2}{\lambda_1}\right)}\\
&= \left(n^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}+O\left(n^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}-1}\right)\right)\left(j^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}+O\left(j^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}-1}\right)\right)\\
&= \left(n^{\frac{p}{2}}+O\left(n^{\frac{p}{2}-1}\right)\right)\left(j^{-\frac{p}{2}}+O\left(j^{-\frac{p}{2}-1}\right)\right)\\
&= n^{\frac{p}{2}}j^{-\frac{p}{2}}+n^{\frac{p}{2}}O\left(j^{-\frac{p}{2}-1}\right)+j^{-\frac{p}{2}}O\left(n^{\frac{p}{2}-1}\right)+O\left(n^{\frac{p}{2}-1}\right)O\left(j^{-\frac{p}{2}-1}\right)\\
&= n^{\frac{p}{2}}j^{-\frac{p}{2}}+n^{\frac{p}{2}}j^{-\frac{p}{2}}O(j^{-1})+n^{\frac{p}{2}}j^{-\frac{p}{2}}O(n^{-1})+n^{\frac{p}{2}}j^{-\frac{p}{2}}O(j^{-1})O(n^{-1})\\
&= \left(\frac{n}{j}\right)^{\frac{p}{2}}\left[1+O\left(\frac{1}{j}\right)+O\left(\frac{1}{n}\right)+O\left(\frac{1}{nj}\right)\right],
\end{aligned}$$

gdje druga jednakost slijedi iz Teorema 1.1. Kvadriranjem gornje relacije dobivamo:

$$\begin{aligned}
\beta_{j,n}^{2} = \left(\frac{n}{j}\right)^{p}&\left[1+O\left(\frac{1}{j^2}\right)+O\left(\frac{1}{n^2}\right)+O\left(\frac{1}{n^2j^2}\right)\right.\\
&\left.+O\left(\frac{1}{j}\right)+O\left(\frac{1}{n}\right)+O\left(\frac{1}{nj}\right)+O\left(\frac{1}{nj}\right)+O\left(\frac{1}{nj^2}\right)+O\left(\frac{1}{n^2j}\right)\right]\\
=& \left(\frac{n}{j}\right)^{p}\left[1+O\left(\frac{1}{j}\right)\right],
\end{aligned}$$

gdje posljednja jednakost slijedi iz činjenice da je $j\leqslant n$. Sada imamo:

$$\beta_{j,n}^{2}-\left(\frac{n}{j}\right)^{p}=\left(\frac{n}{j}\right)^{p}\left[1+O\left(\frac{1}{j}\right)\right]-\left(\frac{n}{j}\right)^{p}=\left(\frac{n}{j}\right)^{p}O\left(\frac{1}{j}\right).$$

Budući da je $O\left(\frac{1}{j}\right)$ samo oznaka za funkciju od j, koja zadovoljava to da postoji $j_0\in\mathbb{N}$ takav da je za $j\geqslant j_0$ ta funkcija manja ili jednaka od $\frac{C}{j}$ gdje je $C>0$ neka konstanta, vrijedi sljedeće:

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left|\sum_{j=1}^{n}\left[\beta_{j,n}^{2}-\left(\frac{n}{j}\right)^{p}\right]\right|\\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left|\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{n}{j}\right)^{p}O\left(\frac{1}{j}\right)\right|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^p}{n} \left| \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^p} O\left(\frac{1}{j}\right) \right| \\
&\leqslant \lim_{n\to+\infty} \frac{n^p}{n} \sum_{j=1}^{j_0} \frac{1}{j^p} O\left(\frac{1}{j}\right) + \lim_{n\to+\infty} \frac{n^p}{n} \sum_{j=j_0+1}^{n} \frac{1}{j^p} \frac{C}{j} \\
&\leqslant C \lim_{n\to+\infty} \frac{n^p}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^{p+1}}, \qquad (5.22)
\end{aligned}
$$

gdje zadnji redak slijedi iz činjenica da je $\sum_{j=1}^{j_0} \frac{1}{j^p} O\left(\frac{1}{j}\right)$ konačna suma te da je $p < 1$. Sada moramo pokazati da izraz (5.22) konvergira prema 0 kad n teži u beskonačno. Kako bismo to pokazali, promatrat ćemo tri situacije s obzirom na vrijednost veličine p. Prvo promatramo slučaj kada je $p + 1 < 1$, tj. kada je $p < 0$. Tada, korištenjem Leme 1.3, dobivamo:

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{n^p}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^{p+1}} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^p}{n} \frac{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^{p+1}}}{\frac{n^{1-(p+1)}}{1-(p+1)}} \frac{n^{1-(p+1)}}{1-(p+1)} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^p}{n} \frac{n^{-p}}{-p} \\
&= -\frac{1}{p} \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0.
\end{aligned}
$$

Drugi slučaj koji promatramo je slučaj kada je $p + 1 = 1$, tj. $p = 0$. Tada korištenjem Teorema 1.8 imamo

$$
\lim_{n\to+\infty} \frac{n^p}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^{p+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} = \lim_{n\to+\infty} \frac{H_n}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\log n + \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right)}{n} = 0.
$$

Na kraju promatramo situaciju kada je $p + 1 > 1$. Budući da je p uvijek manji od 1 u situacijama koje mi razmatramo, u ovom slučaju zapravo imamo da je $0 < p < 1$. U tom slučaju vrijedi:

$$
\lim_{n\to+\infty} \frac{n^p}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^{p+1}} \leqslant \lim_{n\to+\infty} \frac{n^p}{n} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{p+1}} = 0,
$$

jer je red $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{p+1}}$ konvergentan. Dakle, za sve potencijalne vrijednosti od p vrijedi da izraz (5.22) konvergira u 0, pa zaključujemo da zaista vrijedi relacija (5.21) što smo i htjeli pokazati. Uočimo da su (5.18), (5.19) i (5.20) upravo pretpostavke Korolara 1.5 tako da koristeći te tri relacije, i činjenicu da $Y_n \xrightarrow{L^1} C_6$, iz spomenutog korolara Toeplitzove leme slijedi

$$
\sum_{j=1}^{\infty} a_{nj} Y_j \xrightarrow{L^1} \frac{C_6}{1-p}, \quad n \to +\infty, \qquad (5.23)
$$

pri čemu su vrijednosti a_{nj} definirane kao u (5.17), a vrijednosti Y_n su definirane kao u (5.15). Dakle, vrijedi

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\infty} a_{nj}Y_j &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\beta_{j,n}^2}{n}\mathbb{E}[(M_j^*)^2 \mid \mathcal{F}_{j-1}] \\ &= \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\beta_{j,n}M_j^*\right)^2 \middle| \mathcal{F}_{j-1}\right] \\ &= \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}[S_{n,j}^2 \mid \mathcal{F}_{j-1}] \qquad (5.24)\end{aligned}$$

Sada iz (5.23), (5.24) i činjenice da konvergencija u L^1 povlači konvergenciju po vjerojatnosti slijedi

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}[S_{n,j}^2 \mid \mathcal{F}_{j-1}] \xrightarrow{\mathbb{P}} \frac{C_6}{1-p}, \quad n \to +\infty.$$

Budući da je $\frac{C_6}{1-p}$ konstanta, pa je posebno i gotovo sigurno konačna slučajna varijabla, gornjom relacijom smo pokazali da u našem slučaju zaista vrijedi i posljednja pretpostavka Korolara 2.7, a to je takozvani uvjet na uvjetnu varijancu. Točnije, u našem slučaju vrijedi

$$U_{n,k_n}^2 = \sum_{i=1}^{k_n} \mathbb{E}[S_{n,i}^2 \mid \mathcal{F}_{n,i-1}] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[S_{n,i}^2 \mid \mathcal{F}_{i-1}] \xrightarrow{\mathbb{P}} \eta^2, \quad n \to +\infty,$$

gdje je

$$\eta^2 = \frac{C_6}{1-p} = \frac{av_1(a-2\lambda_1 v_1) + cv_2(c-2\lambda_1 v_1) + \lambda_1^2 v_1^2}{1-\frac{2\lambda_2}{\lambda_1}} =: \sigma^2. \qquad (5.25)$$

Dakle, zaista su zadovoljene sve pretpostavke Korolara 2.7 pa ga možemo primijeniti na martingalni niz $(X_{ni}, \mathcal{F}_{ni}, 1 \leqslant i \leqslant n, n \geqslant 1)$. Tvrdnja korolara kaže da, ako su ispunjene sve pretpostavke, vrijedi

$$X_{n,k_n} = \sum_{i=1}^{k_n} S_{n,i} \xrightarrow{\mathrm{d}} Z, \quad n \longrightarrow +\infty,$$

gdje je Z slučajna varijabla čija karakteristična funkcija je dana s

$$\varphi_Z(t) = \mathbb{E}\left[\exp\left(-\frac{1}{2}\eta^2 t^2\right)\right].$$

Za naš martingalni niz vrijedi

$$X_{n,k_n} = X_{n,n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} \beta_{j,n}^* M_j^* = \frac{1}{\sqrt{n}} V_n^*.$$

Dakle, zaključujemo

$$\frac{1}{\sqrt{n}} V_n^* \xrightarrow{\text{d}} Z.$$

U (5.25) smo pokazali da je u našem slučaju $\eta^2 = \sigma^2$ što znači da je karakteristična funkcija slučajne varijable Z jednaka

$$\varphi_Z(t) = \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right).$$

Budući da znamo da je to karakteristična funkcija normalne slučajne varijable s parametrima 0 i σ^2 slijedi da je $Z \sim N(0, \sigma^2)$. Dakle, mi smo pokazali da vrijedi

$$\frac{V_n^*}{\sqrt{n}} = \frac{W_n^* + \epsilon_n^*}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\text{d}} N(0, \sigma^2).$$

Iz (5.3) i (4.19) slijedi

$$\frac{\epsilon_n^*}{\sqrt{n}} = \frac{O\left(n^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}\right)}{\sqrt{n}} \longrightarrow 0$$

jer cijelo vrijeme pretpostavljamo da je $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} < \frac{1}{2}$. Sada iz gornje dvije relacije slijedi

$$\frac{W_n^*}{\sqrt{n}} = \frac{W_n - v_1 \tau_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\text{d}} N(0, \sigma^2).$$

Na kraju, korištenjem relacije (4.2), iz gornjeg izraza dobivamo centralni granični teorem za asimptotsku distribuciju broja kuglica u urni koji glasi:

Teorem 5.1. *Neka je W_n broj bijelih kuglica u Bagchi-Pal modelu urne nakon n izvlačenja. Neka su λ_1, λ_2 i v kao u* (4.3)*, neka je $\lambda_2 < \frac{1}{2}\lambda_1$ te neka je shema izmjena dotičnog modela dana s* (3.1)*. Tada vrijedi*

$$\frac{W_n - \lambda_1 v_1 n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\text{d}} N(0, \sigma^2),$$

gdje je

$$\sigma^2 = \frac{a v_1 (a - 2\lambda_1 v_1) + c v_2 (c - 2\lambda_1 v_1) + \lambda_1^2 v_1^2}{1 - 2\lambda_2/\lambda_1}.$$

Napomena 5.2. *Uočimo da iz ovog teorema zaista trivijalno slijedi Teorem 3.2 koji govori o asimptotskom ponašanju distribucije broja kuglica u urni u slučaju sheme Bernarda Friedmana. Kao što znamo, model urne Bernarda Friedmana je opisan shemom izmjena*

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & a \end{pmatrix}.$$

Sada iz (4.4) *slijedi da za svojstvene vrijednosti* λ_1 *i* λ_2 *definirane kao u* (4.3) *vrijedi:*

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= a + c \\ \lambda_2 &= a - c. \end{aligned}$$

Isto tako, iz (4.5) *slijedi da za vektor* $v = (v_1, v_2)^T$ *uveden u* (4.3) *vrijedi* $v_1 = v_2 = \frac{1}{2}$*. Neka je sada ispunjena pretpostavka Teorema 3.2 da je*

$$\rho = \frac{a - c}{a + c} < \frac{1}{2}.$$

To zapravo znači da je $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} < \frac{1}{2}$*, što je ekvivalentno s* $\lambda_2 < \frac{1}{2}\lambda_1$*, a to je upravo pretpostavka koja mora biti ispunjena da bi mogli primijeniti Teorem 5.1. Dakle, vrijedi*

$$\frac{W_n - \lambda_1 v_1 n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\text{d}} N(0, \sigma^2),$$

gdje je σ^2 *kao u dotičnom teoremu. U slučaju sheme Bernarda Friedmana vrijedi*

$$\lambda_1 v_1 n = \frac{1}{2}(a + c)n.$$

Pogledajmo još čemu je jednak σ^2 *u ovom slučaju:*

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{a v_1 (a - 2\lambda_1 v_1) + c v_2 (c - 2\lambda_1 v_1) + \lambda_1^2 v_1^2}{1 - 2\lambda_2/\lambda_1} \\ &= \frac{a\frac{1}{2}\left(a - 2(a + c)\frac{1}{2}\right) + c\frac{1}{2}\left(c - 2(a + c)\frac{1}{2}\right) + (a + c)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1 - 2\rho} \\ &= \frac{\frac{a}{2}(a - a - c) + \frac{c}{2}(c - a - c) + \frac{1}{4}(a^2 + 2ac + c^2)}{1 - 2\rho} \\ &= \frac{-4ac + a^2 + 2ac + c^2}{4(1 - 2\rho)} \\ &= \frac{a^2 - 2ac + c^2}{4(1 - 2\rho)} \end{aligned}$$

$$= \frac{(a-c)^2}{4(1-2\rho)}.$$

Dakle, u slučaju sheme Bernarda Friedmana vrijedi da ako je $\rho < \frac{1}{2}$, *onda slijedi*

$$\frac{W_n - \frac{1}{2}(a+c)n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathrm{d}} N\left(0, \frac{(a-c)^2}{4(1-2\rho)}\right)$$

što je upravo tvrdnja Teorema 3.2.

Poglavlje 6

Simulacije

Na kraju ovog rada donosimo ilustraciju dokazanih rezultata. Pomoću programskog jezika R napravili smo simulaciju izvlačenja kuglica iz urne i ubacivanja novih kuglica u urnu u skladu s definiranim pravilima. Prvo donosimo primjer kojim ilustriramo zakon velikih brojeva za urne, a zatim primjer kojim ilustriramo centralni granični teorem za urne.

U poglavlju 4 smo pokazali da za Bagchi-Pal modele urni kod kojih je zadovoljena pretpostavka (3.2) vrijedi rezultat kojeg smo nazvali slabi zakon velikih brojeva za urne. Taj rezultat kaže da ako imamo model urne čija je shema izmjena dana matricom

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

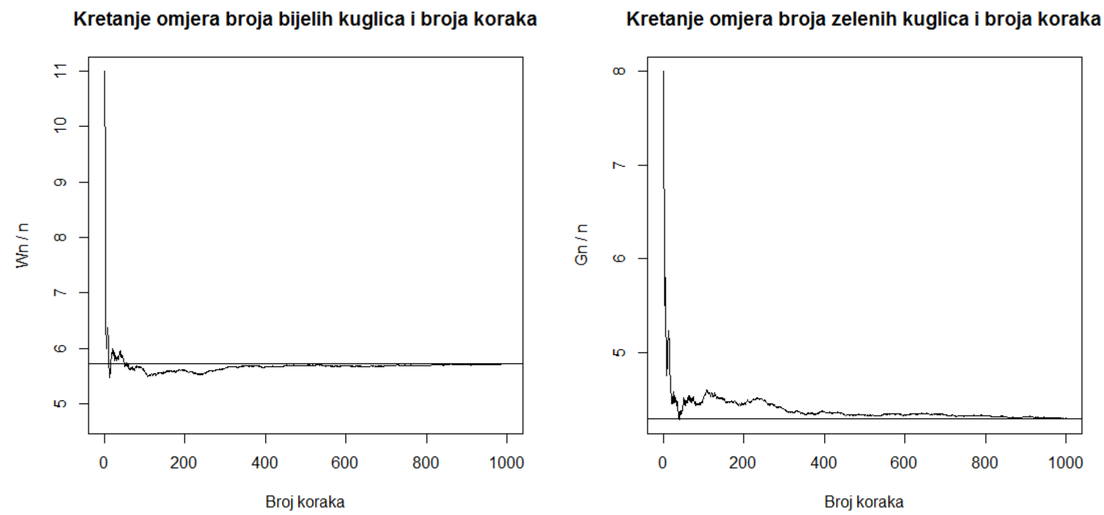
gdje je $a + b = c + d$, $2(a - c) < a + b$ te $a, b, c, d > 0$ onda vrijedi

$$\frac{W_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \lambda_1 v_1,$$
$$\frac{G_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \lambda_1 v_2,$$

gdje je λ_1 veća od dvije svojstvene vrijednosti matrice A, a vektor $v = (v_1, v_2)^T$ je svojstveni vektor matrice A^T pridružen svojstvenoj vrijednosti λ_1. U R-u smo simulirali razne primjere modela urni koje zadovoljavaju ranije spomenute uvjete i uočili smo da je konvergencija dokazana u Teoremu 4.3 dosta brza što ilustrira i slika 6.1.

Nakon što smo, simulacijom izvlačenja kuglica i ubacivanja novih kuglica u urnu, ilustrirali tvrdnju zakona velikih brojeva za urne, donosimo i ilustraciju tvrdnje centralnog graničnog teorema za urne koji glasi:

$$\frac{W_n - \lambda_1 v_1 n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\text{d}} N(0, \sigma^2),$$



Slika 6.1: Ilustracija slabog zakona velikih brojeva za urne. Simulirano je 1000 koraka. Lijeva slika pokazuje kako se omjer $\frac{W_n}{n}$ mijenja kroz vrijeme, a desna slika pokazuje kako se omjer $\frac{G_n}{n}$ mijenja kroz vrijeme. Horizontalne linije predstavljaju vrijednost kojoj bi dotični omjeri trebali konvergirati. Dakle, na lijevom grafu horizontalna linija ima jednadžbu $y = \lambda_1 v_1$, a na desnom grafu horizontalna linija ima jednadžbu $y = \lambda_1 v_2$. Za konkretan primjer uzete su vrijednosti $a = 7$, $b = 3$, $c = 4$, $d = 6$ te početni uvjeti, tj. početni broj kuglica u urni $W_0 = 7$, $G_0 = 2$. Valja napomenuti da početni broj bijelih i zelenih kuglica u urni ni na koji način ne utječe na asimptotski rezultat.

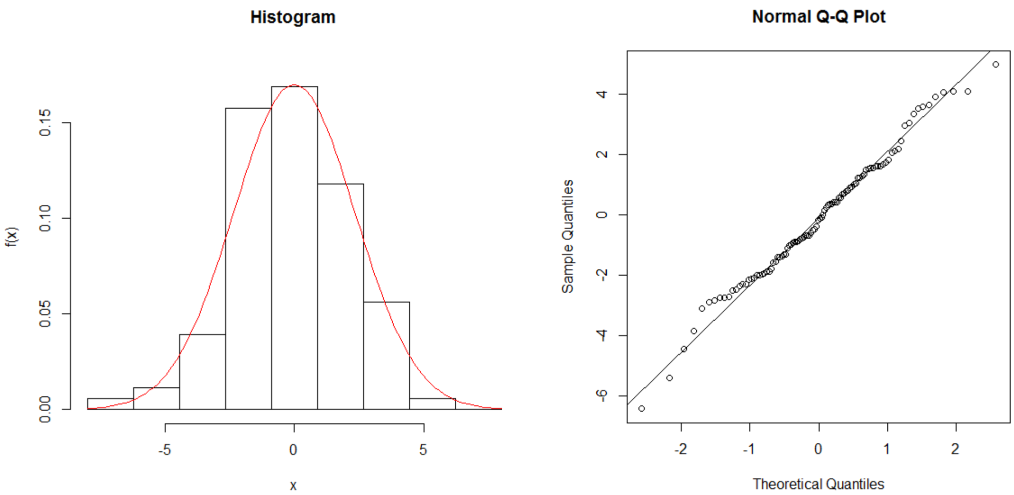
gdje je

$$\sigma^2 = \frac{av_1(a - 2\lambda_1 v_1) + cv_2(c - 2\lambda_1 v_1) + \lambda_1^2 v_1^2}{1 - 2\lambda_2/\lambda_1}.$$

Na slici 6.2 vidimo da se empirijska distribucija dosta dobro poklapa sa željenom teorijskom distribucijom. Osim grafičkim testom, pripadnost simuliranih podataka $N(0, \sigma^2)$ distribuciji provjerili smo i Kolmogorov-Smirnovljevim testom. Dakle, testirali smo hipotezu

$$H_0 : \text{simulirani podaci dolaze iz distribucije } N(0, \sigma^2)$$
$$H_1 : \text{ne } H_0.$$

P-vrijednost provedenog testa je 0.6892 iz čega zaključujemo da niti na jednoj razumnoj razini značajnosti ne bismo odbacili našu nul-hipotezu.



Slika 6.2: Ilustracija centralnog graničnog teorema za urne. Simulirano je 100 varijabli koje bi trebale slijediti distribuciju $N(0, \sigma^2)$. Na lijevom grafu je dan histogram tih podataka uspoređen s funkcijom gustoće normalne slučajne varijable s parametrima 0 i σ^2. Desni graf je zapravo normalni vjerojatnosni graf na kojem kvantile empirijske distribucije uspoređujemo s kvantilima teorijske distribucije. Za konkretan primjer uzete su vrijednosti $a = 7$, $b = 3$, $c = 4$, $d = 6$ te početni uvjeti, tj. početni broj kuglica u urni $W_0 = 7$, $G_0 = 2$. Valja napomenuti da početni broj bijelih i zelenih kuglica u urni ni na koji način ne utječe na asimptotski rezultat.

Bibliografija

[1] T. M. Apostol, *Introduction to analytic number theory*, Springer - Verlag, 1976.

[2] R. G. Bartle, *The elements of integration and lebesuge measure*, John Wiley & Sons, 1995.

[3] D. A. Freedman, *Bernard friedman's urn*, The Annals of Mathematical Statistics **36** (1965), 956 – 970.

[4] P. Hall and C. C. Heyde, *Martingale limit theory and its application*, Academic Press, 1980.

[5] H. M. Mahmoud, *Pólya urn models*, Chapman & Hall / CRC, 2008.

[6] F. Tricomi and A. Erdélyi, *The asymptotic expansion of a ratio of gamma functions*, Pacific Journal of Mathematics **1** (1951), 133 – 142.

Sažetak

U ovom radu bavimo se modelima urni. Modeli urni su jako poznati i vrlo stari modeli pomoću kojih se može opisati čitav niz problema iz primijenjene vjerojatnosti. Najvažnije pitanje koje se javlja prilikom proučavanja modela urni je pitanje asimptotskog ponašanja distribucije broja kuglica pojedine boje u urni. Postoji mnogo različitih pristupa pronalasku odgovora na to pitanje. Mi u ovom radu opisujemo martingalni pristup tom problemu.

Na početku rada donosimo kratak uvod u teoriju martingala, a zatim opisujemo Bagchi-Pal model urne na kojem smo i ilustrirali martingalni pristup rješavanju problema pronalaska asimptotske distribucije broja kuglica pojedine boje u urni. Osim opisa Bagchi-Pal modela urne, donosimo i vrlo kratak opis dva najpoznatija modela urni u literaturi, a to su shema Georgea Pólye i shema Bernarda Friedmana. Navodimo i najvažnije rezultate vezane uz ta dva modela te komentiramo kako se oni uklapaju u rezultate koje donosimo kasnije, a koji se tiču Bagchi-Pal modela urni.

Prvi veliki rezultat koji donosimo je takozvani zakon velikih brojeva za urne koji govori o tome kako se nakon dugo vremena, u slučaju Bagchi-Pal modela urne koji zadovoljava još neke dodatne uvjete, ponaša omjer broja kuglica pojedine boje u urni i broja koraka.

Drugi veliki rezultat koji donosimo je centralni granični teorem za urne. I taj rezultat se odnosi na Bagchi-Pal model urne koji zadovoljava neke dodatne uvjete. Ovaj rezultat nam govori o distribuciji udjela kuglica pojedine boje u urni nakon dugo vremena.

Kako bismo ilustrirali gore spomenuta dva rezultata, na kraju rada donosimo simulacije izvlačenja kuglica iz urne i ubacivanja novih kuglica u urnu koje smo napravili pomoću programskog jezika R. Grafovi čije slike smo prikazali u zadnjem poglavlju jako lijepo ilustriraju dobivene rezultate.

Summary

In this paper we are dealing with urn models. Urn models are well known and very old models that can help us describe a lot of different problems from applied probability. The most important question that arises when we study urn models is the question about asymptotic behaviour of distribution of balls of different colours in our urn. There are many different ways to address this question. In our paper, we present martingale approach to this problem.

At the beginning of this paper, we present short introduction into martingale theory, and after that we describe Bagchi-Pal urn model which we used to illustrate martingale approach to finding asymptotic distribution of the number of balls of different colours in an urn. Beside description of Bagchi-Pal urn model, we gave short description of two most famous urn models in literature. Those are Pólya urn model and scheme of Bernard Friedman. We quote the most important results concerning that two models and after that we comment how that results fit into results that we present later and that are concerning Bagchi-Pal urn models.

First important result that we proved in this paper is so called law of large numbers for urns. That result tells us how ratio of the number of balls of some colour and the number of steps is behaving after long period of time in Bagchi-Pal urn model that satisfies some additional constraints.

Second big result that we proved in our paper is central limit theorem for urns. Assumption of that theorem is that we have Bagchi-Pal urn model that satisfies some additional constraints, just like in the law of large numbers for urns. That result tells us about asymptotic behaviour of distribution of proportion of balls of some colour in an urn after long period of time.

In order to illustrate the above mentioned results, at the end of our paper we made simulations of drawing balls from urn and adding new balls to the urn. For simulating that process we used programming language R. We included some pictures in our paper that are very nice illustration of proved results.

Životopis

Rođen sam 14.08.1990. godine u Sisku. Nakon završetka osnovne škole, upisao sam XV. gimnaziju u Zagrebu. Maturirao sam 2009. godine te sam iste godine upisao Preddiplomski studij Matematike na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu. 2012. godine sam završio preddiplomski studij te upisao Diplomski sveučilišni studij Matematičke statistike na istom fakultetu. Tijekom studija sam razvio interes za mnoga područja matematike, od čega ponajviše za vjerojatnost i statistiku. Na temelju odličnih rezultata bio sam i demonstrator iz kolegija Vjerojatnost koji se predaje na drugoj godini preddiplomskog studija te iz kolegija Statistika koji se predaje na trećoj godini preddiplomskog studija. Upravo zbog velikog interesa za područje vjerojatnosti i statistike sam i izabrao ovu temu za svoj diplomski rad. Pred kraj diplomskog studija, 2014. godine, dobio sam Dekanovu nagradu za izniman uspjeh tokom studija.