

# Brocardove točke i Brocardov kut

---

Klisura, Tajana

Master's thesis / Diplomski rad

2016

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:917290>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-08-07**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Tajana Klisura

**BROCARDOVE TOČKE I**  
**BROCARD OV KUT**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
prof. dr. sc. Juraj Šiftar

Zagreb, 2016.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

# Sadržaj

|                                                                              |            |
|------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>Sadržaj</b>                                                               | <b>iii</b> |
| <b>Uvod</b>                                                                  | <b>2</b>   |
| <b>1 Brocardova točka i Brocardov kut trokuta</b>                            | <b>3</b>   |
| 1.1 Postojanje i jedinstvenost Brocardove točke trokuta . . . . .            | 3          |
| 1.2 Brocardov kut trokuta . . . . .                                          | 9          |
| <b>2 Brocardova točka i Brocardov kut poligona</b>                           | <b>15</b>  |
| 2.1 Problem postojanja Brocardove točke za poligone . . . . .                | 15         |
| 2.2 Definiranje Brocardovih objekata poligona . . . . .                      | 16         |
| 2.3 Kriterij postojanja Brocardove točke pomoću sličnosti poligona . . . . . | 21         |
| 2.4 Brocardov kut . . . . .                                                  | 31         |
| 2.5 Primjeri nepravilnih poligona s Brocardovom točkom . . . . .             | 35         |
| <b>Bibliografija</b>                                                         | <b>37</b>  |

# Uvod

U povijesti geometrije trokuti su često proučavani te su osim različitih svojstava trokuta otkrivene i mnoge točke osobitih svojstava. Najpoznatije takve točke su ortocentar, težište, središte opisane i središte upisane kružnice trokuta koje nazivamo karakteristične točke trokuta. Osim ovih klasičnih karakterističnih točaka, uočene su i proučavane još mnoge osobite točke trokuta. Neke od njih su Lemoineova točka, Feuerbachova točka, Napoleonove točke, Gergonneova točka, Miquelova točka, Nagelova točka, Brocardova točka itd. U ovom radu bavit ćemo se posljednje spomenutom točkom tj. Brocardovom točkom.

Povijest Brocardove točke započela je 1816. godine. Te godine je njemački matematičar August Leopold Crelle objavio rad u kojem se bavio određenim svojstvima ravninskog trokuta. U tom radu Crelle je dokazao kako odrediti točku  $\Omega$  unutar trokuta  $ABC$  takvu da dužine  $\overline{\Omega A}$ ,  $\overline{\Omega B}$ ,  $\overline{\Omega C}$  zatvaraju sukladne kutove redom sa stranicama  $AB$ ,  $BC$  i  $CA$ . Danas tu točku nazivamo Brocardova točka trokuta. Na sličan način promjenom orijentacije kuta definiramo i drugu Brocardovu točku. Zanimljivo je da su u oba slučaja, neovisno o orijentaciji, veličine sukladnih kutova jednake te ti kutovi imaju naziv Brocardov kut. (Vidi slike 1.1 i 1.2).

Nekoliko godina kasnije istraživanja o Brocardovoj točki nastavio je Carl Friedrich Andreas Jacobi i neki njegovi učenici. Potom je Brocardova točka neko vrijeme bila zaboravljena, a ponovnu pažnju matematičke javnosti dobila je 1875. godine zahvaljujući francuskom vojnom oficiru koji se bavio geometrijom. Njegovo puno ime je Pierre René Jean Baptiste Henri Brocard. On je nekoliko godine ranije provodio samostalna istraživanja vezana za točku koju je Crelle otkrio, da bi sa saznanjima u javnost izašao spomenute godine. Brocardovo istraživanje ubrzo su nastavili matematičari iz Francuske, Engleske i Njemačke.

Kao što znamo, matematički objekti i postupci ne dobiju uvijek ime po osobi koja ih je prva proučavala, a to se dogodilo i u ovom slučaju. Iako se točkom sa spomenutim svojstvima prvi bavio Crelle, ime je dobila po Brocardu. Ovdje koristimo uvriježene nazive Brocardova točka i Brocardov kut, no neki autori sustavno koriste naziv Crelle-Brocardova

točka, odnosno kut.

Istraživanja potaknuta ponovnim buđenjem zanimanja za Brocardovu točku i Brocardov kut iznjedrila su mnoge rezultate. Problemi vezani uz ta dva pojma pojavljivali su se na međunarodnim natjecanjima, između ostalog i na Međunarodnoj matematičkoj olimpijadi, kao i u poznatom matematičkom časopisu *American Mathematical Monthly*.

S vremenom, postavilo se pitanje mogućnosti generalizacije pojma Brocardove točke na poligon. Istraživanja vezana uz poligon su relativno nova i objavljenih rezultata nema u tolikoj mjeri kao što je to slučaj s trokutom.

Za razliku od trokuta koji uvijek ima Brocardovu točku i to jedinstvenu, za općenite poligone s  $n \geq 4$  vrhova, točka i kut s odgovarajućim svojstvom mogu, ali ne moraju postojati. Zato je od interesa ustanoviti neke kriterije za postojanje Brocardove točke poligona, kao i izvesti različite relacije vezane uz Brocardovu točku i Brocardov kut poligona.

U ovom radu naglasak će biti upravo na prikazu nekih rezultata o Brocardovoj točki i Brocardovom kutu za općenite poligone, no u prvom dijelu ćemo, radi potpunosti, izložiti poznate činjenice vezane uz trokut. U drugom dijelu prikazat ćemo, slijedeći uglavnom radove Ben-Israela i Foldesa, pristup u kojem se postojanje Brocardove točke ispituje pomoću niza poligona pridruženih zadanom poligonu koji konvergira prema nepraznom skupu, a taj se ili sastoji od jedne točke ili je segment.

Kriterij postojanja Brocardove točke bit će iskazan pomoću međusobne sličnosti svih poligona u toj familiji pridruženoj zadanom poligonu. Posebno, bavit ćemo se i ocjenom veličine Brocardovog kuta za poligone, za koju je zanimljivo da je izvedena još 1945. godine u posve drugačijem kontekstu (rad Dmitrieva i Dynkina), ali je dulje vrijeme ostala nezapažena.

# Poglavlje 1

## Brocardova točka i Brocardov kut trokuta

### 1.1 Postojanje i jedinstvenost Brocardove točke trokuta

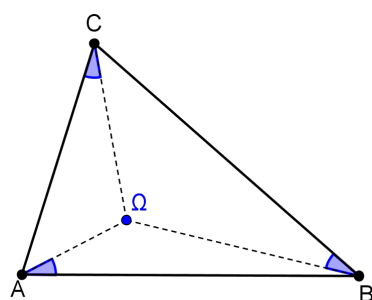
U uvodu smo naveli svojstvo kojim je određena Brocardova točka. Navedimo sada i formalnu definiciju.

**Definicija 1.1.1.** *Neka je  $ABC$  trokut. Točku  $\Omega$  za koju vrijedi*

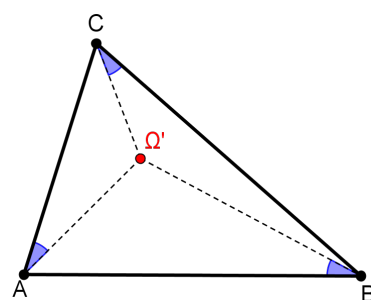
$$\angle \Omega AB = \angle \Omega BC = \angle \Omega CA = \omega$$

*nazivamo Brocardovom točkom trokuta  $ABC$ .*

*Kut  $\omega$  nazivamo Brocardov kut trokuta  $ABC$ .*



Slika 1.1: Točka  $\Omega$



Slika 1.2: Točka  $\Omega'$

Promjenom orijentacije, dobivamo novu točku  $\Omega'$ . Preciznije, definiramo drugu ili negativnu Brocardovu točku na sljedeći način:

**Definicija 1.1.2.** Neka je  $ABC$  trokut. Točku  $\Omega'$  za koju vrijedi

$$\angle AB\Omega' = \angle BC\Omega' = \angle CA\Omega'$$

*nazivamo drugom ili negativnom Brocardovom točkom trokuta  $ABC$ .*

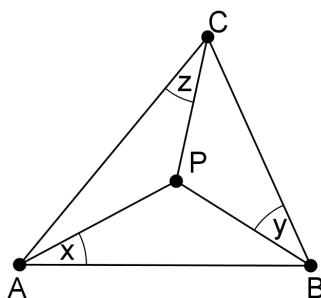
Vrijedi da je

$$\angle AB\Omega' = \angle BC\Omega' = \angle CA\Omega' = \omega, \text{ gdje je } \omega \text{ iz definicije 1.1.1}$$

Stoga kutove  $\angle AB\Omega'$ ,  $\angle BC\Omega'$  i  $\angle CA\Omega'$ , također nazivamo Brocardovim kutovima trokuta  $ABC$ . Spomenuta sukladnost nije očita te ju je potrebno dokazati, a to ćemo napraviti u poglavlju 1.2.

Obzirom na spomenutu promjenu orijentacije, odnosno postojanje druge Brocardove točke  $\Omega'$ , u literaturi točku  $\Omega$  možemo naći i pod nazivom prva ili pozitivna Brocardova točka trokuta. Nazivi "prva/druga" odnose se na vremenski redoslijed otkrivanja točaka, a "pozitivna/negativna" odnose se na promatranu orijentaciju. Obje točke imaju analogna svojstva do kojih se dolazi analognim razmatranjima. Stoga ćemo u nastavku poglavlja promatrati samo jednu od njih i to točku  $\Omega$ . Radi jednostavnosti, pod pojmom Brocardova točka trokuta podrazumijevat ćemo prvu (pozitivnu) Brocardovu točku trokuta.

Sada se postavlja pitanje smislenosti definicije Brocardove točke. Uzmimo da je  $P$  točka u unutrašnjosti trokuta  $ABC$ . Spojnice točke  $P$  i vrhova trokuta s odgovarajućim stranicama trokuta tvore kutove  $x$ ,  $y$  i  $z$ , kao na slici 1.3. Želimo vidjeti postoji li točka  $P$  za koju će sva tri kuta  $x$ ,  $y$  i  $z$  biti jednaka. Tada bi ta točka bila Brocardova točka.



Slika 1.3: Postoji li Brocardova točka trokuta?

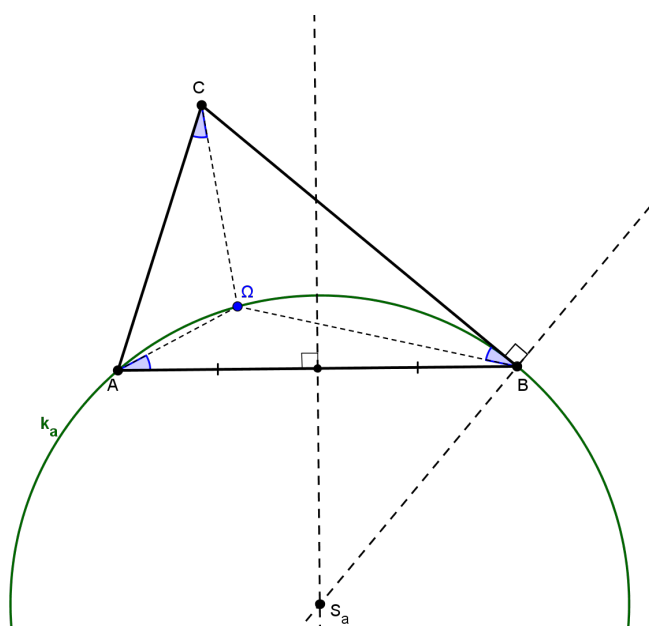
U većini slučajeva proizvoljnim odabirom točke  $P$  dobit ćemo da su sva tri kuta,  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , različite veličine. Naravno, uvijek je moguće namjestiti da su dva, od ta tri kuta, npr.  $x$  i  $y$ , sukladna. To jednostavno možemo napraviti tako da konstruiramo proizvoljan kut  $x$



(manji od unutarnjih kutova trokuta) u vrhu  $A$ , a zatim ga "prebacimo" u vrh  $B$ . Na taj način krakovi kuta  $x$  i  $y$  sjeći se u jednoj točki u unutrašnjosti trokuta, točki  $P$ . No, čak i da to napravimo, bilo bi nerealno očekivati da će nastali kut  $z$  biti sukladan preostalim dvama sukladnim kutovima. Stoga postojanje, kao ni jedinstvenost, Brocardove točke trokuta nije očito te ih je potrebno dokazati kao bi imalo smisla govoriti o Brocardovoj točki i Brocardovom kutu trokuta.

Različiti matematičari pokušali su dokazati da Brocardova točka trokuta uistinu postoji i da je jedinstvena. Zbog toga u literaturi možemo naći različite pristupe tom problemu. U nastavku ćemo izložiti neke od tih pristupa.

Prvi koji ćemo izložiti zasniva se na konstrukciji Brocardove točke trokuta, odnosno poizlazi iz konstrukcije. Provedimo dakle prvi korak konstrukcije – analizu. Za proizvoljan trokut  $ABC$  želimo konstruirati točku  $\Omega$  tako da vrijedi  $\angle\Omega AB = \angle\Omega BC = \angle\Omega CA$  (slika 1.1). Neka je  $S_a$  središte kružnice  $k_a$  opisane trokutu  $AB\Omega$ . Jednakost  $\angle\Omega AB = \angle\Omega BC$  povlači da je pravac  $BC$  tangenta na kružnicu  $k_a$  u točki  $B$ . Stoga  $S_a$  pripada simetrali dužine  $AB$  i okomici na pravac  $BC$  u točki  $B$ . Dakle,  $k_a$  je kružnica sa središtem u točki  $S_a$ , polumjera  $|S_a A|$ , vidi sliku 1.4.



Slika 1.4: Kružnica opisana trokutu  $AB\Omega$

Nadalje, neka je  $k_b$  kružnica opisana trokutu  $BC\Omega$ . Na analogan način, koristeći jednakost  $\angle\Omega BC = \angle\Omega CA$ , dolazi se do zaključka da je pravac  $AC$  tangenta na kružnicu  $k_b$  u točki

C. Odnosno,  $S_b$  pripada simetrali dužine  $\overline{BC}$  i okomici na pravac AC u točki C. Analogno, zaključujemo i za kružnicu  $k_c$  opisanu trokutu  $AC\Omega$ . Uočimo da je točka  $\Omega$  zajednička trima različitim kružnicama:  $k_a$ ,  $k_b$  i  $k_c$ . Takva točka uvijek postoji i jedinstvena je. Ovim smo pokazali da za svaki trokut  $ABC$  Brocardova točka uistinu postoji i jedinstvena je.

Na temelju prethodne analize, sada možemo konstruirati Brocardovu točku trokuta ABC. Spomenutu konstrukciju navest ćemo na idućoj strani.

Iz prethodnog razmatranja proizlazi još jedna definicija Brocardove točke trokuta:

**Definicija 1.1.3.** *Za dani trokut ABC kružnice:*

*$k_a$ , koja prolazi vrhom A i dira pravac BC u vrhu B;*

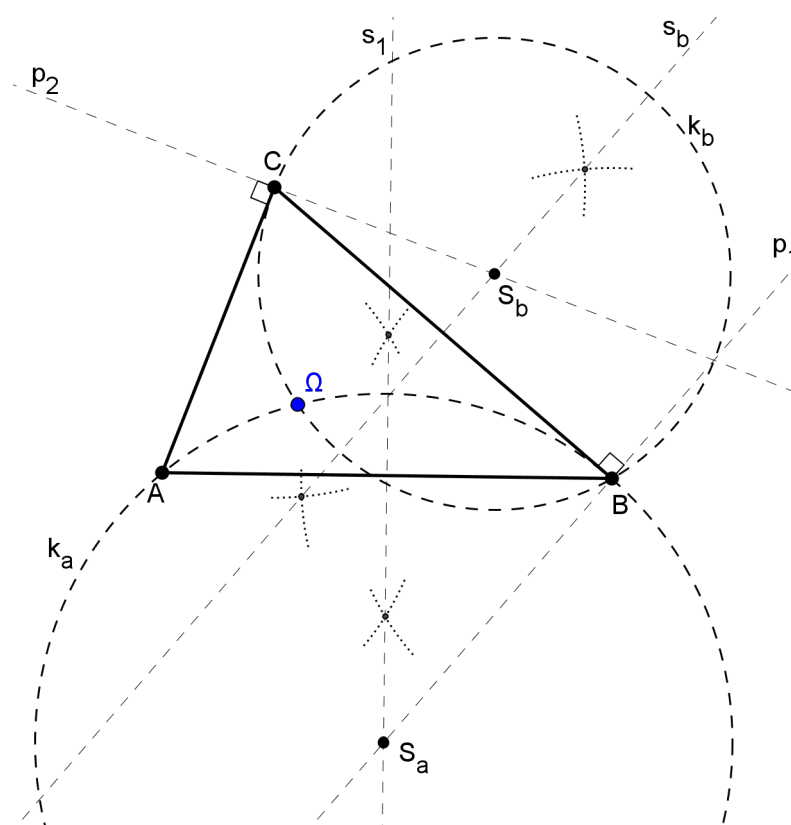
*$k_b$ , koja prolazi vrhom B i dira pravac AC u vrhu C;*

*i  $k_c$ , koja prolazi vrhom C i dira pravac AB u vrhu A,*

*sijeku se u jednoj točki koju nazivamo Brocardovom točkom trokuta ABC.*

Koraci konstrukcije Brocardove točke:

1.  $s_1$  = simetrala dužine  $\overline{AB}$
2.  $p_1$  = okomica na pravac  $BC$  u točki  $B$
3.  $S_a = s_1 \cap p_1$
4.  $k_a = (S_a, |S_a A|)$
5.  $s_2$  = simetrala dužine  $\overline{BC}$
6.  $p_2$  = okomica na pravac  $AC$  u točki  $C$
7.  $S_b = s_2 \cap p_2$
8.  $k_b = (S_b, |S_b B|)$
9.  $\Omega = k_a \cap k_b$



Slika 1.5: Konstrukcija Brocardove točke trokuta

Prethodno opisan i opravdan postupak konstrukcije nije jedini mogući. U nastavku ćemo izložiti još jedan primjer konstrukcije Brocardove točke trokuta iz kojeg također proizlazi postojanje i jedinstvenost Brocardove točke trokuta.

Neka je  $k_b$  kružnica definirana u definiciji (1.1.3). Neka je točka D sjecište kružnice  $k_b$  i pravca točkom C paralelnog s pravcem AB. Označimo s  $\omega$  kut  $\angle\Omega AB$ . Uočimo, kutovi  $\angle\Omega AB$  i  $\angle\Omega DC$  su kutovi uz transverzalu AD, paralelnih pravaca AB i CD pa slijedi

$$\angle\Omega AB = \angle\Omega DC = \omega.$$

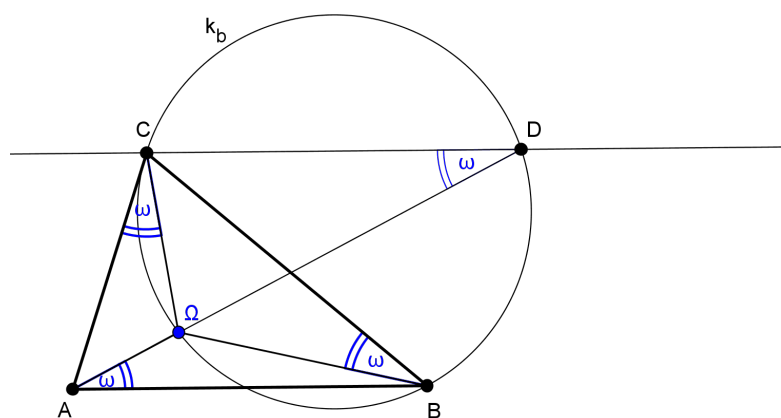
Nadalje, jer su  $\angle\Omega DC$  i  $\angle\Omega BC$  obodni kutovi nad istim lukom kružnice, slijedi da je

$$\angle\Omega DC = \angle\Omega BC = \omega.$$

Uočimo sada da je i

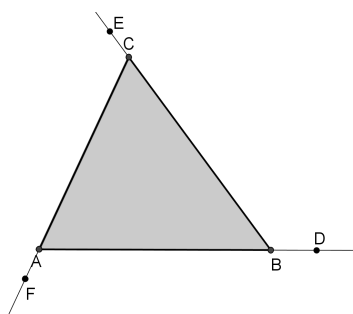
$$\angle\Omega CA = \omega.$$

Naime, krakovi kuta  $\angle\Omega CA$  podudaraju se s tangentom AC na kružnicu  $k_b$  i tetivom  $\overline{\Omega C}$  te iste kružnice. Stoga je kut  $\angle\Omega CA$  jednak obodnom obodnom kutu nad tetivom  $\overline{\Omega C}$  pa slijedi  $\angle\Omega CA = \omega$ . Dakle,  $\Omega$  je Brocardova točka trokuta ABC.

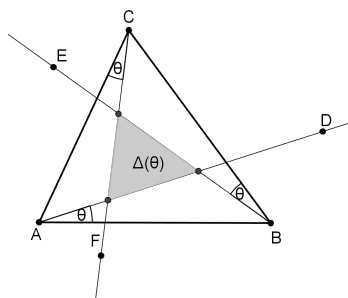


Slika 1.6: Još jedna konstrukcija Brocardove točke trokuta

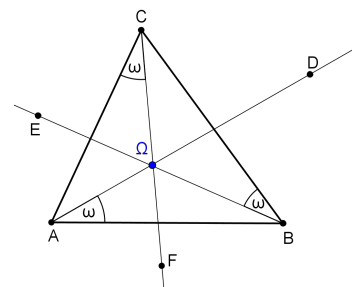
Do sada smo izložili dva rješenja problema postojanja i jedinstvenosti Brocardove točke trokuta. U oba su postojanje i jedinstvenost Brocardove točke trokuta proizašli su iz konstrukcije te točke. Zanimljivi su i neki drugi pristupi rješavanja ovog problema, posebno stoga što se mogu primijeniti na općenite  $n$ -poligone, s tim što ishod nije uvijek pozitivan i jednostavan kao za trokut. Tako se u člancima [3] i [4] promatraju nizovi trokuta koji konvergiraju Brocardovoj točki zadanog trokuta. Trokut  $ABC$  pridružuje se trokut  $\triangle(\theta)$



Slika 1.7:  
 $\theta = 0^\circ$



Slika 1.8:  
Veličina kuta  $\theta$  raste



Slika 1.9:  
 $\omega$  je Brocardov kut

čije su stranice određene polupravcima  $AD$ ,  $BE$  i  $CF$  koji zatvaraju kut  $\theta$  sa stranicama  $AB$ ,  $BC$  i  $CA$  redom. Pokazuje se da su svi trokuti  $\Delta(\theta)$  slični trokutu  $ABC$  (pa time i međusobno slični) i da čine monotono padajuću familiju ( $\theta_1 < \theta_2 \Rightarrow \Delta(\theta_1) \supseteq \Delta(\theta_2)$ ) koja se "steže" u točku. To je upravo Brocardova točka, kojom je onda određen i Brocardov kut.

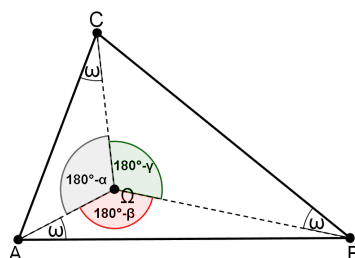
Ovdje nećemo iznijeti dokaze navedenih tvrdnji za trokut, nego ćemo u poglavlju 2 opširnije prikazati primjenu ovog postupka na općenite poligone. U tom slučaju, za  $n \geq 4$ , Brocardova točka ne mora postojati, no kriterij za njezino postojanje kao graničnog skupa (limesa) konstruiranog niza  $n$ -poligona bit će upravo sličnost svih tih poligona s početnim poligonom.

## 1.2 Brocardov kut trokuta

U prethodnom potpoglavlju definirali smo Brocardovu točku te smo razmatrali njezino postojanje, jedinstvenost i postupak konstrukcije. Osim Brocardove točke, tada smo definirali i Brocardov kut trokuta. Svaki trokut ima Brocardov kut, što slijedi iz postojanja Brocardove točke. Kad znamo da kut postoji, od interesa nam je proučiti neka njegova svojstva, npr. veličinu kuta. Za svaki trokut kojemu znamo veličine unutarnjih kutova moguće je primjenom formule odrediti veličinu Brocardovog kuta. Spomenutu formulu prvi je otkrio i dokazao Crelle. Prije nego navedemo i dokažemo tu formulu, navest ćemo lemu koja nam je potrebna pri dokazivanju spomenutog teorema.

**Lema 1.2.1.** *Neka je  $ABC$  trokut s unutarnjim kutovima  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\gamma$ . Neka je  $\Omega$  Brocardova točka, a  $\omega$  Brocardov kut trokuta  $ABC$ . Tada vrijedi:*

$$\angle B\Omega A = 180^\circ - \beta, \quad \angle C\Omega B = 180^\circ - \gamma, \quad \angle A\Omega C = 180^\circ - \alpha.$$



Slika 1.10: Lema (1.2.1)

*Dokaz.*

Promotrimo trokut  $AB\Omega$ .

Po definiciji Brocardove točke i Brocardovog kuta trokuta vrijedi  $\angle \Omega BC = \omega$ . Stoga je  $\angle AB\Omega = \beta - \omega$ . Sada, primjenom teorema o zbroju unutarnjih kutova trokuta, slijedi da je:

$$\angle B\Omega A = 180^\circ - \omega - (\beta - \omega) = 180^\circ - \beta.$$

Na analogan način, promatrajući trokut  $BC\Omega$ , odnosno  $AC\Omega$ , dokazuju su preostale dvije tvrdnje leme.  $\square$

Sada možemo iskazati i dokazati teorem koji govori o veličini Brocardovog kuta.

**Teorem 1.2.2.** *Za trokut  $ABC$  vrijedi jednakost*

$$\operatorname{ctg} \omega = \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma,$$

*gdje je  $\omega$  Brocardov kut trokuta  $ABC$ , a kutovi  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\gamma$  su unutarnji kutovi trokuta  $ABC$ .*

*Dokaz.*

Označimo s  $K$  nožište visine iz točke  $C$  na stranicu  $\overline{AB}$ , a s  $L$  nožište visine iz točke  $D$  na stranicu  $\overline{AB}$ . Neka je  $M$  točka na pravcu  $AB$  takva da je  $|BL| = |MK|$ . Tada, po SKS teoremu o sukladnosti trokuta, slijedi da je

$$\triangle BDL \cong \triangle MCK \tag{1.1}$$

Kutovi  $\angle ABC$  i  $\angle DCB$  su kutovi uz transversalu paralelnih pravaca pa slijedi da su sukladni. Dakle,

$$\angle ABC = \angle DCB = \beta.$$

Nadalje, kutovi  $\angle C\Omega B$  i  $\angle BDC$  su obodni kutovi nad tetivom  $\overline{BC}$ . Obzirom da vrhovi  $\Omega$  i  $D$  pripadaju komplementarnim lukovima nad tetivom, vrijedi da je

$$\angle BDC = 180^\circ - (180^\circ - \gamma) = \gamma.$$

Dakle, veličine dvaju unutarnjih kutova trokuta  $CBD$  su  $\beta$  i  $\gamma$  pa zaključujemo da je

$$\angle CBD = 180^\circ - \beta - \gamma = \alpha.$$

Uočimo da je sada

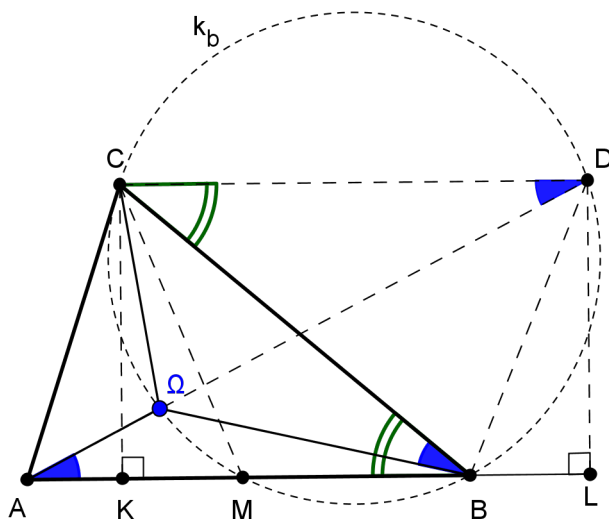
$$\angle DBL = 180^\circ - \beta - \alpha = \gamma.$$

Stoga iz sukladnosti trokuta (1.1) slijedi

$$\angle KMC = \angle DBL = \gamma.$$

Primjenimo sada trigonometrijske funkcije šiljastih kutova pravokutnog trokuta na pravokutne trokute  $ALD$ ,  $AKC$ ,  $BCK$  i  $CKM$  te primijenimo sukladnost (1.1), dobivamo:

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \omega &= \frac{|AL|}{|DL|} \\ \operatorname{ctg} \alpha &= \frac{|AK|}{|CK|} = \frac{|AK|}{|DL|} \\ \operatorname{ctg} \beta &= \frac{|KB|}{|CK|} = \frac{|KB|}{|DL|} \\ \operatorname{ctg} \gamma &= \frac{|KM|}{|CK|} = \frac{|BL|}{|DL|} \end{aligned} \tag{1.2}$$



Slika 1.11: Dokaz teorema 1.2.2

Uočimo da vrijedi:

$$\begin{aligned}
 |AL| &= |AK| + |KM| + |MB| + |BL| \\
 \iff |AL| &= |AK| + |KB| + |BL| \quad / : |DL| \\
 \iff \frac{|AL|}{|DL|} &= \frac{|AK|}{|DL|} + \frac{|KB|}{|DL|} + \frac{|BL|}{|DL|} \\
 \stackrel{(1.2)}{\iff} \operatorname{ctg} \omega &= \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

To smo i željeli pokazati. Dakle, dokazali smo istinitost tvrdnje teorema.  $\square$

Prethodni dokaz odnosio se na kut  $\omega$  koji je Brocardov kut pridružen pozitivnoj Brocardovoj točki. Na analogan način može se dokazati da ista jednakost vrijedi i za Brocardov kut pridružen negativnoj Brocardovoj točki tj. ako s  $\omega'$  označimo pripadni Brocardov kut negativne Brocardove točke, vrijedi da je

$$\operatorname{ctg} \omega' = \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma$$

Slijedi,  $\operatorname{ctg} \omega = \operatorname{ctg} \omega'$ . Obzirom da je funkcija kotangens strogo padajuća na intervalu na kojemu su definirani kutovi  $\omega$  i  $\omega'$ , slijedi da je  $\omega = \omega'$ . Dakle, pozitivna i negativna Brocardova točka imaju sukladan pripadni Brocardov kut.

Sada znamo odrediti točnu vrijednost kuta  $\omega$  u ovisnosti o trokutu čiji je to Brocardov kut. No možemo se pitati i koja je najmanja gornja međa vrijednosti  $\omega$ , tj. vrijednost koja je neovisna o trokutu, ali takva da za sve vrijednosti ispod te postoji trokut čija vrijednost Brocardovog kuta odgovara nekoj od tih vrijednosti. Koristeći prethodno dokazani teorem dokazat ćemo da ta vrijednost iznosi  $\pi/6$ .

**Teorem 1.2.3.** *Neka je  $\omega$  Brocardov kut trokuta. Vrijedi da je*

$$\omega \leq \frac{\pi}{6}.$$

*Jednakost vrijedi ako i samo ako je trokut jednakostraničan.*

*Dokaz.*

Neka je  $ABC$  trokut s unutarnjim kutovima  $\alpha, \beta$  i  $\gamma$ . Tada je  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

Označimo slovom  $S$  zbroj kotangensa unutarnjih kutova trokuta  $ABC$ . Dobivamo

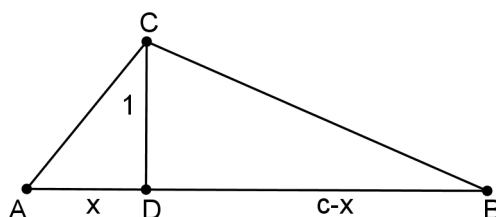
$$\begin{aligned}
 S &= \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma \\
 &= \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} (180^\circ - (\alpha + \beta)) \\
 &= \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} (\alpha + \beta) \\
 &= \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta - \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta + 1}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}
 \end{aligned}$$



Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti

$$\alpha \leq \beta \leq \gamma. \quad (1.4)$$

Tada nožište visine iz vrha  $C$  (u vrhu  $C$  je najveći kut) pripada stranici  $\overline{AB}$ . Označimo nožište te visine s  $D$  i duljinu dužine  $\overline{AD}$  s  $x$ . Tada je  $|DB| = c - x$ .



Slika 1.12

Uzmimo da je  $|CD|$  jedinične duljine. Tada vrijedi:

$$\operatorname{ctg} \alpha = x, \quad \operatorname{ctg} \beta = c - x.$$

Sada dobivamo

$$S = x + (c - x) - \frac{x(c - x) - 1}{c} = \frac{c^2 - xc + x^2 - 1}{c}$$

$$\Leftrightarrow Sc = c^2 - xc + x^2 + 1$$

a to, s malo podešavanja, možemo zapisati na sljedeći način

$$Sc = \left(x - \frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}c - 1\right)^2 + \sqrt{3}c \geq \sqrt{3}c.$$

Dakle,  $S \geq \sqrt{3}$ . Primijenimo li teorem 1.2.2. na dobivenu nejednakost, dobivamo

$$\operatorname{ctg} \omega \geq \sqrt{3}.$$

Obzirom da je funkcija kotangens strogo padajuća na intervalu  $[0, \pi]$  i  $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$ , slijedi

$$\omega \leq \frac{\pi}{6}.$$

Preostaje još dokazati da je  $\omega = \frac{\pi}{6}$  ako i samo ako je trokut jednakostraničan. Ako je trokut jednakostraničan, onda je njegova Brocardova točka središte trokuta te je očito  $\omega = \frac{\pi}{6}$ , dakle implikacija ( $\Leftarrow$ ) je očita.

Preostaje dokazati da ako je  $\omega = \frac{\pi}{6}$ , onda je trokut jednakokraničan. Pretpostavimo da je  $\omega = \frac{\pi}{6}$ . Tada je  $S = \operatorname{ctg} \omega = \sqrt{3}$ . Prema prethodno dokazanom tada je

$$\sqrt{3}c = \left(x - \frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}c - 1\right)^2 + \sqrt{3}c.$$

Uočimo da jednakost vrijedi jedino u slučaju da je zbroj prva dva pribrojnika na d strani jednak nuli. Obzirom da su ta oba pribrojnika kvadrati realnog broja, slijedi da su nene-  
gativni, odnosno da bi jednakost vrijedila oba moraju biti jednaka nuli. Stoga jednakost  
vrijedi ako i samo ako

$$\begin{aligned} \left(x - \frac{c}{2}\right)^2 = 0 \quad & \text{i} \quad \left(\frac{\sqrt{3}}{2}c - 1\right)^2 = 0 \\ \Leftrightarrow x - \frac{c}{2} = 0 \quad & \text{i} \quad \frac{\sqrt{3}}{2}c - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow x = \frac{c}{2} \quad & \text{i} \quad c = \frac{2}{\sqrt{3}} \\ \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad & \text{i} \quad c = \frac{2}{\sqrt{3}} \end{aligned} \tag{1.5}$$

Jer je  $x = \operatorname{ctg} \alpha$ ,  $\alpha \in \langle 0, \pi \rangle$  i vrijedi (1.5), slijedi da je  $\alpha = \frac{\pi}{3}$ .

Nadalje, uvrštavanjem (1.5) u prethodno dobivenu tvrdnju  $\operatorname{ctg} \beta = c - x$ , dobivamo da je  $\operatorname{ctg} \beta = \frac{1}{\sqrt{3}}$  pa je i  $\beta = \frac{\pi}{3}$ .

Dakle,  $\alpha = \beta = \frac{\pi}{3}$ . Tada je  $\gamma = \pi - 2 \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$ .

Svi kutovi trokuta  $ABC$  su sukladni pa je trokut  $ABC$  jednakokraničan.

□

## Poglavlje 2

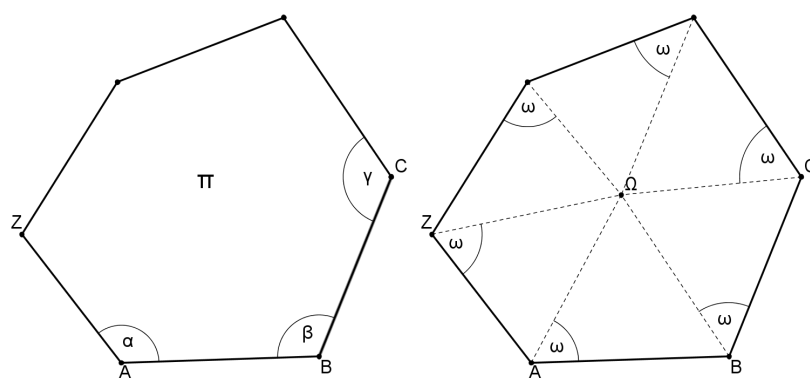
# Brocardova točka i Brocardov kut poligona

### 2.1 Problem postojanja Brocardove točke za poligone

Problem postojanja Brocardove točke izvorno se odnosio samo na trokut. Nakon što su Brocardova točka i Brocardov kut u velikoj mjeri istraženi, postavilo se pitanje postojanja analogona Brocardove točke, a samim tim i Brocardovog kuta, za konveksni poligon. Dakle, postavilo se pitanje:

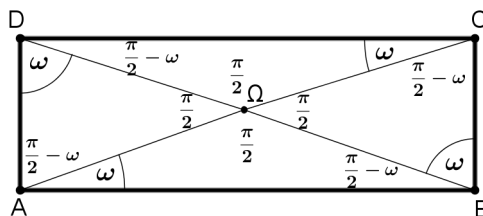
*Neka je  $ABC\dots Z$  konveksni poligon. Postoji li točka  $\Omega$  za koju vrijedi*  
$$\angle\Omega AB = \angle\Omega BC = \angle\Omega CD = \dots = \angle\Omega ZA = \omega?$$

Očito, takvu točku  $\Omega$  nazvali bismo Brocardova točka poligona, a kut  $\omega$ , Brocardov kut poligona.



Slika 2.1: Brocardova točka poligona  $ABC\dots Z$

Nije teško uočiti primjere poligona za koje ne postoji Brocardova točka. Primjerice, jedini pravokutnik koji ima Brocardovu točku je kvadrat.



Slika 2.2: Kvadrat je jedini pravokutnik koji ima Brocardovu točku

Jasno je da svaki pravilni  $n$ -poligon ima Brocardovu točku, a to je njegovo središte. Stoga je od interesa ustanoviti kriterije postojanja Brocardove točke za općenite konveksne  $n$ -poligone.

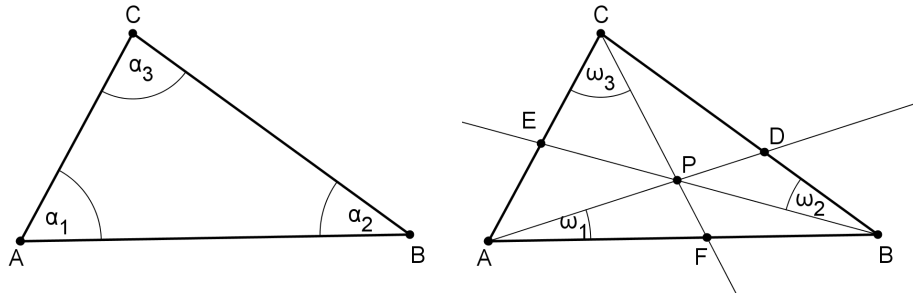
Tim problemom bavili su se Adi Ben-Israel i Stephan Foldes u radovima [3] i [4]. U ovom radu iznijet ćemo neke od rezultata koji su prikazani u tim radovima. U njima se postojanje Brocardove točke poligona istražuje metodama infinitezimalnog računa. Osnovnu ideju već smo spomenuli kod objašnjavanja posljednjeg od tri navedena pristupa određivanja Brocardovove točke trokuta (vidi stranicu 9).

## 2.2 Definiranje Brocardovih objekata poligona

Prisjetimo se, Brocardova točka trokuta određena je presjekom pravaca vrhovima trokuta tj. pravcima  $AD$ ,  $BE$ ,  $CF$ . Stoga Brocardovu točku možemo promatrati vezano uz Cevin teorem. Prema Cevinom teoremu nužan i dovoljan uvjet da bi se pravci  $AD$ ,  $BE$  i  $CF$  sjekli u jednoj točki glasi, u trigonometrijskom obliku:

$$\frac{\sin \angle BAD}{\sin \angle DAC} \cdot \frac{\sin \angle CBE}{\sin \angle EBA} \cdot \frac{\sin \angle ACF}{\sin \angle FCB} = 1.$$

Definiranjem prikladne funkcije proces sužavanja trokuta  $\Delta(\theta)$  mogli bismo promatrati primjenom Cevinog teorema. Neka je  $ABC$  trokut s kutovima  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  i  $\alpha_3$  te neka su  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$  kutovi, ne veći od najmanjeg kuta trokuta  $ABC$ , određeni pravcima kroz vrhove trokuta i odgovarajućim stranicama, kao na sljedećoj slici:

Slika 2.3: Primjena Cevinog teorema na trokut  $ABC$ 

Definiramo funkciju  $f, f : [0, \min\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}]^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(\omega_1, \omega_2, \omega_3) := \frac{\sin \omega_1}{\sin(\alpha_1 - \omega_1)} \cdot \frac{\sin \omega_2}{\sin(\alpha_2 - \omega_2)} \cdot \frac{\sin \omega_3}{\sin(\alpha_3 - \omega_3)}.$$

Primjenom Cevinog teorema slijedi da će jedino u slučaju  $f(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = 1$  presjek pravaca  $AD, BE$  i  $CF$  biti jedna točka. Slučajevi za koje je  $f(\omega_1, \omega_2, \omega_3) < 1$  ili  $f(\omega_1, \omega_2, \omega_3) > 1$  odgovaraju situacijama u kojima se spomenuti pravci ne sijeku u jednoj točki.

S obzirom na to da postoji generalizacija Cevinog teorema na poligone, prethodni postupak je moguće primijeniti na  $n$ -poligone. U tom slučaju za  $n$ -poligon s kutovima  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  i odgovarajućim kutovima  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  označimo najprije  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ,  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ . Podrazumijevat ćemo da za  $n$ -torke  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  i  $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$  vrijedi  $\alpha \leq \beta$  ako vrijedi  $\alpha_i \leq \beta_i$  za svaki  $i = 1, 2, \dots, n$ . Promotrimo funkciju

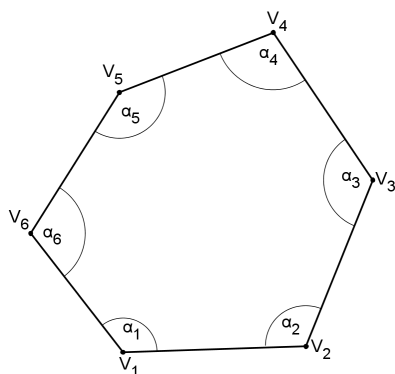
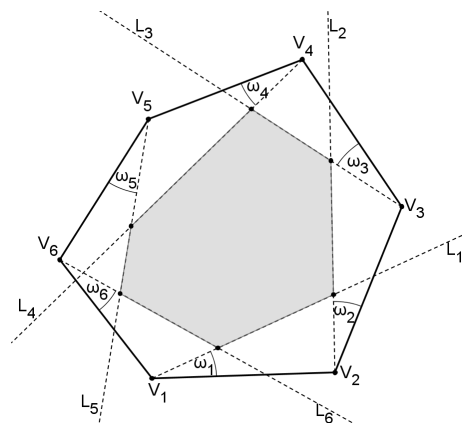
$$f(\omega) := \prod_{i=1}^n \frac{\sin \omega_i}{\sin(\alpha_i - \omega_i)}, \quad \text{definiranu za } 0 \leq \omega_i < \alpha_i, i = 1, 2, \dots, n.$$

Svaka od funkcija  $\frac{\sin \omega_i}{\sin(\alpha_i - \omega_i)}$  jedne varijable  $\omega_i$  rastuća je na intervalu  $[0, \alpha_i]$  jer joj je derivacija  $\frac{\sin \alpha_i}{\sin^2(\alpha_i - \omega_i)}$  pozitivna. Stoga je i funkcija  $f(\omega)$  monotono rastuća kao produkt rastućih funkcija, tj.

$$\omega < \omega' \implies f(\omega) < f(\omega')$$

Nadalje, svaki  $n$ -poligon bit će prikazan kao presjek  $n$  zatvorenih poluravnina pa ćemo u tu svrhu uvesti odgovarajuće oznake. Zatim, bit će nam potrebna klasifikacija svih mogućih slučajeva za presjeke općenite familije zatvorenih poluravnina i presjeke familije njihovih komplementarnih poluravnina.

Neka je  $\mathcal{P}$  omeđen konveksan  $n$ -poligon. Označimo njegove vrhove u pozitivnom smjeru tj. u smjeru suprotnom kazaljki na satu redom s  $V_1, V_2, \dots, V_n$ , a pripadne kutove s  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ . Svi  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  su manji od  $\pi$ . Za indekse točaka i kutova podrazumijevamo da se uzimaju modulo  $n$ , npr.  $V_n = V_0, V_{n+1} = V_1$  itd.

Slika 2.4: Šesterokut  $\mathcal{P}$ Slika 2.5: Presjek  $\mathcal{P}^-(\theta)$ 

Nadalje, za  $i = 1, \dots, n$  neka je  $L_i$  polupravac s početnom točkom  $V_i$  koji razdvaja vrhove  $V_{i-1}$  i  $V_{i+1}$ . Pod "razdvaja" mislimo na to da nijedna od dviju komplementarnih poluravnina određenih s  $L_i$  ne sadrži i točku  $V_{i-1}$  i točku  $V_{i+1}$  (vidi primjer šesterokuta na slikama 2.4 i 2.5). Od dviju navedenih poluravnina samo jedna ima interior koji sadrži  $\{V_{i-1}\} \setminus L_i$ , ali ne sadrži  $\{V_{i+1}\} \setminus L_i$ . Označimo takvu zatvorenu poluravninu s  $L_i^+$ , a njoj komplementarnu zatvorenu poluravninu s  $L_i^-$ . Uočimo da polupravac  $L_i$  tvori kut  $\omega_i$ ,  $0 \leq \omega_i \leq \alpha_i$ , sa stranicom  $\overline{V_i V_{i+1}}$  poligona  $\mathcal{P}$ . Variranje kuta  $\omega_i$  možemo promatrati kao rotaciju tog polupravca oko vrha  $V_i$  te označiti s  $L_i(\omega_i)$  polupravac određen kutom  $\omega_i$ . Nadalje, neka je  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$  te  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ . Označimo:

$$\mathcal{P}^-(\omega) := \bigcap_{i=1}^n L_i^-(\omega_i) \quad \text{ i } \quad \mathcal{P}^+(\omega) := \bigcap_{i=1}^n L_i^+(\omega_i)$$

Očito je  $\mathcal{P}^+(0) = \mathcal{P} = \mathcal{P}^-(\alpha)$ . Stoga možemo naslutiti da presjek  $\mathcal{P}^+(\omega)$  ovisi o kutu  $\omega$  i to na način da kako  $\omega$  raste od 0 prema  $\alpha$ , tako se  $\mathcal{P}^+(\omega)$  smanjuje od  $\mathcal{P}$  prema praznom skupu.

Primijetimo,  $(L_i^+ : i = 1, 2, \dots, n)$  je familija zatvorenih poluravnina, a o presjeku takve familije govori nam sljedeća lema, čiji dokaz možemo naći u [3].

**Lema 2.2.1.** Neka je  $(H_i : i \in I)$  familija zatvorenih poluravnina i  $(H_i^- : i \in I)$  familija njima komplementarnih zatvorenih poluravnina. Za svaku familiju  $(H_i : i \in I)$  zatvorenih poluravnina moguć je jedan i samo jedan od sljedećih slučajeva:

- (a)  $\cap\{H_i : i \in I\} = \cap\{H_i^- : i \in I\}$  i to je jednočlani skup, tj. točka
- (b) svaki od presjeka  $\cap\{H_i : i \in I\}$  i  $\cap\{H_i^- : i \in I\}$  je ili neomeđen ili prazan,
- (c) jedan od presjeka  $\cap\{H_i : i \in I\}$  i  $\cap\{H_i^- : i \in I\}$  je neprazan i zatvoren, a drugi je prazan.

Primjenom prethodne leme na familiju  $(L_i^+ : i = 1, 2, \dots, n)$  zatvorenih poluravnina te proučavanjem granične vrijednosti funkcije  $f(\omega)$  za svaki od navedenih slučajeva dobiva se sljedeći teorem:

**Teorem 2.2.2.** Neka je  $\mathcal{P}$  omeđen konveksan  $n$ -poligon s kutovima  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  te neka je  $\omega$   $n$ -torka kutova  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ . Za  $0 \leq \omega \leq \alpha$  neka je

$$f(\omega) := \prod_{i=1}^n \frac{\sin \omega_i}{\sin(\alpha_i - \omega_i)}.$$

Tada za svaki  $0 \leq \omega \leq \alpha$  postoje četiri moguća slučaja:

- (a)  $\mathcal{P}^-(\omega) = \mathcal{P}^+(\omega)$  je točka  $Q$ , polupravci  $L_i(\omega_i)$  se sijeku u točki  $Q$  i  $f(\omega) = 1$
- (b)  $\mathcal{P}^-(\omega) \neq \emptyset$ ,  $\mathcal{P}^+(\omega) = \emptyset$  i  $0 \leq f(\omega) < 1$
- (c)  $\mathcal{P}^-(\omega) = \emptyset$ ,  $\mathcal{P}^+(\omega) \neq \emptyset$  i  $1 < f(\omega) < \infty$
- (d)  $\mathcal{P}^-(\omega)$  i  $\mathcal{P}^+(\omega)$  su prazni, pri čemu  $f(\omega)$  može poprimiti bilo koju pozitivnu vrijednost.

Za dani poligon  $\mathcal{P}$ , točku sjecišta svih polupravaca  $L_i(\omega_i)$  (slučaj (a) prethodnog teorema) nazivamo Brocardova točka poligona ako vrijedi da su svi kutovi  $\omega_i$  sukladni. Primijetimo da iz prethodnog teorema slijedi jedinstvenost Brocardove točke, tj. ako poligon ima Brocardovu točku ona je jedinstvena. To vidimo iz monotonosti funkcije  $f$ .

Napišimo sada formalne definicije Brocardovih objekata: transformacije, kuta i točke.

**Definicija 2.2.3.** Neka je  $\Pi$  omeđen konveksan  $n$ -poligon s vrhovima  $V_1, V_2, \dots, V_n$  (pozitivno orijentirani tj. označeni u smjeru suprotnom kazaljki na satu). Neka je  $\theta$  kut ne veći od najmanjeg kuta poligona  $\Pi$ . Za  $i = 1, 2, \dots, n$  neka je:

$L_i(\theta)$  polupravac vrhom  $V_i$  koji sa stranicom  $\overline{V_i V_{i+1}}$  zatvara kut  $\theta$ ,

$L_i^+(\theta)$  zatvorena poluravnina određena s  $L_i(\theta)$ , koja:

- ako je  $\theta > 0$ , ne uključuje vrh  $V_{i+1}$
- ako je  $\theta = 0$ , uključuje vrh  $V_{i+1}$

1) Neka je  $\Pi(\theta)$  presjek (moguće prazan)  $n$  poluravnina  $L_i^+(\theta)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Pridruživanje  $\Pi \rightarrow \Pi(\theta)$  nazivamo (pozitivna) Brocardova transformacija poligona  $\Pi$ .

Radi jednostavnosti izražavanja, i sam rezultat  $\Pi(\theta)$  nazivat ćemo (pozitivnom) Brocardovom transformacijom poligona  $\Pi$ .

2) Ako postoji najveći takav kut  $\theta$  za koji je skup  $\Pi(\theta)$  neprazan, tada taj kut nazivamo (pozitivan) Brocardov kut i označavamo ga s  $\omega$ .

3) Ako je  $\Pi(\omega)$  jednočlani skup  $\{\Omega\}$  i svi polupravci  $L_i(\omega) : i = 1, \dots, n$  sijeku se u točki  $\Omega$ , tada točku  $\Omega$  zovemo (pozitivnom) Brocardovom točkom poligona  $\Pi$ .

Kao što smo kod trokuta definirali i pozitivnu i negativnu Brocardovu točku, isto je moguće i kod poligona. Prethodna definicija odnosila se na pozitivne Brocardove objekte. Analogno, promjenom orijentacije, definiramo negativnu Brocardovu transformaciju, točku i kut. Napomenimo, međutim, da postojanje pozitivne Brocardove točke poligona ne povlači postojanje negativne Brocardove točke poligona. Pokazuje se da ako za poligon postoje i pozitivna i negativna Brocardova točka, onda su i pripadni Brocardovi kutovi jednaki. Kao što smo do sada radili, u nastavku ćemo razmatrati samo pozitivne Brocardove objekte, ne naglašavajući pritom pozitivnost.

#### Napomena 2.2.4. Brocardova transformacija

- Po definiciji Brocardove transformacije  $\Pi(\theta)$  je zatvoren konveksan poligon kao presjek konačno mnogo zatvorenih poluravnina. Naime, presjek bilo koje familije omeđenih zatvorenih poluravnina je uvijek zatvoren konveksan skup (moguće prazan), a i poznato je da je svaki zatvoren konveksan podskup od  $\mathbb{R}^2$  presjek neke familije zatvorenih poluravnina.
- Poligon  $\Pi(0)$  podudara se s poligonom  $\Pi$ , a to povlači da ako je  $\Pi$  neprazan da će i  $\Pi(\theta)$  biti neprazan za dovoljno male kutove  $\theta$ .
- Za Brocardovu transformaciju vrijedi da je monotona i to u smislu da

$$0 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \quad \Rightarrow \quad \Pi(\theta_2) \subseteq \Pi(\theta_1) \subseteq \Pi.$$

Stoga je

$$\Pi(\theta) = \bigcap_{0 \leq \alpha \leq \theta} \Pi(\alpha).$$

#### Napomena 2.2.5. Dobra definiranost i postojanje Brocardovog kuta

Nastavljajući se na posljednju natuknicu prethodne napomene, točnije na  $\Pi(\theta) = \bigcap_{0 \leq \alpha \leq \theta} \Pi(\alpha)$ , istaknimo važnu činjenicu da je skup  $\bigcap_{0 \leq \alpha \leq \omega} \Pi(\alpha)$  neprazan. Naime, svi  $\Pi(\alpha)$  za  $0 \leq \alpha \leq \omega$  su neprazni kompaktni skupovi, a poznato je svojstvo da je presjek svake familije takvih skupova također neprazan. U našem slučaju, ako bi presjek bio prazan skup, komplementi  $\Pi \setminus \Pi(\alpha)$  činili bi otvoreni pokrivač poligona  $\Pi$ , a zbog kompaktnosti taj bi pokrivač imao konačan potpokrivač  $\{\Pi \setminus \Pi(\alpha_i)\}$  za



neke  $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$ . Međutim,  $\bigcup (\Pi \setminus \Pi(\alpha_i)) = \Pi \setminus \bigcap_{i=1}^n \Pi(\alpha_i)$ , a kako je  $\bigcap_{i=1}^n \Pi(\alpha_i)$  neprazan skup, jednak  $\Pi(\alpha_n)$ , skupovi  $\Pi \setminus \Pi(\alpha_i)$  ne bi pokrili cijeli  $\Pi$ . Odakle možemo zaključiti da je Brocardov kut  $\omega$  dobro definiran i da postoji za svaki konveksni poligon  $\Pi$ .

Naime, neka je  $T$  bilo koja točka iz presjeka svih nepraznih skupova  $\Pi(\alpha)$ . Spojnice točke  $T$  s vrhovima  $V_1, V_2, \dots, V_n$  poligona  $\Pi$  zatvaraju sa stranicama  $\overline{V_1V_2}, \overline{V_2V_3}, \dots, \overline{V_nV_1}$  redom kutove koje označimo s  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ . Pretpostavimo da je  $\psi = \min\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n\}$  najmanji među ovim kutovima tj.  $\psi \leq \psi_i$ , za  $i = 1, 2, \dots, n$ . Lako se vidi da je tada  $T \in \Pi(\psi)$ , ali da  $T \notin \Pi(\theta)$  za  $\theta > \psi$ . To znači da je presjek svih nepraznih skupova  $\Pi(\alpha)$  sadržan u  $\Pi(\psi)$ . Ako je  $T$  jedina točka u tom presjeku, onda je  $\psi$  Brocardov kut po definiciji jer je to najveći kut za koji je Brocardova transformacija od  $\Pi$  neprazan skup.

Pretpostavimo da se u presjeku nalazi i neka točka  $T' \neq T$ . Analogno,  $T' \in \Pi(\psi')$  za neki kut  $\psi' > 0$ , a  $T' \notin \Pi(\theta)$  za  $\theta > \psi'$ . Sada mora biti  $\psi = \psi'$  jer ako je npr.  $\psi < \psi'$ , onda  $T' \notin \Pi(\psi)$  pa  $T$  ne bi bila u presjeku svih nepraznih  $\Pi(\alpha)$ . U ovom slučaju presjek nepraznih  $\Pi(\alpha)$  jednak je cijelom segmentu  $\overline{TT'}$ , a za sve točke tog segmenta pripadni kut  $\psi$  mora biti jedan te isti. Na taj način opet imamo najveći kut za koji je  $\psi(\alpha)$  neprazan i to je Brocardov kut.

Za razliku od Brocardovog kuta koji postoji za svaki konveksan poligon  $\Pi$ , Brocardova točka postoji jedino ako je Brocardova transformacija  $\Pi(\theta)$  jednočlani skup, tj. točka, koja je ujedno i sjecište  $n$  polupravaca  $L_i(\omega)$ . Zasad nije poznat teorem pomoću kojeg bi se jednostavno utvrdilo ima li dani poligon Brocardovu točku ili ne. Ipak, pri odbacivanju odnosno potvrđivanju tvrdnje postojanja Brocardove točke, od koristi je teorem kojeg ćemo iskazati i dokazati u sljedećem poglavlju.

## 2.3 Kriterij postojanja Brocardove točke pomoću sličnosti poligona

Teorem kojeg navodimo u ovom poglavlju daje glavne rezultate o Brocardovoj točki koji su zasada objavljeni, a odnose se na postojanje Brocardove točke poligona i njezinu stabilnost pod Brocardovim transformacijama.

Podsjetimo se najprije pojma sličnosti u euklidskoj ravnini.

**Definicija 2.3.1.** Preslikavanje  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  nazivamo direktna sličnost ako vrijedi:  
 (a) postoji pozitivan realan broj  $s$  takav da vrijedi

$$|h(x)h(y)| = s|xy|, \quad \text{za bilo koje dvije točke } x \text{ i } y$$

(b) za bilo koje tri različite točke  $x, y$  i  $z$ :

$$\angle h(x)h(y)h(z) = \angle xyz.$$

Broj  $s$  nazivamo koeficijent sličnosti preslikavanja  $s$ .

Navedimo i neka od najvažnijih svojstava sličnosti, a zatim i definiciju sličnosti dvaju poligona.

- Direktne sličnosti su bijektivna preslikavanja i čine grupu obzirom na kompoziciju.
- Direktna sličnost preslikava konveksan skup u konveksan skup.
- Svaka direktna sličnost jednoznačno je određena svojim djelovanjem na bilo koje dvije različite točke.

**Definicija 2.3.2.** Neka su  $\Pi$  i  $\Pi'$  dva  $n$ -poligona s vrhovima  $V_1, \dots, V_n$ , odnosno  $V'_1, \dots, V'_n$ , označeni u skladu s pozitivnom orijentacijom. Kažemo da su  $\Pi$  i  $\Pi'$  slični poligoni ako postoji direktna sličnost  $h$  takva da je  $h(V_i) = V'_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . U tom slučaju pišemo  $\Pi \sim \Pi'$ .

Prije samog teorema navodimo i napomenu koju ćemo primijeniti u dokazu.

**Napomena 2.3.3.**

Neka su  $A, B, C$  i  $D$  četiri različite točke. One određuju trokute  $ABC, ABD, ACD$  i  $BCD$  (ako su bilo koje tri točke kolinearne one određuju degenerirani trokut - dužinu). Neka su  $A', B', C'$  i  $D'$  točke pridružene, točkama  $A, B, C$  i  $D$ . Ako su bilo koja dva para trokuta slična, npr.

$$ABC \sim A'B'C' \quad \text{i} \quad ABD \sim A'B'D'$$

onda su su i druga dva para trokuta slična, u ovom slučaju,

$$ACD \sim A'C'D' \quad \text{i} \quad BCD \sim B'C'D'$$

Konačno, iskažimo i dokažimo spomenuti teorem.

**Teorem 2.3.4.** *Neka je  $\Pi$  neprazan konveksan  $n$ -poligon i  $\omega$  njegov Brocardov kut. Tada je ekvivalentno:*

- a)  $\Pi$  ima Brocardovu točku
- b)  $\Pi \sim \Pi(\theta)$  za sve  $0 \leq \theta < \omega$
- c)  $\Pi \sim \Pi(\theta)$  za neki  $0 < \theta < \omega$
- d) postoje dva kuta  $0 \leq \theta_1 < \theta_2 < \omega$  takva da su  $\Pi(\theta_1)$  i  $\Pi(\theta_2)$  slični  $n$ -poligoni.

*Ako su prethodni uvjeti ispunjeni, onda sve Brocardove transformacije  $\{\Pi(\theta) : 0 \leq \theta < \omega\}$  imaju istu Brocardovu točku.*

Napomenimo da se prethodno navedeno svojstvo naziva stabilnost Brocardovih transformacija u radu [3].

*Dokaz.*

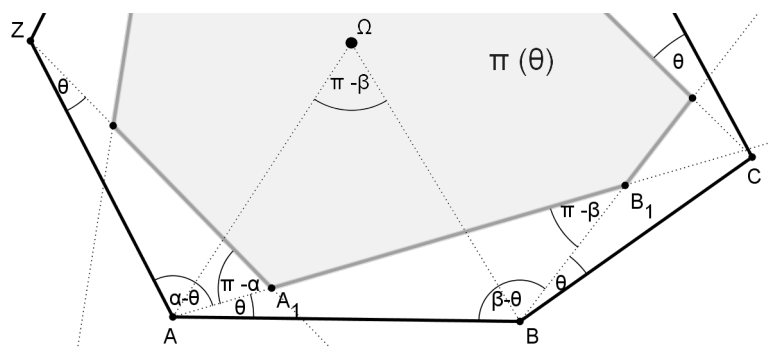
(a)  $\Rightarrow$  (b):

Neka je  $\Omega$  Brocardova točka poligona  $\Pi$  i neka su  $A_1, B_1, \dots, Z_1$  vrhovi poligona  $\Pi(\theta)$ , kao na slici 2.6. Tada je (vidi sliku 2.6):

$$|A_1 B_1| = |AB_1| - |AA_1|. \quad (2.1)$$

Primjenom teorema o sinusima na trokut  $ABB_1$  dobivamo

$$|AB_1| = |AB| \frac{\sin(\beta - \theta)}{\sin \beta}. \quad (2.2)$$



Slika 2.6: Poligon  $\Pi(\theta)$  i originalni poligon  $\Pi$

Nadalje, primjenom istog teorema, redom na trokute  $AA_1Z$ ,  $A\Omega Z$  te  $AB\Omega$ , dobivamo:

$$\begin{aligned}
 |AA_1| &= |AZ| \frac{\sin \theta}{\sin \alpha} \\
 &= |A\Omega| \frac{\sin \alpha \sin \theta}{\sin \omega \sin \alpha} \\
 &= |AB| \frac{\sin(\beta - \omega) \sin \alpha \sin \theta}{\sin \beta \sin \omega \sin \alpha} \\
 &= |AB| \frac{\sin(\beta - \omega) \sin \theta}{\sin \beta \sin \omega}
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Iz (2.1), (2.2) i (2.3) slijedi:

$$|A_1B_1| = |AB| \left[ \frac{\sin(\beta - \theta)}{\sin \beta} - \frac{\sin(\beta - \omega) \sin \theta}{\sin \beta \sin \omega} \right].$$

Sada možemo odrediti omjer stranica  $\overline{AB}$  i  $\overline{A_1B_1}$ :

$$\frac{|A_1B_1|}{|AB|} = \frac{\sin(\beta - \theta)}{\sin \beta} - \frac{\sin(\beta - \omega) \sin \theta}{\sin \beta \sin \omega}.$$

Primjenom adicijske formule za sinus te sređivanjem, dobivamo

$$\frac{|A_1B_1|}{|AB|} = \cos \theta - \operatorname{ctg} \omega \sin \theta.$$

Analogno se pokaže

$$\frac{|B_1C_1|}{|BC|} = \frac{|C_1D_1|}{|CD|} = \dots = \frac{|V_1Z_1|}{|VZ|} = \cos \theta - \operatorname{ctg} \omega \sin \theta.$$

Dakle,  $\Pi \sim \Pi_\theta$ , a to smo i željeli pokazati.

(b)  $\Rightarrow$  (c):

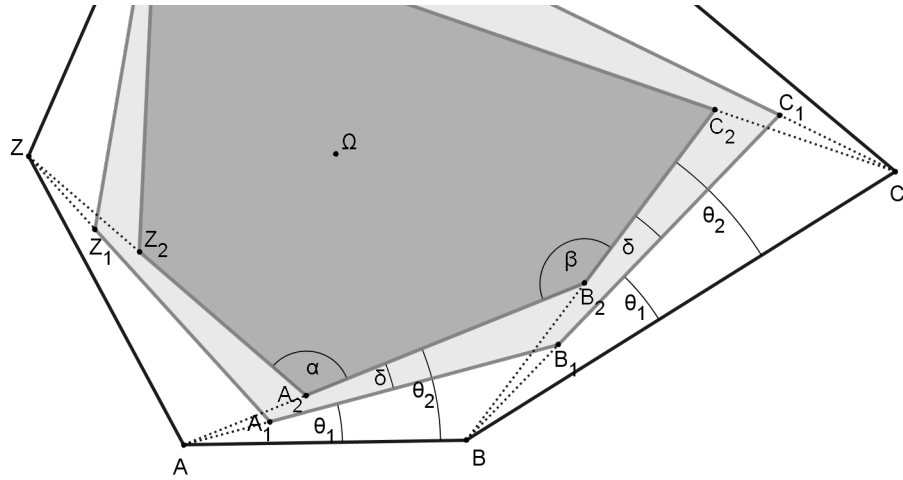
Očito je da tvrdnja vrijedi.

(c)  $\Rightarrow$  (d): Znamo da je  $\Pi(0)$ . Stoga uzmimo da je  $\theta_1 = 0$  i  $\theta_2 = \theta$ , gdje je  $0 < \theta < \omega$ . Za navedene kutove implikacija očito vrijedi. Time smo dokazali (c)  $\Rightarrow$  (d).

(d)  $\Rightarrow$  (a):

Neka su  $\theta_1$  i  $\theta_2$  kutovi, takvi da je  $0 \leq \theta_1 < \theta_2 < \omega$  i  $\Pi(\theta_1) \sim \Pi(\theta_2)$ . Označimo razliku kutova  $\theta_1$  i  $\theta_2$  s  $\delta$ , tj.

$$\delta := \theta_2 - \theta_1.$$

Slika 2.7: Slični poligoni  $\Pi(\theta_1)$  i  $\Pi(\theta_2)$ 

Neka je  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  direktna sličnost s koeficijentom  $0 < s < 1$ , za koje vrijedi

$$\Pi(\theta_2) = h(\Pi(\theta_1)).$$

Vrhove poligona  $\Pi$ ,  $\Pi(\theta_1)$  i  $\Pi(\theta_2)$  označimo redom s  $A, B, \dots, Z$ ;  $A_1, B_1, \dots, Z_1$ ;  $A_2, B_2, \dots, Z_2$ , (vidi sliku 2.7). Vrijedi da je:

$$A_2 = h(A_1), \quad B_2 = h(B_1), \quad \dots, \quad Z_2 = h(Z_1)$$

Kutove sličnih poligona  $\Pi(\theta_1)$  i  $\Pi(\theta_2)$  označimo s  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$

Omjer odgovarajućih stranica poligona  $\Pi(\theta_1)$  i  $\Pi(\theta_2)$  definiran je na sljedeći način:

$$\frac{|A_2 B_2|}{|A_1 B_1|} = s, \quad \text{gdje je } 0 < s < 1 \quad \text{koeficijent sličnosti preslikavanja } h.$$

Definirajmo niz sličnih poligona  $(\Pi_n)$ :

$$\Pi_n := h(\Pi_{n-1}) = h^{n-1}(\Pi_1), \quad \Pi_1 := \Pi(\theta_1).$$

Očito je (vidi sliku 2.7) da se s porastom vrijednosti  $n$ , poligoni  $\Pi_n$  smanjuju. Promatrajući rast vrijednosti  $n$  kao beskonačni proces, dokazat ćemo postojanje Brocardove točke poligona  $\Pi$ . Preciznije, dokazat ćemo da postoji točka  $\Omega$  za koju vrijedi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pi_n = \{\Omega\} \quad (2.4)$$

$$\angle BA\Omega = \angle CB\Omega = \dots = \angle AZ\Omega \quad (2.5)$$

Dokažimo prvo (2.4).

Označimo vrhove poligona  $\Pi_n$  s  $\{A_n, B_n, \dots, Z_n\}$ . Pokazat ćemo da svaki od nizova točaka  $(A_n), (B_n), \dots, (Z_n)$  konvergira i to jednoj te istoj točki ravnine. To će značiti da niz  $(\Pi_n)$  konvergira u jednu točku.

Uzmimo niz  $(A_n)$ , a isti zaključak vrijedit će za ostale nizove vrhova. Kao su točke tog niza dobivene primjenom sličnosti  $h$  s koeficijentom  $s$ ,  $0 < s < 1$ , vrijedi

$$|A_{n+1}A_{n+2}| = h|A_nA_{n+1}|, \quad \text{za svaki } n.$$

Budući da je  $h$  kontrakcija ravnine  $\mathbb{R}^2$ , a  $\mathbb{R}^2$  je potpuni metrički prostor, možemo primijeniti Banachov teorem o fiksnoj točki (vidi npr. [9], Teorem 8, str. 131).

Po tom teoremu kontrakcija  $h$  potpunog metričkog prostora ima jedinstvenu fiksnu točku  $\Omega$  i svaki niz  $(x_n)$ ,  $x_n = h^{n-1}(x_1)$  za bilo koju točku  $x_1$ , konvergira u točku  $\Omega$ .

Dakle,  $\lim A_n = \lim B_n = \dots = \lim Z_n = \Omega$ , izborom točaka  $A_1, B_1, \dots, Z_1$  za prve članove niza, budući da je  $A_n = h^{n-1}(A_1)$ , itd.

Preostaje dokazati (2.5) kako bismo se uvjerili da je točka  $\Omega$  doista Brocardova točka. Uočimo

$$\angle BA\Omega = \theta_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \angle A_nAA_{n+1},$$

a analogno možemo izraziti kutove  $\angle CB\Omega, \dots, \angle ZA\Omega$ .

Međutim jednakost svih ovih kutova dokazat ćemo tako da dokažemo da su međusobno jednaki svi pribrojnici u gornjoj sumi, tj. da vrijedi

$$\angle A_nAA_{n+1} = \angle B_nBB_{n+1} = \dots = \angle Z_nZZ_{n+1}. \quad (2.6)$$

Primijetimo da neki od kutova  $\angle A_nAA_{n+1}$  možda mogu biti negativno orijentirani, no to neće bitno utjecati na dokaz budući da će (2.6) značiti jednakost orijentiranih kutova.

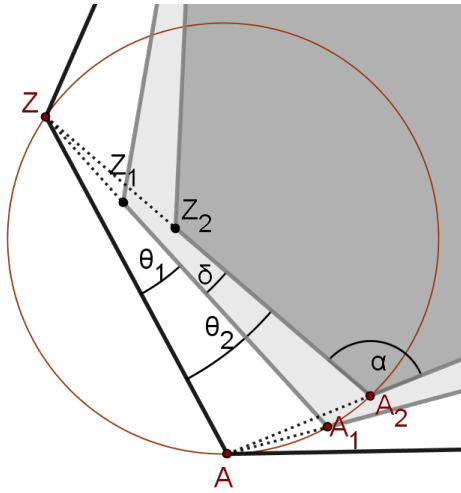
Stoga ćemo u nastavku dokazati (2.6) i to tako da ćemo, principom matematičke indukcije, dokazati sljedeću sličnost trokuta:

$$AA_nA_{n+1} \sim BB_nB_{n+1} \sim \dots \sim ZZ_nZ_{n+1}. \quad (2.7)$$

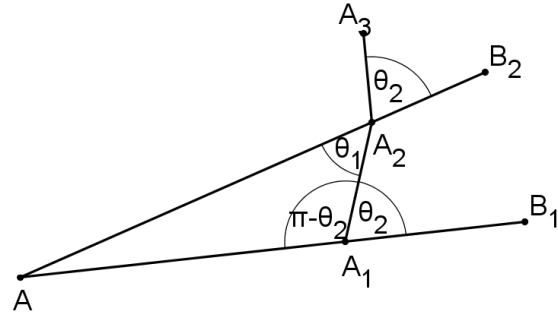
Dokaz matematičkom indukcijom tvrdnje (2.7):

Baza indukcije,  $n = 1$ :

Sličnost poligona  $\Pi(\theta_1)$  i  $\Pi(\theta_2)$  povlači jednakost kutova  $\angle ZA_1A = \angle ZA_2A$ , a to povlači da su točke  $A, A_1, A_2$  i  $Z$  koncikličke (vidi sliku 2.8).



Slika 2.8:  
Koncikličke točke



Slika 2.9:  
Trokut  $AA_1A_2$

Uočimo da su kutovi  $\angle A_2ZA$  i  $\angle AA_1A_2$  kutovi nad tetivom  $\overline{AA_2}$  pa slijedi,

$$\angle AA_1A_2 = \pi - \theta_2.$$

Tada je

$$\angle A_2A_1B_1 = \pi - (\pi - \theta_2) = \theta_2. \quad (2.8)$$

Sada znamo veličine dvaju unutarnjih kutova trokuta  $AA_1A_2$  pa možemo izračunati veličinu preostalog unutarnjeg kuta tog trokuta, tj.

$$\angle AA_1A_2 = \pi - (\pi - \theta_2) - \delta = \theta_1.$$

Sada su nam poznate veličine svih unutarnjih kutova trokuta  $AA_1A_2$  te možemo uočiti da sve ovise samo o veličinama  $\theta_1$  i  $\theta_2$ . Analogno možem zaključiti da isto vrijedi i za trokute  $BB_1B_2, CC_1C_2, \dots, ZZ_1Z_2$ . Konačno, zaključujemo da su sljedeći trokuti slični:

$$AA_1A_2 \sim BB_1B_2 \sim \dots \sim ZZ_1Z_2.$$

Time smo dokazali bazu indukcije.

Korak indukcije:

Pretpostavimo da tvrdnja (2.7) vrijedi za  $n$ . Dakle, pretpostavljamo da je

$$AA_nA_{n+1} \sim BB_nB_{n+1} \sim \dots \sim ZZ_nZ_{n+1}.$$

Želimo dokazati da odgovarajuća tvdnja vrijedi i za  $n + 1$ , tj. da vrijedi

$$AA_{n+1}A_{n+2} \sim BB_{n+1}B_{n+2} \sim \dots \sim ZZ_{n+1}Z_{n+2}.$$

Dokažimo prvo da za svaki  $n$  vrijedi

$$A_nA_{n+1}A_{n+2} \sim B_nB_{n+1}B_{n+2} \sim \dots \sim Z_nZ_{n+1}Z_{n+2}. \quad (2.9)$$

Iz definicije niza poligona  $(\Pi_n)$   $h$  slijedi

$$A_nA_{n+1}A_{n+2} = h^{n-1}(A_1A_2A_3), \quad B_nB_{n+1}B_{n+2} = h^{n-1}(B_1B_2B_3), \quad \dots$$

Analogno vrijedi i za ostale trokute u tvrdnji (2.9). Stoga je dovoljno dokazati da vrijedi:

$$A_1A_2A_3 \sim B_1B_2B_3 \sim \dots \sim Z_1Z_2Z_3. \quad (2.10)$$

Obzirom da je  $B_2A_2A_3 = h(B_1A_1A_2)$  i direktna sličnost "čuva kutove", vrijedi jednakost  $\angle B_2A_2A_3 = \angle B_1A_1A_2$ . Primjenom (2.8) dobivamo:

$$\angle B_2A_2A_3 = \theta.$$

Pogledajmo sada sliku 2.9. Uočimo,

$$\angle A_3A_2A_1 = (\pi - \theta_2) + \theta_1. \quad (2.11)$$

Štoviše, zbog sličnosti  $h$  vrijedi:

$$\frac{|A_2A_3|}{|A_1A_2|} = s. \quad (2.12)$$

Nadalje, jer (2.11) i (2.12) ovise samo o veličinama  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  i sličnosti  $h$ , slijedi da je tvrdnja (2.10) istinita, a ona povlači istinitost tvrdnje (2.9).

Sada, kombinacijom tvrdnje koju smo u prethodnom redu dokazali i pretpostavke indukcije, dakle, kombinacijom tvrdnji:

$$\begin{aligned} AA_nA_{n+1} &\sim BB_nB_{n+1} \sim \dots \sim ZZ_nZ_{n+1} \\ A_nA_{n+1}A_{n+2} &\sim B_nB_{n+1}B_{n+2} \sim \dots \sim Z_nZ_{n+1}Z_{n+2} \end{aligned}$$

te napomene 2.3.3., koju smo naveli neposredno prije iskaza ovog teorema, slijedi da je:

$$AA_{n+1}A_{n+2} \sim BB_{n+1}B_{n+2} \sim \dots \sim ZZ_{n+1}Z_{n+2}.$$

Time smo dokazali korak indukcije.

Dakle, po principu matematičke indukcije, slijedi tvrdnja (2.7). Nadalje, iz tvrdnje (2.7) slijedi tvrdnja (2.6).



Time je u teoremu dokazana implikacija (d)  $\Rightarrow$  (a).

Preostaje nam još dokazati posljednju tvrdnju teorema, tj. dokazati da ako je  $\Omega$  Brocardova točka poligona  $\Pi$ , onda sve Brocardove transformacije  $\{\Pi(\theta) : 0 \leq \theta < \omega\}$  imaju istu Brocardovu točku.

Neka je  $\Pi(\theta)$  jedna takva transformacija. Iz već dokazanih ekvivalentnih tvrdnji teorema, slijedi da su poligoni  $\Pi$  i  $\Pi(\theta)$  slični poligoni. Stoga  $\Pi(\theta)$  ima Brocardovu točku. Označimo Brocardovu točku poligona  $\Pi(\theta)$  s  $\Omega_\theta$  (vidi sliku 2.10). Dakle, želimo dokazati da se točke  $\Omega$  i  $\Omega_\theta$  podudaraju, odnosno da je  $\Omega_\theta$  Brocardova točka poligona  $\Pi$ , odnosno da je:

$$\angle \Omega_\theta AB = \angle \Omega_\theta BC = \dots$$

Uočimo da kad bismo dokazali sličnost trokuta,

$$AA_1\Omega_\theta \sim BB_1\Omega_\theta \sim \dots \quad (2.13)$$

tada bi iz te sličnosti slijedila prethodno navedena jednakost kutova te bi posljednja tvrdnja teorema bila dokazana. Stoga, dokažimo (2.13).

Znamo (vidi sliku 2.10) da je:

$$\angle AA_1\Omega_\theta = \angle BB_1\Omega_\theta \dots = \pi - \omega.$$

Stoga, da bi dokazali sličnost trokuta dovoljno je dokazati jednakost omjera odgovarajućih stranica. Dokažimo da je

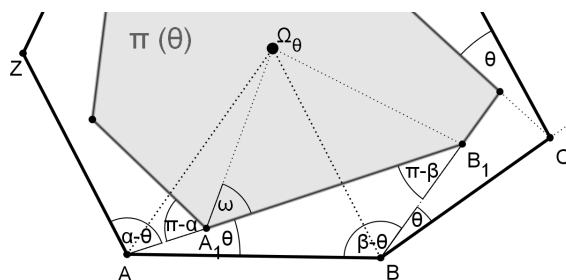
$$\frac{|BB_1|}{|CC_1|} = \frac{|B_1\Omega_\theta|}{|C_1\Omega_\theta|}.$$

Promotrimo prvo sliku 2.10. Primjenom sinusnog teorema na trokute  $ABB_1$  i  $BCC_1$  dobivamo:

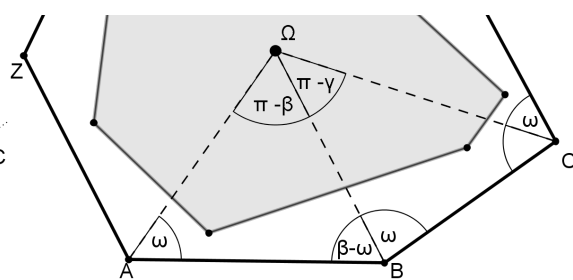
$$\frac{|BB_1|}{|AB|} = \frac{\sin \theta}{\sin \beta} \quad \text{i} \quad \frac{|CC_1|}{|BC|} = \frac{\sin \theta}{\sin \gamma}$$

Slijedi:

$$\frac{|BB_1|}{|CC_1|} = \frac{|AB| \sin \gamma}{|BC| \sin \beta}. \quad (2.14)$$



Slika 2.10:  
Brocardova točka poligona  $\Pi(\theta)$



Slika 2.11:  
Brocardova točka poligona  $\Pi$

Promotrimo sada sliku 2.11. Primjenom sinusnog teorema na trokut  $AB\Omega$  te na trokut  $BC\Omega$ , dobivamo:

$$\begin{aligned} \frac{|\Omega B|}{|AB|} &= \frac{\sin \omega}{\sin(\pi - \beta)} = \frac{\sin \omega}{\sin \beta} \\ \frac{|\Omega B|}{|BC|} &= \frac{\sin(\gamma - \omega)}{\sin(\pi - \gamma)} = \frac{\sin(\gamma - \omega)}{\sin \gamma} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Slijedi

$$\frac{|\Omega B|}{|BC|} = \frac{|\Omega B|}{|AB|} \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{\sin \omega}{\sin \beta} \frac{|AB|}{|BC|} \quad (2.16)$$

Izjednačavanjem (2.15) i (2.16) dobivamo:

$$\begin{aligned} \frac{\sin(\gamma - \omega)}{\sin \gamma} &= \frac{\sin \omega}{\sin \beta} \frac{|AB|}{|BC|} \\ \Leftrightarrow \frac{\sin(\gamma - \omega)}{\sin(\omega)} &= \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} \frac{|AB|}{|BC|} \\ \stackrel{(2.14)}{\Leftrightarrow} \frac{\sin(\gamma - \omega)}{\sin(\omega)} &= \frac{BB_1}{CC_1} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Primijenimo još sinusni teorem na trokut  $\Omega_\theta B_1 C_1$  (slika 2.10). Time dobivamo

$$\frac{\sin(\gamma - \omega)}{\sin(\omega)} = \frac{|B_1 \Omega_\theta|}{|C_1 \Omega_\theta|}. \quad (2.18)$$

Kombinacijom (2.17) i (2.18) dobivamo

$$\frac{|BB_1|}{|CC_1|} = \frac{|B_1 \Omega_\theta|}{|C_1 \Omega_\theta|}.$$

Na analogan način možemo dokazati i da su preostale odgovarajuće stranice slične. Stoga slijedi sličnost trokuta (2.13) koju smo i trebali dokazati.

Time smo dokazali i posljednju tvrdnju teorema.

□

## 2.4 Brocardov kut

Do sada smo razmatrali Brocardovu točku i Brocardovu transformaciju poligona, a Brocardov kut smo spominjali tek usputno. U ovom odjeljku naglasak je na Brocardovom kutu poligona, točnije na ocjeni veličine Brocardovog kuta poligona.

Prisjetimo se da smo za trokute dokazali da je veličina Brocardovog kuta trokuta manja ili jednaka  $\frac{\pi}{6}$ , s jednakosti samo u slučaju jednakokraničnog trokuta. Generalizacija te tvrdnje moguća je za općenite konveksne poligone, a slijedi iz leme koju su dokazali Nikolai Aleksandrovich Dmitriev i Evgenii Borisovich Dynkin 1945. godine u radu [7].

Lema glasi:

**Lema 2.4.1.** *Neka je  $P$  proizvoljna točka u unutrašnjosti konveksnog  $n$ -terokuta  $A_1A_2\dots A_n$  i označimo  $A_{n+1} = A_1$ . Tada vrijedi*

$$\min_{k=1,\dots,n} PA_k A_{k+1} \leq \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}.$$

*Jednakost vrijedi ako i samo ako je  $A_1A_2\dots A_n$  pravilni  $n$ -terokut.*

Točnije, Dmitriev i Dynkin nisu egzaktno naveli slučaj jednakosti, no on lako slijedi iz njihovih razmatranja. U njihovom radu, ovaj geometrijski rezultat javlja se u sklopu istraživanja skupova svojstvenih vrijednosti stohastičkih matrica u kompleksnoj ravnini. Sedamdeset godina nakon što su Dmitriev i Dynkin objavili svoj rad, lemu je u prethodno navedenom obliku objavio Ádám Besenyei u radu [5], pozivajući se na rad Dmitrieva i Dynkina. U odnosu na prvobitnu lemu, Besenyei je dodao tvrdnju za slučaj jednakosti i iznio je dokaz s detaljima koji su u izvornom dokazu ostavljeni čitateljima.

Dokazat ćemo nejednakost iz leme i zatim da u slučaju jednakosti  $n$ -terokut mora biti pravilan. Navedimo najprije važne nejednakosti koje ćemo primijeniti u dokazu.

**Teorem 2.4.2. Nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine**

Neka je  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  bilo koja  $n$ -torka pozitivnih realnih brojeva. Tada je

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

s jednakosti ako i samo ako je  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ .

**Teorem 2.4.3. Jenssenova nejednakost**

Neka je  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  konveksna funkcija. Neka su  $x_1, \dots, x_n$  i  $a_1, \dots, a_n > 0$ . Tada vrijedi

$$\frac{\sum_{i=1}^n a_i f(x_i)}{\sum_{i=1}^n a_i} \geq f\left(\frac{\sum_{i=1}^n a_i x_i}{\sum_{i=1}^n a_i}\right).$$

Za konkavnu funkciju  $f$ , smjer nejednakosti se okreće.

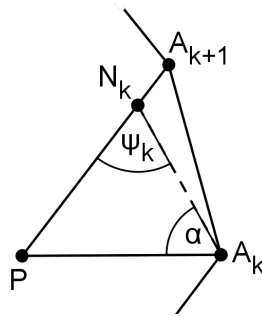
*Dokaz leme (2.4).*

Lemu ćemo dokazati tako da pretpostavimo da vrijedi suprotna tvrdnja, što će nas dovesti do kontradikcije.

Radi jednostavnosti, definirajmo  $\alpha := \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}$ .

Pretpostavimo da je  $\angle PA_k A_{k+1} > \alpha$  za svaki  $k = 1, \dots, n$ . Tada na dužini  $\overline{PA_{k+1}}$  postoji točka  $N_k$  takva da je  $\angle PA_k N_k = \alpha$ .

Označimo sada  $\psi_k = \angle A_k N_k P$ .



Slika 2.12: Kutovi  $\alpha$  i  $\psi_k$

Odredimo zbroj svih kutova  $\psi_k$ ,  $k = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n \psi_k &= \sum_{k=1}^n (\pi - \alpha - \angle N_k P A_k) \\
 &= n(\pi - \alpha) - \sum_{k=1}^n (\angle N_k P A_k) \\
 &= n(\pi - \alpha) - 2\pi \\
 &= n\alpha
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

Promotrimo sada trokut  $PA_k A_{k+1}$ . Primjenom teorema o sinusima, a zatim činjenice da je  $N_k \in \overline{PA_{k+1}}$  dobivamo:

$$\frac{\sin \psi_k}{\sin \alpha} = \frac{|PA_k|}{|PN_k|} > \frac{|PA_k|}{|PA_{k+1}|}.$$

Umnožak prethodnih nejednakosti za  $k = 1, \dots, n$  glasi:

$$\frac{\sin \psi_1}{\sin \alpha} \cdot \frac{\sin \psi_2}{\sin \alpha} \cdot \dots \cdot \frac{\sin \psi_n}{\sin \alpha} > \frac{|PA_1|}{|PN_2|} \cdot \frac{|PA_2|}{|PN_3|} \cdot \dots \cdot \frac{|PA_{n-1}|}{|PN_n|} = 1$$

Dakle,

$$\sin \psi_1 \cdot \dots \cdot \sin \psi_n > (\sin \alpha)^n \tag{2.20}$$

Iduće što želimo odrediti je maksimalna vrijednost umnoška  $\sin \psi_1 \cdot \dots \cdot \sin \psi_n$  za koji vrijedi

$$0 < \psi_1 < \pi, \dots, 0 < \psi_n < \pi \quad i \quad \sum_{k=1}^n \psi_k = n\alpha.$$

Primjenom AG-nejednakosti na promatrani umnožak, a zatim Jenssenove nejednakosti na konkavnu funkciju sinus na intervalu  $[0, \pi]$ , dobivamo:

$$\begin{aligned}
 \sin \psi_1 \cdot \sin \psi_2 \cdot \dots \cdot \sin \psi_n &\leq \left( \frac{\sin \psi_1 + \sin \psi_2 + \dots + \sin \psi_n}{n} \right)^n \\
 &\leq \left( \sin \left( \frac{\psi_1 + \psi_2 + \dots + \psi_n}{n} \right) \right)^n \\
 &= (\sin \alpha)^n
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

Dakle,  $\sin \psi_1 \cdot \dots \cdot \sin \psi_n \leq (\sin \alpha)^n$ , a to je u kontradikciji s (2.20).

Ovim smo dokazali slučaj nejednakosti u teoremu. Dokažimo sada da u slučaju jednakosti  $n$ -terokut mora biti pravilan.

Pretpostavimo da je najmanji od kutova  $\angle PA_k A_{k+1}$  jednak  $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} = \alpha$  i pokažimo da je poligon tada pravilan. Najprije uočimo da tada svi kutovi  $\angle PA_k A_{k+1}$  moraju biti jednaki  $\alpha$ . Naime, ako je barem za jedan  $k$  kut  $\angle PA_k A_{k+1} > \alpha$ , onda za trokut  $PA_k A_{k+1}$  vrijedi

$$\frac{\sin \psi_k}{\sin \alpha} = \frac{|PA_k|}{|PN_k|} > \frac{|PA_k|}{|PA_{k+1}|}$$

Primjenom analognog računa kao u prethodnom dijelu dokaza dobivamo da vrijedi stroga nejednakost:

$$\sin \psi_1 \cdot \dots \cdot \sin \psi_n > (\sin \alpha)^n.$$

Znamo da je to nemoguće, prema već dokazanom. Dakle,  $\angle PA_k A_{k+1} = \alpha$  za sve  $k = 1, \dots, n$ . Tada se sve točke  $N_k$  podudaraju s vrhom  $A_{k+1}$ , redom. Stoga su i svi kutovi  $\angle A_k A_{k+1} P$  (koji sad odgovaraju kutu  $\psi_k$  iz dokaza) međusobno jednaki i to jednaki  $\alpha$ . Dakle svi trokuti  $PA_k A_{k+1}$  su jednakokračni i sukladni pa je poligon pravilan, a  $P$  je njegovo središte.  $\square$

Ova lema je važna jer daje ocjenu veličine Brocardovog kuta  $\omega$  poligona. Naime, u slučaju kad je  $P$  Brocardova točka, za sve kutove vrijedi  $\angle PA_k A_{k+1} = \omega$  pa je  $\min \angle PA_k A_{k+1} = \omega$ . Iz leme slijedi

$$\omega \leq \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}, \quad \text{s jednakošću ako i samo ako je poligon pravilan.}$$

Uočimo da iz prethodnog za  $n=3$ , tj. za trokut, direktno slijedi da Brocardov kut trokuta iznosi najviše  $\frac{\pi}{6}$  i najveću vrijednost postiže za jednakostraničan trokut.

Lema je u prošlosti bila manje poznata, što naslućujemo po tome da su posebni slučajevi leme postavljeni kao problem na međunarodnim natjecanjima te u matematičkim časopisima. Na Međunarodnoj matematičkoj olimpijadi slučaj leme za  $n = 3$  pojavio se 1991. godine, a glasio je:

*Neka je  $ABC$  trokut i  $P$  točka u unutrašnjosti trokuta  $ABC$ . Dokažite da je najmanje jedan od kutova  $\angle PAB$ ,  $\angle PBC$ ,  $\angle PCA$ , manji ili jednak  $30^\circ$ .*

Iste godine, slučaj leme za  $n = 4$  postavljen je kao problem na državnom natjecanju u Indiji. U razdoblju od 2000. do 2001. godine, u rubrici s problemima časopisa American Mathematical Monthly postavljena su čak dva problema koja su povezana s lemom. Problem 10824 (vidi [1]) odnosi se na slučaj jednakosti za  $n = 3$ , a glasio je:

*Pretpostavimo da je  $P$  točka u unutrašnjosti trokuta  $ABC$  za koju vrijedi  $\angle PAB = \angle PBC = \angle PCA = 30^\circ$ . Dokažite da je trokut  $ABC$  jednakostraničan.*

Nadalje, problem 10904 (vidi [2]) sastojao se od dva zadatka:

(a) *Neka je  $ABCD$  konveksan četverokut. Dokažite da ako postoji točka  $P$  u unutrašnjosti četverokuta  $ABCD$  za koju je  $\angle PAB = \angle PBC = \angle PCD = \angle PDA = 45^\circ$ , onda je  $ABCD$  kvadrat.*

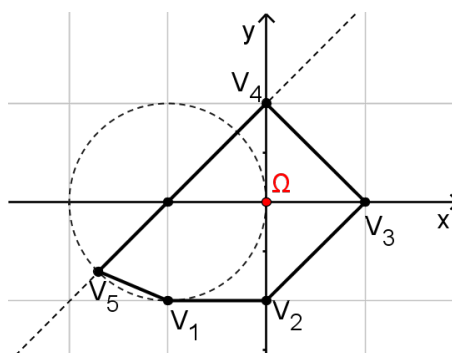
\*(b) *Generalizirajte s kvadrata na  $n$ -poligone.*

Uočimo da je problem (a) analogan prethodno postavljenom problemu za  $n = 4$ . Znak ”\*” uz (b) označava otvoreni problem, tj. problem za koji se u vrijeme objavljivanja smatralo da još nije riješen. Međutim, kao što sad vidimo, rješenje je zapravo bilo obuhvaćeno rezultatom Dmitrieva i Dynkina objavljenog nekoliko desetljeća ranije.

## 2.5 Primjeri nepravilnih poligona s Brocardovom točkom

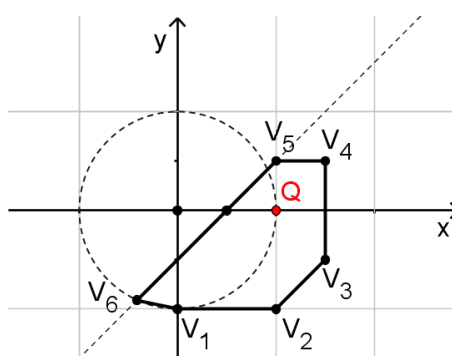
U ovom odjeljku navest ćemo dva primjera nepravilnih poligona koji imaju Brocardovu točku. U oba primjera poligoni su smješteni u pravokutni koordinatni sustav.

Prvi primjer koji navodimo nalazi se u [3]. To je primjer peterokuta s Brocardovim kutem  $\frac{\pi}{4}$ . Vrhovi poligona u kartezijevom pravokutnom sustavu imaju koordinate:  $V_1 = (-1, -1)$ ,  $V_2 = (0, -1)$ ,  $V_3 = (1, 0)$ ,  $V_4 = (-1, 1)$ . Vrh  $V_5$  određen je kao sjecište s negativnom ordinatom jedinične kružnice sa središtem u točki  $(-1, 0)$  i pravca točkama  $(-1, 0)$  i  $(0, 1)$ . Taj poligon prikazan je na slici 2.13. Neka je  $\Omega$  točka s koordinatama  $(0, 0)$ . Očito je da vrijedi  $\angle \Omega V_1 V_2 = \angle \Omega V_3 V_4 = \angle \Omega V_3 V_5 = \angle \Omega V_4 V_5 = \frac{\pi}{4}$ . Budući da je  $\angle \Omega V_5 V_1$  obodni kut nad lukom  $\widehat{V_1 \Omega}$  koji pripada pravom kutu kao središnjem, to je i  $\angle \Omega V_5 V_1 = \frac{\pi}{4}$ . Dakle,  $\Omega = (0, 0)$  je Brocardova točka tog peterokuta.



Slika 2.13: Nepravilni peterokut s Brocardovom točkom

Idući primjer je primjer šesterokuta s Brocardovom točkom  $\Omega = (1, 0)$  koji je izložen u [4], a prikazan na slici 2.14. Koordinate vrhova tog šesterokuta su sljedeće:  $V_1 = (0, -1)$ ,  $V_2 = (1, -1)$ ,  $V_3 = (1.5, -0.5)$ ,  $V_4 = (1.5, 0.5)$ ,  $V_5 = (1, 0.5)$ . Vrh  $V_6 = (1.5, 0.5)$  je sjecište s negativnom ordinatom pravca točkom  $V_5$  nagiba 1 i jedinične kružnice sa središtem u točki  $(0, 0)$ . I u ovom primjeru veličina Brocardovog kuta iznosi  $\frac{\pi}{4}$ . Slično kao i u prethodnom primjeru očito je da vrijedi  $\angle \Omega V_1 V_2 = \angle \Omega V_3 V_4 = \angle \Omega V_5 V_6 = \frac{\pi}{4}$ . Prestaje pokazati da je  $\angle \Omega V_6 V_1 = \frac{\pi}{4}$ . Kao i u prethodnom slučaju promatramo središnji i obodni kut. Naime,  $\angle \Omega V_6 V_1$  je obodni kut nad lukom  $\widehat{V_1 \Omega}$  kojemu pripada pravi kut kao središnji pa je  $\angle \Omega V_6 V_1 = \frac{\pi}{4}$ .



Slika 2.14: Nepravilni šesterokut s Brocardovom točkom



# Bibliografija

- [1] A. Ben-Israel i S. Foldes, *Complementary Halfspaces and Trigonometric Ceva–Brocard Inequalities for Polygons*, Math. Inequalities and Applications (1999), br. 2, 307–316.
- [2] ———, *Stability of Brocard Points of Polygons*, Rocky Mountain Journal of Math. **30** (2000), br. 2, 411–434.
- [3] A. Besenyei, *The Brocard Angle and a Geometrical Gem from Dmitriev and Dynkin*, Amer. Math. Monthly **122** (2015), 495–499.
- [4] F. Cajori, *A History of Elementary Mathematics*, Cosmo Classic, New York, 1995. Original objavljen 1896.
- [5] N. Dmitriev i E. Dynkin, *On the characteristics roots of stochastic matrices*, C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS **40** (1945), 159–162.
- [6] R. Honsberger, *Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry*, Math. Assoc. Amer., Washington D.C., 1995.
- [7] S. Mardešić, *Matematička analiza u n-dimenzionalnom realnom prostoru, prvi dio*, Školska knjiga, Zagreb, 1974.
- [8] D. Palman, *Trokut i kružnica*, Element, Zagreb, 2004.
- [9] I. Reiman, *International Mathematical Olympiads Volume 3 (1991-2004)*, Anthem Press, London, New York, 2005.
- [10] *Problem 10824 (American Mathematical Monthly (2000.))*, <https://www.mat.uniroma2.it/~tauraso/AMM/AMM10824.pdf>(kolovoz, 2016.).
- [11] *Problem 10904 (The American Mathematical, 2001.)*, <http://wwwpub.zih.tu-dresden.de/~adebi/pub/problem10904.pdf>(kolovoz, 2016.).

# Sažetak

Brocardova točka trokuta jedna je od osobitih točaka trokuta, a definira se kao točka  $\Omega$  unutar trokuta  $ABC$  za koju dužine  $\overline{PA}$ ,  $\overline{PB}$  i  $\overline{PC}$  zatvaraju sukladne kutove sa stranicama  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  i  $\overline{CA}$ , redom. Pripadne sukladne kutove nazivamo Brocardov kut trokuta. Na analogan način, promjenom orijentacije trokuta, definira se i druga Brocardova točka. Pojam Brocardove točke trokuta moguće je generalizirati i na poligon te tada govorimo o Brocardovoj točki i Brocardovom kutu poligona. Za razliku od trokuta koji uvijek ima Brocardovu točku i to jedinstvenu, za općenite poligone s  $n \geq 4$ , točka i kut s odgovarajućim svojstvom mogu, ali ne moraju postojati.

U prvom dijelu rada izloženi su osnovni, dobro poznati rezultati o Brocardovoj točki i Brocardovom kutu trokuta: dokaz postojanja pomoću konstrukcije, ocjena veličine Brocardova kuta i formula

$$\operatorname{ctg} \omega = \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma, \quad \text{gdje su } \alpha, \beta, \gamma \text{ kutovi trokuta.}$$

U drugom dijelu prikazani su neki rezultati o Brocardovoj točki i Brocardovom kutu općenitog poligona. Postojanje Brocardove točke istražuje se pomoću niza poligona dobivenih tzv. Brocardovom transformacijom koji konvergira prema nepraznom skupu, a taj se ili sastoji od jedne točke ili je segment. Dokazan je kriterij postojanja Brocardove točke pomoću sličnosti promatranog poligona s bilo kojom njegovom Brocardovom transformacijom. U slučaju postojanja Brocardove točke pokazano je i svojstvo stabilnosti, što znači da sve Brocardove transformacije poligona imaju zajedničku Brocardovu točku. Jedan od glavnih navedenih i dokazanih rezultata je veličina Brocardovog kuta  $\omega$  za  $n$ -poligon koja glasi

$$\omega \leq \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n},$$

pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako je poligon pravilan. Tek je nedavno uočeno da ta ocjena jednostavno slijedi iz znatno općenitijeg rezultata Dmitrieva i Dynkina iz 1945. godine.

Na kraju rada navedeni su primjeri nepravilnih poligona koji imaju Brocardovu točku.

# Summary

Brocard point is one of the many special points of a triangle. It is defined as a point  $\Omega$  inside a triangle  $ABC$  such that line segments  $\overline{PA}$ ,  $\overline{PB}$  i  $\overline{PC}$  form congruent angles with sides  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  i  $\overline{CA}$ , respectively. Corresponding congruent angles are called Brocard angle. By reversing the order of vertices we obtain second Brocard point. It is possible to generalize the concept of the Brocard point to  $n$ -polygons. As opposed to the case of a triangle, where a unique Brocard point always exists, for  $n$ -polygons where  $n \geq 4$  a point and an angle with corresponding properties may exist, but not necessarily.

In the first chapter we explain the basic, well-known results on the Brocard point and Brocard angle of a triangle: proofs of existence by construction, the upper bound for Brocard angle and the formula

$$\operatorname{ctg} \omega = \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma, \quad \text{where } \alpha, \beta, \gamma \text{ are angles of a triangle.}$$

In the second chapter we present some results about the Brocard point and the Brocard angle of a general polygon. The existence of the Brocard point is investigated using a sequence of the polygons obtained by the so called Brocard transformation, that converges to a nonempty set, which is either a one point set or a line segment. A Criterion for the existence of the Brocard point is proven, expressed in terms of similarity between the given polygon and any of its Brocard transforms. In the case of existence of the Brocard point the stability property is also shown, meaning that all the Brocard transforms have the same Brocard point. One of the main results proven for  $n$ -polygons which have the Brocard point is the estimate of the Brocard angle  $\omega$ , showing that

$$\omega \leq \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n},$$

where equality holds only for a regular polygon. It was recently noticed that this estimate easily follows from a much more general result by Dmitriev and Dynkin (1945.).

This chapter ends with example of irregular polygons for which the Brocard points exist.

# Životopis

Zovem se Tajana Klisura. Rođena sam 26.8.1992. godine u Korčuli. U istom gradu 1999. godine upisala sam Osnovnu školu Petra Kanavelića. Nakon završenog osnovnoškolskog obrazovanja 2007. godine upisala sam Srednju školu Korčula, smjer tehničar za mehatroniku. Potom 2010. godine na matematičkom odsjeku Prirodoslovnog matematičkog fakulteta u Zagrebu upisujem Preddiplomski sveučilišni studij Matematika, smjer nastavnički. Završetkom preddiplomskog studija te stjecanjem prvostupničke diplome 2014. godine na istom fakultetu nastavila sam obrazovanje upisavši Diplomski sveučilišni studij Matematika; smjer nastavnički.