Ergodski teorem i stacionarni procesi

Šimon, Ema

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Ema Šimon

ERGODSKI TEOREM I STACIONARNI PROCESI

Diplomski rad

Voditelj rada:
Doc.dr.sc. Vjekoslav Kovač

Zagreb, rujan, 2016

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Sadržaj **iii**

Uvod **2**

1 Osnovni pojmovi i potrebni rezultati **3**

2 Preslikavanja koja čuvaju mjeru i pojam ergodičnosti **6**
2.1 Stacionarni procesi 6
2.2 Transformacije koje čuvaju mjeru 11
2.3 Invarijantni skupovi i ergodičnost 16
2.4 Invarijantne slučajne varijable 20

3 Ergodski teorem **27**
3.1 Ergodski teorem 27
3.2 Korolari ergodskog teorema 32
3.3 Slučajni procesi i ergodski teorem 37

4 Subaditivni ergodski teorem **45**

5 Primjene ergodskih teorema **55**

Bibliografija **57**

Uvod

U teoriji vjerojatnosti, klasičan ergodski teorem se može shvatiti kao poopćenje jakog zakona velikih brojeva: prosjek gledan kroz duži vremenski period (*vremenski prosjek*) je jednak očekivanoj vrijednosti (*prostorni prosjek*), uz određene pretpostavke na nizove slučajnih varijabli koje promatramo. U ovom diplomskom radu ćemo dati definicije pojma *stacionarnosti* i *ergodičnosti* niza slučajnih varijabli te ćemo dokazati klasičan *Birkhoff-Hinčinov* ergodski teorem te *ergodski teorem za stacionarne procese*. Osim toga, uvest ćemo pojam *subaditivnosti* te dokazati *subaditivni ergodski teorem*. Rad završavamo sa primjenama ergodskih teorema.

Rad započinjemo Poglavljem 1 koje sadrži kratki pregled pojmova i rezultata iz teorije mjere i teorije vjerojatnosti koji su nam potrebni u daljnjim razmatranjima. Uvodimo pojam *slučajnog procesa* te *produkta prebrojivo mnogo vjerojatnosnih prostora*, koji proizlazi iz teorema *Ionescu Tulcea*. Nadalje, navodimo teorem iz kojeg slijedi *Kolmogorovljeva konstrukcija* koja nam omogućava rad sa *koordinatnim reprezentativnim* slučajnim procesom te dajemo iskaze klasičnih Kolmogorovljevih rezultata: *Kolmogorovljev zakon 0-1* te *Kolmogorovljev jaki zakon velikih brojeva*.

Nadalje, u Poglavlju 2 definiramo pojam *stacionarnosti* slučajnog procesa i dajemo primjere stacionarnih procesa, uključujući Markovljeve lance, te rezultate koji nam daju dovoljne uvjete za stacionarnost. Također pokazujemo da transformacija stacionarnog procesa izmjerivom funkcijom čuva stacionarnost. Uvođenjem pojma *transformacije koja čuva mjeru* dolazimo do definicije *pomaka* na $\mathbb{R}^\infty$ te dokaza tvrdnje da pomak čuva vjerojatnosnu mjeru koja je pridružena koordinatnoj reprezentaciji stacionarnog procesa. Pojam *invarijantnog skupa u odnosu na transformaciju koja čuva mjeru* nas vodi prema dokazu tvrdnje da je familija svih invarijatnih skupova σ-algebra, što je ključna tvrdnja prije definicije *ergodičke transformacije koja čuva mjeru*. Definirat ćemo i *gotovo sigurno invarijantan skup* i pokazati da uvijek postoji invarijantan skup koji mu je gotovo sigurno jednak. Nadalje, uvodimo pojam *invarijantne slučajne varijable u odnosu na transformaciju koja čuva mjeru* i dajemo nužne i dovoljne uvjete za invarijantnost slučajne varijable. Dokazujemo i vezu između ergodičnosti transformacije koja čuva mjeru i invarijantnih slučajnih varijabli. Pomoću Fourierovih redova ćemo pokazati da je *rotacija kružnice* ergodska transformacija, ali samo za iracionalne kuteve. Poglavlje završavamo tehničkim rezultatom o tome kako transformacije koje čuvaju mjeru ne utječu na očekivanje slučajne varijable, tj. očekivanje slučajne varijable je jednako očekivanju slučajne varijable komponirane sa transformacijom koja čuva mjeru.

U Poglavlju 3, prije dokaza klasičnog ergodskog teorema, dokazujemo *maksimalan ergodski teorem*. Iz njega, za transformaciju T koja čuva mjeru na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ i slučajnu varijablu X na istom vjerojatnosnom prostoru koja je apsolutno integrabilna, pokazujemo da su vremenski prosjek $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} X(T^k)$ i prostorni prosjek, što je uvjetno očekivanje od X u odnosu na σ-algebru svih invarijantnih skupova u odnosu na T, jednaki gotovo sigurno. Taj rezultat se naziva *Birkhoff-Hinčinov ergodski teorem* i ključan je dio ovog diplomskog rada. Pošto se radi o važnom teoremu, iz njega izlaze razni korolari i tvrdnje, na primjer, ako je T ergodička transformacija, uvjetno očekivanje iz ergodskog teorema postaje očekivanje slučajne varijable X. Zanimljiv je i korolar za nenegativnu slučajnu varijablu X koja nema konačno očekivanje i kako tada vremenski prosjek nije konačan. Uz to, pokazat ćemo da konvergencija iz ergodskog teorema vrijedi i u srednjem reda 1. Pošto smo već prije uveli pojmove koordinatnog reprezentativnog procesa i transformacije pomaka, definirat ćemo *invarijantan događaj* i *invarijantnu slučajnu varijablu* na zadanom vjerojatnosnom prostoru. Iz ergodskog teorema će tada slijediti teorem o konvergenciji gotovo sigurno niza $(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k, n \in \mathbb{N})$, za dani stacionaran proces $(X_n, n \in \mathbb{N})$ za koji vrijedi $E|X_1| < +\infty$. Nadalje, definiramo *ergodski stacionaran proces* te korolar prethodnog teorema za ergodski proces. Dokazujemo i par tvrdnji vezane uz ergodičnost stacionarnog procesa: transformacija izmjerivom funkcijom čuva svojstvo ergodičnosti, niz nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli je ergodski proces, ... Posljedica tih tvrdnji i korolara o konvergenciji prosjeka ergodskog procesa je *jaki zakon velikih brojeva*.

Poglavlje 4 sadrži Liggettovu verziju Kingmanova dokaza *subaditivnog ergodskog teorema* u četiri koraka te dokaz da klasičan ergodski teorem slijedi iz tog mnogo općenitijeg rezultata.

Rad završavamo Poglavljem 5 koje sadrži primjere korištenja ergodskih teorema. *Weylov ekvidistribucijski teorem* nećemo dokazati, ali ćemo pokazati kako se on koristi u određivanju distribucije prvih znamenaka potencija broja 2 (*Benfordov zakon*). Promatramo i jednostavan primjer *filtriranja*: na cjelobrojnoj mreži u $\mathbb{Z}^2$ gledamo brzinu prijenosu poruke po bridovima do zadane točke.

Poglavlje 1

Osnovni pojmovi i potrebni rezultati

Definicija 1.0.1. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F})$ *izmjeriv prostor te neka je* X_n *slučajna varijabla na* $(\Omega, \mathcal{F})$*, za svako* $n \in \mathbb{N}$*. Familija* $\mathbb{X} = (X_n, n \in \mathbb{N})$ *naziva se slučajni proces (sa diskretnim vremenom).*

Neka su dani izmjerivi prostori $(\Omega_j, \mathcal{F}_j)$, $j \in \mathbb{N}$, te neka je $\Omega = \prod_{j=1}^{\infty} \Omega_j = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots) : \omega_j \in \Omega_j, j = 1, 2, \dots\}$. Za proizvoljan $n \in \mathbb{N}$, izmjeriv pravokutnik u $\prod_{j=1}^{n} \Omega_j$ je skup $A_1 \times \cdots \times A_n$, gdje je $A_j \in \mathcal{F}_j$, za svako $j = 1, 2, \dots, n$. Skupove A_j, $j = 1, 2, \dots, n$, nazivamo stranice pravokutnika $A_1 \times \cdots \times A_n$. Najmanja σ-algebra definirana familijom svih izmjerivih pravokutnika naziva se produkt σ-algebri $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_n$ i označava se sa

$$\prod_{j=1}^{n} \mathcal{F}_j = \sigma\{A_1 \times \cdots \times A_n : A_j \in \mathcal{F}_j, j = 1, 2, \dots, n\}.$$

Definicija 1.0.2. *Neka je* $n \in \mathbb{N}$ *proizvoljan te neka je dan proizvoljan izmjeriv pravokutnik* $B^n \in \prod_{j=1}^{n} \mathcal{F}_j$*. Izmjeriv cilindar sa bazom* B^n *je skup* $B_n \subseteq \Omega$ *definiran sa:*

$$B_n = \{\omega \in \Omega : (\omega_1, \dots, \omega_n) \in B^n\}.$$

Familiju svih izmjerivih cilindara u Ω označavat ćemo sa $\mathcal{F}_0$ te je ona algebra skupova na Ω. Kažemo da je izmjeriv cilindar *izmjeriv pravokutnik* ako mu je baza oblika $B^n = \prod_{j=1}^{n} B_j \in \prod_{j=1}^{n} \mathcal{F}_j$, gdje je $A_j \in \mathcal{F}_j$, $j = 1, 2, \dots, n$. Familija svih konačnih unija međusobno disjunktnih izmjerivih pravokutnika u Ω je algebra skupova na Ω. Kažemo da je izmjeriv pravokutnik *Borelov pravokutnik* ako su mu sve stranice baze Borelovi skupovi u $\mathbb{R}$. Definiramo $\prod_{j=1}^{\infty} \mathcal{F}_j = \sigma(\mathcal{F}_0)$ i $\prod_{j=1}^{\infty} \mathcal{F}_j$ nazivamo *produkt σ-algebri $\mathcal{F}_j$, $j \in \mathbb{N}$*. Produkt σ-algebri $\mathcal{F}_j$, $j \in \mathbb{N}$, je jednak σ-algebri generiranoj svim izmjerivim pravokutnicima.

Neka je $\mathbb{R}^\infty = \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}$, skup svih realnih funkcija definiranih na $\mathbb{N}$. Tada je $\mathcal{B}^\infty$ produktna σ-algebra generirana na $\mathbb{R}^\infty$ u smislu prijašnjih definicija, tj. $\mathcal{B}^\infty$ je σ-algebra generirana familijom svih Borelovih cilindara u $\mathbb{R}^\infty$. Kolekciju $\mathcal{B}^\infty$ nazivamo *σ-algebra Borelovih skupova* u $\mathbb{R}^\infty$. Zbog prijašnjih tvrdnji slijedi da je $\mathcal{B}^\infty$ jednaka σ-algebri generiranoj familijom svih Borelovih pravokutnika u $\mathbb{R}^\infty$.

Teorem 1.0.3. *(Ionescu Tulcea)*
Neka su $(\Omega_j, \mathcal{F}_j)$, $j \in \mathbb{N}$, izmjerivi prostori i neka su $\Omega = \prod_{j=1}^\infty \Omega_j$ i $\mathcal{F} = \prod_{j=1}^\infty \mathcal{F}_j$. Neka je zadana vjerojatnost $\mathbb{P}_1$ na $\mathcal{F}_1$ i neka je za svako $j \in \mathbb{N}$ i svako $(\omega_1, \ldots, \omega_j) \in \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_j$ zadana vjerojatnost $\mathbb{P}_{j+1}(\omega_1, \ldots, \omega_j; \cdot)$ na $\mathcal{F}_{j+1}$. Pretpostavimo da je za svako $j \in \mathbb{N}$ i za svako fiksno $C \in \mathcal{F}_{j+1}$ $\mathbb{P}_{j+1}(\omega_1, \ldots, \omega_j; C)$ $(\prod_{k=1}^j \mathcal{F}_k, \mathcal{B})$-izmjerivo preslikavanje. Za proizvoljno $n \in \mathbb{N}$ i proizvoljan n-dimenzionalan izmjeriv cilindar $B^n \in \prod_{j=1}^n \mathcal{F}_j$ definiramo:

$$\mathbb{P}'_n(B^n) = \int_{\Omega_1} \mathbb{P}_1(d\omega_1) \int_{\Omega_2} \mathbb{P}_2(\omega_1; d\omega_2) \cdots \int_{\Omega_{n-1}} \mathbb{P}_{n-1}(\omega_1, \ldots, \omega_{n-2}; d\omega_{n-1}) \int_{\Omega_n} \chi_{B^n}(\omega_1, \ldots, \omega_n) \mathbb{P}_n(\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}; d\omega_n).$$

Tako definirana funkcija $\mathbb{P}'_n$ je vjerojatnost na $\prod_{j=1}^n \mathcal{F}_j$. Tada postoji jedinstvena vjerojatnost $\mathbb{P}$ na $\mathcal{F}$ takva da se za svako $n \in \mathbb{N}$ vjerojatnost $\mathbb{P}$ podudara sa vjerojatnošću $\mathbb{P}'_n$ na n-dimenzionalnim izmjerivim cilindrima, tj. vrijedi:

$$\mathbb{P}(\omega \in \Omega : (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in B^n) = \mathbb{P}'_n(B^n), \text{ za sve } n \in \mathbb{N} \text{ i sve } B^n \in \prod_{j=1}^n \mathcal{F}_j.$$

Dokaz se može pronaći u [6].

Korolar 1.0.4. *Neka su $(\Omega_j, \mathcal{F}_j, \mathbb{P}_j)$, $j \in \mathbb{N}$, vjerojatnosni prostori i neka su $\Omega = \prod_{j=1}^\infty \Omega_j$ i $\mathcal{F} = \prod_{j=1}^\infty \mathcal{F}_j$. Tada postoji jedinstvena vjerojatnost $\mathbb{P}$ na $\mathcal{F}$ takva da vrijedi:*

$$\mathbb{P}(\omega \in \Omega : \omega_1 \in A_1, \omega_2 \in A_2, \ldots, \omega_n \in A_n) = \prod_{j=1}^n \mathbb{P}_j(A_j),$$

za sve $n \in \mathbb{N}$ i sve $A_j \in \mathcal{F}_j$. Vjerojatnosnu mjeru $\mathbb{P}$ nazivamo produkt vjerojatnosti $\mathbb{P}_j$, $j \in \mathbb{N}$, i označavamo sa $\mathbb{P} = \prod_{j=1}^\infty \mathbb{P}_j$. Vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ nazivamo produkt vjerojatnosnih prostora $(\Omega_j, \mathcal{F}_j, \mathbb{P}_j)$, $j \in \mathbb{N}$.

Zadnja dva rezultata povlače Kolmogorovljevu konstrukciju koja nam omogućava da svaki slučajan proces možemo zamjeniti sa njegovim koordinatnim reprezentativnim procesom koji ima jednaku distribuciju kao polazni proces.

Teorem 1.0.5. *Neka je $(F_n, n \in \mathbb{N})$ proizvoljan niz vjerojatnosnih funkcija distribucije na $\mathbb{R}$. Tada postoji vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ te niz $(X_n, n \in \mathbb{N})$ nezavisnih slučajnih varijabli na Ω takvih da vrijedi $F_{X_n} = F_n$, za svako $n \in \mathbb{N}$.*

Teorem 1.0.6. *(Borel-Cantellijeva lema)*
Neka je $(A_n, n \in \mathbb{N})$ *niz događaja na vjerojatnosnom prostoru* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$*. Ako vrijedi da je* $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < +\infty$*, tada je* $\mathbb{P}(\limsup_n A_n) = 0$.

Dokaz se može pronaći u [6].

Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ niz slučajnih varijabli na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Za $n \in \mathbb{N}$ definiramo

$$\sigma(X_n, X_{n+1}, \dots) = \sigma\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} {X_k}^{-1}(\mathcal{B})\right)$$

najmanju σ-algebru na Ω u odnosu na koju su sve slučajne varijable $X_n, X_{n+1}, \dots$ izmjerive. Tada je

$$\mathcal{F}_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} \sigma(X_n, X_{n+1}, \dots)$$

repna σ*-algebra* niza $(X_n, n \in \mathbb{N})$. *Repni događaji* su elementi σ-algebre $\mathcal{F}_\infty$. Funkcija $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ je *repna funkcija* ako je $(\mathcal{F}_\infty, \mathcal{B})$-izmjeriva.

Teorem 1.0.7. *(Kolmogorovljev zakon 0-1)*
Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ *niz nezavisnih slučajnih varijabli. Tada je vjerojatnost svakog repnog događaja 0 ili 1, a svaka repna funkcija je gotovo sigurno konstanta.*

Dokaz se može pronaći u [6].

Propozicija 1.0.8. *Očekivanje slučajne varijable X postoji (konačno je) ako i samo ako je* $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X| \geq n) < +\infty$.

Teorem 1.0.9. *(Kolmogorovljev jaki zakon velikih brojeva)*
Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ *niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli. Tada niz* $(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j, n \in \mathbb{N})$ *konvergira gotovo sigurno prema konačnom limesu ako i samo ako postoji* EX_1 *(konačno je) i u tom slučaju vrijedi:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} X_j = EX_1 \quad \textit{gotovo sigurno.}$$

Dokaz se može pronaći u [6].

Poglavlje 2

Preslikavanja koja čuvaju mjeru i pojam ergodičnosti

2.1 Stacionarni procesi

Definicija 2.1.1. *Neka je* $(X_n, n \in \mathbb{N})$ *slučajan proces na vjerojatnosnom prostoru* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. *Kažemo da je to stacionaran proces ako za svako* $k \geq 0$ *vrijedi:*

$$(X_{k+1}, X_{k+2}, \dots) \overset{D}{=} (X_1, X_2, \dots),$$

to jest:

$$\mathbb{P}((X_1, X_2, \dots) \in B) = \mathbb{P}((X_{k+1}, X_{k+2}, \dots) \in B), \text{ za svako } B \in \mathcal{B}^{\infty}.$$

Pošto je distribucija procesa određena funkcijama distribucije svih konačno-dimenzionalnih slučajnih vektora, definicija stacionarnosti je ekvivalentna:

$$\mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) = \mathbb{P}(X_{k+1} \leq x_1, \dots, X_{k+n} \leq x_n)$$

i to za sve $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ i za svaki $k \geq 0$ cijeli broj.

Posebno slijedi da su sve jednodimenzionalne funkcije distribucije slučajnih vektora jednake:

$$\mathbb{P}(X_1 \leq x) = \mathbb{P}(X_k \leq x), \text{ za svako } k = 1, 2, \dots \text{ i za svaki } x \in \mathbb{R}.$$

Primjer 2.1.2. Svaki niz $(X_n, n \in \mathbb{N})$ nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli je stacionaran proces.

Primjer 2.1.3. Slučajan proces $(X_n, n \in \mathbb{N}_0)$ je *Markovljev lanac* na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ako vrijedi:

$$\mathbb{P}(X_{n+1} \in A | X_n, X_{n-1}, \dots, X_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} \in A | X_n)$$

za svako $n \geq 0$ i svako $A \in \mathcal{B}$.

Neka su vjerojatnosti prijelaza dane sa:

$$p(x, A) = \mathbb{P}(X_{n+1} \in A | X_n = x), \text{ za svaki } n \in \mathbb{N}, \text{ za svaki } A \in \mathcal{B} \text{ i za svaki } x \in \mathbb{R}$$

i stacionarnom distribucijom π :

$$\pi(A) = \int \pi(dx) p(x, A).$$

Ovo je vremenski homogen Markovljev lanac. Ako X_0 ima distribuciju π, tada je $X_0, X_1, \ldots$ stacionaran niz. Naime, neka je $k \in \mathbb{N}$ proizvoljan i neka je $B^n \in \mathcal{B}^\infty$ proizvoljan n-dimenzionalan izmjeriv pravokutnik:

$$B^n = \{(x_n, n \in \mathbb{N}) \in \mathbb{R}^\infty : x_1 \in B_1, \ldots, x_n \in B_n\}, \quad \text{za neke } B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}.$$

Tada iz Markovljevog svojstva, definicije uvjetne vjerojatnosti i definicije n-dimenzionalnog izmjerivog pravokutnika slijedi:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}((X_0, X_1, \ldots) \in B^n) &= \mathbb{P}(X_0 \in B_1, \ldots, X_{n-1} \in B_n) \\
&= \mathbb{P}(X_{n-1} \in B_n | X_{n-2} \in B_{n-1}, \ldots, X_0 \in B_1) \mathbb{P}(X_{n-2} \in B_{n-1}, \ldots, X_0 \in B_1) \\
&= \mathbb{P}(X_{n-1} \in B_n | X_{n-2} \in B_{n-1}) \mathbb{P}(X_{n-2} \in B_{n-1} | X_{n-3} \in B_{n-2}, \ldots, X_0 \in B_1) \\
&\quad \mathbb{P}(X_{n-3} \in B_{n-2}, \ldots, X_0 \in B_1) \\
&= \cdots = \mathbb{P}(X_{n-1} \in B_n | X_{n-2} \in B_{n-1}) \cdots \mathbb{P}(X_1 \in B_2 | X_0 \in B_1) \mathbb{P}(X_0 \in B_1).
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Iz definicije vjerojatnosti prijelaza slijedi:

$$\mathbb{P}(X_j \in B_{j+1} | X_{j-1} \in B_j) = \mathbb{P}(X_{j+k} \in B_{j+1} | X_{j+k-1} \in B_j), \quad \text{za svako } j = 1, \ldots, n-1.$$

Iz definicije stacionarne distribucije imamo:

$$\mathbb{P}(X_0 \in B) = \mathbb{P}(X_k \in B), \text{ za svako } k \geq 0 \text{ i za svako } B \in \mathcal{B}.$$

Tada iz formule (2.1) slijedi:

$$\mathbb{P}((X_0, X_1, \ldots) \in B^n) = \mathbb{P}(X_{n-1+k} \in B_n | X_{n-2+k} \in B_{n-1}) \cdots \mathbb{P}(X_{k+1} \in B_2 | X_k \in B_1) \mathbb{P}(X_k \in B_1).$$

Vraćanjem unatrag kao u (2.1) dobivamo:

$$\mathbb{P}((X_0, X_1, \ldots) \in B^n) = \mathbb{P}((X_k, X_{k+1}, \ldots) \in B^n).$$

Familija izmjerivih pravokutnika čini π-sistem koji generira produktnu σ-algebru $\mathcal{B}^{\infty}$. Kako je familija izmjerivih skupova na kojoj se podudaraju vjerojatnosti uvijek Dynkinova klasa, familija koja sadrži skupova za koje vrijedi jednakost vjerojatnosti sadrži i Dynkinovu klasu generiranu sa gore spomenutim π-sistemom. Po Dynkinovom teoremu slijedi da je Dynkinova klasa generirana π-sistemom ekvivalentna σ-algebri generiranoj tim π-sistemom pa slijedi tvrdnja o jednakosti za sve elemente σ-algebre $\mathcal{B}^{\infty}$. Time smo pokazali da je svaki vremenski homogen Markovljev lanac stacionaran proces.

Sljedeći primjer je primjer Markovljevog lanca koji nije stacionaran.

Primjer 2.1.4. Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ Markovljev lanac sa skupom stanja $S = \{0, 1\}$ te matricom prijelaza:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Neka je početna distribucija ovog lanca dana sa:

$$\pi = [1\ 0]\,.$$

Stoga lanac poprima vrijednosti $(X_0, X_1, X_2, \dots) = (0, 1, 0, \dots)$ sa vjerojatnošću 1 te vrijednosti $(X_0, X_1, X_2, \dots) = (1, 0, 1, \dots)$ sa vjerojatnošću 0. To očito nije stacionaran proces, već sa pomakom za jedan ne dobivamo isto distribuiran proces kao početni.

Primjer 2.1.5. *(Rotacija kruga)*
Neka je $\Omega = [0, 1\rangle$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0, 1\rangle)$ i $\mathbb{P} = \lambda$ Lebesguova mjera na $[0, 1\rangle$. Neka je $\theta \in \langle 0, 1\rangle$ i za $n \geq 0$ neka je:

$$\begin{aligned} X_n(\omega) &= (\omega + n\theta) \bmod 1 \\ x \bmod 1 &= x - \lfloor x \rfloor\,. \end{aligned}$$

Neka je

$$p(x, A) = \begin{cases} 1 & \text{ako je } (x + \theta) \bmod 1 \in A, \\ 0 & \text{inače.} \end{cases}$$

Tada je to poseban slučaj Primjera 2.1.3.

Propozicija 2.1.6. *Proces $X_1, X_2, \dots$ je stacionaran ako su procesi $X_1, X_2, \dots$ i $X_2, X_3, \dots$ jednako distribuirani.*

Dokaz. Pretpostavimo da $(X_1, X_2, \dots) \stackrel{D}{=} (X_2, X_3, \dots)$, to jest da vrijedi:

$$\mathbb{P}((X_1, X_2, \dots) \in B) = \mathbb{P}((X_2, X_3, \dots) \in B), \text{ za sve } B \in \mathcal{B}^\infty.$$

Definiramo $X'_k = X_{k+1}, k = 1, 2, \dots$ Očito slijedi:

$$\mathbb{P}((X_1, X_2, \dots) \in B) = \mathbb{P}(X'_1, X'_2, \dots) \in B), \text{ za sve } B \in \mathcal{B}^\infty \tag{2.2}$$

tj. $X'_1, X'_2, \dots$ ima jednaku distribuciju kao $X_1, X_2, \dots$ Iz pretpostavke tada slijedi da $X'_2, X'_3, \dots$ ima jednaku distribuciju kao $X'_1, X'_2, \dots$ pa iz definicije od $(X'_n, n \in \mathbb{N})$ i (2.2) slijedi da $X_1, X_2, \dots$ i $X_3, X_4, \dots$ imaju jednaku distribuciju. Dokaz za proizvoljan $n \in \mathbb{N}$ slijedi indukcijom. Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$(X_{n+1}, X_{n+2}, \dots) \stackrel{D}{=} (X_1, X_2, \dots).$$

Tada definiramo da je $X'_k = X_{n+k}, k = 1, 2, \dots$ Po pretpostavci indukcije $X_1, X_2, \dots$ i $X'_1, X'_2, \dots$ su jednako distribuirani, a po pretpostavci propozicije slijedi da su $X'_1, X'_2, \dots$ i $X'_2, X'_3, \dots$ jednako distribuirani. Stoga slijedi:

$$(X_{n+2}, X_{n+3}, \dots) \stackrel{D}{=} (X_1, X_2, \dots)$$

pa tvrdnja slijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$, to jest $(X_n, n \in \mathbb{N})$ je stacionaran proces. □

Ponekad promatramo procese $\dots, X_{-2}, X_{-1}, X_0, X_1, X_2, \dots$, to jest $(X_n, n \in \mathbb{Z})$. To je proces koji ima beskonačno mnogo opažanja u beskonačnoj prošlosti i beskonačnoj budućnosti.

Takav proces je stacionaran ako:

$$\mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) = \mathbb{P}(X_{k+1} \leq x_1, \dots, X_{k+n} \leq x_n)$$

i to za sve $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ i za sve $k \in \mathbb{Z}$.

Propozicija 2.1.7. *Za zadani jednostrani stacionarni proces $X_1, X_2, \dots$ postoji dvostrani stacionarni proces*

$$\dots, \hat{X}_{-1}, \hat{X}_0, \hat{X}_1, \dots$$

takav da $\hat{X}_1, \hat{X}_2, \dots$ i $X_1, X_2, \dots$ imaju istu distribuciju.

Dokaz. Po Kolmogorovljevoj konstrukciji, da bismo definirali traženi proces, dovoljno je zadati suglasnu familiju konačno-dimenzionalnih funkcija distribucije koje odgovaraju procesu

$$\dots, \hat{X}_{-1}, \hat{X}_0, \hat{X}_1, \dots$$

Definiramo:

$$\mathbb{P}(\hat{X}_{-m} \leq x_{-m}, \dots, \hat{X}_n \leq x_n) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_{-m}, \dots, X_{n+m+1} \leq x_n),$$

za $x_{-m}, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ i za sve $m, n \in \mathbb{N}$. Po Kolmogorovljevoj konstrukciji slijedi da postoji slučajni proces čije su ovo konačno-dimenzionalne funkcije distribucije te je ovo očito stacionaran proces pošto je $X_1, X_2, \ldots$ stacionaran proces po pretpostavci. Po tome kako smo definirali taj proces slijedi da su $\hat{X}_1, \hat{X}_2, \ldots$ i $X_1, X_2, \ldots$ jednako distribuirani. □

Propozicija 2.1.8. *Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ stacionaran slučajni proces i neka je $\varphi : \mathbb{R}^\infty \longrightarrow \mathbb{R}$ izmjeriva funkcija u paru σ-algebri $(\mathcal{B}^\infty, \mathcal{B})$. Definiramo proces $Y_1, Y_2, \ldots$ sa*

$$Y_k = \varphi(X_k, X_{k+1}, \ldots), \text{ za sve } k = 1, 2, \ldots$$

Tada je $Y_1, Y_2, \ldots$ također stacionaran slučajni proces.

Dokaz. Za svaki $k \in \mathbb{N}$ definiramo $\varphi_k : \mathbb{R}^\infty \longrightarrow \mathbb{R}$ sa

$$\varphi_k(x_1, x_2, \ldots) = \varphi(x_k, x_{k+1}, \ldots).$$

Stoga su funkcije $Y_k : \mathbb{R}^\infty \longrightarrow \mathbb{R}$ iz iskaza propozicije dane sa:

$$Y_k = \varphi_k(X_1, X_2, \ldots)$$

za svaki $k \in \mathbb{N}$. To su očito slučajne varijable jer vrijedi:

$$\begin{aligned} Y_k^{-1}(B) &= [\varphi_k(X_1, X_2, \ldots)]^{-1}(B) \\ &= (X_1, X_2, \ldots)^{-1} \underbrace{(\varphi_k^{-1}(B))}_{\in \mathcal{B}^\infty}, \text{ za sve } B \in \mathcal{B}^\infty \end{aligned}$$

pošto je po pretpostavci φ $\mathcal{B}^\infty$-izmjeriva funkcija. Za skup

$$A = \{\mathbb{x} = (x_n, n \in \mathbb{N}) \in \mathbb{R}^\infty : (\varphi_1(\mathbb{x}), \varphi_2(\mathbb{x}), \ldots) \in B)\}, B \in \mathcal{B}^\infty$$

vrijedi $A \in \mathcal{B}^\infty$ jer su $\varphi_1(\mathbb{x}), \varphi_2(\mathbb{x}), \ldots$ slučajne varijable. Iz definicije skupa A i slučajnih varijabli $Y_1, Y_2, \ldots$ slijedi

$$\{\mathbb{x} \in \mathbb{R}^\infty : (Y_1(\mathbb{x}), Y_2(\mathbb{x}), \ldots) \in B\} = \{\mathbb{x} \in \mathbb{R}^\infty : (X_1(\mathbb{x}), X_2(\mathbb{x}), \ldots) \in A\} \quad (2.3)$$
$$\{\mathbb{x} \in \mathbb{R}^\infty : (Y_2(\mathbb{x}), Y_3(\mathbb{x}), \ldots) \in B\} = \{\mathbb{x} \in \mathbb{R}^\infty : (X_2(\mathbb{x}), X_3(\mathbb{x}), \ldots) \in A\} \quad (2.4)$$

i to za sve $B \in \mathcal{B}^\infty$.

Pošto je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ stacionaran proces slijedi:

$$\mathbb{P}((X_1, X_2, \ldots) \in A) = \mathbb{P}((X_2, X_3, \ldots) \in A), \text{ za sve } A \in \mathcal{B}^\infty$$

pa pošto za svaki $B \in \mathcal{B}^\infty$ možemo konstruirati skup $A \in \mathcal{B}^\infty$, iz (2.3) i (2.4) slijedi:

$$\mathbb{P}((Y_1, Y_2, \ldots) \in B) = \mathbb{P}((Y_2, Y_3, \ldots) \in B), \text{ za sve } B \in \mathcal{B}^\infty$$

pa stoga iz Propozicije 2.1.6 slijedi da je $(Y_n, n \in \mathbb{N})$ stacionaran proces. □

Korolar 2.1.9. *Neka je* $(X_n, n \in \mathbb{N})$ *niz nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli i neka je* $\varphi : \mathbb{R}^\infty \longrightarrow \mathbb{R}$ *izmjeriva funkcija u paru* σ*-algebri* $(\mathcal{B}^\infty, \mathcal{B})$*. Definiramo proces* $Y_1, Y_2, \ldots$ *sa:*

$$Y_k = \varphi(X_k, X_{k+1}, \ldots), \ \textit{za sve } k = 1, 2, \ldots$$

Tada je $Y_1, Y_2, \ldots$ *stacionaran slučajni proces.*

Dokaz. Svaki niz nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli je stacionaran proces pa tvrdnja slijedi iz Propozicije 2.1.8 □

Primjer 2.1.10. *(Bernoullijev pomak)*
Neka je $\Omega = [0, 1\rangle$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0, 1\rangle)$ i $\mathbb{P} = \lambda$ Lebesguova mjera na $[0, 1\rangle$. Neka je $Y_0(\omega) = \omega$ i

$$Y_n(\omega) = (2Y_{n-1}(\omega)) \bmod 1, \ \text{za sve } n \geq 1.$$

Iz Propozicije 2.1.8 slijedi da je to stacionaran proces. Naime, neka je $X_0, X_1, \ldots$ niz nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli takav da:

$$\mathbb{P}(X_i = 0) = \mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{1}{2}, \ \text{za sve } i = 0, 1, 2, \ldots$$

Neka je $g : \mathbb{R}^\infty \longrightarrow \mathbb{R}$ izmjeriva funkcija definirana sa:

$$g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} x_{i+1} 2^{-(i+1)},$$

pri čemu je $x = \sum_{i=0}^{\infty} x_i 2^{-(i+1)}$ binarni zapis broja $x \in [0, 1\rangle$. Tada je $Y_k = g(X_k, X_{k+1}, \ldots)$, $k \in \mathbb{N}_0$, stacionaran proces po Propoziciji 2.1.8.

2.2 Transformacije koje čuvaju mjeru

Pretpostavimo da na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ imamo definiranu transformaciju $T : \Omega \longrightarrow \Omega$.

Kažemo da je T *izmjeriva* ako vrijedi

$$T^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega : T(\omega) \in A\} \in \mathcal{F}, \ \text{za sve } A \in \mathcal{F}.$$

Definicija 2.2.1. *Kažemo da izmjeriva transformacija* $T : \Omega \longrightarrow \Omega$ *čuva mjeru ako vrijedi*

$$\mathbb{P}(T^{-1}(A)) = \mathbb{P}(A), \ \textit{za sve } A \in \mathcal{F}.$$

Za izmjerivost transformacije T je dovoljno provjeriti

$$T^{-1}(C) \in \mathcal{F}, \text{ za sve } C \in \mathcal{C},$$

gdje je $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{C})$ te je $\mathcal{C}$ π-sistem skupova na Ω. Stoga je, zbog Dynkinovog teorema, dovoljno provjeriti:

$$\mathbb{P}(T^{-1}(C)) = \mathbb{P}(C), \text{ za sve } C \in \mathcal{C}$$

kako bismo pokazali da je T transformacija koja čuva mjeru.

Primjer 2.2.2. *(Verižni razlomci)*
Neka je $T(x) = \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor, x \in \langle 0, 1\rangle$ te $A(x) = \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$. Sa $a_n = A(T^n(x)),\ n = 0, 1, 2, \ldots$ definiramo verižni razlomak realnog broja x:

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots}}}$$

Tada T čuva mjeru $\mu : \mathcal{B}(\langle 0, 1\rangle) \longrightarrow [0, +\infty\rangle$ definiranu sa:

$$\mu(A) = \frac{1}{\log 2} \int_A \frac{dx}{1+x}$$

Dovoljno je provjeriti da je $\mu(T^{-1}(I)) = \mu(I)$, za I interval u $\langle 0, 1\rangle$. Neka je $I = \langle a, b\rangle$ proizvoljan podinterval od $\langle 0, 1\rangle$. Tada je:

$$\begin{aligned} T^{-1}(I) &= T^{-1}(\langle a, b\rangle) \\ &= \{y \in \langle 0, 1\rangle : a < \frac{1}{y} - \left\lfloor \frac{1}{y} \right\rfloor < b\} \\ &= \bigcup_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\left\langle \frac{1}{b+n}, \frac{1}{a+n} \right\rangle}_{\text{međusobno disjunktni}} \end{aligned}$$

Stoga slijedi:

$$\begin{aligned} \mu(T^{-1}(\langle a, b\rangle)) &= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} \left\langle \frac{1}{b+n}, \frac{1}{a+n} \right\rangle \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(\left\langle \frac{1}{b+n}, \frac{1}{a+n} \right\rangle \right) \quad (\sigma - \text{aditivnost}) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\log 2}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\frac{1}{b+n}}^{\frac{1}{a+n}}\frac{dx}{1+x}\\
&= \frac{1}{\log 2}\sum_{n=1}^{\infty}[\log\left(1+\frac{1}{a+n}\right)-\log\left(1+\frac{1}{b+n}\right)]\\
&= \frac{1}{\log 2}\sum_{n=1}^{\infty}[\log(a+n+1)-\log(a+n)-\log(b+n+1)+\log(b+n)]\\
&= \frac{1}{\log 2}\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}[\log(a+n+1)-\log(a+n)-\log(b+n+1)+\log(b+n)]\\
&= \frac{1}{\log 2}[\log(b+1)-\log(a+1)+\underbrace{\lim_{N\to\infty}\log\frac{a+1+N}{b+1+N}}_{\log\lim_{N\to\infty}\frac{a+1+N}{b+1+N}=\log 1=0}]\\
&\text{(neprekidnost logaritamske funkcije)}\\
&= \frac{1}{\log 2}[\log(b+1)-\log(a+1)]\\
&= \frac{1}{\log 2}\int_a^b\frac{dx}{1+x}=\mu(\langle a,b\rangle)
\end{aligned}
$$

pa smo pokazali da je T transformacija koja čuva mjeru μ.

Pomoću transformacija koje čuvaju mjeru možemo generirati veliki broj slučajnih procesa.

Primjer 2.2.3. Neka je X slučajna varijabla na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Neka je $T : \Omega \longrightarrow \Omega$ transformacija koja čuva mjeru. Iz definicije slijedi da je to izmjeriva funkcija. Definiramo proces:

$$
\begin{aligned}
X_1(\omega) &= X(\omega),\\
X_2(\omega) &= X(T(\omega)),\\
X_3(\omega) &= X(T^2(\omega)),\\
&\vdots\\
X_n(\omega) &= X(T^{n-1}(\omega)) = X_{n-1}(T(\omega)), \quad n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}
$$

Ako je $X_1(\omega)$ izmjerena vrijednost u trenutku 1, tada je $X_n(\omega)$ mjerenje te iste vrijednosti, ali nakon $n-1$ koraka tj. $\omega \longmapsto T^{n-1}(\omega)$ je iteracija nakon $n-1$ koraka. Intuitivno je jasno da distribucija niza $X_1, X_2, \ldots$ ne ovisi o trenutku u kojem ga krećemo promatrati jer se $X_n(\omega)$ dobiva iz $X_1(\omega)$ kao $X_1(T^{n-1}(\omega))$, uz pretpostavku da definiramo da je $T^0(\omega) = \omega$ identiteta.

Propozicija 2.2.4. *Neka je X slučajna varijabla na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ i neka je $T : \Omega \longrightarrow \Omega$ transformacija koja čuva mjeru. Tada je niz*

$$X_n(\omega) = X(T^{n-1}(\omega)), \quad \omega \in \Omega, \quad n = 1, 2 \dots \tag{2.5}$$

stacionaran niz slučajnih varijabli.

Dokaz. Prvo pokažimo da je X_n slučajna varijabla, za sve $n \in \mathbb{N}$. Za proizvoljan Borelov skup $B \in \mathcal{B}$ vrijedi:

$$\begin{aligned} X_n^{-1}(B) &= \{\omega' \in \Omega : X_n(\omega') \in B\}, \text{ gdje je } \omega' = T^{n-1}(\omega), \text{ za sve } \omega \in \Omega \\ &= \{\omega \in \Omega : X(T^{n-1}(\omega)) \in B\}, \text{ po (2.5)} \\ &= (X(T^{n-1}))^{-1}(\mathcal{B}) \\ &= (T^{n-1})^{-1} \underbrace{(X^{-1}(\mathcal{B}))}_{\in \mathcal{F}} \in \mathcal{F}, \end{aligned}$$

gdje zadnja jednakost slijedi iz činjenice da je X slučajna varijabla na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ te činjenice da je T^n izmjerivo preslikavanje, za sve $n \in \mathbb{N}$. Naime, po pretpostavci je T transformacija koja čuva mjeru pa je to izmjerivo preslikavanje, a kompozicija izmjerivih preslikavanja je izmjerivo preslikavanje.

Pokažimo stacionarnost niza $X_1, X_2, \dots$. Za svaki $B \in \mathcal{B}^\infty$ definiramo skup:

$$A = \{\omega \in \Omega : (X_1(\omega), X_2(\omega), \dots) \in B\}.$$

Pošto je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ slučajan proces slijedi da je on $(\mathcal{F}, \mathcal{B}^\infty)$-izmjeriv pa je stoga $A \in \mathcal{F}$. Iz definicije (2.5) slijedi

$$A = \{\omega \in \Omega : (X(\omega), X(T(\omega)), X(T^2(\omega)), \dots) \in B\}, \text{ za sve } B \in \mathcal{B}^\infty.$$

Analogno definiramo skup:

$$A' = \{\omega \in \Omega : (X_2(\omega), X_3(\omega), \dots) \in B\}, \text{ za sve } B \in \mathcal{B}^\infty$$

te vrijedi $A' \in \mathcal{B}^\infty$ i

$$A' = \{\omega \in \Omega : (X(T(\omega)), X(T^2(\omega)), \dots) \in B\}, \text{ za sve } B \in \mathcal{B}^\infty.$$

Iz definicije skupova A i A' te svojstava praslike slijedi:

$$\begin{aligned} T^{-1}(A)) &= T^{-1}((X, X(T), X(T^2), \dots)^{-1}(B)) \\ &= (X(T), X(T^2), X(T^3), \dots)^{-1}(B) \\ &= A', \text{ za sve } B \in \mathcal{B}^\infty. \end{aligned}$$

Pošto je T transformacija koja čuva mjeru vrijedi $\mathbb{P}(T^{-1}(A)) = \mathbb{P}(A)$ pa stoga iz prethodne jednakosti slijedi:

$$\mathbb{P}(\underbrace{(X_2, X_3, \dots) \in B}_{A'=T^{-1}(A)}) = \mathbb{P}(\underbrace{(X_1, X_2, \dots) \in B}_{A}), \text{ za sve } B \in \mathcal{B}^\infty.$$

Slijedi da su $X_1, X_2, \dots$ i $X_2, X_3, \dots$ jednako distribuirani pa po Propoziciji 2.1.6 slijedi da je $X_1, X_2, \dots$ stacionaran niz. □

U smislu distribucije, svaki stacionaran slučajan proces možemo prikazati pomoću neke transformacije koja čuva mjeru. Naime, ako je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ proizvoljan stacionaran slučajni proces, pomoću Kolmogorovljeve konstrukcije dolazimo do vjerojatnosnog prostora $(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{B}^\infty, \hat{\mathbb{P}})$ te koordinatnog reprezentativnog procesa $(\hat{X}_n, n \in \mathbb{N})$ na tom vjerojatnosnom prostoru za koji vrijedi:

$$\hat{X}_n(\mathbb{x}) = x_n, \quad \mathbb{x} = (x_n, n \in \mathbb{N}) \in \mathbb{R}^\infty.$$

Taj proces ima jednake konačno-dimenzionalne distribucije kao početni proces.

Definicija 2.2.5. *Na izmjerivom prostoru* $(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{B}^\infty)$ *definiramo pomak* $S : \mathbb{R}^\infty \longrightarrow \mathbb{R}^\infty$ *sa*

$$S(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots), \quad (x_n, n \in \mathbb{N}) \in \mathbb{R}^\infty.$$

Iz definicije slijedi:

$$\hat{X}_n(\mathbb{x}) = \hat{X}_1(S^{n-1}(\mathbb{x})), \quad \mathbb{x} = (x_n, n \in \mathbb{N}) \in \mathbb{R}^\infty, \text{ za sve } n \in \mathbb{N}.$$

Propozicija 2.2.6. *Transformacija pomaka* $S : \mathbb{R}^\infty \longrightarrow \mathbb{R}^\infty$

$$S(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots), \quad (x_n, n \in \mathbb{N}) \in \mathbb{R}^\infty$$

je izmjeriva funkcija u odnosu na σ*-algrebu* $\mathcal{B}^\infty$ *i ako je* $X_1, X_2, \dots$ *stacionaran proces, tada* S *čuva vjerojatnosnu mjeru* $\hat{\mathbb{P}}$ *pridruženu koordinatnom reprezentativnom procesu.*

Dokaz. Vrijedi:

$$\mathcal{B}^\infty = \sigma(\mathcal{F}_0),$$

gdje je $\mathcal{F}_0$ algebra izmjerivih Borelovih pravokutnika u $\mathbb{R}^\infty$.

Neka je $n \in \mathbb{N}$ proizvoljan te neka je $C \in \mathcal{F}_0$ proizvoljan n-dimenzionalan Borelov pravokutnik tj.

$$C = \{(x_n, n \in \mathbb{N}) \in \mathbb{R}^\infty : x_1 \in B_1, \dots, x_n \in B_n\},$$

gdje su $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}$. Slijedi

$$\begin{aligned}
S^{-1}(C) &= \{(x_n, n \in \mathbb{N}) \in \mathbb{R}^\infty : S(x_1, x_2, \dots) \in C\} \\
&= \{(x_n, n \in \mathbb{N}) \in \mathbb{R}^\infty : (x_2, x_3, \dots) \in C\} \quad \text{(definicija od } S\text{)} \\
&= \{(x_n, n \in \mathbb{N}) \in \mathbb{R}^\infty : x_2 \in B_1, x_3 \in B_2, \dots, x_{n+1} \in B_n\} \quad \text{(definicija od } C\text{)} \\
&= \underbrace{\{(x_n, n \in \mathbb{N}) \in \mathbb{R}^\infty : x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in B_1, x_3 \in B_2, \dots, x_{n+1} \in B_n\}}_{\text{izmjerivi pravokutnik } \in \mathcal{F}_0 \subseteq \sigma(\mathcal{F}_0) = \mathcal{B}^\infty}
\end{aligned}$$

pa je S $\mathcal{B}^\infty$-izmjeriva funkcija.

Pretpostavimo da je $X_1, X_2, \dots$ stacionaran proces. Neka je $n \in \mathbb{N}$ proizvoljan te neka je $C \in \mathcal{F}_0$ proizvoljan n-dimenzionalan Borelov pravokutnik, to jest

$$C = \{(x_n, n \in \mathbb{N}) \in \mathbb{R}^\infty : x_1 \in B_1, \dots, x_n \in B_n\}.$$

Tada slijedi:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbb{P}}(S^{-1}(C)) &= \hat{\mathbb{P}}(\{(x_n, n \in \mathbb{N}) \in \mathbb{R}^\infty : S(x_1, x_2, \dots) \in C\}) \\
&= \hat{\mathbb{P}}(\{(x_n, n \in \mathbb{N}) \in \mathbb{R}^\infty : (x_2, x_3, \dots) \in C\}) \\
&= \hat{\mathbb{P}}(\{(x_n, n \in \mathbb{N}) \in \mathbb{R}^\infty : x_2 \in B_1, \dots, x_{n+1} B_n\}) \\
&= \hat{\mathbb{P}}(\hat{X}_2 \in B_1, \dots, \hat{X}_{n+1} \in B_n) \quad \text{(definicija koordinatnog procesa)} \\
&= \hat{\mathbb{P}}(\hat{X}_1 \in B_1, \dots, \hat{X}_n \in B_n) \quad \text{(stacionarnost koordinatnog procesa)} \\
&= \hat{\mathbb{P}}(\{(x_n, n \in \mathbb{N}) \in \mathbb{R}^\infty : x_1 \in B_1, \dots, x_n B_n\}) \\
&= \hat{\mathbb{P}}(\{(x_n, n \in \mathbb{N}) \in \mathbb{R}^\infty : (x_1, x_2, \dots) \in C\}) \\
&= \hat{\mathbb{P}}(C).
\end{aligned}$$

Tada iz konačne aditivnosti vjerojatnosti $\hat{\mathbb{P}}$ slijedi ekvivalentna tvrdnja za algebru konačnih unija međusobno disjunktnih izmjerivih Borelovih pravokutnika. Iz Dynkinovog teorema slijedi jednakost na σ-algebri generiranoj tom algebrom, a to je upravo $\mathcal{B}^\infty$. Slijedi da S čuva mjeru $\hat{\mathbb{P}}$. □

2.3 Invarijantni skupovi i ergodičnost

Neka je T transformacija koja čuva mjeru na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Definicija 2.3.1. *Skup $A \in \mathcal{F}$ je invarijantan u odnosu na transformaciju T ako vrijedi $T^{-1}(A) = A$.*

Ako je A invarijantan skup, tada T preslikava skup A u njega samog. Indukcijom slijedi da ako je skup A invarijantan u odnosu na transformaciju T, tada je taj skup invarijantan i u odnosu na transformaciju T^n, za sve $n \in \mathbb{N}$.

Propozicija 2.3.2. *Familija $\mathcal{T}$ invarijantnih skupova u odnosu na transformaciju T koja čuva mjeru je σ-algebra.*

Dokaz. Definiramo familiju invarijantnih skupova u odnosu na transformaciju T koja čuva mjeru:

$$\mathcal{T} = \{A \in \mathcal{F} : T^{-1}(A) = A\}.$$

Pokažimo da je $\mathcal{T}$ σ-algebra.

1. Pošto je $\emptyset \in \mathcal{F}$ i po definiciji praslike vrijedi $T^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, slijedi da je $\emptyset \in \mathcal{T}$.

2. Neka je $A \in \mathcal{T}$. Tada vrijedi da je $T^{-1}(A) = A$. Pošto je $\mathcal{F}$ σ-algebra, slijedi da je $A^c \in \mathcal{F}$. Po definiciji komplementa i svojstvima praslike slijedi:

$$A^c = \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\} = \{\omega \in \Omega : \omega \notin T^{-1}(A)\} = (T^{-1}(A))^c = T^{-1}(A^c)$$

   pa slijedi da je $A^c \in \mathcal{T}$.

3. Neka je $(A_n, n \in \mathbb{N}) \subseteq \mathcal{T}$. Slijedi da je $A_n \in \mathcal{F}$, za sve $n \in \mathbb{N}$ i $T^{-1}(A_n) = A_n$, za sve $n \in \mathbb{N}$. Pošto je $\mathcal{F}$ σ-algebra, slijedi $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$. Tada iz svojstava praslike i definicije invarijantnog skupa vrijedi:

$$T^{-1}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} T^{-1}(A_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

   Slijedi da je $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$.

Stoga je $\mathcal{T}$ σ-algebra. □

Definicija 2.3.3. *Neka je T transformacija koja čuva mjeru na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Kažemo da je transformacija T ergodska ili ergodična ako za svaki invarijantan skup $A \in \mathcal{T}$ vrijedi $\mathbb{P}(A) = 0$ ili 1.*

Definiramo da je događaj $A \in \mathcal{F}$ *gotovo sigurno invarijantan* ako vrijedi:

$$\mathbb{P}(A \triangle T^{-1}(A)) = 0.$$

Familija svih gotovo sigurno invarijatnih događaja u odnosu na transformaciju T nadopunjuje familiju svih invarijatnih događaja $\mathcal{T}$ na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Propozicija 2.3.4. *Neka je $A \in \mathcal{F}$ gotovo sigurno invarijantan skup. Tada postoji skup $A' \in \mathcal{F}$ koji je invarijantan ($A' \in \mathcal{T}$) takav da vrijedi*

$$\mathbb{P}(A \triangle A') = 0.$$

Dokaz. Definiramo
$$A'' = \bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(A)$$
te stavimo da je $T^0(A) = A$. Pokažimo da je A'' gotovo sigurno invarijantan skup. Po definiciji od A'' vrijedi $T^{-1}(A'') = \bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n-1}(A)$. Iz svojstava praslike, razlike skupova, unije skupova, definicije skupa A'' te činjenice da ako je T transformacija koja čuva mjeru, tada je i T^n, za sve $n \in \mathbb{N}$, transformacija koja čuva mjeru slijedi:
$$\begin{aligned} A''\backslash T^{-1}(A) &= \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(A)\right)\backslash\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n-1}(A)\right) \\ &\leq \bigcup_{n=0}^{\infty}(T^{-n}(A)\backslash T^{-n-1}(A)) \\ &= \bigcup_{n=0}^{\infty}(T^{-n}(A)\backslash T^{-n}(T^{-1}(A))) \\ &= \bigcup_{n=0}^{\infty}(T^{-n}(A\backslash T^{-1}(A))). \end{aligned}$$
Analogno dobivamo:
$$\begin{aligned} T^{-1}(A'')\backslash A'' &= \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n-1}(A)\right)\backslash\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(A)\right) \\ &\leq \bigcup_{n=0}^{\infty}(T^{-n-1}(A)\backslash T^{-n}(A)) \\ &= \bigcup_{n=0}^{\infty}(T^{-n}(T^{-1}(A)\backslash A)). \end{aligned}$$
Sada iz definicije simetrične razlike, skupa A'', svojstava praslike i σ-subaditivnosti i monotonosti vjerojatnosti slijedi:
$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A''\triangle T^{-1}(A'')) &\leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty}(T^{-n}(A\backslash T^{-1}(A))) \cup (T^{-n}(T^{-1}(A)\backslash A))\right) \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(T^{-n}(\underbrace{(A\backslash T^{-1}(A)) \cup (T^{-1}(A)\backslash A)}_{\in\mathcal{F}})) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\mathbb{P}((A\backslash T^{-1}(A)) \cup (T^{-1}(A)\backslash A))}_{=0 \text{ jer je } A \text{ g.s. invarijantan}}. \end{aligned}$$

Stoga iz nenegativnosti vjerojatnosti slijedi da je $\mathbb{P}(A''\triangle T^{-1}(A'')) = 0$ pa po definiciji slijedi da je A'' gotovo sigurno invarijantan skup.

Sljedeće ćemo pokazati da je $A = A''$ gotovo sigurno, tj. da vrijedi $\mathbb{P}(A\triangle A'') = 0$. Iz definicije simetrične razlike skupova, razlike skupova i unije slijedi:

$$\begin{aligned}
A\triangle A'' &= (A\backslash A'') \cup (A''\backslash A) \\
&= A\backslash \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(A)\right) \cup \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(A)\right)\backslash A \\
&\subseteq \left(\bigcup_{n=0}^{\infty}(A\backslash T^{-n}(A))\right) \cup \left(\bigcup_{n=0}^{\infty}(T^{-n}(A)\backslash A)\right) \\
&= \bigcup_{n=0}^{\infty}(A\triangle T^{-n}(A)).
\end{aligned}$$

Tada iz monotonosti vjerojatnosti i σ-subaditivnosti slijedi:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A\triangle A'') &\leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A\triangle T^{-n}(A)\right) \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\mathbb{P}(A\triangle T^{-n}(A))}_{=0 \text{ jer je } A \text{ g.s. invarijantan}}
\end{aligned}$$

pa iz nenegativnosti vjerojatnosti slijedi da je $\mathbb{P}(A\triangle A'') = 0$ tj. $A = A''$ gotovo sigurno.

Pokažimo da je $T^{-1}(A'') \subseteq A''$:

$$\begin{aligned}
T^{-1}(A'') &= T^{-1}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(A)\right) \\
&= \bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n-1}(A) \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(A) = A''.
\end{aligned}$$

Sljedeće definiramo skup A' sa:

$$A' = \bigcap_{n=0}^{\infty} T^{-n}(A'').$$

Pokažimo da je $A = A'$ gotovo sigurno tj. $\mathbb{P}(A\triangle A') = 0$. Pošto je $A = A''$ gotovo sigurno slijedi da je $\mathbb{P}(A\triangle A') = \mathbb{P}(A'\triangle A'')$ pa iz svojstava razlike, unije i monotonosti te

σ-subaditivnosti vjerojatnosti slijedi:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A'\triangle A'') &= \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} T^{-n}(A'')\right)\backslash A'' \cup A''\backslash\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} T^{-n}(A'')\right)\right)\\ &\leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty}(T^{-n}(A'')\backslash A'' \cup A''\backslash T^{-n}(A''))\right)\\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\mathbb{P}(T^{-n}(A'')\backslash A'' \cup A''\backslash T^{-n}(A''))}_{=0 \text{ jer je } A'' \text{ g.s. invarijantan}}\end{aligned}$$

pa iz nenegativnosti vjerojatnosti slijedi da je $\mathbb{P}(A\triangle A') = 0$ tj. $A = A'$ gotovo sigurno.

Preostaje pokazati da je A' invarijantan u odnosu na transformaciju T tj. da vrijedi $T^{-1}(A') = A'$. Pokažimo da je $T^{-1}(A') \subseteq A'$:

$$\begin{aligned}T^{-1}(A') &= T^{-1}\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} T^{-n}(A'')\right)\\ &= \bigcap_{n=0}^{\infty} T^{-n}(\underbrace{T^{-1}(A'')}_{\subseteq A''})\\ &\subseteq \bigcap_{n=0}^{\infty} T^{-n}(A'') = A'.\end{aligned}$$

Obratno:

$$\begin{aligned}T^{-1}(A') &= T^{-1}\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} T^{-n}(A'')\right)\\ &= \bigcap_{n=0}^{\infty} T^{-n-1}(A'') \supseteq \bigcap_{n=0}^{\infty} T^{-n}(A'') = A'\end{aligned}$$

pa tvrdnja slijedi. □

2.4 Invarijantne slučajne varijable

Definicija 2.4.1. *Neka je X slučajna varijabla na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ te neka je $T : \Omega \longrightarrow \Omega$ transformacija koja čuva mjeru. Kažemo da je X invarijantna slučajna varijabla ako vrijedi:*

$$X(\omega) = X(T(\omega)), \text{ za sve } \omega \in \Omega.$$

Propozicija 2.4.2. *X je invarijantna slučajna varijabla u odnosu na transformaciju T koja čuva mjeru ako i samo ako je X $\mathcal{T}$-izmjeriva slučajna varijabla, gdje je $\mathcal{T}$ σ-algebra invarijatnih skupova u odnosu na T tj.* $\mathcal{T} = \{A \in \mathcal{F} : T^{-1}(A) = A\}$.

Dokaz. Pretpostavimo da je X invarijantna slučajna varijabla. Tada za proizvoljan $x \in \mathbb{R}$ vrijedi:

$$\begin{aligned} X^{-1}(\langle -\infty, x]) &= \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in \langle -\infty, x]\} \\ &= \{\omega \in \Omega : X(T(\omega)) \in \langle -\infty, x]\} \quad (X \text{ invarijantna}) \\ &= (X(T))^{-1}(\langle -\infty, x]) \\ &= T^{-1}(X^{-1}(\langle -\infty, x])). \end{aligned}$$

Stoga je $X^{-1}(\langle -\infty, x])$ invarijantan skup u odnosu na transformaciju T pa slijedi da je $X^{-1}(\langle -\infty, x]) \in \mathcal{T}$, za sve $x \in \mathbb{R}$. Stoga je X $\mathcal{T}$-izmjeriva funkcija.

Obratno, neka je X $\mathcal{T}$-izmjeriva slučajna varijabla. Pokazat ćemo da je to invarijantna slučajna varijabla Lebesguovom indukcijom.

I Neka je $X(\omega) = \chi_A(\omega)$, za sve $\omega \in \Omega$ i za proizvoljan $A \in \mathcal{T}$. Tada vrijedi:

$$\begin{aligned} X(T(\omega)) &= \chi_A(T(\omega)) \\ &= \begin{cases} 0, T(\omega) \notin A \\ 1, T(\omega) \in A \end{cases} = \begin{cases} 0, \omega \notin T^{-1}(A) \\ 1, \omega \in T^{-1}(A) \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, \omega \notin A \\ 1, \omega \in A \end{cases} \quad (\text{ slijedi iz } A \in \mathcal{T}) \\ &= \chi_A(\omega) \\ &= X(\omega), \text{ za sve } \omega \in \Omega. \end{aligned}$$

Slijedi da je X invarijantna slučajna varijabla.

II Neka je X jednostavna, $\mathcal{T}$-izmjeriva slučajna varijabla. Slijedi da X ima sljedeći prikaz:

$$X = \sum_{k=1}^{n} x_k \chi_{A_k}$$

gdje su $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ te $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{T}$ međusobno disjunktni skupovi.

Tada slijedi:

$$\begin{aligned} X(T(\omega)) &= \sum_{k=1}^{n} x_k \chi_{A_k}(T(\omega)) \\ &= \sum_{k=1}^{n} x_k \chi_{A_k}(\omega) \quad \text{(prema } I\text{)} \\ &= X(\omega), \text{ za sve } \omega \in \Omega \end{aligned}$$

pa slijedi da je X invarijantna slučajna varijabla.

III Neka je X nenegativna, $\mathcal{T}$-izmjeriva slučajna varijabla. Tada postoji rastući niz $(X_n, n \in \mathbb{N})$ nenegativnih, jednostavnih, $\mathcal{T}$-izmjerivih slučajnih varijabli takvih da vrijedi:

$$X = \lim_{n\to\infty} X_n. \tag{2.6}$$

Slijedi da je $(X_n \circ T, n \in \mathbb{N})$ rastući niz nenegativnih, jednostavnih, $\mathcal{T}$-izmjerivih slučajnih varijabli takvih da vrijedi:

$$X \circ T = \lim_{n\to\infty} (X_n \circ T). \tag{2.7}$$

Izmjerivost slijedi iz činjenice da je T $\mathcal{T}$-izmjerivo preslikavanje i da je kompozicija dva izmjeriva preslikavanja ponovno izmjerivo preslikavanje. Slijedi:

$$\begin{aligned} X(T(\omega)) &= \lim_{n\to\infty} X_n(T(\omega)) \qquad (2.7) \\ &= \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) \qquad (\text{ prema } II) \\ &= X(\omega), \text{ za sve } \omega \in \Omega. \qquad (2.6) \end{aligned}$$

Slijedi da je X invarijantna slučajna varijabla.

IV Neka je X proizvoljna $\mathcal{T}$-izmjeriva slučajna varijabla. X se može prikazati kao $X = X^+ - X^-$ gdje su X^+ i X^- nenegativne, $\mathcal{T}$-izmjerive slučajne varijable. Iz *III* slijedi:

$$X(T(\omega)) = X^+(T(\omega)) - X^-(T(\omega)) = X^+(\omega) - X^-(\omega) = X(\omega), \text{ za sve } \omega \in \Omega.$$

Slijedi da je X invarijantna slučajna varijabla.

□

Propozicija 2.4.3. *Neka je T transformacija koja čuva mjeru na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. T je ergodska ako i samo ako je svaka invarijantna slučajna varijabla X na Ω gotovo sigurno konstanta.*

Dokaz. Pretpostavimo da je T ergodska transformacija koja čuva mjeru. Tada za svako $A \in \mathcal{T}$ vrijedi da je $\mathbb{P}(A) = 0$ ili 1. Neka je X proizvoljna invarijantna slučajna varijabla na Ω. Iz prethodne propozicije slijedi da je X $\mathcal{T}$-izmjeriva. Stoga je $\{X \leq x\} \in \mathcal{T}$, za sve $x \in \mathbb{R}$. Pošto je T ergodska transformacija slijedi da je $\mathbb{P}(X \leq x) = 0$ ili 1, za sve $x \in \mathbb{R}$, pa iz definicije funkcije distribucije slijedi da je $F_X(x) = 0$ ili 1, za sve $x \in \mathbb{R}$. Neka je $(x_n, n \in \mathbb{N})$ niz u $\mathbb{R}$ koji raste prema $+\infty$. Pošto je $\{X \leq \infty\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{X \leq x_n\}$ i to je rastući niz događaja, iz neprekidnosti vjerojatnosti u odnosu na rastući niz događaja slijedi:

$$\underbrace{\mathbb{P}(X \leq \infty)}_{F_X(\infty)=1} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\mathbb{P}(X \leq x_n)}_{F_X(x_n)}.$$

Neka je $x_0 = \inf\{x_n : \mathbb{P}(X \leq x_n) = 1\}$. Tada je $\mathbb{P}(x_0 - \frac{1}{n} < X \leq x_0) = \mathbb{P}(X \leq x_0) - \mathbb{P}(X \leq x_0 - \frac{1}{n}) = 1 - 0 = 1$, za sve $n \in \mathbb{N}$, zbog definicije infimuma. Slijedi:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = x_0) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \{x_0 - \frac{1}{n} < X \leq x_0\}\right) \\
&\quad \text{(neprekidnost vjerojatnosti u odnosu na padajući niz događaja)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \underbrace{\mathbb{P}(x_0 - \frac{1}{n} < X \leq x_0)}_{=1,\ \text{za sve}\ n\in\mathbb{N}} = 1
\end{aligned}$$

pa slijedi da je X gotovo sigurno konstanta.

Obratno, pretpostavimo da je svaka invarijantna slučajna varijabla na Ω gotovo sigurno konstanta. Neka je $A \in \mathcal{T}$ proizvoljno. Definiramo slučajnu varijablu:

$$X(\omega) = \chi_A(\omega), \quad \omega \in \Omega.$$

Ovo je $\mathcal{T}$-izmjeriva slučajna varijabla pa je po prethodnoj propoziciji X invarijantna slučajna varijabla. Tada po pretpostavci slijedi da je X gotovo sigurno konstanta pa pošto je X definirana kao karakteristična funkcija skupa A slijedi $\mathbb{P}(A) = 0$ ili 1 te je stoga T ergodska transformacija. □

Iz dokaza propozicije slijedi:

Propozicija 2.4.4. *T je ergodska transformacija ako i samo ako je svaka ograničena invarijantna slučajna varijabla gotovo sigurno konstanta*

Općenito je teško pokazati da je dana transformacija ergodska.

Primjer 2.4.5. Neka je $\Omega = [0, 1\rangle$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0, 1\rangle)$ i $\mathbb{P} = \lambda$ Lebesguova mjera na $[0, 1\rangle$. Za dano $\theta \in [0, 1\rangle$ definiramo transformaciju T koja čuva mjeru sa:

$$T(x) = (x + \theta) \bmod 1.$$

Pokazat ćemo da je T ergodska transformacija ako $\theta \notin \mathbb{Q}$. Neka je f proizvoljna Borelova funkcija na $[0, 1\rangle$ koja je invarijantna u odnosu na T i $f \in L^2([0, 1])$:

$$\int f^2(x) d\lambda(x) < +\infty.$$

Promatramo Fourierov red funkcije $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2\pi inx}$, gdje su Fourierovi koeficijenti dani sa $c_n = \int_0^1 f(x) e^{-2\pi inx} d\lambda(x)$, za svako $n \in \mathbb{N}_0$. Za Fourierove koeficijente funkcije $f \circ T$ vrijedi:

$$\begin{aligned}
\tilde{c_n} &= \int_0^1 f(x+\theta) e^{-2\pi inx} d\lambda(x) \\
&\{y = x + \theta, d\lambda(y) = d\lambda(x)\} \\
&= \int_0^1 f(y) e^{-2\pi iny} e^{2\pi in\theta} d\lambda(y) \\
&= e^{2\pi in\theta} c_n, \text{ za sve } n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Pošto je f invarijantna funkcija u odnosu na T vrijedi $f(x) = f(T(x))$, za sve $x \in \mathbb{R}$, pa uspoređivanjem Fourierovih koeficijenata obije strane dobivamo:

$$c_n(1 - e^{2\pi in\theta}) = 0, \text{ za sve } n \in \mathbb{Z}$$

te je stoga $c_n = 0$ ili $e^{2\pi in\theta} = 1$, za sve $n \in \mathbb{Z}$. Pošto je $\theta \notin \mathbb{Q}$, vrijedi da je $e^{2\pi in\theta} = 1$ samo za $n = 0$ pa je $c_n = 0$, za sve $n \neq 0$. Pošto je $f \in L^2([0, 1])$, iz teorema o jedinstvenosti koeficijenata Fourierovog reda slijedi $f = c_0$ gotovo sigurno.

Tada iz Propozicije 2.4.3 slijedi da je T ergodska transformacija.

Propozicija 2.4.6. *Neka je T transformacija koja čuva mjeru na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ i neka je X slučajna varijabla na Ω. Tada vrijedi:*

$$EX = E[X \circ T]$$

u smislu da X ima očekivanje ako i samo ako $X \circ T$ ima očekivanje i očekivanja su im jednaka.

Dokaz. Tvrdnju ćemo dokazati Lebesguovom indukcijom po X.

I Neka je $X = \chi_A$, za $A \in \mathcal{F}$. Slijedi da je $EX = \mathbb{P}(A)$. Pošto je $X \circ T = \chi_{T^{-1}(A)}$ i T je transformacija koja čuva mjeru slijedi:

$$\begin{aligned} E[X \circ T] &= \mathbb{P}(T^{-1}(A)) \\ &= \mathbb{P}(A) = EX. \end{aligned}$$

II Neka je X jednostavna slučajna varijabla. Tada se X može prikazati kao:

$$X = \sum_{k=1}^{n} x_k \chi_{A_k}$$

gdje su $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ i $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ međusobno disjunktni skupovi. Slijedi da je $X \circ T = \sum_{k=1}^{n} x_k \chi_{T^{-1}(A_k)}$. Tada iz definicije očekivanja jednostavne slučajne varijable slijedi:

$$\begin{aligned} E[X \circ T] &= \sum_{k=1}^{n} x_k \mathbb{P}(T^{-1}(A_k)) \\ &= \sum_{k=1}^{n} x_k \mathbb{P}(A_k) \quad \text{(prema } I\text{)} \\ &= EX. \end{aligned}$$

III Neka je X nenegativna slučajna varijabla. Tada postoji rastući niz $(X_n, n \in \mathbb{N})$ nenegativnih jednostavnih slučajnih varijabli takvih da vrijedi

$$X = \lim_{n\to\infty} X_n.$$

Slijedi da je $((X_n \circ T), n \in \mathbb{N})$ rastući niz nenegativnih jednostavnih slučajnih varijabli takav da je

$$X \circ T = \lim_{n\to\infty} (X_n \circ T)$$

pošto je T $\mathcal{F}$-izmjeriva funkcija.

Tada iz Lebesguovog teorema o monotonoj konvergenciji slijedi:

$$\begin{aligned} E[X \circ T] &= E[\lim_{n\to\infty} (X_n \circ T)] \\ &= \lim_{n\to\infty} E[X_n \circ T] \\ &= \lim_{n\to\infty} EX_n \quad \text{(prema } II\text{)} \\ &= E[\lim_{n\to\infty} X_n] = EX. \end{aligned}$$

IV Neka je X proizvoljna slučajna varijabla. Tada se X može prikazati kao $X^+ - X^-$, gdje su X^+ i X^- nenegativne slučajne varijable. Iz III slijedi:

$$\begin{aligned} EX^+ < \infty &\Leftrightarrow E[X^+ \circ T] < +\infty \\ EX^- < \infty &\Leftrightarrow E[X^- \circ T] < +\infty. \end{aligned}$$

Stoga EX ima očekivanje ako i samo ako $E[X \circ T]$ ima očekivanje i vrijedi:

$$\begin{aligned} EX &= EX^+ - EX^- \\ &= E[X^+ \circ T] - E[X^- \circ T] \quad \text{(prema } III\text{)} \\ &= E[X \circ T]. \end{aligned}$$

□

Poglavlje 3

Ergodski teorem

3.1 Ergodski teorem

Da bi dokazali klasičan ergodski teorem, prvo ćemo dokazati sljedeći rezultat:

Teorem 3.1.1. *(Maksimalni ergodski teorem)*
Neka je $T : \Omega \longrightarrow \Omega$ transformacija koja čuva mjeru na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ i neka je X slučajna varijabla na Ω takva da je $E|X| < +\infty$. Za svako $\omega \in \Omega$ definiramo:

$$S_k(\omega) = X(\omega) + X(T(\omega)) + \cdots + X(T^{k-1}(\omega)), \quad k = 1, \ldots, n$$
$$M_n(\omega) = \max\{0, S_1(\omega), \ldots, S_n(\omega)\}, \text{ za svako } n \in \mathbb{N}.$$

Tada vrijedi:

$$\int_{\{M_n > 0\}} X d\mathbb{P} \geq 0, \text{ za svako } n \in \mathbb{N}.$$

Dokaz. Neka je $n \in \mathbb{N}$ proizvoljan. Iz definicije M_n slijedi:

$$S_k(\omega) \leq M_n(\omega), \text{ za svako } k \leq n \text{ i za svako } \omega \in \Omega.$$

Stoga vrijedi:

$$S_k(T(\omega)) \leq M_n(T(\omega)), \text{ za svako } k \leq n \text{ i za svako } \omega \in \Omega.$$

Za svako $k = 1, \ldots, n$ i za svako $\omega \in \Omega$ trivijalno slijedi:

$$\begin{aligned} X(\omega) + M_n(T(\omega)) &\geq X(\omega) + S_k(T(\omega)) \\ &= S_{k+1}(\omega) \end{aligned}$$

pa dobivamo:

$$X(\omega) \geq S_{k+1}(\omega) - M_n(T(\omega)).$$

Posebno, $X(\omega) \geq S_1(\omega) - M_n(T(\omega))$ jer iz definicija skupova S_1 i M_n slijedi da je $X(\omega) = S_1(\omega)$ i $M_n(\omega) \geq 0$. Slijedi:

$$X(\omega) \geq S_{k+1}(\omega) - M_n(T(\omega)), \text{ za sve } k = 0, 1, \dots, n \text{ i sve } \omega \in \Omega$$

pa dobivamo:

$$X(\omega) \geq \max\{S_1(\omega), \dots, S_n(\omega)\} - M_n(T(\omega)), \quad \omega \in \Omega.$$

Iz monotonosti integrala slijedi:

$$\begin{aligned}
\int_{\{M_n>0\}} Xd\mathbb{P} &\geq \int_{\{M_n>0\}} [\max\{S_1, \dots, S_n\} - M_n(T)]d\mathbb{P} \\
&\quad (\text{na skupu } \{M_N > 0\} \text{ vrijedi } \max\{S_1, \dots, S_n\} = M_n) \\
&= \int_{\{M_n>0\}} [M_n - M_n(T)]d\mathbb{P} \\
&\geq \int_{\Omega} [M_n - M_n(T)]d\mathbb{P} \\
&= \int_{\Omega} M_n d\mathbb{P} - \int_{\Omega} M_n(T)d\mathbb{P}. \qquad (3.1)
\end{aligned}$$

M_n je slučajna varijabla pošto je kompozicija slučajne varijable X, izmjerive funkcije T i neprekidnih funkcija. M_n ima očekivanje (koje je konačno) jer iz nejednakosti trokuta, monotonosti očekivanja, svojstava sume i maksimuma i Propozicije 2.4.6 slijedi:

$$\begin{aligned}
E|M_n| &= E|\max\{0, S_1, \dots, S_n W\}| \\
&\leq E|S_1| + \cdots + E|S_n| \\
&= E|X| + E|X + X(T)| + \cdots + E|X + X(T) + \cdots + X(T^{n-1})| \\
&\leq n \underbrace{E|X|}_{<+\infty} + (n-1) \underbrace{E|X(T)|}_{=E|X|<+\infty} + \cdots + \underbrace{E|X(T^{n-1})|}_{=E|X|<+\infty} < +\infty.
\end{aligned}$$

Sada iz (3.1) i Propozicije 2.4.6 slijedi:

$$\int_{\{M_n>0\}} Xd\mathbb{P} \geq EM_n - EM_n(T) = 0. \qquad \square$$

Sljedeće ćemo dokazati Birkhoff-Hinčinov ergodski teorem.

Teorem 3.1.2. *(Ergodski teorem)*
Neka je $T : \Omega \longrightarrow \Omega$ transformacija koja čuva mjeru na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Ako je X slučajna varijabla na Ω koja je apsolutno integrabilna ($E|X| < +\infty$), tada vrijedi:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} X(T^k) = E[X|\mathcal{T}] \quad \textit{gotovo sigurno.}$$

Dokaz. Za svako $\omega \in \Omega$ definiramo:

$$\begin{aligned} S_k(\omega) &= X(\omega) + X(T(\omega)) + \cdots + X(T^{k-1}(\omega)), \quad k = 1, \dots, n \\ M_n(\omega) &= \max\{0, S_1(\omega), \dots, S_n(\omega)\}, \text{ za svako } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Pokazujemo:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = E[X|\mathcal{T}] \quad \text{gotovo sigurno.}$$

Prvo ćemo tvrdnju pokazati za slučaj $E[X|\mathcal{T}] = 0$. Definiramo slučajnu varijablu $\bar{X} = \overline{\lim}_n \frac{S_n}{n}$. Za svaki $\epsilon > 0$ možemo definirati skup:

$$D_\epsilon = \{\bar{X} > \epsilon\}.$$

Slučajna varijabla $\bar{X}$ je invarijantna u odnosu na T:

$$\begin{aligned} \bar{X}(T(\omega)) &= \overline{\lim_n} \frac{S_n(T(\omega))}{n} \\ &= \overline{\lim_n} \frac{S_{n+1}(\omega) - X(\omega)}{n} \\ &= \underbrace{\overline{\lim_n} \frac{S_{n+1}(\omega)}{n+1}}_{\bar{X}(\omega)} \underbrace{\frac{n+1}{n}}_{\to 1} - \underbrace{\overline{\lim_n} \frac{X(\omega)}{n}}_{=0} = \bar{X}(\omega), \text{ za sve } \omega \in \Omega. \end{aligned}$$

Stoga iz Propozicije 2.4.2 slijedi da je $D_\epsilon \in \mathcal{T}$, za sve $\epsilon > 0$.

Za proizvoljan $\epsilon > 0$ definiramo slučajnu varijablu $X^* = (X - \epsilon)\chi_{D_\epsilon}$. Zbog pretpostavke teorema vrijedi:

$$\begin{aligned} E|X^*| &\leq E|X\chi_{D_\epsilon}| + E|\epsilon\chi_{D_\epsilon}| \\ &\leq E|X| + \epsilon \underbrace{\mathbb{P}(D_\epsilon)}_{\leq 1} \leq E|X| + \epsilon < +\infty. \end{aligned}$$

Za svako $\omega \in \Omega$ definiramo:

$$\begin{aligned} S_k^*(\omega) &= X^*(\omega) + X^*(T(\omega)) + \cdots + X^*(T^{k-1}(\omega)), \quad k = 1, \dots, n \\ M_n^*(\omega) &= \max\{0, S_1^*(\omega), \dots, S_n^*(\omega)\}, \text{ za svako } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Po maksimalnom ergodskom teoremu slijedi:

$$\int_{\{M_n^*>0\}} X^* d\mathbb{P} \geq 0, \qquad \text{za sve } n \in \mathbb{N}.$$

Za svako $n \in \mathbb{N}$ definiramo događaj $F_n = \{M_n^* > 0\} = \{\max_{1\leq k\leq n} S_k^* > 0\}$. Sada je $(F_n, n \in \mathbb{N})$ rastući niz događaja koji u uniji daje događaj $F = \{\sup_{k\geq 1} S_k^* > 0\}$.

Iz definicije skupova D_ϵ, F i definicije slučajnih varijabli X^* i $\bar{X}$ slijedi:

$$\begin{aligned} F = \{\sup_{k\geq 1} S_k^* > 0\} &= \left\{\sup_{k\geq 1} \frac{S_k^*}{k} > 0\right\} \\ &= \left\{\sup_{k\geq 1} \frac{S_k}{k} > \epsilon\right\} \cap D_\epsilon. \end{aligned}$$

Stoga je $F \subseteq D_\epsilon$.

S druge strane, iz definicije slučajne varijable $\bar{X}$ slijedi da je $\sup_{k\geq 1} S_k \geq \bar{X}$. Stoga za proizvoljan $\omega \in D_\epsilon = \{\bar{X} > \epsilon\}$ slijedi da je $\sup_{k\geq 1} S_k(\omega) \geq \bar{X}(\omega) > \epsilon$. Tada je $\omega \in F$ pa imamo $D_\epsilon = F$. Pošto je $(X^*\chi_{F_n}, n \in N)$ rastući niz nenegativnih slučajnih varijabli koji konvergira prema slučajnoj varijabli $X^*\chi_F$, slijedi:

$$\int_{F_n} X^* d\mathbb{P} \longrightarrow \int_F X^* d\mathbb{P}, \quad \text{kada } n \to +\infty.$$

Naime, iz Lebesguovog teorema o monotonoj konvergenciji slijedi:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int_{F_n} X^* d\mathbb{P} &= \lim_{n\to\infty} E[X^*\chi_{F_n}] \\ &= E[\lim_{n\to\infty} X^*\chi_{F_n}] \quad \text{(LTMK)} \\ &= E[X^*\chi_F] = \int_F X^* d\mathbb{P}. \end{aligned}$$

Pošto je $\int_{F_n} X^* d\mathbb{P} \geq 0$, za sve $n \in \mathbb{N}$, slijedi da je $\int_F X^* d\mathbb{P} \geq 0$, što povlači $\int_{D_\epsilon} X^* d\mathbb{P} \geq 0$.

Međutim, vrijedi da je:

$$\begin{aligned} \int_{D_\epsilon} X^* d\mathbb{P} &= \int_{D_\epsilon} X d\mathbb{P} - \int_{D_\epsilon} \epsilon d\mathbb{P} \\ &= \int_{D_\epsilon} \underbrace{E[X|\mathcal{T}]}_{=0} d\mathbb{P} - \epsilon\mathbb{P}(D_\epsilon) \quad \text{(definicija uvjetnog očekivanja)} \\ &= \underbrace{-\epsilon}_{<0} \mathbb{P}(D_\epsilon). \end{aligned}$$

Stoga iz nenegativnosti vjerojatnosti slijedi da je $\mathbb{P}(D_\epsilon) = 0$, za sve $\epsilon > 0$, pa dobivamo da je $\bar{X} \leq 0$ gotovo sigurno.

Analogno za slučajnu varijablu $-X$ vrijedi $\overline{\lim}_n \frac{-S_n}{n} = -\underline{\lim}_n \frac{S_n}{n} \leq 0$ gotovo sigurno te označimo $\underline{X} = \underline{\lim}_n \frac{S_n}{n}$. Slijedi da je $-\underline{X} \leq 0$ gotovo sigurno što povlači da je $\underline{X} \geq 0$ gotovo sigurno. Stoga dobivamo da vrijedi:

$$0 \leq \underline{\lim}_n \frac{S_n}{n} \leq \overline{\lim}_n \frac{S_n}{n} \leq 0 \quad \text{gotovo sigurno}$$

pa po teoremu o sendviču i definiciji limesa slijedi:

$$0 = E[X|\mathcal{T}] = \overline{\lim}_n \frac{S_n}{n} = \underline{\lim}_n \frac{S_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} \quad \text{gotovo sigurno.}$$

Pokažimo da tvrdnja vrijedi za proizvoljnu slučajnu varijablu $E[X|\mathcal{T}]$. Definiramo $Y = X - E[X|\mathcal{T}]$. Tada je Y slučajna varijabla i iz svojstava uvjetnog očekivanja slijedi:

$$EY = EX - E[E[X|\mathcal{T}]] = EX - EX = 0$$

pa po prethodno dokazanom vrijedi:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} Y(T^k) = 0 \quad \text{gotovo sigurno.}$$

Pošto je:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} Y(T^k) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} X(T^k) - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} E[X(T^k)|\mathcal{T}]$$

preostaje pokazati da je $E[X(T^k)|\mathcal{T}] = E[X|\mathcal{T}]$, za svako $k \in \mathbb{N}_0$. Po definiciji uvjetnog očekivanja i Propoziciji 2.4.6, za proizvoljno $D \in \mathcal{T}$ imamo:

$$\begin{aligned}
\int_D E[X(T^k)|\mathcal{T}]d\mathbb{P} &= \int_D X(T^k)d\mathbb{P} \\
&= E[X(T^k)\chi_D] \\
(D \in \mathcal{T} &\Rightarrow T^{-k}(D) = D) \\
&= E[X\chi_D] \\
&= \int_D Xd\mathbb{P} = \int_D E[X|\mathcal{T}]d\mathbb{P}.
\end{aligned}$$

Slijedi tražena tvrdnja pa je stoga:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} X(T^k) = E[X|\mathcal{T}] \quad \text{gotovo sigurno.}$$

□

3.2 Korolari ergodskog teorema

Korolar 3.2.1. *Neka je $T : \Omega \longrightarrow \Omega$ ergodička transformacija koja čuva mjeru na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Neka je X slučajna varijabla na Ω za koju vrijedi $E|X| < +\infty$. Tada vrijedi:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} X(T^k) = EX \quad \textit{gotovo sigurno.}$$

Dokaz. Iz ergodskog teorema slijedi:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} X(T^k) = E[X|\mathcal{T}] \quad \text{gotovo sigurno.}$$

Preslikavanje T je ergodičko pa vrijedi da je:

$$\mathbb{P}(A) = 0 \text{ ili } 1, \quad \text{za svako } A \in \mathcal{T}.$$

Pokazat ćemo da su $\mathcal{T}$ i $\sigma(X) = X^{-1}(\mathcal{B})$ nezavisne σ-algebre. Neka su $A \in \mathcal{T}$ i $B \in \mathcal{B}$ proizvoljni.
Ako je $\mathbb{P}(A) = 0$, slijedi:

$$\mathbb{P}(X^{-1}(B) \cap A) \leq \mathbb{P}(A) = 0$$

pa je po teoremu o sendviču i nenegativnosti vjerojatnosti slijedi $\mathbb{P}(X^{-1}(B) \cap A) = 0$, što je jednako $\mathbb{P}(X^{-1}(B))\mathbb{P}(A)$.
Ako je $\mathbb{P}(A) = 1$, slijedi:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X^{-1}(B)) \geq \mathbb{P}(X^{-1}(B) \cap A) &= 1 - \mathbb{P}((X^{-1}(B))^c \cup A^c) \\
&= 1 - \mathbb{P}(X^{-1}(B^c)) - \underbrace{\mathbb{P}(A^c)}_{=0} + \underbrace{\mathbb{P}(X^{-1}(B^c) \cap A^c)}_{=0} \\
&= 1 - \mathbb{P}(X^{-1}(B^c)) \\
&= \mathbb{P}(X^{-1}(B))
\end{aligned}$$

pa slijedi da je $\mathbb{P}(X^{-1}(B) \cap A) = \mathbb{P}(X^{-1}(B))$, što je jednako $\mathbb{P}(X^{-1}(B))\mathbb{P}(A)$.
Pošto su $\mathcal{T}$ i $\sigma(X) = X^{-1}(\mathcal{B})$ nezavisne σ-algebre, slijedi:

$$E[X|\mathcal{T}] = EX \quad \text{gotovo sigurno}$$

pa je stoga:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} X(T^k) = EX \quad \text{gotovo sigurno.} \qquad \square$$

Korolar 3.2.2. *Neka je $T : \Omega \longrightarrow \Omega$ ergodička transformacija koja čuva mjeru na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Neka je X nenegativna slučajna varijabla na Ω za koju vrijedi $EX = +\infty$. Tada vrijedi:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} X(T^k) = +\infty \quad \textit{gotovo sigurno.}$$

Dokaz. Za proizvoljan $\alpha > 0$ i svako $\omega \in \Omega$ definiramo:

$$X_\alpha(\omega) = \begin{cases} X(\omega), & X(\omega) \leq \alpha, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Vrijedi: $E|X_\alpha| \leq \alpha < +\infty$. Tada iz Korolara 3.2.1 imamo:

$$\begin{aligned} EX_\alpha &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} X_\alpha(T^k) \\ &\leq \varliminf_{n} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} X(T^k) \text{ gotovo sigurno} \end{aligned} \tag{3.2}$$

jer je $X_\alpha \leq X$ i limes inferior je monotona funkcija.

Pustimo α u $+\infty$ pa stoga $X_\alpha \longrightarrow X$. Pošto je $(X_\alpha, \alpha > 0)$ rastući niz nenegativnih slučajnih varijabli, iz Lebesguovog teorema o monotoj konvergenciji slijedi:

$$\lim_{\alpha\to\infty} EX_\alpha = E[\lim_{\alpha\to\infty} X_\alpha] = EX = +\infty.$$

Tada iz (3.2) imamo:

$$\lim_{\alpha\to\infty} EX_\alpha \leq \varliminf_{n} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} X(T^k) \quad \text{gotovo sigurno}$$

pa slijedi:

$$+\infty \leq \varliminf_{n} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} X(T^k) \leq \varlimsup_{n} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} X(T^k) \leq +\infty \quad \text{gotovo sigurno.}$$

Tada iz teorema o sendviču i definicije limesa slijedi:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} X(T^k) = +\infty \quad \text{gotovo sigurno.}$$

□

Općenito, ako X nije nenegativna slučajna varijabla, iz $E|X| = +\infty$ ne mora slijediti da prosjeci divergiraju gotovo sigurno.

Neka je $A \in \mathcal{F}$ proizvoljan te definiramo:

$$X(\omega) = \chi_A(\omega), \omega \in \Omega.$$

Tada je X slučajna varijabla na Ω i vrijedi da je $E|X| < +\infty$. Ako je T ergodička transformacija koja čuva mjeru, tada iz Korolara 3.2.1 slijedi:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \chi_A(T^k) = \mathbb{P}(A) \quad \text{gotovo sigurno.}$$

Gornju sumu možemo protumačiti kao prosječan broj točaka $\omega, T(\omega), T^2(\omega), \ldots$ u skupu A pa je stoga za gotovo svaku početnu točku ω asimptotski prosjek točaka $\omega, T(\omega), T^2(\omega), \ldots$ u skupu A upravo jednak $\mathbb{P}(A)$.

Pretpostavimo da je Ω i topološki prostor, tj. zadana je familija otvorenih podskupova od Ω. Posebno ima smisla pojam okoline točke iz Ω. Također pretpostavimo da svaka točka ima prebrojivu bazu okolina, tako da se konvergencija u Ω može okarakterizirati nizovima. Kažemo da je A *gust* skup u Ω ako za svaki $\omega \in \Omega$ i svaku otvorenu okolinu N od ω takvu da je $\mathbb{P}(N) > 0$ postoji barem jedna točka iz A koja je u N.

Neka je $\omega' \in \Omega$ proizvoljan i neka je $N \in \mathcal{F}$ takav da je $\omega' \in N$ i $\mathbb{P}(N) > 0$ te vrijedi:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \chi_N(T^k) = \mathbb{P}(N) \quad \text{gotovo sigurno.}$$

Tada je:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \chi_N(T^k(\omega)) > 0$$

za sve ω iz skupa koji ima vjerojatnost 1. Stoga postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \chi_N(T^k(\omega)) > 0, \text{ za sve } n \geq n_0$$

pa je stoga sigurno neka od točaka $\omega, T(\omega), T^2(\omega), \ldots$ u skupu N. Slijedi da je $\{\omega, T(\omega), T^2(\omega), \ldots\}$ gust skup u Ω.

Korolar 3.2.3. *Neka je $T : \Omega \longrightarrow \Omega$ ergodička transformacija koja čuva mjeru u odnosu na vjerojatnosne prostore $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_1)$ i $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_2)$. Tada je ili $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_2$ ili su $\mathbb{P}_1$ i $\mathbb{P}_2$ ortogonalne mjere u smislu da postoji skup $A \in \mathcal{T}$ takav da vrijedi:*

$$\mathbb{P}_1(A) = 1, \quad \mathbb{P}_2(A^c) = 1.$$

Dokaz. Pretpostavimo da je $\mathbb{P}_1 \neq \mathbb{P}_2$. Tada postoji $B \in \mathcal{F}$ takav da je $\mathbb{P}_1(B) \neq \mathbb{P}_2(B)$.

Definiramo $X(\omega) = \chi_B(\omega), \omega \in \Omega$. Tada iz Korolara 3.2.1 slijedi:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} X(T^k) = \mathbb{P}_1(B) \quad \text{gotovo sigurno.}$$

Označimo skup točaka za koje se događa gornja konvergencija sa A. Iz definicije konvergencije gotovo sigurno slijedi da je $\mathbb{P}_1(A) = 1$. Međutim, iz Korolara 3.2.1 također slijedi:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} X(T^k) = \mathbb{P}_2(B) \quad \text{gotovo sigurno.}$$

Pošto je konvergencija gotovo sigurno gotovo sigurno jedinstvena i $\mathbb{P}_1(B) \neq \mathbb{P}_2(B)$, slijedi da se gornja konvergencija događa na skupu A^c i vrijedi $\mathbb{P}_2(A^c) = 1$. □

Korolar 3.2.4. *Uz pretpostavke ergodskog teorema vrijedi:*

$$\lim_{n\to\infty} E\left|\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} X(T^k) - E[X|\mathcal{T}]\right| = 0$$

tj.

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} X(T^k) \xrightarrow{L^1} E[X|\mathcal{T}], \quad \textit{kada } n \to \infty.$$

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $E[X|\mathcal{T}] = 0$. Definiramo $V_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} X(T^k), n \in \mathbb{N}$. Iz ergodskog teorema slijedi:

$$\lim_{n\to\infty} V_n = 0 \quad \text{gotovo sigurno.}$$

Iskažimo Egorovljev teorem koji ćemo koristiti u nastavku dokaza:

Teorem 3.2.5. *(Egorovljev teorem)*
Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ prostor s mjerom i neka je $E \in \mathcal{F}$ takav da je $\mu(E) < +\infty$. Neka su $(f_n, n \in \mathbb{N})$ i f realne funkcije definirane na E koje su $\mathcal{F}$-izmjerive i za koje vrijedi:

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f \quad \textit{gotovo sigurno.}$$

Tada za svaki $\epsilon > 0$ postoji $B \in \mathcal{F}, B \subseteq E$, takav da je $\mu(B) < \epsilon$ i niz $(f_n, n \in \mathbb{N})$ konvergira uniformno prema f na $E \backslash B$.

Dokaz se može pronaći u [2].

Stoga slijedi da za svako $\epsilon > 0$ postoji $A \in \mathcal{F}$ takvo da je $\mathbb{P}(A) \leq \epsilon$ i $(V_n, n \in \mathbb{N})$ uniformno konvergira prema 0 na A^c. Stoga na A^c vrijedi da je $\overline{\lim}_n V_n = 0 \Leftrightarrow \overline{\lim}_n |V_n| = 0$.

Iskažimo obrnutu Fatouvu lemu:

Teorem 3.2.6. *(Obrnuta Fatouva lema)*
Neka je $(f_n, n \in \mathbb{N})$ niz realnih izmjerivih funkcija definiranih na izmjerivom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Ako postoji nenegativna integrabilna funkcija g na Ω takva da je $f_n \leq g$, za sve $n \in \mathbb{N}$, tada vrijedi:

$$\overline{\lim_n} \int_\Omega f_n d\mu \leq \int_\Omega \overline{\lim_n} f_n d\mu.$$

Tada slijedi:

$$0 \leq \overline{\lim_n} E|V_n \chi_{A^c}| \leq E[\underbrace{\overline{\lim_n}(|V_n \chi_{A^c}|)}_{=0}] = 0$$

pa je stoga $\overline{\lim}_n E|V_n| = 0$ na A^c.

Iz te činjenice i definicije V_n slijedi:

$$\begin{aligned}
\overline{\lim_n} E|V_n| &= \overline{\lim_n} \int_\Omega |V_n| d\mathbb{P} \\
&= \overline{\lim_n} \int_A |V_n| d\mathbb{P} \\
&\leq \overline{\lim_n} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_A |X(T^k)| d\mathbb{P}.
\end{aligned}$$

Za proizvoljan $N > 0$ imamo:

$$\begin{aligned}
\int_A |X(T^k)| d\mathbb{P} &= \int_{A \cap \{|X(T^k)| > N\}} |X(T^k)| d\mathbb{P} + \int_{A \cap \{|X(T^k)| \leq N\}} |X(T^k)| d\mathbb{P} \\
&\leq \int_{A \cap \{|X(T^k)| > N\}} |X(T^k)| d\mathbb{P} + N \int_A d\mathbb{P} \quad \text{(monotonost integrala)} \\
&= \int_{A \cap \{|X(T^k)| > N\}} |X(T^k)| d\mathbb{P} + N\mathbb{P}(A) \\
&= E[|X(T^k)| \chi_{A \cap \{|X(T^k)| > N\}}] + N\mathbb{P}(A) \\
&\leq E[|X(T^k)| \chi_{\{|X(T^k)| > N\}}] + N\mathbb{P}(A) \\
&= E[|X| \chi_{\{|X| > N\}}] + N\mathbb{P}(A) = \int_{\{|X| > N\}} |X| d\mathbb{P} + N\mathbb{P}(A). \quad \text{(Propozicija 2.4.6)}
\end{aligned}$$

Stoga za proizvoljan $\epsilon > 0$ i proizvoljan $N > 0$ vrijedi:

$$\overline{\lim_n} E|V_n| \leq \int_{\{|X|>N\}} |X| d\mathbb{P} + N \underbrace{\mathbb{P}(A)}_{\leq \epsilon}.$$

Sada iz proizvoljnosti $\epsilon > 0$ slijedi da ako pustimo N u beskonačnost dobivamo:

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty} \int_{\{|X|>N\}} |X| d\mathbb{P} &= \lim_{N\to\infty} E[|X|\chi_{\{|X|>N\}}] \\ &= E[\lim_{N\to\infty} |X|\chi_{\{|X|>N\}}] = 0. \quad \text{(LTDK)}\end{aligned}$$

Zadnju jednakost smo dobili iz činjenica da je $E|X| < +\infty$ pa je stoga $\mathbb{P}(|X| = +\infty) = 0$ te iz Lebesguovog teorema o dominiranoj konvergenciji primjenjenog na niz $(|X|\chi_{\{|X|>N\}}, N \in \mathbb{N})$. Slijedi da je $\overline{\lim}_n E|V_n| \leq 0$ pa po teoremu o sendviču imamo da je $\overline{\lim}_n E|V_n| = 0$. Tada ponovno iz teorema o sendviču i definicije limesa dobivamo:

$$\lim_{n\to\infty} E|V_n| = 0$$

pa tvrdnja slijedi. □

3.3 Slučajni procesi i ergodski teorem

Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ slučajni proces na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Njemu pridružujemo koordinatni reprezentativni proces $(\hat{X}_n, n \in \mathbb{N})$ na vjerojatnosnom prostoru $(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{B}^\infty, \hat{\mathbb{P}})$ koji ima jednake konačno-dimenzionalne distribucije kao početni proces. Definiramo transformaciju pomaka $S : \mathbb{R}^\infty \longrightarrow \mathbb{R}^\infty$ sa:

$$S(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots).$$

Slijedi da se reprezentativni proces može prikazati kao:

$$\hat{X}_n(\mathbb{x}) = \hat{X}_1(S^{n-1}(\mathbb{x})), \quad \mathbb{x} = (x_n, n \in \mathbb{N}) \in \mathbb{R}^\infty, \text{ za sve } n \in \mathbb{N}$$

te iz Propozicije 2.2.6 slijedi da je S preslikavanje koje čuva mjeru.

Iz ergodskog teorema i Korolara 3.2.1 slijedi:
ako je S ergodska transformacija koja čuva mjeru na vjerojatnosnom prostoru $(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{B}^\infty, \hat{\mathbb{P}})$, tada vrijedi:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \hat{X}_1(S^k) = EX_1 \quad \text{gotovo sigurno i u srednjem reda 1}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \hat{X}_k = EX_1 \quad \text{gotovo sigurno i u srednjem reda 1.}$$

Ako je S ergodska transformacija, ista tvrdnja će vrijediti i za originalan proces $(X_n, n \in \mathbb{N})$ pošto konvergencija gotovo sigurno i u srednjem reda 1 ovise samo o distribuciji procesa, a originalni proces i koordinatni reprezentativni proces imaju jednake konačno-dimenzionalne distribucije. Stoga ćemo sve tvrdnje vezane uz invarijantnost i ergodičnost formulirati u terminima originalnog procesa $(X_n, n \in \mathbb{N})$ bez korištenja koordinatnog reprezentativnog procesa.

Označimo sa $\mathbb{X} = (X_n, n \in \mathbb{N})$ slučajni proces kojeg promatramo. To je preslikavanje sa Ω u $\mathbb{R}^\infty$. Za operator pomaka S i proizvoljan $B \in \mathcal{B}^\infty$ vrijedi:

$$\begin{aligned}\{\mathbb{X} \in S^{-1}(B)\} &= \mathbb{X}^{-1}(S^{-1}(B)) \\ &= \{\omega \in \Omega : \mathbb{X}(\omega) \in S^{-1}(B)\} \\ &= \{\omega \in \Omega : S(\mathbb{X}(\omega)) \in B\} \\ &= \{\omega \in \Omega : S(X_1(\omega), X_2(\omega), \dots) \in B\} \\ &= \{\omega \in \Omega : (X_2(\omega), X_3(\omega), \dots) \in B\}.\end{aligned}$$

Definicija 3.3.1. *Događaj $A \in \mathcal{F}$ je invarijantan ako postoji $B \in \mathcal{B}^\infty$ takav da za svako $n \geq 1$ vrijedi:*

$$A = \{(X_n, X_{n+1}, \dots) \in B\}.$$

Sa $\mathcal{T}$ označavamo familiju svih invarijantnih događaja $A \in \mathcal{F}$.

Napomena 3.3.2. Provjeravanjem definicije σ-algebre, iz činjenice da je $\mathcal{B}^\infty$ σ-algebra i osnovnih svojstava komplementa i unije, slijedi da je $\mathcal{T}$ σ-algebra.

Definicija 3.3.3. *Kažemo da je slučajna varijabla Z na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ invarijantna ako postoji slučajna varijabla (tj. funkcija) φ na $(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{B}^\infty)$ takva da vrijedi:*

$$Z = \varphi(X_n, X_{n+1}, \dots), \text{ za sve } n \geq 1.$$

Lebesguovom indukcijom se lako pokaže da je Z invarijantna slučajna varijabla ako i samo ako je $\mathcal{T}$-izmjeriva (dokaz analogan dokazu Propozicije 2.4.2).

Prvo ćemo dokazati jednu tehničku propoziciju koju ćemo koristiti u dokazu ergodskog teorema za stacionarne procese.

Propozicija 3.3.4. *Neka je $\mathbb{X}$ slučajan proces na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ i neka je $\mathbb{X}'$ slučajan proces na $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}')$ te neka su ti procesi jednako distribuirani, tj.*

$$\mathbb{P}(\mathbb{X} \in B) = \mathbb{P}'(\mathbb{X}' \in B), \text{ za svako } B \in \mathcal{B}^\infty.$$

Tada za $\mathcal{B}^\infty$-izmjerivu funkciju φ vrijedi:

$$\int_\Omega \varphi(\mathbb{X}) d\mathbb{P} = \int_{\Omega'} \varphi(\mathbb{X}') d\mathbb{P}'$$

u smislu da jedan od integrala postoji ako i samo ako postoji drugi i vrijednosti su im jednake.

Dokaz. Tvrdnju ćemo dokazati Lebesguovom indukcijom po φ.

I Neka je $\varphi = \chi_A$, za $A \in \mathcal{B}^\infty$. Tada vrijedi:

$$\chi_A(\mathbb{X}) = \chi_{\mathbb{X}^{-1}(A)} \text{ i } \chi_A(\mathbb{X}') = \chi_{(\mathbb{X}')^{-1}(A)}.$$

Slijedi:

$$\begin{aligned}\int_\Omega \varphi(\mathbb{X})d\mathbb{P} &= \int_\Omega \chi_A(\mathbb{X})d\mathbb{P} = \int_\Omega \chi_{\mathbb{X}^{-1}(A)}d\mathbb{P}\\ &= \mathbb{P}(\mathbb{X} \in A) = \mathbb{P}'(\mathbb{X}' \in A) \quad \text{(pretpostavka)}\\ &= \int_{\Omega'} \chi_A(\mathbb{X}')d\mathbb{P}' = \int_{\Omega'} \varphi(\mathbb{X}')d\mathbb{P}'.\end{aligned}$$

II Neka je $\varphi = \sum_{k=1}^n x_k\chi_{A_k}$, gdje su $x_1, \dots, x_n$ realni brojevi i $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}^\infty$ međusobno disjunktni skupovi. Slijedi:

$$\begin{aligned}\int_\Omega \varphi(\mathbb{X})d\mathbb{P} &= \int_\Omega \sum_{k=1}^n x_k\chi_{A_k}(\mathbb{X})d\mathbb{P}\\ &= \sum_{k=1}^n x_k \int_\Omega \chi_{A_k}(\mathbb{X})d\mathbb{P} \quad \text{(linearnost integrala)}\\ &= \sum_{k=1}^n x_k \int_{\Omega'} \chi_{A_k}(\mathbb{X}')d\mathbb{P}' \quad \text{(prema } I\text{)}\\ &= \int_{\Omega'} \sum_{k=1}^n x_k\chi_{A_k}(\mathbb{X}')d\mathbb{P}' = \int_{\Omega'} \varphi(\mathbb{X}')d\mathbb{P}'.\end{aligned}$$

III Neka je φ proizvoljna nenegativna $\mathcal{B}^\infty$-izmjeriva funkcija. Tada postoji rastući niz $(\varphi_n, n \in \mathbb{N})$ nenegativnih jednostavnih $\mathcal{B}^\infty$-izmjerivih funkcija takvih da vrijedi:

$$\varphi = \lim_{n\to\infty} \varphi_n.$$

Slijedi da su $(\varphi_n(\mathbb{X}), n \in \mathbb{N})$ i $(\varphi_n(\mathbb{X}'), n \in \mathbb{N})$ rastući nizovi nenegativnih jednostavnih $\mathcal{B}^\infty$-izmjerivih funkcija takvih da vrijedi:

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbb{X}) &= \lim_{n\to\infty} \varphi_n(\mathbb{X})\\ \varphi(\mathbb{X}') &= \lim_{n\to\infty} \varphi_n(\mathbb{X}').\end{aligned}$$

Tada iz Lebesguovog teorema o monotonoj konvergenciji i *II* slijedi:

$$\begin{aligned}\int_\Omega \varphi(\mathbb{X})d\mathbb{P} &= \int_\Omega \lim_{n\to\infty} \varphi_n(\mathbb{X})d\mathbb{P} \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \varphi_n(\mathbb{X})d\mathbb{P} = \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega'} \varphi_n(\mathbb{X}')d\mathbb{P}' \\ &= \int_{\Omega'} \lim_{n\to\infty} \varphi_n(\mathbb{X}')d\mathbb{P}' = \int_{\Omega'} \varphi(\mathbb{X}')d\mathbb{P}'.\end{aligned}$$

IV Neka je φ proizvoljna $\mathcal{B}^\infty$-izmjeriva funkcija. Tada vrijedi da je $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$, gdje su φ^+ i φ^- nenegativne $\mathcal{B}^\infty$-izmjeriva funkcije. Iz *III* i definicije integrala slijedi da lijevi integral u tvrdnji postoji ako i samo ako postoji desni integral i vrijedi:

$$\begin{aligned}\int_\Omega \varphi(\mathbb{X})d\mathbb{P} &= \int_\Omega \varphi^+(\mathbb{X})d\mathbb{P} - \int_\Omega \varphi^-(\mathbb{X})d\mathbb{P} \\ &= \int_{\Omega'} \varphi^+(\mathbb{X}')d\mathbb{P}' - \int_{\Omega'} \varphi^-(\mathbb{X}')d\mathbb{P}' \\ &= \int_{\Omega'} \varphi(\mathbb{X}')d\mathbb{P}'.\end{aligned}$$

□

Teorem 3.3.5. *Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ stacionaran proces na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, neka je $\mathcal{T}$ σ-algebra invarijantnih događaja iz $\mathcal{F}$ te neka je $E|X_1| < +\infty$. Tada vrijedi:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k = E[X_1|\mathcal{T}] \quad \textit{gotovo sigurno.}$$

Dokaz. Označimo sa $\mathbb{X} = (X_n, n \in \mathbb{N})$ naš stacionaran proces te definiramo pripadni koordinatni reprezentativni proces na $(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{B}^\infty, \hat{\mathbb{P}})$ sa:

$$\hat{X}_k(\mathbb{x}) = x_k, \qquad \text{za } \mathbb{x} = (x_n, n \in \mathbb{N}) \in \mathbb{R}^\infty.$$

Tada iz ergodskog teorema slijedi da niz $(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \hat{X}_k, n \in \mathbb{N})$ konvergira gotovo sigurno, pa zbog jednakosti konačno-dimenzionalnih distribucija reprezentativnog i originalnog procesa slijedi:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k = Y \quad \text{gotovo sigurno,}$$

za neku slučajnu varijablu Y.

Želimo pokazati da je $Y = E[X_1|\mathcal{T}]$. Označimo $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, za svaki $n \geq 1$, te stavimo da je $Y = \overline{\lim}_n \frac{S_n}{n}$. Za proizvoljan $y \in \mathbb{R}$ slijedi da je događaj $\{Y < y\}$ invarijantan po definiciji limesa superiora pa je stoga Y $\mathcal{T}$-izmjeriva funkcija. Neka je $A \in \mathcal{T}$ proizvoljan. Tada iz Korolara 3.2.4 slijedi:

$$\lim_{n\to\infty} E\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - Y\right| = 0. \tag{3.3}$$

Korištenjem Jensenove nejednakosti te svojstava aposolutne vrijednosti i karakteristične funkcije dobivamo:

$$\begin{aligned}\left|E[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - Y)\chi_A]\right| &\leq E\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - Y)\chi_A\right| \\ &\leq E\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - Y)\right|\end{aligned}$$

pa iz (3.3), teorema o sendviču i neprekidnosti apsolutne vrijednosti slijedi:

$$\lim_{n\to\infty} E[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - Y)\chi_A] = 0.$$

Tada iz lineranosti očekivanja imamo:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_A X_k d\mathbb{P} = \int_A Y d\mathbb{P}. \tag{3.4}$$

Pošto je $A \in \mathcal{T}$, slijedi da postoji $B \in \mathcal{B}^\infty$ takav da za svako $n \geq 1$ vrijedi:

$$A = \{(X_n, X_{n+1}, \dots) \in B\}. \tag{3.5}$$

Proces $(X_n, n \in \mathbb{N})$ je stacionaran pa za svako $k \geq 1$ vrijedi da su procesi $X_1, X_2, \dots$ i $X_k, X_{k+1}, \dots$ jednako distribuirani.

Definiramo funkciju φ na $\mathbb{R}^\infty$ sa:

$$\varphi(\mathbb{X}) = \pi_1(\mathbb{X})\chi_{\{\mathbb{X}\in B\}}.$$

Vrijedi:

$$\begin{aligned}\varphi(X_1, X_2, \dots) &= X_1\chi_{\{(X_1,X_2,\dots)\in B\}} \\ \varphi(X_k, X_{k+1}, \dots) &= X_k\chi_{\{(X_k,X_{k+1},\dots)\in B\}}\end{aligned}$$

pa iz Propozicije 3.3.4 i (3.5) slijedi:

$$\begin{aligned}\int_A X_k d\mathbb{P} = \int_{\{(X_k, X_{k+1}, \dots) \in B\}} X_k d\mathbb{P} &= \int_\Omega X_k \chi_{\{(X_k, X_{k+1}, \dots) \in B\}} d\mathbb{P} \\ &= \int_\Omega X_1 \chi_{\{(X_1, X_2, \dots) \in B\}} d\mathbb{P} \\ &= \int_{\{(X_1, X_2, \dots) \in B\}} X_1 d\mathbb{P} = \int_A X_1 d\mathbb{P}, \quad \text{za sve } k \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Zbrajanjem n prethodnih integrala, njihovim dijeljenjem sa n te puštanjem n u beskonačnost, iz (3.4) slijedi:

$$\int_A X_1 d\mathbb{P} = \int_A Y d\mathbb{P}, \quad \text{za svako } A \in \mathcal{T}$$

te, pošto je Y $\mathcal{T}$-izmjeriva slučajna varijabla, iz definicije uvjetnog očekivanja slijedi:

$$Y = E[X_1 | \mathcal{T}]$$

pa tvrdnja doista vrijedi. □

Definicija 3.3.6. *Stacionaran proces $(X_n, n \in \mathbb{N})$ je ergodski ako svaki invarijantan događaj ima vjerojatnost 0 ili 1, tj. ako za svako $A \in \mathcal{T}$ vrijedi:*

$$\mathbb{P}(A) = 0 \text{ ili } 1.$$

Korolar 3.3.7. *Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ stacionaran ergodski proces takav da je $E|X_1| < +\infty$ te neka je $\mathcal{T}$ σ-algebra invarijantnih skupova. Tada vrijedi:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k = EX_1 \quad \textit{gotovo sigurno.}$$

Dokaz. Iz Teorema 3.3.5 slijedi:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k = E[X_1 | \mathcal{T}] \quad \text{gotovo sigurno}$$

pa trebamo pokazati da je $E[X_1|\mathcal{T}] = EX_1$ gotovo sigurno. Dovoljno je dokazati da je σ-algebra generirana sa X_1, $\sigma(X_1) = X_1^{-1}(\mathcal{B})$, nezavisna od $\mathcal{T}$. Neka su $A \in \mathcal{T}$ i $B \in \sigma(X_1)$ proizvoljni događaji. Tada postoji $B' \in \mathcal{F}$ takav da $B = X_1^{-1}(B')$.

Ako je $\mathbb{P}(A) = 0$, tada slijedi da je:

$$\begin{aligned}0 \le \mathbb{P}(A \cap B) &= \mathbb{P}(A \cap X_1^{-1}(B')) \\ &\le \mathbb{P}(A) = 0\end{aligned}$$

pa po teoremu o sendviču slijedi da je $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$ što je jednako $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

Ako je $\mathbb{P}(A) = 1$, tada slijedi da je $\mathbb{P}(A^c) = 0$. Slijedi:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B) \geq \mathbb{P}(A \cap B) &= 1 - \mathbb{P}(A^c \cup B^c) \\
&= 1 - \underbrace{\mathbb{P}(A^c)}_{=0} - \mathbb{P}(B^c) + \mathbb{P}(A^c \cap B^c) \\
&= \mathbb{P}(B) + \underbrace{\mathbb{P}(A^c \cap B^c)}_{\geq 0} \\
&\geq \mathbb{P}(B)
\end{aligned}$$

pa slijedi da je $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)$ što je jednako $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

Slijedi da je X_1 nezavisna od $\mathcal{T}$ pa je $E[X_1|\mathcal{T}] = EX_1$ gotovo sigurno i tvrdnja korolara slijedi. □

Transformacija procesa nekom izmjerivom funkcijom čuva svojstvo ergodičnosti tog procesa, isto kao i za stacionarnost.

Propozicija 3.3.8. *Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ stacionaran ergodski proces na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ i neka je $\varphi : \mathbb{R}^\infty \longrightarrow \mathbb{R}$ izmjeriva funkcija u paru σ-algebri $(\mathcal{B}^\infty, \mathcal{B})$. Definiramo proces $(Y_n, n \in \mathbb{N})$ sa:*

$$Y_k = \varphi(X_k, X_{k+1}, \dots), \ \textit{za sve } k \geq 1.$$

Tada je $(Y_n, n \in \mathbb{N})$ stacionaran ergodski proces.

Dokaz. Iz Propozicije 2.1.8 slijedi da je $(Y_n, n \in \mathbb{N})$ stacionaran proces. Za svaki $k \in \mathbb{N}$ definiramo funkciju φ_k sa:

$$\varphi_k(x_1, x_2, \dots) = \varphi(x_k, x_{k+1}, \dots).$$

Tada je $Y_k = \varphi_k(X_1, X_2, \dots)$, za sve $k \geq 1$.

Neka je $B \in \mathcal{B}^\infty$ proizvoljan. Definiramo skup:

$$A = \{\mathbb{x} \in \mathbb{R}^\infty : (\varphi_1(\mathbb{x}), \varphi_2(\mathbb{x}), \dots) \in B\}.$$

Očito je $A \in \mathcal{B}^\infty$ jer su $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ $\mathcal{B}^\infty$-izmjerive funkcije te po definiciji skupa A vrijedi:

$$\{\omega \in \Omega : (Y_1(\omega), Y_2(\omega), \dots) \in B\} = \{\omega \in \Omega : (X_1(\omega), X_2(\omega), \dots) \in A\}. \tag{3.6}$$

Neka je $C \in \mathcal{T}$. Tada postoji $B \in \mathcal{B}^\infty$ takav da je za svako $n \geq 1$:

$$C = \{(Y_n, Y_{n+1}, \dots) \in B\}.$$

Tada slijedi:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(C) &= \mathbb{P}\{(Y_n, Y_{n+1}, \dots) \in B\}, \text{ za svako } n \geq 1 \\ &= \mathbb{P}\{\underbrace{(X_n, X_{n+1}, \dots) \in A}_{\text{invarijantan događaj}}\}, \text{ za svako } n \geq 1 \quad \text{(po (3.6))} \\ &= 0 \text{ ili } 1 \quad ((X_n, n \in \mathbb{N}) \text{ ergodski proces})\end{aligned}$$

Stoga je $(Y_n, n \in \mathbb{N})$ ergodski proces. □

Propozicija 3.3.9. *Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ stacionaran proces na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Tada je svaki invarijantan događaj $A \in \mathcal{T}$ repni događaj.*

Dokaz. Neka je $A \in \mathcal{T}$ proizvoljan. Tada postoji $B \in \mathcal{B}^\infty$ takav da za svako $n \geq 1$ vrijedi:

$$A = \{(X_n, X_{n+1}, \dots) \in B\}.$$

Tada iz definicije slijedi da je $A \in \sigma(X_n, X_{n+1}, \dots)$, za svako $n \geq 1$, pa je stoga A repni događaj tj. A je element repne σ-algebre $\mathcal{F}_\infty = \cap_{n=1}^\infty \sigma(X_n, X_{n+1}, \dots)$.

□

Korolar 3.3.10. *Neka su $X_1, X_2, \dots$ nezavisne i jednako distribuirane slučajne varijable. Tada je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ ergodski proces.*

Dokaz. Iz nezavisnosti i jednake distribuiranosti slijedi da je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ stacionaran proces. Iz Propozicije 3.3.9 slijedi da je svaki invarijantan događaj A repni događaj. Tada iz Kolmogorovljevog zakona 0-1 slijedi da je $\mathbb{P}(A) = 0$ ili 1 pa je stoga $(X_n, n \in \mathbb{N})$ ergodski proces. □

Jaki zakon velikih brojeva je posljedica ergodskog teorema. Naime, neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ niz nezavisnih jednako distribuiranih sučajnih varijabli. Tada je po Primjeru 2.1.2. i Korolaru 3.3.10. to stacionaran ergodski niz slučajnih varijabli. Ako je $E|X_1| < +\infty$, tada po Korolaru 3.3.7. vrijedi:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k = EX_1 \quad \text{gotovo sigurno.}$$

Poglavlje 4

Subaditivni ergodski teorem

Definicija 4.0.1. *Kažemo da je niz* $(a_n, n \in \mathbb{N})$ *subaditivan ako za sve* $m, n \in \mathbb{N}$ *vrijedi nejednakost:*

$$a_{n+m} \leq a_n + a_m.$$

Kažemo da je funkcija $f : A \longrightarrow B$ *subaditivna ako su joj domena* $A \subseteq \mathbb{R}$ *i kodomena* $B \subseteq \mathbb{R}$ *zatvorene na zbrajanje i vrijedi:*

$$f(x+y) \leq f(x) + f(y), \text{ za sve } x, y \in A.$$

Teorem 4.0.2. *(Subaditivni ergodski teorem)*
Prepostavimo da je $(X_{m,n}, 0 \leq m < n, n \in \mathbb{N})$ *dvostruki niz slučajnih varijabli za koji vrijedi:*

i) $X_{0,m} + X_{m,n} \geq X_{0,n}$*, za sve* $n \in \mathbb{N}$ *i sve* $0 \leq m < n$

ii) $(X_{nk,(n+1)k}, n \in \mathbb{N})$ *je stacionaran niz, za svako* $k \in \mathbb{N}$

iii) distribucija niza $(X_{m,m+k}, k \in \mathbb{N})$ *ne ovisi o* $m \in \mathbb{N}_0$

iv) $EX_{0,1}^{+} < +\infty$ *i za svako* $n \in \mathbb{N}$ *vrijedi:*

$$EX_{0,n} \geq \gamma_0 n$$

gdje je $\gamma_0 > -\infty$.

Tada slijedi:

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{EX_{0,n}}{n} = \inf_{m\geq 1} \frac{EX_{0,m}}{m} \equiv \gamma$

b) $X \equiv \lim_{n\to\infty} \frac{X_{0,n}}{n}$ *konvergira gotovo sigurno i u srednjem reda 1 i vrijedi da je* $EX = \gamma$

c) ako su svi stacionarni nizovi u ii) ergodski, tada je $X = \gamma$ gotovo sigurno.

Primjer 4.0.3. Ergodski teorem za stacionarne procese je posljedica subaditivnog ergodskog teorema.

Naime, neka je $(Y_n, n \in \mathbb{N})$ stacionaran slučajni proces takav da je $E|Y_n| < +\infty$, za sve $n \in \mathbb{N}$. Definiramo: $X_{m,n} = Y_{m+1} + \cdots + Y_n$, za sve $n \in \mathbb{N}$ i sve $0 \leq m < n$. Provjeravamo pretpostavke subaditivnog ergodskog teorema:

i) Imamo:

$$\begin{aligned} X_{0,n} &= Y_1 + \cdots + Y_n \\ X_{0,m} &= Y_1 + \cdots + Y_m \\ X_{m,n} &= Y_{m+1} + \cdots + Y_n \end{aligned}$$

pa slijedi da je $X_{0,n} = X_{0,m} + X_{m,n}$.

ii) Stacionarnost niza $(X_{nk,(n+1)k}, n \in \mathbb{N})$ slijedi iz činjenice da je $(Y_n, n \in \mathbb{N})$ stacionaran niz i Propozicije 2.1.8.

iii) Iz pretpostavke stacionarnosti niza $(Y_n, n \in \mathbb{N})$ slijedi da distribucija niza $(X_{m,m+k}, k \in \mathbb{N})$ ne ovisi o m, za $m \in \mathbb{N}_0$.

iv) $EX_{0,1}^+ = EY_1^+ \leq E|Y_1| < +\infty$.
Po pretpostavci je $E|Y_n| < +\infty$ pa slijedi da je $EY_n > -\infty$. Stoga slijedi da je:

$$EX_{0,n} = EY_1 + \cdots + EY_n \geq \gamma_0 n, \text{ za sve } n \in \mathbb{N} \text{ i } \gamma_0 > -\infty.$$

Tada iz Teorema 4.0.2 b) slijedi:

$$\left(\frac{Y_1 + \cdots + Y_n}{n}, n \in \mathbb{N}\right) \text{ konvergira gotovo sigurno i u } L^1.$$

Dokaz. Dokazat ćemo Liggettovu verziju Kingmanova dokaza teorema koja ima četiri koraka. Dokaz se može pronaći u [4].

Korak 1 Pokazujemo da je $E|X_{0,n}| \leq Cn$, za sve $n \in \mathbb{N}$, za proizvoljnu konstantu C.

Iz pretpostavke i) slijedi da je:

$$X_{0,n}^+ \leq X_{0,m}^+ + X_{m,n}^+, \text{ za sve } n \in \mathbb{N} \text{ i } 0 \leq m < n.$$

Tada iz monotonosti očekivanja i korištenja prethodne relacije više puta slijedi:

$$\begin{aligned}
EX_{0,n}^+ &\le EX_{0,n-1}^+ + EX_{n-1,n}^+ \\
&\le EX_{0,n-2}^+ + EX_{n-2,n-1}^+ + EX_{n-1,n}^+ \\
&\le \cdots \le EX_{0,1}^+ + EX_{1,2}^+ + \cdots + EX_{n-2,n-1}^+ + EX_{n-1,n}^+ \\
&= nEX_{0,1}^+ < +\infty, \text{ za sve } n \in \mathbb{N}. \quad \text{(iz iii) i iv))}
\end{aligned}$$

Pošto je $|x| = 2x^+ - x$, iz iv) i prethodne relacije slijedi:

$$\begin{aligned}
E|X_{0,n}| &= 2EX_{0,n}^+ - EX_{0,n} \\
&\le 2nEX_{0,1}^+ - \gamma_0 n \\
&= \underbrace{(2EX_{0,1}^+ - \gamma_0)}_{=C} n \\
&= Cn < +\infty \text{ (po iv))}
\end{aligned}$$

jer je $EX_{0,1}^+ \ge \gamma_0$ pa je stoga $2EX_{0,1}^+ - \gamma_0 \ge 2\gamma_0 - \gamma_0 = \gamma_0 > -\infty$.

Neka je $a_n = EX_{0,n}$, za svako $n \in \mathbb{N}$. Iz pretpostavki i) i iii) i monotonosti očekivanja slijedi:

$$\begin{aligned}
a_n = EX_{0,n} &\le EX_{0,m} + EX_{m,n} \quad \text{(po i))} \\
&= EX_{0,m} + EX_{0,n-m} \quad \text{(po iii))} \\
&= a_m + a_{n-m}, \quad n \in \mathbb{N}, 0 \le m < n.
\end{aligned}$$

Pokazat ćemo da vrijedi:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \inf_{m\ge1} \frac{a_m}{m} \equiv \gamma.$$

Iz definicije infimuma i limesa inferiora slijedi:

$$\begin{aligned}
\liminf_n \frac{a_n}{n} &= \lim_{n\to\infty} \inf_{m\ge n} \frac{a_m}{m} \\
&\ge \lim_{n\to\infty} \inf_{m\ge1} \frac{a_m}{m} = \lim_{n\to\infty} \gamma = \gamma
\end{aligned}$$

pa preostaje pokazati da je $\limsup_n \frac{a_n}{n} \le \gamma$, tj. da je $\limsup_n \frac{a_n}{n} \le \frac{a_m}{m}$, za sve $m \in \mathbb{N}$.

Neka je $n = km + l$, za proizvoljan $0 \le l < m$. Slijedi:

$$\begin{aligned}
a_n &\le a_m + a_{n-m} \\
&\le a_m + a_{m(k-1)} + a_l \\
&\le a_m + a_m + a_{m(k-2)} + a_l \\
&\vdots \\
&\le ka_m + a_l
\end{aligned}$$

pa dijeljenjem sa $n = km + l$ dobivamo:

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{n} &\leq \frac{ka_m}{km+l} + \frac{a_l}{n} \\ &= \underbrace{\frac{km}{km+l}}_{\leq 1} \frac{a_m}{m} + \underbrace{\frac{a_l}{n}}_{\to 0, n\to\infty}.\end{aligned}$$

Puštanjem n u $+\infty$ dobivamo:

$$\gamma \leq \liminf_n \frac{a_n}{n} \leq \limsup_n \frac{a_n}{n} \leq \gamma$$

pa iz definicije limesa dobivamo:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \gamma$$

tj.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{EX_{0,n}}{n} = \inf_{m\geq 1} \frac{EX_{0,m}}{m} \equiv \gamma$$

čime je dokazana tvrdnja a).

Korak 2 Korištenjem i) dobivamo:

$$\begin{aligned}X_{0,n} &\leq X_{0,km} + X_{km,n} \quad (n = km + l) \\ &\leq X_{0,(k-1)m} + X_{(k-1)m,km} + X_{km,n} \\ &\vdots \\ &\leq X_{0,m} + X_{m,2m} + X_{2m,3m} + \cdots + X_{(k-1)m,km} + X_{km,n}.\end{aligned}$$

Dijeljenjem sa $n = km + l$ dobivamo:

$$\frac{X_{0,n}}{n} \leq \frac{k}{km+l} \frac{X_{0,m} + \cdots + X_{(k-1)m,km}}{k} + \frac{X_{km,n}}{n}.$$

Po ii), $(X_{(k-1)m,km}, k \in \mathbb{N})$ je stacionaran proces, za svako $m \in \mathbb{N}_0$, pa iz ergodskog teorema za stacionarne procese slijedi:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k}{km+l} \frac{X_{0,m} + \cdots + X_{(k-1)m,km}}{k} = \frac{1}{m} \lim_{k\to\infty} \frac{X_{0,m} + \cdots + X_{(k-1)m,km}}{k} = \frac{A_m}{m}$$

gotovo sigurno i u L^1, gdje je $A_m = E[X_{0,m}|\mathcal{I}_m]$ i $\mathcal{I}_m$ je σ-algebra invarijantnih skupova u odnosu na stacionaran niz $(X_{(k-1)m,km}, k \in \mathbb{N})$.

Iz svojstava uvjetnog očekivanja slijedi:

$$EA_m = EX_{0,m}, \quad \text{za svako } m \in \mathbb{N}_0.$$

Ako fiksiramo $0 \leq l < m$ i uzmemo proizvoljno $\epsilon > 0$, iz iii) slijedi:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_{km,km+l} > (km+l)\epsilon) &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_{0,l} > (km+l)\epsilon) \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_{0,l} > k\epsilon) \quad \text{(monotonost vjerojatnosti)} .\end{aligned}$$

Po Koraku 1 je $E|X_{0,l}| < +\infty$ pa stoga po Propoziciji 1.0.8 slijedi $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_{0,l} > k\epsilon) < +\infty$. Slijedi da je $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_{km,km+l} > (km+l)\epsilon) < +\infty$, za svako $\epsilon > 0$ pa iz Borel-Cantellijeve leme (Teorem 1.0.6) slijedi:

$$\mathbb{P}\left(\limsup_k \left\{\frac{X_{km,km+l}}{km+l} > \epsilon\right\}\right) = 0, \ \text{za sve } \epsilon > 0$$

iz čega slijedi:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{X_{km,n}}{n} = 0 \text{ gotovo sigurno} .$$

Stoga slijedi:

$$\begin{aligned}\bar{X} \equiv \limsup_n \frac{X_{0,n}}{n} &\leq \limsup_n \frac{k}{km+l} \frac{X_{0,m} + \cdots + X_{(k-1)m,km}}{k} + \underbrace{\limsup_n \frac{X_{km,n}}{n}}_{=0,\text{ gotovo sigurno}} \\ &= \frac{A_m}{m} \quad \text{gotovo sigurno, za svako } m \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Iz monotonosti očekivanja slijedi $E\bar{X} \leq E\frac{X_{0,m}}{m}$ i uzimanjem infimuma po $m \in \mathbb{N}$ iz Koraka 1 slijedi:

$$E\bar{X} \leq E \inf_{m\geq 1} \frac{X_{0,m}}{m} = E\gamma = \gamma.$$

Ako je niz u ii) ergodski, tada je $\bar{X} \leq \gamma$.

Uz pretpostavku da i)-iii) vrijedi i da je $EX_{0,1}^{+} < +\infty$ i ako je $\inf_{m\geq 1} \frac{EX_{0,m}}{m} = -\infty$, tada iz zadnje dokazanog slijedi da $\lim_{n\to\infty} \frac{X_{0,n}}{n} = -\infty$ gotovo sigurno jer je $\bar{X} \leq \gamma = \inf_{m\geq 1} \frac{EX_{0,m}}{m} = -\infty$ i $\bar{X} \equiv \limsup_n \frac{X_{0,n}}{n} \leq -\infty$ pa tvrdnja slijedi iz teorema o sendviču.

Korak 3 Sljedeće ćemo pokazati da za

$$\underline{X} = \liminf_n \frac{X_{0,n}}{n}$$

vrijedi $E\underline{X} \geq \gamma$.

Tada zbog iv) i definicije limesa inferiora i infimuma slijedi:

$$+\infty > EX_{0,1} \geq \gamma > \gamma_0 > -\infty.$$

U Koraku 2 smo pokazali da je $E\bar{X} \leq \gamma$ pa slijedi da je $E\bar{X} = E\underline{X} = \gamma$ pa je $\underline{X} = \bar{X}$ gotovo sigurno i limes gotovo sigurno niza $(\frac{X_{0,n}}{n}, n \in \mathbb{N})$ postoji.

Neka je

$$\underline{X}_m = \liminf_n \frac{X_{m,m+n}}{n},$$

za proizvoljan m.
Iz i) slijedi:

$$X_{0,m+n} \leq X_{0,m} + X_{m,m+n}$$

pa dijeljenjem sa n dobivamo:

$$\frac{X_{0,m+n}}{n} \leq \frac{X_{0,m}}{n} + \frac{X_{m,m+n}}{n}$$

pa uzimanjem limesa inferiora po n i iz činjenice da je $\liminf_n \frac{X_{0,m+n}}{n} = \underline{X}$ dobivamo $\underline{X} \leq \underline{X}_m$.

Iz iii) slijedi da $\underline{X}$ i $\underline{X}_m$ imaju istu distribuciju pa $\underline{X} = \underline{X}_m$ gotovo sigurno (distribucija od $\underline{X}_m$ ne ovisi o m).

Neka je $\epsilon > 0$ proizvoljan. Neka je $Z = \epsilon + \max\{\underline{X}, -M\}$, za proizvoljan $M > 0$. Pošto je $\underline{X} \leq \bar{X}$ i po Koraku 2 je $E\bar{X} \leq \gamma < +\infty$, slijedi da je $E|Z| \leq \epsilon + E|\underline{X}| + EM < +\infty$.

Neka je $Y_{m,n} = X_{m,n} - (n-m)Z$, za $n \in \mathbb{N}$ i $0 \leq m < n$.

Za $(Y_{m,n}, 0 \leq m < n, n \in \mathbb{N})$ vrijedi i)-iv):

i) Imamo:

$$\begin{aligned} Y_{0,n} &= X_{0,n} - nZ \\ &\leq X_{0,m} + X_{m,n} - nZ \\ &= X_{0,m} + X_{m,n} - (n-m)Z + (n+m)Z - nZ \\ &= Y_{0,m} + Y_{m,n}. \end{aligned}$$

ii) $(Y_{nk,(n+1)k}, k \in \mathbb{N})$ je stacionaran niz kao funkcija stacionarnog niza $(X_{nk,(n+1)k}, k \in \mathbb{N})$, za svako $k \in \mathbb{N}$.

iii) Pošto distribucija od $(X_{m,m+k}, k \in \mathbb{N})$ ne ovisi o m, slijedi da distribucija od $(Y_{m,m+k}, k \in \mathbb{N})$ ne ovisi $m \in \mathbb{N}_0$.

iv) Imamo:

$$EY_{0,1}{}^{+} = E[X_{0,1}{}^{+} - Z^{+}] \leq EX_{0,1}{}^{+} + E|Z| < +\infty$$

$$\begin{aligned} EY_{0,n} &= EX_{0,n} - nEZ \geq EX_{0,n} - nE|Z| \\ &= n\underbrace{(\gamma_0 - E|Z|)}_{>-\infty} \end{aligned}$$

Tada vrijedi:

$$\begin{aligned} \underline{Y} &\equiv \liminf_n \frac{Y_{0,n}}{n} = \liminf_n \left(\frac{X_{0,n} - nZ}{n} \right) \\ &= \underbrace{\liminf_n \frac{X_{0,n}}{n}}_{=\underline{X}} - \liminf_n Z \\ &= \underline{X} - \liminf_n (\epsilon + \max\{\underline{X}, -M\}) \\ &\leq \underline{X} - \epsilon - \underline{X} + M = -\epsilon + M \end{aligned}$$

pa iz proizvoljnosti od M slijedi $\underline{Y} \equiv \liminf_n \frac{Y_{0,n}}{n} \leq -\epsilon$.

Neka je $T_m = \min\{n \geq 1 : Y_{m,m+n} \leq 0\}$, za $m \in N_0$. Iz iii) slijedi:

$$\begin{aligned} T_m &= \min\{n \geq 1 : Y_{m,m+n} \leq 0\} \\ &\overset{D}{=} \min\{n \geq 1 : Y_{0,n} \leq 0\} \\ &= T_0, \qquad \text{za sve } m \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Za proizvoljan $N \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$E[Y_{m,m+1}; T_m > N] = E[Y_{0,1}; T_0 > N].$$

Pošto je $\liminf_n \frac{Y_{0,n}}{n} \leq -\epsilon$, iz definicije limesa inferiora slijedi da će za neki konačan n vrijediti $Y_{0,n} \leq 0$ pa stoga $\mathbb{P}(T_0 < +\infty) = 1$. Stoga postoji dovoljno velik N takav da je

$$E[Y_{0,1}; T_0 > N] \leq \epsilon. \tag{4.1}$$

Za $m \in \mathbb{N}_0$ definiramo:

$$S_m = \begin{cases} T_m, \text{ ako } T_m \leq N, \\ 1, \text{ ako } T_m > N \end{cases}$$

i

$$\epsilon_m = \begin{cases} 0, \text{ ako } T_m \leq N, \\ Y_{m,m+1}, \text{ ako } T_m > N. \end{cases}$$

Po definiciji T_m vrijedi $Y_{m,m+T_m} \leq 0$ i $S_m > 0$ i $Y_{m,m+1} > 0$ na događaju $\{T_m > N\}$. Stoga imamo $Y_{m,m+S_m} \leq \epsilon_m$, za $m \in \mathbb{N}_0$ i $\epsilon_m \geq 0$.

Neka je

$$\begin{aligned} R_0 &= 0 \\ R_k &= R_{k-1} + S_{R_{k-1}}, k \geq 1. \end{aligned}$$

Neka je $K = \max\{k \in \mathbb{N}_0 : R_k \leq n\}$. Iz i) slijedi:

$$\begin{aligned} Y_{0,n} &\leq Y_{0,R_K} + Y_{R_K,n} \\ &\leq Y_{0,R_{K-1}} + Y_{R_{K-1},R_K} + Y_{R_K,n} \\ &\leq \cdots \leq Y_{0,R_1} + Y_{R_1,R_2} + \cdots + Y_{R_{K-1},R_K} + Y_{R_K,n}. \end{aligned}$$

Pošto je $\epsilon_m \geq 0$ slijedi:

$$\begin{aligned} Y_{R_0,R_1} &= Y_{R_0,R_0+S_{R_0}} = Y_{0,S_0} = Y_{0,T_0} \leq 0 \leq \epsilon_0 \\ Y_{R_1,R_2} &= Y_{R_1,R_1+S_{R_1}} = \cdots = Y_{T_0,T_0+S_{R_1}} \leq 0 \leq \epsilon_1 \\ &\vdots \\ Y_{R_{K-1},R_K} &\leq \epsilon_{n-1}. \end{aligned}$$

Pošto je $n - R_K \leq N$, po i) zaključujemo:

$$\begin{aligned} |Y_{R_K,n}| &\leq |Y_{n-1,n}| + |Y_{R_K,n-1}| \\ &\leq \cdots \leq |Y_{n-1,n}| + |Y_{n-2,n-1}| + \cdots + |Y_{n-N,n-N+1}|. \end{aligned}$$

Stoga slijedi:

$$\begin{aligned} Y_{0,n} &\leq Y_{R_0,R_1} + Y_{R_1,R_2} + \cdots + Y_{R_K,N} \\ &\leq \sum_{m=0}^{n-1} \epsilon_m + \sum_{j=1}^{N} |Y_{n-j,n-j+1}|. \end{aligned}$$

Dijeljenjem sa n dobivamo:

$$\frac{Y_{0,n}}{n} \leq \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\epsilon_m}{n} + \sum_{j=1}^{N} \frac{|Y_{n-j,n-j+1}|}{n}$$

pa iz monotonosti očekivanja slijedi:

$$\frac{EY_{0,n}}{n} \leq \sum_{m=0}^{n-1} \frac{E\epsilon_m}{n} + \sum_{j=1}^{N} \frac{E|Y_{n-j,n-j+1}|}{n}$$

pa slijedi:

$$\frac{EY_{0,n}}{n} \leq E\epsilon_0 + \sum_{j=1}^{N} \frac{E|Y_{n-j,n-j+1}|}{n}$$

jer distribucija od ϵ_m ne ovisi o m. Uzimanjem limesa superiora po n iz iii) dobivamo:

$$\limsup_n \frac{E|Y_{n-j,n-j+1}|}{n} = \limsup_n \frac{E|Y_{0,1}|}{n} = 0.$$

Iz definicije ϵ_0 i (4.1) slijedi:

$$\limsup_n \frac{EY_{0,n}}{n} \leq E\epsilon_0 = E[Y_{0,1}; T_0 > N] \leq \epsilon.$$

Pošto je $Y_{0,n} = X_{0,n} - nZ$, iz a) slijedi:

$$\begin{aligned}
\gamma = \lim_{n\to\infty} \frac{EX_{0,n}}{n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{E[Y_{0,n} + nZ]}{n} \\
&\leq \epsilon + \lim_{n\to\infty} EZ = \epsilon + \epsilon + E[\max\{\underline{X}, -M\}] \\
&= 2\epsilon + E[\max\{\underline{X}, -M\}].
\end{aligned}$$

Pošto su $\epsilon > 0$ i M proizvoljni, slijedi $E\underline{X} \geq \gamma$ pa slijedi tvrdnja b) o konvergenciji gotovo sigurno.

Korak 4 Preostaje pokazati konvergenciju u L^1.
Označimo $B_m = \frac{A_m}{m} = E[X_{0,m}|\mathcal{I}_m]$, za $m \in \mathbb{N}_0$ iz Koraka 2. Tada je $EB_m = \frac{EX_{0,m}}{m}$, za $m \in \mathbb{N}_0$. Označimo $B = \inf_{m\geq 1} B_m$.

Pošto je $|x| = 2x^+ - x$, slijedi:

$$\begin{aligned}
E\left|\frac{X_{0,n}}{n} - B\right| &= 2E\left(\frac{X_{0,n}}{n} - B\right)^+ - E\left(\frac{X_{0,n}}{n} - B\right) \\
&\leq 2E\left(\frac{X_{0,n}}{n} - B\right)^+
\end{aligned}$$

jer je $E\frac{X_{0,n}}{n} \geq \gamma = \inf_{m\geq 1} \frac{EX_{0,m}}{m} \geq \inf_{m\geq 1} EB_m \geq EB$.

Pošto vrijedi $(x+y)^+ \leq x^+ + y^+$ iz definicije infimuma i činjenice da je $B_m \geq B$ slijedi:

$$E\left(\frac{X_{0,n}}{n} - B\right)^+ \leq E\left(\frac{X_{0,n}}{n} - B_m\right)^+ + \underbrace{E[B_m - B]^+}_{=E[B_m - B]}.$$

Iz a) slijedi $\lim_{m\to\infty} EB_m = \lim_{m\to\infty} \frac{EX_{0,m}}{m} = \gamma$ pa iz Koraka 2 i Koraka 3 slijedi $EB \geq E\bar{X} \geq E\underline{X} \geq \gamma$ što povlači $EB = \gamma$. Stoga za dovoljno veliki m $E[B_m - B]$ može biti proizvoljno malo.

Iz i) slijedi:

$$\begin{aligned}
E\left(\frac{X_{0,n}}{n} - B_m\right)^+ &= E\left(\frac{X_{0,km+l}}{km+l} - B_m\right)^+ \\
&\leq E\left(\frac{X_{0,km} + X_{km,km+l}}{km+l} - B_m\right)^+ \\
&\leq \cdots \leq E\left(\frac{X_{0,m} + \cdots + X_{(k-1)m,km}}{km+l} - B_m\right)^+ + E\left(\frac{X_{km,km+l}}{km+l}\right)^+
\end{aligned}$$

Vrijedi da je $\lim_{n\to\infty} \frac{EX_{0,l}^+}{n} = 0$.

Iz ergodskog teorema slijedi:

$$E\left|\frac{X_{0,m} + \cdots + X_{(k-1)m,km}}{n} - B_m\right| \longrightarrow 0, \quad \text{kada } n \to \infty$$

pa stoga:

$$E\left(\frac{X_{0,n}}{n} - B_m\right)^+ \longrightarrow 0, \quad \text{kada } n \to \infty$$

iz čega slijedi tvrdnja teorema. □

Poglavlje 5

Primjene ergodskih teorema

Primjer 5.0.1. *(Weylov ekvidistribucijski teorem)*
Neka je $\Omega = [0,1\rangle$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0,1\rangle)$ i $\mathbb{P} = \lambda$ Lebesguova mjera na $[0,1\rangle$. Neka je $T(\omega) = (\omega+\theta) \bmod 1$ te pretpostavimo da je $\theta \notin \mathbb{Q}$. tj. θ je iracionalan broj. Tada po Primjeru 2.4.5 slijedi da je T ergodska transformacija koja čuva mjeru.

Ako stavimo da je $X(\omega) = \chi_A(\omega), \omega \in \Omega$, za A Borelov podskup od $[0,1\rangle$, tada iz ergodskog teorema slijedi:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \chi_{T^{-k}(A)} = \lambda(A) \quad \text{gotovo sigurno.}$$

Lijeva strana ove jednakosti predstavlja prosječan broj točaka skupa $\{\omega, 2\omega, \ldots, (n-1)\omega\}$ koje upadaju u skup A. Vidimo da je asimptotski taj prosjek jednak Lebesguovoj mjeri skupa A.

Ako stavimo da je $\omega = 0$, taj rezultat se naziva *Weylov ekvidistribucijski teorem*. Općenito, konvergencija gotovo sigurno ne povlači konvergenciju u nekoj posebno odabranoj točki. Ipak, u slučaju kada je A interval u $[0,1\rangle$, to je doista istina i konvergencija vrijedi baš u toj točki. Dokaz ovog teorema se može pronaći u [3].

Primjer 5.0.2. *(Benfordov zakon)*
Iz ekvidistribucijskog teorema slijedi asimptotski rezultat o distribuciji prvih znamenaka potencija broja 2.

Neka je $\theta = \log_{10} 2$, $k = 1,2,\ldots,9$ i $A_k = [\log_{10} k, \log_{10}(k+1)\rangle$. Iz Weylovog ekvidistribucijskog teorema, za svako $k = 1,2,\ldots,9$ dobivamo:

$$\frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \chi_{A_k}(T^m(0)) \longrightarrow \log_{10}\left(\frac{k+1}{k}\right), \qquad \text{kada } n \to \infty.$$

Vrijedi da je prva znamenka od 2^m jednaka k ako i samo ako je $(m \log_{10} 2) \bmod 1 \in A_k = [\log_{10} k, \log_{10}(k+1)\rangle$. Naime, prirodan broj x ima prvu znamenku $k \in \{1, \ldots, 9\}$ ako i samo ako postoji $m \in \mathbb{N}_0$ takav da vrijedi:

$$k10^m \leq x < (k+1)10^m.$$

Primjenom logaritma u bazi 10 dobivamo $\log_{10} k + m \leq \log_{10} x < \log_{10}(k+1) + m$, pa slijedi da je $\log_{10} x \mod 1 \in [\log_{10} k, \log_{10}(k+1)\rangle$.

Vjerojatnost pojavljivanja k kao prve znamenke je približno $\log_{10}\left(\frac{k+1}{k}\right)$ te su vjerojatnosti za znamenke $k = 1, 2, \ldots, 9$ dane u sljedećoj tablici:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
30.10 %	17.61 %	12.49 %	9.69 %	7.92 %	6.69 %	5.80 %	5.12 %	4.58 %

Postoji mnogo primjera skupova brojeva koji bi približno trebali zadovoljavati Benfordov zakon: popis stanovništva 428 hrvatskih općina, prvih 10^6 Fibonaccijevih brojeva, 2014 fundamentalnih konstanti u fizici (izabrane od strane NISTa), ...

Benfordov zakon se koristi za otkrivanje poreznih prijevara, prijevara u znanstvenim radovima te validaciju makroekonomskih podataka.

Primjer 5.0.3. *(Filtriranje)*
Promatramo cjelobrojnu mrežu $\mathbb{Z}^2$ u kojoj su vrhovi $x, y \in \mathbb{Z}^2$ povezani ako je $|x - y| = 1$, gdje je $|\cdot|$ euklidska norma. Neka je E skup svih bridova u mreži i neka je svakom bridu e pridružena slučajna varijabla T_e koja predstavlja vrijeme potrebno da poruka prijeđe brid e.

Neka je $X_{0,n}$ najkraće vrijeme potrebno da poruka prijeđe put između $\vec{0} = (0,0)$ i $n\vec{v}$, gdje je $\vec{v} = (1,0)$. Tada je:

$$X_{0,n} = \min_{\text{put } \vec{0} \to n\vec{v}} \sum_{e \in E} T_e$$

i još označimo:

$$X_{m,n} = \min_{\text{put } m\vec{v} \to n\vec{v}} \sum_{e \in E} T_e.$$

Pošto može postojati minimalan put između $\vec{0}$ i $n\vec{v}$ koji ne prolazi kroz $m\vec{v}$, slijedi:

$$X_{0,n} \leq X_{0,m} + X_{m,n}.$$

Pretpostavimo da su $\{T_e : e \in E\}$ nezavisne jednako distribuirane slučajne varijable. Neka je $\Omega = \{T_e : e \in E\}$. Definiramo transformaciju $T : \Omega \longrightarrow \Omega$ sa $T(\omega) = (t_{e^+}, e \in E)$, $\omega = (t_e, e \in E)$, gdje je e^+ brid desno od brida e sa istom orijentacijom.

Iz subaditivnog ergodskog teorema slijedi da ako je T ergodska transformacija, tada postoji konstantan limes $Y = \lim_{n\to\infty} \frac{X_{0,n}}{n}$, što znači da se poruka kreće konstantnom brzinom.

Bibliografija

[1] Leo Breiman, *Probability*, Siam, 1992.

[2] Donald L. Cohn, *Measure theory*, Birkhäuser, 1980.

[3] Rick Durrett, *Probability: Theory and Examples, 3rd ed*, Thomson, Brooks/Cole, 2005.

[4] Thomas M. Liggett, *An Improved Subadditive Ergodic Theorem, The Annals of Probability 13, no. 4, 1279–1285*, (1985).

[5] Jim Pitman, *Lecture notes in Probability Theory, Lecture 12: Subadditive Ergodic Theorem, University of California, Berkeley*, Spring 2003.

[6] Nikola Sarapa, *Teorija vjerojatnosti*, Školska knjiga, 2002.

Sažetak

Ovaj diplomski rad se bavi klasičnim Birkhoff-Hinčinovim ergodskim teoremom te teorijom potrebnom za njegov dokaz. Uz to, uvodi se pojam ergodskog stacionarnog slučajnog procesa te se dokazuje ergodski teorem za takve procese. Na kraju se dokazuje subaditivan ergodski teorem koji je poopćenje oba prethodno navedena rezultata te se daju primjeri korištenja ergodskih teorema.

Summary

In this graduate thesis we are examining the classical Birkhoff-Hinčin ergodic theorem and the mathematical framework surrounding it. We are also defining ergodic stationary processes and giving the proof for the version of the ergodic theorem concerning those processes. Subadditive ergodic theorem, which is a generalization of the previously mentioned theorems, is given along with its proof and the applications of ergodic theorems are shown on several examples.

Životopis

Ema Šimon je rođena 3. kolovoza 1992. godine u Zagrebu. Pohađala je XV. gimnaziju u Zagrebu te je nakon polaganja državne mature 2011. godine upisala preddiplomski studij Matematike na PMF - Matematičkom odsjeku. Za vrijeme preddiplomskog studija je bila demonstrator iz Engleskog jezika struke. Nakon završetka preddiplomskog studija, 2014. godine upisuje diplomski studij Matematičke statistike na istom odsjeku. Krajem završetka studija zapošljava se u ISBD CRM Uredu u Zagrebu, gdje trenutno radi.