Multilinearna preslikavanja i tenzorski produkt

Knežević, Dragana

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Dragana Knežević

MULTILINEARNA PRESLIKAVANJA I TENZORSKI PRODUKT

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Ozren Perše

Zagreb, 2016.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ______________________________, predsjednik
2. ______________________________, član
3. ______________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ______________________________
2. ______________________________
3. ______________________________

Sadržaj

Uvod

U ovom radu proučavamo pojam tenzorskog produkta modula nad komutativnim prstenom. Kao važan poseban slučaj, dobivamo pojam tenzorskog produkta vektorskih prostora. Pritom upoznajemo razne algebarske strukture. Algebarska struktura je skup na kojem je definirana neka operacija, ili više njih, koja zadovoljava određene aksiome. Ti aksiomi najčešće izražavaju neka osnovna svojstva operacija na skupu brojeva, matrica i drugih matematičkih objekata. Algebarske strukture su osnovni objekti proučavanja u modernoj algebri. Strukture koje će nama biti važne su grupe, prsteni i ideali, te ponajviše moduli. Osim definiranja navedenih algebarskih struktura, proučavat ćemo i preslikavanja među njima. Definirat ćemo i funktore jer će nam njihova svojstva biti bitna kod tenzorskog produkta. Drugo poglavlje započinjemo definiranjem multilinearnih preslikavanja. Multilinearno preslikavanje je preslikavanje koje je linearno u svakoj varijabli, a kada ćemo htjeti naglasiti da se radi o multilinearnom preslikavanju od n varijabli reći ćemo da je n-multilinerano. Upravo ta preslikavanja će nam biti važna pri definiranju tenzorskog produkta. Vidjet ćemo da je tenzorski produkt modula zapravo uređeni par nekog modula i multilinearnog preslikavanja koje zadovoljava neka određena svojstva. Nakon definicije tenzorskog produkta pokazat ćemo njegovu egzistenciju, komutativnost, asocijativnost i neka osnovna svojstva. Opisat ćemo i postupak proširenja osnovnog prstena, te navesti uvjete koji definiraju ravne module i pokazati da su ti uvjeti ekvivalentni. Definirat ćemo i pojam tenzorskog produkta algebri. Tenzorska algebra i simetrična algebra su zadnja dva pojma koja ćemo upoznati. Prezentiramo dokaze raznih teorema o bazama tih algebri.

Poglavlje 1

Grupe, prsteni i moduli

U ovom poglavlju uvodimo osnovne pojmove koji će nam biti od velike pomoći u daljnjim razmatranjima.

1.1 Grupe

Započet ćemo sa definicijom grupe i nekim svojstvima vezanim uz taj pojam.

Definicija 1.1.1. *Neprazan skup $G = (G, \cdot)$, gdje je $\cdot : G \times G \longrightarrow G$ binarna operacija, zove se* ***grupa*** *ako vrijede sljedeća svojstva (ovdje govorimo i o aksiomima grupe):*

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \qquad \forall x, y, z \in G \qquad (asocijativnost),$$

$$(\exists e \in G) : \qquad e \cdot x = x \cdot e = x \qquad \forall x \in G \qquad (neutralni\ element),$$

$$(\forall x \in G)(\exists! y \in G) : \qquad x \cdot y = y \cdot x = e \qquad (inverzni\ element).$$

Element e ili e_G ako želimo posebno naglasiti da je riječ o grupi G, zove se **neutralni element** grupe ili kraće **neutral** grupe. Za zadani $x \in G$, element $y \in G$ koji zadovoljava gore navedeno treće po redu svojstvo, zove se **inverzni element** od x ili kraće **inverz** od x.

Ako još vrijedi i svojstvo

$$x \cdot y = y \cdot x \qquad \forall x, y \in G \qquad (komutativnost),$$

onda kažemo da je G **komutativna (Abelova) grupa**, a u suprotnom govorimo o **nekomutativnoj (ne-Abelovoj) grupi**.

Napomena 1.1.2. *Od sada ćemo, kada je riječ o nekoj grupi, pisati xy umjesto $x \cdot y$, tj. nećemo pisati simbol '$\cdot$' pri množenju elemenata.*

Primjer 1.1.3. *Neka je G grupa i S neprazan skup. Skup preslikavanja $M(S, G)$ je također grupa. Naime, za dva preslikavanja f, g iz S u G definiramo preslikavanje fg tako da je*

$$(fg)(x) = f(x)g(x),$$

i preslikavanje f^{-1} kao $f^{-1}(x) = f(x)^{-1}$. Sada je lako provjeriti da je $M(S, G)$ također grupa. Ako je G komutativna onda je $M(S, G)$ također komutativna.

Sada kada smo definirali pojam grupe, sasvim je prirodno pitanje kakova preslikavanja među tim objektima treba gledati.

Definicija 1.1.4. *Neka su G i H dvije grupe. Preslikavanje $f : G \longrightarrow H$ je* ***homomorfizam*** *grupa, ako 'čuva strukturu', tj. ako vrijedi*

$$f(xy) = f(x)f(y) \qquad \forall x, y \in G.$$

Nadalje, homomorfizam f koji je još i injekcija naziva se ***monomorfizam****, f koji je i surjekcija zovemo* ***epimorfizam****, a bijektivan homomorfizam nazivamo* ***izomorfizam****. Za dvije grupe G i H reći ćemo da su izomorfne, ako postoji neki izomorfizam f među njima. Tu činjenicu označavamo sa $G \cong H$.*

Posebno, ako je $G = H$, tj. ako imamo homomorfizam $f : G \longrightarrow G$, onda kažemo da je f **endomofizam** od G. Endomorfizam koji je još i bijekcija zove se **automorfizam** od G.

Definicija 1.1.5. *Za proizvoljni homomorfizam $f : G \longrightarrow H$ definiramo njegovu* ***jezgru***

$$Kerf := \{x \in G; f(x) = e_H\},$$

i njegovu ***sliku***

$$Imf := \{f(x); x \in G\}.$$

Iz definicije je očito da je jezgra preslikavanja f podskup od G, a slika preslikavanja f podskup od H.

Sada ćemo definirati još dva vrlo bitna pojma. Započet ćemo sa slučajem kada imamo samo dva faktora. Neka su sada G, H grupe i definiramo Kartezijev produkt $G \times H$ i operaciju "množenja po komponentama" na $G \times H$ ovako:

$$(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) := (g_1 g_2, h_1 h_2).$$

Tako je dobivena na $G \times H$ struktura grupe, zovemo je **direktan produkt** grupa G i H.

Neka je sada $\{G_i; i \in I\}$ proizvoljna familija grupa. Neutralne elemente u njoj ćemo označavati sa $e_i \in G_i$.

Definicija 1.1.6. *Kartezijev produkt*

$$\prod_{i\in I} G_i := \left\{ f : I \longrightarrow \bigcup_{i\in I} G_i ; f(i) \in G_i \right\},$$

uz operaciju "množenja po komponentama"

$$(f \cdot g)(i) := f(i) \cdot g(i),$$

zove se ***direktan produkt*** *grupa* $\{G_i\}_I$*. Podgrupa*

$$\bigoplus_{i\in I} G_i := \left\{ f \in \prod_{i\in I} G_i ; f(i) \neq e_i \text{ za konačno mnogo } i \in I \right\},$$

od direktnog produkta $\prod_I G_i$*, zove se* ***direktna suma*** *grupa* $\{G_i\}_I$*.*

Na kraju ćemo definirati kategorije i funktore.

Definicija 1.1.7. ***Kategorija*** $\mathfrak{A}$ *sadrži kolekciju objekata* $Ob(\mathfrak{A})$*. Za dva objekta* $A, B \in Ob(\mathfrak{A})$ *skup* $Mor(A, B)$ *zovemo skup morfizama iz A u B i za tri objekta* $A, B, C \in Ob(\mathfrak{A})$ *preslikavanje*

$$Mor(B, C) \times Mor(A, B) \to Mor(A, C)$$

zadovoljava sljedeće aksiome:

1. *Skupovi* $Mor(A, B)$ *i* $Mor(A', B')$ *su disjunktni osim ako je* $A = A'$ *i* $B = B'$*, a u tom slučaju su jednaki.*

2. *Za svaki objekt A iz* $\mathfrak{A}$ *postoji morfizam* $id_A \in Mor(A, A)$ *koji je lijeva i desna identiteta za elemente iz* $Mor(A, B)$ *i* $Mor(B, A)$*, za sve objekte* $B \in Ob(\mathfrak{A})$*.*

3. *Komponiranje je asocijativno, tj. za* $f \in Mor(A, B)$*,* $g \in Mor(B, C)$ *i* $h \in Mor(C, D)$ *je*

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f),$$

   za sve objekte A, B, C, D iz $\mathfrak{A}$*.*

Definicija 1.1.8. *Neka su* $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ *kategorije.* ***Funktor*** *F iz* $\mathfrak{A}$ *u* $\mathfrak{B}$ *se sastoji od para preslikavanja. Prvo preslikavanje svakom objektu A iz* $\mathfrak{A}$ *pridružuje objekt* $F(A)$ *iz* $\mathfrak{B}$*,a drugo svakom morfizmu* $f : A \to B$ *pridružuje morfizam* $F(f) : F(A) \to F(B)$ *tako da:*

1. *za sve A iz* $\mathfrak{A}$ *vrijedi* $F(id_A) = id_{F(A)}$

2. *ako su* $f : A \to B$ *i* $g : B \to C$ *dva morfizma od* $\mathfrak{A}$ *onda je* $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$*.*

1.2 Prsteni i ideali

Definicija 1.2.1. *Neprazan skup* $R = (R, +, \cdot)$ *zovemo* ***prsten*** *ukoliko je za operacije zbrajanja* $+ : R \times R \longrightarrow R$ *i množenja* $\cdot : R \times R \longrightarrow R$ *ispunjeno sljedeće:*

1. $(R, +)$ *je komutativna grupa, sa neutralom* $0 = 0_R$;
2. *Množenje je asocijativno;*
3. *Vrijedi distributivnost 'množenja prema zbrajanju', tj.*
   $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z, \ \forall x, y, z \in R,$
   $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z, \ \forall x, y, z \in R.$
4. *Postoji jedinični element ili kraće jedinica,* $1 = 1_R \in R$ *takav da je*

$$1 \cdot x = x \cdot 1 = x, \ \forall x \in R$$

Element $0 = 0_R$*, neutral u grupi* $(R, +)$ *ćemo zvati* ***nula*** *prstena R.*

Primijetimo da kod prstena, za razliku od grupa imamo dvije "unutarnje operacije". Imajući na umu prsten $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, te se operacije zovu "zbrajanje" i "množenje".

Prsten R je **komutativan prsten** ako je

$$x \cdot y = y \cdot x, \ \forall x, y \in R;$$

inače govorimo o **nekomutativnom prstenu**.

Definicija 1.2.2. *Skup* $S \subset R$*, gdje je R neki prsten, je* ***potprsten*** *od R ako je* $S = (S, +, \cdot)$ *i sam prsten. Drugim riječima, S je potprsten od R ako vrijede sljedeća dva svojstva:*

1. $(\forall x, y \in S) : \ x - y \in S \qquad (tj., (S, +)\ je\ grupa);$
2. $(\forall x, y \in S) : \ x \cdot y \in S \qquad (tj., (S, \cdot)\ je\ grupoid$[1]$).$

Činjenicu da je S potprsten od R označavamo sa

$$S \leq R.$$

Sada ćemo se upoznati sa pojmom ideala.

Definicija 1.2.3. *Neka je R prsten. Podskup* $\mathfrak{r} \subseteq R$ *je* ***lijevi*** *(tj.* ***desni****)* ***ideal*** *u R ako su ispunjena sljedeća dva uvjeta:*

[1] Kažemo da je $(S, \cdot)$ **grupoid** ako za bilo koje $x, y \in S$ je uvijek i $x \cdot y \in S$.

1. $\mathfrak{r}$ *je potprsten od* R;

2. $R\mathfrak{r} \subseteq \mathfrak{r}$ $\quad$ ($tj.$ $\quad \mathfrak{r}R \subseteq \mathfrak{r}$)

Podskup $\mathfrak{r} \subseteq R$ je (dvostrani) **ideal** ako je on istovremeni i lijevi i desni ideal.

Nadalje, reći ćemo da je ideal $\mathfrak{r}$ od R pravi ideal ako je $\mathfrak{r} \neq R$ i $\mathfrak{r} \neq (0)$. Ovdje je sa (0) označen **nul-ideal** $\{0\}$.

Sljedeće osnovno pitanje je, kao i kod grupa kakova preslikavanja među prstenima treba gledati. Analogno kao i kod grupa, gledat ćemo preslikavanja koja "čuvaju strukturu", tj. preslikavanja koja respektiraju obje operacije među prstenima.

Definicija 1.2.4. *Neka su* R *i* S *dva prstena. Preslikavanje* $f : R \longrightarrow S$ *je* ***homomorfizam*** *prstena ukoliko je i aditivno i multiplikativno, tj. ako vrijedi*

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad i \qquad f(xy) = f(x)f(y), \qquad \forall x, y \in R,$$

te ako je

$$f(1_R) = 1_S.$$

Homomorfizam f *koji je još i injekcija naziva se* ***monomorfizam****,* f *koji je i surjekcija zovemo* ***epimorfizam****, a bijektivan homomorfizam zovemo* ***izomorfizam****. Za dva prstena ćemo reći da su izomorfni, ako postoji neki izomorfizam* f *među njima i tu činjenicu označavamo sa* $R \cong S$.

1.3 Moduli

Definicija 1.3.1. *Neka je* R *prsten i neka je* $(M, +)$ *Abelova grupa. Kažemo da je* M ***lijevi R-modul*** *ako postoji preslikavanje* $R \times M \longrightarrow M$, $(r, m) \longmapsto rm$, *sa svojstvima*

1. $r(m_1 + m_2) = rm_1 + rm_2$,

2. $(r_1 + r_2)m = r_1m + r_2m$,

3. $(r_1r_2)m = r_1(r_2m)$,

4. $1m = m$ *ako je* $1 \in R$,

za sve $r, r_1, r_2 \in R$ *i* $m, m_1, m_2 \in M$.

Operacija navedena u definiciji naziva se množenje skalarom r, a prsten R se često naziva prsten skalara. Svojstva 1. i 2. iz definicije su zakoni distributivnosti u odnosu na zbrajanje u M i R, a svojstvo 3. je zakon miješane asocijativnosti. Na sličan način kako smo definirali lijevi R-modul definira se i **desni R-modul**. Modul M se naziva lijevi R-modul jer je množenje rm definirano slijeva, dok bi u desnom R-modulu množenje mr bilo definirano zdesna.

Ako je R komutativan prsten i M lijevi R-modul, tada M postaje desni R-modul ako definiramo

$$mr = rm \qquad r \in R, m \in M.$$

Za ovu definiciju vrijede sva četiri svojstva iz prethodne definicije. U ovom slučaju lijevi R-modul je istovjetan desnom R-modulu pa ih ne trebamo razlikovati. Takve module nazivamo **R-moduli** ili **moduli nad prstenom** R. U daljnjem tekstu, ako nije drugačije naglašeno, uvijek ćemo promatrati lijeve R-module. Za desne R-module vrijede analogni rezultati.

Primjer 1.3.2. *Svaki prsten R je lijevi i desni R-modul.*

Primjer 1.3.3. *Neka je $\mathbb{R}^n$ skup svih uređenih n-torki*

$$(x_1, x_2, ..., x_n), x_i \in \mathbb{R}.$$

Skup $\mathbb{R}^n$ je Abelova grupa u odnosu na zbrajanje

$$(x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n).$$

Neutralni element je

$$0 = (0, 0, ..., 0),$$

a suprotni element je definiran s

$$-(x_1, x_2, ..., x_n) = (-x_1, -x_2, ..., -x_n).$$

Ako definiramo množenje $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ s

$$r(x_1, x_2, ..., x_n) = (rx_1, rx_2, ..., rx_n),$$

tada $\mathbb{R}^n$ postaje modul nad poljem $\mathbb{R}$. Ovaj modul nazivamo n-dimenzionalni realni vektorski prostor.

Definicija 1.3.4. *Neka je M modul nad prstenom R. Neprazan podskup $N \subseteq M$ je **podmodul** od M ako vrijedi*

1. $a - b \in N$ *za sve* $a, b \in N$,
2. $ra \in N$ *za sve* $a \in N, r \in R$.

Primijetimo da su $\{0\}$ i M trivijalni podmoduli od M.

Da bi uveli pojam slobodnog modula prvo moramo definirati sljedeće pojmove.

Neka je M modul nad prstenom R i neka je S podskup od M. **Linearna kombinacija** elemenata iz S sa koeficijentima iz R je suma

$$\sum_{x \in S} r_x x$$

gdje je r_x skup elemenata iz R, koji su skoro svi jednaki 0. Neka je N skup linearnih kombinacija elemenata iz S. Tada je N podmodul od M jer je suma dvije linearne kombinacije

$$\sum_{x \in S} r_x x \text{ i } \sum_{x \in S} p_x x$$

jednaka

$$\sum_{x \in S} (r_x + p_x) x$$

i jer za $s \in R$ je

$$s(\sum_{x \in S} r_x x) = \sum_{x \in S} s r_x x,$$

pa su ti elementi ponovno linearne kombinacije elemenata iz S. Sada kažemo da je N podmodul **generiran** sa S, tj. S je skup **generatora** za N. Podskup S modula M je **linearno nezavisan** ako za linearnu kombinaciju

$$\sum_{x \in S} r_x x$$

koja je jednaka nuli slijedi da je $r_x = 0$ za sve $x \in S$.

Definicija 1.3.5. *Neka je M modul nad prstenom R i neka je S podskup od M. Kažemo da je S **baza** od M ako je S neprazan, linearno nezavisan skup koji generira M.*

Definicija 1.3.6. ***Slobodni modul** je modul koji ima bazu.*

Svaki vektorski prostor je slobodni modul.

Definicija 1.3.7. *Neka su M i N moduli nad prstenom R i neka je $f : M \longrightarrow N$ preslikavanje koje zadovoljava*

1. $f(x + y) = f(x) + f(y)$,
2. $f(rx) = r f(x)$,

za svaki $x, y \in M, r \in R$. Tada se f naziva ***linearno preslikavanje*** *ili* ***homomorfizam*** *iz modula M u modul N.*

Skup svih homomorfizama $f : M \longrightarrow N$ označavamo sa $Hom_R(M, N)$. Ako je R komutativan prsten i rf preslikavanje takvo da je

$$(rf)(x) = rf(x), \text{ za } r \in R \text{ i } f \in Hom_R(M, N).$$

onda je $Hom_R(M, N)$ R-modul. Ako R nije komutativan, onda $Hom_R(M, N)$ gledamo kao Abelovu grupu.

Ponekad ćemo umjesto $Hom_R(M, N)$ koristiti oznaku $L(M, N)$, da bi naglasili da se radi o R-linearnim preslikavanjima. U sljedećoj točki definiramo općenitiji pojam multilinearnog preslikavanja.

U slučaju kada je $M = N$ kažemo da je preslikavanje f endomorfizam modula M. Skup svih endomorfizama od M označavamo sa $End_R(M)$. Iz relacije

$$(g_1 + g_2) \circ f = g_1 \circ f + g_2 \circ f$$

tj.

$$g \circ (f_1 + f_2) = g \circ f_1 + g \circ f_2$$

i činjenice da je id_M identiteta za komponiranje,zaključujemo da je $End_R(M)$ prsten. Ako je R komutativan, onda je M modul nad $End_R(M)$.

Neka je R prsten i $\{M_i\}_{i \in I}$ familija modula. Neka je

$$M = \bigoplus_{i \in I} M_i$$

direktna suma pripadnih Abelovih grupa. Na M definiramo strukturu R-modula na sljedeći način: ako je $(x_i)_{i \in I}$ element iz M (tj. familija elemenata $x_i \in M_i$ takva da je $x_i = 0$ za skoro svaki i) i ako za $r \in R$ definiramo množenje

$$a(x_i)_{i \in I} = (ax_i)_{i \in I},$$

lako je za provjeriti da je M A-modul.

Jezgra homomorfizma

$$Ker(f) = \{x \in M; f(x) = 0\}$$

je podmodul modula M, a **slika** homomorfizma

$$Im(f) = \{f(x); x \in M\}$$

je podmodul modula N. Homomorfizam $f : M \longrightarrow N$ je injekcija ako i samo ako je $Ker(f) = \{0\}$. Ako je homomorfizam $f : M \longrightarrow N$ bijekcija, tada kažemo da je f izomorfizam modula. U tom slučaju su moduli M i N izomorfni i pišemo $M \cong N$.

Neka su M, $M^{'}$, $M^{''}$ moduli i neka je

$$M^{'} \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M^{''}.$$

Kažemo da je ovaj niz **egzaktan** ako je $Imf = Kerg$. Općenito, neka su M_i moduli, za $i = 1, 2, \dots, n$. Niz

$$M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} M_3 \xrightarrow{f_3} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} M_n,$$

je egzaktan ako je $Imf_i = Kerf_{i+1}$ za sve $i = 1, \dots, n-2$. Na primjer, niz

$$0 \to M^{'} \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M^{''} \to 0$$

je egzaktan ako je f injekcija, $Imf = Kerg$ i ako je g surjekcija. Ako je $H = Kerg$ onda je prethodni niz isti kao i egzaktni niz

$$0 \to H \to M \to M/H \to 0.$$

Preciznije, postoji komutativni dijagram

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M^{'} \arrow[r, "f"] \arrow[d] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d] & M^{''} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & H \arrow[r] & M \arrow[r] & M/H \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

u kojem su okomita preslikavanja izomorfizmi, vodoravni redovi su egzaktni nizovi.

Za kraj ovog poglavlja definirat ćemo kvocijentni modul. Neka je N podmodul R-modula M. Definirajmo relaciju ekvivalencije $\sim$ na M s

$$a \sim b \qquad \Leftrightarrow \qquad a - b \in N.$$

Klasa ekvivalencije koja sadrži element $a \in M$ je skup

$$\bar{a} = \{a + x; x \in N\} = a + N.$$

Skup svih klasa ekvivalencije na M označavamo s M/N,

$$M/N = \{a + N; a \in M\}.$$

Na skupu M/N možemo definirati operacije zbrajanja i množenja na sljedeći način

$$(a + N) + (b + N) = (a + b)N,$$

$$r(a + N) = ra + N,$$

za svaki $a, b \in M, r \in R$. Ove operacije zadovoljavaju aksiome modula na skupu M/N kojeg nazivamo **kvocijentni modul**. Preslikavanje $\varphi : M \longrightarrow M/N$,

$$\varphi(x) = x + N$$

naziva se **kanonska projekcija**. S obzirom na to kako smo definirali operacije zbrajanja i množenja na skupu M/N kanonska projekcija je homomorfizam iz modula M na modul M/N.

1.4 Zmijolika lema

Sada ćemo iskazati i dokazati važnu lemu koja će nam pomoći kasnije, pri upoznavanju ravnih modula. Počnimo s nekim rutinskim komentarima. Promotrimo komutativni dijagram homomorfizama modula.

$$\begin{tikzcd} M' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "d'"'] & M \arrow[d, "d"] \\ N' \arrow[r, "h"'] & N \end{tikzcd}$$

Ovdje f inducira homomorfizam

$$Kerd' \longrightarrow Kerd.$$

Zaista, pretpostavimo da je $d'x' = 0$. Tada je $df(x') = 0$ jer je $df(x') = hd'(x') = 0$. Slično, h inducira homomorfizam

$$Cokerd' \longrightarrow Cokerd.$$

Neka $y' \in N'$ reprezentira element od $N'/d'M'$. Tada hy' mod dM ne ovisi o izboru y' koji reprezentira taj element jer ako je $y'' = y' + d'x'$ onda

$$hy'' = hy' + hd'x' = hy' + dfx' \equiv hy' \bmod dM.$$

Tako dobivamo preslikavanje

$$h_* : N'/d'M' = Cokerd' \to N/dM = Cokerd,$$

koje je homomorfizam.

Katkad u danom komutativnom dijagramu, u praksi, umjesto h pišemo f radi jednostavnosti. To nije tako netočno. Naime, mi možemo gledati M', N' kao dvije komponente direktne sume i isto tako i M, N. Tada je f samo homomorfizam definiran na direktnoj sumi $M' \oplus N'$ u $M \oplus N$. Sada ćemo uvesti komutativni i egzaktni dijagram koji zovemo **zmijoliki dijagram** i koji ćemo koristiti u zmijolikoj lemi.

$$\begin{tikzcd}
 & M' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "d'"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "d"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "d''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "f"'] & N \arrow[r, "g"'] & N'' &
\end{tikzcd}$$

Neka je $z'' \in Kerd''$. Možemo konstruirati elemente od N' na sljedeći način. Budući da je g surjektivno, postoji element $z \in M$ takav da $gz = z''$. Sada se pomičemo okomito dolje po d i dolazmo do dz. Komutativnost $d''g = gd$ pokazuje da $gdz = 0$ odakle je dz u jezgri od g u N. Po egzaktnosti, ovdje postoji element $z' \in N'$ takav da $fz' = dz$. Ukratko, pišemo

$$z' = f^{-1} \circ d \circ g^{-1} z''.$$

Naravno, z' nije dobro definirano zbog izbora prilikom uzimanja inverzne slike. Kakogod, zmijolika lema će pokazati točno što se događa.

Lema 1.4.1. ***(Zmijolika lema)*** *Neka je dan zmijoliki dijagram kako smo ga definirali. Preslikavanje*

$$\delta : Kerd'' \to Cokerd'$$

definirano sa $\delta z'' = f^{-1} \circ d \circ g^{-1} z''$ je dobro definirano i imamo egzaktan niz

$$Kerd' \to Kerd \to Kerd'' \xrightarrow{\delta} Cokerd' \to Cokerd \to Cokerd''$$

pri čemu su sva preslikavanja osim δ prirodna.

Dokaz. Rutinski je za provjeriti da je klasa od z' mod Imd' neovisna o izboru inverzne slike koja definira preslikavanje δ. Dokaz egzaktnosti niza je tada rutinski, pomoću dijagrama. Na primjer, želimo dokazati da

$$Ker\delta \subset Img_*$$

gdje je g_* inducirano preslikavanje na jezgrama. Pretpostavimo da je slika od z'' jednaka 0 u $Cokerd'$. Po definiciji, postoji $u' \in M'$ takav da $z' = d'u'$. Tada

$$dz = fz' = fd'u' = dfu'$$

po komutativnosti. Stoga

$$d(z - fu') = 0,$$

i $z - fu'$ je u jezgri od d. Ali $g(z - fu') = gz = z''$. To znači da je z'' u slici od g_*, kao što smo željeli. □

Originalni zmijoliki dijagram može biti završen na sljedeći način:

$$
\begin{tikzcd}
 & Ker d' \arrow[r] \arrow[d] & Ker d \arrow[r] \arrow[d] & Ker d'' \arrow[d] \arrow[dddll] & \\
 & M' \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & M'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & N'' \arrow[d] & \\
 & Coker d' \arrow[r] & Coker d \arrow[r] & Coker d'' &
\end{tikzcd}
$$

Poglavlje 2

Tenzorski produkt

2.1 Multilinearna preslikavanja

Da bi došli do definicije tenzorskog produkta i njegovih svojstava moramo se još upoznati sa multilinearnim preslikavanjima. Multilinearno preslikavanje je funkcija od nekoliko varijabli koja je linearna posebno u svakoj varijabli. Preciznije:

Definicija 2.1.1. *Neka je R komutativan prsten i neka su $E_1, \ldots, E_n, F$ moduli. Preslikavanje*

$$f : E_1 \times \ldots \times E_n \to F,$$

*zovemo **multilinearno preslikavanje** ili **R-multilinearno preslikavanje** ako je linearno u svakoj varijabli, tj. ako za svaki indeks i i elemente $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n, x_j \in E_j$ preslikavanje*

$$x \mapsto f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

je linearno preslikavanje E_i u F.

Multilinearno preslikavanje jedne varijable se naziva **linearno preslikavanje**, a od dvije varijable **bilinearno preslikavanje**. Multilinearno preslikavanje definirano kao u definiciji se još naziva i n-multilinearno preslikavanje. Ako je $E_1 = \ldots = E_n = E$ kažemo da je f multilinearno preslikavanje na E, umjesto da je multilinearno na $E^{(n)}$ gdje je

$$E^{(n)} = \underbrace{E \times \ldots \times E}_{n puta}.$$

Neka je f n-multilinearno preslikavanje. Ako uzmemo dva indeksa i, j, $i \neq j$ tada fiksirajući sve varijable osim i-te i j-te, možemo gledati f kao bilinearno preslikavanje na $E_i \times E_j$. Skup svih multilinearnih preslikavanja

$$f : E_1 \times \ldots \times E_n \to F,$$

označavamo s $L^n(E_1, \ldots, E_n; F)$. $L^n(E_1, \ldots, E_n; F)$ ima strukturu R-modula uz prirodno definirane operacije zbrajanja preslikavanja te množenja skalarom iz R. Za $n = 1$, očito je $L^1(E; F) = L(E; F) = Hom_R(E, F)$.

2.2 Tenzorski produkt

Neka je R komutativni prsten. Ako su $E_1, \ldots, E_n, F$ moduli, označimo sa

$$L^n(E_1, \ldots, E_n; F)$$

modul od n-multilinearnih preslikavanja

$$f : E_1 \times \ldots \times E_n \to F.$$

Podsjećamo da je multilinearno preslikavanje preslikavanje koja je linearno (tj. R-linearno) u svakoj varijabli. Koristimo riječi linearno i homomorfizam naizmjenično. Osim ako nije drugačije navedeno, moduli, homomorfizmi, linearnost, multilinearnost se odnose na prsten R.

Tenzorski produkt od $E_1, \ldots, E_n$ je uređeni par (F, f) pri čemu je F R-modul, a

$$f : E_1 \times \ldots \times E_n \to F$$

multilinearno preslikavanje takvo da za svaki modul G i multilinearno preslikavanje

$$g : E_1 \times \ldots \times E_n \to G,$$

postoji jedinstveni homomorfizam (tj. linearno preslikavanje) $h : F \to G$ tako da sljedeći dijagram komutira:

$$\begin{tikzcd} E_1 \times \ldots \times E_n \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, "f"] & \\ G & F \arrow[l, "h"] \end{tikzcd}$$

Sada ćemo dokazati da tenzorski produkt postoji. Iz definicije lagano slijedi da je tenzorski produkt jedinstveno određen do na izomorfizam.

Neka je M slobodan modul generiran skupom svih n-torki $(x_1, \ldots, x_n)$, $(x_i \in E_i)$, tj. generiran skupom $E_1 \times \ldots \times E_n$. Neka je N podmodul generiran svim elementima sljedećeg oblika:

$$(x_1, \ldots x_i + x_i', \ldots, x_n) - (x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) - (x_1, \ldots, x_i', \ldots, x_n)$$

$$(x_1, \ldots, ax_i, \ldots, x_n) - a(x_1, \ldots, x_n)$$

za sve $x_i \in E_i, x_i^{'} \in E_i, a \in R$. Imamo kanonsku injekciju

$$E_1 \times \ldots \times E_n \to M$$

našeg skupa u slobodni modul generiran njime. Iz kompozicije ovog i kanonskog preslikavanja $M \to M/N$ na kvocijentni modul dobijemo preslikavanje

$$\varphi : E_1 \times \ldots \times E_n \to M/N.$$

Tvrdimo da je φ multilinearno i da je uređeni par $(M/N, \varphi)$ tenzorski produkt modula $E_1, \ldots, E_n$.

Očito je da je φ multilinearno. Neka je

$$f : E_1 \times \ldots \times E_n \to G$$

multilinearno preslikavanje. Budući da je M slobodan modul generiran s

$$E_1 \times \ldots \times E_n,$$

imamo linearno preslikavanje $M \to G$ koje čini da sljedeći dijagram komutira:

$$\begin{tikzcd}
E_1 \times \ldots \times E_n \arrow[r] \arrow[dr, "f"'] & M \arrow[d] \\
& G
\end{tikzcd}$$

Kako je f multilinearno, konstruirano preslikavanje $M \to G$ poprima vrijednost 0 na N. Stoga, po općem svojstvu kvocijentnog modula, može se faktorizirati kroz M/N i imamo homomorfizam $f_* : M/N \to G$ koji čini da sljedeći dijagram komutira:

$$\begin{tikzcd}
E_1 \times \ldots \times E_n \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\
G & M/N \arrow[l, "f_*"]
\end{tikzcd}$$

Kako slika od φ generira M/N, slijedi da je preslikavanje f_* jedinstveno određeno. To dokazuje ono što mi želimo.

Modul M/N će biti obilježen s

$$E_1 \otimes \ldots \otimes E_n \text{ ili također } \otimes_{i=1}^{n} E_i.$$

Konstruirali smo specifični tenzorski produkt u klasi međusobno izomorfnih tenzorskih produkata i nazvat ćemo ga tenzorski produkt od $E_1, \ldots, E_n$. Ako je $x_i \in E_i$, pišemo

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \otimes \ldots \otimes x_n = x_1 \otimes_R \ldots \otimes_R x_n.$$

Za svaki i imamo,

$$x_1 \otimes \ldots \otimes ax_i \otimes \ldots \otimes x_n = a(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n),$$

$$x_1 \otimes \ldots \otimes (x_i + x_i^{'}) \otimes \ldots \otimes x_n = (x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) + (x_1 \otimes \ldots \otimes x_i^{'} \otimes \ldots \otimes x_n)$$

za $x_i, x_i^{'} \in E_i$ i $a \in R$.

Ako imamo dva faktora, recimo $E \otimes F$, tada svaki element od $E \otimes F$ možemo napisati kao sumu elemenata $x \otimes y$ gdje je $x \in E$ i $y \in F$, jer takvi elementi generiraju $E \otimes F$ nad R i $a(x \otimes y) = ax \otimes y$ za $a \in R$.

Upozorenje. Tenzorski produkt netrivijalnih modula može biti trivijalan. Na primjer, uzmimo tenzorski produkt nad $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ i $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ gdje su m, n cijeli brojevi > 1 i relativno prosti. Tada je tenzorski produkt

$$\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \otimes \mathbf{Z}/m\mathbf{Z} = 0.$$

Zaista, imamo $n(x \otimes y) = (nx) \otimes y = 0$ i $m(x \otimes y) = x \otimes my = 0$. Stoga je $x \otimes y = 0$ za sve $x \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ i $y \in \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$. Elementi tipa $x \otimes y$ generiraju tenzorski produkt koji je, dakle, 0.

Sada ćemo dokazati asocijativnost tenzorskog produkta.

Propozicija 2.2.1. *Neka su E_1, E_2, E_3 moduli. Tada postoji jedinstveni izomorfizam*

$$(E_1 \otimes E_2) \otimes E_3 \to E_1 \otimes (E_2 \otimes E_3)$$

tako da

$$(x \otimes y) \otimes z \mapsto x \otimes (y \otimes z)$$

za $x \in E_1$, $y \in E_2$ i $z \in E_3$.

Dokaz. Kako elementi tipa $(x \otimes y) \otimes z$ generiraju tenzorski produkt, jedinstvenost zadanog linearnog preslikavanja je očita. Da bi dokazali egzistenciju, neka je $x \in E_1$. Preslikavanje

$$\lambda_x : E_2 \times E_3 \to (E_1 \otimes E_2) \otimes E_3$$

takvo da je $\lambda_x(y, z) = (x \otimes y) \otimes z$ je bilinearno pa se faktorizira do linearnog preslikavanja na tenzorskom produktu

$$\bar{\lambda}_x : E_2 \otimes E_3 \to (E_1 \otimes E_2) \otimes E_3.$$

Preslikavanje

$$E_1 \times (E_2 \otimes E_3) \to (E_1 \otimes E_2) \otimes E_3$$

takvo da je

$$(x, \alpha) \mapsto \bar{\lambda}_x(\alpha)$$

za $x \in E_1$ i $\alpha \in E_2 \otimes E_3$ je onda očito bilinearno pa se faktorizira do linearnog preslikavanja

$$E_1 \otimes (E_2 \otimes E_3) \to (E_1 \otimes E_2) \otimes E_3$$

koje ima željena svojstva (jasno iz njegove konstrukcije). □

Propozicija 2.2.2. *Neka su E i F moduli. Tada postoji jedinstveni izomorfizam*

$$E \otimes F \to F \otimes E$$

takav da $x \otimes y \mapsto y \otimes x$ za $x \in E$ i $y \in F$.

Dokaz. Preslikavanje $E \times F \to F \otimes E$ takvo da $(x, y) \mapsto y \otimes x$ je bilinearno pa se faktorizira kroz tenzorski produkt $E \otimes F$, tj. $x \otimes y$ preslikava u $y \otimes x$. Jer ovo posljednje preslikavanje ima inverz (po simetriji) dobivamo željeni izomorfizam. □

Tenzorski produkt ima mnogo funktorijalnih svojstava. Prvo, pretpostavimo da su

$$f_i : E_i^{'} \to E_i, (i = 1, \ldots, n)$$

linearna preslikavanja. Dobivamo inducirano preslikavanje na produktu,

$$\prod f_i : \prod E_i^{'} \to \prod E_i.$$

Ako komponiramo $\prod f_i$ s kanonskim preslikavanjem u tenzorski produkt, dobivamo inducirano linearno preslikavanje koje možemo označiti s $T(f_1, \ldots, f_n)$, pa dobivamo sljedeći komutativni dijagram:

$$\begin{tikzcd}
E_1^{'} \times \ldots \times E_n^{'} \arrow[r] \arrow[d, "\prod f_i"'] & E_1^{'} \otimes \ldots \otimes E_n^{'} \arrow[d, "T(f_1,\ldots,f_n)"] \\
E_1 \times \ldots \times E_n \arrow[r] & E_1 \otimes \ldots \otimes E_n
\end{tikzcd}$$

Odmah se provjerava da je T funktor. Naime ako imamo kompoziciju linearnih preslikavanja $f_i \circ g_i (i = 1, \ldots, n)$ tada

$$T(f_1 \circ g_1, \ldots, f_n \circ g_n) = T(f_1, \ldots, f_n) \circ T(g_1, \ldots, g_n)$$

i

$$T(id, \ldots, id) = id.$$

Možemo vidjeti da je $T(f_1, \ldots, f_n)$ jedinstveno linearno preslikavanje takvo da je

$$x_1^{'} \otimes \ldots \otimes x_n^{'} \mapsto f_1(x_1^{'}) \otimes \ldots \otimes f_n(x_n^{'})$$

pri čemu su $x_1^{'} \otimes \ldots \otimes x_n^{'}$ iz $E_1^{'} \otimes \ldots \otimes E_n^{'}$.

T možemo gledati i kao preslikavanje

$$\prod_{i=1}^{n} L(E_i^{'}, E_i) \to L\left(\otimes_{i=1}^{n} E_i^{'}, \otimes_{i=1}^{n} E_i\right)$$

za koje se lako dokaže da je multilinearno. Pokazat ćemo što to znači eksplicitno na dva faktora, pa naše preslikavanje može biti napisano

$$(f, g) \mapsto T(f, g).$$

Ako su $f : F^{'} \to F$ i $g_1, g_2 : E^{'} \to E$ dani homomorfizmi, tada

$$T(f, g_1 + g_2) = T(f, g_1) + T(f, g_2),$$

$$T(f, ag_1) = aT(f, g_1).$$

Konkretno, odaberimo ravni modul F i funktor $\tau = \tau_F$ takav da je

$$\tau(E) = F \otimes E.$$

Tada τ inducira linearno preslikavanje

$$\tau : L(E^{'}, E) \to L(\tau(E^{'}), \tau(E))$$

za svaki par modula $E^{'}, E$ formulom

$$\tau(f) = T(id, f).$$

Napomena 2.2.3. *Ponekad je prikladnije pisati*

$$f_1 \otimes \ldots \otimes f_n$$

umjesto

$$T(f_1, \ldots, f_n).$$

To ne treba miješati sa tenzorskim produktom elemenata uzetih iz tenzorskog produkta modula

$$L(E_1^{'}, E_1) \otimes \ldots \otimes L(E_n^{'}, E_n).$$

Iz konteksta će uvijek biti jasno o čemu se radi.

2.3 Osnovna svojstva

Najosnovnija relacija između linearnih preslikavanja, bilinearnih preslikavanja i tenzorskog produkta je sljedeća: Za tri modula E, F i G

$$\boxed{L(E, L(F, G)) \approx L^2(E, F; G) \approx L(E \otimes F, G)}$$

Uključeni izomorfizmi su konstruirani na prirodan način.

(1) $L^2(E, F; G) \to L(E, L(F, G))$.

Ako je $f : E \times F \to G$ bilinearno i $x \in E$, tada je preslikavanje

$$f_x : F \to G$$

takvo da je $f_x(y) = f(x, y)$, linearno. Osim toga, preslikavanje $x \mapsto f_x$ je linearno i kada ga pridružimo f dobivamo preslikavanje (1).

(2) $L(E, L(F, G)) \to L^2(E, F; G)$.

Neka je $\varphi \in L(E, L(F, G))$ i $f_\varphi : E \times F \to G$ bilinearno preslikavanje takvo da je

$$f_\varphi(x, y) = \varphi(x)(y).$$

Tada $\varphi \mapsto f_\varphi$ definira (2).

Jasno je da su homomorfizmi iz (1) i (2) inverzni jedan drugom i stoga daju izomorfizam između prva dva objekta u gore navedenoj, uokvirenoj, formuli.

(3) $L^2(E, F; G) \to L(E \otimes F, G)$.

Ovo je preslikavanje $f \mapsto f_*$ koje svakom bilinearnom preslikavanju f pridružuje inducirano linearno preslikavanje na tenzorskom produktu. $f \mapsto f_*$ je injekcija (jer je f_* jedinstveno određen sa f) i surjekcija, jer svako linearno preslikavanje tenzorskog produkta komponirano s kanonskim preslikavanjem $E \times F \to E \otimes F$ daje bilinearno preslikavanje na $E \times F$.

Propozicija 2.3.1. *Neka je $E = \oplus_{i=1}^n E_i$ direktna suma. Tada imamo izomorfizam*

$$F \otimes E \leftrightarrow \oplus_{i=1}^n (F \otimes E_i).$$

Dokaz. Fiksiramo F i promatramo funktor $\tau : X \mapsto F \otimes X$. Kao što smo vidjeli, τ je linearan. Imamo projekcije $\pi_i : E \to E$ iz E na E_i. Tada

$$\pi_i \circ \pi_i = \pi_i \, , \pi_i \circ \pi_j = 0 \text{ ako je } i \neq j,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \pi_i = id.$$

Primjenjujemo funktor τ i vidimo da $\tau(\pi_i)$ zadovoljava iste relacije, stoga dobivamo dekompoziciju od $\tau(E) = F \otimes E$ u direktnu sumu. Primijetimo da je $\tau(\pi_i) = id \otimes \pi_i$. □

Korolar 2.3.2. *Neka je I indeksni skup i $E = \oplus_{i \in I} E_i$. Tada imamo izomorfizam*

$$(\oplus_{i \in I} E_i) \otimes F \approx \oplus_{i \in I}(E_i \otimes F).$$

Dokaz. Neka je S konačan podskup od I. Imamo niz preslikavanja

$$(\oplus_{i \in S} E_i) \times F \to \oplus_{i \in S}(E_i \otimes F) \to \oplus_{i \in I}(E_i \otimes F)$$

od kojih je prvo bilinearno i drugo linearno, inducirano inkluzijom od S u I. Prvo je očigledno preslikavanje. Ako je $S \subset S'$ tada trivijalni komutativni dijagram pokazuje da restrikcija preslikavanja

$$(\oplus_{i \in S'} E_i) \times F \to \oplus_{i \in I}(E_i \otimes F)$$

inducira naše prethodno preslikavanje na sumi za $i \in S$. Ali imamo injekciju

$$(\oplus_{i \in S} E_i) \times F \to (\oplus_{i \in S'} E_i) \times F.$$

Stoga, možemo definirati bilinearno preslikavanje

$$(\oplus_{i \in I} E_i) \times F \to \oplus_{i \in I}(E_i \otimes F),$$

i iz toga linearno preslikavanje

$$(\oplus_{i \in I} E_i) \otimes F \to \oplus_{i \in I}(E_i \otimes F).$$

Na sličan način se definira suprotni smjer i jasno je da su ta preslikavanja inverzna jedno drugom, stoga imamo izomorfizam. □

Pretpostavimo sada da je E slobodan modul, dimenzije 1 nad R. Neka je $\{v\}$ baza i razmotrimo $F \otimes E$. Svaki element od $F \otimes E$ može biti napisan kao suma elemenata $y \otimes av$ gdje je $y \in F$ i $a \in R$. Međutim, $y \otimes av = ay \otimes v$. U sumi takvih elemenata možemo koristiti linearnost slijeva,

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i \otimes v) = \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) \otimes v \, , \, y_i \in F.$$

Stoga je svaki element u stvari oblika $y \otimes v$ za neki $y \in F$.

Imamo bilinearno preslikavanje

$$F \times E \to F$$

takvo da $(y, av) \mapsto ay$, koje inducira linearno preslikavanje

$$F \otimes E \mapsto F.$$

Također imamo linearno preslikavanje $F \to F \otimes E$ dano s $y \mapsto y \otimes v$. Jasno je da su ta preslikavanja inverzna jedno drugom i stoga imamo izomorfizam

$$F \otimes E \approx F.$$

Prema tome svaki element iz $F \otimes E$ može biti napisan na jedinstven način u obliku $y \otimes v$, $y \in F$.

Propozicija 2.3.3. *Neka je E slobodan nad R sa bazom $\{v_i\}_{i \in I}$. Tada svaki element od $F \otimes E$ ima jedinstveni zapis u obliku*

$$\sum_{i \in I} y_i \otimes v_i \ , \ y_i \in F$$

za skoro sve $y_i = 0$.

Dokaz. Slijedi direktno iz diskusije u jednodimenzionalnom slučaju i korolara Propozicije 2.3.1. □

Korolar 2.3.4. *Neka su E, F slobodni nad R sa bazama $\{v_i\}_{i \in I}$ i $\left\{w_j\right\}_{j \in J}$ redom. Tada je $E \otimes F$ slobodan sa bazom $\left\{v_i \otimes w_j\right\}$. Imamo*

$$\dim(E \otimes F) = (\dim E)(\dim F).$$

Dokaz. Slijedi direktno iz propozicije. □

Vidimo da kada je E slobodan nad R, tada tenzorski produkt s netrivijalnim modulom ne može biti trivijalan. Svaki element od $F \otimes E$ se može gledati kao formalna linearna kombinacija elemenata u bazi od E sa koeficijentima iz F.

Posebno, vidimo da $R \otimes E$ (ili $E \otimes R$) je izomorfan sa E, uz korespodenciju $x \mapsto x \otimes 1$.

Propozicija 2.3.5. *Neka su E i F slobodni moduli konačne dimenzije nad R. Tada imamo izomorfizam*

$$End_R(E) \otimes End_R(F) \to End_R(E \otimes F)$$

koji je jedinstveno linearno preslikavanje takvo da je

$$f \otimes g \mapsto T(f, g)$$

za $f \in End_R(E)$ *i* $g \in End_R(F)$.

[Napominjemo da je tenzorski produkt na lijevoj strani ovdje uzet kao tenzorski produkt dva modula $End_R(E)$ *i* $End_R(F)$*.]*

Dokaz. Neka je $\{v_i\}$ baza od E i $\left\{w_j\right\}$ baza od F. Tada je $\left\{v_i \otimes w_j\right\}$ baza od $E \otimes F$. Za svaki par indeksa $(i^{'}, j^{'})$ postoje jedinstveni endomorfizmi $f = f_{i,i'}$ od E i $g = g_{j,j'}$ od F takvi da je

$$f(v_i) = v_{i'} \text{ i } f(v_\nu) = 0 \text{ ako je } \nu \neq i$$

$$g(w_j) = w_{j'} \text{ i } g(w_\mu) = 0 \text{ ako je } \mu \neq j.$$

Osim toga, familije $\left\{f_{i,i'}\right\}$ i $\left\{g_{j,j'}\right\}$ su baze od $End_R(E)$ i $End_R(F)$, redom. Tada

$$T(f, g)(v_\nu \otimes w_\mu) = \begin{cases} v_{i'} \otimes w_{j'} & \text{ako je } (\nu, \mu) = (i, j) \\ 0 & \text{ako je } (\nu, \mu) \neq (i, j) \end{cases}$$

Prema tome familija $\left\{T(f_{i,i'}, g_{j,j'})\right\}$ je baza od $End_R(E \otimes F)$. Budući da je familija $\left\{f_{i,i'} \otimes g_{j,j'}\right\}$ baza od $End_R(E) \otimes End_R(F)$, tvrdnja naše propozicije je sada dokazana. □

Iz Propozicije 2.3.5. vidimo da višeznačnost tenzorskog znaka u $f \otimes g$ zapravo ne postoji u važnim specijalnim slučajevima slobodnih, konačnodimenzionalnih modula.

Propozicija 2.3.6. *Neka je*

$$0 \to E^{'} \xrightarrow{\varphi} E \xrightarrow{\psi} E^{''} \to 0$$

egzaktni niz i F *neki modul. Tada je niz*

$$F \otimes E^{'} \to F \otimes E \to F \otimes E^{''} \to 0$$

egzaktan.

Dokaz. Za dani $x^{''} \in E^{''}$ i $y \in F$ postoji $x \in E$ takav da je $x^{''} = \psi(x)$ i stoga je $y \otimes x^{''}$ slika od $y \otimes x$ za linearno preslikavanje

$$F \otimes E \to F \otimes E^{''}.$$

Kako elemenati tipa $y \otimes x^{''}$ generiraju $F \otimes E^{''}$ zaključujemo da je prethodno linearno preslikavanje surjektivno. Također je trivijalno da je slika od

$$F \otimes E^{'} \to F \otimes E$$

sadržana u jezgri od

$$F \otimes E \to F \otimes E''.$$

Obrnuto, neka je I slika od $F \otimes E' \to F \otimes E$ i neka je

$$f : (F \otimes E)/I \to F \otimes E''$$

kanonsko preslikavanje. Želimo definirati linearno preslikavanje

$$g : F \otimes E'' \to (F \otimes E)/I$$

tako da je $g \circ f = id$. Ovo će očito implicirati da je f injekcija i stoga će se pokazati željeni obrat. Neka je $y \in F$ i $x'' \in E''$. Neka je $x \in E$ takav da je $\psi(x) = x''$. Definiramo preslikavanje $F \times E'' \to (F \otimes E)/I$ kao

$$(y, x'') \mapsto y \otimes x \ (modI),$$

i tvrdimo da je to preslikavanje dobro definirano, tj. ne ovisi o izboru x takvog da je $\psi(x) = x''$. Ako je $\psi(x_1) = \psi(x_2) = x''$ tada je $\psi(x_1 - x_2) = 0$ i po pretpostavci je $x_1 - x_2 = \psi(x')$ za neki $x' \in E'$. Tada

$$y \otimes x_1 - y \otimes x_2 = y \otimes (x_1 - x_2) = y \otimes \varphi(x').$$

Ovo pokazuje da je $y \otimes x_1 \equiv y \otimes x_2 \ (modI)$ i dokazuje da naše preslikavanje je dobro definirano. Očito je bilinearno pa se faktorizira do linearnog preslikavanja g na tenzorskom produktu. Jasno je da je restrikcija od $g \circ f$ na elemente tipa $y \otimes x''$ identiteta. Pošto ovi elementi generiraju $F \otimes E''$ zaključujemo da je f injektivno, što smo i trebali pokazati. □

Nije uvijek istina da je niz

$$0 \to F \otimes E' \to F \otimes E \to F \otimes E'' \to 0$$

egzaktan. Egzaktan je ako se prvi niz u Propoziciji 2.3.6. cijepa, tj. ako je E zapravo direktna suma od E' i E''. Ovo je trivijalna posljedica Propozicije 2.3.1.

Propozicija 2.3.7. *Neka je $\mathfrak{a}$ ideal od R. Neka je E modul. Tada je preslikavanje $(R/\mathfrak{a}) \times E \to E/\mathfrak{a}E$ inducirano sa*

$$(a, x) \mapsto ax \ (mod\mathfrak{a}E), a \in R, x \in E$$

bilinearno i inducira izomorfizam

$$(R/\mathfrak{a}) \otimes E \xrightarrow{\approx} E/\mathfrak{a}E.$$

Dokaz. Preslikavanje $(a, x) \mapsto ax \ (mod\mathfrak{a}E)$ očito inducira bilinearno preslikavanje $R/\mathfrak{a} \times E$ na $E/\mathfrak{a}E$, stoga i linearno preslikavanje $R/\mathfrak{a} \otimes E$ na $E/\mathfrak{a}E$. Možemo konstruirati inverz, jer imamo dobro definirano linearno preslikavanje

$$E \to R/\mathfrak{a} \otimes E$$

takvo da $x \mapsto \bar{1} \otimes x$ (gdje je $\bar{1}$ ostatak klase 1 u $R/\mathfrak{a}$). Očito je da je $\mathfrak{a}E$ sadržano u jezgri posljednjeg linearnog preslikavanja i prema tome dobivamo homomorfizam

$$E/\mathfrak{a}E \to R/\mathfrak{a} \otimes E,$$

za koji se vidi da je inverz homomorfizma opisanog u iskazu propozicije. □

2.4 Ravni moduli

Prisjetimo se Propozicije 2.3.6. Želimo vidjeti pod kojim uvjetima imamo injektivnost u toj propoziciji. To nas dovodi do teorije ravnih modula. Sljedeći ekvivalentni uvjeti definiraju ravni modul F:

F 1. Za svaki egzaktan niz
$$E' \to E \to E''$$
niz
$$F \otimes E' \to F \otimes E \to F \otimes E''$$
je egzaktan.

F 2. Za svaki kratki egzaktni niz
$$0 \to E' \to E \to E'' \to 0$$
niz
$$0 \to F \otimes E' \to F \otimes E \to F \otimes E'' \to 0$$
je egzaktan.

F 3. Za svaku injekciju $0 \to E' \to E$ niz
$$0 \to F \otimes E' \to F \otimes E$$
je egzaktan.

Vidimo da **F 1** implicira **F 2** implicira **F 3**. Konačno, vidimo da **F 3** implicira **F 1** zapisivanjem jezgre i slike preslikavanja $E' \to E$ i primjenom **F 3**. Sljedeća svojstva slijede lagano iz definicije:

Propozicija 2.4.1. *(i) Osnovni prsten je ravan kao modul nad samim sobom.*

(ii) Neka je $F = \oplus F_i$ direktna suma. Tada je F ravan ako i samo ako je svaki F_i ravan.

Sada dolazimo do novih kriterija kad je modul ravan.

Lema 2.4.2. *Neka je F ravan i pretpostavimo da je*

$$0 \to N \to M \to F \to 0$$

egzaktni niz. Tada za svaki E imamo egzaktni niz

$$0 \to N \otimes E \to M \otimes E \to F \otimes E \to 0.$$

Dokaz. Prikažimo E kao kvocijent fiksnog L po egzaktnom nizu

$$0 \to K \to L \to E \to 0.$$

Tada imamo sljedeći egzaktni i komutativni dijagram:

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & \\
 & N \otimes K \arrow[r] \arrow[d] & M \otimes K \arrow[r] \arrow[d] & F \otimes K \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \otimes L \arrow[r] \arrow[d] & M \otimes L \arrow[r] \arrow[d] & F \otimes L & \\
 & N \otimes E \arrow[r] \arrow[d] & M \otimes E \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Gornja desna 0 dolazi od pretpostavke da je F ravan. 0 na lijevoj strani dolazi od činjenice da je L ravan. Zmijolika lema daje egzaktni niz

$$0 \to N \otimes E \to M \otimes E$$

što dokazuje lemu. □

Propozicija 2.4.3. *Neka je*

$$0 \to F' \to F \to F'' \to 0$$

egzaktni niz i pretpostavimo da je F'' ravan. Tada je F ravan ako i samo ako je F' ravan. Općenitije, neka je

$$0 \to F^0 \to F^1 \to \ldots \to F^n \to 0$$

egzaktan niz takav da su $F^1, \ldots, F^n$ ravni. Tada je F^0 ravan.

Dokaz. Neka je $0 \to E' \to E$ injekcija. Imamo egzaktni i komutativni dijagram:

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & F' \otimes E' \arrow[r] \arrow[d] & F \otimes E' \arrow[r] \arrow[d] & F'' \otimes E' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & F' \otimes E \arrow[r] & F \otimes E \arrow[r] & F'' \otimes E &
\end{tikzcd}$$

0 na vrhu dolazi od hipoteze da je F'' ravan. Dvije 0 na lijevoj strani su opravdane po Lemi 2.4.2. Ako je F' ravan, tada je prvo okomito preslikavanje injekcija i zmijolika lema pokazuje da je F ravan. Ako je F ravan tada je srednje preslikavanje injekcija. Tada dvije 0 na lijevoj strani i komutativnost lijevog kvadrata pokazuje da je preslikavanje $F' \otimes E' \to F' \otimes E$ injekcija pa je F' ravan. Ovo dokazuje prvi iskaz. Dokaz druge tvrdnje provodi se indukcijom. □

Da bi dobili fleksibilnost u testiranju "ravnosti" korisne su sljedeće dvije leme. Naime, kažemo da je F E-**ravan** ili **ravan za** E ako za svaki monomorfizam

$$0 \to E' \to E$$

tenzorirani niz

$$0 \to F \otimes E' \to F \otimes E$$

je također egzaktan.

Lema 2.4.4. *Pretpostavimo da je F E-ravan. Tada je F također ravan za svaki podmodul i svaki kvocijentni modul od E.*

Dokaz. Dio o podmodulu je jasan jer ako su $E_1' \subset E_2' \subset E$ podmoduli i $F \otimes E_1' \to F \otimes E$ je monomorfizam tako je i $F \otimes E_1' \to F \otimes E_2'$ budući da je kompozicijsko preslikavanje s $F \otimes E_2' \to F \otimes E$ monomorfizam. Jedino pitanje leži u kvocijentnom modulu. Pretpostavimo da imamo egzaktni niz

$$0 \to N \to E \to M \to 0.$$

Neka je M' podmodul od M i E' njegova inverzna slika u E. Tada imamo komutativni dijagram egzaktnih nizova:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d, equal] & E' \arrow[r] \arrow[d] & M' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] & E \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Tenzoriranjem sa F dobivamo egzaktni i komutativni dijagram

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & K \arrow[d] & \\
 & F \otimes N \arrow[r] \arrow[d] & F \otimes E^{'} \arrow[r] \arrow[d] & F \otimes M^{'} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & F \otimes N \arrow[r] \arrow[d] & F \otimes E \arrow[r] & F \otimes M & \\
 & 0 & & &
\end{tikzcd}$$

gdje je K problematična jezgra koja želimo da bude 0. Ali zmijolika lema donosi egzaktan niz

$$0 \to K \to 0$$

koji zaključuje dokaz. □

Lema 2.4.5. *Neka je $\{E_i\}$ familija modula i pretpostavimo da je F ravan za svaki E_i. Tada je ravan za njihovu direktnu sumu.*

Dokaz. Neka je $E = \oplus E_i$ njihova direktna suma. Moramo dokazati da za bilo koji dani podmodul $E^{'}$ od E, niz

$$0 \to F \otimes E^{'} \to F \otimes E = \oplus F \otimes E_i$$

je egzaktan. Primjetimo da ako neki element od $F \otimes E^{'}$ postane 0 kada je element direktne sume, tada on postaje 0 odmah u konačnoj podsumi, tako da bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je skup indeksa konačan. Tada po indukciji, možemo pretpostaviti da se skup indeksa sastoji od dva elementa, pa imamo dva modula E_1 i E_2 i $E = E_1 \oplus E_2$. Neka je N podmodul od E i $N_1 = N \cap E_1$, te neka je N_2 slika od N po projekciji na E_2. Tada imamo sljedeći komutativni i egzaktni dijagram:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & \\
 & N_1 \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & N_2 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & E_1 \arrow[r] & E \arrow[r] & E_2 &
\end{tikzcd}$$

Tenzoriranjem sa F dobivamo egzaktni i komutativni dijagram:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & \\
 & F \otimes N_1 \arrow[r] \arrow[d] & F \otimes N \arrow[r] \arrow[d] & F \otimes N_2 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & F \otimes E_1 \arrow[r] & F \otimes E \arrow[r] & F \otimes E_2 &
\end{tikzcd}$$

Donja lijeva egzaktnost je zbog činjenice da je $E = E_1 \otimes E_2$. Tada zmijolika lema pokazuje da je jezgra srednjeg okomitog preslikavanja 0. Ovo dokazuje lemu. $\square$

Sljedeća propozicija pokazuje da je test za "ravnost" dovoljno učiniti samo za specijalnu klasu egzaktnih nizova koja proizlazi iz ideala.

Propozicija 2.4.6. *F je ravan ako i samo ako za svaki ideal* $\mathfrak{a}$ *od R prirodno preslikavanje*

$$\mathfrak{a} \otimes F \to \mathfrak{a}F$$

je izomorfizam. U stvari, F je ravan ako i samo ako za svaki ideal $\mathfrak{a}$ *od R tenzorirajući niz*

$$0 \to \mathfrak{a} \to R \to R/\mathfrak{a} \to 0$$

sa F daje egzaktni niz.

Dokaz. Ako je F ravan tada tenzorirajući s F i koristeći Propoziciju 2.3.7. pokazujemo da prirodno preslikavanje je izomorfizam jer $\mathfrak{a}M$ je jezgra od $M \to M/\mathfrak{a}M$. Obrnuto, pretpostavimo da ovo preslikavanje je izomorfizam za sve ideale $\mathfrak{a}$. To znači da je F R-ravan. Prema Lemi 2.4.5. slijedi da je F ravan za proizvoljnu direktnu sumu od R sa samim sobom i jer bilo koji modul M je kvocijent takve direktne sume, Lema 2.4.4. implicira da je F M-ravan. $\square$

2.5 Proširenje osnovnog prstena

Neka je R komutativni prsten i neka je E R-modul. Neka je $R \to R'$ homomorfizam komutativnih prstenova tako da je R' R-algebra (pa je i R-modul). Imamo 3-multilinearno preslikavanje

$$R' \times R' \times E \to R' \otimes E$$

definirano sa pravilom

$$(a, b, x) \mapsto ab \otimes x.$$

Ovo inducira R-linearno preslikavanje

$$R^{'} \otimes (R^{'} \otimes E) \to R^{'} \otimes E$$

stoga i R-linearno preslikavanje $R^{'} \times (R^{'} \otimes E) \to R^{'} \otimes E$. Lagano se provjerava da zadnjim preslikavanjem $R^{'} \otimes E$ postaje $R^{'}$-modul koji ćemo zvati **proširenje od** E **nad** $R^{'}$ i označavat sa $E_{R'}$. Također kažemo da je $E_{R'}$ dobiveno **proširenjem osnovnog** prstena s R na $R^{'}$.

Primjer 2.5.1. *Neka je $\mathfrak{a}$ ideal od R i neka je $R \to R/\mathfrak{a}$ kanonski homomorfizam. Tada se proširenje od E na $R/\mathfrak{a}$ također naziva* ***redukcija*** *od E modulo $\mathfrak{a}$. Ovo se često događa nad cijelim brojevima, kada reduciramo modulo p (tj. modulo glavnog ideala (p)).*

Primjer 2.5.2. *Neka je R polje i $R^{'}$ proširenje polja. Tada je E vektorski prostor nad R i $E_{R'}$ vektorski prostor nad $R^{'}$.*

Iz Propozicije 2.3.3 zaključujemo:

Propozicija 2.5.3. *Neka je E slobodni modul nad R sa bazom $\{v_i\}_{i \in I}$. Neka je $v_i^{'} = 1 \otimes v_i$. Tada je $E_{R'}$ slobodan modul nad $R^{'}$, sa bazom $\left\{v_i^{'}\right\}_{i \in I}$.*

Pišemo

$$E_{R'} = R^{'} \otimes E = R^{'} \otimes_R E.$$

Tada imamo tranzitivnost kod proširenja, naime, ako je $R \to R^{'} \to R^{''}$ niz homomorfizama komutativnih prstena, tada imamo izomorfizam $R^{''}$-modula

$$R^{''} \otimes_R E \approx R^{''} \otimes_{R'} (R^{'} \otimes_R E).$$

Ako E ima multiplikativnu strukturu, možemo koristiti i množenje. Neka je $R \to A$ homomorfizam prstena, takav da svaki element u slici od R u A komutira sa svakim elementom iz A (tj. je R-algebra). Neka je $R \to R^{'}$ homomorfizam komutativnih prstena. Imamo 4-multilinearno preslikavanje

$$R^{'} \times A \times R^{'} \times A \to R^{'} \otimes A$$

definirano sa

$$(a, x, b, y) \mapsto ab \otimes xy.$$

Dobili smo inducirano R-linearno preslikavanje

$$R^{'} \otimes A \otimes R^{'} \otimes A \to R^{'} \otimes A$$

stoga i inducirano R-bilinearno preslikavanje

$$(R^{'} \otimes A) \times (R^{'} \otimes A) \to R^{'} \otimes A.$$

Lako se provjeri da je definirano množenje na $R^{'} \otimes A$ asocijativno. Postoji jedinični element u $R^{'} \otimes A$, naime, $1 \otimes 1$. Imamo homomorfizam prstena iz $R^{'}$ u $R^{'} \otimes A$ dan sa $a \mapsto a \otimes 1$. Na ovaj način vidimo da je $R^{'} \otimes A = A_{R'}$ $R^{'}$-algebra. Napominjemo da je preslikavanje

$$x \mapsto 1 \otimes x$$

homomorfizam prstena iz A u $R^{'} \otimes A$ i tako smo dobili komutativni dijagram homomorfizama prstena

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r] \arrow[d] & R^{'} \arrow[d] \\ A \arrow[r] & R^{'} \otimes A = A_{R'}. \end{tikzcd}$$

2.6 Tenzorski produkt algebri

Neka je R komutativni prsten. Pod **R-algebrom** mislimo na homomorfizam prstena $R \to A$ tako da slika od R komutira sa svim elementima od A.

Neka su A i B R-algebre. Želimo od $A \otimes B$ napraviti R-algebru. Neka je $(a, b) \in A \times B$, imamo R-bilinearno preslikavanje

$$M_{a,b} : A \times B \to A \otimes B \text{ tako da je } M_{a,b}(a^{'}, b^{'}) = aa^{'} \otimes bb^{'}.$$

Stoga $M_{a,b}$ inducira R-linearno preslikavanje $m_{a,b} : A \otimes B \to A \otimes B$ tako da je $m_{a,b}(a^{'}, b^{'}) = aa^{'} \otimes bb^{'}$. Ali $m_{a,b}$ ovisi bilinearno o a i b, pa dobivamo jedinstveno R-bilinearno preslikavanje

$$A \otimes B \times A \otimes B \to A \otimes B$$

takvo da $(a \otimes b)(a^{'} \otimes b^{'}) = aa^{'} \otimes bb^{'}$. Ovo preslikavanje je očito asocijativno i dobivamo prirodni homomorfizam prstena

$$R \to A \otimes B \text{ dan sa } c \mapsto 1 \otimes c = c \otimes 1.$$

Prema tome $A \otimes B$ je R-algebra nazvana **tenzorski produkt algebri**.

Graduirane algebre. Neka je G komutativni monoid, zapisan aditivno. Pod **G-graduiranim prstenom** podrazumijevamo prsten A koji kao aditivna grupa može biti prikazan kao direktna suma

$$A = \oplus_{r \in G} A_r,$$

i takav da množenje u prstenu preslikava $A_r \times A_s$ u A_{r+s} za sve $r, s \in G$. Posebno, vidimo da je A_0 podprsten. Elementi od A_r se nazivaju **homogeni elementi stupnja** r.

Konstruirat ćemo nekoliko primjera graduiranih prstena na sljedeći način. Pretpostavimo da je za svaki $r \in G$ dana Abelova grupa A_r (napisana aditivno) i za svaki par $r, s \in G$ preslikavanje $A_r \times A_s \to A_{r+s}$. Pretpostavimo da je A_0 komutativni prsten i da je dano množenje asocijativno, te da je A_0-bilinearno. Tada direktna suma $A = \oplus_{r \in G} A_r$ je prsten: Možemo definirati množenje na očiti način, naime

$$(\sum_{r \in G} x_r)(\sum_{s \in G} y_s) = \sum_{t \in G}(\sum_{r+s=t} x_r y_s).$$

Gornji produkt se naziva **običan produkt**. Međutim, postoji i drugi način. Pretpostavimo da postoji gradacija u **Z** ili **Z**/2**Z**. Definiramo **super produkt** od $x \in A_r$ i $y \in A_s$ kao $(-1)^{rs} xy$, gdje je xy dani produkt. Lako je provjeriti da je ovaj produkt asocijativan i da se može proširiti na tzv. **super produkt** $A \otimes A \to A$ koji je pridružen tim bilinearnim preslikavanjima. Ako je R komutativni prsten takav da A graduira R-algebru, tj. $RA_r \subset A_r$ za sve r, koju ćemo označiti s A_{su} i bit će nazvana **super algebra** pridružena A.

Primjer 2.6.1. *U sljedećem odjeljku, upoznat ćemo tenzorsku algebru $T(E)$, koja će biti graduirana kao direktna suma od $T^r(E)$ i tako dobivamo pridruženu super tenzorsku algebru $T_{su}(E)$ prema gore opisanom postupku.*

Slično, ako su A i B graduirane algebre (graduirane prirodnim brojevima kao gore). Definiramo njihov **super tenzorski produkt**

$$A \otimes_{su} B$$

kao običan tenzorski produkt graduiranih modula sa **super produktom**

$$(a \otimes b)(a' \otimes b') = (-1)^{(\deg b)(\deg a')} aa' \otimes bb'$$

ako su b, a' homogeni elementi od B i A redom. Rutinski se provjeri da je $A \otimes_{su} B$ prsten koji je također graduirana algebra. Asocijativnost super produkta se direktno provjeri. Pretpostavimo da je $a' \in A_i, b \in B_j, a'' \in A_s$ i $b' \in B_r$. Lako se vidi računajući na oba načina

$$(a \otimes_{su} b)(a' \otimes_{su} b')(a'' \otimes_{su} b'')$$

da predznak produkta ostaje isti i to $(-1)^{ij+js+sr}$. Kako je bilinearnost trivijalno zadovoljena, slijedi da je $A \otimes_{su} B$ doista algebra.

2.7 Tenzorska algebra modula

Neka je R komutativni prsten i neka je E modul (tj. R-modul). Za svaki broj $r \geqslant 0$, označimo

$$T^r(E) = \otimes_{i=1}^r E \text{ i } T^0(E) = R.$$

Prema tome $T^r(E) = E \otimes \cdots \otimes E$ (tenzorski produkt r puta).

Iz asocijativnosti tenzorskog produkta, dobivamo bilinearno preslikavanje

$$T^r(E) \times T^s(E) \to T^{r+s}(E),$$

koje je asocijativno. Stoga, pomoću ovog bilinearnog preslikavanja, možemo definirati strukturu prstena na direktnoj sumi

$$T(E) = \oplus_{r=0}^{\infty} T^r(E),$$

kao i strukturu algebre (R se preslikava na $T^0(E) = R$). $T(E)$ zovemo **tenzorska algebra** od E, nad R. Općenito nije komutativna. Ako su $x, y \in T(E)$ operaciju množenja u $T(E)$ označavat ćemo $x \otimes y$.

Neka je $f : E \to F$ linearno preslikavanje. Tada f inducira linearno preslikavanje

$$T^r(f) : T^r(E) \to T^r(F)$$

za svaki $r \geqslant 0$ i na ovaj način inducira preslikavanje koje ćemo označiti sa $T(f)$ na $T(E)$. Jasno je da je $T(f)$ jedinstveno linearno preslikavanje takvo da za $x_1, \ldots, x_r \in E$ imamo

$$T(f)(x_1 \otimes \cdots \otimes x_r) = f(x_1) \otimes \cdots \otimes f(x_r).$$

Doista, elementi od $T^1(E) = E$ su generatori algebri od $T(E)$ nad R. Vidimo da je $T(f)$ homomorfizam algebri.

Kada je E slobodan i konačnodimenzionalan nad R, možemo odrediti strukturu od $T(E)$ potpuno, koristeći Propoziciju 2.3.3. Neka je P algebra nad R. Kažemo da je P **nekomutativna algebra polinoma** ako postoje elementi $t_1, \ldots, t_n \in P$ takvi da elementi

$$M_{(i)}(t) = t_{i_1} \cdots t_{i_s}$$

sa $1 \leqslant i_\nu \leqslant n$ čine bazu od P nad R. Možemo zvati ove elemente ne-komutativni monomi u (t). Kada je $r = 0$, odgovarajući monom je jedinični element iz P. Vidimo da $t_1, \ldots, t_n$ generiraju P kao algebru nad R i da je P u stvari graduirana algebra, gdje se P_r sastoji od linearnih kombinacija monoma $t_{i_1}, \ldots, t_{i_r}$ s koeficijentima u R. Prirodno je reći da su $t_1, \ldots, t_n$ **nezavisne ne-komutativne varijable** nad R.

Propozicija 2.7.1. *Neka je E slobodan dimenzije n nad R. Tada je T(E) izomorfan ne-komutativnoj algebri polinoma od n varijabli nad R. Drugim riječima, ako je* $\{v_1, \ldots, v_n\}$ *baza od E nad R, tada elementi*

$$M_{(i)}(v) = v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_\nu}, 1 \leqq i_\nu \leqq n$$

čine bazu od $T^r(E)$ *i svaki element od* $T(E)$ *ima jedinstveni zapis kao konačna suma*

$$\sum_{(i)} a_{(i)} M_{(i)}(v), a_{(i)} \in R$$

gdje su skoro svi $a_{(i)}$ *jednaki 0.*

Dokaz. Slijedi direktno iz Propozicije 2.3.3. □

Tenzorski produkt linearnih preslikavanja sada ćemo interpretirati u kontekstu tenzorske algebre.

Radi jednostavnosti, modul endomorfizama $End_R(E)$ ćemo označiti sa $L(E)$ do kraja ovog odjeljka.

Formiramo direktnu sumu

$$(LT)(E) = \oplus_{r=0}^{\infty} L(T^r(E)),$$

koju također, zbog jednostavnosti, ćemo označavati sa $LT(E)$. (Naravno, $LT(E)$ nije jednaka $End_R(T(E))$.) Neka je $f \in L(T^r(E)), g \in L(T^s(E)), h \in L(T^m(E))$. Definiramo produkt $fg \in L(T^{r+s}(E))$ kao $T(f, g)$, drugim riječima da bude jedinstveno linearno preslikavanje

$$x \otimes y \mapsto f(x) \otimes g(y), x \in T^r(E) \text{ i } y \in T^s(E).$$

Iz asocijativnosti tenzorskog produkta dobivamo asocijativnost $(fg)h = f(gh)$ i također vidimo da je naš produkt bilinearan. Stoga $LT(E)$ je R-algebra. Imamo homomorfizam algebri

$$T(L(E)) \to LT(E)$$

zadan za svaki r linearnim preslikavanjem

$$f_1 \otimes \cdot \otimes f_r \mapsto T(f_1, \ldots, f_r) = f_1 \cdots f_r.$$

Tenzorski produkt na lijevoj strani je uzet u

$$L(E) \otimes \cdots \otimes L(E).$$

Također primjećujemo da homomorfizam općenito nije surjektivan, niti injektivan. Kada je E slobodan konačnodimenzionalan nad R, homomorfizam je i surjektivan i injektivan i prema tome imamo jasnu sliku o $LT(E)$ kao ne-komutativne algebre polinoma, generirane sa $L(E)$. Naime, iz Propozicije 2.3.5, dobivamo:

Propozicija 2.7.2. *Neka je E slobodan, konačnodimenzionalan nad R. Tada imamo izomorfizam algebri*

$$T(L(E)) = T(End_R(E)) \to LT(E) = \oplus_{r=0}^{\infty} End_R(T^r(E))$$

dan sa

$$f \otimes g \mapsto T(f, g).$$

Dokaz. Po Propoziciji 2.3.5 imamo linearni izomorfizam u svakoj dimenziji i jasno je da preslikavanje čuva množenje. □

Posebno, vidimo da je $LT(E)$ nekomutativna algebra polinoma.

2.8 Simetrični produkt

Neka $\mathfrak{S}_n$ označava n-simetričnu grupu. Za r-multilinearno preslikavanje

$$f : E^{(r)} \to F$$

kažemo da je **simetrična** ako je $f(x_1, \ldots, x_r) = f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(r)})$ za sve $\sigma \in \mathfrak{S}_r$.

Neka je b_r podmodul od $T^r(E)$ generiran sa svim elementima tipa

$$x_1 \otimes \cdots \otimes x_r - x_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(r)}$$

za sve $x_i \in E$ i $\sigma \in \mathfrak{S}_r$. Definiramo kvocijentni modul

$$S^r(E) = T^r(E)/b_r,$$

i neka je

$$S(E) = \oplus_{r=0}^{\infty} S^r(E)$$

direktna suma. Odmah je očito da je direktna suma

$$b = \oplus_{r=0}^{\infty} b_r$$

ideal u $T(E)$ i stoga je $S(E)$ graduirana R-algebra koju zovemo **simetrična algebra** od E. Osim toga, kanonsko preslikavanje

$$E^{(r)} \to S^r(E)$$

dobiveno kompozicijom preslikavanja

$$E^{(r)} \to T^r(E) \to T^r(E)/b_r = S^r(E)$$

je r-multilinearno simetrično preslikavanje i ima sljedeće svojstvo: Za svako simetrično multilinearno preslikavanje $f : E^{(r)} \longrightarrow F$ postoji jedinstveno linearno preslikavanje $f_* : S^r(E) \longrightarrow F$ takvo da slijedeći dijagram komutira:

$$\begin{tikzcd} E^{(r)} \arrow[d, "f"'] \arrow[dr] & \\ F & S^r \arrow[l, "f_*"] \end{tikzcd}$$

Sliku od $(x_1, \ldots, x_r)$ pod kanonskim preslikavanjem

$$E^{(r)} \to S^r(E)$$

ćemo označavati sa $x_1 \cdots x_r$.

Propozicija 2.8.1. *Neka je E slobodan modul dimenzije n nad R. Neka je $\{v_1, \dots, v_n\}$ baza od E nad R. Elementi baze, gledani kao elementi od $S^{-1}(E)$ u $S(E)$, su algebarski nezavisni nad R i $S(E)$ je stoga izomorfno algebri polinoma u n varijabli nad R.*

Dokaz. Neka su $t_1, \dots, t_n$ algebarski neovisne varijable nad R i označimo pripadnu polinomijalnu algebru $R[t_1, \dots, t_n]$. Neka je P_r R-modul homogenih polinoma stupnja r. Definiramo preslikavanje $E^{(r)} \to P$, na sljedeći način. Ako su $w_1, \dots, w_r$ elementi od E koji mogu biti napisani kao

$$w_i = \sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} v_\nu, i = 1, \dots, r.$$

tada je naše preslikavanje dano sa

$$(w_1, \dots, w_r) \mapsto (a_{11}t_1 + \cdots + a_{1n}t_n) \cdots (a_{r1}t_1 + \cdots + a_{rn}t_n).$$

Očito je da je ovo preslikavanje multilinearno i simetrično. Stoga se faktorizira do linearnog preslikavanja sa $S^r(E)$ u P_r:

$$\begin{tikzcd}
E^{(r)} \arrow[r] \arrow[d] & S^r(E) \arrow[dl] \\
P_r &
\end{tikzcd}$$

Iz komutativnosti dijagrama jasno je da element $v_{i_1} \cdots v_{i_s}$ iz $S^r(E)$ preslikava u $t_{i_1} \cdots t_{i_s}$ iz P_r za svaku r-torku $(i) = (i_1, \dots, i_r)$. Kako su monomi $M_{(i)}(t)$ stupnja r linearno nezavisni nad R, slijedi da su monomi $M_{(i)}(v)$ u $S^r(E)$ također linearno neovisni nad R i da naše preslikavanje $S^r(E) \to P_r$ je izomorfizam. Vidi se da množenje u $S(E)$ odgovara množenju polinoma u $R[t]$ i da preslikavanje od $S(E)$ u polinomijalnu algebru opisano kao gore za svaku komponentu $S^r(E)$ inducira izomorfizam algebri sa $S(E)$ na $R[t]$. □

Propozicija 2.8.2. *Neka je $E = E' \oplus E''$ direktna suma konačnodimenzionalnih slobodnih modula. Tada postoji prirodni izomorfizam*

$$S^n(E' \oplus E'') \approx \oplus_{p+q=n} S^p E' \otimes S^q E''.$$

Taj izomorfizam je n-ti dio izomorfizma graduiranih algebri

$$S(E' \oplus E'') \approx S E' \otimes S E''.$$

Bibliografija

[1] S. Lang, *Algebra*, Springer-Verlag, 2002.

[2] B. Širola, *Algebarske strukture*, https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/alg/predavanja/ASpred.pdf

Sažetak

U ovom radu, glavni cilj nam je proučiti pojam tenzorskog produkta modula nad komutativnim prstenom. Rad se sastoji od dva poglavlja. U prvom poglavlju upoznajemo osnovne algebarske strukture koje su nam bile potrebne u daljnjim razmatranjima. Upoznajemo grupe, prstene i ideale, te nešto više pažnje posvećujemo modulima koji su nam bili vrlo bitni u drugom dijelu ovog rada. Također definiramo preslikavanja između navedenih algebarskih struktura. U drugom poglavlju su nam bila važna multilinearna preslikavanja modula da bi mogli definirati pojam tenzorskog produkta. U drugom se poglavlju, dakle, prvo upoznajemo s multilinearnim preslikavanjima, a zatim sa tenzorskim produktom. Osim nekih osnovnih svojstava tenzorskog produkta definirali smo i ravne module i upoznali neka njihova svojstva. Pokazali smo i kako se osnovni prsten može proširiti. Pokazali smo i kako konstruirati tenzorski produkt algebri. Na kraju smo se upoznali sa još dva bitna pojma, tenzorskom algebrom i simetričnom algebrom.

Summary

The main goal of this diploma thesis is to study the concept of tensor product of modules over commutative ring. The thesis consists of two major parts. The first part explains the basic algebraic structures that will be required for further considerations. We describe groups, rings and ideals, and some attention is paid to the modules that have been very important in the second part of this work. We will define maps between the algebraic structures above as well. In the second part we will be focused on a multilinear maps to be able to define the notion of tensor product. In addition to some basic properties of tensor product, we also define flat modules and study some of their properties. We have shown how the basic ring can be extended. We have also constructed the tensor product of algebras. And finally, we introduced two very important notions, tensor algebra and symmetric algebra.

Životopis

Rođena sam u Bjelovaru, 24. listopada 1990. godine. Pohađala sam *IV.* osnovnu školu, a zatim upisala Gimnaziju Bjelovar, opći smjer. Pohađanje dodatne nastave iz matematike i matematička natjecanja pomoglo mi je pri odabiru smjera kojim želim nastaviti. Tako sam, po završetku srednjoškolskog obrazovanja, 2009. godine upisala Matematički odsjek Prirodoslovno - matematičkog fakulteta u Zagrebu. Preddiplomski studij sam završila 2013. godine, te sam iste godine upisala i diplomski studij Primijenjene matematike.