Sveučilište u Zagrebu

Prirodoslovno-matematički fakultet
Matematički odsjek

Tonio Škaro

Težišnice trokuta i težište

Diplomski rad

Zagreb, rujan, 2015

Sveučilište u Zagrebu

Prirodoslovno-matematički fakultet
Matematički odsjek

Tonio Škaro

Težišnice trokuta i težište

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Sanja Varošanec

Zagreb, rujan, 2015

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ______________________________ pred nastavničkim povjerenstvom u sastavu:

1. ____ , predsjednik

2. ____ , član

3. ____ , član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ______________________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____

2. ____

3. ____

Sadržaj

Uvod

U ovome diplomskom radu posebnu pozornost posvećujemo težišnicama i težištu trokuta. Prilikom promatranja težišnica vidjet ćemo kako imaju neka specifična svojstva zbog kojih su i dobila naziv težišnice kao što su raspolavljanje nasuprotne stranice ili dijeljenje na dva trokuta jednakih površina. No, na svakoj od tri težišnice, koliko ih se nalazi u trokutu, postoji jedna posebna točka koju nazivamo težištem trokuta. Ta točka, jednako kao i težišnice na kojima se nalazi, je privukla pažnju geometara zbog svoje posebnosti i svojoj ulozi koju ima u trokutu. Kao što i težišnice imaju svoje posebnosti, tako i točka težišta dijeli svaku težišnicu u omjeru 2:1, kolinearna je s nekim karakterističnim točkama trokuta itd. Zanimljivim svojstvima težišnica i težišta trokuta ćemo pridodati i konstrukcije trokuta u kojima se među zadanim veličinama nalazi bar jedna težišnica.

Poglavlje I

Trokut, težišnice i težište

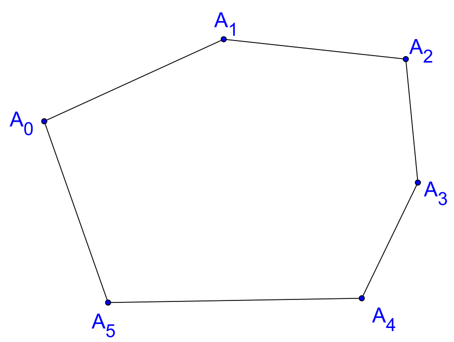
1.1 Trokut

U ovom odlomku navodimo dvije definicije trokuta. Pri tome pratimo način definiranja iznesen u knjizi [4, str.230-233]. Kako bismo definirali trokut kao poligon potrebno nam je precizirati pojam poligona. Laički rečeno to je dio ravnine omeđen zatvorenom izlomljenom linijom.

Neka su $A_0, A_1, ..., A_n$ različite točke ravnine. Zatvorena izlomljena linija je unija dužina

$$\overline{A_0A_1} \cup \overline{A_1A_2} \cup \ldots \cup \overline{A_{n-1}A_n} \cup \overline{A_nA_0}.$$

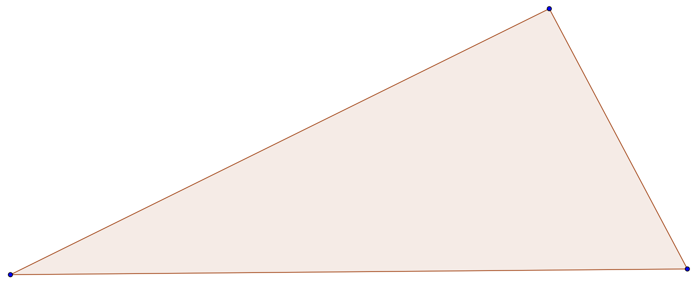
Dužine $\overline{A_0A_1}, \overline{A_1A_2} \ldots \overline{A_nA_0}$ nazivaju se stranice, a $A_0, A_1, ..., A_n$ vrhovi linije. Ukoliko svaka točka linije leži ili na samo jednoj stranici ili samo na dvjema stranicama kojima je ta točka jedan kraj, tada govorimo o jednostavnoj zatvorenoj izlomljenoj liniji ili o jednostavnom jednodimenzionalnom poligonu.



Slika 1.1:Poligon

Jednostavni poligoni imaju važno svojstvo iskazano u Jordanovom teoremu. Prema Jordanovom teoremu vrijedi da svaki jednostavni jednodimenzionalni poligon J u ravnini E rastavlja ravninu na točno dva područja koja zovemo unutrašnjost i vanjština poligona J. Jednostavni dvodimenzionalni poligon je unija jednostavnog jednodimenzionalnog poligona i njegove unutrašnjosti. Jednostavni jednodimenzionalni poligon se tada zove rub ili obod ili kontura danog dvodimenzionalnog poligona.

Definicija 1.1.1. *Jednostavni dvodimenzionalni poligon s tri vrha koji su nekolinearni zovemo* **trokut***.*

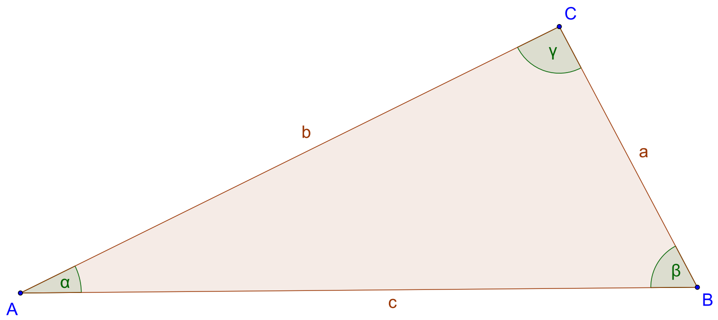


Slika 1.2.

Ukoliko želimo izbjeći definiranje trokuta kao specijalnog dvodimenzionalnog poligona, tada koristimo sljedeću definiciju.

Definicija 1.1.2. *Neka su A, B i C tri nekolinearne točke. Neka je $\triangle$ skup od te tri točke, tj. $\triangle = \{A, B, C\}$. Konveksnu ljusku tog skupa nazivamo* **trokut***. Točke A, B, C su vrhovi trokuta, a dužine $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{AC}$* **stranice trokuta***.*

Trokut s vrhovima A, B, C označavamo s $\triangle ABC$. Duljine stranica trokuta označavat ćemo s $a = |BC|, b = |AC|, c = |AB|$, a tim stranicama nasuprotne kuteve s $\alpha = \angle BAC, \beta = \angle CBA$ i $\gamma = \angle ACB$.



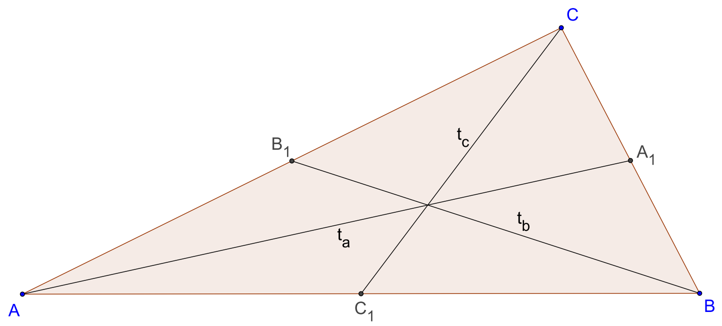
Slika 1.3.

To je definicija koja rabi samo osnovne geometrijske pojmove (točke, kolinearnost, tj. pripadanje točke pravcu) te algebarski pojam kovneksne ljuske. Stoga se ta definicija koristi kao prva definicija trokuta nakon što se aksiomatski izgradi geometrija, [4, str. 178-179].

1.2 Težišnice i težište

Definicija 1.2.1. *Dužina koja spaja vrh danog trokuta $\triangle ABC$ i polovište njemu nasuprotne stranice zovemo* **težišnicom** *tog trokuta.*

U trokutu $\triangle ABC$ postoje tri težišnice $\overline{AA_1}, \overline{BB_1}, \overline{CC_1}$, pri čemu su točke A_1, B_1, C_1 redom polovišta stanica $\overline{BC}, \overline{AC}, \overline{AB}$. Duljine težišnica označavat ćemo s $t_a = |AA_1|, t_b = |BB_1|, t_c = |CC_1|$.



Slika 1.4.

Teorem 1.2.1. *Težišnice trokuta $\triangle ABC$ sijeku se u jednoj točki T koju zovemo* **težištem** *trokuta. Nadalje, težište T dijeli svaku težišnicu u omjeru $2:1$ računajući od vrha tj. $|AT| : |TA_1| = |BT| : |TB_1| = |CT| : |TC_1| = 2 : 1$, pri čemu su A_1, B_1, C_1 redom polovišta stranica $\overline{BC}, \overline{AC}, \overline{AB}$.*

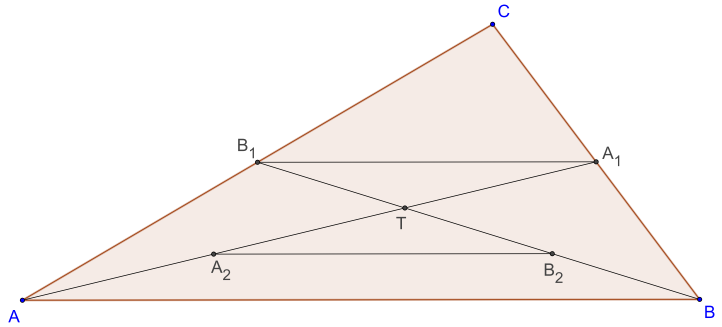
Ovaj je teorem dokaziv na nekoliko načina koje ćemo prikazati u sljedećim odlomcima teksta. Prije dokazivanja teorema o težištu navedimo (bez dokaza) neka svojstva trokuta i četverokuta koja ćemo koristiti.

- Teorem o srednjici trokuta: Srednjica trokuta je paralelna jednoj stranici i jednaka je polovini duljine te stranice.
- Obrat teorema o srednjici trokuta: Ako je $A_1B_1 \parallel AB$ i A_1 polovište od $\overline{BC}$, tada je $\overline{A_1B_1}$ srednjica trokuta.
- Četverokut je paralelogram ako i samo ako mu se dijagonale raspolavljaju.
- Cevin teorem: Neka su D, E i F redom točke na stranicama $\overline{BC}, \overline{AC}, \overline{AB}$ trokuta $\triangle ABC$. Pravci AD, BE i CF prolaze jednom točkom ako i samo ako vrijedi

$$\frac{|AF|}{|FB|} \cdot \frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} = 1.$$

1.2.1 Dokaz I

Neka se $\overline{AA_1}$ i $\overline{BB_1}$ sijeku u točki T. Označimo sa A_2 i B_2 polovišta dužina $\overline{AT}$ i $\overline{BT}$.



Slika 1.5.

Sada prema teoremu o srednjicama trokuta slijedi:

$$|A_2B_2| = \frac{1}{2}|AB| = |A_1B_2|$$

$$\left(\overline{A_1B_1} \parallel \overline{AB} \wedge \overline{A_2B_2} \parallel \overline{AB}\right) \Rightarrow \left(\overline{A_1B_1} \parallel \overline{A_2B_2}\right).$$

Prema tome slijedi da je četverokut $A_1B_1B_2A_2$ paralelogram i vrijedi:

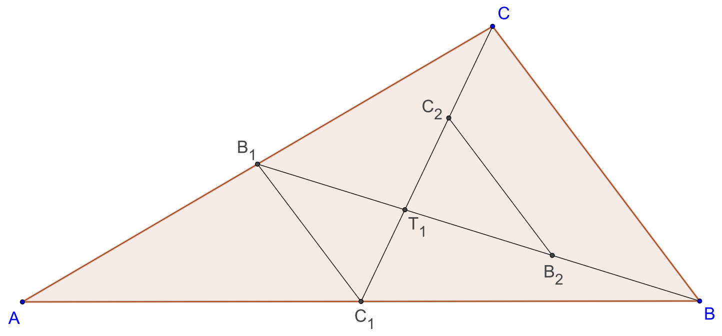
$$|A_2T| = |TA_1|, |B_1T| = |TB_2|$$

jer se dijagonale paralelograma raspolavljaju.
Dakle, točke A_2 i B_2 dijele redom dužine $\overline{AT}$ i $\overline{BT}$ na dva jednaka dijela. Točka T je sjecište dijagonala u paralelogramu i ona dijeli dužine $\overline{A_1A_2}$ i $\overline{B_1B_2}$ na dva jednaka dijela. Prema tome točka T dijeli dužine $\overline{AA_1}$ i $\overline{BB_1}$ u omjeru $2:1$ računajući od točaka A i B, tj.

$$|AT| : |TA_1| = 2:1 = |BT| : |TB_1|.$$

Analogno dokazujemo za sjecište T_1 težišnica $\overline{BB_1}$ i $\overline{CC_1}$, tj. točka T_1 ima svojstvo $|BT_1| : |T_1B_1| = |CT_1| : |T_1C_1| = 2:1$.
Kako na dužini $\overline{BB_1}$ postoji jedinstvena točka koja je dijeli u omjeru $2:1$ od vrha, dobivamo da se točke T i T_1 poklapaju, tj. $T = T_1$.

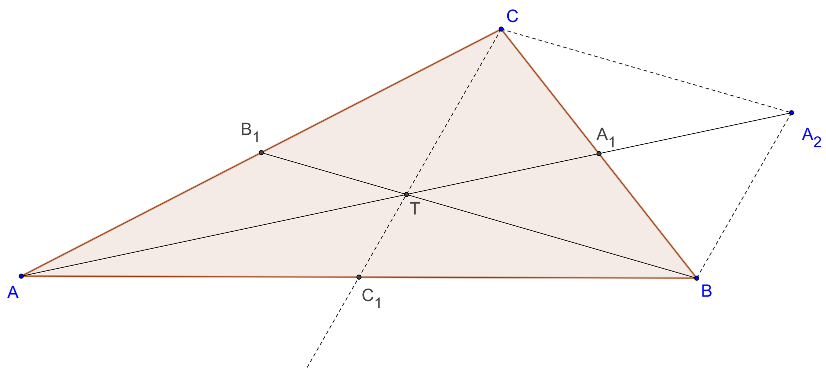
$\square$



Slika 1.6.

1.2.2 Dokaz II

Neka su u trokutu $\triangle ABC$ točke A_1 i B_1 polovišta stranica $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$. Težišnice $\overline{AA_1}$ i $\overline{BB_1}$ se sijeku u nekoj točki T.
Dovoljno nam je pokazati da je C_1 polovište stranice $\overline{AB}$, gdje je $\{C_1\} = CT \cap AB$, jer će nam to značiti da je dužina $\overline{CC_1}$ te očito prolazi točkom T u kojoj se već sijeku preostale dvije težišnice.
Na pravcu AA_1 ćemo konstruirati točku A_2 takvu da vrijedi $|TA_1| = |A_1A_2|$.



Slika 1.7.

Primjećujemo da je četverokut BA_2CT paralelogram jer se dužine $\overline{TA_2}$ i $\overline{CB}$ raspolavljaju.
Nadalje, točka B_1 je polovište stranice $\overline{AC}$ i $TB_1 \parallel A_2C$, iz čega slijedi da je $\overline{TB_1}$ srednjica trokuta $\triangle AA_2C$.
Sada imamo

$$|AT| = |TA_2| = 2\,|TA_1|\,,$$

dakle

$$|AT| : |TA_1| = 2 : 1.$$

Također vrijedi iz paralelograma BA_2CT da je $CT \parallel A_2B$, a to znači da je $TC_1 \parallel A_2B$. Iz činjenica da je točka T polovište dužine $\overline{AA_2}$ i da su dužine $\overline{TC_1}$ i $\overline{A_2B}$ paralelne slijedi da je $\overline{TC_1}$ srednjica trokuta $\triangle ABA_2$, pa je prema tome točka C_1 polovište stranice $\overline{AB}$. Sada slijedi

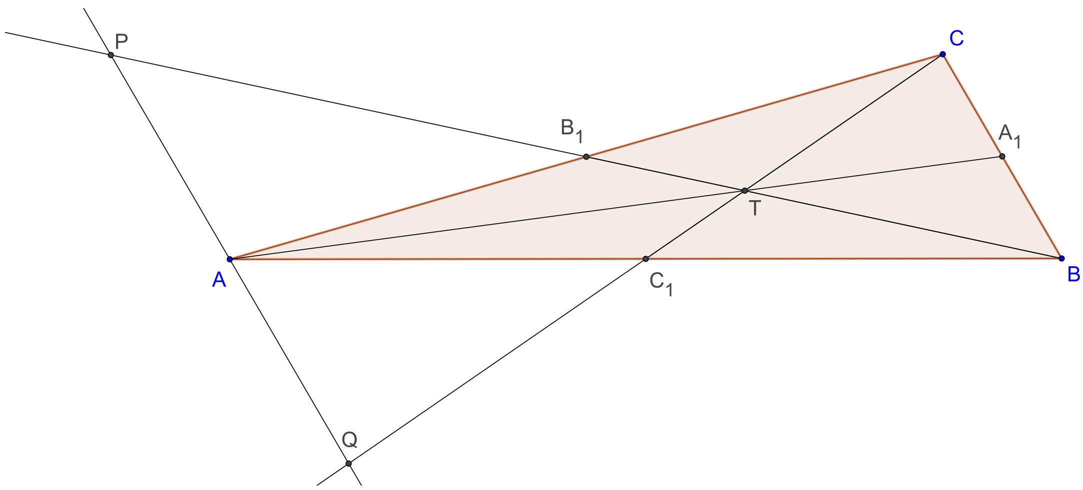
$$|TC_1| = \frac{1}{2}|A_2B| = \frac{1}{2}|CT|.$$

Drugim riječima, vrijedi $|CT| : |TC_1| = 2 : 1$.

$\square$

1.2.3 Dokaz pomoću sličnosti trokuta

Neka su B_1 i C_1 redom polovišta stranica $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$ trokuta $\triangle ABC$. Vrhom A konstruiramo pravac koji je paralelan sa stranicom $\overline{BC}$. Pravci BB_1 i CC_1 na kojima leže težišnice trokuta sijeku paralelu u točkama P i Q. Osim toga, točku sjecišta težišnica $\overline{BB_1}$ i $\overline{CC_1}$ označimo s T. Presjek pravca AT i BC označimo s A_1. Dokazat ćemo da je A_1 polovište stranice $\overline{BC}$, tj. da je i $\overline{AA_1}$ težišnica, a to će onda značiti da sve tri težišnice prolaze kroz T.



Slika 1.8.

Primjetimo da je $\angle PB_1A = \angle BB_1C$ (vršni kutovi) i $\angle APB_1 = \angle CBB_1$ (protukuti), prema K-K teoremu o sličnosti trokuta vrijedi:

$$\triangle AB_1P \sim \triangle CB_1B.$$

Također $\angle AC_1Q = \angle BC_1C$ (vršni kutovi) i $\angle C_1QA = \angle C_1CB$ (protukuti), prema K-K teoremu o sličnosti trokuta vrijedi:

$$\triangle QC_1A \sim \triangle CC_1B.$$

Prema tome vrijedi:

$$\frac{|PA|}{|BC|} = \frac{|B_1A|}{|B_1C|} = 1, \frac{|AQ|}{|BC|} = \frac{|C_1Q|}{|C_1C|} = 1.$$

Iz ovih jednakosti očitavamo da je točka A polovište dužine PQ.
Sada iz sličnosti trokuta $\triangle PQT$ i $\triangle BCT$ vrijedi:

$$\frac{|AT|}{|TA_1|} = \frac{|PQ|}{|BC|} = \frac{|PA|}{|BC|} + \frac{|AQ|}{|BC|} = 1 + 1 = 2,$$

tj.

$$|AT| : |TA_1| = 2 : 1.$$

To je ujedno i koeficijent sličnosti trokuta $\triangle PQT$ i $\triangle BCT$.
Iz toga slijedi da je

$$\frac{|PT|}{|BT|} = \frac{|QT|}{|CT|} = \frac{2}{1}.$$

Primjetimo da su i trokuti $\triangle PAT$ i $\triangle BA_1T$ slični jer je $\angle ATP = \angle A_1TB$ (vršni kutovi) i $\angle APT = \angle TBA_1$ (protukuti), a iz prethodnih omjera stranica imamo da je $\frac{|PT|}{|BT|} = \frac{2}{1}$. Od tuda zaključujemo da je koeficijent sličnosti ta dva trokuta također $2 : 1$, a posebno $|PA| = 2|A_1B|$.
Na analogan način dobivamo da je $|QA| = 2|CA_1|$. Budući da je A polovište dužine $\overline{PQ}$ vrijedi ovaj niz jednakosti

$$2|A_1B| = |PA| = |QA| = 2|CA_1|,$$

tj.

$$|A_1B| = |CA_1|.$$

Drugim riječima A_1 je polovište dužine $\overline{BC}$ što smo i trebali dokazati. Ujedno smo pokazali da T dijeli $\overline{AA_1}$ u omjeru $2 : 1$. Za djelišne omjere ostalih težišnica provode se dokazi na analogni način.

□

1.2.4 Dokaz metodom vektorske algebre

Neka su A_1, B_1 i C_1 redom polovišta stranica $\overline{BC}, \overline{AC}$ i $\overline{AB}$ trokuta $\triangle ABC$ i točka O bilo koja točka ravnine. Neka su $\vec{r_A}$, $\vec{r_B}$ i $\vec{r_C}$ radijvektori vrhova. Uzmimo na vektoru $\overrightarrow{AA_1}$ točku T_A koja ga dijeli u omjeru $\lambda = -2$. Tada je radijvektor točke T_A jednak

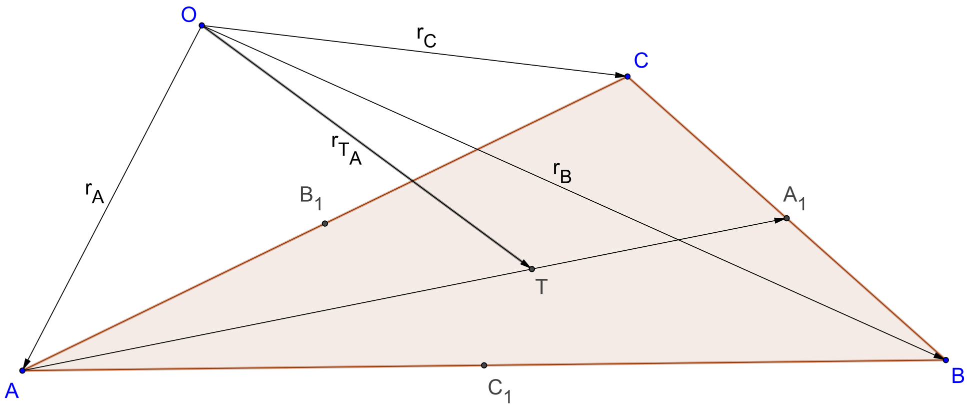
$$\vec{r_{T_A}} = \frac{1}{3}\left(\vec{r_A} + 2\vec{r_{A_1}}\right).$$

Budući da je A_1 polovište dužine $\overline{BC}$, radijvektor točke A_1 glasi

$$\vec{r_{A_1}} = \frac{1}{2}\left(\vec{r_B} + \vec{r_C}\right).$$

Uvrstimo li to u formulu za radijvektor točke T dobivamo

$$\vec{r_{T_A}} = \frac{1}{3}\left(\vec{r_A} + \vec{r_B} + \vec{r_C}\right).$$



Slika 1.9.

Odaberemo li na vektoru $\vec{BB_1}$ točku T_B koja ga dijeli u omjeru $\lambda = -2$, analognim postupkom dobivamo da je radijvektor točke T_B jednak

$$r_{\vec{T_B}} = \frac{1}{3}\left(r_{\vec{A}} + r_{\vec{B}} + r_{\vec{C}}\right).$$

Također, ako na vektoru $\vec{CC_1}$ odaberemo točku T_C koja ga dijeli u omjeru $\lambda = -2$, dobivamo da je radijvektor točke T_C također jednak

$$r_{\vec{T_C}} = \frac{1}{3}\left(r_{\vec{A}} + r_{\vec{B}} + r_{\vec{C}}\right).$$

Dakle, točke T_A, T_B i T_C imaju jednak radijvektor, a to znači da su te tri točke ustvari ista točka koju označimo sa T. Budući da se T nalazi na sve tri dužine $\overline{AA_1}, \overline{BB_1}$ i $\overline{CC_1}$ slijedi da se te tri dužine, a to su težišnice trokuta, sijeku u jednoj točki T.

$\square$

1.2.5 Dokaz koordinatnom metodom

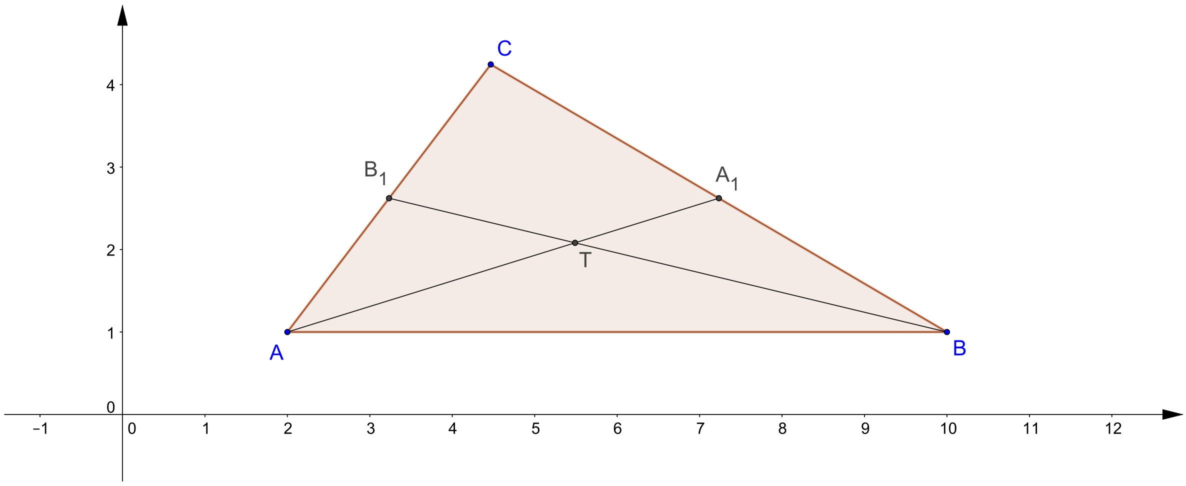
Neka je zadan trokut $\triangle ABC$ kojemu su A_1, B_1 i C_1 redom polovišta stranica $\overline{BC}, \overline{AC}$ i $\overline{AB}$. Postavimo taj trokut u koordinatni sustav tako da su koordinate vrhova i polovišta jednaka:

$$A\left(x_A, y_A\right), B\left(x_B, y_B\right), C\left(x_C, y_C\right).$$

No, tada su koordinate polovišta A_1, B_1 i C_1 jednaka:

$$A_1\left(\frac{x_B + x_C}{2}, \frac{y_B + y_C}{2}\right), B_1\left(\frac{x_A + x_C}{2}, \frac{y_A + y_C}{2}\right), C_1\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right).$$

Dovoljno je pokazati da se težišnice $\overline{AA_1}$ i $\overline{BB_1}$ te $\overline{BB_1}$ i $\overline{CC_1}$ sijeku u istoj točki T. Neka se težišnice $\overline{AA_1}$ i $\overline{BB_1}$ sijeku u točki T. Koordinate točke T dobivamo presjekom pravaca AA_1 i BB_1. Jednadžbe pravaca AA_1, BB_1 i koordinate točke T glase:



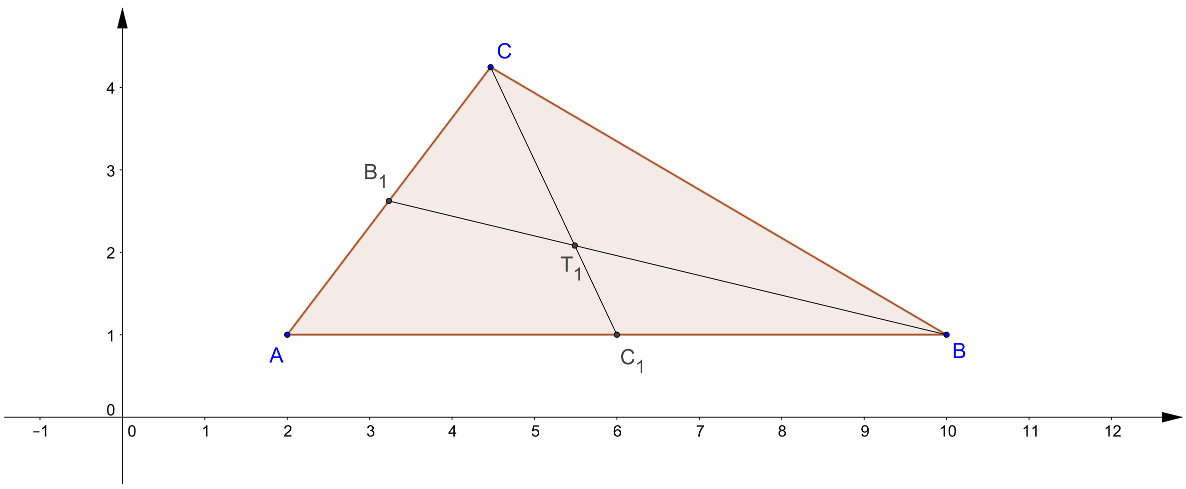
Slika 1.10.

$$AA_1 \ldots y - y_A = \frac{y_A - \frac{y_B + y_C}{2}}{x_A - \frac{x_B + x_C}{2}}(x - x_A)$$

$$BB_1 \ldots y - y_B = \frac{y_B - \frac{y_A + y_C}{2}}{x_B - \frac{x_A + x_C}{2}}(x - x_B)$$

$$T\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right).$$

Neka se težišnice $\overline{BB_1}$ i $\overline{CC_1}$ sijeku u točki T_1. Koordinate točke T_1 dobivamo presjekom pravaca BB_1 i CC_1.



Slika 1.11.

Jednadžbe pravaca BB_1, CC_1 i koordinate točke T_1 glase:

$$BB_1 \ldots y - y_B = \frac{y_B - \frac{y_A + y_C}{2}}{x_B - \frac{x_A + x_C}{2}}(x - x_B)$$

$$CC_1 \ldots y - y_C = \frac{y_C - \frac{y_A+y_B}{2}}{x_C - \frac{x_A+x_B}{2}}(x - x_C)$$

$$T_1\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right).$$

Primjećujemo da točke T i T_1 imaju iste koordinate što znači da su one jednake, tj. $T = T_1$. Dakle, sve težišnice se sijeku u jednoj točki T.
Još nam preostaje pokazati da točka T dijeli svaku težišnicu u omjeru $2 : 1$ od vrha. U tu svrhu izračunajmo duljine $|AT|$ i $|TA_1|$:

$$|AT| = \frac{1}{3}\sqrt{(2x_A - x_B - x_C)^2 + (2y_A - y_B - y_C)^2}$$

$$|TA_1| = \frac{1}{6}\sqrt{(2x_A - x_B - x_C)^2 + (2y_A - y_B - y_C)^2}.$$

Iz čega slijedi da je

$$|AT| : |TA_1| = 2 : 1.$$

Analogno se dokazuje da vrijedi i za preostale dvije težišnice.

□

1.2.6 Dokaz pomoću Cevinog teorema

Neka je zadan trokut $\triangle ABC$ kojemu su A_1, B_1 i C_1 redom polovišta stranica $\overline{BC}, \overline{AC}$ i $\overline{AB}$. Kako su točke A_1, B_1 i C_1 redom polovišta stranica vrijedi

$$|BA_1| = |A_1C|,\ |CB_1| = |B_1A|,\ |AC_1| = |C_1B|.$$

Prema Cevinom teoremu vrijedi:
Ako je umnožak

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1;$$

a to očito jeste, tada se pravci AA_1, BB_1 i CC_1 sijeku u jednoj točki T (težište trokuta). Još moramo dokazati da točka T dijeli svaku težišnicu u omjeru $2 : 1$ od vrha, ali taj dokaz smo već pokazali u poglavlju **Dokaz I** pa nećemo opet provoditi isti dokaz.

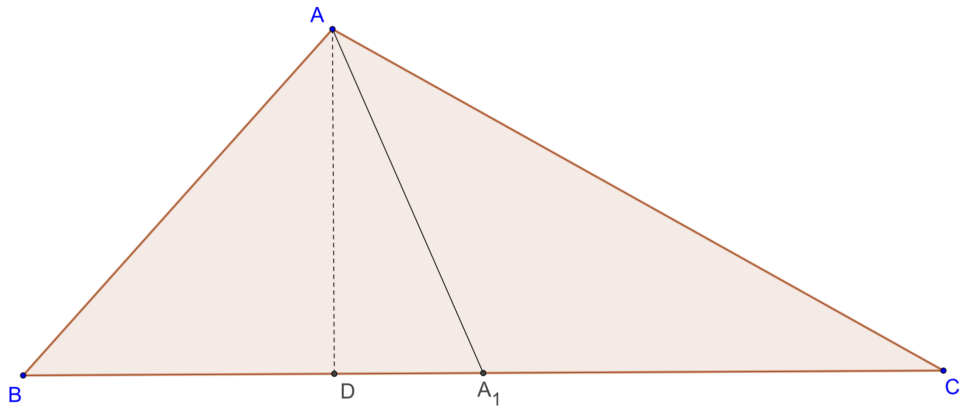
□

Poglavlje II

Svojstva težišta i težišnica trokuta

2.1 Svojstva težišnica

Teorem 2.1.1. *Svaka težišnica dijeli trokut na dva trokuta jednakih površina.*



Slika 2.1.

Dokaz. Neka je točka D nožište okomice iz točke A na pravac BC. Visina $\overline{AD}$ je zajednička trokutima $\triangle ABA_1$ i $\triangle AA_1C$. Prema tome, površine tih trokuta iznose:

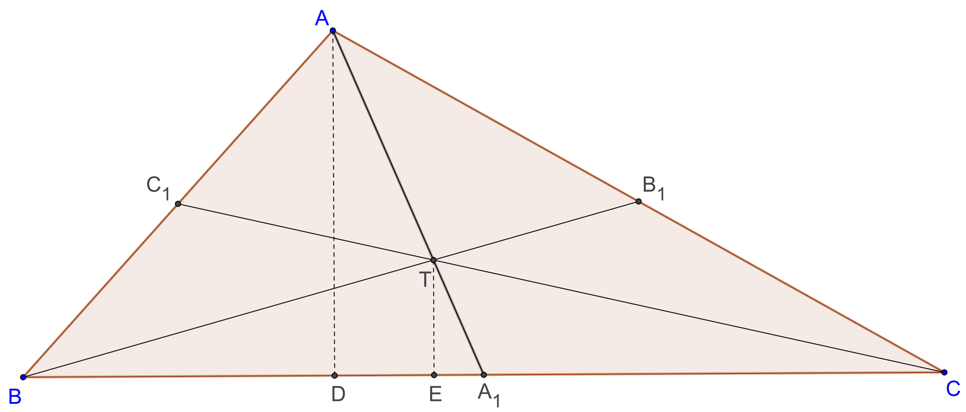
$$P(\triangle ABA_1) = \frac{|BA_1| \cdot |AD|}{2}$$

$$P(\triangle AA_1C) = \frac{|A_1C| \cdot |AD|}{2}.$$

Znamo da točka A_1 dijeli stranicu $\overline{BC}$ na dva jednaka dijela, dakle $|BA_1| = |A_1C|$. Odavde slijedi da je

$$P(\triangle ABA_1) = P(\triangle AA_1C).$$

Analogno se pokaže za preostale težišnice. $\square$



Slika 2.2.

Teorem 2.1.2. *Težišnice trokuta dijele trokut na 6 trokuta jednakih površina, tj.*

$$P(\triangle AC_1T) = P(\triangle BTC_1) = P(\triangle BA_1T) = P(\triangle CTA_1) = P(\triangle B_1CT) = P(\triangle ATB_1).$$

Dokaz. Neka je točka D nožište okomice iz točke A na pravac BC, a točka E nožište okomice iz točke T na pravac BC. Istaknimo dva pravokutna trokuta $\triangle ADA_1$ i $\triangle TEA_1$ koji imaju zajednički kut $\angle EA_1T$. Prema K-K teoremu o sličnosti trokuta slijedi

$$\triangle ADA_1 \sim \triangle TEA_1.$$

Koeficijent sličnosti ta dva trokuta jednak je $k = \frac{1}{3}$ jer točka T dijeli dužinu $\overline{AA_1}$ u omjeru $2:1$, tj. $|TA_1| = \frac{1}{3}|AA_1|$ i $|TE| = \frac{1}{3}|AD|$.
Površina tokuta $\triangle BA_1T$ je jednaka

$$\begin{aligned} P(\triangle BA_1T) &= \frac{1}{2}|BA_1| \cdot |TE| \\ P(\triangle BA_1T) &= \frac{1}{2}|BA_1| \cdot \frac{1}{3}|AD| \\ P(\triangle BA_1T) &= \frac{1}{3}P(\triangle BA_1A). \end{aligned}$$

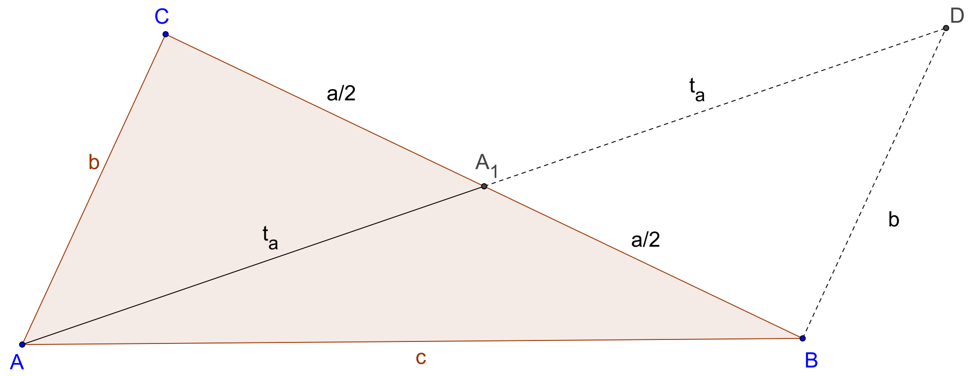
A prema prethodnom teoremu smo dokazali da težišnica dijeli trokut na dva dijela jednakih površina, pa iz toga slijedi

$$P(\triangle BA_1T) = \frac{1}{6}P(\triangle ABC).$$

Analogno se pokaže za površine ostalih trokuta. □

Teorem 2.1.3. *Za težišnice t_a, t_b i t_c tokuta $\triangle ABC$ vrijedi*

$$\frac{b+c-a}{2} < t_a < \frac{b+c}{2},$$
$$\frac{a+c-b}{2} < t_b < \frac{a+c}{2},$$
$$\frac{a+b-c}{2} < t_c < \frac{a+b}{2}.$$



Slika 2.3.

Dokaz. Neka je A_1 polovište stranice $\overline{BC}$. Iz trokuta $\triangle ABA_1$ slijedi $t_a > c - \frac{a}{2}$, a iz trokuta $\triangle AA_1C$ slijedi $t_a > b - \frac{a}{2}$, pa zbrajanjem tih dviju nejednakosti dobivamo

$$\begin{aligned} 2t_a &> b + c - a \\ t_a &> \frac{b + c - a}{2}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Ako na polupravcu AA_1 konstruiramo točku D takvu da je $|A_1D| = t_a$, iz trokuta $\triangle ABD$ slijedi $2t_a < b + c$, tj.

$$t_a < \frac{b + c}{2}. \tag{2.2}$$

Sada iz (2.1) i (2.2) slijedi:

$$\frac{b + c - a}{2} < t_a < \frac{b + c}{2}.$$

Analogno se pokazuje za preostale dvije težišnice. □

Primjetimo da za zbroj svih težišnica vrijedi:

$$\frac{a + b + c}{2} < t_a + t_b + t_c < a + b + c.$$

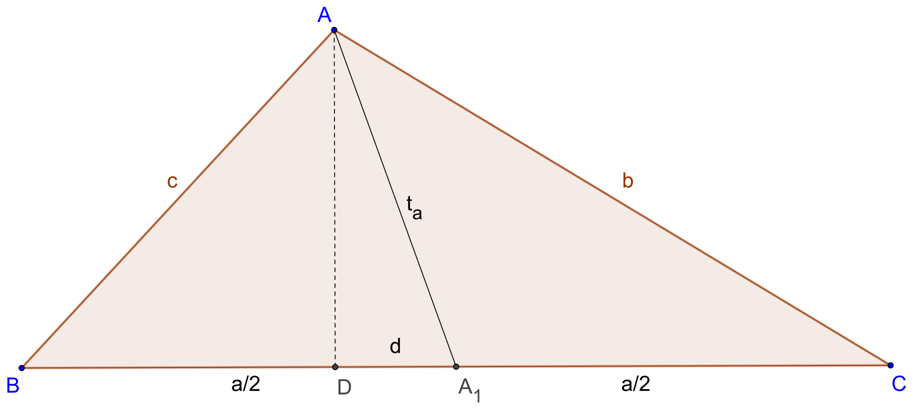
Teorem 2.1.4. *Duljina težišnice $\overline{AA_1}$ dana je s*

$$t_a = |AA_1| = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}.$$

Slično vrijedi i za preostale dvije težišnice

$$t_b = |BB_1| = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2},$$

$$t_c = |CC_1| = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}.$$



Slika 2.4.

Dokaz. Neka je dužina $\overline{AD}$ visina iz točke A na pravac BC. Prema Pitagorinom poučku u pravokutnim trokutima $\triangle ABD$, $\triangle ADC$ i $\triangle ADA_1$ vrijedi:

$$v_a^2 = c^2 - (\frac{a}{2} - d)^2 \tag{2.3}$$

$$v_a^2 = b^2 - (\frac{a}{2} + d)^2 \tag{2.4}$$

$$t_a^2 = v_a^2 + d^2. \tag{2.5}$$

Sada prvo v_a iz jednadžbe (2.3) primjenimo u jednadžbi (2.5), a zatim također iz jednadžbe (2.4) primjenimo u (2.5). Dobivamo dvije jednadžbe

$$t_a^2 = c^2 - (\frac{a}{2} - d)^2 + d^2,$$

$$t_a^2 = b^2 - (\frac{a}{2} + d)^2 + d^2.$$

Iz čega slijedi

$$t_a^2 = c^2 - \frac{a^2}{4} + ad,$$

$$t_a^2 = b^2 - \frac{a^2}{4} - ad.$$

Nakon što zbrojimo ove dvije jednadžbe dobivamo

$$2t_a^2 = b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2}$$

odakle slijedi

$$t_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}.$$

Naravno, analogno dokazujemo za preostale težišnice. □

Propozicija 2.1.1. *Težišnice t_a i t_b su jednake ako i samo ako su jednake stranice a i b trokuta $\triangle ABC$.*

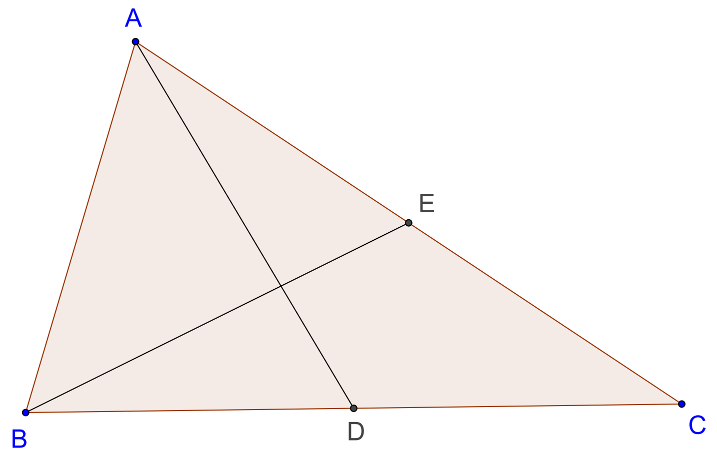
Dokaz. Pretpostavimo da je $t_a = t_b$. Iskoristimo izraze za t_a i t_b:

$$4t_a^2 = 2b^2 - a^2 + 2c^2$$
$$4t_b^2 = 2a^2 - b^2 + 2c^2.$$

Izjednačimo:

$$\begin{aligned} 2b^2 - a^2 + 2c^2 &= 2a^2 - b^2 + 2c^2 \\ b^2 &= a^2 \\ b &= a \end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati.
Dokažimo sada i drugi smjer. Neka je $a = b$. Tada je trokut $\triangle ABC$ jednakokračan pa je $\alpha = \beta$. Neka su D i E polovišta stranica $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$.
Tada je



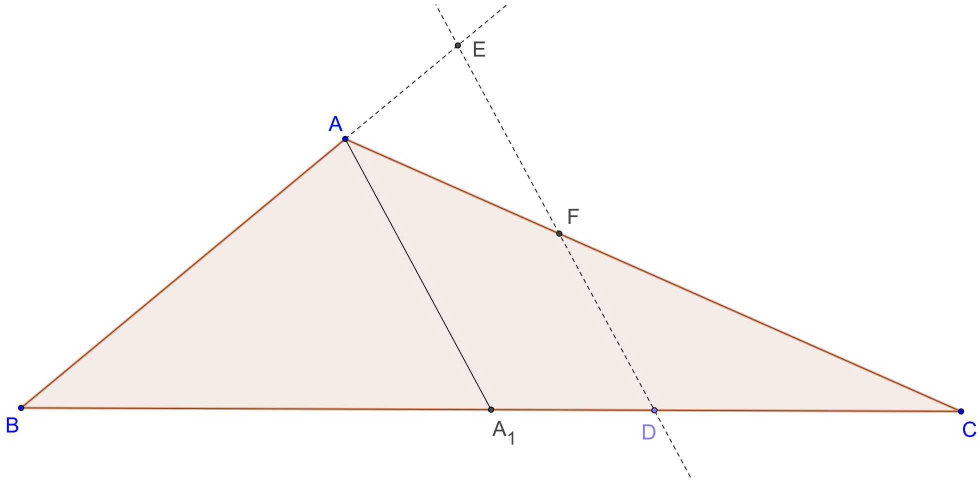
Slika 2.5.

$$|BD| = \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}b = |AE|.$$

Dakle, trokuti $\triangle ABD$ i $\triangle ABE$ su sukladni pa su im stranice $\overline{AD}$ i $\overline{BE}$ sukladne, tj. $t_a = t_b$.

□

Teorem 2.1.5. *([2][str. 17]) Neka je zadan trokut $\triangle ABC$ sa svojom težišnicom $\overline{AA_1}$. Neka je točka D po volji odabrana na stranici $\overline{BC}$ trokuta $\triangle ABC$. Točkom D konstruirajmo paralelu s težišnicom $\overline{AA_1}$, koja siječe pravac AB u točki E, a pravac AC u točki F. Tada zbroj duljina $|DE| + |DF|$ ne ovisi o izboru točke D.*



Slika 2.6.

Dokaz. U trokutima $\triangle BA_1A$ i $\triangle BDE$, te $\triangle CAA_1$ i $\triangle CFD$ prema Talesovom teoremu o proporcionalnosti vrijedi

$$|DE| : |A_1A| = |BD| : |BA_1|,$$

$$|DF| : |A_1A| = |CD| : |CA_1|.$$

Kada zbrojimo ove dvije jednakosti, dobivamo

$$\frac{|DE| + |DF|}{|A_1A|} = \frac{|BD| + |CD|}{|BA_1|}$$

jer vrijedi $|BA_1| = |CA_1|$. Iz toga slijedi

$$|DE| + |DF| = \frac{|BC| \cdot |A_1A|}{|BA_1|}.$$

Kako je $|BC| = 2 \cdot |BA_1|$, slijedi

$$|DE| + |DF| = 2 \cdot |A_1A|.$$

Prema tome, izbor točke D ne utječe na zbroj duljina dužina $\overline{DE}$ i $\overline{DF}$. □

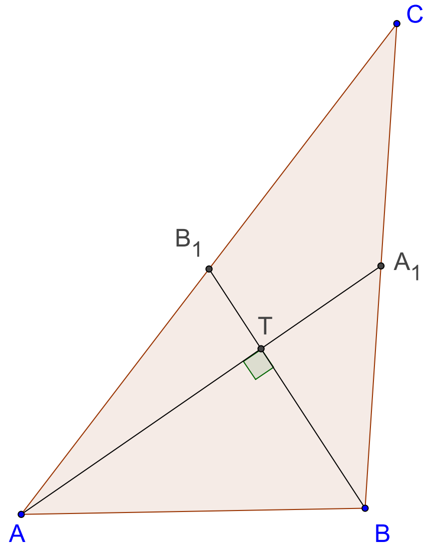
Propozicija 2.1.2. *([1]) Težišnice $\overline{AA_1}$ i $\overline{BB_1}$ trokuta $\triangle ABC$ su međusobno okomite ako i samo ako za duljine stranica vrijedi jednakost*

$$a^2 + b^2 = 5c^2.$$

Slično vrijedi i za preostale parove težišnica, tj.

$$\overline{AA_1} \perp \overline{CC_1} \Leftrightarrow a^2 + c^2 = 5b^2$$

$$\overline{BB_1} \perp \overline{CC_1} \Leftrightarrow b^2 + c^2 = 5a^2.$$



Slika 2.7.

Dokaz. Pretpostavimo prvo da su težišnice $\overline{AA_1}$ i $\overline{BB_1}$ okomite. Tada iz pravokutnih trokuta $\triangle AB_1T$, $\triangle AA_1T$ i $\triangle ABT$ vrijedi

$$\frac{4}{9}t_a^2 + \frac{1}{9}t_b^2 = \frac{1}{4}b^2 \tag{2.6}$$

$$\frac{1}{9}t_a^2 + \frac{4}{9}t_b^2 = \frac{1}{4}a^2 \tag{2.7}$$

$$\frac{4}{9}(t_a^2 + t_b^2) = c^2. \tag{2.8}$$

Kada zbrojimo (2.6) i (2.7), dobivamo

$$\frac{5}{9}(t_a^2 + t_b^2) = \frac{1}{4}(a^2 + b^2)$$

te kada tu jednakost usporedimo s (2.8) dobivamo

$$a^2 + b^2 = 5c^2.$$

Pretpostavimo sada da vrijedi jednakost $a^2 + b^2 = 5c^2$. Nadalje, pretpostavimo da je $\angle ATB_1 > 90°$ (analogno se pokazuje za slučaj
$\angle ATB_1 < 90°$). tada je i $\angle BTA_1 > 90°$, pa iz trokuta $\triangle AB_1T$ i $\triangle AA_1T$ zaključujemo

$$\begin{aligned} \frac{4}{9}t_a^2 + \frac{1}{9}t_b^2 &< \frac{1}{4}b^2 \\ \frac{1}{9}t_a^2 + \frac{4}{9}t_b^2 &< \frac{1}{4}a^2. \end{aligned}$$

Zbrajanjem ove dvije nejednakosti dobiva se

$$\frac{5}{9}(t_a^2 + t_b^2) < \frac{1}{4}(a^2 + b^2) = \frac{5}{4}c^2,$$

tj.

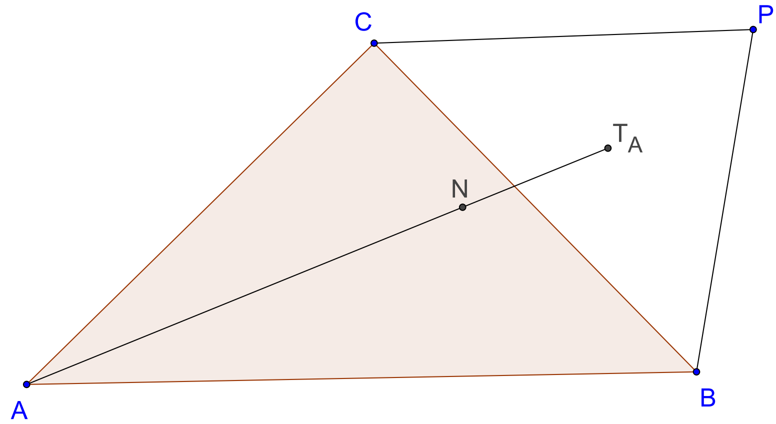
$$\frac{4}{9}(t_a^2 + t_b^2) < c^2.$$

S druge strane, kako je $\angle ATB < 90°$, vrijedi

$$\frac{4}{9}(t_a^2 + t_b^2) > c^2$$

čime smo dobili kontradikciju. Dakle, težišnice t_a i t_b su okomite. $\square$

Teorem 2.1.6. *Neka je P točka u ravnini trokuta $\triangle ABC$, $P \neq A, B, C$, te neka su T_A, T_B, T_C redom težišta trokuta $\triangle BPC, \triangle APC, \triangle ABP$. Dokažite da se AT_A, BT_B, CT_C sijeku u jednoj točki.*



Slika 2.8.

Dokaz. Izračunajmo $\overrightarrow{AT_A}, \overrightarrow{BT_B}$.

$$\overrightarrow{AT_A} = \vec{r_{T_A}} - \vec{r_A} = \frac{1}{3}(\vec{r_B} + \vec{r_C} + \vec{r_P}) - \vec{r_A}$$

$$\overrightarrow{BT_B} = \vec{r_{T_B}} - \vec{r_B} = \frac{1}{3}(\vec{r_A} + \vec{r_C} + \vec{r_P}) - \vec{r_B}.$$

Neka je N točka presjeka dužina $\overline{AT_A}$ i $\overline{BT_B}$. Budući da N leži na $\overline{AT_A}$ vrijedi:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AN} &= \lambda\overrightarrow{AT_A} \\ \vec{r_N} - \vec{r_A} &= \lambda[\frac{1}{3}(\vec{r_B} + \vec{r_C} + \vec{r_P}) - \vec{r_A}] \\ \vec{r_N} &= (1-\lambda)\vec{r_A} + \frac{\lambda}{3}\vec{r_B} + \frac{\lambda}{3}\vec{r_C} + \frac{\lambda}{3}\vec{r_P}. \end{aligned}$$

Budući da N leži na $\overline{BT_B}$ vrijedi:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{BN} &= \mu\overrightarrow{BT_B} \\
\vec{r_N} - \vec{r_B} &= \mu[\frac{1}{3}(\vec{r_A} + \vec{r_C} + \vec{r_P}) - \vec{r_B}] \\
\vec{r_N} &= \frac{\mu}{3}\vec{r_A} + (1-\mu)\vec{r_B} + \frac{\mu}{3}\vec{r_C} + \frac{\mu}{3}\vec{r_P}.
\end{aligned}$$

Izjednačavanjem koeficijenata dobivamo $\lambda = \mu = \frac{3}{4}$ i

$$\vec{r_N} = \frac{1}{4}(\vec{r_A} + \vec{r_B} + \vec{r_C} + \vec{r_P}).$$

Na analogan način izračunamo radijvektor točke S u presjeku $\overline{BT_B}$ i $\overline{CT_C}$. Dobije se $\vec{r_N} = \vec{r_S}$, tj. $N = S$. Dakle, sva tri pravca se sijeku u točki čiji je radijvektor

$$\vec{r_N} = \frac{1}{4}(\vec{r_A} + \vec{r_B} + \vec{r_C} + \vec{r_P}).$$

□

Teorem 2.1.7. *Ako u trokutu $\triangle ABC$ vrijedi*

$$t_a : t_b : t_c = a : b : c$$

tada je trokut jednakostraničan.

Dokaz. Izrazimo t_b i t_c pomoću t_a i u te izraze uvrstimo formule za duljinu težišnica. Iz gornjeg razmjera očitavamo

$$t_a = \frac{a}{c}t_c, \quad t_b = \frac{b}{c}t_c,$$

tj.

$$t_a^2 = \frac{a^2}{c^2}t_c^2, \quad t_b^2 = \frac{b^2}{c^2}t_c^2.$$

Uvrstimo li izraze za t_a^2 i t_c^2 dobivamo

$$\begin{aligned}
4t_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2 & \\
4\frac{a^2}{c^2}[\frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2)] &= 2b^2 + 2c^2 - a^2 \\
a^2(2a^2 + 2b^2 - c^2) &= c^2(2b^2 + 2c^2 - a^2). \qquad (2.9)
\end{aligned}$$

Uvrstimo li izraze za t_b^2 i t_c^2 dobivamo

$$\begin{aligned}
4t_b^2 = 2a^2 + 2c^2 - b^2 & \\
4\frac{b^2}{c^2}[\frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2)] &= 2a^2 + 2c^2 - b^2 \\
b^2(2a^2 + 2b^2 - c^2) &= c^2(2a^2 + 2c^2 - b^2). \qquad (2.10)
\end{aligned}$$

Oduzmemo li (2.10) od (2.9) dobivamo

$$\begin{aligned} 2b^4 - 2a^4 &= 2a^2c^2 - 2c^2b^2 \\ (b^2 - a^2)(b^2 + a^2) &= c^2(a^2 - b^2) \\ (b^2 - a^2)(b^2 + a^2 + c^2) &= 0. \end{aligned}$$

Druga zagrada nije 0 dakle prva zagrada mora biti 0, tj. $a = b$. Uvrstimo to u (2.9):

$$\begin{aligned} a^2(4a^2 - c^2) &= c^2(a^2 + 2c^2) \\ 4a^4 - a^2c^2 &= a^2c^2 + 2c^4 \\ 4a^4 - 2a^2c^2 - 2c^4 = 0. \end{aligned}$$

Podijelimo tu jednakost s $2c^4$ i dobivamo:

$$2(\frac{a}{c})^4 - (\frac{a}{c})^2 - 1 = 0$$

Sada je

$$(\frac{a}{c})^2_{\;1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4}.$$

Rješenje $(\frac{a}{c})^2 = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2}$ nema smisla, pa preostaje

$$(\frac{a}{c})^2 = \frac{1+3}{4} = 1, \quad \text{tj.} \quad a = c.$$

Time smo dokazali da je $a = b = c$. □

Teorem 2.1.8. *Težišnica t_a ne može biti jednaka aritmetičkoj sredini stranica b i c.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da je $t_a = \frac{b+c}{2}$.
Uvrstimo li to u $4t_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$ dobivamo

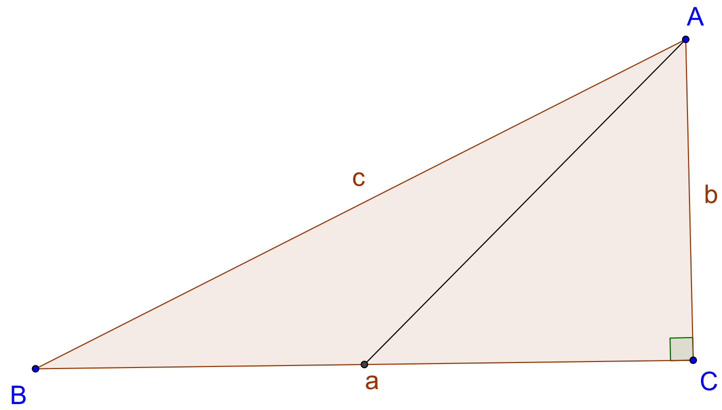
$$\begin{aligned} (b+c)^2 &= 2b^2 + 2c^2 - a^2 \\ 2bc &= b^2 + c^2 - a^2 \\ (b-c)^2 &= a^2. \end{aligned}$$

Dakle, ili je $b - c = a$ ili $b - c = -a$.
Ako je $b - c = a$, tada je $b = a + c$, a to je nemoguće jer u trokutu vrijedi tzv. nejednakost trokuta $b < a + c$.
Ako je $b - c = -a$, tada je $c = a + b$, a niti to ne vrijedi jer u tokutu vrijedi nejednakost trokuta $c < a + b$.
Dakle, došli smo do kontradikcije pa je početna pretpostavka da je $t_a = \frac{b+c}{2}$ neistinita. □

Teorem 2.1.9. *Ako je težišnica t_a u pravokutnom trokutu ABC s pravim vrhom u C jednaka geometrijskoj sredini stranica b i c, tada je $c = 3b$.*

Dokaz. Iskoristimo formulu za duljinu težišnica $4t_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$ i Pitagorin teorem $c^2 = a^2 + b^2$, te nam iz toga slijedi

$$\begin{aligned} 4t_a^2 &= 2b^2 + 2(a^2 + b^2) - c^2 \\ 4t_a^2 &= 2b^2 + 2a^2 + 2b^2 - c^2 \\ 4t_a^2 &= 4b^2 + a^2. \end{aligned} \tag{2.11}$$



Slika 2.9.

Sada pretpostavimo da je $t_a = \sqrt{bc}$, te ubacimo u (2.11) s tim da nam je $a^2 = c^2 - b^2$. Dobivamo

$$4bc = 4b^2 + c^2 - b^2, \quad \text{tj.} \quad 4b^2 - 4bc + c^2 = 0.$$

Dakle,

$$\begin{aligned} c_{1,2} &= \frac{4b \pm \sqrt{16b^2 - 12b^2}}{2} \\ c_{1,2} &= \frac{4b \pm 2b}{2}. \end{aligned}$$

Rješenje $c = \frac{4b-2b}{2} = b$ nema smisla jer je c hipotenuza trokuta. Prema tome $c = \frac{4b+2b}{2} = 3b$ je rješenje, što smo upravo i htjeli dokazati. $\square$

2.2 Svojstva težišta

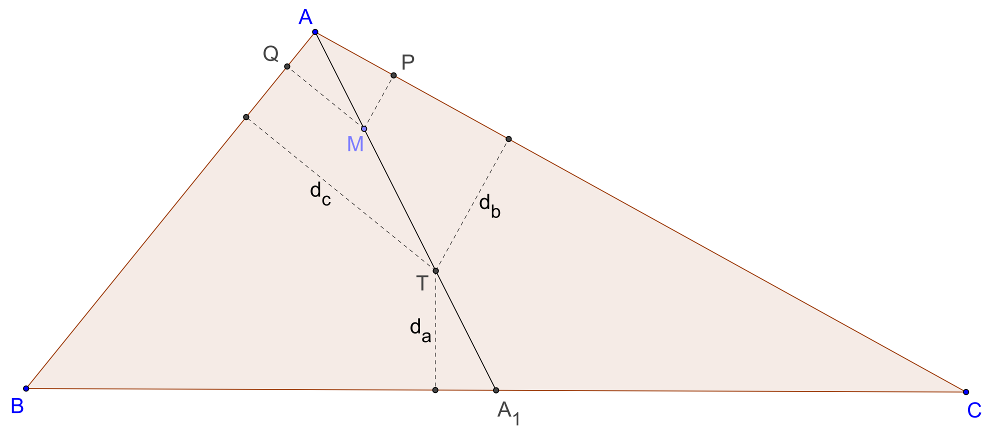
Teorem 2.2.1. *([3, str. 84]) Za udaljenosti d_a, d_b, d_c težišta T trokuta $\triangle ABC$ od stranica a, b, c vrijedi*

$$a : b : c = \frac{1}{d_a} : \frac{1}{d_b} : \frac{1}{d_c},$$

odnosno

$$a \cdot d_a = b \cdot d_b = c \cdot d_c.$$

Dokaz. Težišnica $\overline{AA_1}$ dijeli trokut $\triangle ABC$ na dva trokuta jednakih površina, tj. $P(\triangle ABA_1) = P(\triangle AA_1C)$.
Odaberimo sada po volji točku M na težišnici $\overline{AA_1}$ i spustimo iz te točke okomice MQ i MP na stranice $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$. Površine trokuta $\triangle ABM$ i $\triangle ACM$ su jednake jer imaju jednu zajedničku stranicu $\overline{AM}$, dok su vrhovi B i C jednako udaljeni od pravca AM.



Slika 2.10.

Iz

$$\frac{|AB| \cdot |MQ|}{2} = \frac{|AC| \cdot |MP|}{2},$$

slijedi

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|MP|}{|MQ|}.$$

Posebno to vrijedi za težište T, pa iz ove jednakosti dobivamo:

$$\frac{c}{b} = \frac{d_b}{d_c},$$

tj.

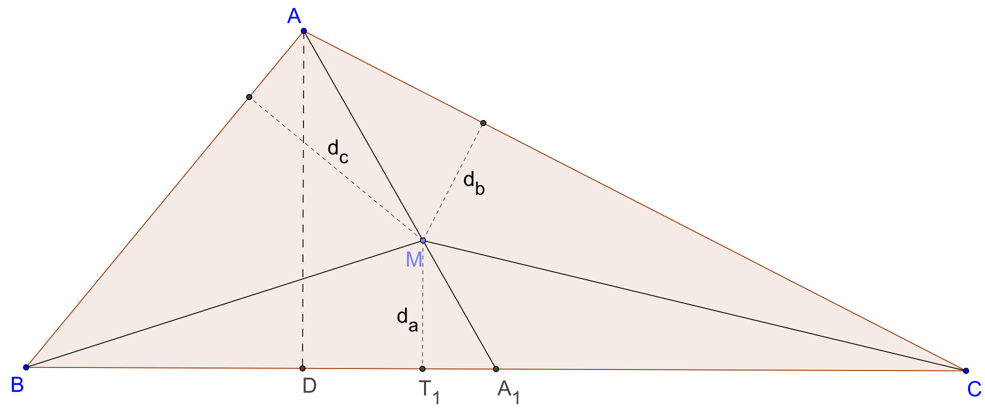
$$b \cdot d_b = c \cdot d_c$$

$$b : c = \frac{1}{d_b} : \frac{1}{d_c}.$$

Analognim postupkom pomoću ostalih težišnica dokazujemo i za preostale odnose između udaljenosti težišta od stranica i stranica trokuta. $\square$

Pokažimo da vrijedi i obrat **Teorema 2.2.1.**

Teorem 2.2.2. *Neka je M točka u unutrašnjosti trokuta $\triangle ABC$, te neka su d_a, d_b, d_c redom udaljenosti točke M do stranica $\overline{BC}, \overline{AC}, \overline{AB}$. Ako je $ad_a = bd_b = cd_c$ tada je M težište trokuta.*



Slika 2.11.

Dokaz. Iz $ad_a = bd_b = cd_c$ slijedi

$$P(\triangle MBC) = P(\triangle MAC) = P(\triangle MAB).$$

Zbroj svih tih površina trokuta je jednaka $P(\triangle ABC)$ pa je

$$\begin{aligned} P(\triangle MBC) &= \frac{1}{3}P(\triangle ABC) \\ P(\triangle MAC) &= \frac{1}{3}P(\triangle ABC) \\ P(\triangle MAB) &= \frac{1}{3}P(\triangle ABC). \end{aligned}$$

Iz

$$P(\triangle MBC) = \frac{1}{2}d_a \cdot a = \frac{1}{3}P(\triangle ABC) = \frac{1}{3}(\frac{1}{2}v_a \cdot a)$$

slijedi

$$d_a = \frac{1}{3}v_a.$$

Očito je da su trokuti $\triangle ADA_1$ i $\triangle MT_1A_1$ slični (imaju pravi kut i zajednički kut $\angle DA_1A$) a iz jednakosti $d_a = \frac{1}{3}v_a$ slijedi da je njihov koeficijent sličnosti $3:1$.
Dakle,

$$|AA_1| = 3|A_1M|,$$

tj,

$$|AM| = 2|A_1M|,$$

a na težišnici $\overline{AA_1}$ to svojstvo ima upravo težište trokuta, tj. $M = T$. $\square$

Prvo moramo dokazati jednu pomoćnu tvrdnju u svrhu sljedećeg dokazivanja svojstva težišta.

Lema 2.2.1. *Umnožak abc tri pozitivna realna broja a, b, c čija je suma stalna, $a+b+c = k$, poprima najveću vrijednost ako je $a = b = c$.*

Dokaz. Neka su x, y, z pozitivni realni brojevi. Iz tvrdnje $(x-y)^2 \geq 0$, očito vrijedi $x^2 + y^2 \geq 2xy$. Jednakost se postiže ako i samo ako su x i y jednaki. Drugim riječima, ako su x i y različiti tada je $x^2 + y^2 > 2xy$. Analogno vrijedi da je $x^2 + z^2 \geq 2xz$ i $y^2 + z^2 \geq 2yz$. Sada zbrajanjem ove tri nejednakosti dobivamo:

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz. \tag{2.12}$$

Pri tome vrijedi da ako su bar dva broja od x, y, z različita, tada je znak nejednakosti strogi. Promotrimo sada jednakost

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz).$$

Na temelju (2.12) slijedi da je drugi faktor na desnoj strani nenegativan, pa je cijeli izraz na lijevoj strani nenegativan, tj.

$$x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz.$$

Uz to, ako su bar dva broja od x, y, z različita, tada je drugi faktor na desnoj strani pozitivan, pa je u zadnjoj nejednakosti strogi znak nejednakosti, tj.

$$x^3 + y^3 + z^3 > 3xyz.$$

Supstitucijom $x^3 = a, y^3 = b, z^3 = c$ dobivamo:

$$abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 = \frac{k^3}{27}.$$

Ako je $a = b = c$, tada uvrštavanjem u nejednakost dobivamo da vrijedi jednakost. Ako su bar dva broja od a, b, c različiti tada su i bar dva njihova treća korijena (a to su x, y, z) različiti, pa je znak nejednakosti strogi. Dakle, znak jednakosti vrijedi ako i samo ako su a, b, c jednaki. □

Teorem 2.2.3. *([3, str. 85]) Težište T je točka unutrašnjosti trokuta za koju produkt udaljenosti do stranica ima maksimalnu vrijednost.*

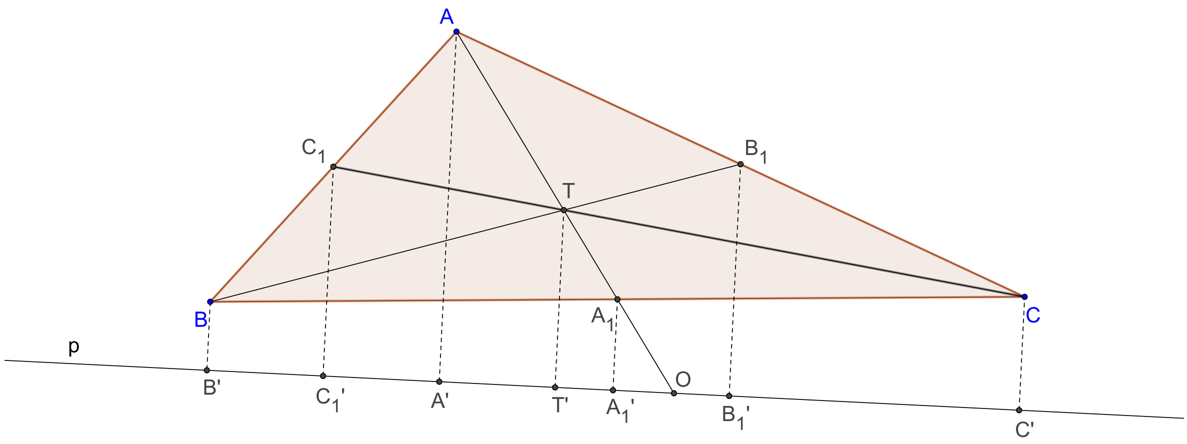
Dokaz. Neka je M bilo koja točka unutrašnjosti trokuta $\triangle ABC$, a m_a, m_b, m_c udaljenosti te točke do stranica trokuta a, b, c. Površinu trokuta $\triangle ABC$ sada možemo pisati u obliku zbroja površina trokuta $\triangle ABM$, $\triangle BCM$ i $\triangle ACM$ i vrijedi

$$2P(\triangle ABC) = am_a + bm_b + cm_c.$$

Promotrimo sada produkt tri sumanda koji stoje s desne strane gornje jednakosti

$$(am_a)(bm_b)(cm_c).$$

Prema Lemi, ovaj umnožak će imati najveću vrijednost ako su ova tri broja jednaka. To će se dogoditi točno onda i samo onda kada točka M bude težište tog trokuta prema prethodnim teoremima. □



Slika 2.12.

Teorem 2.2.4. *Udaljenost težišta T danog trokuta $\triangle ABC$ do nekog pravca p ravnine jednaka je aritmetičkoj sredini udaljenosti vrhova tog trokuta do pravca p.*

Dokaz. Prema teoremu o težištu vrijedi

$$|AT| = 2\,|A_1T|\,.$$

S apostrofom označimo ortogonalne projekcije točaka na pravac p, tj. T' je ortogonalna projekcija točke T na pravac p itd. A sa O označimo sjecište pravca p s AA_1. Iz trokuta $\triangle AA'O$, $\triangle TT'O$, $\triangle A_1A_1'O$ koji su slični (imaju pravi kut i zajednički kut $\angle A'OA$) i svojstva težišnica vrijedi

$$\frac{|AA'|}{|TT'|} = \frac{3|TA_1| + |A_1O}{|TA_1| + |A_1O|} \tag{2.13}$$

i

$$\begin{aligned}
\frac{|TT'|}{|A_1A_1'|} &= \frac{|TA_1| + |A_1O|}{|A_1O|} \\
\frac{|TT'|}{|A_1A_1'|} - 1 &= \frac{|TA_1| + |A_1O|}{|A_1O|} - 1 \\
\frac{|TT'| - |A_1A_1'|}{|A_1A_1'|} &= \frac{|TA_1|}{|A_1O|} \\
|A_1O| &= \frac{|TA_1| \cdot |A_1A_1'|}{|TT'| - |A_1A_1'|} \qquad (2.14)
\end{aligned}$$

I sada supstitucijom (2.14) u (2.13) dobivamo

$$\frac{|AA'|}{|TT'|} = \frac{3|TA_1| + \frac{|TA_1|\cdot|A_1A_1'|}{|TT'|-|A_1A_1'|}}{|TA_1| + \frac{|TA_1|\cdot|A_1A_1'|}{|TT'|-|A_1A_1'|}}$$

i nakon što izlučimo $|TA_1|$ dobivamo

$$\begin{aligned}
\frac{|AA'|}{|TT'|} &= \frac{3+\frac{|A_1A_1'|}{|TT'|-|A_1A_1'|}}{1+\frac{|A_1A_1'|}{|TT'|-|A_1A_1'|}}\\
\frac{|AA'|}{|TT'|} &= \frac{3|TT'|-3|A_1A_1'|+|A_1A_1'|}{|TT'|-|A_1A_1'|+|A_1A_1'|}\\
\frac{|AA'|}{|TT'|} &= \frac{3|TT'|-2|A_1A_1'|}{|TT'|}
\end{aligned}$$

iz čega slijedi

$$|AA'| = 3|TT'| - 2|A_1A_1'|,$$

tj.

$$3|TT'| = |AA'| + 2|A_1A_1'|. \tag{2.15}$$

Sada iz četverokuta $BB'C'C$ koji je trapez jer $BB' \parallel CC'$ vrijedi

$$|A_1A_1'| = \frac{|BB'| + |CC'|}{2},$$

tj.

$$2|A_1A_1'| = |BB'| + |CC'| \tag{2.16}$$

jer je točka A_1 polovište stranice $\overline{BC}$ i $A_1A_1 \parallel BB'$, pa je $\overline{A_1A_1'}$ srednjica trapeza.
Sada uvrštavanjem (2.16) u (2.15) dobivamo:

$$3|TT'| = |AA'| + |BB'| + |CC'|.$$

Trebamo napomenuti da valja uvažiti predznak udaljenosti točaka A, B i C od pravca p, tj. naprimjer ako je točka B s druge strane pravca od točaka A, C i T, tada se udaljenost $|BB'|$ uzima s minus predznakom. □

Korolar 2.2.1. *Ako pravac p prolazi težištem T trokuta $\triangle ABC$, tada je zbroj udaljenosti onih dvaju vrhova trokuta koji stoje s jedne strane pravca p jednak udaljenosti trećeg vrha do tog pravca.*

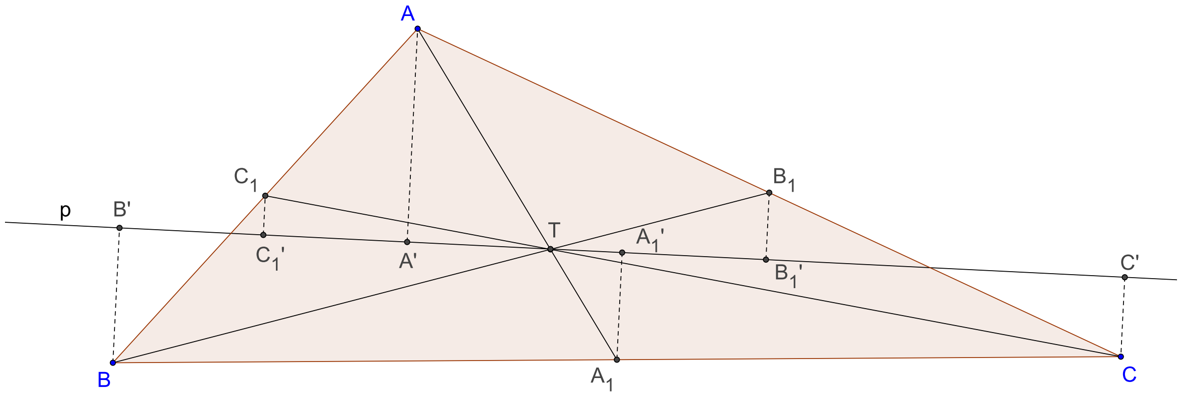
Prema prethodnom teoremu vrijedi $3|TT'| = |AA'| + |BB'| + |CC'|$, ali kako pravac p prolazi točkom T udaljenost $|TT'|$ je jednaka nuli, tj.

$$3 \cdot 0 = |AA'| + |BB'| + |CC'|.$$

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti uzmimo da je točka A s druge strane pravca od točaka B i C, tada se udaljenost $|AA'|$ uzima s minus predznakom.
Prema tome nam vrijedi

$$|AA'| = |BB'| + |CC'|.$$

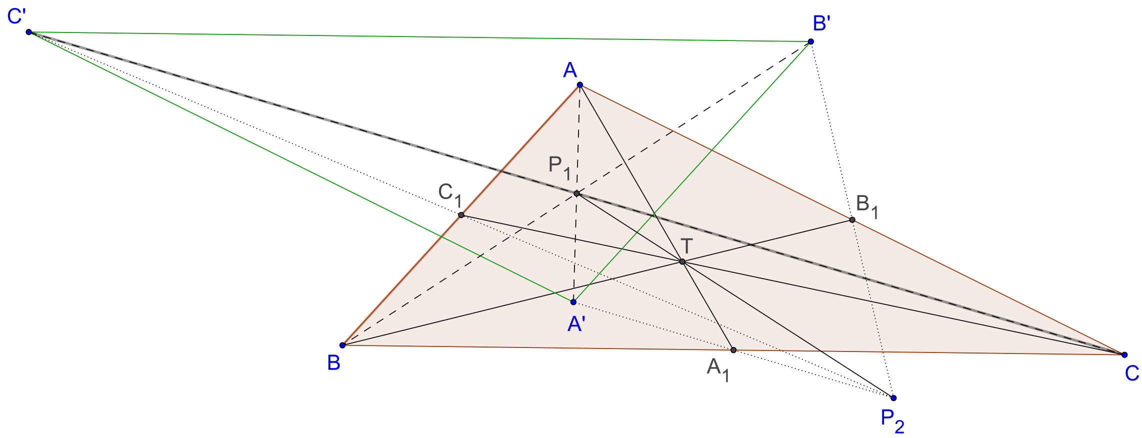
□



Slika 2.13.

Teorem 2.2.5. *Neka je dan trokut $\triangle ABC$ s težišnicama $\overline{AA_1}, \overline{BB_1}, \overline{CC_1}$ i težištem T. Za neku točku P ravnine trokuta odredimo točke A', B', C' kao točke centralno simetrične točki P s obzirom na centar A_1, odnosno B_1, odnosno C_1. Trokut $\triangle A'B'C'$ je centralno simetričan trokutu $\triangle ABC$ s obzirom na neki centar P_1. Točke P i P_1 su kolinearne s težištem T i vrijedi:*

$$|PT| : |TP_1| = 2 : 1.$$



Slika 2.14.

Dokaz. Vidimo da su trokuti $\triangle PA_1B_1$ i $\triangle PA'B'$ homotetični sa centrom homotetije u točki P, jer je

$$\frac{|PA_1|}{|PA'|} = \frac{|PB_1|}{|PB'|} = \frac{1}{2}.$$

Kako je $A_1B_1 \parallel AB$, to znači da je i $A'B' \parallel AB$.
Ali vrijedi

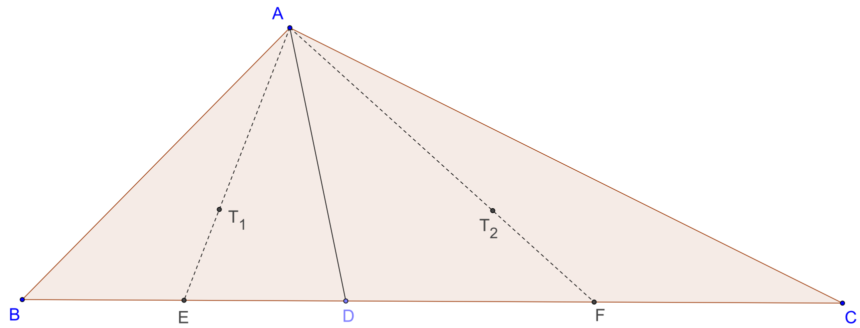
$$|AB| = 2 \cdot |A_1B_1| \quad \text{i} \quad |A'B'| = 2 \cdot |A_1B_1|.$$

To znači da su odgovarajuće stranice trokuta $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ paralelne i jednake, pa su prema tome i ta dva trokuta centralno simetrična, sukladna, i odgovarajuće stranice su im paralelne.
Centar te simetrije očito leži na polovištu dužina $\overline{AA'}, \overline{BB'}$ i $\overline{CC'}$.
Promotrimo sada trokut $\triangle APA'$. Uočavamo da je A_1 polovište stranice $\overline{PA'}$ tog trokuta.
To znači da su $\overline{AA_1}$ i $\overline{PP_1}$ težišnice tog trokuta i one se sijeku u točki T.
Kako je $\overline{AA_1}$ težišnica trokuta $\triangle ABC$, i točka T je težište trokuta $\triangle ABC$, to dokazuje da su točke P, T i P_1 kolinearne.
Ali i dužina $\overline{PP_1}$ je težišnica trokuta $\triangle APA'$, pa prema teoremu o težištu vrijedi

$$|PT| : |TP_1| = 2 : 1.$$

□

Propozicija 2.2.1. *Neka je D bilo koja točka na stranici $\overline{BC}$ šiljastokutnog trokuta $\triangle ABC$. Dokažite da površina trokuta $\triangle AT_1T_2$ ne ovisi o položaju točke D pri čemu su T_1 i T_2 redom težišta trokuta $\triangle ABD$ i $\triangle ADC$.*



Slika 2.15.

Dokaz. Neka su E i F redom polovišta stranica $\overline{BD}$ i $\overline{DC}$. Vrijedi

$$|BE| = |ED| = \frac{1}{2}|BD|, \quad |DF| = |FC| = \frac{1}{2}|DC|$$

$$|EF| = |ED| + |DF| = \frac{1}{2}|BD| + \frac{1}{2}|DC| = \frac{1}{2}|BC| = \frac{1}{2}a.$$

U trokutu $\triangle AEF$ visina iz vrha A na $\overline{EF}$ podudara se s visinom v_a iz vrha A na $\overline{BC}$ u trokutu $\triangle ABC$, pa je

$$P(\triangle AEF) = \frac{1}{2}|EF| \cdot v_a = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}av_a = \frac{1}{2}P(\triangle ABC).$$

Dužina $\overline{AE}$ je težišnica trokuta $\triangle ABD$, pa ju težište T_1 dijeli u omjeru $2 : 1$ računajući od vrha, tj.

$$|AT_1| = |AE| = 2 : 3.$$

Isto vrijedi i u trokutu $\triangle ADC$, tj.

$$|AT_2| = |AF| = 2 : 3.$$

Uz to je $\angle T_1AT_2 = \angle EATF$, pa su prema teoremu o sličnosti trokuta S-K-S trokuti $\triangle AT_1T_2$ i $\triangle AEF$ slični s koeficijentom sličnosti $\frac{2}{3}$. Tada za njihove površine vrijedi

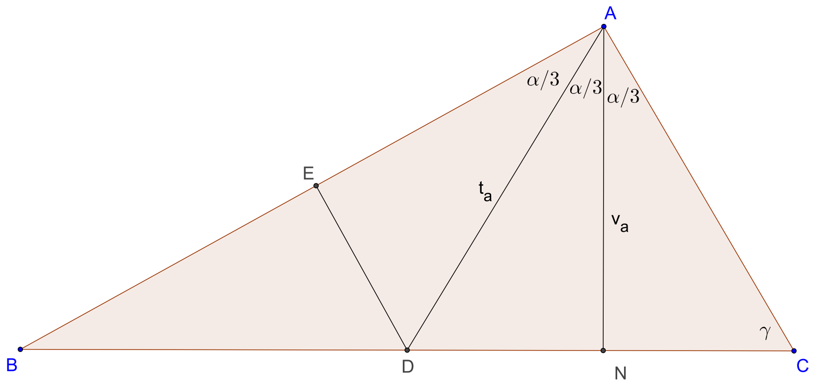
$$P(\triangle AT_1T_2) : P(\triangle AEF) = 4 : 9,$$

od tuda imamo

$$P(\triangle AT_1T_2) = \frac{4}{9}P(\triangle AEF) = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{2}P(\triangle ABC) = \frac{2}{9}P(\triangle ABC),$$

tj. površina trokuta $\triangle AT_1T_2$ ne ovisi o izboru točke D. □

Propozicija 2.2.2. *Ako visina i težišnica iz vrha A trokuta $\triangle ABC$ dijele kut α na tri jednaka dijela, tada je $\alpha = 90°$, a ostala dva kuta su $30°$ i $60°$. Vrijedi i obrat.*



Slika 2.16.

Dokaz. Neka je N nožište visine iz vrha A na $\overline{BC}$, a D polovište stranice $\overline{BC}$. Prema uvjetima zadatka

$$\angle BAD = \angle DAN = \angle NAC = \frac{1}{3}\alpha.$$

Trokuti ADN i ACN su sukladni jer imaju zajedničku stranicu $\overline{AN}$ i sukladne kutove priležeće toj stranici. Stoga je $\angle ADN = \gamma$ i $|DN| = |NC|$, a kako je $|DC| = \frac{1}{2}a$, slijedi da je $|DN| = |NC| = \frac{1}{4}a$.
Povucimo okomicu iz D na stranicu $\overline{AB}$ i nožište joj označimo s E. Trokuti AED i AND su sukladni jer imaju zajedničku stranicu $\overline{AD}$ i podudaraju se u dva (a time i sva tri) kuta. Dakle,

$$|ED| = |DN| = \frac{1}{4}a.$$

Sad promotrimo trokut $\triangle BED$. To je pravokutni trokut čija je hipotenuza duga $\frac{1}{2}a$, a kraća kateta duga je $\frac{1}{4}a = \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2}a)$. Dakle, taj je trokut polovina jednakostraničnog trokuta stranice $\frac{1}{2}a$, pa su mu kutovi:

$$\beta = \angle EBD = 30^\circ, \angle EDB = 60^\circ.$$

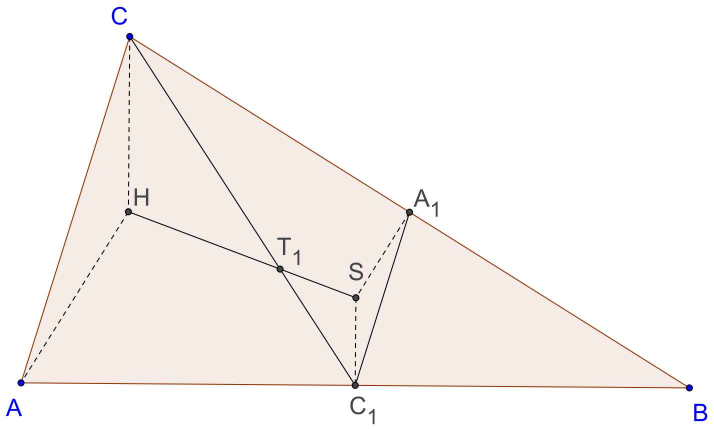
Sad iz sukladnosti kutova $\angle EAD$ i $\angle ADN$ i činjenice da im je zbroj 120° slijedi da je $\angle ADN = 60^\circ$, a $\angle ADN$ je sukladan kutu $\angle NCA$, tj. $\gamma = 60^\circ$. I konačno dobivamo da je $\alpha = 90^\circ$.

Pokažimo sada da vrijedi i obrat, tj, neka u trokutu $\triangle ABC$ vrijedi da je $\alpha = 90^\circ$, a ostala dva kuta su $\beta = 30^\circ$ i $\gamma = 60^\circ$.
Promotrimo pravokutni trokut $\triangle ANC$. Ako je kut $\gamma = \angle ACN = 60^\circ$ i $\angle CNA = 90^\circ$, to znači da kut $\angle NAC = 30^\circ$. Nadalje, pokazali smo da su trokuti ADN i ACN sukladni, prema tome kut $\angle DAN = 30^\circ$.
A kako je kut $\alpha = 90^\circ$ a kutovi $\angle NAC = \angle DAN = 30^\circ$, to znači da je i kut $\angle BAD = 30^\circ$. Iz ovoga zaključujemo da težišnica i visina trokuta $\triangle ABC$ iz vrha A dijele taj kut na tri jednaka dijela. $\square$

2.3 Eulerov i Nagelov pravac

Teorem 2.3.1. *Središte opisane kružnice S, težište T i ortocentar H trokuta su kolinearne točke, osim toga vrijedi*

$$|ST| : |TH| = 1 : 2.$$



Slika 2.17.

Dokaz. Neka je točka S središte opisane kružnice a H ortocentar trokuta $\triangle ABC$. Nadalje, neka su A_1 i C_1 redom polovišta stranica $\overline{BC}$ i $\overline{AB}$. Dužina $\overline{A_1C_1}$ je srednjica trokuta i vrijedi

$$A_1C_1 \parallel AC \quad \text{i} \quad |A_1C_1| = \frac{1}{2}|AC|.$$

Neka je točka T_1 sjecište težišnice $\overline{CC_1}$ i pravca SH.
Primjetimo da se dužine $\overline{AH}$ i $\overline{SA_1}$ te $\overline{CH}$ i $\overline{SC_1}$ nalaze na paralelnim pravcima, stoga su i odgovarajući kutovi s paralelnim pravcima sukladni ($\angle ACH = \angle SC_1A_1$ i $\angle HAC = \angle SA_1C_1$). Sada prema K-K teoremu o sličnosti trokuta vrijedi da su trokuti $\triangle ACH$ i $\triangle C_1A_1S$ slični sa koeficijentom sličnosti $k_1 = 1 : 2$.
Nadalje, trokuti $\triangle CHT_1$ i $\triangle C_1ST_1$ su slični jer su im odgovarajući kutovi sukladni ($\angle C_1T_1H =_1 T_1S$ i $\angle T_1HC = \angle T_1SC_1$), a koeficijent sličnosti im je $k_2 = 1 : 2$ jer iz prethodne sličnosti vrijedi $|SC_1| : |HC| = 1 : 2$.
Prema tome točka T_1 dijeli dužinu $\overline{SH}$ u omjeru $1 : 2$, tj.

$$|ST_1| : |T_1H| = 1 : 2.$$

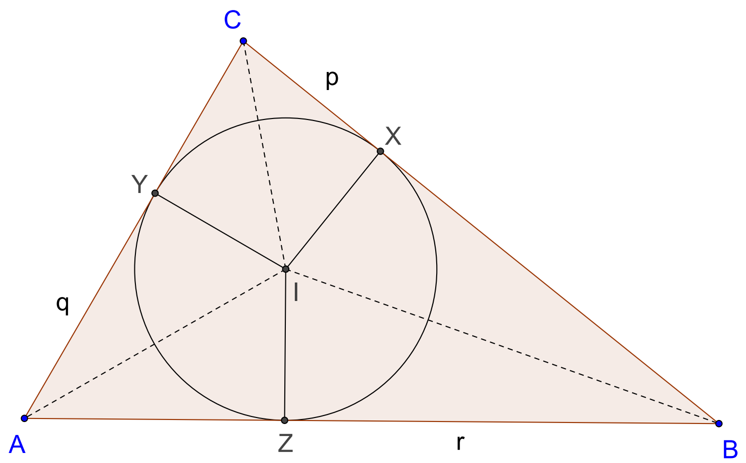
Isto tako, točka T_1 dijeli težišnicu $\overline{CC_1}$ u omjeru $2 : 1$, što znači da je točka T_1 jednaka težištu trokuta, tj. $T_1 = T$. □

Sada ćemo u svrhu dokazivanja svojstva Nagelove točke i težišta trokuta dokazati lemu o radijvektoru Nagelove točke i središta upisane kružnice trokuta.

Neka je $k(I, \rho)$ kružnica upisana trokutu $\triangle ABC$, te neka su X, Y, Z dirališta kružnice K i stanica $\overline{BC}, \overline{AC}, \overline{AB}$. Označimo

$$|CX| = p, \ |AY| = q, \ |BZ| = r.$$

Budući da su AI, BI, CI simetrale kutova vrijedi



Slika 2.18.

$$\begin{aligned} a - p &= r \\ b - q &= p \\ c - r &= q. \end{aligned}$$

Odaberimo na stranici $\overline{BC}$ točku X' koja je od B udaljena za p; na stranici $\overline{AC}$ odaberemo točku Y' koja je od C udaljena q, a na stranici $\overline{AB}$ točku Z' koja je od A udaljena r. Tada se pravci AX', BY', CZ' sijeku u jednoj točki N koju zovemo Nagelova točka.

Dokažimo tu tvrdnju. Neka N_1 sjecište pravaca AX' i BY'. Radit ćemo s radijvektorima čije je ishodište u točki A, tj. $\vec{r_A} = \vec{0}$.

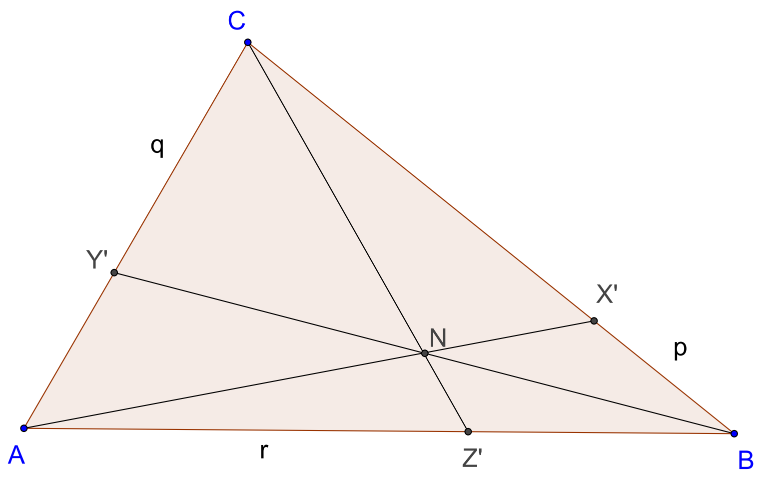
$$\begin{aligned} \vec{r_X'} = \vec{AX'} &= \vec{AB} + \vec{BX'} = \vec{r_B} + \frac{p}{a}\vec{BC} = \vec{r_B} + \frac{p}{a}(\vec{r_C} - \vec{r_B}) \\ &= (1 - \frac{p}{a})\vec{r_B} + \frac{p}{a}\vec{r_C}. \end{aligned}$$

Budući da je N_1 na pravcu AX', tada je $\vec{AN_1}$ kolinearan s AX', tj. postoji $\lambda \in \boldsymbol{R}$ takav da je

$$\begin{aligned} \vec{AN_1} &= \lambda \vec{AX'} \\ \vec{r_{N_1}} &= \lambda \vec{r_X'} = \lambda(1 - \frac{p}{a})\vec{r_B} + \lambda\frac{p}{a}\vec{r_C} = \frac{r}{a}\vec{r_B} + \lambda\frac{p}{a}\vec{r_C}. \end{aligned}$$

Izračunajmo sada $\vec{r_Y'}$.

$$\vec{r_Y'} = \vec{AY'} = \frac{b-q}{b}\vec{AC} = \frac{b-q}{b}\vec{r_C} = \frac{p}{b}\vec{r_C}.$$



Slika 2.19.

Budući da je N_1 na pravcu BY', tada postoji $\mu \in \boldsymbol{R}$ takav da je

$$\begin{aligned} \vec{BN_1} &= \mu \vec{BY'} \\ \vec{r_{N_1}} - \vec{r_B} &= \mu(\vec{r_Y'} - \vec{r_B}) \\ \vec{r_{N_1}} &= \vec{r_B} + \mu(\frac{p}{b}\vec{r_C} - \vec{r_B}) = \vec{r_B}(1-\mu) + \mu\frac{p}{b}\vec{r_C}. \end{aligned}$$

Izjednačavanjem koeficijenata uz $\vec{r_B}$ i $\vec{r_C}$ dobivamo

$$\lambda\frac{r}{a} = 1 - \mu, \ \ \lambda\frac{p}{a} = \frac{p}{b}\mu$$

odakle dobivamo da je

$$\lambda = \frac{a}{r+b}, \ \ \mu = \frac{b}{r+b}, \ \ \vec{r_{N_1}} = \frac{r}{r+b}\vec{r_B} + \frac{p}{r+b}\vec{r_C}.$$

Neka je N_2 sjecište pravaca AX' i CZ'. Na isti način kao u prethodnom računu dobivamo da je

$$\vec{r_{N_2}} = \frac{r}{r+b}\vec{r_B} + \frac{p}{r+b}\vec{r_C},$$

tj. $\vec{r_{N_1}} = \vec{r_{N_2}}$, a to znači da je $N_1 = N_2$. Dakle, sva tri pravca AX', BY' i CZ' prolaze jednom točkom.

U ovom smo računu dobili i radijvektor točke N

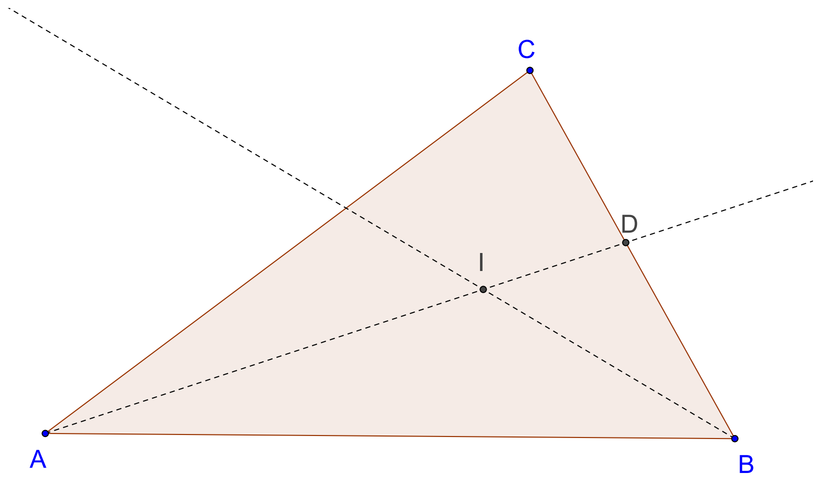
$$\vec{r_{N_2}} = \frac{r}{r+b}\vec{r_B} + \frac{p}{r+b}\vec{r_C}$$

u koordinatnom sustavu gdje je A ishodište radijvektora.

Sada dokažimo sljedeću lemu:

Lema 2.3.1. *U trokutu $\triangle ABC$ središte I upisane kružnice ima radijvektor jednak*

$$\vec{r_I} = \frac{a\vec{r_A} + b\vec{r_B} + c\vec{r_C}}{a+b+c}.$$



Slika 2.20.

Dokaz. Neka je AD simetrala kuta α, $D \in \overline{BC}$. Prema teoremu o simetrali unutarnjeg kuta trokuta vrijedi

$$|DB| : |DC| = c : b,$$

pa je radijvektor točke D jednak

$$\vec{r_D} = \frac{b\vec{r_B} + c\vec{r_C}}{b+c}.$$

Neka je BE simetrala kuta β, $E \in \overline{AC}$. Prema teoremu o simetrali unutarnjeg kuta trokuta vrijedi

$$|EA| : |EC| = c : a.$$

pa je radijvektor točke E jednak

$$\vec{r_E} = \frac{a\vec{r_A} + c\vec{r_C}}{a+c}.$$

Za točku I vrijedi

$$\begin{aligned}
\vec{r_I} &= \vec{OI} = \vec{OA} + \vec{AI} = \vec{r_A} + \lambda\vec{AD} = \vec{r_A} + \lambda(\vec{r_D} - \vec{r_A}) = \lambda\vec{r_D} + (1-\lambda)\vec{r_A} \\
&= \frac{\lambda b\vec{r_B} + \lambda c\vec{r_C}}{b+c} + (1-\lambda)\vec{r_A},
\end{aligned}$$

gdje je λ realan broj za koji je $\vec{AI} = \lambda\vec{AD}$ ($\vec{AI}$ i $\vec{AD}$ su kolinearni vektori).
Analogno,

$$\begin{aligned}
\vec{r_I} &= \vec{OI} = \vec{OB} + \vec{BI} = \vec{r_B} + \mu\vec{BE} = \vec{r_B} + \mu(\vec{r_E} - \vec{r_B}) = \mu\vec{r_E} + (1-\mu)\vec{r_B} \\
&= \frac{\mu a\vec{r_A} + \mu c\vec{r_C}}{a+c} + (1-\mu)\vec{r_B}.
\end{aligned}$$

Izjednačavanjem koeficijenata uz $\vec{r_C}$ i $\vec{r_A}$ dobivamo

$$\frac{\lambda c}{bc} = \frac{\mu c}{a+c} \;\text{ i }\; 1-\lambda = \frac{\mu a}{a+c}.$$

Iz prve jednadžbe izrazimo μ:

$$\mu = \lambda \frac{a+c}{b+c}$$

i uvrstimo u drugu jednadžbu

$$\begin{aligned}
1-\lambda &= \lambda \frac{a+c}{b+c} \cdot \frac{a}{a+c} \\
1-\lambda &= \lambda \frac{a}{b+c} \\
1 &= \lambda \left(\frac{a}{b+c} + 1 \right) \\
\lambda &= \frac{b+c}{a+b+c}.
\end{aligned}$$

Od tuda je

$$\mu = \frac{b+c}{a+b+c} \cdot \frac{a+c}{b+c} = \frac{a+c}{a+b+c}.$$

Kad λ uvrstimo u $\vec{r_I}$ dobivamo

$$\vec{r_I} = \frac{a\vec{r_A} + b\vec{r_B} + c\vec{r_C}}{a+b+c}.$$

$\square$

Teorem 2.3.2. *Središte upisane kružnice I, težište T i Nagelova točka N trokuta su kolinearne točke. Osim toga vrijedi*

$$|IT| : |TN| = 1 : 2.$$

Dokaz. Težište trokuta T ima radijvektor

$$\vec{r_T} = \frac{1}{3}(\vec{r_A} + \vec{r_B} + \vec{r_C}) = \frac{1}{3}(\vec{r_B} + \vec{r_C})$$

ako je $\vec{r_A} = 0$.
Radijvektor središta upisane kružnice glasi

$$\vec{r_I} = \frac{a\vec{r_A} + b\vec{r_B} + c\vec{r_C}}{a+b+c} = \frac{b}{a+b+c}\vec{r_B} + \frac{c}{a+b+c}\vec{r_C}.$$

Tada je

$$\begin{aligned}
2\vec{r_I} + \vec{r_N} &= \frac{2b}{a+b+c}\vec{r_B} + \frac{2c}{a+b+c}\vec{r_C} + \frac{r}{r+b}\vec{r_B} + \frac{p}{r+b}\vec{r_C} \\
&= (\frac{2b}{a+b+c} + \frac{r}{r+b})\vec{r_B} + (\frac{2c}{a+b+c} + \frac{p}{r+b})\vec{r_C}.
\end{aligned}$$

Iz jednakosti za p, q, r, zbrajajući sve tri jednakosti dobivamo

$$\frac{a+b+c}{2} = p+q+r$$

pa je

$$\begin{aligned}\frac{2b}{a+b+c}+\frac{r}{r+b} &= \frac{b}{p+q+r}+\frac{r}{r+b}\\ &= \frac{p+q}{p+q+r}+\frac{r}{r+p+q}=1,\end{aligned}$$

pri čemu smo iskoristili da je $b=p+q$.
Analogno je

$$\begin{aligned}\frac{2c}{a+b+c}+\frac{p}{r+b} &= \frac{c}{p+q+r}+\frac{p}{r+b}\\ &= \frac{q+r}{p+q+r}+\frac{r}{r+p+q}=1,\end{aligned}$$

pri čemu smo iskoristili da je $c=q+r$.
Dakle,

$$2\vec{r_I}+\vec{r_N}=\vec{r_B}+\vec{r_C}=3\vec{r_T},$$

tj. I, N i T su kolinearne i upravo vrijedi omjer

$$|IT| : |TN| = 1 : 2.$$

□

Pravac na kojem leže točke I, N i T nazivamo Nagelov pravac.

Poglavlje III

Konstrukcije trokuta

U ovom poglavlju proučavat ćemo konstrukcije trokuta pri čemu je bar jedan od zadanih elemenata težišnica trokuta.
U donjoj tablici su dane sve moguće kombinacije od tri zadane veličine, s time da je barem jedna od veličina težišnica trokuta. Nećemo navoditi zadatke koji su istog tipa. Veličine koje mogu biti zadane su:

- težišnice trokuta t_a, t_b, t_c,
- stranice a, b, c,
- kutovi α, β, γ,
- visine v_a, v_b, v_c,
- simetrale kutova $s_\alpha, s_\beta, s_\gamma$,
- polumjer opisane kružnice R,
- polumjer upisane kružnice r.

Redni broj	Zadani elementi	Rješivost
1.	t_a, t_b, t_c	da
2.	t_a, t_b, a	da
3.	t_a, t_b, c	da
4.	t_a, t_b, α	da
5.	t_a, t_b, γ	da
6.	t_a, t_b, v_a	da
7.	t_a, t_b, v_c	da
8.	t_a, t_b, s_α	ne
9.	t_a, t_b, s_γ	ne
10.	t_a, t_b, R	ne
11.	t_a, t_b, r	ne
12.	t_a, a, b	da
13.	t_a, a, α	da
14.	t_a, a, β	da

Redni broj	Zadani elementi	Rješivost
15.	t_a, a, v_a	da
16.	t_a, a, v_b	da
17.	t_a, a, s_α	da
18.	t_a, a, s_β	ne
19.	t_a, a, R	da
20.	t_a, a, r	ne
21.	t_a, b, c	da
22.	t_a, b, α	da
23.	t_a, b, β	da
24.	t_a, b, γ	da
25.	t_a, b, v_a	da
26.	t_a, b, v_b	da
27.	t_a, b, v_c	da
28.	t_a, b, s_α	ne
29.	t_a, b, s_β	ne
30.	$t_a, b, s\gamma$	ne
31.	t_a, b, R	da
32.	t_a, b, r	ne
33.	t_a, α, β	da
34.	t_a, α, v_a	da
35.	t_a, α, v_b	da
36.	t_a, α, v_c	da
37.	t_a, α, s_α	da
38.	t_a, α, s_β	ne
39.	t_a, α, R	da
40.	t_a, α, r	da
41.	t_a, β, γ	da
42.	t_a, β, v_a	da
43.	t_a, β, v_b	da
44.	t_a, β, v_c	da
45.	t_a, β, s_α	ne
46.	t_a, β, s_β	ne
47.	t_a, β, s_γ	ne
48.	t_a, β, R	da
49.	t_a, β, r	ne
50.	t_a, v_a, v_b	da
51.	t_a, v_a, s_α	da
52.	t_a, v_a, s_β	ne
53.	t_a, v_a, R	da
54.	t_a, v_a, r	da
55.	t_a, v_b, v_c	da
56.	t_a, v_b, s_α	ne
57.	t_a, v_b, s_β	da

Redni broj	Zadani elementi	Rješivost
58.	t_a, v_b, s_γ	ne
59.	t_a, v_b, R	ne
60.	t_a, v_b, r	da
61.	t_a, s_α, s_β	ne
62.	t_a, s_α, R	da
63.	t_a, s_α, r	ne
64.	t_a, s_β, s_γ	ne
65.	t_a, s_β, R	ne
66.	t_a, s_β, r	ne
67.	t_a, R, r	ne

U zadnjem stupcu je navedeno radi li se ili ne o euklidskoj konstrukciji. Naime, konstrukcije koje su izvedive pomoću jednobridnog ravnala i šestara proizvoljnog polumjera nazivaju se euklidske konstrukcije, [4][str. 305].
Poznato je da ako neku dužinu (zapravo točnije je reći njezinu duljinu) možemo izraziti pomoću zadanih dužina (konačno njih) konačnim brojem operacija zbrajanja, oduzimanja, množenja, dijeljenja i kvadratnog korjenovanja, tada je ta dužina konstruktibilna uz upotrebu već spomenuta dva pomagala.
U knjizi Elementarna matematika I dokazani su teoremi koji opisuju kad je neki broj elementarno konstruktibilan. Podsjetimo se da ako se korijeni algebarske jednadžbe s racionalnim koeficijentima mogu elementarno konstruirati onda kažemo da je ta jednadžba rješiva u kvadratnim radikalima. Izdvojiti ćemo sljedeće teoreme na temelju kojih ćemo dokazivati nerješivost nekih od konstrukcija navedenih u tablici.

Teorem[4] Jednadžba trećeg reda s racionalnim koeficijentima rješiva je u kvadratnim radikalima ako i samo ako ima racionalni korijen.

Teorem[4] Jednadžba četvrtog stupnja

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

je rješiva u kvadratnim radikalima ako i samo ako je u kvadratnim radikalima rješiva i njezina rezolventa

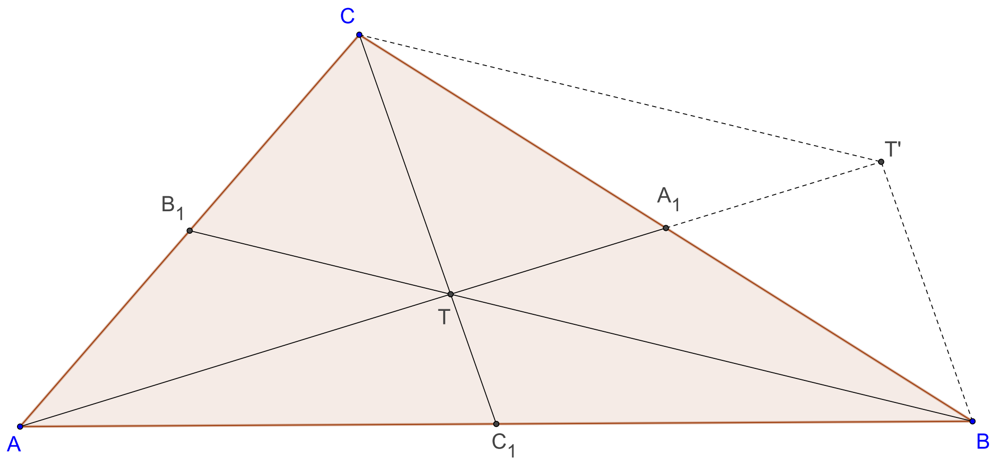
$$(ay - c)^2 = 4(\frac{a^2}{4} - b + 2y)(y^2 - d).$$

3.1 Konstrukcije

U prvih nekoliko konstrukcija detaljno ćemo opisati sva četiri koraka konstruktivnog zadatka: analizu, konstrukciju, dokaz i raspravu, a u narednim konstrukcijama ćemo samo opisati analizu iz koje će biti potpuno jasno kako dalje izvesti konstrukciju.

1. Konstruirajmo trokut $\triangle ABC$, ako je zadano: t_a, t_b, t_c.

Analiza:
Neka su A_1, B_1, C_1 redom polovišta stranica $\overline{BC}, \overline{AC}, \overline{AB}$. Težišnice $\overline{AA_1}, \overline{BB_1}, \overline{CC_1}$ sijeku se u težištu T.
Neka je T' točka centralnosimetrična točki T s obzirom na točku A_1.
Promotrimo četverokut $TBT'C$. Njegove se dijagonale $\overline{TT'}$ i $\overline{BC}$ raspolavljaju pa se radi o paralelogramu čije su duljine stranica $|TB| = |CT'| = \frac{2}{3}t_b$, $|CT| = |BT'| = \frac{2}{3}t_c$, a duljina dijagonale $\overline{TT'}$ je $|TT'| = \frac{2}{3}t_a$.
Budući da su zadane t_a, t_b, t_c, možemo konstruirati i taj paralelogram tako da se prvo konstruira trokut $\triangle TBT'$ (sa stranicama $\frac{2}{3}t_a$, $\frac{2}{3}t_b$, $\frac{2}{3}t_c$), a potom se točka C dobiva iz točke B centralnom simetrijom s obzirom na točku A_1.
Time ćemo dobiti dva vrha trokuta: B i C. Treći vrh A dobit ćemo kao centralnosimetričnu sliku točke T' s obzirom na točku T.



Slika 3.1.

Konstrukcija:

1. $\triangle TBT'$ ($|TB| = \frac{2}{3}t_b, |BT'| = \frac{2}{3}t_c, |T'T| = \frac{2}{3}t_a$)
2. Paralelogram $TBT'C$
3. Točka A, kao centralnosimetrična slika točke T' s obzirom na T
4. $\triangle ABC$

Dokaz:
Iz provedene analize jasno je da će dobiveni trokut $\triangle ABC$ imati upravo te tri zadane težišnice.

Rasprava:
Jedini korak konstrukcije u kojem se zahtjevaju neki uvjeti na dane veličine je upravo prvi korak. Naime, konstrukcija trokuta $\triangle TBT'$ moguća je samo ako njegove stranice zadovoljavaju nejednakost trokuta, tj. ako vrijedi:

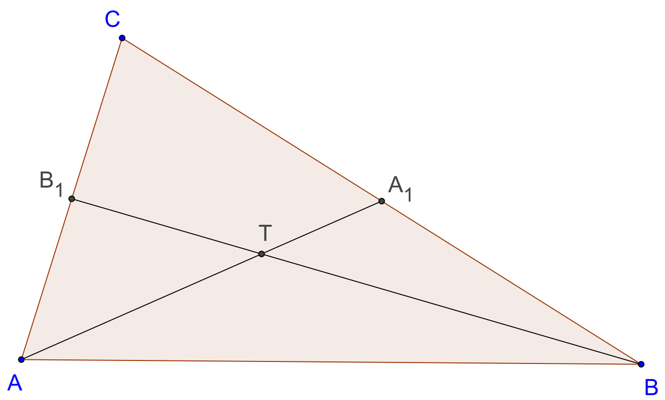
$$(\frac{2}{3}t_b < \frac{2}{3}t_c + \frac{2}{3}t_a) \wedge (\frac{2}{3}t_c < \frac{2}{3}t_a + \frac{2}{3}t_b) \wedge (\frac{2}{3}t_a < \frac{2}{3}t_b + \frac{2}{3}t_c).$$

Množenjem svake od tih nejednakosti s $\frac{3}{2}$ dobivamo uvjete uz koje ovaj zadatak ima jedno rješenje:

$$(t_b < t_c + t_a) \wedge (t_c < t_a + t_b) \wedge (t_a < t_b + t_c).$$

2. Konstruirajmo trokut $\triangle ABC$, ako je zadano: t_a, t_b, a.

Analiza:
Neka su A_1, B_1 redom polovišta stranica $\overline{BC}, \overline{AC}$. Težišnice $\overline{AA_1}, \overline{BB_1}$ sijeku se u težištu T.
Promotrimo trokut $\triangle A_1BT$, radi se o trokutu čije su duljine stranica $|A_1B| = \frac{1}{2}a$, $|BT| = \frac{2}{3}t_b$ i $|TA_1| = \frac{1}{3}t_a$.
Budući da je zadano a, t_a, t_b, možemo konstruirati taj trokut (sa stranicama $\frac{1}{2}a$, $\frac{2}{3}t_b$, $\frac{1}{3}t_a$). Time ćemo dobiti vrh B.
Vrh C dobiti ćemo kao centralnosimetričnu sliku točke B s obzirom na točku A_1.
Vrh A se nalazi na polupravcu A_1T, te je udaljen od točke A_1 za duljinu težišnice t_a koja nam je zadana. Prema tome konstruirati ćemo kružnicu k sa središtem u vrhu A_1 polumjera t_a i presjeći je sa polupravcem A_1T.



Slika 3.2.

Konstrukcija:

1. $\triangle BA_1T$ ($|BA_1| = \frac{1}{2}a, |A_1T| = \frac{1}{3}t_a, |TB| = \frac{2}{3}t_b$),
2. Točka C, kao centralnosimetrična slika točke B s obzirom na točku A_1
3. $A \in k(A_1, t_a) \cap A_1T$, s time da vrijedi $A \prec T \prec A_1$

4. $\triangle ABC$.

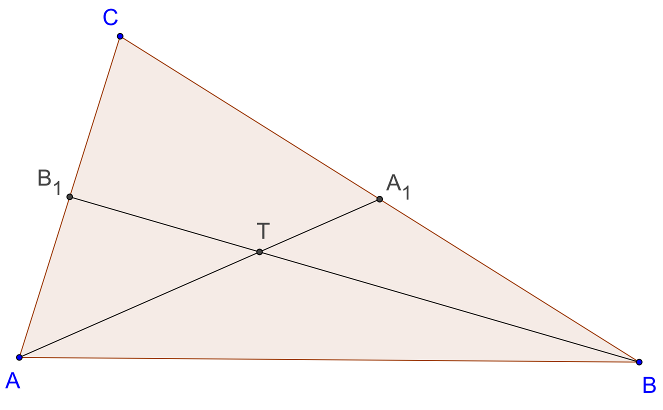
Dokaz:
Iz provedene analize jasno je da će dobiveni trokut $\triangle ABC$ imati upravo te zadane težišnice t_a, t_b i stranicu a.
Rasprava:
Prvi korak konstrukcije je jedini u kojem se zahtjevaju neki uvjeti na dane veličine. Stoga konstrukcija trokuta $\triangle A_1BT$ je jedino moguća ako njegove stranice zadovoljavaju nejednakost trokuta, tj. ako vrijedi:

$$(\frac{1}{2}a < \frac{1}{3}t_a + \frac{2}{3}t_b) \wedge (\frac{1}{3}t_a < \frac{2}{3}t_b + \frac{1}{2}a) \wedge (\frac{2}{3}t_b < \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}t_a).$$

Dakle, ovaj zadatak ima jedno rješenje uz gornje uvjete.

3. Konstruirajmo trokut $\triangle ABC$, ako je zadano: t_a, t_b, c.

Analiza:
Neka su A_1, B_1 redom polovišta stranica $\overline{BC}, \overline{AC}$.
Težišnice $\overline{AA_1}, \overline{BB_1}$ sijeku se u težištu T.
Promotrimo trokut $\triangle ABT$. Radi se o trokutu čije su duljine stranica $|AB| = c, |BT| = \frac{2}{3}t_b$ i $|TA| = \frac{2}{3}t_a$.
Budući da je zadano t_a, t_b, c možemo konstruirati taj trokut (sa stranicama $c, \frac{2}{3}t_b, \frac{2}{3}t_a$).
U produžetku stranica $\overline{AT}$ i $\overline{BT}$ možemo konstruirati točke A_1 i B_1 ($|AA_1| = t_a, |BB_1| = t_b$). U svrhu toga konstruirati ćemo dvije kružnice k_1 i k_2 sa središtima u A i B s radijusima t_a i t_b te ih presjeći sa polupravcima AT i BT.
Na taj način ćemo moći konstruirati pravce AB_1 i BA_1 koji su nam potrebni u svrhu konstruiranja trećeg vrha C jer se on nalazi na sjecištu upravo ta dva pravca, tj. $\{C\} = AB_1 \cap BA_1$.



Slika 3.3.

Konstrukcija:

1. $\triangle BCT$ ($|BC| = a, |CT| = \frac{2}{3}t_c, |TB| = \frac{2}{3}t_b$),

2. $k_1(A, t_a) \cap AT = A_1$, s time da vrijedi $A_1 \prec T \prec A$

3. $k_2(B, t_b) \cap BT = B_1$, s time da vrijedi $B_1 \prec T \prec B$

4. $BC_1 \cap CB_1 = C$

5. $\triangle ABC$.

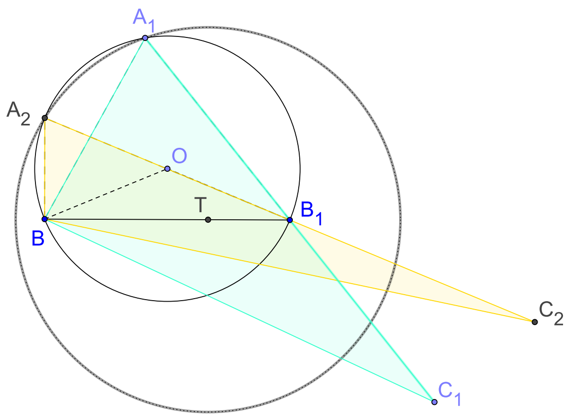
Dokaz:
Iz provedene analize jasno je da će dobiveni trokut $\triangle ABC$ imati upravo te zadane težišnice t_a, t_b i stranicu c.
Rasprava:
Prvi korak konstrukcije je jedini u kojem se zahtjevaju neki uvjeti na dane veličine. Stoga konstrukcija trokuta $\triangle ABT$ je jedino moguća ako njegove stranice zadovoljavaju nejednakost trokuta, tj. ako vrijedi:

$$(c < \frac{2}{3}t_a + \frac{2}{3}t_b) \wedge (\frac{2}{3}t_a < \frac{2}{3}t_b + c) \wedge (\frac{2}{3}t_b < c + \frac{2}{3}t_a).$$

Dakle, ovaj zadatak ima jedno rješenje ako vrijede gornji uvjeti.

4. Konstruirajmo trokut $\triangle ABC$, ako je zadano: t_a, t_b, α.

Analiza:
Neka su A_1, B_1 redom polovišta stranica $\overline{BC}, \overline{AC}$. Iz vrha A se težišnica $\overline{BB_1}$ vidi pod kutem α.



Slika 3.4.

Neka je točka O vrh jednakokračnog trokuta $\triangle BB_1O$ kojem znamo duljinu stranice $\overline{BB_1}$ i kutove ($\angle BOB_1 = 2\alpha$ i $\angle OB_1B = \angle B_1BO = 90^\circ - \alpha$). Sada možemo konstruirati kružnicu $k_1(O, |OB|)$ na kojoj će se nalaziti vrh A jer središnji kut nad tetivom $\overline{BB_1}$ iznosi 2α što će značiti da obodni kut nad tom tetivom iznosi α.
Nadalje, težište trokuta $\triangle ABC$ dijeli težišnicu u omjeru $2 : 1$ od vrha, pa prema tome možemo konstruirati težište T na stranici $\overline{BB_1}$.
Točku A dobit ćemo kao presjek kružnice $k_1(O, |OB|)$ s kružnicom $k_2(T, \frac{2}{3}t_a)$, i o tome će nam ovisiti broj rješenja, tj. ako se dane kružnice sijeku u dvije točke imat ćemo dva rješenja, a ako se dodiruju bit će jedno rješenje i naravno ako se ne sijeku konstrukcija

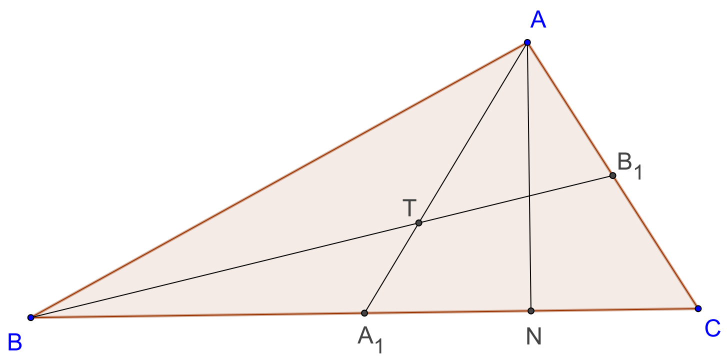
nema rješenja.
Preostaje nam još konstruirati točku C, a nju ćemo dobiti kao centralnosimetričnu sliku točke A sa centrom simetrije u B_1.

6. Konstruirajmo trokut $\triangle ABC$, ako je zadano: t_a, t_b, v_a.

Analiza: Neka su A_1, B_1 redom polovišta stranica $\overline{BC}, \overline{AC}$. A točka N je nožište okomice iz vrha A. Sada imamo dvije mogućnosti:

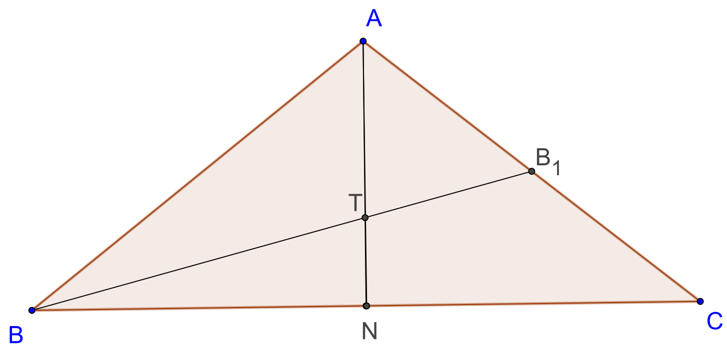
- $v_a < t_a$
- $v_a = t_a$

Ako je $v_a < t_a$, tada možemo konstruirati trokut $\triangle NAA_1$ jer je trokut jednoznačno određen sa dvije stranice (v_a, t_a) i kutom nasuprot većoj stranici $(\angle ANA_1)$. Također je i točka T jednoznačno određena jer dijeli težišnicu $\overline{AA_1}$ u omjeru $2:1$ od vrha A.
Presjekom pravca NA_1 i kružnice $k(T, \frac{2}{3}t_b)$ konstruirat ćemo točku B i na kraju točka C se dobiva kao centralnostimetrična slika točke B sa centrom u A_1. Ako je $v_a = t_a$ trokut



Slika 3.5.

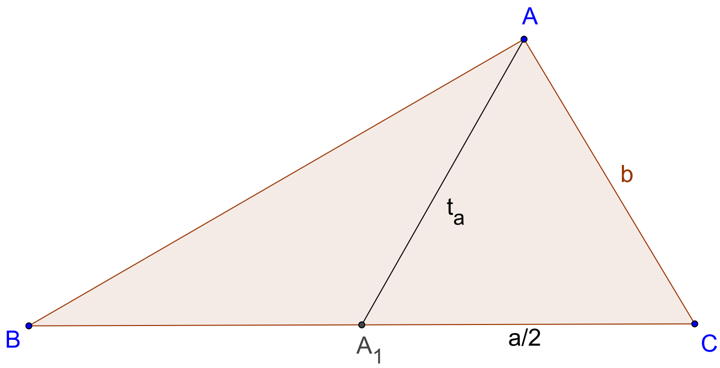
$\triangle ABC$ je jednakokračan jer se nožište N poklapa sa točkom polovišta stranice $\overline{BC}$, što bi značilo da se točka A nalazi na simetrali te stranice pa je jednako udaljena od točaka B i C.
Dakle, trokut $\triangle TBN$ možemo konstruirati jer je jednoznačno određen s dvije stranice $(\frac{2}{3}t_b, \frac{1}{3}t_a)$ i kutom nasuprot većoj stranici $(\angle TNB)$.
Presjekom pravca NT i kružnice $k(N, t_a)$ konstruirat ćemo točku A, a točka C je centralnosimetrična slika točke B sa centrom u točki N.



Slika 3.6.

12. Konstruirajmo trokut $\triangle ABC$, ako je zadano: t_a, a, b.

Analiza: Neka je A_1 polovište stranice $\overline{BC}$. Trokut $\triangle AA_1C$ je jednoznačno određen sa svoje tri stranice ($t_a, \frac{1}{2}a$ i b). Točka B je centralnosimetrična slika točke C sa centrom u točki A_1.



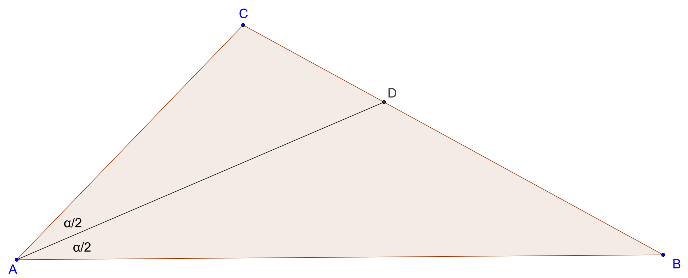
Slika 3.7.

18. Konstruirajmo trokut $\triangle ABC$, ako je zadano: t_a, a, s_β.

Rješenje:
Prije dokazivanja nerješivosti ovog konstruktibilnog problema iskažimo duljinu simetrala kutova trokuta $\triangle ABC$ pomoću njegovih stranica.

Lema 3.1.1. *U trokutu $\triangle ABC$ vrijedi*

$$\begin{aligned} s_\alpha^2(b+c)^2 &= bc[(b+c)^2-a^2], \\ s_\beta^2(a+c)^2 &= ac[(a+c)^2-b^2], \\ s_\gamma^2(a+b)^2 &= ab[(a+b)^2-c^2]. \end{aligned}$$



Slika 3.8.

Dokaz. Neka je točka D sjecište simetrale kuta $\angle BAC$ i nasuprotne stranice $\overline{BC}$. Duljinu simetrale $|AD|$ označit ćemo s s_α.
Najprije je očito $P(\triangle ADC) + P(\triangle ABD) = P(\triangle ABC)$, tj.

$$\frac{1}{2}s_\alpha b \sin\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}s_\alpha c \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}bc\sin\alpha,$$

odnosno

$$(b+c)s_\alpha = 2bc\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Iz $2\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1+\cos\alpha$, $\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, slijedi

$$s_\alpha^2(b+c)^2 = bc[(b+c)^2-a^2].$$

Analogno se pokaže da vrijedi i za ostale simetrale. □

Dokaz nerješivosti konstrukcije.
Iz izraza za s_β dokazanog u prethodnoj lemi izrazimo b^2:

$$b^2 = (a+c)^2 - \frac{s_\beta^2(a+c)^2}{ac}.$$

Uvrstimo to u izraz za težište t_a:

$$\begin{aligned} 4t_a^2 &= 2b^2 - a^2 + 2c^2 \\ 4t_a^2 &= 2(a+c)^2 - \frac{2s_\beta^2(a+c)^2}{ac} - a^2 + 2c^2. \end{aligned}$$

U gornjem izrazu poznate su nam varijable t_a, a i s_β, a nepoznata varijabla je c. Uzmimo da je $a = 2, t_a = 1$ i $s_\beta = 1$ i uvrstimo to u gornju jednakost

$$4 = 2(2+c)^2 - \frac{2 \cdot 1^2 (2+c)^2}{2c} - 4 + 2c^2.$$

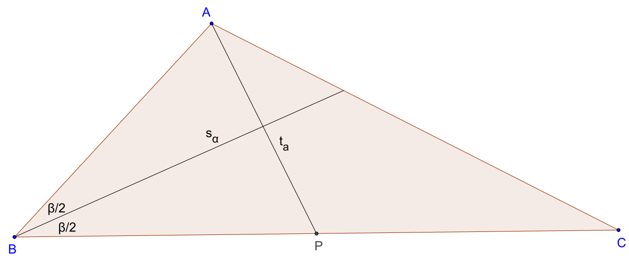
Sređivanjem dobivamo

$$4c^3 + 7c^2 - 4c - 4 = 0. \tag{3.1}$$

Racionalni korijeni, ako postoje, nalaze se u skupu $\left\{\pm 1, \pm 2 \pm 4, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}\right\}$. Isprobajmo Hornerovim algoritmom je li neki od tih brojeva rješenje gornje jednadžbe.

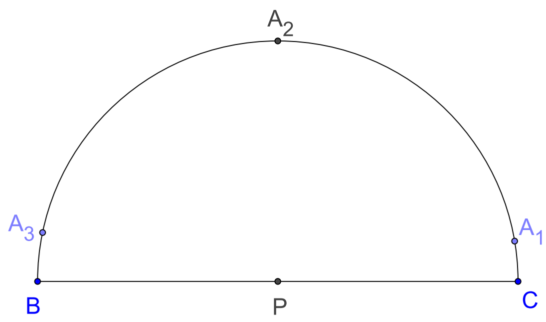
	4	7	-4	-4
1	4	11	7	3
-1	4	3	-7	3
2	4	15	26	48
-2	4	1	-5	6
4	4	23	88	348
-4	4	-9	32	-132
$\frac{1}{2}$	4	9	$\frac{1}{2}$	$-\frac{15}{4}$
$-\frac{1}{2}$	4	5	$-\frac{13}{2}$	$-\frac{3}{4}$
$\frac{1}{4}$	4	8	-2	$-\frac{9}{2}$
$-\frac{1}{4}$	4	6	$-\frac{11}{2}$	$-\frac{21}{8}$

Pokazali smo da jednadžba (3.1) nema racionalna rješenja, pa nije rješiva u kvadratnim radikalima, dakle, trokut s elementima $a = 2, t_a = 1$ i $s_\beta = 1$ nije moguće elementarno konstruirati.
Još moramo dokazati da takav trokut postoji.



Slika 3.9.

Fiksirajmo $|BC| = a = 2$. Neka je P polovište dužine $\overline{BC}$. Tada se vrh A nalazi na kružnici $k(P, t_a), t_a = 1$.



Slika 3.10.

Na slici su pokazana tri proizvoljna položaja vrha A; A_1, A_2, A_3. Kada se A_1 približava vrhu C tada $s_\beta \to 2$, kada se A_3 približava vrhu B, tada $s_\beta \to 0$. Ova promjena od 2 do 0 je neprekidna pa postoji položaj vrha A kada je $s_\beta = 1$, tj. taj trokut s elementima $a = 2, t_a = 1$ i $s_\beta = 1$ postoji.

$\square$

45. Konstruirajmo trokut $\triangle ABC$, ako je zadano: t_a, β, s_β.

Rješenje:

Kako ova konstrukcija nije moguća, provest ćemo dokaz. Uzmimo da je $\beta = 90°$. Tada je

$$b^2 = a^2 + c^2.$$

Iz leme o duljini s_β dobivamo

$$s_\beta^2(a+c)^2 = ac[(a+c)^2 - b^2],$$

a nakon što u taj izraz uvrstimo b^2 dobivamo

$$s_\beta^2(a+c)^2 = ac \cdot 2ac,$$

te korjenovanjem imamo

$$s_\beta(a+c) = ac\sqrt{2},$$

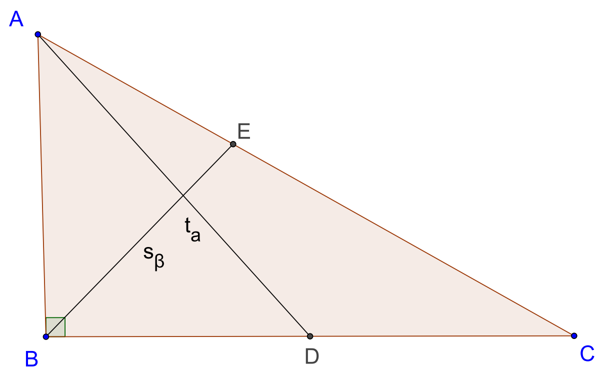
tj.

$$c = \frac{s_\beta a}{a\sqrt{2} - s_\beta}.$$

Uvrstimo u formulu za t_a

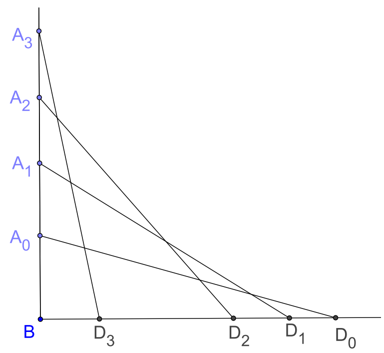
$$\begin{aligned} 4t_a^2 &= 2b^2 - a^2 + 2c^2 \\ 4t_a^2 &= 2(a^2 + c^2) - a^2 + 2c^2 \\ 4t_a^2 &= a^2 + 4c^2 \\ 4t_a^2 &= a^2 + 4\frac{s_\beta^2 a^2}{(a\sqrt{2} - s_\beta)^2} \end{aligned} \tag{3.2}$$

Uzmimo da je $s_\beta = \sqrt{2}$. Razlog tog izbora je u tome što želimo dobiti jednadžbu s racionalnim koeficijentima, a u ovom slučaju će $(a\sqrt{2} - s_\beta)^2$ prijeći u $(a\sqrt{2} - \sqrt{2})^2 = 2(a-1)^2$, tj. izgubio se $\sqrt{2}$. Sada bismo za vrijednost t_a morali uzeti onu za koju trokut s tim elementima postoji.



Slika 3.11.

Kada je $\beta = 90°$ tada se za različite trokute $\triangle ABC$ točka E miče po simetrali kuta β. Uzmimo da je t_a fiksiran kako bismo nacrtali trokut sa $\beta = 90°$ i t_a. Na jednom kraku odaberemo A, opišemo kružnicu $k(A, t_a)$, njezin presjek s drugim krakom je točka D i onda vrh C dobijemo tako da preslikamo B centralnom simetrijom s obzirom na točku D. Na donjoj slici je napravljeno nekoliko takvih točaka A i D.



Slika 3.12.

Nadalje, udaljenost za koju možemo udaljiti A od B je upravo t_a. Kad se A približava tom krajnjem položaju D teži točki B, samim time će i C težiti B (je $|BC| = 2|BD|$) i simetrala kuta β će težiti 0. Drugi krajnji položaj je kad se A približava točki B, tj. $|BA| \to 0$. Tada $|BD| \to t_a$, tj. $|BC| \to 2t_a$ i $s_\beta \to 0$.
Dakle s_β se mjenja ovako: od 0 raste do neke vrijednosti i onda opet pada do 0. Ova je promjena očito simetrična pa pogledajmo situaciju kad su A i D jednako udaljeni od B. Tada je trokut $\triangle ABD$ pravokutni jednakokračni, tj. $\angle ADB = 45°$. Simetrala kuta β siječe $\overline{AD}$ u F i zbog $\angle FBD = 45°$ imamo da je $|BF| = |FB| = \frac{1}{2}t_a$. Kada dovršimo trokut $\triangle ABC$, tada imamo

$$\overline{s_\beta} = |BE| > |BF| = \frac{1}{2}t_a \ \text{ i } \ \overline{s_\beta} < t_a.$$

Dakle, s_β se mijenja od 0 do nekog broja $\overline{s_\beta}$ koji je između $\frac{1}{2}t_a$ i t_a.
Ako odaberemo $t_b = 3$, onda je maksimum za s_β broj između $\frac{3}{2}$ i 3.
Mi smo izabrali da je $s_\beta = \sqrt{2} \approx 1.41 < \frac{3}{2}$ pa pri promjeni kad se s_β mijenja od 0 do svog maksimuma koji je veći od $\frac{3}{2}$, u nekom trenutku postigne vrijednost $\sqrt{2}$. Dakle, trokut $\beta = 90°$, $s_\beta = \sqrt{2}$, $t_a = 3$ postoji.
Uvrstimo li te vrijednosti u (3.2) dobivamo

$$\begin{aligned}
4 \cdot 3^2 &= a^2 + 4\frac{\sqrt{2}^2 a^2}{(a\sqrt{2} - \sqrt{2})^2} \\
36 &= a^2 + \frac{4a^2}{(a-1)^2} \\
36(a-1)^2 &= a^2(a-1)^2 + 4a^2
\end{aligned}$$

$$a^4 - 2a^3 - 31a^2 + 72a - 36 = 0 \tag{3.3}$$

Rezolventa te jednadžbe 4. stupnja glasi

$$(ay-c)^2 = 4(\frac{a^2}{4} - b + 2y)(y^2 - d),$$

gdje je $a = -2, b = -31, c = 72, d = -36$, te dobivamo

$$2y^3 + 31y^2 - 144 = 0.$$

Ispitivanjem svih kandidata za racionalna rješenja dobivamo da jednadžba nema racionalnih rješenja, pa prema teoremu da to znači da niti jednadžba (3.3) nije rješiva u kvadratnim radikalima, tj. a se ne može elementarno konstruirati pa time niti trokut $\triangle ABC$.

49.([5]) Konstruirajmo trokut $\triangle ABC$, ako je zadano: t_a, β, r.

Rješenje:
Dokazat ćemo da je ovaj konstruktibilni problem nerješiv.
Promotrimo veličine

$$t_a = \sqrt{14}, \beta = \frac{\pi}{2}, r = 1.$$

Pokazat ćemo da trokut s tim veličinama postoji, ali da mu je stranica a nekonstruktibilna.
Trokut $\triangle ABC$ je pravokutan, pa prema Pitagorinom teoremu vrijedi:

$$b^2 = a^2 + c^2. \tag{3.4}$$

Za polumjer upisane kružnice r vrijedi

$$P = r \cdot s$$

gdje je P površina trokuta i s poluopseg.
Upotrebom Heronove formule dobivamo

$$\begin{aligned}
\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} &= r \cdot s \\
\frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{c+a-b}{2} \cdot \frac{c-a+b}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} &= r^2(a+b+c)^2 \\
\frac{1}{4}[(a+c)^2 - b^2][b^2 - (c-a)^2] &= r^2(a+b+c)^2 \\
\frac{1}{4}[a^2 + c^2 + 2ac - b^2][b^2 - c - a^2 + 2ac] &= r^2(a+b+c)^2.
\end{aligned}$$

Supstituirajući u gornju jednakost (3.4) dobivamo

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}[2ac][2ac] &= r^2(a+b+c)^2 \\
r^2(a+b+c)^2 &= a^2c^2 \\
r(a+b+c) &= ac. \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

U jednakost

$$4t_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$$

uvrstimo $t_a = \sqrt{14}$ i $b^2 = a^2 + c^2$.
Dobivamo

$$a^2 + 4c^2 = 56.$$

Uz supstituciju $w = a - 2$ dobivamo $(w+2)^2 + 4c^2 = 56$.
U jednakost (3.5) uvrstimo $r = 1$, izrazimo b te uvrstimo u (3.4). Dobivamo da je

$$\begin{aligned}
a + b + c &= ac \\
b &= ac - a - c \\
(ac - a - c)^2 &= a^2 + c^2 \\
a^2c^2 + a^2 + c^2 - 2a^2c - 2ac^2 + 2ac &= a^2 + c^2 \\
a^2c^2 - 2a^2c - 2ac^2 + 2ac &= 0 \\
ac - 2a - 2c + 2 &= 0 \\
c(a-2) &= 2a - 2
\end{aligned}$$

tj.

$$c = \frac{2a-2}{a-2} = \frac{2(a-2)+2}{w} = \frac{2w+2}{w}.$$

Kad taj izraz za c uvrstimo u $(w+2)^2 + 4c^2 = 56$ dobivamo da je

$$\begin{aligned}
(w+2)^2 + 4(\frac{2w+2}{w})^2 &= 56 \\
w^2 + 4w + 4 + \frac{16w^2 + 32w + 16}{w^2} &= 56 \\
w^4 + 4w^3 + 4w^2 + 16w^2 + 32w + 16 &= 56w^2 \\
w^4 + 4w^3 - 36w^2 + 32w + 16 &= 0.
\end{aligned}$$

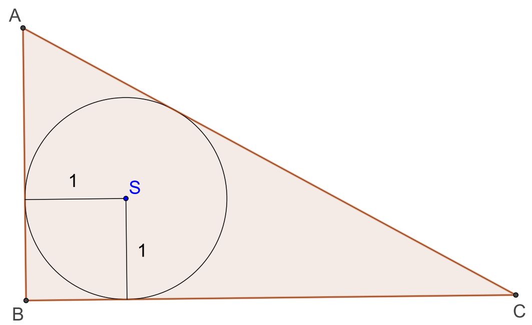
Definiramo polinom f ovako

$$f(x) = x^4 + 4x^3 - 36x^2 + 32x + 16.$$

Vrijedi: $f(0) = 16 > 0$ i $f(2) = -16 < 0$.
Budući da je polinom f neprekidna funkcija koja u 0 poprima pozitivnu vrijednost, a u 2 negativnu vrijednost, zaključujemo da postoji $u \in \langle 0, 2 \rangle$ za koji $f(u) = 0$.
Za stranicu a upotrijebimo baš tu vrijednost u, tj.

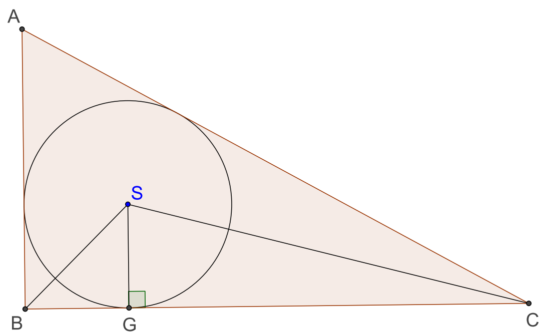
$$a = w + 2|_{w=u} = u + 2 > 0 + 2 = 2.$$

Trokut s elementima $\beta = \frac{\pi}{2}, r = 1, a = u + 2$ je moguće konstruirati. Naime, kad pogledamo skicu vidljiv je način konstrukcije.
Konstruirali bismo pravi kut, te kružnicu polumjera $r = 1$ koja dira krakove pravog kuta.
Na horizontalni krak bismo nanijeli $a > 2$ i tako bismo dobili točku C. Tangenta iz točke C na kružnicu siječe vertikalni krak kuta u vrhu A.
Provjerimo ima li taj trokut težišnicu iz vrha A dugu $\sqrt{14}$.



Slika 3.13.

Dopunimo gornju skicu ovako:



Slika 3.14.

Budući da je $\angle GBS = \frac{\beta}{2} = 45^\circ$ i $\angle BGS = 90^\circ$ slijedi da je trokut $\triangle BGS$ jednakokračan jer je $|GS| = |BG| = r = 1$.
Iz trokuta $\triangle CGS$ imamo

$$\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{|GS|}{|CG|} = \frac{r}{|BC| - |CG|} = \frac{1}{u+2-1} = \frac{1}{u+1}.$$

Nadalje,

$$\mathrm{tg}\gamma = \frac{2\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}}{1 - \mathrm{tg}^2\frac{\gamma}{2}} = \frac{\frac{2}{u+1}}{1 - \frac{1}{(u+1)^2}} = \frac{2(u+1)}{u^2+2u}.$$

Iz trokuta $\triangle ABC$ imamo

$$c = a\mathrm{tg}\gamma = (u+2)\frac{2(u+1)}{u^2+2u} = \frac{2(u+1)}{u}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 = (u+2)^2 + c^2,$$

te uvrštavanjem u $4t_a^2 = 2b^2 - a^2 + 2c^2$ imamo

$$\begin{aligned}
4t_a^2 &= 2(u+2)^2 + 2(\frac{4(u+1)^2}{u^2}) - (u+2)^2 + 2(\frac{4(u+1)^2}{u^2}) \\
4t_a^2 &= (u+2)^2 + 4(\frac{4(u+1)^2}{u^2}) \\
4t_a^2 &= \frac{u^4 + 4u^3 + 4u^2 + 16u^2 + 32u + 16}{u^2} \\
4t_a^2 &= \frac{u^4 + 4u^3 + 20u^2 + 32u + 16}{u^2}. \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

Iz činjenice da je u nultočka polinoma f slijedi da je

$$u^4 + 4u^3 - 36u^2 + 32u + 16 = 0,$$

pa je

$$u^4 + 4u^3 + 20u^2 + 32u + 16 = 56u^2.$$

To uvrstimo u (3.6) i dobivamo

$$4t_a^2 = \frac{56u^2}{u^2} = 56, \quad \text{tj.} \quad t_a = \sqrt{14}.$$

Dakle trokut $\triangle ABC$ ima upravo sve zadane elemente i postoji, sada dokažimo da se a ne može konstruirati.
Vraćamo se na polinom f. To je polinom četvrtog stupnja, a prema teoremu jednadžba četvrtog stupnja rješiva je ako i samo ako je u kvadratnim radikalima rješiva njezina rezolventa glasi

$$(ay - c)^2 = 4(\frac{a^2}{4} - b + 2y)(y^2 - d).$$

Za $a = 4$, $b = -36$, $c = 32$, i $d = 16$ rezolventa glasi $y^3 + 18y^2 + 16y - 384 = 0$.
Ako primjenimo supstituciju $t = y - 4$ dobivamo

$$t^3 + 22t^2 + 104t + 32 = 0.$$

Ispitamo li sve kandidate za racionalna rješenja dobivamo da ova jednadžba nema racionalnih rješenja, pa nije niti rješiva u kvadratnim radikalima. Time smo pokazali da ovaj trokut nije konstruktibilan pomoću ravnala i šestara.

$\square$

Zaključak

Težišnice trokuta, kao i težište, su zaista posebne veličine koje svaki trokut posjeduje. Tijekom povijesti su ih matematičari promatrali te su donijeli neke zaključke o njima koji su im pomogli razumjeti neke posebne odnose u svakom trokutu. Svojstva koja smo dokazali na više načina omogućuju i ne tako vrsnim matematičarima da razumiju kakvi odnosi u trokutu vrijede i zašto se baš na neki određeni način mora koristiti pojedinim elementima kako bi došli do rješenja. U svakom slučaju, težišnice trokuta, kao dužine koje spajaju jedan vrh sa polovištem nasuprotne stranice u trokutu, i težište trokuta, kao geometrijsko mjesto točaka u kojemu se sve tri težišnice sijeku, su zaista posebne veličine vrijedne promatranja koje nam pomažu u razumijevanju odnosa u trokutima.

Summary

Medians of a triangle, as well as the centroid of a triangle, geometrically speaking, are some really special parts that every triangle has. Through history, they have been object of observation by many mathematicians who have come to useful conclusions about them. Those conclusions have been used in understanding some specific relations in every triangle. Because of all those established properties, people who are not that good in mathematics can easily understand which relations in a triangle are valid and why some specific elements must be used in a certain way in order to come to not so easily obtainable solutions. Anyhow, medians of a triangle defined as line segments from vertices to the midpoints of the opposite sides, and the centroid as the intersection point of meridians, are parts of a triangle worth observing that help us understand specific relations in every triangle.

Bibliografija

[1] Z. Kurnik (urednik), *Matematička natjecanja u Republici Hrvatskoj 1992.-2006.*, Hrvatsko matematičko društvo, Zagreb, 2007.

[2] A. Marić, *Planimetrija*, Element, Zagreb, 1996.

[3] D. Palman, *Trokut i kružnica*, Element, Zagreb, 1994.

[4] B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika 1.*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992.

[5] J. Švrček, J. Vanžura, *Geometrie trojuhelnika*, Polytechnicka knižnice, Praha, 1988.

Životopis

Rođen sam 11. prosinca 1985. godine u Zenici, BiH. Osnovnu školu Dragutina Domjanića u Svetom Ivanu Zelini, završio sam 2000. godine. Iste godine upisao sam opću gimnaziju u srednjoj školi Dragutina Stražimira također u Svetom Ivanu Zelini, te je završavam 2004. godine. Nakon završene srednje škole odslužio sam vojni rok 2005. godine u 55. klasi Hrvatskih vojnih ročnika. Preddiplomski sveučilišni studij matematike, smjer: nastavnički na Prirodoslovno matematičkom fakultetu u Zagrebu upisao sam 21. srpnja 2008. godine, te isti završio 31. srpnja 2013. godine, čime sam stekao diplomu sveučilišnog prvostupnika edukacije matematike. Diplomski sveučilišni studij matematike, smjer: nastavnički na Prirodoslovno matematičkom fakultetu u Zagrebu upisao sam 21. listopada 2013. godine. Tokom studiranja stekao sam mnoga znanja, vještine i kompetencije potrebne za poučavanje i odgoj. dugi niz godina u slobodno vrijeme igram nogomet tako da sam bio član malonogometne sekcije koja je predstavljala boje prirodoslovno matematičkog fakulteta na raznim sveučilišnim sportskim natjecanjima. Od hobija su mi dragi planinarenje, čitanje knjiga i putovanja.