

# Ravninske krivulje

---

Škrivanek, Renata

Master's thesis / Diplomski rad

2015

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:799281>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-12-02**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
Matematički odsjek

**Renata Škrivanek**  
**RAVNINSKE KRIVULJE**

Diplomski rad

Voditeljica rada:  
doc.dr.sc. Maja Starčević

Zagreb, 2015



Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik

2. \_\_\_\_\_, član

3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_ .

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_

2. \_\_\_\_\_

3. \_\_\_\_\_



*Zahvaljujem se svojoj poštovanoj mentorici, doc.dr.sc. Maji Starčević koja je prihvatila mentorstvo, uvijek bila na raspolaganju, te svojim znanjem puno pomogla u izradi ovog završnog rada.*



# Sadržaj

<b>Uvod</b>	<b>ix</b>
<b>1. Krivulja definirana kao presječna linija dane plohe ravninom</b>	<b>1</b>
1.1. Konike . . . . .	1
1.2. Persejeve krivulje . . . . .	3
<b>2. Krivulja je definirana kao geometrijsko mjesto točaka koje zadovoljavaju dano svojstvo</b>	<b>13</b>
2.1. Cisoida . . . . .	13
<b>3. Krivulje određene kao putanja točke koja se giba po nekom određenom zakonu</b>	<b>19</b>
3.1. Uvod . . . . .	19
3.2. Cikloida . . . . .	21
3.3. Epicikloida . . . . .	25
3.4. Kardioda . . . . .	28
3.5. Hipocikloida . . . . .	30
<b>4. Krivulja se definira zadavanjem njenih diferencijalnih svojstava</b>	<b>35</b>
4.1. Uvod . . . . .	35
4.2. Izvod traktrise . . . . .	35
4.3. Neka metrička svojstva . . . . .	38
4.4. Polumjer zakrivljenosti traktrise . . . . .	40
4.5. Evoluta traktrise . . . . .	41
<b>5. Krivulje koje se zadaju u analitičkom obliku</b>	<b>45</b>
5.1. Descartesov list (Cartesiusov list) . . . . .	45
<b>Bibliografija</b>	<b>51</b>





# Uvod

Krivulja je linija koja ne treba biti ravna. Najjednostavnije krivulje su pravac i kružnica.

Zanimanje za krivulje je počelo puno prije nego što su postale predmetom matematičkih proučavanja. To se vidi u brojnim primjerima iz prapovijesti gdje su krivulje korištene kao ukras na zidovima spiljskih obitavališta<sup>1</sup> (slika 1) te su bile ukras na svakodnevnim predmetima<sup>2</sup> (slika 2).



**Slika 1.** Megalitska umjetnost, Irska. Ulazna ploča u grobnicu, 3500.-2500. g. pr. Kr.



**Slika 2.** Butmirska vaza, 2400.-2000. g. pr. Kr.

Svi narodi na određenom stupnju kulture upotrebljavali su primitivne sprave za konstrukciju pravca i kružnice.

Grčki antički geometričari su proučavali mnoge druge vrste krivulja kako bi riješili geometrijske probleme koje nisu mogli riješiti ravnalom i šestarom – problem trisekcije kuta, problem udvostručenja kocke i problem kvadrature kruga. Neke od krivulja koje su proučavali:

<sup>1</sup>Slika preuzeta s: [https://en.wikipedia.org/wiki/Irish\\_art](https://en.wikipedia.org/wiki/Irish_art)

<sup>2</sup>Slika preuzeta s: <http://portal.skola.ba/start/Desktopdefault.aspx?tabid=299&id=3915>

- čunjosječnice, otkrio ih je Menehmo pri rješavanju deloskog problema udvostručenja kocke. Proučavao ih je i Apolonije iz Perge
- Dioklova cisoida, Diokle ju je koristio za rješavanje deloskog problema o udvostručenju kocke
- Nikomedova konhoida, Nikomed ju je primijenio pri rješavanju problema o trisekciji kuta te pri rješavanju problema udvostručenja kocke
- Arhimedova spirala, Arhimed ju je koristio za rješavanje problema trisekcije kuta i kvadrature kruga
- spiričke linije (Persejeve krivulje), proučavao ih je Persej.

U srednjem vijeku otkrića grčkih geometričara su zaboravljena. Napredak u teoriji krivulja javlja se u 17. stoljeću s pojavom analitičke geometrije.

Zahvaljujući René Descartesu (1596.-1650.) koji je otkrio analitičku geometriju, svaka ravninska krivulja se može zapisati jednadžbom  $f(x, y) = 0$  koja povezuje dvije promjenjive veličine. S druge strane, jednadžba svake krivulje se može sastaviti na temelju podataka koji određuju određenu krivulju i izraženi su početnim uvjetima.

U ovom radu opisat ćemo neke načine tvorbe krivulja u ravnini.

U prvom poglavlju definiramo krivulje koje nastaju presjekom dane plohe ravninom. Tako nastaju konike i Persejeve krivulje koje opisujemo.

U drugom poglavlju definiramo krivulje koje nastaju kao geometrijsko mjesto točaka koje zadovoljavaju dano svojstvo. Ovaj način tvorbe krivulja u ravnini su primjenjivali starogrčki matematičari; kao geometrijsko mjesto točaka definirao je Diokles cisoidu koju opisujemo.

U trećem poglavlju opisujemo krivulje koje nastaju kao putanja točke koja se giba po nekom određenom zakonu. Sve cikloidalne krivulje, a koje ćemo i opisati, nastaju kao putanja točke čvrsto povezane s krugom koji se kotrlja bez klizanja po kružnici drugog kruga.

U četvrtom poglavlju definiramo krivulje koje nastaju zadavanjem njenih diferencijalnih svojstava i opisujemo traktrisu – krivulju koju karakterizira konstantna duljina tangente.

U zadnjem, petom poglavlju opisujemo krivulje koje se zadaju u analitičkom obliku. Ovaj način tvorbe krivulja je prirodniji u odnosu na druge jer se krivulja odmah zadaje jednadžbom; ne treba sastavljati jednadžbu na temelju svojstava krivulje što nije nimalo jednostavno kao što se vidi u prethodnim poglavljima. Od krivulja koje se koriste u znanosti i tehnici, a zadaju se analitički, opisujemo Descartesov list.

Osim gore nabrojanih načina tvorbe krivulja postoje još neki koje ne budemo detaljnije opisivali u ovom radu. To su:

- *krivulje koje su definirane kao rezultat nekog geometrijskog preslikavanja već poznate krivulje. Osnovna geometrijska preslikavanja su afina, projektivna, kvadratna, korelativna,*

tangencijalna preslikavanja te inverzija. Ovaj način tvorbe krivulja omogućuje određivanje svojstava krivulje koja se transformira.

- *izvođenje linija povezivanjem projektivno pridruženih elemenata.* Ovaj način tvorbe krivulja se proučava u projektivnoj geometriji. Metodom projiciranja mogu se dobiti cikloide i to kao paralelna projekcija cilindrične zavojnice na ravninu usporednu s njenom osi, zatim Arhimedova spirala kao ortogonalna projekcija konusne zavojnice na ravninu koja je okomita na njenu os, Descartesovi ovali kao projekcije prodornih krivulja dviju stožastih ploha s paralelnim osima na ravninu okomitu na tu os, i druge.



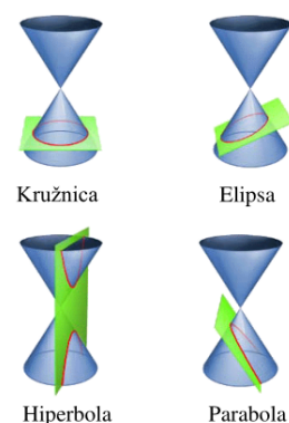
# 1. Krivulja definirana kao presječna linija dane plohe ravninom

Ovaj način definiranja krivulja se u povijesti prvi javlja.

## 1.1. Konike

Otkriće konika pripisuje se Menehmu<sup>1</sup> (oko 380.-320. pr. Kr.). To otkriće je vezano uz pokušaj da riješi problem udvostručenja kocke<sup>2</sup>. Menehmo je otkrio da se presjekom plašta stošca i ravnine koje je okomita na izvodnicu stošca dobiju do tada nepoznate krivulje. Vrsta krivulje je ovisila o vrsti stošca. Za stožac šiljastog vrha dobivamo elipsu, pravokutnog vrha parabolu i tupog vrha dobivamo hiperbolu. Ove nazive nije dao Menehmo, imena pripadajućim krivuljama je dao Apolonije iz Perge (262.–190. pr. Kr.).

Apolonije je prvi uvidio da se presjekom plašta rotacijskog stošca i ravnine mogu dobiti sve tri krivulje (Slika 1.1). Koju krivulju ćemo dobiti ovisi o nagibu ravnine koja siječe rotacijski stožac.



Slika 1.1.

<sup>1</sup>Menehmo je bio Eudoksov učenik i po nekim izvorima učitelj Aleksandra Velikog.

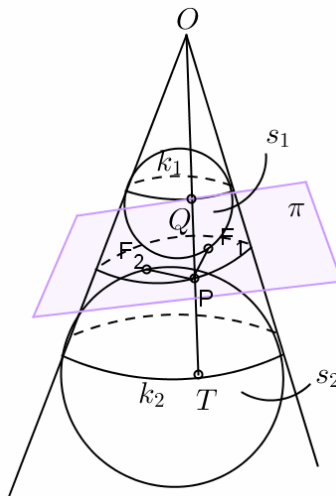
<sup>2</sup>Problem udvostručenja kocke ili Delijski problem je problem koji su trebali riješiti Atenjani u doba epidemije kuge, oko 430. pr. Kr., a sastojao se u tome da trebaju izraditi oltar dvostruko veći od tadašnjeg kockastog oltara. Uz ostala dva problema (problem trisekcije kuta i problem kvadrature kruga) je imao velik utjecaj na razvoj geometrije.

Kako bismo dokazali gornju tvrdnju za slučaj elipse, koristit ćemo Dandelinov teorem<sup>3</sup>.

**Propozicija 1.1.** (Dandelinov teorem.)

Ako plašt uspravnog kružnog stošca presiječemo ravninom koja siječe sve njegove izvodnice i ne prolazi vrhom stošca, onda je presječna krivulja ili kružnica (ako je ravnina okomita na os stošca) ili elipsa.

*Dokaz.* Na slici 1.2 dan je presjek stošca ravninom  $\pi$  koja siječe sve izvodnice stošca, nije okomita na os stošca i ne prolazi vrhom tog stošca. Upišimo u taj stožac kugle  $s_1$  i  $s_2$ , gdje  $s_1$  dira ravninu  $\pi$  odozgo u točki  $F_1$ , a  $s_2$  odozdo u točki  $F_2$ .



Slika 1.2.

Trebamo pokazati da je presječna krivulja ravnine  $\pi$  i plašta stošca elipsa čiji fokusi su točke  $F_1$  i  $F_2$ .

Uzmimo na presječnoj krivulji proizvoljnu točku  $P$ . Neka kugla  $s_1$  dira stožac uzduž kružnice  $k_1$ , a kugla  $s_2$  uzduž kružnice  $k_2$ . Izvodnica  $\overline{OP}$  siječe kružnicu  $k_1$  u točki  $Q$ , a kružnicu  $k_2$  u točki  $T$ .

Duljine dijela tangenata na kuglinu pluhu između točke izvan kugline plohe iz koje su povučene tangente i dirališta na kuglinoj plohi su jednake duljine pa je

$$\begin{aligned} |PF_1| &= |PQ|, \\ |PF_2| &= |PT|. \end{aligned}$$

Zbrojimo gornje jednakosti i dobivamo

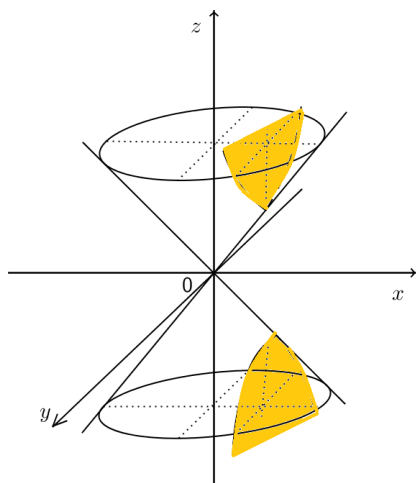
$$|PF_1| + |PF_2| = |PQ| + |PT| = |QT|. \quad (1.1)$$

<sup>3</sup>G. P. Dandelin (1794.-1847.) – francuski matematičar i inženjer koji je živio u Belgiji. 1822. g. otkrio je vezu između presjeka stošca i ravnine, fokusa konika, te kugla upisanih u stožac koje diraju ravninu kojom je stožac presječen

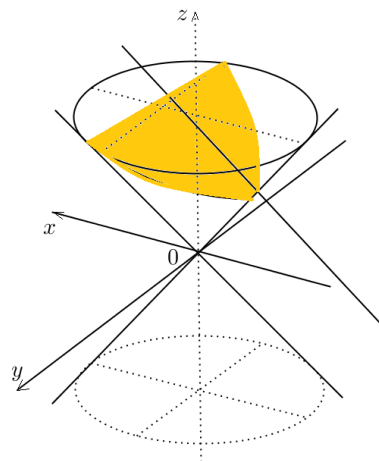
S obzirom da je  $\overline{QT}$  izvodnica uspravnog krnjeg stošca kojemu je donja osnovica krug omeđen kružnicom  $k_2$ , a gornja osnovica krug omeđen kružnicom  $k_1$ , vrijedi da je  $|QT| = 2a$ , gdje je  $a > 0$  realna konstanta. Pokazali smo s (1.1) da je  $|PF_1| + |PF_2| = |QT|$ , pa je stoga  $|PF_1| + |PF_2| = 2a$  za svaku točku  $P$  presječne krivulje. Zaključujemo da je ta krivulja elipsa s fokusima  $F_1$  i  $F_2$ .  $\square$

*Napomena.* U dokazu teorema koristili smo kugle  $s_1$  i  $s_2$  koje diraju ravninu  $\pi$  i stožac. Zovemo ih Dandelinove kugle.

*Napomena.* Presjek plašta dvostrukog uspravnog kružnog stošca ravninom koja ne prolazi njegovim vrhom i paralelna je s osi stošca je hiperbola (slika 1.3), a presjek plašta dvostrukog uspravnog kružnog stošca ravninom koja je paralelna s jednom izvodnicom stošca je parabola (slika 1.4). U slučaju da je ravnina okomita na os stošca, presjek je kružnica.



Slika 1.3.



Slika 1.4.

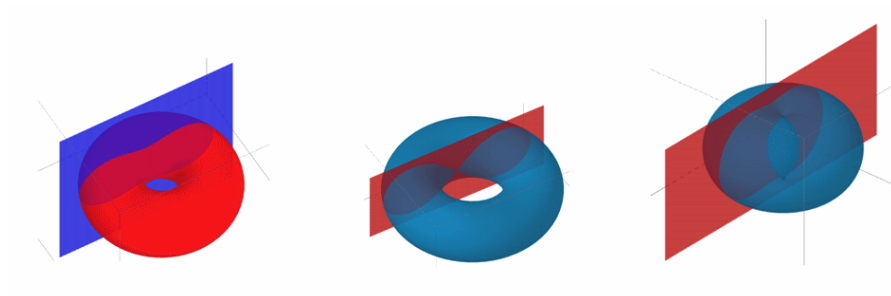
## 1.2. Persejeve krivulje

Persejeve krivulje su dobile ime po grčkom geometričaru Perseju (2. st. pr. Kr.) o kojemu danas gotovo ništa ne znamo. Ono malo što znamo pripisuje se Proklosu<sup>4</sup> koji mu u svojim spisima pripisuje otkriće krivulja koje nastaju kao presjek torusa<sup>5</sup> i ravnina koje su paralelne njegovoj osi (slika 1.5).

<sup>4</sup>Proklos (410.–485.) – neoplatonist, studirao je u Aleksandriji. Njegovi komentari Euklidovih Elemenata su najvažniji izvor saznanja o antičkoj grčkoj matematici.

<sup>5</sup>Torus je rotaciono tijelo koje nastaje rotacijom kružnice oko osi koja leži u ravnini kružnice.



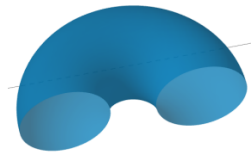


Slika 1.5.

Pogledajmo torus koji nastaje rotacijom kružnice polumjera  $r > 0$  oko pravca koji leži u ravni te kružnice na udaljenosti  $R$  od središta kružnice. Pravac oko kojega rotiramo kružnicu zovemo *os torusa*.

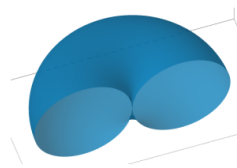
Postoje tri tipa torusa čiji oblik ovisi o omjeru  $\frac{r}{R}$ , odnosno o položaju pravca oko kojeg kružnica rotira:

- ako je  $R > r$  (pravac je izvan kružnice), kažemo da je torus otvoren (slika 1.6),



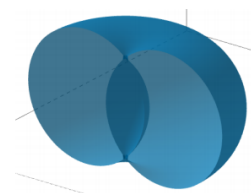
Slika 1.6.

- ako je  $R = r$  (pravac je tangenta kružnice), kažemo da je torus zatvoren (slika 1.7),



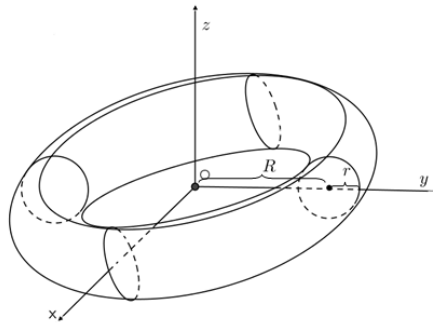
Slika 1.7.

- ako je  $R < r$  (pravac siječe kružnicu), kažemo da je torus samopresječni (slika 1.8).



Slika 1.8.

Neka je dan torus koji leži u koordinatnom sustavu  $Oxyz$  i koji nastaje rotacijom oko osi  $z$  kružnice polumjera  $r > 0$  koja se nalazi u  $yz$  ravnini. Neka je udaljenost osi  $z$  do središta kružnice  $R$ . Uzmimo da je  $R > r$  (slika 1.9):



Slika 1.9.

Sa slike 11 vidimo da je jednačba kružnice koja rotira oko osi  $z$

$$(y - R)^2 + z^2 = r^2.$$

Tada je implicitna jednačba torusa

$$\left(\sqrt{y^2 + x^2} - R\right)^2 + z^2 = r^2. \quad (1.2)$$

Stavimo da je

$$\begin{aligned} x &= u \cos v, \\ y &= u \sin v. \end{aligned}$$

Kvadriranjem i zbrajanjem gornjih jednakosti dobivamo

$$x^2 + y^2 = u^2(\cos^2 v + \sin^2 v) = u^2.$$

Uvrstimo dobivenu jednakost u (1.2):

$$(u - R)^2 + z^2 = r^2,$$

odakle je

$$z = \sqrt{r^2 - (u - R)^2},$$

pa su parametarske jednačbe torusa

$$\begin{aligned} x &= u \cos v, \\ y &= u \sin v, \\ z &= \sqrt{r^2 - (u - R)^2}, \end{aligned}$$

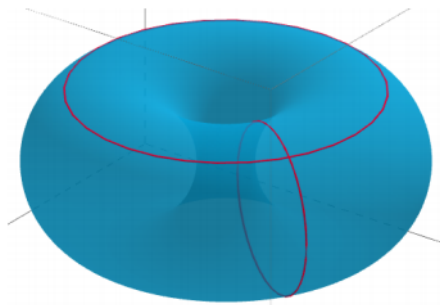
gdje su  $u \in [R - r, R + r]$ ,  $v \in [0, 2\pi)$ .

Stavimo sada da je  $(u - R)^2 = r^2 \cos^2 u'$  odakle dobivamo  $u = R + r \cos u'$ , gdje je  $u'$  novi parametar,  $u' \in [0, 2\pi)$ .

Uvrstimo li dobivene jednakosti u parametarske jednadžbe torusa, dobit ćemo parametarske jednadžbe torusa s novim parametrom  $u'$ :

$$\begin{aligned}x &= (R + r \cos u') \cos v, \\y &= (R + r \cos u') \sin v, \\z &= r \sin u' .\end{aligned}$$

Za  $v = \text{const}$  dobivamo meridijane na torusu, dok za  $u' = \text{const}$  dobivamo paralele na torusu (slika 1.10). Meridijani i paralele se na torusu sijeku pod pravim kutom. Kada je  $R = r$ , svi meridijani dodiruju os torusa.



**Slika 1.10.**

Pogledajmo sada ponovo implicitnu jednadžbu torusa

$$\left(\sqrt{y^2 + x^2} - R\right)^2 + z^2 = r^2.$$

Kada se riješimo korijena, dobivamo jednadžbu torusa u obliku

$$(x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 = 4R^2(x^2 + y^2).$$

Iz gornje jednadžbe torusa možemo doći do Persejevih krivulja koje dobijemo, kako smo već rekli, presjekom torusa s proizvoljnom ravninom koja je paralelna osi. Jedna moguća klasa tih ravnina (ostale se dobivaju njihovom rotacijom oko osi torusa) ima jednadžbu oblika  $y = c$ , pri čemu uzimamo  $0 \leq c \leq R + r$ , jer će inače presjek torusa i ravnine biti prazan skup. Za  $c = 0$ , Persejeva krivulja je unija dvije kružnice, a za  $c = R + r$  Persejeva krivulja je točka.

*Komentar.* Zbog simetrije torusa, problem ćemo lakše proučiti promatramo li klasu ravnina oblika  $y = c$  jer su jednadžbe tih ravnina jednostavne. Ostale ravnine se dobivaju njihovom rotacijom oko osi torusa.

Okomita projekcija presjeka torusa i ravnine  $y = c$  na ravninu  $Ozx$  je krivulja čija je implicitna jednadžba

$$(x^2 + z^2 + R^2 - r^2 + c^2)^2 = 4R^2(x^2 + c^2).$$

Umjesto  $z$  pisat ćemo  $y$  i dobivamo jednadžbu krivulje u ravnini  $Oxy$

$$(x^2 + y^2 + R^2 - r^2 + c^2)^2 = 4R^2(x^2 + c^2).$$

Gornju jednadžbu zapišimo u obliku

$$(x^2 + y^2)^2 = 2\alpha x^2 + 2\beta y^2 + \gamma,$$

gdje je

$$\alpha = R^2 + r^2 - c^2,$$

$$\beta = r^2 - R^2 - c^2,$$

$$\gamma = (R + r + c)(r + c - R)(c + R - r)(R + r - c).$$

Među krivuljama oblika  $(x^2 + y^2)^2 = 2\alpha x^2 + 2\beta y^2 + \gamma$  dobivamo Boothovu lemniskatu ako je  $\gamma = 0$ , Cassinijeve ovale te Bernoullijevu lemniskatu.

### Boothova lemniskata

Kako smo rekli, jednadžbu Boothove lemniskate dobivamo stavimo li u jednadžbu Persejeve krivulje  $(x^2 + y^2)^2 = 2\alpha x^2 + 2\beta y^2 + \gamma$  da je  $\gamma = 0$ .

No,  $\gamma = 0$  za

I) kad je  $R > r$

I.I)  $c = R - r$ ,  $\alpha = 2Rr$ ,  $\beta = -2R(R - r)$

I.II)  $c = R + r$ , no tada je presjek ravnine  $y = c$  i torusa samo jedna točka.

*Napomena.* U ostalim slučajevima se jednadžba torusa izvodi analogno.

II) kad je  $r > R$

II.I)  $c = r - R$  ( $R < r$ ),  $\alpha = 2Rr$ ,  $\beta = 2R(r - R)$

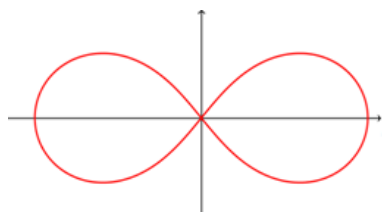
II.II)  $c = R + r$ , no tada je presjek ravnine  $y = c$  i torusa samo jedna točka.

III) kad je  $R = r$

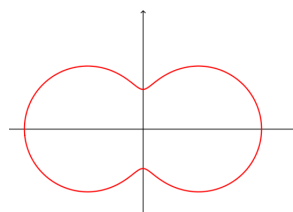
III.I)  $c = 0$ , tada ravnina  $y = c$  prolazi kroz os torusa pa su joj presjek s torusom dvije kružnice.

III.II)  $c = 2R$ , tada ravnina  $y = c$  dira torus u jednoj točki.

U prvom slučaju Boothova lemniskata je nožišna krivulja hiperbole u odnosu na njeno središte pa ju zovemo hiperbolička Boothova lemniskata (slika 1.11), a u drugom je nožišna krivulja elipse u odnosu na njeno središte pa ju zovemo eliptička Boothova lemniskata (slika 1.12).

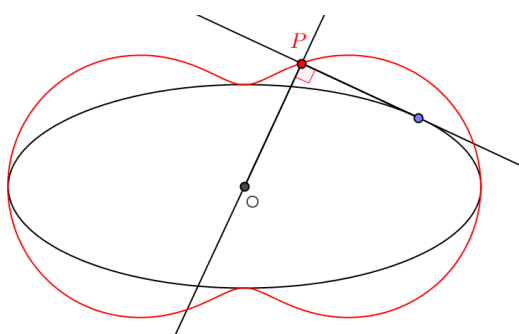


Slika 1.11.



Slika 1.12.

*Komentar.* Nožišna krivulja neke krivulje  $C$  s obzirom na neku fiksnu točku  $O$  je skup svih točaka  $P$  koje se dobiju kao presjek neke tangente krivulje  $C$  s okomicom na tu tangentu koja prolazi danom točkom  $O$  (slika 1.13).



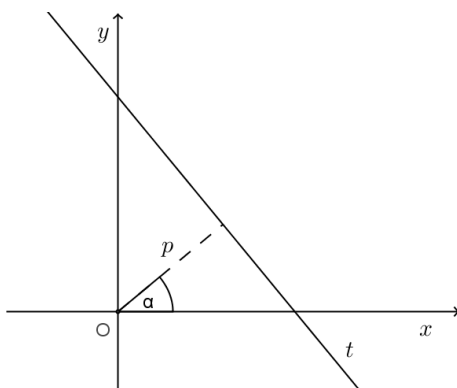
Slika 1.13.

Pokažimo gornju tvrdnju za elipsu.

Jednadžba pravca  $t$  u Hesseovom normalnom obliku je

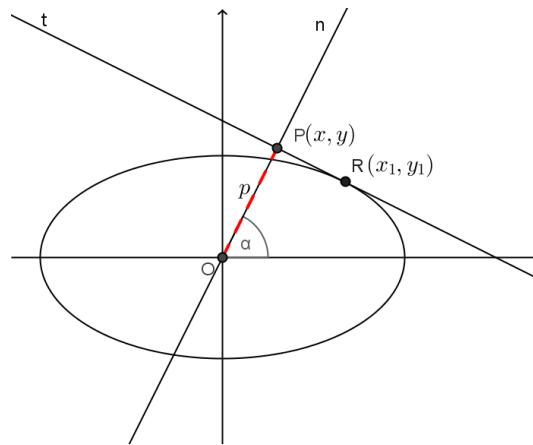
$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = p, \quad (1.3)$$

gdje je  $p$  udaljenost pravca  $t$  od ishodišta, a kut  $\alpha$  kut koji okomica na tangentu zatvara s osi  $x$ ,  $p > 0$ ;  $0 \leq \alpha < 2\pi$  (slika 1.14).



Slika 1.14.

Uzmimo da je jednačbom (1.3) dana tangenta  $t$  na elipsu  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  u točki  $R(x_1, y_1)$  kao na slici 1.15.



Slika 1.15.

Jednačbu tangente  $t$  na danu elipsu u točki  $R(x_1, y_1)$  možemo napisati u obliku

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1. \quad (1.4)$$

Podijelimo li (1.3) sa  $p$  dobivamo

$$\frac{\cos \alpha}{p} x + \frac{\sin \alpha}{p} y = 1. \quad (1.5)$$

Iz (1.4) i (1.5)

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{a^2} &= \frac{\cos \alpha}{p} \Rightarrow x_1 = \frac{a^2}{p} \cos \alpha \\ \frac{y_1}{b^2} &= \frac{\sin \alpha}{p} \Rightarrow y_1 = \frac{b^2}{p} \sin \alpha. \end{aligned}$$

Jednačbu elipse iskoristimo kako bi eliminirali  $x_1$  i  $y_1$ :

$$\begin{aligned} \frac{\left(\frac{a^2}{p} \cos \alpha\right)^2}{a^2} + \frac{\left(\frac{b^2}{p} \sin \alpha\right)^2}{b^2} &= 1 \\ \frac{a^2}{p^2} \cos^2 \alpha + \frac{b^2}{p^2} \sin^2 \alpha &= 1 \quad \Big| \cdot p^2 \\ a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha &= p^2. \end{aligned}$$

Stavimo li da je  $\alpha = \varphi$  i  $p = r$ , dobit ćemo polarnu jednačbu nožišne krivulje elipse

$$a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi = r^2.$$

Jednadžbu nožišne krivulje elipse u pravokutnom koordinatnom sustavu dobit ćemo pomoću formula koje povezuju polarne koordinate s Descartesovima:  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ ,  $r^2 = x^2 + y^2$ :

$$a^2 x^2 + b^2 y^2 = (x^2 + y^2)^2.$$

Stavimo li da je  $a^2 = 2\alpha$ ,  $b^2 = 2\beta$  dobivamo jednadžbu eliptičke Boothove lemniskate

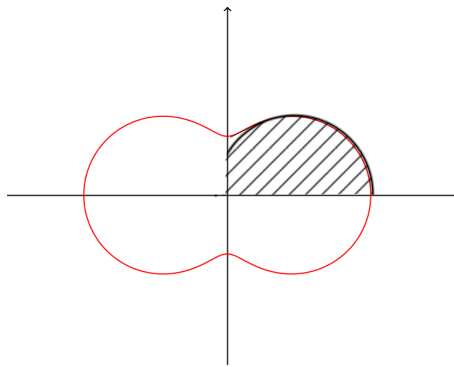
$$(x^2 + y^2)^2 = 2\alpha x^2 + 2\beta y^2.$$

Pokazali smo da je nožišna krivulja elipse u odnosu na njeno središte Boothova lemniskata.

Analognim postupkom se može dokazati da je nožišna krivulja hiperbole u odnosu na njeno središte hiperbolička Boothova lemniskata. Jedina je razlika u izvodu što je jednadžba tangente na hiperbolu malo drugačijeg oblika,  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ , odnosno ima minus s lijeve strane koji će se zadržati u konačnoj formuli  $(x^2 + y^2)^2 = 2\alpha x^2 - 2\beta y^2$ .

**Teorem 1.1.** Površina omeđena eliptičkom Boothovom lemniskatom je  $P = \frac{\pi}{2}(a^2 + b^2)$ .

*Dokaz.* Zbog simetrije krivulje prvo ćemo izračunati samo jednu četvrtinu tražene površine (slika 1.16).



**Slika 1.16.**

Površinu omeđenu krivuljom koja je zadana polarnim koordinatama jednadžbom  $r = f(\varphi)$  računamo po formuli

$$P = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f(\varphi)]^2 d\varphi.$$

*Napomena.* Ovom formulom računamo površinu između krivulje i zraka koje su povučene iz ishodišta pod kutom  $\alpha$  i  $\beta$ .

Imamo:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}P &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi) d\varphi \\
&= \frac{1}{2} \left( a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \varphi d\varphi + b^2 \int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi d\varphi \right) \\
&= \frac{1}{2} \left( a^2 \left( \frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right) + b^2 \left( \frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right) \right) \Big|_0^{\pi/2} \\
&= \frac{\pi}{8} (a^2 + b^2),
\end{aligned}$$

odakle slijedi da je  $P = \frac{\pi}{2}(a^2 + b^2)$ . □

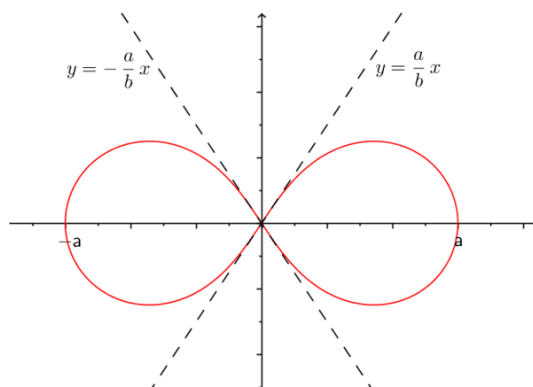
**Teorem 1.2.** Površina omeđena hiperboličkom Boothovom lemniskatom je

$$S = \frac{a^2 - b^2}{2} \operatorname{arctg} \frac{a}{b} + \frac{ab}{2}.$$

*Dokaz.* Površinu omeđenu krivuljom koja je zadana polarnim koordinatama računamo po formuli

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f(\varphi)]^2 d\varphi.$$

Zbog simetrije krivulje prvo ćemo izračunati samo polovinu tražene površine ( $\frac{1}{2}S = P$ ) uzimajući granice integriranja od  $\alpha = 0$  do  $\beta = \operatorname{arctg} \frac{a}{b}$  (slika 1.17).



**Slika 1.17.**

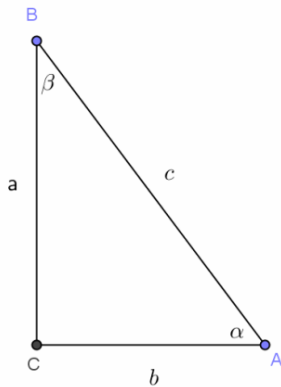


Imamo

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{1}{2} \int_0^{\operatorname{arctg} \frac{a}{b}} (a^2 \cos^2 \varphi - b^2 \sin^2 \varphi) d\varphi \\
 &= \frac{1}{2} \left( a^2 \int_0^{\operatorname{arctg} \frac{a}{b}} \cos^2 \varphi d\varphi - b^2 \int_0^{\operatorname{arctg} \frac{a}{b}} \sin^2 \varphi d\varphi \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left( a^2 \left( \frac{1}{2} \varphi + \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right) - b^2 \left( \frac{1}{2} \varphi - \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right) \right) \Big|_0^{\operatorname{arctg} \frac{a}{b}} \\
 &= \frac{1}{2} \left( a^2 \left( \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{a}{b} + \frac{1}{4} \sin \left( 2 \operatorname{arctg} \frac{a}{b} \right) \right) - b^2 \left( \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{a}{b} - \frac{1}{4} \sin \left( 2 \operatorname{arctg} \frac{a}{b} \right) \right) \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{a}{b} (a^2 - b^2) + \frac{1}{4} \sin \left( 2 \operatorname{arctg} \frac{a}{b} \right) (a^2 + b^2) \right) \\
 &= \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{a}{b} (a^2 - b^2) + \frac{1}{8} \cdot 2 \frac{ab}{a^2 + b^2} (a^2 + b^2) \\
 &= \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{a}{b} (a^2 - b^2) + \frac{ab}{4}.
 \end{aligned}$$

Od tuda je površina hiperboličke Boothove lemniskate  $S = \frac{a^2 - b^2}{2} \operatorname{arctg} \frac{a}{b} + \frac{ab}{2}$ .  $\square$

U gornjem računu smo koristili jednakosti koje proizlaze iz trigonometrije pravokutnog trokuta:



Slika 1.18.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}, \quad \operatorname{arctg} \frac{a}{b} = \alpha,$$

$$\cos \left( \operatorname{arctg} \frac{a}{b} \right) = \cos \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

$$\sin \left( \operatorname{arctg} \frac{a}{b} \right) = \sin \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

odakle slijedi

$$\sin \left( 2 \operatorname{arctg} \frac{a}{b} \right) = 2 \sin \left( \operatorname{arctg} \frac{a}{b} \right) \cos \left( \operatorname{arctg} \frac{a}{b} \right) = 2 \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 2 \frac{ab}{a^2 + b^2}.$$

Duljina luka Boothove lemniskate je eliptički integral i ne može se riješiti u terminima elementarnih funkcija.

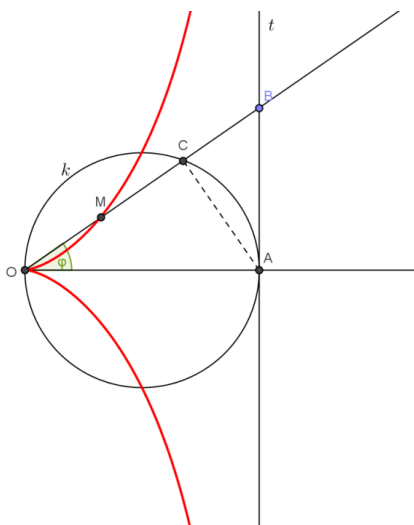
## 2. Krivulja je definirana kao geometrijsko mjesto točaka koje zadovoljavaju dano svojstvo

Ovaj način definiranja krivulja se najčešće primjenjuje.

### 2.1. Cisoida

Krivulju cisoidu je pronašao starogrčki matematičar Diokle (2. st.pr.Kr.) rješavajući problem udvostručenja kocke. Naziv krivulje “cisoida” se prvi puta spominje oko 100 godina kasnije u djelu grčkog matematičara i astronoma Geminusa. Fermat i Roberval su 1634. konstruirali tangentu na cisoidu.

Definirajmo cisoidu. Neka je kružnica  $k$  promjera  $|OA| = 2a$  i neka je  $t$  tangenta kružnice  $k$  u točki  $A$ . Na tangenti  $t$  odredimo proizvoljnu točku  $B$ . Točkom  $O$  položimo zraku  $OB$ . Neka je  $C$  sjecište kružnice  $k$  i zrake  $OB$ . Na zraku  $OB$  odredimo točku  $M$  tako da je  $|OM| = |BC|$ . Tako konstruirana točka  $M$  pripada cisoidi.



Slika 2.1.

14 2. Krivulja je definirana kao geometrijsko mjesto točaka koje zadovoljavaju dano svojstvo

Odredimo li neku drugu točku  $B_1$  tangente  $t$  takvu da je  $B_1 \neq B$  i ponovimo li opisanu konstrukciju, dobit ćemo drugu točku cisoide, itd. Kružnicu  $k$  zovemo *proizvodna kružnica*.

Odredimo polarnu jednadžbu cisoide. Neka je  $O$  pol cisoide. Ako je točka  $M$  unutar kružnice, onda vrijedi

$$r = |OM| = |OB| - |MB| = |OB| - (|MC| + |CB|) = |OB| - (|MC| + |OM|) = |OB| - |OC|.$$

Ako je točka  $M$  izvan kružnice, onda slično dobivamo

$$r = |OM| = |OB| - |BM| = |OB| - (|BC| - |MC|) = |OB| - (|OM| - |MC|) = |OB| - |OC|,$$

te vrijedi

$$r = |OM| = |OB| - |OC|. \quad (2.1)$$

Označimo sa  $\varphi$  kut  $\angle AOC$ . Kako smo uzeli  $|OA| = 2a$ , to iz  $\triangle ABO$  slijedi  $\cos \varphi = \frac{2a}{|OB|}$ , pa je  $|OB| = \frac{2a}{\cos \varphi}$ .

Iz Talesovog teorema slijedi da je  $\triangle ACO$  pravokutan pa je  $\cos \varphi = \frac{|OC|}{2a}$ , a od tuda je  $|OC| = 2a \cos \varphi$ . Dobiveno uvrstimo u (2.1) pa imamo

$$\begin{aligned} r &= |OM| = |OB| - |OC| \\ &= \frac{2a}{\cos \varphi} - 2a \cos \varphi = \frac{2a - 2a \cos^2 \varphi}{\cos \varphi} = \frac{2a(1 - \cos^2 \varphi)}{\cos \varphi}, \end{aligned}$$

te je

$$r = \frac{2a \sin^2 \varphi}{\cos \varphi}, \quad (2.2)$$

što je polarna jednadžba cisoide.

Jednadžbu cisoide u pravokutnom koordinatnom sustavu dobit ćemo pomoću formula koje povezuju polarne koordinate s Descartovima:  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ .

Postavimo pravokutni koordinatni sustav tako da je točka  $O$  ishodište, pravac  $OA$  os  $x$ , te okomica na os  $x$  kroz točku  $O$  os  $y$ .

Uvrstimo (2.2) u jednadžbu  $x = r \cos \varphi$ , pa imamo  $x = \frac{2a \sin^2 \varphi}{\cos \varphi} \cos \varphi$ , odnosno

$$x = 2a \sin^2 \varphi \quad (2.3)$$

odakle je  $\sin^2 \varphi = \frac{x}{2a}$ .

Točka  $M$  ima koordinate  $(x, y)$ , pa je

$$r = |OM| = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (2.4)$$

Kvadriramo li jednadžbu  $y = r \sin \varphi$  te uvrstimo (2.3) i (2.4) dobivamo

$$\begin{aligned} y^2 &= r^2 \sin^2 \varphi \\ y^2 &= (x^2 + y^2) \frac{x}{2a} \\ y^2 - y^2 \frac{x}{2a} &= \frac{x^3}{2a} \\ y^2 \left( \frac{2a - x}{2a} \right) &= \frac{x^3}{2a} \end{aligned}$$

pa je

$$y^2 = \frac{x^3}{2a - x}, \quad x \in \langle 0, 2a \rangle, \quad (2.5)$$

što je jednadžba cisoide u pravokutnom koordinatnom sustavu.

Parametarske jednadžbe cisoide dobit ćemo uvrstimo li u (2.5) relaciju  $x = ty$ :

$$\begin{aligned} y^2 &= \frac{t^3 y^3}{2a - ty} && \left| \cdot \frac{2a - ty}{y^2} \right. \\ 2a - ty &= t^3 y \\ y(t + t^3) &= 2a \\ y &= \frac{2a}{t(1 + t^2)} \end{aligned}$$

Dobiveno uvrstimo u  $x = ty$  pa imamo

$$x = t \frac{2a}{t(1 + t^2)},$$

odakle slijede parametarske jednadžbe cisoide

$$\begin{aligned} x &= \frac{2a}{1 + t^2}, \\ y &= \frac{2a}{t(1 + t^2)} \end{aligned} \quad (2.6)$$

*Komentar.* Iz  $x = ty$  slijedi da je  $\frac{1}{t}$  koeficijent smjera pravca iz ishodišta na kojem leži točka krivulje s parametrom  $t$ . Iz definicije krivulje vidimo da na svakom takvom pravcu leži samo jedna točka, dakle svaki  $t \in \mathbb{R}$  odgovara točno jednoj točki krivulje.

Parametarske jednadžbe cisoide možemo zapisati i u drugačijem obliku. Uvrstimo  $r = \frac{2a \sin^2 \varphi}{\cos \varphi}$  u formule koje povezuju polarne koordinate s Descartovim pa imamo

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi = \frac{2a \sin^2 \varphi}{\cos \varphi} \cdot \cos \varphi = 2a \sin^2 \varphi, \\ y &= r \sin \varphi = \frac{2a \sin^2 \varphi}{\cos \varphi} \cdot \sin \varphi = \frac{2a \sin^3 \varphi}{\cos \varphi}. \end{aligned}$$

Dobili smo parametarske jednadžbe cisoide u obliku

$$\begin{aligned}x &= 2a \sin^2 \varphi, \\y &= \frac{2a \sin^3 \varphi}{\cos \varphi}.\end{aligned}\tag{2.7}$$

Cisoida je simetrična u odnosu na os apscisa i ima beskonačne grane. Pravac  $x = 2a$  je asimptota cisoide, a ishodište koordinatnog sustava  $O$  je šiljak prve vrste.

**Definicija 2.1.** Šiljak prve vrste je točka u kojoj prva derivacija nije definirana.

Napomena. Ishodište koordinatnog sustava  $O$  je šiljak prve vrste cisoide kao grafa funkcije  $x = x(y)$ .

**Teorem 2.1.** Duljina luka cisoide  $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$  od njenog šiljka  $O(0,0)$  do točke s apscisom  $x$  je

$$l = 2a(z-2) + a\sqrt{3} \ln \frac{(z-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}{(z+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})},$$

gdje je  $z = \sqrt{\frac{8a-3x}{2a-x}}$ .

*Dokaz.* Duljinu luka cisoide u pravokutnom koordinatnom sustavu od njenog šiljka  $O(0,0)$  do točke s apscisom  $x$  izračunat ćemo pomoću formule

$$l = \int_0^x \sqrt{1+y'^2} dx.$$

Jednadžba cisoide je  $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$  odakle dobivamo  $y = \sqrt{\frac{x^3}{2a-x}}$ . Deriviranjem imamo

$$\begin{aligned}y' &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2a-x}{x^3}} \cdot \frac{3x^2 \cdot (2a-x) - x^3 \cdot (-1)}{(2a-x)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2a-x}{x^3}} \cdot \frac{2x^2(3a-x)}{(2a-x)^2} = \sqrt{\frac{2a-x}{x}} \cdot \frac{x(3a-x)}{(2a-x)^2}.\end{aligned}$$

Dobiveno uvrstimo u formulu za duljinu luka:

$$\begin{aligned}l &= \int_0^x \sqrt{1+y'^2} dx = \int_0^x \sqrt{1 + \left( \sqrt{\frac{2a-x}{x}} \cdot \frac{x(3a-x)}{(2a-x)^2} \right)^2} dx \\ &= \int_0^x \sqrt{1 + \frac{2a-x}{x} \cdot \frac{x^2(3a-x)^2}{(2a-x)^4}} dx = \int_0^x \sqrt{1 + \frac{x(3a-x)^2}{(2a-x)^3}} dx \\ &= \int_0^x \sqrt{\frac{(2a-x)^3 + x(3a-x)^2}{(2a-x)^3}} dx = \int_0^x \sqrt{\frac{a^2(8a-3x)}{(2a-x)^3}} dx \\ &= a \int_0^x \frac{1}{2a-x} \sqrt{\frac{8a-3x}{2a-x}} dx\end{aligned}$$

Dobiveni ćemo integral riješiti supstitucijom

$$z = \sqrt{\frac{8a - 3x}{2a - x}}$$

odakle nalazimo da su nove granice 2 i  $z$ . Rješavanjem supstitucije po  $x$  imamo dalje

$$x = \frac{8a - 2az^2}{3 - z^2} \Rightarrow dx = \frac{4az}{(3 - z^2)^2} dz,$$

te integral postaje

$$\begin{aligned} l &= a \int_2^z \frac{1}{2a - \frac{8a-2az^2}{3-z^2}} \cdot z \cdot \frac{4az}{(3-z^2)^2} dz = 2a \int_2^z \frac{z^2}{z^2 - 3} dz \\ &= 2a \int_2^z \left( 1 + \frac{3}{z^2 - 3} \right) dz = 2a \left( z + \frac{\sqrt{3}}{2} \ln \left| \frac{z - \sqrt{3}}{z + \sqrt{3}} \right| \right) \Big|_2^z \\ &= 2a(z - 2) + a\sqrt{3} \ln \frac{(z - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})}{(z + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})}, \end{aligned}$$

gdje je  $z = \sqrt{\frac{8a - 3x}{2a - x}}$ , što je i trebalo dokazati.  $\square$

**Teorem 2.2.** Površina omeđena cisoidom i njenom asimptomom  $x = 2a$ ,  $a > 0$  je  $P = 3\pi a^2$ .

*Dokaz.* Parametarske jednadžbe cisoide su  $x = 2a \sin^2 \varphi$ ,  $y = \frac{2a \sin^3 \varphi}{\cos \varphi}$ . Površinu omeđenu krivuljom koja je zadana jednadžbama u parametarskom obliku računamo po formuli

$$P = \int_a^b y(\varphi) x'(\varphi) d\varphi.$$

Zbog simetrije krivulje prvo ćemo izračunati površinu koju zatvara jedna grana cisoide s njenom asimptomom:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}P &= \int_0^{\pi/2} \frac{2a \sin^3 \varphi}{\cos \varphi} 4a \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \\ &= 8a^2 \int_0^{\pi/2} \sin^4 \varphi d\varphi = 8a^2 \left( \frac{3}{8} \varphi - \frac{1}{4} \sin 2\varphi + \frac{1}{32} \sin 4\varphi \right) \Big|_0^{\pi/2} \\ &= 8a^2 \cdot \frac{3\pi}{16} = \frac{3\pi a^2}{2}, \end{aligned}$$

odakle slijedi da je površina omeđena cisoidom i njenom asimptomom  $P = 3a^2\pi$ .  $\square$

Uočavamo da je izračunata površina jednaka trostrukoj površini proizvodnog kruga. Ovu relaciju su dobili, nezavisno jedan od drugog, Huygens<sup>1</sup> i Fermat<sup>2</sup>.

<sup>1</sup>Christiaan Huygens (1629.–1695.) – nizozemski astronom, matematičar i fizičar.

<sup>2</sup>Pierre de Fermat (1601.–1665.) – francuski matematičar i pravnik.

18 2. Krivulja je definirana kao geometrijsko mjesto točaka koje zadovoljavaju dano svojstvo

**Teorem 2.3.** *Volumen tijela nastalog rotacijom dijela ravnine kojeg omeđuju cisoida i njena asimptota oko ordinate je  $V = 10\pi^2 a^3$ .*

*Dokaz.* Volumen tijela nastalog rotacijom između krivulja  $x_1(y)$  i  $x_2(y)$  računa se formulom

$$V = \pi \int_c^d (x_2(y)^2 - x_1(y)^2) dy.$$

Integrirat ćemo pola tijela, dio od  $y = 0$  do  $y = \infty$  i pomnožiti s 2. Kako je  $x_2(y) = 2a$ , što je asimptota cisoida, a  $x_1(y)$  je njena inverzna formula koja se ne može izvesti, prijeći ćemo na trigonometrijske parametarske jednadžbe. Volumen je

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^\infty (x_2(y)^2 - x_1(y)^2) dy = \int_0^\infty ((2a)^2 - (x_1(y))^2) dy = \\ &= 2\pi \int_0^{\pi/2} ((2a)^2 - (2a \sin^2 \varphi)^2) \cdot 2a \frac{3 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + \sin^4 \varphi}{\cos^2 \varphi} d\varphi = \\ &= 16\pi a^3 \int_0^{\pi/2} \underbrace{(1 - \sin^2 \varphi)}_{\cos^2 \varphi} (1 + \sin^2 \varphi) \frac{3 \sin^2 \varphi (1 - \sin^2 \varphi) + \sin^4 \varphi}{\cos^2 \varphi} d\varphi = \\ &= 16\pi a^3 \int_0^{\pi/2} (3 \sin^2 \varphi + \sin^4 \varphi - 2 \sin^6 \varphi) d\varphi = 16\pi a^3 \cdot \frac{5\pi}{8} = 10\pi^2 a^3, \end{aligned}$$

što se i tražilo. □

Napomena. U dokazu teorema su bez raspisivanja iskorišteni sljedeći integrali:

$$\begin{aligned} \int \sin^2 t dt &= \frac{1}{2} t - \frac{1}{4} \sin 2t + C, \\ \int \sin^4 t dt &= \frac{3}{8} t - \frac{1}{4} \sin 2t + \frac{1}{32} \sin 4t + C, \\ \int \sin^6 t dt &= \frac{5}{16} t - \frac{15}{64} \sin 2t + \frac{3}{64} \sin 4t - \frac{1}{192} \sin 6t + C. \end{aligned}$$

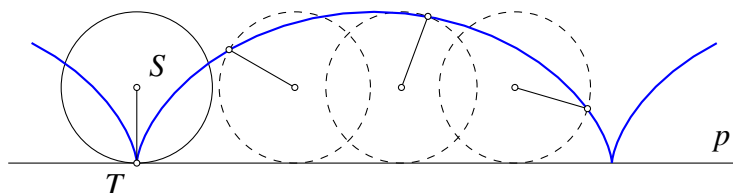
## 3. Krivulje određene kao putanja točke koja se giba po nekom određenom zakonu

Ovaj kinematički način tvorbe krivulja bio je poznat još starogrčkim učenjacima; Arhimed je svoju spiralu definirao kao trajektoriju točke koja istovremeno sudjeluje u dva jednolika gibanja od kojih se jedno vrši po pravcu, a drugo po kružnici.

### 3.1. Uvod

Cikloide su krivulje koje nastaju kotrljanjem bez klizanja neke kružnice po nekom čvrstom pravcu ili nekoj čvrstoj kružnici.

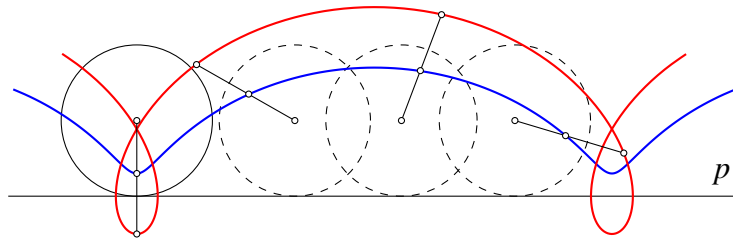
Promatrajmo kotrljanje kružnice  $k$  po čvrstom pravcu  $p$ , tj. krivulju koju iscrtava točka  $T$  koja se nalazi na kružnici, kao što je prikazano na slici 3.1. Tako dobivamo krivulju koja se zove cikloida. Često se šaljivo opisuje kao krivulja koju tijekom vožnje bicikla opisuje kauguma zalijepljena za gumu njegova kotača.



Slika 3.1. Cikloida.

Ukoliko bi stavili da se točka  $T$  nalazi unutar polumjera kružnice  $k$ , kotrljanjem na isti način bi dobili krivulju koja se zove skraćena cikloida ili skraćena trohoida.



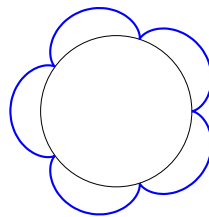


**Slika 3.2.** Skraćena cikloida (plavo) i produljena cikloida (crveno).

Konačno, ako bi stavili da se točka  $T$  nalazi u produžetku polumjera kružnice  $k$ , dobili bi krivulju koja se zove produljena cikloida ili produljena trohoida.

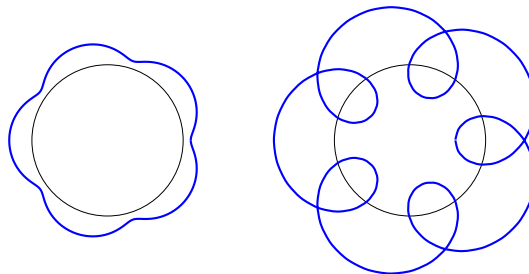
Pogledajmo sada kako izgledaju kotrljanja bez klizanja kružnice  $k$  polumjera  $r$  po čvrstoj kružnici  $k'$  polumjera  $R$ .

Neka se točka  $T$  nalazi na kružnici  $k$ . Kotrljanjem kružnice  $k$  bez klizanja s vanjske strane kružnice  $k'$  točka  $T$  bi opisivala krivulju koja se zove epicikloida. Ako bi bilo  $R = nr$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , epicikloida bi se sastojala od  $n$  sukladnih lukova koji se sastaju u šiljcima na kružnici  $k$ .



**Slika 3.3.** Epicikloida za  $n = 5$ .

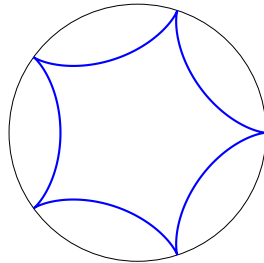
Ako bi se, pak, točka  $T$  nalazila negdje na polumjeru kružnice  $k$ , opisivala bi krivulju koja se zove skraćena epicikloida. S druge strane, ako bi se nalazila s vanjske strane, na produžetku polumjera, točka  $T$  bi opisivala krivulju koja se zove produljena epicikloida.



**Slika 3.4.** Skraćena i produljena epicikloida.

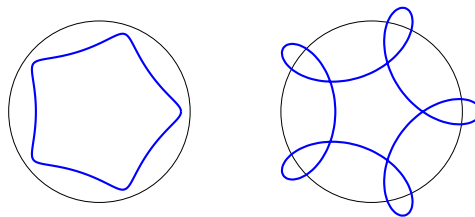
Ostaje nam još za vidjeti krivulje koje nastaju kotrljanjem kružnice  $k$  iznutra po kružnici  $k'$ . Jasno je da tada mora biti  $r < R$ .

Kotrljanjem bez klizanja kružnice  $k$  unutar kružnice  $k'$  točka  $T$  kružnice  $k$  opisuje krivulju koja se zove hipocikloida. Posebno zanimljivi slučajevi su ako je  $R = nr$  gdje je  $n \in \mathbb{N}$  i  $n \geq 3$ . Tada je hipocikloida zatvorena zvjezdasta krivulja koja se sastoji od  $n$  lukova koji se sastaju u šiljcima na kružnici  $k$ .



**Slika 3.5.** Hipocikloida za  $n = 5$ .

Ukoliko bi se točka  $T$  nalazila negdje na polumjeru kružnice  $k$ , tada bi opisivala krivulju koja se zove skraćena hipocikloida, a ako bi se nalazila na produžetku polumjera, opisivala bi krivulju koja se zove produljena hipocikloida.



**Slika 3.6.** Skraćena i produljena hipocikloida.

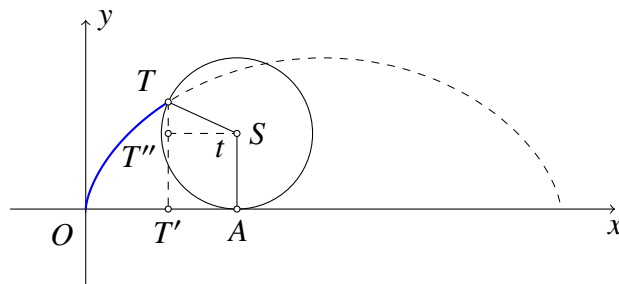
U narednim će točkama ovog poglavlja biti izvedene jednadžbe cikloide, epicikloide i hipocikloide te biti dana njihova osnovna geometrijska i metrička svojstva.

## 3.2. Cikloida

Definirajmo prvo cikloidu.

**Definicija 3.1.** Neka je  $T$  točka na kružnici polumjera  $a$ . Krivulja koju opisuje točka  $T$  dok se kružnica kotrlja bez klizanja po čvrstom pravcu zove se cikloida.

Da bi izveli parametarske jednadžbe cikloide, pretpostavimo da se kružnica polumjera  $a$  dokotrljala bez klizanja po osi  $x$  od ishodišta  $O$  do točke  $A$ , kao na slici 3.7.



Slika 3.7. Uz izvod parametarskih jednadžbi cikloide.

Označimo kut  $\angle AST = t$ , s  $T'$  ortogonalnu projekciju točke  $T$  na os  $x$ , s  $T''$  točku na dužini  $\overline{TT'}$  takvu da je  $|ST''| = |AT'|$  te  $x = |OT'|$  i  $y = |T'T|$ .

Kako je  $|OA|$  jednako duljini luka  $\widehat{AT}$ , to je  $|OA| = at$ . U pravokutnom trokutu  $\triangle T''ST$  je kut  $\angle T''ST = t - \frac{\pi}{2}$ , pa je  $|T''S| = a \cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = a \sin t$ . Konačno, zbog  $|T'A| = |T''S|$  imamo

$$\begin{aligned} x &= |OT'| = |OA| - |T'A| \\ &= at - a \sin t = a(t - \sin t). \end{aligned}$$

S druge je strane

$$\begin{aligned} y &= |T'T| = |T'T''| + |T''T| \\ &= a + a \sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= a - a \cos t = a(1 - \cos t) \end{aligned}$$

pa su parametarske jednadžbe cikloide dane sa

$$\begin{cases} x(t) = a(t - \sin t) \\ y(t) = a(1 - \cos t) \end{cases}, \quad a > 0, t \in \mathbb{R}. \quad (3.1)$$

Gornji izvod parametarskih jednadžbi vrijedi za  $t < \pi$ . Uz malu modifikaciju se za  $t > \pi$  može pokazati da se dobivaju iste jednadžbe.

Jednadžba cikloide se još može iskazati i implicitnom jednadžbom u Kartezijevim koordinatama, ali samo za prvi svod. Ako za prvu polovicu svoda izlučimo iz druge parametarske jednadžbe  $t = \arccos\left(1 - \frac{y}{a}\right)$ , čime je  $t \in [0, \pi]$ , i uvrstimo u prvu jednadžbu, dobivamo

$$\begin{aligned} x &= a \arccos\left(1 - \frac{y}{a}\right) - a \sin\left(\arccos\left(1 - \frac{y}{a}\right)\right) \\ &= a \arccos\left(1 - \frac{y}{a}\right) - a \sqrt{1 - \cos^2\left(\arccos\left(1 - \frac{y}{a}\right)\right)} \\ &= a \arccos\left(1 - \frac{y}{a}\right) - a \sqrt{1 - \left(1 - \frac{y}{a}\right)^2} \\ &= a \arccos\left(1 - \frac{y}{a}\right) - a \sqrt{1 - 1 + 2\frac{y}{a} - \frac{y^2}{a^2}} \\ &= a \arccos\left(1 - \frac{y}{a}\right) - a \sqrt{2\frac{y}{a} - \frac{y^2}{a^2}} \end{aligned}$$

odakle, izlučivanjem  $\frac{1}{a^2}$  iz korijena, dobivamo implicitnu jednadžbu prve polovice svoda:

$$x = a \arccos \left( 1 - \frac{y}{a} \right) - \sqrt{2ay - y^2}.$$

Pravac  $x = \pi$  je os simetrije svoda cikloide, pa je s

$$2\pi - x = a \arccos \left( 1 - \frac{y}{a} \right) - \sqrt{2ay - y^2}$$

dana i druga polovica svoda.

Kao i u prošlim poglavljima, odredit ćemo neka metrička svojstva promatrane krivulje.

**Teorem 3.1.** *Duljina luka jednog svoda cikloide je  $l = 8a$ .*

*Dokaz.* Iz matematičke analize znamo da se duljina luka krivulje zadane parametarskim jednadžbama može izračunati formulom

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

Derivacije parametarskih jednadžbi cikloide su

$$x'(t) = a(1 - \cos t)$$

$$y'(t) = a \sin t,$$

a prvi svod čini dio cikloide za  $t \in [0, 2\pi]$ , pa uvrštavanjem u formulu imamo

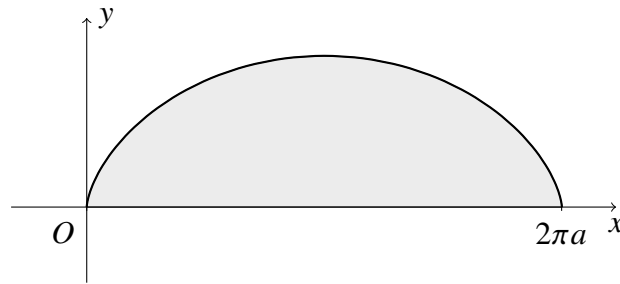
$$\begin{aligned} l &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(a(1 - \cos t))^2 + (a \sin t)^2} dt = \\ &= a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2 \cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} dt = \\ &= a \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2 \cos t} dt = a\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t} dt = \\ &= a\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{2} \sin \frac{t}{2} dt = 4a \left( -\cos \frac{t}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} = 8a, \end{aligned}$$

što je i trebalo pokazati. □

**Teorem 3.2.** *Površina ispod jednog svoda cikloide iznosi  $P = 3\pi a^2$ .*

*Dokaz.* Površina omeđena parametarski zadanom krivuljom može se izračunati formulom:

$$P = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t) dt.$$



**Slika 3.8.** Površina ispod svoda cikloide.

Uvrstimo li podatke u gornju formulu, imamo

$$\begin{aligned}
 P &= \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) a(1 - \cos t) dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt = \\
 &= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2 \cos t + \cos^2 t) dt = a^2 \int_0^{2\pi} \left( 1 - 2 \cos t + \frac{1 + \cos 2t}{2} \right) dt = \\
 &= a^2 \left( t - 2 \sin t + \frac{1}{2}t + \frac{\sin 2t}{4} \right) \Big|_0^{2\pi} = 3\pi a^2,
 \end{aligned}$$

što je i trebalo pokazati. □

**Teorem 3.3.** *Obujam tijela nastalog rotacijom svoda cikloide oko osi  $x$  iznosi  $V = 5a^3\pi^2$ .*

*Dokaz.* Ako parametarski zadana krivulja rotira oko osi  $x$ , onda se obujam tako dobivenog tijela može izračunati formulom

$$V = \pi \int_{t_1}^{t_2} y^2(t) x'(t) dt.$$

Uvrštavanjem podataka u gornju formulu imamo

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_0^{2\pi} (a(1 - \cos t))^2 a(1 - \cos t) dt = a^3 \pi \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 dt = \\
 &= a^3 \pi \int_0^{2\pi} (1 - 3 \cos t + 3 \cos^2 t - \cos^3 t) dt = \\
 &= a^3 \pi \left( t - 3 \sin t + \frac{3}{2}t + \frac{3}{4} \sin 2t - \sin t + \frac{1}{3} \sin^3 t \right) \Big|_0^{2\pi} = 5a^3 \pi^2.
 \end{aligned}$$

U gornjem smo računu iskoristili da je

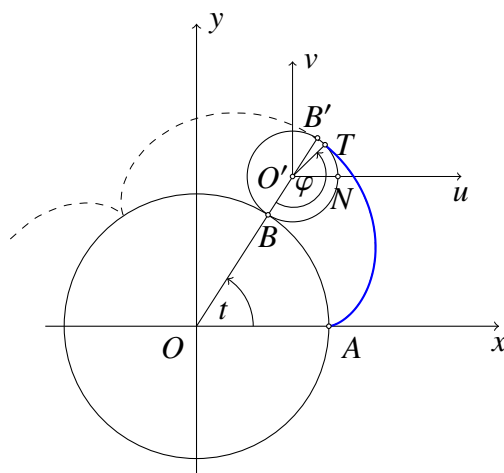
$$\int \cos^3 t dt = \int \cos^2 t \cos t dt = \int (1 - \sin^2 t) d(\sin t) = \sin t - \frac{1}{3} \sin^3 t,$$

čime je dokaz kompletiran. □

### 3.3. Epicikloida

**Definicija 3.2.** Neka se točka  $T$  nalazi na kružnici  $k$  polumjera  $r$ . Krivulja koju opisuje točka  $T$  dok se kružnica  $k$  izvana bez klizanja kotrlja po kružnici polumjera  $R$  zove se epicikloida i označava s  $E(R, r)$ .

Da bismo izveli parametarske jednadžbe epicikloide, postavimo kružnicu polumjera  $R$  sa središtem u ishodištu  $O$  koordinatnog sustava, te kružnicu  $k$  polumjera  $r$  tako da svojom istaknutom točkom  $T$  dodiruje prvu kružnicu u točki  $A(R, 0)$ . Neka se kružnica  $k$  zakotrlja bez klizanja po prvoj kružnici do točke  $B$ , kao na slici 3.9.



**Slika 3.9.** Uz izvod parametarskih jednadžbi epicikloide.

Označimo kut  $t = \angle AOB$ . Središte kružnice  $k$  se tada nalazi u točki s koordinatama

$$\begin{aligned}x &= (R + r) \cos t, \\y &= (R + r) \sin t.\end{aligned}$$

Označimo još s  $B'$  drugo sjecište polupravca  $OB$  s kružnicom  $k$ .

Postavimo pomoćni koordinatni sustav  $uv$  tako da mu je ishodište  $O'$  u središtu kružnice  $k$ , označimo kut  $\varphi = \angle BO'T$ , te s  $N$  označimo sjecište kružnice  $k$  s koordinatnom osi  $u$ .

Da bi odredili koordinate točke  $T$  u pomoćnom koordinatnom sustavu  $uv$ , treba nam mjera kuta  $\angle NO'T$ . Vrijedi

$$\begin{aligned}\angle NO'T &= \angle NO'B' - \angle TO'B' \\&= \angle NO'B' - (\pi - \angle BO'T) \\&= t - (\pi - \varphi) = t + \varphi - \pi,\end{aligned}$$

pa su koordinate točke  $T$  u  $uv$  sustavu

$$\begin{aligned}u &= r \cos(t + \varphi - \pi) = -r \cos(t + \varphi), \\v &= r \sin(t + \varphi - \pi) = -r \sin(t + \varphi),\end{aligned}$$

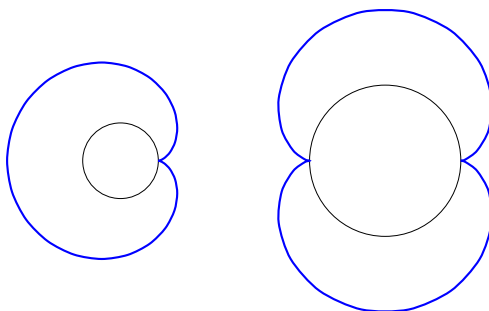
odnosno, u originalnom  $xy$  koordinatnom sustavu

$$\begin{aligned}x &= (R + r) \cos t - r \cos(t + \varphi), \\y &= (R + r) \sin t - r \sin(t + \varphi).\end{aligned}$$

Još se trebamo osloboditi kuta  $\varphi$ . Kako za duljine lukova vrijedi  $|\widehat{BNT}| = |\widehat{AB}|$ , to je  $Rt = r\varphi$  odakle slijedi da je  $\varphi = \frac{R}{r}t$  što uvršteno u gornje jednadžbe nakon sređivanja daje parametarske jednadžbe epicikloide

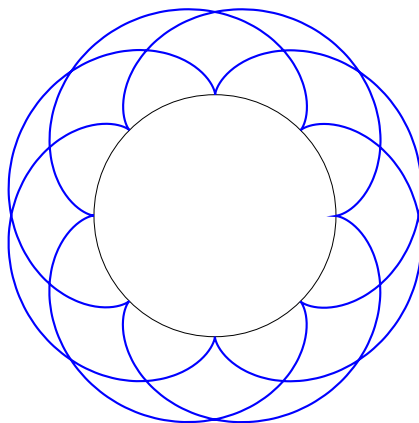
$$\begin{cases} x(t) = (R + r) \cos t - r \cos\left(\frac{R+r}{r}t\right) \\ y(t) = (R + r) \sin t - r \sin\left(\frac{R+r}{r}t\right) \end{cases}, \quad R, r > 0, t \in \mathbb{R}. \quad (3.2)$$

Osobito zanimljivi primjeri epicikloida su kada je  $R = nr$  gdje je  $n \in \mathbb{N}$ . Tako se za  $n = 1$  dobije krivulja koja se još zove kardioida, dok se za  $n = 2$  dobije krivulja koja se još zove nefroida. Podsjetimo se da broj  $n$  kazuje od koliko svodova se sastoji epicikloida.



**Slika 3.10.** Epicikloida  $E(1, 1)$  je kardioida, dok je  $E(2, 1)$  nefroida.

Ukoliko je omjer  $R/r \in \mathbb{Q}$ , epicikloida postaje samopresječna zatvorena krivulja. Lijep primjer jedne takve epicikloide je  $E(8, 3)$ .



**Slika 3.11.** Epicikloida  $E(8, 3)$ .

U daljnjem tekstu ćemo se baviti epicikloidama za koje vrijedi da je  $R = nr$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Uvrstimo li tu relaciju u parametarske jednadžbe epicikloide (3.2), dobivamo

$$\begin{cases} x(t) = r[(n+1)\cos t - \cos(n+1)t] \\ y(t) = r[(n+1)\sin t - \sin(n+1)t] \end{cases} \quad (3.3)$$

**Teorem 3.4.** *Duljina luka epicikloide  $E(nr, r)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  je*

$$l = 8r(n+1).$$

*Dokaz.* Izračunat ćemo duljinu luka jednog svoda epicikloide i pomnožiti s brojem svodova  $n$ . Kako su derivacije parametarskih jednadžbi (3.3)

$$\begin{aligned} x'(t) &= r[-(n+1)\sin t + (n+1)\sin(n+1)t], \\ y'(t) &= r[(n+1)\cos t - (n+1)\cos(n+1)t], \end{aligned}$$

to je duljina epicikloide

$$\begin{aligned} l &= n \cdot \int_0^{2\pi/n} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \\ &= n \cdot r(n+1) \int_0^{2\pi/n} \sqrt{(-\sin t + \sin(n+1)t)^2 + (\cos t - \cos(n+1)t)^2} dt \\ &= rn(n+1) \int_0^{2\pi/n} \sqrt{2 - 2(\sin t \sin(n+1)t + \cos t \cos(n+1)t)} dt \\ &= \sqrt{2}rn(n+1) \int_0^{2\pi/n} \sqrt{1 - \cos nt} dt = \sqrt{2}rn(n+1) \int_0^{2\pi/n} \sqrt{2} \sin \frac{nt}{2} dt = \\ &= 2rn(n+1) \left( -\frac{2}{n} \cos \frac{nt}{2} \right) \Big|_0^{2\pi/n} = 8r(n+1), \end{aligned}$$

što je i trebalo pokazati. □

Zahvaljujući gornjem teoremu, lako nalazimo duljine kardioide i nefroide.

**Korolar 3.1.** *Duljina kardioide  $E(r, r)$  je  $l = 16r$ . Duljina nefroide  $E(2r, r)$  je  $l = 24r$ .*

*Dokaz.* Kardiodi je  $n = 1$ , pa je duljina kardioide

$$l = 8r(1+1) = 16r.$$

Nefroidi je  $n = 2$ , pa je duljina nefroide

$$l = 8r(2+1) = 24r.$$

□



**Teorem 3.5.** Površina lika kojega omeđuje epicikloida  $E(nr, r)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  iznosi

$$P = r^2(n+1)(n+2)\pi.$$

*Dokaz.* Za izračunavanje površine omeđene epicikloidom ćemo iskoristiti krivuljni integral druge vrste, tj. formulu

$$P = \frac{1}{2} \oint_k x dy - y dx,$$

odakle uvrštavanjem slijedi

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left( r[(n+1)\cos t - \cos(n+1)t] \cdot r[(n+1)\cos t - (n+1)\cos(n+1)t] dt - \right. \\ &\quad \left. -r[(n+1)\sin t - \sin(n+1)t] \cdot r[-(n+1)\sin t + (n+1)\sin(n+1)t] dt \right) = \\ &= \frac{1}{2} r^2(n+1) \int_0^{2\pi} \left( (n+1)\cos^2 t - (n+2)\cos t \cos(n+1)t + \cos^2(n+1)t - \right. \\ &\quad \left. -(-(n+1)\sin^2 t + (n+2)\sin t \sin(n+1)t - \sin^2(n+1)t) \right) dt = \\ &= \frac{1}{2} r^2(n+1) \int_0^{2\pi} \left( (n+2) - (n+2)(\cos t \cos(n+1)t + \sin t \sin(n+1)t) \right) dt = \\ &= \frac{1}{2} r^2(n+1)(n+2) \int_0^{2\pi} (1 - \cos nt) dt = \frac{1}{2} r^2(n+1)(n+2) \left( t - \frac{\sin nt}{n} \right) \Big|_0^{2\pi} = \\ &= r^2(n+1)(n+2)\pi, \end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati. □

**Korolar 3.2.** Površina omeđena kardioidom  $E(r, r)$  iznosi  $P = 6r^2\pi$ . Površina omeđena nefroidom  $E(2r, r)$  iznosi  $P = 12r^2\pi$ .

*Dokaz.* Kardioidi je  $n = 1$ , pa je površina omeđena kardioidom

$$P = r^2(1+1)(1+2)\pi = 6r^2\pi.$$

Nefroidi je  $n = 2$ , pa je površina omeđena nefroidom

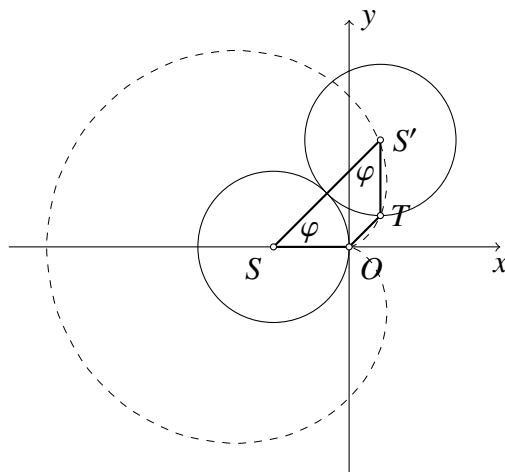
$$P = r^2(2+1)(2+2)\pi = 12r^2\pi.$$

□

### 3.4. Kardioida

Izvest ćemo jednadžbu kardioida u polarnom obliku, te je pretvoriti u Kartezijeve koordinate.

Postavimo kružnice  $k(S, r)$  i  $k'(S', r)$  tako da kružnica  $k'$  svojom istaknutom točkom  $T$  dodiruje kružnicu  $k$  u ishodištu koordinatnog sustava  $O$ , te da su im središta na osi  $x$ .



**Slika 3.12.** Uz izvod polarne jednadžbe kardioida.

Neka se kružnica  $k'$  zakotrlja bez klizanja po kružnici  $k$  za kut  $\varphi$ , kao što je pokazano na slici 3.12. Tada je  $\angle OSS' = \angle TS'S$ . Kako je  $|SS'| = 2r$  i  $|SO| = |S'T| = r$ , četverokut  $OSS'T$  je jednakokrani trapez. Označimo s  $\rho$  udaljenost točke  $T$  od ishodišta  $O$  i izrazimo tu udaljenost kao funkciju varijable  $\varphi$ . Imamo:

$$\begin{aligned}\rho &= |OT| = |SS'| - |SO| \cos \varphi - |S'T| \cos \varphi \\ &= 2r - r \cos \varphi - r \cos \varphi,\end{aligned}$$

odakle je polarna jednadžba kardioida:

$$\rho = 2r(1 - \cos \varphi). \quad (3.4)$$

Gornja se jednadžba može lagano pretvoriti u jednadžbu u Kartezijevim koordinatama. Pomnožimo li (3.4) s  $\rho$ , imamo

$$\rho^2 = 2r\rho - 2r\rho \cos \varphi,$$

odakle, koristeći da je  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$  i  $\rho^2 = x^2 + y^2$  imamo dalje

$$\rho^2 = 2r\rho - 2rx$$

$$\rho^2 + 2rx = 2r\rho$$

i, konačno, kvadriranjem

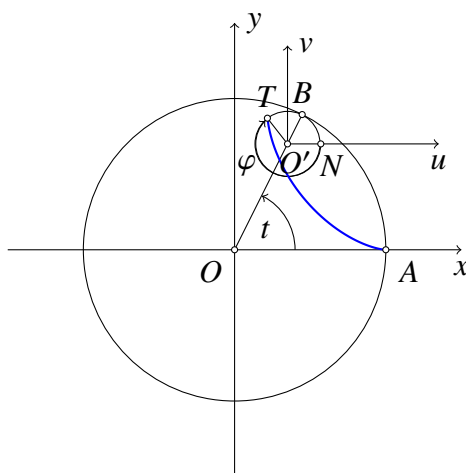
$$(\rho^2 + 2rx)^2 = 4r^2\rho^2$$

$$(x^2 + y^2 + 2rx)^2 = 4r^2(x^2 + y^2). \quad (3.5)$$

### 3.5. Hipocikloida

**Definicija 3.3.** Neka se točka  $T$  nalazi na kružnici  $k$  polumjera  $r$ . Krivulja koju opisuje točka  $T$  dok se kružnica  $k$  iznutra bez klizanja kotrlja po kružnici polumjera  $R$  zove se hipocikloida i označava s  $H(R, r)$ .

Izvedimo parametarske jednadžbe hipocikloide. U tu svrhu postavimo kružnicu polumjera  $R$  tako da joj je središte u ishodištu koordinatnog sustava, te kružnicu  $k$  tako da svojom istaknutom točkom  $T$  dodiruje veliku kružnicu iznutra u točki  $A$ .



**Slika 3.13.** Uz izvod parametarskih jednadžbi hipocikloide.

Neka se kružnica  $k$  bez klizanja otkotrlja do točke  $B$ , kao na slici 3.13. Označimo kut  $t = \angle AOB$ . Koordinate središta kružnice  $k$  su tada

$$\begin{aligned}x &= (R - r) \cos t, \\y &= (R - r) \sin t.\end{aligned}$$

Postavimo sada pomoćni koordinatni sustav  $uv$  tako da mu je ishodište  $O'$  u središtu kružnice  $k$ , te s  $N$  označimo sjecište kružnice  $k$  i osi  $u$ , te označimo kut  $\varphi = \angle NO'T$ . Koordinate točke  $T$  u  $uv$  sustavu su

$$\begin{aligned}u &= r \cos(-\varphi) = r \cos \varphi, \\v &= r \sin(-\varphi) = -r \sin \varphi,\end{aligned}$$

pa su koordinate točke  $T$  u  $xy$  koordinatnom sustavu

$$\begin{aligned}x &= (R - r) \cos t + r \cos \varphi, \\y &= (R - r) \sin t - r \sin \varphi.\end{aligned}\tag{3.6}$$

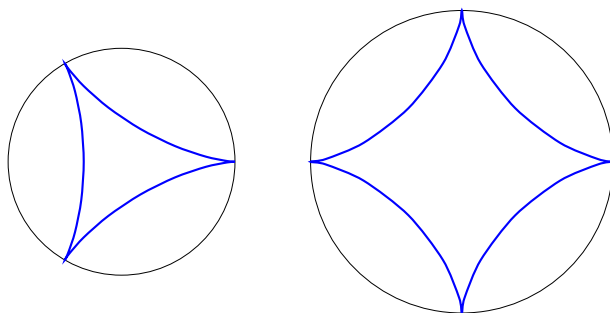
Još se trebamo osloboditi kuta  $\varphi$ . Kako su duljine lukova  $\widehat{AB}$  i  $\widehat{BNT}$  jednake, to iz  $Rt = r(t + \varphi)$  slijedi

$$\varphi = \frac{R - r}{r}t,$$

što uvršteno u (3.6) daje parametarske jednadžbe hipocikloide

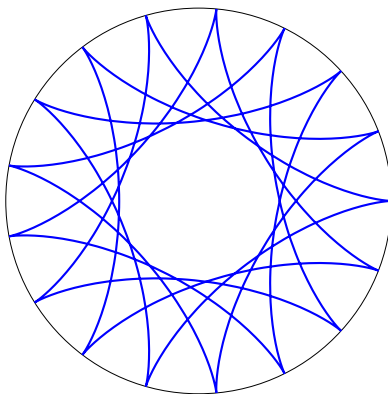
$$\begin{cases} x(t) = (R - r) \cos t + r \cos\left(\frac{R-r}{r} t\right), \\ y(t) = (R - r) \sin t - r \sin\left(\frac{R-r}{r} t\right). \end{cases} \quad (3.7)$$

Osobito zanimljivi primjeri hipocikloida su ona kada je  $R = nr$  gdje je  $n \in \mathbb{N}$  i  $n \geq 3$ . Tako se za  $n = 3$  dobije krivulja koja se zove deltoida ili Steinerova krivulja, dok se za  $n = 4$  dobije krivulja koja se, zbog svog izgleda koji podsjeća na zvijezdu, zove astroida (slika 3.14).



**Slika 3.14.** Hipocikloide  $H(3, 1)$  i  $H(4, 1)$ .

Ukoliko je  $\frac{R}{r} \in \mathbb{Q}$ , hipocikloida je samopresječna zatvorena krivulja donekle slična zupčaniku bicikla.



**Slika 3.15.** Hipocikloida  $H(17, 5)$ .

U daljnjem ćemo se tekstu baviti hipocikloidama za koje vrijedi da je  $R = nr$ , gdje je  $n \in \mathbb{N}$  i  $n \geq 3$ . Uvrstimo li to u (3.7), dobijemo

$$\begin{cases} x(t) = r[(n - 1) \cos t + \cos(n - 1)t] \\ y(t) = r[(n - 1) \sin t - \sin(n - 1)t] \end{cases} \quad (3.8)$$

**Teorem 3.6.** Duljina luka hipocikloide  $H(nr, r)$ , gdje je  $n \in \mathbb{N}$  i  $n \geq 3$ , je

$$l = 8(n - 1)r.$$

*Dokaz.* Slično kao u izvodu duljine epicikloide, izračunat ćemo duljinu jednog svoda i pomnožiti s brojem svodova  $n$ .

Kako su derivacije parametarskih jednadžbi hipocikloide

$$\begin{aligned}x'(t) &= r[-(n-1)\sin t - (n-1)\sin(n-1)t] \\y'(t) &= r[(n-1)\cos t - (n-1)\cos(n-1)t],\end{aligned}$$

dobivamo

$$\begin{aligned}l &= n \cdot \int_0^{2\pi/n} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \\&= n \cdot \int_0^{2\pi/n} \sqrt{(r[-(n-1)\sin t - (n-1)\sin(n-1)t])^2 + \\&\quad + (r[(n-1)\cos t - (n-1)\cos(n-1)t])^2} dt = \\&= n(n-1)r \int_0^{2\pi/n} \sqrt{\sin^2 t + 2\sin t \sin(n-1)t + \sin^2(n-1)t + \\&\quad + \cos^2 t - 2\cos t \cos(n-1)t + \cos^2(n-1)t} dt = \\&= n(n-1)r \int_0^{2\pi/n} \sqrt{2 - 2(\cos t \cos(n-1)t - \sin t \sin(n-1)t)} dt = \\&= n(n-1)r \int_0^{2\pi/n} \sqrt{2 - 2\cos nt} dt = 2n(n-1)r \int_0^{2\pi/n} \sin \frac{nt}{2} dt = \\&= 2n(n-1)r \left( -\frac{2}{n} \cos \frac{nt}{2} \right) \Big|_0^{2\pi/n} = 8(n-1)r,\end{aligned}$$

što je i trebalo pokazati. □

Interesantno je i pitanje kolika je površina koju zatvara hipocikloida. Odgovor nam daje sljedeći teorem.

**Teorem 3.7.** *Površina koju zatvara hipocikloida  $H(nr, r)$ , gdje je  $n \in \mathbb{N}$  i  $n \geq 3$ , je*

$$P = r^2(n-1)(n-2)\pi.$$

*Dokaz.* Slično kao u analognom dokazu kod epicikloide iskoristit ćemo krivuljni integral druge vrste.

$$\begin{aligned}
P &= \frac{1}{2} \oint_k x dy - y dx = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left( r[(n-1)\cos t + \cos(n-1)t] \cdot r[(n-1)\cos t - (n-1)\cos(n-1)t] dt - \right. \\
&\quad \left. - r[(n-1)\sin t - \sin(n-1)t] \cdot r[-(n-1)\sin t - (n-1)\sin(n-1)t] dt \right) = \\
&= \frac{1}{2} r^2 (n-1) \int_0^{2\pi} \left( (n-1)\cos^2 t - (n-2)\cos t \cos(n-1)t - \cos^2(n-1)t + \right. \\
&\quad \left. + (n-1)\sin^2 t + (n-2)\sin t \sin(n-1)t - \sin^2(n-1)t \right) dt = \\
&= \frac{1}{2} r^2 (n-1) \int_0^{2\pi} \left( (n-2) - (n-2)(\cos t \cos(n-1)t - \sin t \sin(n-1)t) \right) dt = \\
&= \frac{1}{2} r^2 (n-1)(n-2) \int_0^{2\pi} (1 - \cos nt) dt = \frac{1}{2} r^2 (n-1)(n-2) \left( t - \frac{\sin nt}{n} \right) \Big|_0^{2\pi} = \\
&= r^2 (n-1)(n-2)\pi,
\end{aligned}$$

što se i trebalo dokazati. □

**Korolar 3.3.** Duljina astroide  $H(4r, r)$  je  $l = 24r$ , dok je površina omeđena astroidom  $P = 6r^2\pi$ .

*Rješenje.* Ovdje je  $n = 4$  pa je duljina jednaka

$$l = 8r(n-1) = 8r \cdot (4-1) = 24r$$

dok je površina

$$P = r^2(n-1)(n-2)\pi = r^2 \cdot (4-1) \cdot (4-2) \cdot \pi = 6r^2\pi.$$

□

U dosadašnjim razmatranjima smo uvijek stavili da je  $n \geq 3$ . Naime, za  $n = 2$  se dešava zanimljiva stvar, hipocikloida je - dužina.

**Teorem 3.8.** Hipocikloida  $H(2r, r)$  je dužina. Duljina te hipocikloide je  $8r$ .

*Dokaz.* Uvrštavanjem  $n = 2$  u (3.8) dobivamo

$$x(t) = 2r \cos t,$$

$$y(t) = 0,$$

što je evidentno dužina s krajevima u apscisama  $\pm 2r$ .

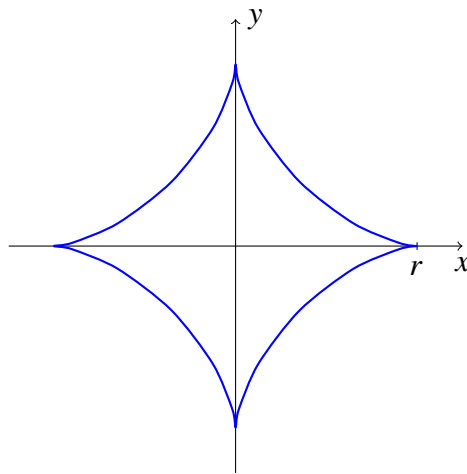
Kako točka  $T$  za  $t \in [0, 2\pi]$  dva puta prijeđe put na  $x$ -osi između  $2r$  i  $-2r$ , duljina te hipocikloide je  $8r$ , što je u suglasju s teoremom 3.6. □

*Komentar:* Hipocikloida  $H(2r, r)$  je dužina s krajevima  $(-2r, 0)$  i  $(2r, 0)$ , a duljina te dužine je  $4r$ . Teorem tvrdi da je duljina te hipocikloide  $8r$  jer ne mjeri duljinu dužine već put koji je prošla točka koja iscrtava hipocikloidu za  $t \in [0, 2\pi]$ .

## Astroida

Najpoznatija, vjerojatno jer se redovito pojavljuje u zadacima, hipocikloida je astroida. Nju dobijemo za  $n = 4$ , pa su njene parametarske jednadžbe

$$\begin{aligned}x(t) &= r[3 \cos t + \cos 3t] = r \cos^3 t \\y(t) &= r[3 \sin t - \sin 3t] = r \sin^3 t\end{aligned}$$



**Slika 3.16.** Astroida.

Potenciramo li parametarske jednadžbe na  $\frac{2}{3}$ , zbrajanjem dobivamo njenu jednadžbu u Kartezijevim koordinatama:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = r^{\frac{2}{3}}.$$

## 4. Krivulja se definira zadavanjem njenih diferencijalnih svojstava

### 4.1. Uvod

Krivulje se mogu zadati i tako da se da odnos između neizmjereno malih elemenata krivulje u obliku diferencijalne jednačbe. Integriranjem tako dobivene jednačbe dolazimo do jednačbe tražene krivulje. Takav je način zadavanja karakterističan za mnogobrojne probleme geometrije, mehanike, fizike i tehnike u kojima se, na temelju geometrijskih i mehaničkih spoznaja i shvaćanja, izvode diferencijalne jednačbe.

Primjerice,

- eksponencijalna se krivulja može zadati kao krivulja kojoj subtangenta u svakoj njenoj točki ima isti smisao;
- traktrisa se može zadati kao krivulja kojoj je duljina tangente konstantna;
- radioidalna spirala ili klotoida se može zadati kao krivulja kojoj je polumjer zakrivljenosti obrnuto proporcionalan duljini njezina luka;
- parabola se može zadati kao krivulja kod koje se svjetlosne zrake paralelne optičkoj osi reflektiraju u jednoj točki; itd.

U narednim će točkama ovog poglavlja kao primjer krivulje zadane diferencijalnom jednačbom biti obrađena traktrisa pravca, koju ćemo radi jednostavnosti zvati samo traktrisa.

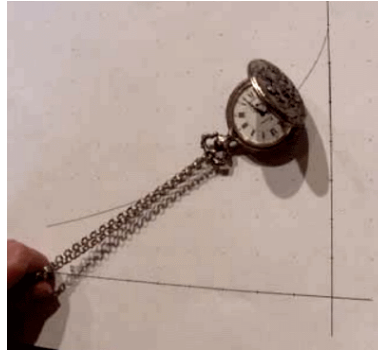
### 4.2. Izvod traktrise

Problem traktrise je prvi postavio pariški liječnik i arhitekt Claude Perrault (1613.–1688.) koji je na stol stavio svoj džepni sat tako da je lanac bio okomit na rub stola i počeo povlačiti kraj lanca duž ruba stola (slika 4.1) te si postavio pitanje: Koja je krivulja po kojoj se pomiče sat? Perrault je tada uočio i da je duljina tangente<sup>1</sup> takve krivulje konstanta.

---

<sup>1</sup>U diferencijalnoj geometriji se duljinom tangente zove udaljenost između dirališta tangente s krivuljom i sjecišta tangente s osi apscisa.





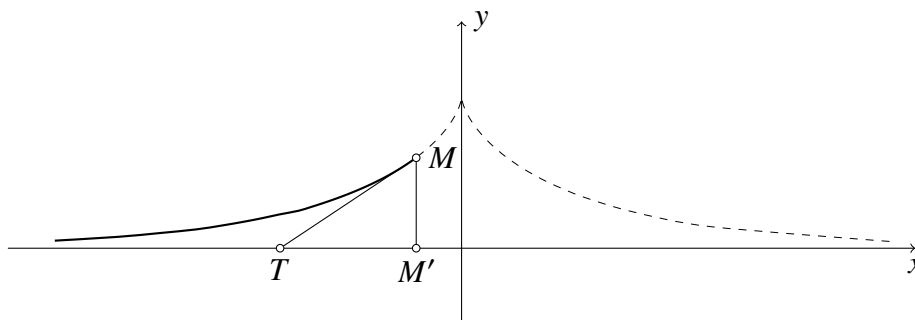
Slika 4.1.

Prvo rješenje problema je dao Huygens koji je krivulju nazvao taktrisa što dolazi od latinske riječi *trahere*, što znači “vući”. Huygens je kasnije generalizirao Perraultov problem stavljajući da se jedan kraj niti ne pomiče po pravcu nego po volji odabranoj krivulji. Tako su uz običnu traktrisu ili traktrisu pravca nastale i traktrisa kružnice, traktrisa parabole, itd. Huygens je te krivulje nazvao traktorijama.

Za početak, definirajmo traktrisu te izvedimo njezinu jednadžbu.

**Definicija 4.1.** *Traktrisa je krivulja za koju je duljina tangente  $a$  stalna veličina. Veličina  $a$  se zove parametar traktrise.*

Označimo s  $T$  točku koju povlačimo po osi  $x$ , sa  $M$  točku na traženoj krivulji. Uočimo da je točka  $T$  sjecište s osi  $x$  tangente povučene u točki  $M$  krivulje. Označimo s  $M'$  ortogonalnu projekciju točke  $M$  na  $x$ -os, te s  $a = |TM|$  duljinu tangente. Neka se u početnom trenutku točka  $M$  nalazi na koordinatama  $(0, a)$ , a točka  $T$  u ishodištu. Pomaknemo li točku  $T$  ulijevo, dobijemo situaciju kao na slici 4.2.



Slika 4.2. Uz izvod jednadžbe traktrise.

Ako s  $\varphi$  označimo kut što ga tangenta  $MT$  zatvara s pozitivnim dijelom osi  $x$ , onda je

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{|M'M|}{|M'T|} = \frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}.$$

Nadalje, kako je  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx}$ , diferencijalna jednadžba traktrise glasi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}. \quad (4.1)$$

U pitanju je diferencijalna jednadžba sa separiranim varijablama, pa imamo

$$\begin{aligned} x &= \int \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y} dy = \left| \begin{array}{l} y = a \sin t \\ dy = a \cos t dt \end{array} \right| = a \int \frac{\cos^2 t}{\sin t} dt = \\ &= a \int \left( \frac{1}{\sin t} - \sin t \right) dt = a \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} + a \cos t + C. \end{aligned}$$

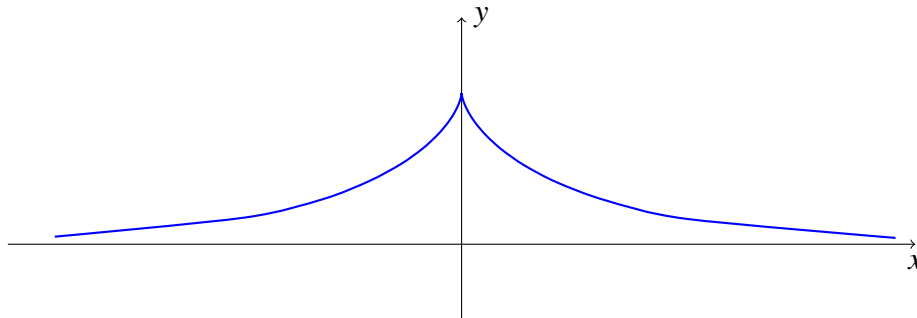
Opće rješenje u parametarskom obliku glasi

$$\begin{cases} x(t) = a \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} + a \cos t + C, \\ y(t) = a \sin t. \end{cases}$$

Partikularno ćemo rješenje dobiti iz činjenice da za  $x = 0$  dobijemo  $y = a$ , što uvršteno u gornje jednadžbe daje  $C = 0$ , pa su parametarske jednadžbe traktrise

$$\begin{cases} x(t) = a \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} + a \cos t, \\ y(t) = a \sin t. \end{cases} \quad (4.2)$$

Ostaje još utvrditi vrijednosti parametra  $t$  za koje dobijemo lijevu granu traktrise. Iz  $\operatorname{tg} \frac{t}{2} > 0$  slijedi  $t \in \langle 0, \pi \rangle$ . No, kako još mora biti i  $x(t) < 0$ , to je  $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ .



**Slika 4.3.** Traktrisa.

Može se postaviti pitanje korektnosti gornjeg izvoda u smislu bi li se dobilo jednako rješenje da se točka  $T$  pomaknula u desnu stranu. U tom bi slučaju bilo

$$\operatorname{tg}(\pi - \varphi) = -\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}},$$

pa bi diferencijalna jednadžba glasila

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{\sqrt{a^2 - y^2}},$$

a njeno partikularno rješenje u parametarskom obliku bi glasilo

$$\begin{cases} x(t) = -a \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} - a \cos t, \\ y(t) = a \sin t. \end{cases} \quad (4.3)$$

Dobivene jednadžbe opisuju desnu granu traktrise za  $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ . Stavimo li u (4.3) zamjenu  $t$  sa  $\pi - t$ , dobili bi

$$\begin{aligned} x(t) &= -a \ln \operatorname{tg} \frac{\pi-t}{2} - a \cos(\pi - t) = -a \ln \operatorname{ctg} \frac{t}{2} + a \cos t = a \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} + a \cos t, \\ y(t) &= a \sin(\pi - t) = a \sin t, \end{aligned}$$

što su iste jednadžbe kao u prvom slučaju s tim da za parametar  $t$  vrijedi  $t \in [\frac{\pi}{2}, \pi)$ , odnosno, s (4.2) su dane parametarske jednadžbe traktrise za  $t \in \langle 0, \pi \rangle$ , s tim da se za vrijednosti parametra  $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$  dobije lijeva grana traktrise, a za  $t \in [\frac{\pi}{2}, \pi)$  desna grana.

Parametar  $t$  koji se pojavljuje u parametarskim jednadžbama geometrijski ima smisao kuta što ga tangenta zatvara s pozitivnim dijelom osi  $x$ . Naime, u lijevoj grani je  $y = a \sin \varphi$ , odakle, uspoređivanjem s parametarskom jednadžbom, nalazimo da je  $t = \varphi$ . U desnoj grani je  $y = a \sin(\pi - \varphi) = a \sin \varphi$ , pa je opet  $t = \varphi$ .

Traktrisa je osno simetrična s obzirom na pravac  $x = 0$ , te je diferencijabilna svuda osim u točki  $x = 0$  gdje je samo neprekidna.

### 4.3. Neka metrička svojstva

Zanimljiv je problem duljine luka traktrise, mjenog od točke  $A(0, a)$  koju dobijemo za vrijednost parametra  $t = \frac{\pi}{2}$ , do bilo koje točke prema desno, koje dobijemo za vrijednosti parametra  $t \in \langle \frac{\pi}{2}, \pi \rangle$ .

**Teorem 4.1.** Duljina luka traktrise od točke  $A(0, a)$  do bilo koje točke za vrijednost parametra  $\tau \in \langle \frac{\pi}{2}, \pi \rangle$  iznosi

$$l(\tau) = -a \ln \sin \tau. \quad (4.4)$$

*Dokaz.* Duljina luka se izračuna integralom

$$\begin{aligned} l &= \int_{\pi/2}^{\tau} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \\ &= \int_{\pi/2}^{\tau} \sqrt{\left(\frac{a \cos^2 t}{\sin t}\right)^2 + (a \cos t)^2} dt = a \int_{\pi/2}^{\tau} \sqrt{\frac{\cos^4 t}{\sin^2 t} + \cos^2 t} dt = \\ &= a \int_{\pi/2}^{\tau} \sqrt{\frac{\cos^4 t + \cos^2 t \sin^2 t}{\sin^2 t}} dt = a \int_{\pi/2}^{\tau} \sqrt{\frac{\cos^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t)}{\sin^2 t}} dt = \\ &= a \int_{\pi/2}^{\tau} \sqrt{\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}} dt = a \int_{\pi/2}^{\tau} \left| \frac{\cos t}{\sin t} \right| dt = -a \int_{\pi/2}^{\tau} \frac{\cos t}{\sin t} dt = -a \ln \sin \tau, \end{aligned}$$

što je i trebalo pokazati. □

**Teorem 4.2.** *Površina omeđena traktrinom i njezinom asimptom iznosi*

$$P = \frac{a^2\pi}{2}.$$

*Dokaz.* Integriranjem imamo

$$\begin{aligned} P &= \int_0^\pi y(t)x'(t) dt = \\ &= \int_0^\pi a \sin t \frac{a \cos^2 t}{\sin t} dt = a^2 \int_0^\pi \cos^2 t dt = a^2 \int_0^\pi \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \\ &= a^2 \left( \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \sin 2t \right) \Big|_0^\pi = \frac{a^2\pi}{2}, \end{aligned}$$

što je i trebalo pokazati. □

Treba primijetiti da je gore izračunata površina jednaka polovici površine kruga polumjera jednakog parametru traktrise.

**Teorem 4.3.** *Volumen tijela nastalog rotacijom traktrise oko njene asimptote iznosi*

$$V = \frac{2}{3}a^3\pi.$$

*Dokaz.* Laganim računom imamo

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-\infty}^{+\infty} y^2(x) dx = \\ &= \pi \int_0^\pi a^2 \sin^2 t \frac{a \cos^2 t}{\sin t} dt = a^3\pi \int_0^\pi \sin t \cos^2 t dt = -a^3\pi \int_0^\pi \cos^2 t d(\cos t) = \\ &= -a^3\pi \left( \frac{\cos^3 t}{3} \right) \Big|_0^\pi = -a^3\pi \left( -\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \right) = \frac{2}{3}a^3\pi, \end{aligned}$$

što je i trebalo pokazati. □

Zgodno je primijetiti da je taj volumen jednak polovici volumena kugle polumjera jednakog parametru traktrise.

Ostaje još izračunati oplošje rotacijske plohe.

**Teorem 4.4.** *Oplošje tijela nastalog rotacijom traktrise oko njezine asimptote iznosi*

$$P = 4a^2\pi.$$

*Dokaz.* Oplošje ćemo izračunati koristeći formulu za oplošje rotacijske plohe, s tim da ćemo izračunati pola oplošja, dio za  $t \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ , te pomnožiti s dva. Imamo

$$\begin{aligned} P &= 2 \cdot 2\pi \int_{\pi/2}^{\pi} y(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \\ &= 2 \cdot 2\pi \int_{\pi/2}^{\pi} a \sin t \cdot \sqrt{\left(\frac{a \cos^2 t}{\sin t}\right)^2 + (a \cos t)^2} dt = \\ &= 4a^2\pi \int_{\pi/2}^{\pi} \sin t \cdot \left|\frac{\cos t}{\sin t}\right| dt = 4a^2\pi \cdot (-\sin t) \Big|_{\pi/2}^{\pi} = 4a^2\pi, \end{aligned}$$

što je i trebalo pokazati. □

Može se uočiti da je ta površina jednaka površini kugle kojoj je polumjer jednak parametru traktrise.

#### 4.4. Polumjer zakrivljenosti traktrise

Zakrivljenost krivulje  $K$  u njoj točki  $T_1$  je mjera odstupanja te krivulje od pravocrtnosti u toj točki, a definira se kao

$$K = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta s},$$

gdje je  $\Delta s = |\widehat{T_1 T_2}|$  duljina luka krivulje između bliskih točaka  $T_1$  i  $T_2$ , a  $\Delta \varphi$  kut između normala na krivulju u tim točkama ili kut zakreta između tangenti u točkama  $T_1$  i  $T_2$ .

Iz gornje je definicije jasno da je zakrivljenost pravca  $K = 0$ , dok se lako pokazuje da zakrivljenost kružnice polumjera  $r$  iznosi  $K = \frac{1}{r}$ .

Polumjer zakrivljenosti krivulje u nekoj njoj točki se definira kao

$$R = \frac{1}{|K|},$$

gdje se zakrivljenost uzima po apsolutnoj vrijednosti jer sama po sebi ne mora biti pozitivan realan broj. Zakrivljenost u nekoj točki krivulje zadane parametarskim jednadžbama računa se formulom

$$R = \left| \frac{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^{3/2}}{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)} \right|.$$

Određimo sada polumjer zakrivljenosti u svakoj točki traktrise. Parametarske jednadžbe traktrise su:

$$\begin{cases} x(t) = a \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} + a \cos t, \\ y(t) = a \sin t. \end{cases}$$

Njezine prve derivacije su:

$$\begin{cases} x'(t) = a \frac{\cos^2 t}{\sin t}, \\ y'(t) = a \cos t, \end{cases}$$

dok su druge derivacije:

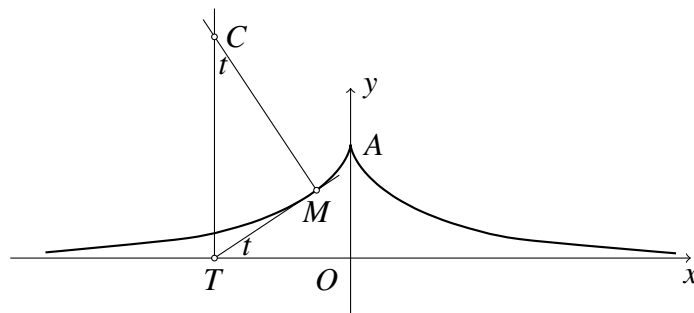
$$\begin{cases} x''(t) = -a \frac{\cos t (\sin^2 t + 1)}{\sin^2 t}, \\ y''(t) = -a \sin t. \end{cases}$$

Uvrstimo li sve potrebno u formulu za polumjer zakrivljenosti, imamo

$$\begin{aligned} R &= \left| \frac{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^{3/2}}{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)} \right| \\ &= \left| \frac{\left( \left( a \frac{\cos^2 t}{\sin t} \right)^2 + (a \cos t)^2 \right)^{3/2}}{a \frac{\cos^2 t}{\sin t} \cdot (-a \sin t) - a \cos t \cdot \left( -a \frac{\cos t (\sin^2 t + 1)}{\sin^2 t} \right)} \right| = \left| \frac{\left( a^2 \frac{\cos^4 t}{\sin^2 t} + a^2 \cos^2 t \right)^{3/2}}{-a^2 \cos^2 t + a^2 \frac{\cos^2 t (\sin^2 t + 1)}{\sin^2 t}} \right| \\ &= \left| \frac{\left( a^2 \cos^2 t \left( \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} + 1 \right) \right)^{3/2}}{a^2 \cos^2 t \left( -1 + \frac{\sin^2 t + 1}{\sin^2 t} \right)} \right| = \left| \frac{\left( a^2 \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} \right)^{3/2}}{a^2 \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}} \right| = a |\operatorname{ctg} t|. \end{aligned}$$

Dobiveni nam izraz omogućuje jednostavnu konstrukciju središta zakrivljenosti u po volji odabranoj točki traktrise. Središte zakrivljenosti  $C$  krivulje u nekoj njenoj točki  $M$  je točka koja se nalazi na normali krivulje kroz tu točku i od nje je udaljena za polumjer zakrivljenosti.

Povucimo tangentu u točki  $M$  traktrise i sa  $T$  označimo njeno sjecište s osi  $x$ . Iz svojstava traktrise znamo da je  $|MT| = a$ . Normala na krivulju u točki  $M$  siječe pravac koji prolazi kroz točku  $T$  okomito na os  $x$  u točki  $C$ .



**Slika 4.4.** Konstrukcija središta zakrivljenosti traktrise.

Tada je  $|CM| = a \operatorname{ctg} t = R$  i prema tome točka  $C$  jest traženo središte zakrivljenosti (slika 4.4).

Oдавде slijedi da je središte zakrivljenosti za po volji odabranu točku traktrise sjecište normale traktrise u toj točki s okomicom na apscisnu os, uzdignutom u sjecištu te osi s tangentom traktrise u zadanoj točki.

## 4.5. Evoluta traktrise

Uz pojam središta zakrivljenosti je usko vezan pojam evolute.

Geometrijsko mjesto svih središta zakrivljenosti neke krivulje naziva se evolutom te krivulje.

Odredimo sada evolutu traktrise. Evoluta krivulje zadane parametarskim jednadžbama nalazi se iz formula:

$$X(t) = x(t) - y'(t) \cdot \frac{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)},$$

$$Y(t) = y(t) + x'(t) \cdot \frac{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}.$$

Uvrstimo li poznate izraze, imamo:

$$\begin{aligned} X(t) &= x(t) - y'(t) \cdot \frac{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)} \\ &= a \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} + a \cos t - a \cos t \cdot \frac{\left(a \frac{\cos^2 t}{\sin t}\right)^2 + (a \cos t)^2}{a \frac{\cos^2 t}{\sin t} \cdot (-a \sin t) - a \cos t \cdot \left(-a \frac{\cos t(\sin^2 t + 1)}{\sin^2 t}\right)} \\ &= a \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} + a \cos t - a \cos t \cdot 1 = a \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} \\ Y(t) &= y(t) + x'(t) \cdot \frac{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)} \\ &= a \sin t + a \frac{\cos^2 t}{\sin t} \cdot \frac{\left(a \frac{\cos^2 t}{\sin t}\right)^2 + (a \cos t)^2}{a \frac{\cos^2 t}{\sin t} \cdot (-a \sin t) - a \cos t \cdot \left(-a \frac{\cos t(\sin^2 t + 1)}{\sin^2 t}\right)} \\ &= a \sin t + a \frac{\cos^2 t}{\sin t} = \frac{a}{\sin t}, \end{aligned}$$

što su parametarske jednadžbe evolute.

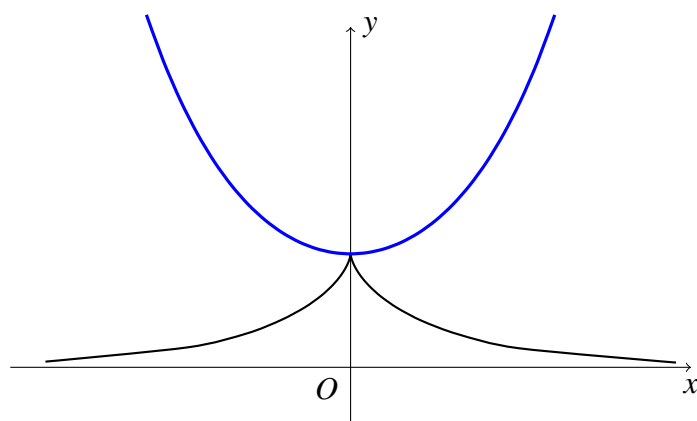
Da bi pronašli jednadžbu evolute u Kartezijevim koordinatama, iz izraza za  $X$  ćemo izlučiti parametar  $t$  i uvrstiti u drugu jednadžbu. Iz  $X = a \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2}$  slijedi  $t = 2 \operatorname{arctg} e^{X/a}$  što uvršteno u izraz za  $Y$  daje

$$\begin{aligned} Y &= \frac{a}{\sin(2 \operatorname{arctg} e^{X/a})} = \frac{a}{2 \sin(\operatorname{arctg} e^{X/a}) \cos(\operatorname{arctg} e^{X/a})} \\ &= \frac{a}{2} \frac{1}{\frac{e^{X/a}}{\sqrt{1+(e^{X/a})^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+(e^{X/a})^2}}} = \frac{a}{2} \frac{1 + (e^{X/a})^2}{e^{X/a}} = \frac{a}{2} (e^{-X/a} + e^{X/a}), \end{aligned}$$

pa je jednadžba evolute traktrise u Kartezijevim koordinatama

$$Y = a \operatorname{ch} \frac{X}{a},$$

što je lančanica (slika 4.5).



**Slika 4.5.** Evoluta traktrise.





## 5. Krivulje koje se zadaju u analitičkom obliku

Ovaj način tvorbe krivulja je u odnosu na prethodne načine prirodniji jer jednadžbu krivulje odmah zadajemo u analitičkom obliku. Do sada smo jednadžbe krivulja morali sastavljati.

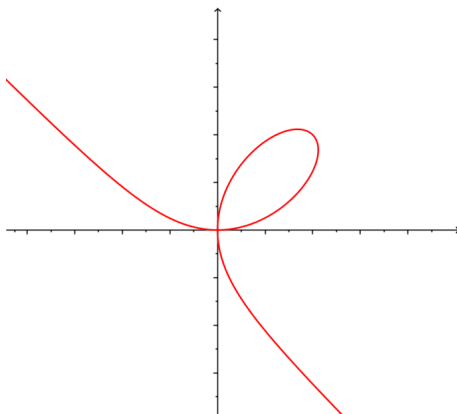
Kao primjer ovog načina tvorbe krivulje promatrat ćemo krivulju Descartesov list.

### 5.1. Descartesov list (Cartesiusov list)

**Definicija 5.1.** *Descartesov list je krivulja trećeg reda zadana jednadžbom*

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0, \quad a > 0.$$

Krivulja Descartesov list je dobila ime po Renéu Descartesu (1596.–1650.) francuskom matematičaru, fizičaru i filozofu, utemeljitelju analitičke geometrije. Descartes je točno opisao oblik lista u prvom kvadrantu, no pretpostavio je simetriju četvrtog reda što je bilo krivo. Postoji samo jedan list i radi se o otvorenoj krivulji (slika 5.1). Točan oblik Descartesovog lista odredio je Huygens 1692. godine.



**Slika 5.1.** Descartesov list.

Parametarske jednadžbe Descartesova lista dobit ćemo ako u njegovu implicitnu jednadžbu uvrstimo izraz  $y = xt$ , pa imamo

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 - 3axy &= 0 \\ x^3 + x^3t^3 - 3ax^2t &= 0 \quad / : x^2 \\ x(1 + t^3) &= 3at, \end{aligned}$$

odakle slijedi

$$x = \frac{3at}{1 + t^3}. \quad (5.1)$$

Pomnožimo li (5.1) sa  $t$ , dobit ćemo  $xt = \frac{3at^2}{1+t^3}$  pa je  $y = \frac{3at^2}{1+t^3}$ .

Dobili smo parametarske jednadžbe Descartesovog lista

$$\begin{cases} x = \frac{3at}{1+t^3} \\ y = \frac{3at^2}{1+t^3} \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

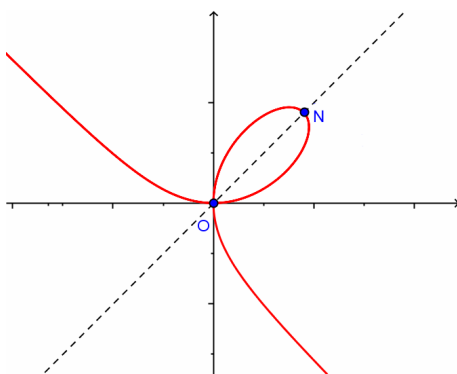
Polarnu jednadžbu Descartesovog lista dobit ćemo ukoliko u implicitnu jednadžbu uvrstimo izraze  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ , pa imamo

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 - 3axy &= 0 \\ r^3(\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi) &= 3a \cdot r \cos \varphi \cdot r \sin \varphi \quad / : r^2 \end{aligned}$$

pa je

$$r = \frac{3a \cos \varphi \sin \varphi}{\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi}.$$

Krivulja Descartesov list je simetrična u odnosu na pravac  $y = x$  (slika 5.2) kojeg siječe u dvije točke; točki  $O(0,0)$  i točki  $N$  koja se nalazi u prvom kvadrantu.



Slika 5.2.

Određimo koordinate točke  $N$ :

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 - 3axy &= 0 \\ \frac{y}{x} &= x \\ \frac{x^3 + x^3 - 3ax^2}{2x} &= 0 \quad / : x^2 \\ 2x &= 3a \end{aligned}$$

pa iz  $x = \frac{3}{2}a$  slijedi  $y = \frac{3}{2}a$  te su koordinate točke  $N \left(\frac{3}{2}a, \frac{3}{2}a\right)$ .

Nadalje, sa slike 44 može se naslutiti da krivulja Descartesov list ima kosu asimptotu.

Kosu asimptotu  $y = kx + l$  krivulje zadane u parametarskom obliku možemo odrediti na sljedeći način. Ako je  $\lim_{t \rightarrow t_i} |x(t)| = \infty$  i  $\lim_{t \rightarrow t_i} |y(t)| = \infty$ , tada računamo

$$k = \lim_{t \rightarrow t_i} \frac{y(t)}{x(t)}, \quad l = \lim_{t \rightarrow t_i} [y(t) - k \cdot x(t)].$$

Ako postoje oba limesa, asimptota krivulje je  $y = kx + l$ .

Iz parametarskih jednadžbi Descartesovog lista zaključujemo da  $|x(t)| \rightarrow \infty$  kad  $t \rightarrow -1$  i da  $|y(t)| \rightarrow \infty$  kad  $t \rightarrow -1$ .

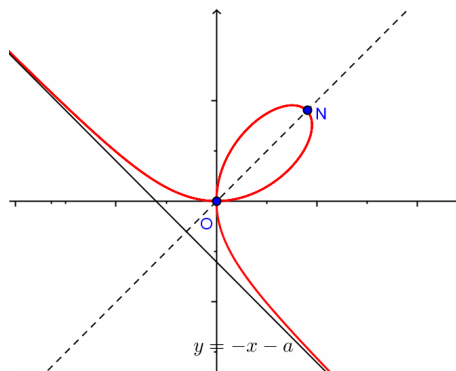
Nadalje vrijedi

$$k = \lim_{t \rightarrow -1} \frac{\frac{3at^2}{1+t^3}}{\frac{3at}{1+t^3}} = \lim_{t \rightarrow -1} t = -1$$

i

$$\begin{aligned} l &= \lim_{t \rightarrow -1} \left[ \frac{3at^2}{1+t^3} - (-1) \cdot \frac{3at}{1+t^3} \right] = \lim_{t \rightarrow -1} \frac{3at(t+1)}{(t+1)(t^2-t+1)} = \\ &= \lim_{t \rightarrow -1} \frac{3at}{t^2-t+1} = -\frac{3a}{3} = -a. \end{aligned}$$

Prema tome, Descartesov list ima kosu asimptotu  $y = -x - a$  (slika 5.3).



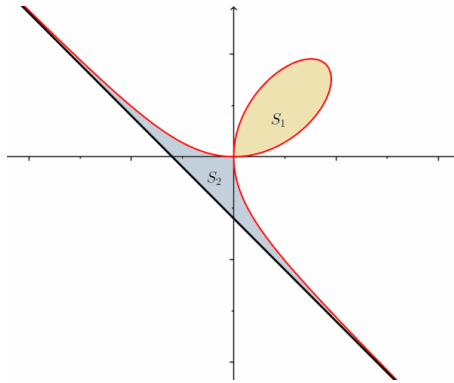
**Slika 5.3.** Asimptota Descartesovog lista.

U točki  $O(0,0)$  Descartesov list siječe sam sebe i u toj točki krivulja ima dvije tangente. Te tangente su pravci  $x = 0$  i  $y = 0$ .

**Teorem 5.1.** Neka je  $S_1$  površina petlje Descartesovog lista, a  $S_2$  površina između Descartesovog lista i asimptote. Tada je  $S_1 = S_2 = \frac{3}{2}a^2$ .

*Dokaz.* Izračunat ćemo prvo površinu označenu s  $S_1$  koristeći krivuljni integral druge vrste, tj. formulu

$$P = \frac{1}{2} \oint x dy - y dx.$$



Slika 5.4.

Parametarske jednadžbe Descartovog lista

$$x = \frac{3at}{1+t^3}, \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3}$$

opisuju petlju za  $t \in [0, +\infty)$ , te iz njih lagano nalazimo diferencijale

$$dx = \frac{3a(1+t^3) - 3at \cdot 3t^2}{(1+t^3)^2} dt = \frac{3a - 6at^3}{(1+t^3)^2} dt$$

$$dy = \frac{6at(1+t^3) - 3at^2 \cdot 3t^2}{(1+t^3)^2} dt = \frac{6at - 3at^4}{(1+t^3)^2} dt,$$

pa je

$$S_1 = \frac{1}{2} \oint x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left( \frac{3at}{1+t^3} \cdot \frac{6at - 3at^4}{(1+t^3)^2} - \frac{3at^2}{1+t^3} \cdot \frac{3a - 6at^3}{(1+t^3)^2} \right) dt$$

$$= \frac{9a^2}{2} \int_0^{\infty} \frac{t^2}{(1+t^3)^2} dt = \left. \begin{array}{l} 1+t^3 = z \Rightarrow 3t^2 dt = dz \\ t=0 \Rightarrow z=1 \\ t=\infty \Rightarrow z=\infty \end{array} \right| = \frac{3a^2}{2} \int_1^{\infty} \frac{dz}{z^2}$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{3a^2}{2} \int_1^b \frac{dz}{z^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{3a^2}{2} \left( -\frac{1}{z} \right) \Big|_1^b = \frac{3}{2}a^2.$$

Ostaje još za izračunati površinu  $S_2$ . Treba primijetiti da se  $S_2$  sastoji od dva sukladna lika u 2. i 4. kvadrantu, te trokuta u 3. kvadrantu. Površina trokuta iz trećeg kvadranta je

$$P_{\Delta} = \frac{a^2}{2}.$$

Izračunat ćemo sada površinu dijela lika  $S_2$  u drugom kvadrantu. Za to nam je najprikladniji polarni koordinatni sustav, u kojem se površina između dviju krivulja računa formulom

$$P = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \left( (r_2(\varphi))^2 - (r_1(\varphi))^2 \right) d\varphi.$$

Jednadžbu asimptote  $y = -x - a$  u polarnom sustavu dobivamo uvrštavanjem  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$  u njenu eksplicitnu jednadžbu:

$$\begin{aligned} y &= -x - a \\ r \sin \varphi &= -r \cos \varphi - a \\ r(\sin \varphi + \cos \varphi) &= -a \end{aligned}$$

pa je

$$r = \frac{-a}{\sin \varphi + \cos \varphi}.$$

Kako je polarna jednadžba Descartovog lista

$$r = \frac{3a \cos \varphi \sin \varphi}{\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi},$$

to je tražena površina

$$\begin{aligned} P_2 &= \frac{1}{2} \int_{3\pi/4}^{\pi} \left( \left( \frac{-a}{\sin \varphi + \cos \varphi} \right)^2 - \left( \frac{3a \cos \varphi \sin \varphi}{\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi} \right)^2 \right) d\varphi \\ &= \frac{1}{2} \int_{3\pi/4}^{\pi} \left( \frac{-a}{\sin \varphi + \cos \varphi} - \frac{3a \cos \varphi \sin \varphi}{\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi} \right) \cdot \left( \frac{-a}{\sin \varphi + \cos \varphi} + \frac{3a \cos \varphi \sin \varphi}{\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi} \right) d\varphi \\ &= \frac{1}{2} \int_{3\pi/4}^{\pi} \frac{-a(\cos^2 \varphi - \cos \varphi \sin \varphi + \sin^2 \varphi) - 3a \cos \varphi \sin \varphi}{(\cos \varphi + \sin \varphi)(\cos^2 \varphi - \cos \varphi \sin \varphi + \sin^2 \varphi)} \cdot \\ &\quad \frac{-a(\cos^2 \varphi - \cos \varphi \sin \varphi + \sin^2 \varphi) + 3a \cos \varphi \sin \varphi}{(\cos \varphi + \sin \varphi)(\cos^2 \varphi - \cos \varphi \sin \varphi + \sin^2 \varphi)} d\varphi \\ &= -\frac{a^2}{2} \int_{3\pi/4}^{\pi} \frac{1 - \sin \varphi \cos \varphi + 3 \sin \varphi \cos \varphi}{(\cos \varphi + \sin \varphi)(\cos^2 \varphi - \cos \varphi \sin \varphi + \sin^2 \varphi)} \cdot \\ &\quad \frac{-1 + \sin \varphi \cos \varphi + 3 \sin \varphi \cos \varphi}{(\cos \varphi + \sin \varphi)(\cos^2 \varphi - \cos \varphi \sin \varphi + \sin^2 \varphi)} d\varphi \\ &= -\frac{a^2}{2} \int_{3\pi/4}^{\pi} \frac{(1 + 2 \sin \varphi \cos \varphi)(-1 + 4 \sin \varphi \cos \varphi)}{(\cos \varphi + \sin \varphi)^2 (\cos^2 \varphi - \cos \varphi \sin \varphi + \sin^2 \varphi)^2} d\varphi \\ &= -\frac{a^2}{2} \int_{3\pi/4}^{\pi} \frac{(1 + 2 \sin \varphi \cos \varphi)(-1 + 4 \sin \varphi \cos \varphi)}{(1 + 2 \sin \varphi \cos \varphi)(1 - \cos \varphi \sin \varphi)^2} d\varphi \\ &= -\frac{a^2}{2} \int_{3\pi/4}^{\pi} \frac{-1 + 4 \sin \varphi \cos \varphi}{(1 - \cos \varphi \sin \varphi)^2} d\varphi = -\frac{a^2}{2} \int_{3\pi/4}^{\pi} \frac{-1 + 2 \sin 2\varphi}{(1 - \frac{1}{2} \sin 2\varphi)^2} d\varphi \\ &= \frac{a^2}{2} \int_{3\pi/4}^{\pi} \frac{d\varphi}{(1 - \frac{1}{2} \sin 2\varphi)^2} - 2 \cdot \frac{a^2}{2} \int_{3\pi/4}^{\pi} \frac{\sin 2\varphi}{(1 - \frac{1}{2} \sin 2\varphi)^2} d\varphi \end{aligned}$$

Dobivene integrale riješit ćemo koristeći tablicu neodređenih integrala iz Bronštejna, i to:

$$306) \int \frac{dx}{b + c \sin ax} = \frac{2}{a\sqrt{b^2 - c^2}} \operatorname{arctg} \frac{b \operatorname{tg} \frac{ax}{2} + c}{\sqrt{b^2 - c^2}},$$

$$309) \int \frac{dx}{(b + c \sin ax)^2} = \frac{c \cos ax}{a(b^2 - c^2)(b + c \sin ax)} + \frac{b}{b^2 - c^2} \int \frac{dx}{b + c \sin ax},$$

$$310) \int \frac{\sin ax \, dx}{(b + c \sin ax)^2} = \frac{b \cos ax}{a(c^2 - b^2)(b + c \sin ax)} + \frac{c}{c^2 - b^2} \int \frac{dx}{b + c \sin ax},$$

pa dalje imamo:

$$P_2 = \frac{a^2}{2} \left( \frac{-\frac{1}{2} \cos 2\varphi}{2(1 - \frac{1}{4})(1 - \frac{1}{2} \sin 2\varphi)} + \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} \frac{2}{2\sqrt{1 - \frac{1}{4}}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \frac{2\varphi}{2} - \frac{1}{2}}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}}} \right) \Big|_{3\pi/4}^{\pi} - a^2 \left( \frac{\cos 2\varphi}{2(\frac{1}{4} - 1)(1 - \frac{1}{2} \sin 2\varphi)} + \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{4} - 1} \frac{2}{2\sqrt{1 - \frac{1}{4}}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \frac{2\varphi}{2} - \frac{1}{2}}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}}} \right) \Big|_{3\pi/4}^{\pi} = \frac{a^2}{2}.$$

Konačno, površina lika  $S_2$  iznosi

$$S_2 = P_{\Delta} + 2 \cdot P_2 = \frac{a^2}{2} + 2 \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{3}{2}a^2,$$

što je i trebalo pokazati. □

# Bibliografija

- [1] MO-PMF, *Matematička analiza 1 i 2*,  
(<http://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/analiza/index.php>)
- [2] Bronštejn, I. N., Semendjajev, K. A., *Matematički priručnik*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1991
- [3] Bruckler, F. M., *Povijest matematike 1*, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku, Osijek, 2007
- [4] Bruckler, F. M., *Povijest matematike 2*, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku, Osijek, 2010
- [5] Janjić, M., *Predavanja iz trigonometrije*,  
(<http://www.pmfbl.org/matematika/zaposleni/mjanjic/files/trigonometrija.pdf>)
- [6] Kurnik, Z., *Rene Descartes*, MiŠ, 6(2000), str. 26-29,  
(<http://mis.element.hr/fajli/118/06-09.pdf>)
- [7] Razpet, M., *Proklova hipopeda*, Pedagoški fakultet, Ljubljana, 2013  
(<http://www.pef.uni-lj.si/matwww/Hipopeda.pdf>)
- [8] Savelov, A. A., *Ravninske krivulje*, Školska knjiga, Zagreb, 1979
- [9] Scitovski, R., Brajković, D., *Geometrija ravnine i prostora*, Odjel za matematiku Osijek,  
([http://www.mathos.unios.hr/geometrija/Materijali/Geo\\_1.pdf](http://www.mathos.unios.hr/geometrija/Materijali/Geo_1.pdf))
- [10] Sošić, M., *Uvod u diferencijalnu geometriju*, predavanja, Odjel za matematiku Rijeka,  
(<http://www.math.uniri.hr/~msosic/Uvod%20u%20dif%20geometriju/>)
- [11] Steyn, S., *Neither a Tractor, Nor a Matrix but a Tractrix*, Technology and its Integration in Mathematics Education, 2008,  
([http://rfdz.ph-noe.ac.at/fileadmin/Mathematik\\_Uploads/ACDCA/TIME2008/TIME08\\_contribs/Steyn/Steyn.pdf](http://rfdz.ph-noe.ac.at/fileadmin/Mathematik_Uploads/ACDCA/TIME2008/TIME08_contribs/Steyn/Steyn.pdf))
- [12] Thomas, G. B., Weir, M. D., Hass, J. R., *Thomas' Calculus*, 12th Edition, Pearson, 2009,  
(<https://archive.org/download/Pearson.Thomas.Calculus.12th.Edition.0321587995/>)



- [13] Wikipedia, *Pedal Curve*,  
([https://en.wikipedia.org/wiki/Pedal\\_curve](https://en.wikipedia.org/wiki/Pedal_curve))
- [14] Wolfram MathWorld, *Astroid*,  
(<http://mathworld.wolfram.com/Astroid.html>)
- [15] Wolfram MathWorld, *Cardioid*,  
(<http://mathworld.wolfram.com/Cardioid.html>)
- [16] Wolfram MathWorld, *Cissoïd of Diocles*,  
(<http://mathworld.wolfram.com/CissoïdofDiocles.html>)
- [17] Wolfram MathWorld, *Cycloid*,  
(<http://mathworld.wolfram.com/Cycloid.html>)
- [18] Wolfram MathWorld, *Epicycloid*,  
(<http://mathworld.wolfram.com/Epicycloid.html>)
- [19] Wolfram MathWorld, *Folium of Descartes*,  
(<http://mathworld.wolfram.com/FoliumofDescartes.html>)
- [20] Wolfram MathWorld, *Hypocycloid*,  
(<http://mathworld.wolfram.com/Hypocycloid.html>)
- [21] Wolfram MathWorld, *Torus*,  
(<http://mathworld.wolfram.com/Torus.html>)

# Sažetak

U radu sam opisala neke od načina tvorba krivulja:

- krivulje koje nastaju presjekom dane plohe ravninom
- krivulje koje nastaju kao geometrijsko mjesto točaka koje zadovoljavaju dano svojstvo
- krivulje koje nastaju kao putanja točke koja se giba po nekom određenom zakonu
- krivulje koje nastaju zadavanjem njenih diferencijalnih svojstava
- krivulje koje se zadaju u analitičkom obliku.

Opisala sam i svojstva promatranih krivulja. Ta svojstva se očituju u mehanizmima, detaljima strojeva, građevnim konstrukcijama, u optici, slikarstvu, arhitekturi, u crtanju, u geometrijskim konstrukcijama, . . . Neke krivulje se realiziraju u prirodi. U radu sam krivulje i njihova svojstva proučavala strogo matematički, bez njihove primjene. Promatranim krivuljama sam napisala nešto o njihovoj povijesti.

Pri pisanju ovog rada, svojstva krivulja su me često fascinirala i još jače pobudila zanimanje za upoznavanjem krivulja.



# Summary

In this thesis, some of curve formations are described:

- curves which occur by intersecting the given surface by the plane
- curves which occur as a geometric locus of points satisfying the given feature
- curves which occur as the path of a point that moves according to a certain definite principle
- curves which occur by setting their differential features
- curves which are set in an analytical form.

The observed curve features are described as well. These features manifest in mechanisms, device details, building constructions, optics, painting, architecture, drawing, geometric constructions. Some curves accomplish in nature. Curves and their features are studied in this thesis strictly mathematically without applications. I wrote about the history of the observed curves, as well.

While doing this thesis, I was fascinated by curve features so my interest in learning about them aroused greatly.



# Životopis

## OSOBNI PODACI:

- Ime i prezime: Renata Škrivanek
- Datum i mjesto rođenja: 13.06.1972, Zagreb
- Obitelj: suprug Dražen, kćer Tijana (1994.) i sin Matija (1996.)

## OBRAZOVANJE

- 1979.-1987.: Osnovna škola „Marijan Grozaj“, Ivanić-Grad
- 1987.-1991.: Centar za odgoj i usmjereno obrazovanje Ivanić-Grad, Matematičko-informatički tehničar
- 1991.-1993.: Prirodoslovno-matematički fakultet u Zagrebu, prof. matematike i informatike.
- 1994.: prekidam studij zbog trudnoće
- 2011.-2013.: Sveučilište u Rijeci, Odjel za matematiku, preddiplomski sveučilišni studij Matematika
- 2013.: završila preddiplomski sveučilišni studij Matematika u Rijeci
- 2013.-2015.: Prirodoslovni-matematički fakultet u Zagrebu, Diplomski sveučilišni studij Matematika; nastavnički smjer