Fibonometrija

Šoltić, Klara

Master's thesis / Diplomski rad

2016

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:406756

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-03-28**

Repository / Repozitorij:

Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Klara Šoltić

FIBONOMETRIJA

Diplomski rad

Voditelj rada:
izv. prof. dr. sc. Zrinka Franušić

Zagreb, 2016

Ovaj diplomski rad obranjen je dana _____ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. _____, predsjednik
2. _____, član
3. _____, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _____.

Potpisi članova povjerenstva:

1. _____
2. _____
3. _____

Ovaj diplomski rad posvećujem svojoj obitelji koja me uvijek podržavala i ohrabrivala tijekom mog obrazovanja. Na tome sam im jako zahvalna.

Sadržaj

Sadržaj **iv**

Uvod **2**

1 Fibonaccijevi i Lucasovi brojevi, zlatni rez **3**
1.1 Fibonaccijevi i Lucasovi brojevi i međusobne veze 3
1.2 Generalizirani Fibonaccijevi brojevi 6
1.3 Zlatni rez i svijet oko nas 9
1.4 Zlatni trokut 13

2 Fibonometrija **17**
2.1 Motivacija 17
2.2 Zlatni rez i trigonometrijske funkcije 18
2.3 Zlatnim omjerom do nekih trigonometrijskih vrijednosti 21
2.4 Zlatni pleter 23
2.5 Fibonoredovi 28

Bibliografija **42**

Uvod

Jedan od najpoznatijih nizova zasigurno je sljedeći niz brojeva: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 11, ... Ovaj je niz poznat i širokom krugu ljudi koji se ne bave nužno matematikom. Radi se o Fibonaccijevom nizu brojeva koji se, osim u matematici, pojavljuje u prirodi, arhitekturi, likovnoj umjetnosti, glazbi, itd. Tema ovog rada jest naći neke poveznice između Fibonaccijevih brojeva, odnosno njima sličnih Lucasovih brojeva i nekih trigonometrijskih, odnosno arkus funkcija. Zbog toga je rad i nazvan *fibonometrija* - spoj Fibonaccija i trigonometrije.

Kao motivacija može nam poslužiti sljedeća formula

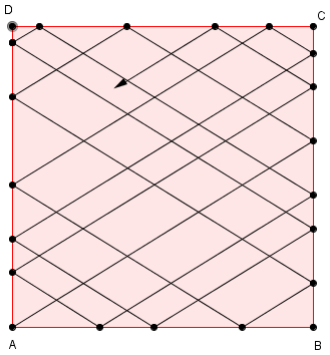
$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4} &= \mathrm{Tg}^{-1}\frac{1}{1} = \mathrm{Tg}^{-1}\frac{1}{2} + \mathrm{Tg}^{-1}\frac{1}{3}\\ &= \mathrm{Tg}^{-1}\frac{1}{2} + \mathrm{Tg}^{-1}\frac{1}{5}\,\mathrm{Tg}^{-1} + \frac{1}{8}\\ &= \mathrm{Tg}^{-1}\frac{1}{3} + \mathrm{Tg}^{-1}\frac{1}{5} + \mathrm{Tg}^{-1}\frac{1}{7} + \mathrm{Tg}^{-1}\frac{1}{8}.\end{aligned}$$

U njoj se ”susreću” tangens i neki Fibonaccijevi, odnosno Lucasovi brojevi.

Rad se sastoji od dva poglavlja. Prvo poglavlje je uvodnog karaktera. Govori najviše o Fibonaccijevim i Lucasovim brojevima, te zlatnom rezu. Iskazujemo i dokazujemo mnoge relacije koje vežu ove brojeve. Pokazujemo i njihovu vezu sa zlatnim rezom, omjerom vrlo prisutnim svugdje oko nas. Posebno će nas zanimati zlatni trokut, to jest jednakokračni trokut kojem se krak i baza odnose u omjeru zlatnog reza. Trigonometrijske vrijednosti njegovih kutova mogu se prikazati ekplicitnim izrazima.

Drugi dio predstavlja glavni dio rada. Osim gore spomenute formule, pokazujemo da zahvaljući svojstvima zlatnog trokuta možemo odrediti trigonometrijske vrijednosti jednog vrlo malog kuta, odnosno kuta veličine samo $3°$. To je ujedno najmanji (pozitivan) cjelobrojni kut čije se pripadne trigonometrijske veličine mogu eksplicitno izračunati.

Malo ćemo se i poigrati pa ćemo pokazati kako mogu nastati uzorci tkanja tkanina poput ovog na slici niže dolje. I to je ”tkanje” u vezi sa zlatnim rezom, pa smo ga odlučili nazvati *zlatni pleter*.



Na kraju rada bavimo se redovima za računanje broja π. Kao na primjer

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Tg}^{-1} \frac{1}{F_{2k+1}} = \frac{\pi}{4}.$$

I tu nećemo moći zaobići Fibonaccijeve brojeve pa smo ih odlučili nazvati *fibonoredovi*.

Poglavlje 1

Fibonaccijevi i Lucasovi brojevi, zlatni rez

1.1 Fibonaccijevi i Lucasovi brojevi i međusobne veze

Pri spomenu Leonarda od Pise u matematičkom kontekstu, mnogi će vrlo vjerojatno pomisliti da je zapravo riječ o zabuni, tj. da je riječ o Leonardu da Vinciju. Zapravo nije u pitanju pogreška, već pravo ime velikog talijanskog matematičara, Fibonaccija. Fibonacci je živio u 12. stoljeću, a njegovi su matematički doprinosi nadasve zanimljivi. Ono po čemu ga svi znaju su *Fibonaccijevi brojevi*, odnosno sljedećem nizu brojeva: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... Leonardo ga prvi put spominje u svom djelu *Liber Abaci* kada postavlja također veoma poznati problem razmnožavanja zečeva. Problem je sljedeći. Neka je na pusti otok 1. siječnja doveden par novorođenih zečeva koji svoju spolnu zrelost dostižu u starosti od mjesec dana te jedan par mladih, opet mužjaka i ženku, dobivaju mjesec dana nakon toga. Što znači da će broj parova zečeva u veljači također biti 1, odnosno tek će u ožujku broj parova zečeva porasti na 2 − jedan spolno zreli par te jedan novorođeni par zečeva. Kako novorođeni par zečeva u travnju još nije dosegao spolnu zrelost, a izvorni par je ponovno dobio par mladunaca, u travnju broj parova zečeva iznosi 3. Na isti se način broj parova zečeva povećava u beskonačnost te nas zanima koliki je broj parova zečeva na tom pustom otoku godinu dana nakon što je prvi par dovezen na otok. Primijetimo da ovaj problem podrazumijeva određene idealne uvjete: da svaki par zečeva uvijek dobiva mladunce mužjaka i ženku te da zečevi nikad ne ugibaju. Možemo uočiti da je broj zečeva nakon svakog mjeseca jednak redom spomenutom nizu brojeva koji se nastavlja u beskonačnost zbog pretpostavke besmrtnosti.

Definicija 1.1.1. Niz Fibonaccijevih brojeva *definira se rekurzivnom relacijom*

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n,\ n \geq 1,$$

gdje je $F_1 = 1$, $F_2 = 1$. *Broj* F_n *nazivamo* n-ti Fibonaccijev broj.

Premda je problem razmnožavanja zečeva pomalo nerealističan, postoji puno primjera iz prirode gdje se jasno mogu vidjeti pojave povezane s Fibonaccijevim brojevima. Kako je sunčeva svjetlost krucijalna za život biljaka, njihovi listovi ili grane moraju biti raspoređeni tako da svaka od njih dobije podjednaku količinu svjetlosti. Stoga su oni raspoređeni u obliku navoja koji osigurava da gornja grana ili list minimalno prekriva sljedeću ispod sebe. Takve navoje često nazivamo "$m/n - spirala$" ili "$m/n - filotaksa$" pri čemu je n broj listova, a m broj punih okreta oko stabiljke biljke ili debla stabla, dakle $m/n - spirala$ zapravo znači da imamo $\frac{m}{n}$ listova u jednom okretu. Gdje su tu Fibonaccijevi brojevi? Fibonaccijevi brojevi javljaju se upravo kao brojevi m i n. Fibonaccijevi brojevi javljaju se i drugdje u prirodi, na primjer glava suncokreta sastoji se od spiralno poredanih sjemeniki (u smjeru kazaljke na satu ili suprotnom) pri čemu su broj tih spirala Fibonaccijevi brojevi. Tako su sjemenke glave suncokreta prosječne veličine poredane u 34 spirale u jednom te 55 spirala u drugom smjeru, no, također ima kombinacija s 21 te 34 spirale, odnosno 13 i 21 spiralom kod nešto manjih glava suncokreta.

Fibonaccijevim brojevima nije se bavio samo Fibonacci, već mnogi matematičari osim njega od kojih je vrijedno spomenuti Eduarda Lucasa, koji je u drugoj polovici 19. stoljeća uočio brojne zanimljivosti vezane za njih te im dao ime kako ih svi danas nazivaju.

Definicija 1.1.2. Niz Lucasovih brojeva *definira se rekurzivnom relacijom*

$$L_{n+2} = L_{n+1} + L_n,\ n \geq 1,$$

gdje je $L_1 = 1$, $L_2 = 3$. *Broj* L_n *nazivamo* n-ti Lucasov broj.

Koristeći rekurzivnu relaciju iz Definicije 1.1.2 možemo generirati beskonačno mnogo Lucasovih brojeva pa evo nekoliko: 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, ... Kao što je i za očekivati, veza između Lucasovih i Fibonaccijevih brojeva ima jako puno. Metoda dokazivanja raznih tvrdnji vezanih uz Fibonaccijeve te Lucasove brojeve vrlo je često metoda matematičke indukcije. Razlog tome jest što su oba niza zadana rekurzijama što čini metodu matematičke indukcije vrlo prirodnom metodom za dokazivanje. Promotrimo nekoliko veza i pripadne dokaze.

Propozicija 1.1.3. *Neka su* F_n *i* L_n *Fibonaccijevi, odnosno Lucasovi* n*-ti brojevi. Za* $n \in \mathbb{N}$ *vrijedi*

$$F_{n+1} + F_{n-1} = L_n. \tag{1.1}$$

Dokaz. Tvrdnja se dokazuje koristeći princip matematičke indukcije. Baza indukcije, to jest tvrdnja za $n = 1$ i $n = 2$ vrijedi jer je $F_2 + F_0 = 1 + 0 = 1 = L_1$ i $F_3 + F_1 = 2 + 1 = 3 = L_2$.

Pretpostavimo sada da formula (1.1) vrijedi za n i $n+1$, to jest vrijedi

$$\begin{aligned} F_{n+1} + F_{n-1} &= L_n, \\ F_{n+2} + F_n &= L_{n+1}. \end{aligned}$$

Zbrajanjem prethodnih jednakosti dobivamo

$$F_{n+3} + F_{n+1} = L_{n+2}$$

što smo i htjeli pokazati. Dakle, po principu matematičke indukcije, pokazali smo da spomenuta formula vrijedi za svaki prirodan broj n. □

Za Fibonaccijeve i Lucasove brojeve vrijede sljedeće relacije:

Propozicija 1.1.4.

$$F_{n-1}\,(F_{n+2} + F_n) = F_{2n+2} \tag{1.2}$$

$$F_{2n}F_{2n+1} - F_{n+1} + 1 = F_{2n-1}F_{2n+2} \tag{1.3}$$

$$L_{2m}L_{2n} = L_{m-n}^2 + 5F_{m+n}^2 \tag{1.4}$$

$$L_{n-1}L_{n+1} - Ln^2 = 5\,(-1)^{n-1} \tag{1.5}$$

$$L_nL_{n+1} = L_{2n+1} + (-1)^n \tag{1.6}$$

$$F_{m+n} = F_{m-1}F_n + F_mF_{n+1} \tag{1.7}$$

$$L_{m+n} = L_{m-1}L_n + L_mL_{n+1}. \tag{1.8}$$

Identitete iz prethodne Propozicije 1.1.4 nećemo dokazivati. Dokazuju se svi na isti način: primjenom principa matematičke indukcije i relacija koje definiraju nizove (F_n) i (L_n). Postoji još mnoštvo takvih i sličnih identita, no jedan zaslužuje posebnu pozornost. To je Cassinijev identitet koji je ime dobio po francuskom zvjezdoznancu Jeanu Dominiqueu Cassiniju.

Teorem 1.1.5 (Cassinijev identitet)**.** *Za tri uzastopna Fibonaccijeva broja vrijedi:*

$$F_{n+1} \cdot F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n. \tag{1.9}$$

Dokaz. Tvrdnju dokazujemo koristeći princip matematičke indukcije. Za $n = 1$ vrijedi da je

$$F_2 \cdot F_0 - F_1^2 = 0 - 1 = (-1)^1 = -1.$$

Pretpostavimo sada da relacija

$$F_{k+1} \cdot F_{k-1} - F_k^2 = (-1)^k$$

vrijedi za sve $n, k \in \mathbb{N}$ i $k \leq n$. Pokažimo da relacija vrijedi i za $k = n + 1$:

$$\begin{aligned} F_{n+2} \cdot F_n - F_{n+1}^2 &= (F_{n+1} + F_n)F_n - F_{n+1}^2 \\ &= F_n^2 - F_{n+1}(F_{n+1} - F_n) \\ &= F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} = \{\text{P.I.}\} \\ &= -(-1)^n = (-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

Dakle, relacija vrijedi i za $k = n + 1$ pa po principu matematičke indukcije vrijedi za svaki prirodan broj n. □

Korolar 1.1.6. *Vrijedi tvrdnja*

$$F_{n+1}^2 - F_{n+1}F_n - F_n^2 = (-1)^n \tag{1.10}$$

$$L_n^2 - 5F_n^2 = 4 \cdot (-1)^n \tag{1.11}$$

Dokaz. Iz Cassinijeva indentiteta (1.9) slijedi (1.10). Zaista,

$$(-1)^n = F_{n+1} \cdot F_{n-1} - F_n^2 = F_{n+1} \cdot (F_{n+1} - F_n) - F_n^2.$$

Nadalje,

$$\begin{aligned} 4(-1)^n &= 4F_{n+1} \cdot F_{n-1} - 4F_n^2 \\ &= F_{n+1}^2 + 2F_{n+1} \cdot F_{n-1} + F_{n-1}^2 - F_{n+1}^2 + 2F_{n+1} \cdot F_{n-1} - F_{n-1}^2 - 4F_n^2 \\ &= (F_{n+1} + F_{n-1})^2 - (F_{n+1} - F_{n-1})^2 - 4F_n^2 \\ &= L_n^2 - F_n^2 - 4F_n^2 = L_n^2 - 5F_n^2 \end{aligned}$$

čime smo pokazali i (1.11). □

1.2 Generalizirani Fibonaccijevi brojevi

Kao što smo već mogli ustanoviti, nizovi Fibonaccijevih i Lucasovih brojeva zadovoljavaju istu rekurzivnu relaciju. Razlikuju se samo u početnim uvjetima. Zajednička svojstva ovih nizova brojeva možemo proučavati tako što istražujemo niz brojeva koji također zadovoljava istu rekurziju s proizvoljnim početnim uvjetima. Dakle, možemo proučavati niz

$$a, b, a + b, a + 2b, 2a + 3b, 3a + 5b, \ldots$$

Definicija 1.2.1. *Niz* (G_n) *definiran rekurzivnom relacijom*

$$G_n = G_{n-1} + G_{n-2}, n \geq 3$$

uz početne uvjete $G_1 = a$, $G_2 = b$ *naziva se* niz generaliziranih Fibonaccijevih brojeva. *Broj* G_n *nazivamo* n-ti generalizirani Fibonaccijev broj.

Sljedeći teorem daje vezu između generaliziranih Fibonaccijevih brojeva i Fibonaccijevih brojeva.

Teorem 1.2.2. *Za $n \geq 3$ vrijedi*

$$G_n = aF_{n-2} + bF_{n-1}, n \geq 3.$$

Dokaz. Provjerimo najprije da tvrdnja vrijedi za $n = 3$. Zaista,

$$G_3 = a + b = a \cdot 1 + b \cdot 1 = aF_1 + bF_2.$$

Nadalje, pretpostavimo da $G_k = aF_{k-2} + bF_{k-1}$ vrijedi za sve $0 \leq k \leq n$. Ispitajmo vrijedi li tvrdnja i za $k = n + 1$:

$$\begin{aligned} G_{n+1} &= G_n + G_{n-1} = (aF_{n-2} + bF_{n-1}) + (aF_{n-3} + bF_{n-2}) \\ &= a(F_{n-2} + F_{n-3}) + b(bF_{n-1} + F_{n-2}) = aF_{n-1} + bF_n. \end{aligned}$$

Dakle, tvrdnja vrijedi i za $n + 1$ pa prema principu matematičke indukcije zaključujemo da vrijedi za svaki $n \geq 3$. □

Sljedeća relacija daje eksplicitnu formulu za računanje generaliziranih Fibonaccijevih brojeva, odnosno specijalno i Fibonaccijevih i Lucasovih brojeva.

Teorem 1.2.3 (Binetova formula)**.** *Vrijedi*

$$G_n = \frac{c\alpha^n - d\beta^n}{\alpha - \beta} \tag{1.12}$$

gdje je

$$c = a + (a - b)\beta,\ d = a + (a - b)\alpha,$$

te

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2},\ \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Dokaz. Budući da je niz (G_n) definiran rekurzivnom relacijom drugog reda, onda je

$$G_n = A \cdot \alpha^n + B \cdot \beta^n,$$

gdje su $A, B \in \mathbb{R}$ konstante, a α i β rješenja karakteristične jednadžbe

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Dakle,

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2},\ \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Konstante A i B određujemo iz početnih uvjeta. Uočimo da niz (G_n) koji je definiran za $n \geq 1$ možemo prirodno proširiti s $G_0 = b - a$. Stoga je

$$G_0 = b - a = A + B,$$
$$G_1 = a = A\alpha + B\beta.$$

Rješavanjem sustava po A i B dobivamo

$$A = \frac{a + (a-b)\beta}{\alpha - \beta} = \frac{c}{\alpha - \beta},\ B = -\frac{a + (a-b)\alpha}{\alpha - \beta} = \frac{d}{\alpha - \beta}$$

pa smo dokazali tvrdnju. □

Korolar 1.2.4. *Za $n \geq 0$ vrijedi*

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n),$$
$$L_n = \alpha^n + \beta^n.$$

Napomena 1.2.5. *Primijetimo da množenjem veličina c i d iz Teorema 1.2.3 dobivamo izraz*

$$a^2 + ab - b^2$$

kojeg označavamo s μ te zovemo karakteristika niza generaliziranih Fibonaccijevih brojeva. *Za Fibonaccijeve brojeve $\mu = 1$, dok je za Lucasove $\mu = -5$.*

Za generalizirane Fibonaccijeve brojeve vrijedi analogan Cassinijevog identiteta:

Teorem 1.2.6. *Za tri uzastopna generalizirana Fibonaccijeva broja te $n \geq 2$ vrijedi:*

$$G_{n+1}G_{n-1} - G_n^2 = \mu(-1)^n,$$

pri čemu je $\mu = a^2 + ab - b^2$.

Dokaz. Korištenjem Binetove formule (1.12) za G_{n-1}, G_n i G_{n+1} dobivamo sljedeće:

$$\begin{aligned} 5\left(G_{n+1}G_{n-1} - G_n^2\right) &= \left(c\alpha^{n+1} - d\beta^{n+1}\right)\left(c\alpha^{n-1} - d\beta^{n-1}\right) - (c\alpha^n - d\beta^n)^2 \\ &= c^2\alpha^{2n} - cd\alpha^{n+1}\beta^{n-1} - cd\alpha^{n-1}\beta^{n+1} + d^2\beta^{2n} - c^2\alpha^{2n} + 2cd\alpha^n\beta^n - d^2\beta^{2n} \\ &= -cd\alpha^{n+1}\beta^{n-1} - cd\alpha^{n-1}\beta^{n+1} + 2cd\alpha^n\beta^n \end{aligned}$$

Iskoristimo li sada činjenicu da je $cd = a^2 + ab - b^2 = \mu$ dobivamo:

$$\begin{aligned} 5\left(G_{n+1}G_{n-1} - G_n^2\right) &= -\mu\alpha^{n+1}\beta^{n-1} - \mu\alpha^{n-1}\beta^{n+1} + 2\mu\alpha^n\beta^n \\ &= -\mu\left(\alpha\beta\right)^{n-1}\left(\alpha^2 \cdot 1 + \beta^2 \cdot 1\right) + 2\mu\left(\alpha\beta\right)^n \\ &= -\mu\left(\alpha\beta\right)^{n-1}\left(\alpha^2 + \beta^2\right) + 2\mu\left(\alpha\beta\right)^n. \end{aligned}$$

Kako je

$$\alpha\beta = -1,\ \alpha^2 + \beta^2 = 3,$$

slijedi

$$5\left(G_{n+1}G_{n-1} - G_n^2\right) = -\mu(-1)^{n-1} \cdot 3 + 2\mu\,(-1)^n = 5\mu\,(-1)^n\,,$$

što znači da je tvrdnja dokazana. □

1.3 Zlatni rez i svijet oko nas

Otkrićem Fibonaccijevih i Lucasovih brojeva, pojavila se određena znatiželja u mislima matematičara te su krenuli u istraživanje veza unutar samih Fibonaccijevih, odnosno Lucasovih brojeva, te veza između njih. Zanimljivu su činjenicu otkrili kada su promatrali omjere dvaju susjednih Fibonaccijevih, odnosno Lucasovih brojeva. Promotrimo tablicu:

$\frac{F_{n+1}}{F_n}$	$\frac{L_{n+1}}{L_n}$
$\frac{2}{1} = 2.000000\ldots$	$\frac{3}{1} = 3.000000\ldots$
$\frac{3}{2} = 1.500000\ldots$	$\frac{4}{3} = 1.3333333\ldots$
$\frac{5}{3} = 1.666667\ldots$	$\frac{7}{4} = 1.750000\ldots$
$\frac{8}{5} = 1.600000\ldots$	$\frac{11}{7} = 1.571429\ldots$
$\frac{13}{8} = 1.625000\ldots$	$\frac{18}{11} = 1.636364\ldots$
$\vdots$	$\vdots$
$\frac{987}{610} = 1.618033\ldots$	$\frac{1364}{843} = 1.618031\ldots$
$\frac{1597}{987} = 1.618034\ldots$	$\frac{2207}{1364} = 1.618035\ldots$

Već na ovom malom broju primjera omjera susjednih Fibonaccijevih i Lucasovih brojeva, možemo uočiti da ti omjeri vjerojatno konvergiraju nekom broju približno jednakom $1.618\ldots$. Ovu zanimljivu činjenicu prvi je otkrio Johannes Kepler još u 17. stoljeću. Danas takvo nešto možemo lako ustanoviti koristeći Binetovu formulu (Korolar 1.2.4) za Fibonaccijev, odnosno Lucasov broj. Zaista,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1})}{\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n-\beta^n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha-\beta(\beta/\alpha)^n}{1-(\beta/\alpha)^n}=\alpha,$$

jer je

$$|\beta/\alpha|=\frac{\sqrt{5}-1}{1+\sqrt{5}}<1.$$

Analogno,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{L_{n+1}}{L_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}}{\alpha^n-\beta^n}=\alpha.$$

Još je zanimljivije da je starim Grcima broj $\alpha=(1+\sqrt{5})/2$ bio poznat puno ranije nego li su se Fibonacci, Lucas ili Kepler rodili. Prije njih, spomenuti broj koristili su i Egipćani u izgradnji poznatih piramida. Taj se broj spominje i u Starom zavjetu, a poznat je pod nazivom *zlatni rez* ili *božanski omjer*, odnosno latinski *sectio aurea*. Tradicionalno ga se označava s φ. Koncept samog zlatnog omjera nalazimo u geometriji ravnine. Točnije riječ je o sljedećem problemu. Traži se točka C na dužini $\overline{AB}$ takva da je omjer duljine dužine $\overline{AB}$ i duljine duljeg dijela dužine $\overline{AC}$ jednak omjeru duljine dužine $\overline{AC}$ i duljine dužine $\overline{BC}$. Odnosno, želimo da vrijedi

$$\frac{|AB|}{|AC|}=\frac{|AC|}{|BC|},$$

gdje je $|AC|>|BC|$. Odgovarajućom supstitucijom pojedinih duljina dužina, prethodni omjer svodi se na

$$\frac{a+b}{a}=\frac{a}{b},$$

to jest

$$1+\underbrace{\frac{b}{a}}_{1/x}=\underbrace{\frac{a}{b}}_{x},$$

odnosno na kvadratnu jednadžbu

$$x^2-x-1=0$$

koju smo susreli u Teoremu 1.2.3 kao karakterističnu jednadžbu (generaliziranog) Fibonaccijevog niza. Rješenje ovog problema je pozitivno rješenje jednadžbe:

$$\frac{a}{b}=\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1.618033\ldots.$$

No, postoji još jedna zanimljiva veza između Lucasovih brojeva i zlatnog omjera. Promotrimo sljedeći niz:

α	$1.618034\ldots$	1
α^2	$2.618034\ldots$	3
α^3	$4.236068\ldots$	4
α^4	$6.854102\ldots$	7
α^5	$11.090170\ldots$	11
α^6	$17.944272\ldots$	18

Lako se uoči da kada se približne vrijednosti potencija zaokruže na najbliži cijeli broj dobivamo redom Lucasove brojeve (osim za L_1). Zaista, prema Binetovoj formuli za Lucasove brojeve imamo

$$L_n = \alpha^n + \beta^n = \lfloor \alpha^n \rfloor + \{\alpha^n\} + \lfloor \beta^n \rfloor + \{\beta^n\},$$

gdje $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ označava najveće cijelo broja x, a $\{x\} \in [0, 1\rangle$ razlomljeni dio od x. Kako je

$$L_n - \lfloor \alpha^n \rfloor - \lfloor \beta^n \rfloor \in \mathbb{Z}$$

slijedi i da je

$$\{\alpha^n\} + \{\beta^n\} \in \mathbb{Z}.$$

No, kako je $\{\alpha^n\} + \{\beta^n\} > 0$ i $\{\alpha^n\} + \{\beta^n\} < 2$ slijedi da je

$$\{\alpha^n\} + \{\beta^n\} = 1,$$

za sve $n \in \mathbb{N}$. Stoga je

$$L_n = \lfloor \alpha^n \rfloor + \lfloor \beta^n \rfloor + 1.$$

Budući da je $0 < \beta^n < 1$ za n paran, te $-1 < \beta^n < 0$ za n neparan, možemo precizno napisati formulu za L_n:

$$L_n = \begin{cases} \lfloor \alpha^n \rfloor, & n \text{ neparan} \\ \lfloor \alpha^n \rfloor + 1, & n \text{ paran.} \end{cases}$$

Što je zapravo božansko u zlatnom omjeru? Krenemo li za početak od prikaza čovjeka u umjetničkim djelima, vidimo da se kroz povijest ljepota interpretirala putem raznih omjera u ljudskom tijelu koji su približno jednaki zlatnom omjeru. Tome svjedoče brojna očuvana djela velikih umjetnika poput Leonarda da Vincija, Michelangela, Rembrandta i Tiziana pa sve do Salvadora Dalija i Le Corbusiera. Osim u likovnoj umjetnosti, zlatni omjer može se pronaći i u glazbi. Pitate li se u čemu je tajna milozvučnih tonova violine, u odgovoru se opet nailazi na zlatni rez odnosno broj α. Na primjer, omjer duljina donjeg i gornjeg dijela rezonantnog tijela jednak je upravo α, vidi Sliku 1.1. U origamiju, tehnici ili umjetnosti



Slika 1.1: Violina i njezini dijelovi

presavijanja papira koji je svoj najveći procvat doživio u Japanu, matematika je također upetljala svoje prste. Nerijetko se prilikom presavijanja pojavljuju dužine čiji su omjeri jednaki zlatnom omjeru. Diljem svijeta najpoznatije su egipatske piramide, dok su manje poznate piramide koje su gradili Meksikanci. Uzevši u obzir način gradnje te ukomponiravanje zlatnog omjera pri gradnji, pretpostavka da su ih gradili ljudi zajedničkog podrijetla nije sasvim nelogična. Poveznica sa zlatnim omjerom uočava se u broju stepenica pojedinih piramida koje su na različite načine pojedinačno povezane sa zlatnim omjerom. Problem iz područja električne struje vezan uz otpornike, postavljen 1967. godine na Internacionalnoj olimpijadi iz fizike u Poljskoj, u svom rješenju također ima broj α. Nekoliko godina kasnije, javio se problem u području elektrostatike koji je u svom rješenju opet iznjedrio broj α. Broj α javlja se i u kemiji kao omjer neutrona i protona urana. U matematici javlja se u algebri, diferencijalnim jednadžbama te geometriji. Kao što se do sad moglo

vidjeti, broj α pojavljuje se na mjestima gdje ga nismo sasvim očekivali. Promotrimo neke primjere iz geometrije.

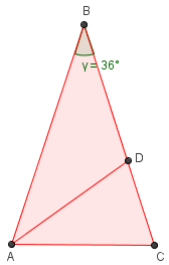
1.4 Zlatni trokut

Zlatni omjer uvelike je prisutan u matematici, posebno geometriji. Već samim svojim nazivima ističu se zlatni trokut i zlatni pravokutnik.

Definicija 1.4.1. *Jednakokračni trokut je* zlatni trokut *ako je omjer duljine jednog kraka i osnovice jednak* α.

Istražit ćemo neka svojstva zlatnog trokuta.

Teorem 1.4.2. *Neka je* $\triangle ABC$ *zlatni trokut s osnovicom* $\overline{AC}$. *Ako* D *dijeli stranicu* $\overline{BC}$ *u zlatnom omjeru pri čemu je* $\overline{BD}$ *dulji dio, onda* $\overline{AD}$ *raspolavlja kut u vrhu. (Vidi Sliku 1.2)*



Slika 1.2: Zlatni trokut

Dokaz. Ako točka D dijeli stranicu $\overline{BC}$ u zlatnom omjeru,onda je

$$|BD| = \alpha\,|CD|\,,$$

$$|BD| + |CD| = \alpha\,|CD| + |CD| = (\alpha + 1)\,|CD| = \alpha^2\,|CD|\,.$$

Iz toga lako dobijemo da je

$$|BC| = \alpha^2\,|CD| = \alpha\,|AC|$$

pa je $\alpha\,|CD|$=$|AC|$. Kako je

$$\angle BCA = \angle ACD,\ \ \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|AC|}{|CD|} = \alpha,$$

slijedi da je $\triangle ACB \sim \triangle CDA$. Prema tome, $\triangle CDA$ je jednakokračan trokut i $\angle DAC = \angle CBA$. Nadalje, kako je $|AC| = |AD|$ i $\alpha|AC| = |BC| = \alpha|BD|$, to jest $|AC| = |BD|$, slijedi da je i $\triangle BAD$ jednakokračan. Stoga je

$$\angle DAB = \angle CBA = \angle DAC,$$

što znači da dužina $\overline{AD}$ raspolavlja kut $\angle BAC$. □

Korolar 1.4.3. *Neka je ΔABC zlatni trokut s osnovicom $\overline{AC}$. Neka točka D dijeli stranicu $\overline{BC}$ u zlatnom omjeru, pri čemu je $\overline{BD}$ dulji dio stranice. Tada je ΔCAD također zlatni trokut.*

Dokaz. U dokazu Teorema 1.4.2 pokazali smo da je $\triangle CDA$ je jednakokračan trokut i da je

$$\frac{|AC|}{|CD|} = \alpha,$$

pa je $\triangle CDA$ zlatni trokut. □

Teorem 1.4.4. *Kut nasuprot osnovice zlatnog trokuta jednak je 36°.*

Dokaz. Neka je $\triangle ACB$ zlatni trokut za kojeg vrijedi da je $|AB| = |BC| = \alpha\,|AC|$. Neka točka D dijeli stranicu $\overline{BC}$ u zlatnom omjeru, kao na Slici 1.2. Prema Korolaru 1.4.3 slijedi da je $\triangle CDA$ zlatni trokut sličan početnom trokutu $\triangle ACB$. Neka je $\angle ACD = 2x$. Tada je prema Teoremu 1.4.2 $\angle DAC = (\angle ACD)/2 = x$. Stoga slijedi da je $2x+2x+x = 180°$. Stoga je $x = 36°$. Prema tome, veličina kuta u vrhu B iznosi 36°, a veličine preostalih kutova u zlatnom trokutu su 72°. □

Zlatnom trokutu smo lako mogli efektivno izračunati kutove i bez korištenja prethodnih tvrdnji. Ako je γ kut nasuprot osnovice onda je

$$\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{b} = \frac{a}{2b} = \frac{1}{1+\sqrt{5}}.$$

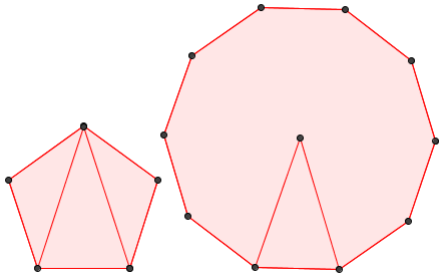
Stoga je

$$\frac{\gamma}{2} = \mathrm{Sin}^{-1}\left(\frac{1}{1+\sqrt{5}}\right) = 18°,$$

odnosno $\gamma = 36°$, a kutovi uz osnovicu iznose 72°. Na sličan se način lako pokaže i obrat, odnosno da vrijedi:

Teorem 1.4.5. *Ako je veličina kuta nasuprot osnovice jednakokračnog trokuta jednaka 36°, onda je taj trokut zlatni trokut.*

Premda se čini da se sa zlatnim trokutom ne susrećemo prečesto, to nije tako. Prisjetimo se pravilnih mnogokuta, konkretno deseterokuta čiji je središnji kut jednak točno 36°. Jasno je kako je karakteristični trokut deseterokuta jednakokračan trokut s kutovima uz osnovicu veličine 72° pa prema prethodnoj tvrdnji direktno slijedi da je karakteristični trokut deseterokuta upravo zlatni trokut. Zlatni trokut uočavamo u još jednom pravilnom mnogokutu – peterokutu, kao što možemo vidjeti na Slici 1.3. Osim zlatnog trokuta, vrijedno



Slika 1.3: Zlatni trokut u pravilnom peterokutu i deseterokutu

je spomenuti i zlatni pravokutnik. Zanimljivo je da su istraživanja pokazala da je većina ispitanika od ponuđenih okvira za slike pravokutnog oblika odabrala upravo onaj oblika zlatnog pravokutnika.

Definicija 1.4.6. *Pravokutnik je* zlatni pravokutnik *ako je omjer duljina stranica tog pravokutnika jednak* α.



Slika 1.4: Zlatni pravokutnik

Zlatni pravokutnik ima svojstvo da je omjer duljina dulje stranice te kraće jednak omjeru zbroja tih duljina i dulje od dviju stranica. Ako su stranice zlatnog pravokutnika a i b, $a > b$, onda vrijedi

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}.$$

Ustanovimo da je prethodna relacija mogla poslužiti i za definiciju zlatnog pravokutnika jer uz supsticiju $t = a/b$ upravo dobivamo jednadžbu

$$t^2 - t - 1 = 0$$

čije je pozitivno rješenje jednako zlatnom rezu, odnosno

$$\frac{a}{b} = \alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Na kraju spomenimo da su neka od najpoznatijih djela svjetske umjetničke i kulturne baštine u uskoj vezi sa zlatnim pravokutnikom. Spomenimo samo neke; Michelangeova *Sveta obitelj*, *Mona Lisa* Leonarda da Vincija, Dürerove proporcije čovjeka, tlocrt *Partenona*, japanska pagoda, itd.

Poglavlje 2

Fibonometrija

2.1 Motivacija

U ovom dijelu povezat ćemo Fibonaccijeve i Lucasove brojeve s trigonometrijskim funkcijama. Kao motivacijski primjeri za to poslužit će nam formule za računanje broja π. Dugi niz godina matematičari pokušavaju što preciznije odrediti broj π. Jedna od mogućnosti je π prikazati pomoću trignometrijskih funkcija. Specijalno, trebat će nam sljedeća formula

$$\mathrm{Tg}^{-1}\, x + \mathrm{Tg}^{-1}\, y = \mathrm{Tg}^{-1}\, \frac{x+y}{1-xy}, \tag{2.1}$$

gdje je Tg restrikcija funkcije tg na interval $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$.

Primjer 2.1.1. *Koristeći (2.1) imamo*

$$\frac{\pi}{4} = \mathrm{Tg}^{-1}\, \frac{1}{1} = \mathrm{Tg}^{-1}\, \frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}} = \mathrm{Tg}^{-1}\, \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = \mathrm{Tg}^{-1}\, \frac{1}{2} + \mathrm{Tg}^{-1}\, \frac{1}{3}$$

Možemo i dalje nastaviti raspisivati:

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{4} &= \mathrm{Tg}^{-1}\, \frac{1}{1} = \mathrm{Tg}^{-1}\, \frac{1}{2} + \mathrm{Tg}^{-1}\, \frac{1}{3} = \mathrm{Tg}^{-1}\, \frac{1}{3} + \mathrm{Tg}^{-1}\, \frac{1}{3} + \mathrm{Tg}^{-1}\, \frac{1}{7} = 2\,\mathrm{Tg}^{-1}\, \frac{1}{3} + \mathrm{Tg}^{-1}\, \frac{1}{7} \\
&= \mathrm{Tg}^{-1}\, \frac{1}{2} + \mathrm{Tg}^{-1}\, \frac{1}{5}\, \mathrm{Tg}^{-1} + \frac{1}{8} = 2\,\mathrm{Tg}^{-1}\, \frac{1}{5} + \mathrm{Tg}^{-1}\, \frac{1}{7} + 2\,\mathrm{Tg}^{-1}\, \frac{1}{8} \\
&= \mathrm{Tg}^{-1}\, \frac{1}{3} + \mathrm{Tg}^{-1}\, \frac{1}{5} + \mathrm{Tg}^{-1}\, \frac{1}{7} + \mathrm{Tg}^{-1}\, \frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

Uočimo da se u gornjim formulama pojavljuju Fibonaccijevi i Lucasovi brojevi.

2.2 Zlatni rez i trigonometrijske funkcije

Prisjetimo se da su Fibonaccijevi i Lucasovi brojevi u uskoj vezi sa zlatnim rezom (vidi na primjer formule u 1.2.4 ili dio 1.3). Zlatni rez smo označili s α i konkretno izračunali kao pozitivno rješenje kvadratne jednadžbe

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Dakle,

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Drugo (negativno) rješenje označit ćemo u ovom odjeljku s

$$-\beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Dakle, $\beta > 0$. Lako se može vidjeti da vrijedi sljedeća veza

$$\alpha\beta = 1.$$

Trebat će nam sljedeća tehnička lema o trigonometrijskim funkcijama, zapravo o inverznim funkcijama odgovarajućih restrikcija trigonometrijskih funkcija (ili o tzv. arkus funkcijama).

Lema 2.2.1. *Neka je* $0 \leq x \leq 1$. *Tada vrijedi*

$$\mathrm{Cos}^{-1}\, x = \mathrm{Sin}^{-1}\, \sqrt{1 - x^2}.$$

Dokaz. Označimo sa $\mathrm{Cos} : [0, \pi] \to [-1, 1]$ i $\mathrm{Sin} : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ restrikcije funkcija cos i sin na odgovarajuće segmente na kojima su one bijektivne. Stoga su dobro definirani njihovi inverzi $\mathrm{Cos}^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi]$ i $\mathrm{Sin}^{-1} : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Iz temeljnog trigonometrijskog identiteta $\mathrm{Sin}^2 y + \mathrm{Cos}^2 y = 1$, za $y \in [0, \pi] \cap [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] = [0, \frac{\pi}{2}]$ slijedi da je $\mathrm{Sin}\, y = \sqrt{1 - \mathrm{Cos}^2 y}$. Djelujemo li na obje strane jednakosti inverznom funkcijom Sin^{-1} dobivamo

$$y = \mathrm{Sin}^{-1}\, \sqrt{1 - \mathrm{Cos}^2 y}.$$

Uz supstituciju $x = \mathrm{Cos}\, y$, to jest $y = \mathrm{Cos}^{-1}\, x$ dobivamo $\mathrm{Cos}^{-1}\, x = \mathrm{Sin}^{-1}\, \sqrt{1 - x^2}$ što je i trebalo pokazati. Uočimo da je $x \in [0, 1]$ jer je $y \in [0, \frac{\pi}{2}]$. □

Propozicija 2.2.2. *Vrijedi*

$$\mathrm{Cos}^{-1}\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \mathrm{Sin}^{-1}\, \sqrt{\beta}.$$

Dokaz. Kako je $0 < \frac{1}{\alpha} < 1$, prema Lemi 2.2.1 imamo

$$\mathrm{Cos}^{-1}\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \mathrm{Sin}^{-1}\sqrt{1-\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2} = \mathrm{Sin}^{-1}\sqrt{1-\beta^2} = \mathrm{Sin}^{-1}\sqrt{\beta},$$

jer $-\beta$ zadovoljava jednadžbu $x^2 - x - 1 = 0$ pa je $\beta = 1 - \beta^2$. □

Kao i Lemu 2.2.1, slično pokazujemo i sljedeću tvrdnju.

Lema 2.2.3. *Neka je* $0 \leq x \leq 1$. *Tada vrijedi:*

$$\mathrm{Sin}^{-1} x = \mathrm{Cos}^{-1}\sqrt{1-x^2}.$$

Propozicija 2.2.4. *Vrijedi*

$$\mathrm{Sin}^{-1}\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \mathrm{Cos}^{-1}\sqrt{\beta}.$$

Dokaz. Prema Lemi 2.2.3 je

$$\mathrm{Sin}^{-1}\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \mathrm{Cos}^{-1}\sqrt{1-\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2} = \mathrm{Cos}^{-1}\sqrt{1-\beta^2} = \mathrm{Cos}^{-1}\sqrt{\beta},$$

jer $\beta = 1 - \beta^2$. □

Lema 2.2.5. *Neka je* $x \in [0, \pi/2]$. *Tada je* $\mathrm{tg}\, x = \cos x$ *ako i samo ako je*

$$x = \mathrm{Sin}^{-1}\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \mathrm{Sin}^{-1}\beta.$$

Dokaz. Želimo odrediti sve takve x da je $\mathrm{tg}\, x = \cos x$. Kako je $\mathrm{tg}\, x = \frac{\sin x}{\cos x}$, slijedi $\frac{\sin x}{\cos x} = \cos x$, odnosno $\sin x = \cos^2 x$ pa lako dobivamo kvadratnu jednadžbu u $\sin x$:

$$\sin^2 x + \sin x - 1 = 0.$$

Kako je $\sin x = \cos^2 x \geq 0$, slijedi da je

$$\sin x = \beta = \frac{1}{\alpha}.$$

Odnosno, jer je $x \in [0, \pi/2]$, dobivamo $x = \mathrm{Sin}^{-1}\left(\frac{1}{\alpha}\right)$. □

Propozicija 2.2.6. *Vrijedi*

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{Sin}^{-1}\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$

Dokaz. Prema Lemi 2.2.5 je $\operatorname{tg} x = \cos x$ za $x = \operatorname{Sin}^{-1}\left(\frac{1}{\alpha}\right)$, odnosno

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{Sin}^{-1}\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right) = \cos\left(\operatorname{Sin}^{-1}\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right).$$

Nadalje, prema Propoziciji 2.2.4 je

$$\cos\left(\operatorname{Sin}^{-1}\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right) = \cos\left(\operatorname{Cos}^{-1}\sqrt{\beta}\right) = \sqrt{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}},$$

pa je tvrdnja dokazana. □

Možemo pokazati analognu tvrdnju Lemi 2.2.5.

Lema 2.2.7. *Neka je* $x \in [0, \pi]$. *Tada je* $\operatorname{ctg} x = \sin x$ *ako i samo ako je*

$$x = \operatorname{Cos}^{-1}\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \operatorname{Cos}^{-1}\beta.$$

Dokaz. Relacija $\operatorname{ctg} x = \sin x$ ekvivalentna je s $\cos x = \sin^2 x$, odnosno s

$$\cos^2 x + \cos x - 1 = 0.$$

Kako je $\cos x = \sin^2 x \geq 0$ i $x \in [0, \pi]$ slijedi da je $x = \operatorname{Cos}^{-1}\left(\frac{1}{\alpha}\right)$. □

Propozicija 2.2.8. *Vrijedi*

$$\operatorname{ctg}\left(\operatorname{Cos}^{-1}\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}.$$

Dokaz. Prema Lemi 2.2.7 je

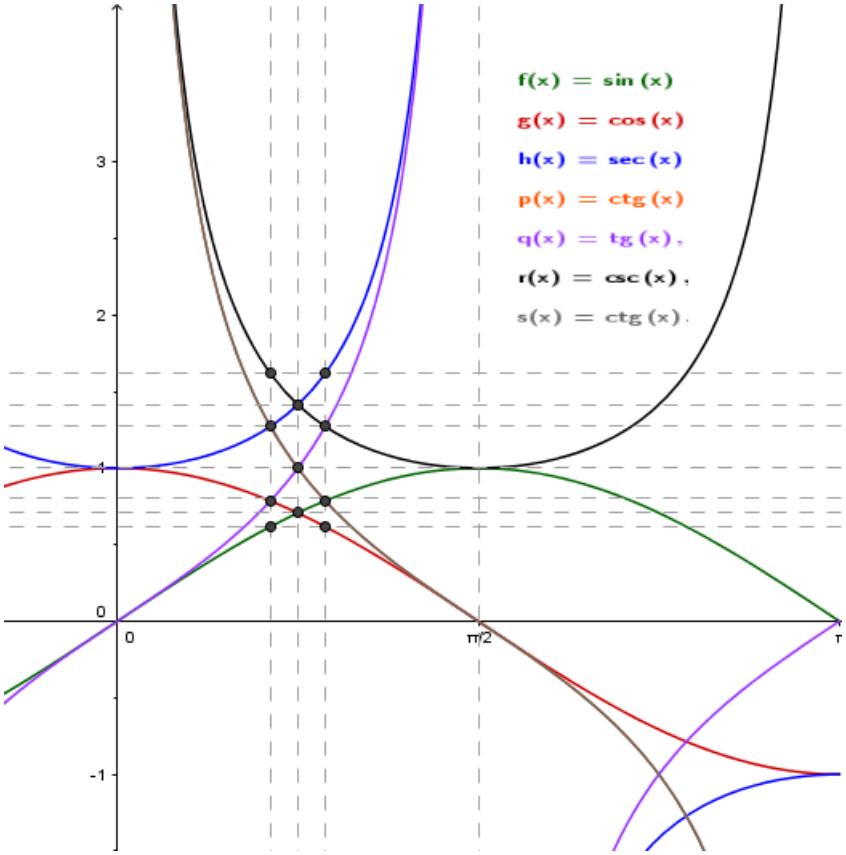
$$\operatorname{ctg}\left(\operatorname{Cos}^{-1}\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right) = \sin\left(\operatorname{Cos}^{-1}\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right).$$

Sada Propozicija 2.2.2 povlači

$$\sin\left(\operatorname{Cos}^{-1}\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right) = \sin\left(\operatorname{Sin}^{-1}\sqrt{\beta}\right) = \sqrt{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}.$$

□

Netom pokazane rezultate možemo prikazati i grafički, što vidimo na Slici 2.1.



Slika 2.1: Grafički prikaz prethodnih rezultata

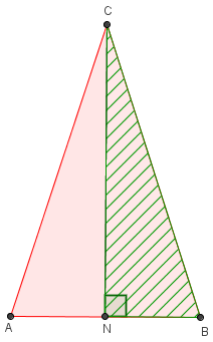
2.3 Zlatnim omjerom do nekih trigonometrijskih vrijednosti

U odjeljku 1.4 govorili smo o zlatnom trokutu. To je jednakokračni trokut s kutom nasuprot osnovice jednakim 36°. Svojstva ovog specifičnog trokuta omogućila su nam da točno izračunamo trigonometrijske vrijednosti nekih kutova. Na primjer,

$$\sin 18^\circ = \frac{1}{1+\sqrt{5}}.$$

Najmanji cjelobrojan kut čije trigonometrijske vrijednosti možemo izračunati koristeći zlatni trokut i trigonometrijske identitete iznosi samo 3° i u ovom ćemo dijelu izvesti formulu za $\sin 3^\circ$. Za to ćemo koristiti formule za trigonometrijske vrijednosti kutova 18° te 15°.

Prisjetimo se da vrijednosti za $\sin 18^\circ$ i $\cos 18^\circ$ možemo odrediti iz pravokutnog trokuta



Slika 2.2: Pravokutni trokut u zlatnom trokutu

unutar zlatnog trokuta, vidi Sliku 2.2. Trokut ΔNBC je pravokutan i kut pri vrhu C iznosi 18°. Stoga je

$$\sin 18^\circ = \frac{|NB|}{|BC|} = \frac{1}{2}\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{1}{2\alpha} = \frac{1}{1+\sqrt{5}} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Sada je

$$\cos 18^\circ = \sqrt{1-\sin^2 18^\circ} = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

U ovisnosti o α možemo dobiti

$$\cos 18^\circ = \sqrt{1-\frac{1}{4\alpha^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{4-(\alpha-1)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{-\alpha^2+2\alpha+3} = \frac{1}{2}\sqrt{\alpha+2} = \frac{\sqrt{\sqrt{5}\alpha}}{2},$$

pri čemu smo u prethodnom izračunu korisitili sljedeće identitete za α:

$$\frac{1}{\alpha} = \alpha - 1,\ \alpha^2 = \alpha + 1,\ 2 = (\alpha-1)(1+\sqrt{5}),\ 1+\sqrt{5} = 2\alpha.$$

Budući da ćemo vrijednost $\sin 3^\circ$ računati kao $\sin(18^\circ - 15^\circ)$ potrebne su nam vrijednosti za $\sin 15^\circ$ i $\cos 15^\circ$,

$$\begin{aligned}\sin 15^\circ &= \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},\end{aligned}$$

te slično dobivamo

$$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

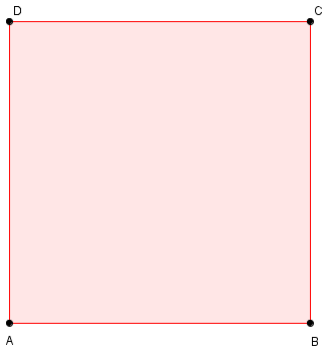
Sada je

$$\begin{aligned}
\sin 3^\circ &= \sin(18^\circ - 15^\circ) = \sin 18^\circ \cos 15^\circ - \cos 18^\circ \sin 15^\circ \\
&= \frac{\sqrt{5}-1}{4} \cdot \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \cdot \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \\
&= \frac{\sqrt{30}+\sqrt{10}-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{16} - \frac{\sqrt{60+12\sqrt{5}}-\sqrt{20+4\sqrt{5}}}{16} \\
&= \frac{\sqrt{30}+\sqrt{10}-\sqrt{6}-\sqrt{2}-\sqrt{60+12\sqrt{5}}+\sqrt{20+4\sqrt{5}}}{16}
\end{aligned}$$

Slično, koristeći trigonometrijske identitete i adicijske formule, sada možemo izračunati i trigonometrijske vrijednosti brojnih drugih kutova.

2.4 Zlatni pleter

Fibonaccijevi brojevi u kombinaciji s trigonometrijskim funkcijama mogu rezultirati zanimljivim geometrijskim uzorcima poput uzoraka koje ćemo vidjeti u nastavku. Njih je prvi proučavao W. E. Sharpe, a radi se o nastajanju uzoraka tkanja tkanina u jednom kvadratu po volji duge stranice, poput onog sa Slike 2.3. S obzirom na kut θ pod kojim nit



Slika 2.3: Kvadrat stranice duljine 1

„izađe“ iz vrha A kvadrata $ABCD$, nastaju različiti uzorci pri čemu je veličina tog kuta

zadana formulom:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{n+\alpha}{n+\alpha+1},$$

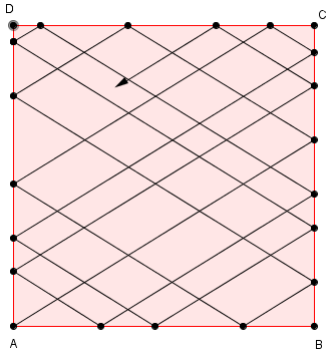
odnosno

$$\theta = \operatorname{tg}^{-1}\frac{n+\alpha}{n+\alpha+1} \tag{2.2}$$

za proizvoljan nenegativan n, a $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ kao i ranije. Uvrštavanjem različitih vrijednosti n u (2.2), javljaju se različiti kutovi θ pa samim time i različiti uzorci čije je nastajanje vrlo jednostavno. Jednom kada nit „izađe“ pod kutom θ iz vrha A, zraka po kojoj nit putuje reflektira se poput zrake svjetlosti od stranice koju presjeca, što znači da je kut upada zrake jednak kutu refleksije te zrake od stranice kvadrata. Tako reflektirana zraka nastavlja se reflektirati od svake iduće stranice na koju naiđe. Za odabrani kvadrat te $n = 0$, odnosno kut

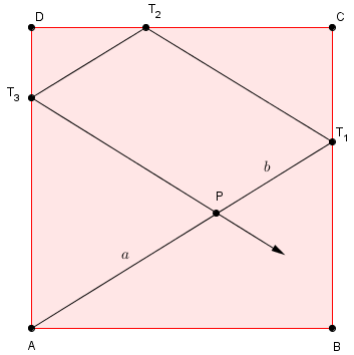
$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\alpha}{\alpha+1,}$$

nakon 18 refleksija dobiva se uzorak kakvog možemo vidjeti na Slici 2.4. Sa Slike 2.4 se



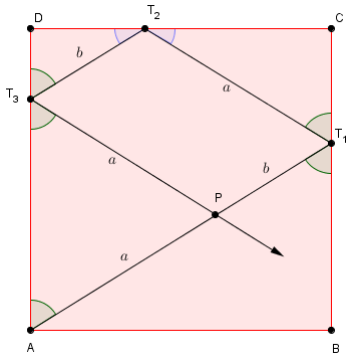
Slika 2.4: Uzorak nakon 18 refleksija za $n = 0$

vidi da već nakon trećeg reflektiranja reflektirana zraka presjeca početnu zraku iz vrha A. Promotrimo malo jednostavniji slučaj, što možemo vidjeti na Slici 2.5. Neka je udaljenost od vrha A do presjeka P reflektirane zrake te početne zrake jednaka a, a udaljenost od P do točke T_1 jednaka b. Kako je kut upada zrake svjetlosti jednak kutu refleksije zrake svjetlosti, slijedi da je veličina kuta $\angle AT_1B$ jednaka veličini kuta $\angle T_2T_1C$. Konstruiramo li paralelu kroz točku T_1 s pravcem kojem pripada dužina $\overline{AB}$, dobivamo pravokutnik čija je $\overline{AT_1}$ dijagonala, odnosno dobivamo dva sukladna pravokutna trokuta što znači da su veličine kutova $\angle AT_1B$ i $\angle PAT_3$ jednake. Nadalje, kako se zraka niti nastavlja odbijati od stranice kvadrata CD, to su kutovi $\angle T_1T_2C$ i $\angle T_3T_2D$ jednakih veličina te, jer su pravokutni trokuti ΔT_1CT_2 i ΔT_3DT_2 slični po $K-K$ teoremu o sličnosti trokuta, veličine preostala



Slika 2.5: Uzorak nakon 3 refleksija

dva kuta tih trokuta također su jednakih veličina što znači da je i kut $\angle T_2T_3D$ jednak kutu $\angle T_1AT_3$. Ponovno, kao posljedicu refleksije zrake, dobivamo da je veličina kuta $\angle T_2T_3D$ jednaka veličini kuta $\angle PT_3A$ što znači da je i taj kut jednak kutu $\angle PAT_3$, odnosno da je trokut ΔPAT_3 jednakokračan trokut. Slično, posljedica refleksije je da su zrake refleksije u parovima paralelne pa je četverokut $PT_1T_2T_3$, čije stranice pripadaju tim zrakama, paralelogram te su duljine njegovih stranica u parovima jednake. Spomenuto možemo vidjeti na Slici 2.6 gdje su istim bojama označeni kutovi jednakih veličina kao i odgovarajuće stranice paralelograma, odnosno trokuta. Kako je u promatranom slučaju $\operatorname{tg}\theta = \frac{\alpha}{\alpha+1}$ te



Slika 2.6: Odnosi kutova i duljina stranica u uzorku

je tangens definiran kao omjer duljina nasuprotne i prileže će katete pravokutnog trokuta, duljina dužine $\overline{BT_1}$ jednaka je upravo tangensu kuta pod kojim je zraka „izašla“ iz vrha A kvadrata $ABCD$. Odnosno, kako je duljina stranice kvadrata jednaka 1, duljina dužine $\overline{T_1C}$

jednaka je

$$|T_1C| = 1 - \frac{\alpha}{\alpha+1} = \frac{1+\alpha-\alpha}{\alpha+1} = \frac{1}{\alpha+1}.$$

Promotrimo trokute ΔABT_1 i ΔT_2CT_1 na prethodnoj Slici 2.6. Kako su oba trokuta pravokutna te su veličine kutova $\angle AT_1B$ i $\angle T_2T_1C$ jednake, to su oni slični po $K-K$ poučku o sličnosti trokuta, što znači da su im duljine stranica proporcionalne. Odnosno, vrijedi da je omjer duljina hipotenuza tih trokuta jednak omjeru duljina njihovih kraćih kateta, tj. vrijedi

$$\frac{a+b}{a} = \frac{\frac{\alpha}{\alpha+1}}{\frac{1}{a+1}} = \frac{\alpha}{1} = \alpha.$$

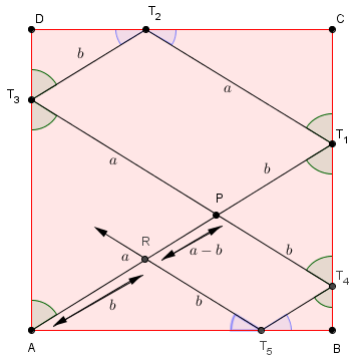
S druge strane

$$\frac{a+b}{a} = 1 + \frac{b}{a} = \alpha,$$

što znači da je $\frac{b}{a} = \alpha - 1$, odnosno

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{\alpha-1} = \frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{\alpha}{\alpha} = \alpha.$$

Kako je omjer duljina a i b jednak α, to točka P, kada reflektirana zraka prvi puta presjeca početnu zraku, dijeli dužinu $\overline{AT_1}$ u zlatnom omjeru. Nakon još dva koraka reflektiranja dobivamo Sliku 2.7, odnosno drugu točku presjeka, točku R, reflektirane i početne zrake. Kao što se već na Slici 2.7 i vidi, označeni su ponovno kutovi jednakih veličina istim



Slika 2.7: Drugo presjecanje početne zrake

bojama. Do zaključka da su ti kutovi jednakih veličina, dolazimo na isti način kao i u prethodnom razmatranju. Sada vidimo da su se pojavila još dva jednakokračna trokuta s krakovima duljine b te još jedan paralelogram sa stranicama duljine b i $a-b$. Kao i ranije,

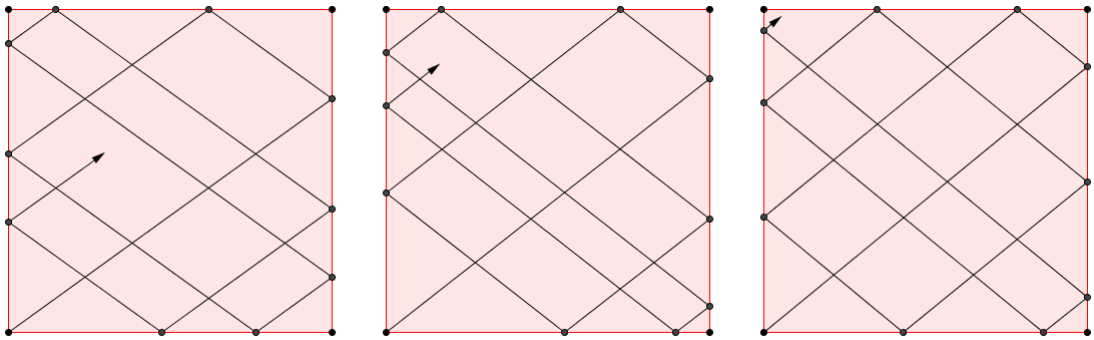
zanima nas u kojem omjeru druga točka presjeka R reflektiranih zraka dijeli dužinu $\overline{AP}$, odnosno zanima nas čemu je jednako $\frac{b}{a-b}$. Jasno je da je

$$\frac{b}{a-b} = \frac{1}{\frac{a-b}{b}} = \frac{1}{\frac{a}{b}-1} = \frac{1}{\alpha-1} = \alpha$$

pri čemu se koristi neposredno dobiven rezultat da je $\frac{a}{b} = \alpha$. Prema tome, druga točka presjeka R dijeli dužinu $\overline{AP}$ u zlatnom omjeru. Kako će i sljedeća točka presjeka reflektirane zrake i početne zrake dijeliti dužinu $\overline{AR}$ u zlatnom omjeru s točkom presjeka T te sljedeća reflektirana zraka dužinu $\overline{AT}$ opet dijeliti u zlatnom omjeru i tako dalje, ovaj uzorak nazivamo zlatni uzorak, odnosno engleski *golden weaves*. Naravno, n je mogao biti bilo koji broj. Neka je n sada jednak 1, odnosno 2 ili 3. Tada je pripadni „izlazni“ kut početne zrake jednak redom:

$$\theta_1 = \mathrm{tg}^{-1}\frac{1+\alpha}{2+\alpha},\ \theta_2 = \mathrm{tg}^{-1}\frac{2+\alpha}{3+\alpha},\ \theta_3 = \mathrm{tg}^{-1}\frac{3+\alpha}{4+\alpha},$$

a odgovarajući uzorci nakon 10 refleksija redom na Slici 2.8. Promotrimo sada sva 4



Slika 2.8: Tri zlatna uzorka nakon 10 refleksija

nastala uzorka. Možemo primijetiti da se za $n = 0$ prvi put presjek reflektirane zrake i početne zrake u zlatnom omjeru dogodio nakon 3 refleksije, za $n = 1$ nakon 5 refleksija, za $n = 2$ nakon 7 te za $n = 3$ nakon 9 refleksija. Također, možemo uočiti vezu između broja potrebnih refleksija i prvog presjeka u zlatnom omjeru odgovarajuće dužine. Vidimo da je $3 = 2 \cdot 0 + 3, 5 = 2 \cdot 1 + 3, 7 = 2 \cdot 2 + 3$ i $9 = 2 \cdot 3 + 3$, što znači da broj potrebnih refleksija ovisi o n te je oblika: $2n + 3$. Na temelju toga možemo odrediti broj potrebnih refleksija do prvog presjeka reflektirane i početne zrake i bez same slike uzorka. Jasno, uvrštavanjem drugih vrijednosti n, dobivamo niz različitih i zanimljivih zlatnih uzoraka koji se svakodnevno koriste u tkanju tkanina.

2.5 Fibonoredovi

Do sada smo vidjeli već niz veza Lucasovih i Fibonaccijevih brojeva, a sada ćemo vidjeti kako ih još možemo povezati koristeći trigonometrijske funkcije i redove. Također, upoznali smo se i s generaliziranim Fibonaccijevim brojevima koji su trigonometrijskom funkcijom tangens povezani na sljedeći način.

Propozicija 2.5.1. *Za tri uzastopna generalizirana Fibonaccijeva broja vrijedi:*

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{Tg}^{-1}\frac{G_n}{G_{n+1}} - \operatorname{Tg}^{-1}\frac{G_{n+1}}{G_{n+2}}\right) = \frac{(-1)^{n+1}\,\mu}{G_{n+1}\,(G_n + G_{n+2})}.$$

Dokaz. Prisjetimo se da vrijedi:

$$\operatorname{tg}(x-y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}$$

pa je prema tome:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}\left(\operatorname{Tg}^{-1}\frac{G_n}{G_{n+1}} - \operatorname{Tg}^{-1}\frac{G_{n+1}}{G_{n+2}}\right) &= \frac{\operatorname{tg}\left(\operatorname{Tg}^{-1}\frac{G_n}{G_{n+1}}\right) - \operatorname{tg}\left(\operatorname{Tg}^{-1}\frac{G_{n+1}}{G_{n+2}}\right)}{1 + \operatorname{tg}\left(\operatorname{Tg}^{-1}\frac{G_n}{G_{n+1}}\right)\operatorname{tg}\left(\operatorname{Tg}^{-1}\frac{G_{n+1}}{G_{n+2}}\right)} \\
&= \frac{\frac{G_n}{G_{n+1}} - \frac{G_{n+1}}{G_{n+2}}}{1 + \frac{G_n}{G_{n+1}} \cdot \frac{G_{n+1}}{G_{n+2}}} \\
&= \frac{G_n G_{n+2} - G_{n+1}^2}{G_n G_{n+1} + G_{n+1} G_{n+2}}.
\end{aligned}$$

Budući da je:

$$G_n G_{n+2} - G_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}\,\mu$$

slijedi tvrdnja, odnosno:

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{Tg}^{-1}\frac{G_n}{G_{n+1}} - \operatorname{Tg}^{-1}\frac{G_{n+1}}{G_{n+2}}\right) = \frac{(-1)^{n+1}\,\mu}{G_{n+1}\,(G_n + G_{n+2})}$$

□

Budući da su G_n generalizirani Fibonaccijevi brojevi, jasno je da prethodna relacija vrijedi i za Fibonaccijeve te Lucasove brojeve. Sjetimo se da smo s F_n označavali n-ti Fibonaccijev, odnosno s L_n n-ti Lucasov broj.

Korolar 2.5.2. *Za tri uzastopna Fibonaccijeva, odnosno Lucasova broja vrijedi:*

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{Tg}^{-1}\frac{F_n}{F_{n+1}} - \operatorname{Tg}^{-1}\frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}\right) = \frac{(-1)^{n+1}}{F_{2n+2}} \tag{2.3}$$

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{Tg}^{-1}\frac{L_n}{L_{n+1}} - \operatorname{Tg}^{-1}\frac{L_{n+1}}{L_{n+2}}\right) = \frac{5\,(-1)^n}{L_{n+1} + L_{2n+3}} \tag{2.4}$$

Dokaz. Dokaz ovog korolara direktno slijedi uvrštavanjem karakteristike niza generaliziranih Fibonaccijevih brojeva μ u formulu iz Propozicijie 2.5.1 koja za Fibonaccijeve brojeve iznosi 1, a Lucasove -5 te uvrštavanjem odgovarajućih Fibonaccijevih, odnosno Lucasovih brojeva u tu istu formulu. □

Dva uzastopna Fibonaccijeva broja koristeći trigonometrijske funkcije i redove možemo povezati na sljedeći način:

Teorem 2.5.3. *Vrijedi jednakost*

$$\operatorname{Tg}^{-1}\frac{F_n}{F_{n+1}} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \operatorname{Tg}^{-1}\frac{1}{F_{2i}}$$

Dokaz. Dokaz tvrdnje slijedi po principu matematičke indukcije. Provjerimo najprije za $n = 1$. Lijeva strana jednakosti tada iznosi

$$\operatorname{Tg}^{-1}\frac{F_1}{F_2} = \operatorname{Tg}^{-1}\frac{1}{1} = \operatorname{Tg}^{-1} 1,$$

dok je desna jednaka

$$(-1)^2 \operatorname{Tg}^{-1}\frac{1}{F_2} = \operatorname{Tg}^{-1} 1$$

pa možemo zaključiti da formula vrijedi za $n = 1$. Pretpostavimo sada da formula vrijedi za neki n te nas zanima vrijedi li onda i za $n + 1$. Krenimo sada od desne strane jednakosti:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} \operatorname{Tg}^{-1}\frac{1}{F_{2i}} &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \operatorname{Tg}^{-1}\frac{1}{F_{2i}} + (-1)^{n+2} \operatorname{Tg}^{-1}\frac{1}{F_{2(n+1)}} \\ &= \operatorname{Tg}^{-1}\frac{F_n}{F_{n+1}} + (-1)^n \operatorname{Tg}^{-1}\frac{1}{F_{2n+2}}\end{aligned}$$

pri čemu smo koristili pretpostavku indukcije, tj. da je

$$\operatorname{Tg}^{-1}\frac{F_n}{F_{n+1}} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \operatorname{Tg}^{-1}\frac{1}{F_{2i}}$$

za neki n. Uočimo sada da po Korolaru 2.5.2 vrijedi:

$$\operatorname{Tg}^{-1}\frac{F_n}{F_{n+1}} = \operatorname{Tg}^{-1}\frac{(-1)^{n+1}}{F_{2n+2}} + \operatorname{Tg}^{-1}\frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}.$$

Sada je:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i+1}\operatorname{Tg}^{-1}\frac{1}{F_{2i}} &= \left(\operatorname{Tg}^{-1}\frac{(-1)^{n+1}}{F_{2n+2}} + \operatorname{Tg}^{-1}\frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}\right) + (-1)^n\operatorname{Tg}^{-1}\frac{1}{F_{2n+2}}\\ &= \operatorname{Tg}^{-1}\frac{(-1)^{n+1}}{F_{2n+2}} + \operatorname{Tg}^{-1}\frac{F_{n+1}}{F_{n+2}} + (-1)^n\operatorname{Tg}^{-1}\frac{1}{F_{2n+2}}\end{aligned}$$

Ponovno, koristeći Korolar 2.5.2 vrijedi

$$\operatorname{Tg}^{-1}\frac{(-1)^{n+1}}{F_{2n+2}} = \operatorname{Tg}^{-1}\frac{F_n}{F_{n+1}} - \operatorname{Tg}^{-1}\frac{F_{n+1}}{F_{n+2}},$$

odnosno

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i+1}\operatorname{Tg}^{-1}\frac{1}{F_{2i}} &= \operatorname{Tg}^{-1}\frac{F_n}{F_{n+1}} - \operatorname{Tg}^{-1}\frac{F_{n+1}}{F_{n+2}} + \operatorname{Tg}^{-1}\frac{F_{n+1}}{F_{n+2}} + (-1)^n\operatorname{Tg}^{-1}\frac{1}{F_{2n+2}}\\ &= \operatorname{Tg}^{-1}\frac{F_n}{F_{n+1}} + (-1)^n\operatorname{Tg}^{-1}\frac{1}{F_{2n+2}}\\ &= \operatorname{Tg}^{-1}\frac{F_n}{F_{n+1}} - (-1)^{n+1}\operatorname{Tg}^{-1}\frac{1}{F_{2n+2}}.\end{aligned}$$

Kako vrijedi $-\operatorname{Tg}^{-1}x = \operatorname{Tg}^{-1}(-x)$, prethodno je dalje jednako:

$$\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i+1}\operatorname{Tg}^{-1}\frac{1}{F_{2i}} = \operatorname{Tg}^{-1}\frac{F_n}{F_{n+1}} - \operatorname{Tg}^{-1}\frac{(-1)^{n+1}}{F_{2n+2}}.$$

Kada još jednom iskoristimo rezultat Korolara 2.5.2 uočavamo da vrijedi

$$\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i+1}\operatorname{Tg}^{-1}\frac{1}{F_{2i}} = \operatorname{Tg}^{-1}\frac{F_n}{F_{n+1}} - \operatorname{Tg}^{-1}\frac{F_n}{F_{n+1}} + \operatorname{Tg}^{-1}\frac{F_{n+1}}{F_{n+2}} = \operatorname{Tg}^{-1}\frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}.$$

pa je teorem po aksiomu matematičke indukcije dokazan te formula vrijedi za svaki $n \geq 1$. □

U vezu s prethodnim redom, ali ovaj put beskonačnim, možemo dovesti i zlatni omjer:

Korolar 2.5.4. *Vrijedi jednakost*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \operatorname{Tg}^{-1} \frac{1}{F_{2n}} = \operatorname{Tg}^{-1}\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$

Dokaz. Kako je Tg^{-1} neprekidna rastuća funkcija, to vrijedi da je

$$\operatorname{Tg}^{-1}\left(\frac{1}{F_{2n}}\right) > \operatorname{Tg}^{-1}\left(\frac{1}{F_{2n+2}}\right).$$

Također, znamo da je F_n rastući niz što znači da je niz čiji je opći član $\frac{1}{F_n}$ padajući, odnosno niz koji teži u 0 kada n teži u beskonačnost. Stoga vrijednost $\operatorname{Tg}^{-1} \frac{1}{F_{2n}}$ također teži u 0 pa red konvergira te vrijedi:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \operatorname{Tg}^{-1} \frac{1}{F_{2n}} &= \lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{m} (-1)^{n+1} \operatorname{Tg}^{-1} \frac{1}{F_{2n}} \\
&= \lim_{k\to\infty} \operatorname{Tg}^{-1} \frac{F_k}{F_{k+1}} = \operatorname{Tg}^{-1} \lim_{k\to\infty} \frac{F_k}{F_{k+1}} \\
&= \operatorname{Tg}^{-1}\left(\frac{1}{\alpha}\right).
\end{aligned}$$

pri čemu smo koristili i prethodni Teorem 2.5.3. □

Kako je u prethodnom Korolaru2.5.4 dana veza Fibonaccijevih brojeva i zlatnog omjera, ali samo za Fibonaccijeve brojeve parnog indeksa, za očekivati je da postoji slična veza za Fibonaccijeve brojeve neparnog indeksa. Da bi je mogli dokazati, najprije moramo dokazati sljedeće tri leme koje ukazuju na nove veze između Fibonaccijevih i Lucasovih brojeva te veze istih i trigonometrijske funkcije tangens. Stoga, krenimo redom.

Lema 2.5.5. *Vrijede jednakosti*

$$L_{2n}L_{2n+2} - 1 = 5F_{2n+1}^2$$

i

$$L_{2n} + L_{2n+2} = 5F_{2n+1}$$

Dokaz. Sjetimo se da je:

$$L_{2m}L_{2n} = L_{m-n}^2 + 5F_{m+n}^2,$$

pa supstitucijom $m = n + 1$ dobivamo:

$$\begin{aligned}
L_{2(n+1)}L_{2n} - L_{n+1-n}^2 &= 5F_{n+1+n}^2 \\
L_{2n+2}L_{2n} - L_1^2 &= 5F_{2n+1}^2.
\end{aligned}$$

Kako je $L_1 = 1$ dalje vrijedi:

$$\begin{aligned} L_{2n+2}L_{2n} - 1^2 &= 5F_{2n+1}^2 \\ L_{2n+2}L_{2n} - 1 &= 5F_{2n+1}^2 \end{aligned}$$

što je upravo što smo i htjeli pokazati da vrijedi.

Nadalje,

$$\begin{aligned} L_{2n} + L_{2n+2} &= (F_{2n-1} + F_{2n+1}) + (F_{2n+2-1} + F_{2n+2+1}) \\ &= F_{2n-1} + F_{2n+1} + F_{2n+1} + F_{2n+3} = F_{2n-1} + 2F_{2n+1} + F_{2n+3} \\ &= F_{2n-1} + 2F_{2n+1} + (F_{2n+2} + F_{2n+1}) = F_{2n-1} + 3F_{2n+1} + (F_{2n+1} + F_{2n}) \\ &= F_{2n-1} + 4F_{2n+1} + F_{2n+1} + F_{2n} = 5F_{2n+1} \end{aligned}$$

pa je dokazan i drugi dio leme. □

U nastavku cilj je pokazati da vrijede sljedeće slične formule:

$$\mathrm{Tg}^{-1}\frac{1}{F_{2n+1}} = \mathrm{Tg}^{-1}\frac{1}{F_{2n}} - \mathrm{Tg}^{-1}\frac{1}{F_{2n+2}}$$

te

$$\mathrm{Tg}^{-1}\frac{1}{F_{2n+1}} = \mathrm{Tg}^{-1}\frac{1}{L_{2n}} + \mathrm{Tg}^{-1}\frac{1}{L_{2n+2}}.$$

Lema 2.5.6. *Za tri uzastopna Fibonaccijeva broja vrijedi sljedeće:*

$$\mathrm{Tg}^{-1}\frac{1}{F_{2n+1}} = \mathrm{Tg}^{-1}\frac{1}{F_{2n}} - \mathrm{Tg}^{-1}\frac{1}{F_{2n+2}}.$$

Dokaz. Označimo s θ_n desnu stranu jednakosti, odnosno neka je:

$$\theta_n = \mathrm{Tg}^{-1}\frac{1}{F_{2n}} - \mathrm{Tg}^{-1}\frac{1}{F_{2n+2}}.$$

Jasno,

$$\mathrm{tg}\,\theta_n = \mathrm{tg}\left(\mathrm{Tg}^{-1}\frac{1}{F_{2n}} - \mathrm{Tg}^{-1}\frac{1}{F_{2n+2}}\right)$$

što je dalje primjenom formule za tangens razlike kuta jednako:

$$\begin{aligned} \mathrm{tg}\,\theta_n &= \mathrm{tg}\left(\mathrm{Tg}^{-1}\frac{1}{F_{2n}} - \mathrm{Tg}^{-1}\frac{1}{F_{2n+2}}\right) = \frac{\mathrm{tg}\left(\mathrm{Tg}^{-1}\frac{1}{F_{2n}}\right) - \mathrm{tg}\left(\mathrm{Tg}^{-1}\frac{1}{F_{2n+2}}\right)}{1 + \mathrm{tg}\left(\mathrm{Tg}^{-1}\frac{1}{F_{2n}}\right)\mathrm{tg}\left(\mathrm{Tg}^{-1}\frac{1}{F_{2n+2}}\right)} \\ &= \frac{\frac{1}{F_{2n}} - \frac{1}{F_{2n+2}}}{1 + \frac{1}{F_{2n}}\cdot\frac{1}{F_{2n+2}}} = \frac{F_{2n+2} - F_{2n}}{F_{2n}F_{2n+2} + 1} = \frac{F_{2n+1}}{F_{2n+1}^2} \end{aligned}$$

pri čemu je posljednje posljedica Cassinijeve formule koju smo vidjeli ranije. Prema tome dalje možemo pisati:

$$\operatorname{tg}\theta_n = \frac{1}{F_{2n+1}}$$

što je ekvivalentno činjenici koju smo htjeli pokazati. Dakle, vrijedi:

$$\operatorname{Tg}^{-1}\frac{1}{F_{2n+1}} = \operatorname{Tg}^{-1}\frac{1}{F_{2n}} - \operatorname{Tg}^{-1}\frac{1}{F_{2n+2}}.$$

□

Promotrimo sada drugu spomenutu jednakost.

Lema 2.5.7. *Za Fibonaccijeve i Lucasove brojeve vrijedi:*

$$\operatorname{Tg}^{-1}\frac{1}{F_{2n+1}} = \operatorname{Tg}^{-1}\frac{1}{L_{2n}} + \operatorname{Tg}^{-1}\frac{1}{L_{2n+2}}.$$

Dokaz. Označimo s θ_n desnu stranu jednakosti, odnosno neka je:

$$\theta_n = \operatorname{Tg}^{-1}\frac{1}{L_{2n}} + \operatorname{Tg}^{-1}\frac{1}{L_{2n+2}}.$$

Jasno,

$$\operatorname{tg}\theta_n = \operatorname{tg}\left(\operatorname{Tg}^{-1}\frac{1}{L_{2n}} + \operatorname{Tg}^{-1}\frac{1}{L_{2n+2}}\right)$$

što je po formuli za tangens razlike kuta dalje jednako:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}\theta_n &= \operatorname{tg}\left(\operatorname{Tg}^{-1}\frac{1}{L_{2n}} + \operatorname{Tg}^{-1}\frac{1}{L_{2n+2}}\right) = \frac{\operatorname{tg}\left(\operatorname{Tg}^{-1}\frac{1}{L_{2n}}\right) + \operatorname{tg}\left(\operatorname{Tg}^{-1}\frac{1}{L_{2n+2}}\right)}{1 - \operatorname{tg}\left(\operatorname{Tg}^{-1}\frac{1}{L_{2n}}\right)\operatorname{tg}\left(\operatorname{Tg}^{-1}\frac{1}{L_{2n+2}}\right)} \\ &= \frac{\frac{1}{L_{2n}} + \frac{1}{L_{2n+2}}}{1 - \frac{1}{L_{2n}}\cdot\frac{1}{L_{2n+2}}} = \frac{L_{2n} + L_{2n+2}}{L_{2n}L_{2n+2} - 1} = \frac{5F_{2n+1}}{5F_{2n+1}^2} = \frac{1}{F_{2n+1}}.\end{aligned}$$

Dakle, vrijedi:

$$\operatorname{Tg}^{-1}\frac{1}{F_{2n+1}} = \operatorname{Tg}^{-1}\frac{1}{L_{2n}} + \operatorname{Tg}^{-1}\frac{1}{L_{2n+2}}.$$

□

Dokazavši najavljene formule, sada možemo iskazati ekvivalentnu tvrdnju za Fibonaccijeve brojeve neparnog indeksa:

Teorem 2.5.8. *Vrijedi jednakost*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Tg}^{-1} \frac{1}{F_{2n+1}} = \frac{\pi}{4}.$$

Dokaz. Prema prethodnoj Lemi 2.5.6 vrijedi sljedeće:

$$\sum_{n=1}^{m} \operatorname{Tg}^{-1} \frac{1}{F_{2n+1}} = \sum_{n=1}^{m} \left(\operatorname{Tg}^{-1} \frac{1}{F_{2n}} - \operatorname{Tg}^{-1} \frac{1}{F_{2n+2}} \right),$$

što je dalje jednako, kada se svi sumandi pokrate, sljedećem

$$\sum_{n=1}^{m} \operatorname{Tg}^{-1} \frac{1}{F_{2n+1}} = \operatorname{Tg}^{-1} \frac{1}{F_2} - \operatorname{Tg}^{-1} \frac{1}{F_{2m+2}},$$

odnosno, kako je $F_2 = 1$ te smo već ranije vidjeli da je

$$\operatorname{Tg}^{-1} 1 = \operatorname{Tg}^{-1} \frac{1}{1} = \frac{\pi}{4},$$

dalje vrijedi

$$\sum_{n=1}^{m} \operatorname{Tg}^{-1} \frac{1}{F_{2n+1}} = \frac{\pi}{4} - \operatorname{Tg}^{-1} \frac{1}{F_{2m+2}}.$$

Ponovno, koristeći svojstvo da je tangens rastuća funkcija te da je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{F_n} = \operatorname{Tg}^{-1} 0 = 0,$$

dalje vrijedi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Tg}^{-1} \frac{1}{F_{2n+1}} = \lim_{n\to\infty} \operatorname{Tg}^{-1} \frac{1}{F_{2n+1}},$$

odnosno

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Tg}^{-1} \frac{1}{F_{2n+1}} &= \lim_{m\to\infty} \left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{Tg}^{-1} \frac{1}{F_{2m+2}} \right) \\ &= \frac{\pi}{4} - \operatorname{Tg}^{-1} 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

pa je time tvrdnja dokazana. □

Dokazanu formulu prvi je pokazao Derrick H. Lehmmer, a na temelju nje, dobivamo sljedeći rezultat koji je veza Lucasovih brojeva i zlatnog omjera.

Teorem 2.5.9. *Vrijedi jednakost*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Tg}^{-1} \frac{1}{L_{2n}} = \operatorname{Tg}^{-1} \beta.$$

Dokaz. Prema Lemi 2.5.7 slijedi da je:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{m} \operatorname{Tg}^{-1} \frac{1}{F_{2n+1}} &= \sum_{n=1}^{m} \left(\operatorname{Tg}^{-1} \frac{1}{L_{2n}} + \operatorname{Tg}^{-1} \frac{1}{L_{2n+2}} \right) \\
&= \sum_{n=1}^{m} \operatorname{Tg}^{-1} \frac{1}{L_{2n}} + \sum_{n=1}^{m} \operatorname{Tg}^{-1} \frac{1}{L_{2n+2}} \\
&= \operatorname{Tg}^{-1} \frac{1}{3} + \sum_{n=2}^{m} \operatorname{Tg}^{-1} \frac{1}{L_{2n}} + \sum_{n=2}^{m} \operatorname{Tg}^{-1} \frac{1}{L_{2n}} + \operatorname{Tg}^{-1} \frac{1}{L_{2m+2}} \\
&= \operatorname{Tg}^{-1} \frac{1}{3} + 2 \sum_{n=2}^{m} \operatorname{Tg}^{-1} \frac{1}{L_{2n}} + \operatorname{Tg}^{-1} \frac{1}{L_{2m+2}}.
\end{aligned}$$

Ponovno, kako

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{L_n} = \operatorname{Tg}^{-1} 0 = 0$$

te je Tg^{-1} neprekidna funkcija, dalje vrijedi:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Tg}^{-1} \frac{1}{F_{2n+1}} &= \lim_{n \to \infty} \operatorname{Tg}^{-1} \frac{1}{F_{2n+1}} \\
&= \operatorname{Tg}^{-1} \frac{1}{3} + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \operatorname{Tg}^{-1} \frac{1}{L_{2n}} + \lim_{m \to \infty} \left(\operatorname{Tg}^{-1} \frac{1}{L_{2m+2}} \right) \\
&= \operatorname{Tg}^{-1} \frac{1}{3} + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \operatorname{Tg}^{-1} \frac{1}{L_{2n}} + 0 \\
&= \operatorname{Tg}^{-1} \frac{1}{3} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Tg}^{-1} \frac{1}{L_{2n}} - 2 \operatorname{Tg}^{-1} \frac{1}{3} \\
&= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Tg}^{-1} \frac{1}{L_{2n}} - \operatorname{Tg}^{-1} \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

što je ekvivalentno sljedećem

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{Tg}^{-1}\frac{1}{L_{2n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{Tg}^{-1}\frac{1}{F_{2n+1}}+\operatorname{Tg}^{-1}\frac{1}{3}.$$

Budući da znamo da je

$$\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{Tg}^{-1}\frac{1}{F_{2n+1}}=\frac{\pi}{4}=\operatorname{Tg}^{-1}1$$

slijedi:

$$\begin{aligned}2\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{Tg}^{-1}\frac{1}{L_{2n}} &= \frac{\pi}{4}+\operatorname{Tg}^{-1}\frac{1}{3}\\ &= \operatorname{Tg}^{-1}1+\operatorname{Tg}^{-1}\frac{1}{3}\\ &= \operatorname{Tg}^{-1}\frac{1+\frac{1}{3}}{1-1\cdot\frac{1}{3}}=\operatorname{Tg}^{-1}\frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}}\\ &= \operatorname{Tg}^{-1}2,\end{aligned}$$

odnosno vrijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{Tg}^{-1}\frac{1}{L_{2n}} = \frac{1}{2}\operatorname{Tg}^{-1}2.$$

pri tome je primijenjena sljedeća formula

$$\operatorname{Tg}^{-1}x+\operatorname{Tg}^{-1}y=\operatorname{Tg}^{-1}\frac{x+y}{1-x\cdot y}.$$

Uočimo sada da za $\beta=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ vrijedi:

$$2\operatorname{Tg}^{-1}\beta = \operatorname{Tg}^{-1}\beta+\operatorname{Tg}^{-1}\beta=\operatorname{Tg}^{-1}\frac{\beta+\beta}{1-\beta\cdot\beta}=\operatorname{Tg}^{-1}\frac{2\beta}{1-\beta^2}$$

Kako je β vrijedi $\beta^2=-\beta+1$ dalje slijedi

$$\begin{aligned}2\operatorname{Tg}^{-1}\beta &= \operatorname{Tg}^{-1}\frac{2\beta}{1-(-\beta+1)}=\operatorname{Tg}^{-1}\frac{2\beta}{1+\beta-1}\\ &= \operatorname{Tg}^{-1}\frac{2\beta}{\beta}=\operatorname{Tg}^{-1}2,\end{aligned}$$

odnosno vrijedi

$$\operatorname{Tg}^{-1}\beta \;=\; \frac{1}{2}\operatorname{Tg}^{-1} 2.$$

što znači da je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Tg}^{-1}\frac{1}{L_{2n}} \;=\; \operatorname{Tg}^{-1}\beta,$$

a to smo i htjeli pokazati. □

Slično možemo povezati funkciju kotangens i Fibonaccijeve brojeve s redovima pa promotrimo.

Teorem 2.5.10. *Vrijedi tvrdnja:*

$$\operatorname{Ctg}^{-1} 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Ctg}^{-1} F_{2n+1}.$$

Dokaz. Kako bismo dokazali tvrdnju teorema, promotrimo čemu je jednaka sljedeća razlika:

$$\operatorname{Ctg}^{-1} F_{2k} - \operatorname{Ctg}^{-1} F_{2k+1} = \operatorname{Ctg}^{-1}\frac{F_{2k}F_{2k+1}+1}{F_{2k+1}-F_{2k}}.$$

Kako je

$$F_{2k}F_{2k+1} + 1 = F_{2k-1}F_{2k+2}$$

i

$$F_{2k+1} - F_{2k} = F_{2k-1}$$

dalje vrijedi:

$$\operatorname{Ctg}^{-1} F_{2k} - \operatorname{Ctg}^{-1} F_{2k+1} = \operatorname{Ctg}^{-1}\frac{F_{2k-1}F_{2k+2}}{F_{2k-1}} = \operatorname{Ctg}^{-1} F_{2k+2},$$

odnosno

$$\operatorname{Ctg}^{-1} F_{2k} - \operatorname{Ctg}^{-1} F_{2k+2} = \operatorname{Ctg}^{-1} F_{2k+1}.$$

Promotrimo sada čemu je jednaka suma n razlika poput prethodne:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\operatorname{Ctg}^{-1} F_{2k} - \operatorname{Ctg}^{-1} F_{2k+2}\right) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Ctg}^{-1} F_{2k+1}.$$

Uočimo li da se zapravo u sumi koja se nalazi s lijeve strane prethodne jednakosti pokrate svi sumandi osim prvog za $n = 1$ te drugog za neko n, kao i da kada n teži u beskonačnost $\mathrm{Ctg}^{-1} F_n$ teži u nulu, iz prethodnog slijedi tvrdnja, odnosno:

$$\mathrm{Ctg}^{-1} 1 = \sum_{1}^{\infty} \mathrm{Ctg}^{-1} F_{2n+1}.$$

□

Velika klasa polinoma koja se može definirati rekurzijama koje su slične rekurziji kojom nastaju Fibonaccijevi brojevi nazivaju se Fibonaccijevi polinomi. Proučavao ih je u 19. stoljeću E. C. Catalan, belgijski matematičar, kao i Nijemac E. Jacobsthal.

Definicija 2.5.11. *Polinomi zadani rekurzijom*

$$f_n(x) = x f_{n-1}(x) + f_{n-2}(x), \ n \geq 3,$$

pri čemu je

$$f_1(x) = 1, \ f_2(x) = x,$$

nazivaju se Catalanovi Fibonaccijevi polinomi.

Prvih nekoliko Catalanovih Fibonaccijevih polinoma su:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 1 \\ f_2(x) &= x \\ f_3(x) &= x^2 + 1 \\ f_4(x) &= x^3 + 2x \\ f_5(x) &= x^4 + 3x^2 + 1 \\ f_6(x) &= \ldots \end{aligned}$$

Definicija 2.5.12. *Polinomi zadani su rekurzijom*

$$J_n(x) = J_{n-1}(x) + x J_{n-2}(x),$$

gdje je $J_1(x) = J_2(x) = 1$ *nazivaju se* Jacobsthalovi Fibonaccijevi polinomi.

Naš će fokus činiti polinomi koje je proučavao Catalan pa pri spomenu Fibonaccijevih polinoma mislimo na polinome koje je proučavao Catalan. Najprije nam treba jedna tehnička lema.

Lema 2.5.13. *Neka je* $\theta_n = \mathrm{Tg}^{-1} \frac{1}{f_n(x)}$. *Tada vrijedi*

$$\mathrm{tg}\,(\theta_n - \theta_{n+1}) = \frac{x}{f_{2n+1}(x)}.$$

Dokaz. Kako je $\operatorname{tg}\theta_n = \frac{1}{f_n(x)}$, tada prema formuli za tangens razlike kuta slijedi

$$\operatorname{tg}(\theta_n - \theta_{n+1}) = \frac{f_{2n+2}(x) - f_{2n}(x)}{1 + f_{2n+2}(x) \cdot f_{2n}(x)}$$

iz čega po Definiciji 2.5.11 u brojniku slijedi

$$\operatorname{tg}(\theta_n - \theta_{n+1}) = \frac{x f_{2n+1}(x)}{1 + f_{2n+2}(x) \cdot f_{2n}(x)}.$$

Kako je

$$1 + f_{2n+2}(x) \cdot f_{2n}(x) = f_{2n+1}^2(x)$$

dalje vrijedi

$$\operatorname{tg}(\theta_n - \theta_{n+1}) = \frac{x f_{2n+1}(x)}{f_{2n+1}^2(x)} = \frac{x}{f_{2n+1}(x)}$$

odnosno

$$\theta_n - \theta_{n+1} = \operatorname{Tg}^{-1}\frac{x}{f_{2n+1}(x)}.$$

□

Dokazana lema pomaže nam u dokazivanju sljedeće tvrdnje.

Teorem 2.5.14. *Neka je $f_n(x)$ Fibonaccijev polinom. Vrijedi tvrdnja:*

$$\operatorname{Tg}^{-1}\frac{1}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Tg}^{-1}\frac{x}{f_{2n+1}(x)}.$$

Dokaz. Prisjetimo se da je $\operatorname{tg}\theta_n = \frac{1}{f_n(x)}$ pa po prethodnoj Lemi 2.5.13 vrijedi

$$\operatorname{Tg}^{-1}\frac{1}{f_{2n}(x)} - \operatorname{Tg}^{-1}\frac{1}{f_{2n+2}(x)} = \operatorname{Tg}^{-1}\frac{x}{f_{2n+1}(x)}.$$

što je ekvivalentno sljedećem

$$\sum_{n=1}^{m} \operatorname{Tg}^{-1}\frac{x}{f_{2n+1}(x)} = \sum_{n=1}^{m}\left(\operatorname{Tg}^{-1}\frac{1}{f_{2n}(x)} - \operatorname{Tg}^{-1}\frac{1}{f_{2n+2}(x)}\right) = \operatorname{Tg}^{-1}\frac{1}{f_2(x)} - \operatorname{Tg}^{-1}\frac{1}{f_{2m+2}(x)}$$

nakon što se pokrate svi mogući sumandi u sumi s desne strane jednakosti. Sada, kako je $f_2 = x$ te $\operatorname{Tg}^{-1}\left(\frac{1}{f_{2m+2}}\right)$ teži prema nuli kada m raste u beskonačnost, dolazimo do tvrdnje koju smo i htjeli pokazati. Odnosno, tada vrijedi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Tg}^{-1}\frac{x}{f_{2n+1}(x)} = \operatorname{Tg}^{-1}\frac{1}{x}.$$

□

Osim već viđenog dokaza Teorema 2.5.8 možemo uočiti da, kako je $f_k(1) = F_k$, tvrdnja slijedi i iz neposredno napisanog Teorema 2.5.14 čija je još jedna posljedica sadržana u idućem korolaru.

Korolar 2.5.15. *Vrijedi tvrdnja:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Tg}^{-1} \frac{1}{F_{2k+1}} = \frac{\pi}{4}.$$

Dokaz. Primijetimo, kako je $f_k(1) = F_k$ to vrijedi

$$\operatorname{Tg}^{-1} \frac{1}{F_{2k+1}} = \operatorname{Tg}^{-1} \frac{1}{f_{2k+1}},$$

odnosno koristeći prethodni Teorem 2.5.14 za $x = 1$ slijedi

$$\operatorname{Tg}^{-1} \frac{1}{f_{2k+1}} = \operatorname{Tg}^{-1} \frac{1}{1} = \operatorname{Tg}^{-1} 1$$

Preostaje još uočiti da je $\operatorname{Tg}^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$ te smo dokazali tvrdnju korolara. □

Broj π možemo zapisati i na sljedeći način:

Teorem 2.5.16. *Vrijedi tvrdnja:*

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Tg}^{-1} \frac{1}{F_{2k+1}} + \operatorname{Tg}^{-1} \frac{1}{F_{2n+2}} = \frac{\pi}{4}.$$

Dokaz. Tvrdnju ovog teorema pokazat ćemo koristeći aksiom matematičke indukcije. Promotrimo najprije za $n = 1$. Za $n = 1$ te $F_3 = 2$ i $F_4 = 3$ lijeva strana jednakosti jednaka je

$$\operatorname{Tg}^{-1} \frac{1}{F_{2\cdot 1+1}} + \operatorname{Tg}^{-1} \frac{1}{F_{2\cdot 1+2}} = \operatorname{Tg}^{-1} \frac{1}{2} + \operatorname{Tg}^{-1} \frac{1}{3}$$

što već znamo da je jednako $\frac{\pi}{4}$ pa pravilnost vrijedi za $n = 1$. Pretpostavimo sada da tvrdnja vrijedi za neki prirodan broj n. Provjerimo vrijedi li tada i za $n + 1$.

$$\sum_{k=1}^{n+1} \operatorname{Tg}^{-1} \frac{1}{F_{2k+1}} + \operatorname{Tg}^{-1} \frac{1}{F_{2(n+1)+2}} = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Tg}^{-1} \frac{1}{F_{2k+1}} + \operatorname{Tg}^{-1} \frac{1}{F_{2(n+1)+1}} + \operatorname{Tg}^{-1} \frac{1}{F_{2n+4}}$$

što je, zbog pretpostavke indukcije dalje jednako

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} \operatorname{Tg}^{-1} \frac{1}{F_{2k+1}} + \operatorname{Tg}^{-1} \frac{1}{F_{2n+4}} &= \left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{Tg}^{-1} \frac{1}{F_{2n+2}}\right) + \operatorname{Tg}^{-1} \frac{1}{F_{2n+3}} + \operatorname{Tg}^{-1} \frac{1}{F_{2n+4}} \\ &= \frac{\pi}{4} + \operatorname{Tg}^{-1} \frac{1}{F_{2n+3}} + \left(\operatorname{Tg}^{-1} \frac{1}{F_{2n+4}} - \operatorname{Tg}^{-1} \frac{1}{F_{2n+2}}\right).\end{aligned}$$

Promotrimo sada izraz u zagradama. Neka je $x = \operatorname{Tg}^{-1} \frac{1}{F_{2n+4}}$ i $y = \operatorname{Tg}^{-1} \frac{1}{F_{2n+2}}$. Tada možemo izračunati čemu je jednako $\operatorname{tg}(x-y)$ koristeći formulu za tangens razlike kuta:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}(x-y) &= \frac{\frac{1}{F_{2n+4}} - \frac{1}{F_{2n+2}}}{1 + \frac{1}{F_{2n+4}} \cdot \frac{1}{F_{2n+2}}} = \frac{\frac{F_{2n+2} - F_{2n+4}}{F_{2n+2} \cdot F_{2n+4}}}{\frac{1 + F_{2n+2} \cdot F_{2n+4}}{F_{2n+2} \cdot F_{2n+4}}} \\ &= \frac{-(F_{2n+4} - F_{2n+2})}{1 + F_{2n+2} \cdot F_{2n+4}} = \frac{-F_{2n+3}}{F_{2n+3}^2} = -\frac{1}{F_{2n+3}}.\end{aligned}$$

Dakle, izračunali smo da je

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{Tg}^{-1} \frac{1}{F_{2n+4}} - \operatorname{Tg}^{-1} \frac{1}{F_{2n+2}}\right) = -\frac{1}{F_{2n+3}},$$

odnosno

$$\operatorname{Tg}^{-1} \frac{1}{F_{2n+4}} - \operatorname{Tg}^{-1} \frac{1}{F_{2n+2}} = -\operatorname{Tg}^{-1} \frac{1}{F_{2n+3}}.$$

Sada imamo

$$\sum_{k=1}^{n+1} \operatorname{Tg}^{-1} \frac{1}{F_{2k+1}} + \operatorname{Tg}^{-1} \frac{1}{F_{2n+4}} = \frac{\pi}{4} + \operatorname{Tg}^{-1} \frac{1}{F_{2n+3}} - \operatorname{Tg}^{-1} \frac{1}{F_{2n+3}} = \frac{\pi}{4}.$$

Dakle, kako tvrdnja vrijedi i za $n+1$, po principu matematičke indukcije je teorem dokazan. □

Rezultat prethodnog teorema pridonosi Teoremu 2.5.8 kao i Lehmerovoj formuli.

Korolar 2.5.17. *Vrijedi tvrdnja:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Tg}^{-1} \frac{1}{F_{2n+1}} = \frac{\pi}{4}.$$

Dokaz. Prisjetimo li se opet da je Tg^{-1} neprekidna rastuća funkcija te da povećanjem rednog broja člana Fibonaccijevog niza, vrijednost $\operatorname{Tg}^{-1} \frac{1}{F_n}$ teži u nulu, možemo uočiti da primjenom prethodnog Teorema 2.5.16 direktno slijedi tvrdnja korolara kada n teži u beskonačno. □

Bibliografija

[1] A. Dujella: *Fibonaccijevi brojevi*, HMD, Zagreb, 2000.

[2] T. Koshy: *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*, John Wiley and Sons, 2001.

[3] WolframMathWorld: Fibonaccijevi brojevi
www.mathworld.wolfram.com/FibonacciNumber.html,(26.3.2016.)

[4] WolframMathWorld: Invezna funkcija tangens
www.mathworld.wolfram.com/InverseTangent.html,(26.3.2016.)

[5] WolframMathWorld: Lucasovi brojevi
www.mathworld.wolfram.com/LucasNumber.html,(26.3.2016.)

[6] WolframMathWorld: Tangens
www.mathworld.wolfram.com/Tangent.html,(26.3.2016.)

[7] WolframMathWorld: Zlatni trokut
mathworld.wolfram.com/GoldenTriangle.htmll,(14.4.2016.)

Sažetak

Trigonometrijske funkcije dobar su izbor želimo li u vezu dovesti Fibonaccijeve i Lucasove brojeve. Kako je ovo elegantan i jednostavan pristup problematici, zaslužuje nositi zasebno ime, Fibonometrija. Jedna od zanimljivijih veza koje smo imali prilike vidjeti u ovom radu jest

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Tg}^{-1} \frac{1}{F_{2k+1}} = \frac{\pi}{4}.$$

što je jedan od mnogih mogućih zapisa, odnosno aproksimacija broja π. Osim široke lepeze mogućnosti stvaranja fibonometrijskih veza, trigonometrijske funkcije i Fibonaccijevi i Lucasovi brojevi omogućili su nam da otkrijemo priču koja se skriva u pozadini svakidašnjih pojava ili stvari. Jedan primjer jest nastajanje tkalačkih uzoraka (pletera). Geometrijski aspekt ove grane matematike nije izostao. Koristeći svojstva zlatnog trokuta u mogućnosti smo izračunati trigonometrijske vrijednost najmanjeg cjelobrojnog kuta veličine 3° što nam omogućuje da izračunamo i mnoge druge vrijednosti i sve to bez upotrebe kalkulatora. Svega ovoga ne bi bilo bez velikog Fibonaccija i njegovih izovrnih doprinosa matematici koji su poslužili tek kao temelj ostalim otkrićima drugih matematičara.

Summary

Trigonometric functions are a good choice for deriving relations between Fibonacci and Lucas numbers. Since this is an elegant and simple approach to this issue, it deserves its own name, Fibonometry. One of the most interesting relations is

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Tg}^{-1} \frac{1}{F_{2k+1}} = \frac{\pi}{4}.$$

which is one of many possible ways to write and aproximate number π. Beside various possibilities of creating fibonometric relations, trigonometric functions and Fibonacci and Lucas numbers enabled us to discover a story behind everyday phenomenon or things. One example is making weaves. Geometric aspect to this part of mathematics was also present. Using golden triangle properties we are able to calculate trigonometric values of the smallest integer angle of 3° which helps us calculate trigonometric values of many other angles without using a calculator. All this would not happen without the great Fibonacci and his original contributions which were only a base to all other findings.

Životopis

Rođena sam 5. travnja 1992. godine u Čakovcu, a odrasla sam u obližnjem manjem selu Miklavcu. Osnovnu školu Podturen pohađala sam u razdoblju od 1999. do 2007. godine, a srednjoškolko obrazovanje nastavila sam u Gimnaziji Čakovec (od nedavno Gimnazija Josipa Slavenskog Čakovec) u razdoblju od 2007. do 2011. godine gdje sam pohađala redovni četverogodišnji opći smjer. Nakon položene državne mature, 2011. godine upisala sam Prirodoslovno-matematički fakultet u Zagrebu, Matematički odsjek, matematiku nastavnički smjer. Preddiplomski studij završila sam u roku te 2014. godine upisala nastavnički diplomski smjer matematike na istom Fakultetu kojeg također završavam u roku 2016. godine. Osim matematičkog znanja, tijekom svog školovanja ovladala sam engleskim i njemačkim jezikom te oba koristim aktivno u govoru i pismu.