SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Ivana Šore

REKURZIVNOST REALNIH FUNKCIJA

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc.dr.sc. Zvonko Iljazović

Zagreb, rujan, 2015.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Mojoj majci

Sadržaj

Uvod

U ovom diplomskom radu proučavamo pojam rekurzivne funkcije $\mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$.

U prvom poglavlju definiramo klasični pojam rekurzivne funkcije $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$. Pri tome proučavamo i primitivno rekurzivne funkcije te rekurzivne skupove.

U drugom poglavlju, kao korak prema definiranju rekurzivnih realnih funkcija, uvodimo pojam rekurzivne funkcije $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ te proučavamo neka svojstva takvih funkcija.

U trećem poglavlju definiramo rekurzivne funkcije $\mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$. Proučavamo neka svojstva takvih funkcija te se također bavimo i pojmom rekurzivnog broja.

Svi pojmovi korišteni u radu su precizno definirani, a sve tvrdnje su detaljno dokazane.

Poglavlje 1

Rekurzivne funkcije

1.1 Primitivno rekurzivne funkcije

Neka je $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je $j \in \{1, \ldots, n\}$. Neka je $I_j^n : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa

$$I_j^n (x_1, \ldots, x_n) = x_j.$$

Za funkciju I_j^n kažemo da je projekcija od $\mathbb{N}^n$ na j-tu koordinatu.

Neka su $s, z : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ funkcije definirane sa

$$s(x) = x + 1, z(x) = 0, \forall x \in \mathbb{N}.$$

Za funkcije $s, z, I_j^n, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, j \in \{1, \ldots, n\}$ kažemo da su **inicijalne funkcije**.

Neka su $n, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, neka su $g_1, \ldots, g_n : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ funkcije, te neka je $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ funkcija. Definiramo $h : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ sa

$$h(x_1, \ldots, x_k) = f(g_1(x_1, \ldots, x_k), \ldots, g_n(x_1, \ldots, x_k)).$$

Za funkciju h kažemo da je dobivena kompozicijom funkcija $f, g_1, \ldots, g_n$.

Napomena 1.1.1. *Neka su $g_1, \ldots, g_n, f$ i h funkcije kao gore. Neka je $G : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ funkcija definirana sa*

$$G(x_1, \ldots, x_k) = (g_1(x_1, \ldots, x_k), \ldots, g_n(x_1, \ldots, x_k)).$$

Za sve $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$h(x_1, \ldots, x_k) = f(G(x_1, \ldots, x_k)) = (f \circ G)(x_1, \ldots, x_k).$$

Dakle, h je kompozicija funkcija f i G (u klasičnom smislu kompozicije).

Primjer 1.1.2. *Neka je $g : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa $g(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 1$. Imamo*

$$g(x_1, x_2, x_3) = s(x_1) = s\left(I_1^3(x_1, x_2, x_3)\right).$$

Prema tome g je kompozicija funkcija s i I_1^3.

Primjer 1.1.3. *Neka je $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ te neka je $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa $g(x_1, x_2) = f(x_2, x_1)$. Imamo*

$$g(x_1, x_2) = f\left(I_2^2(x_1, x_2), I_1^2(x_1, x_2)\right).$$

Dakle g je kompozicija funkcija f, I_2^2, I_1^2.

Nadalje, neka je $h : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa $h(a, b, c) = f(b, b)$. Tada je

$$h(a, b, c) = f\left(I_2^3(a, b, c), I_2^3(a, b, c)\right),$$

dakle, h je kompozicija funkcija f, I_2^3 i I_2^3.

Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka su $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ i $g : \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N}$ funkcije. Definiramo funkciju $h : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ induktivno po prvoj varijabli na sljedeći način:

$$h(0, x_1, \ldots, x_k) = f(x_1, \ldots, x_k)$$

$$h(y + 1, x_1, \ldots, x_k) = g(h(y, x_1, \ldots, x_k), y, x_1, \ldots, x_k).$$

Za funkciju h kažemo da je dobivena primitivnom rekurzijom od funkcija f i g.

Primjer 1.1.4. *Neka je $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa $h(y, x) = y + x$. Pitamo se postoje li funkcije f i g takve da je h dobivena primitivnom rekurzijom od f i g, tj. postoje li funkcije $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ i $g : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ takve da je*

$$h(0, x) = f(x) \tag{1.1}$$

$$h(y + 1, x) = g(h(y, x), y, x). \tag{1.2}$$

Neka je $f = I_1^1$ te neka je g funkcija iz primjera 1.1.2. Tada je

$$h(0, x) = x = I_1^1(x) = f(x)$$

$$h(y + 1, x) = y + x + 1 = h(y, x) + 1 = g(h(y, x), y, x)$$

Dakle, funkcije f i g su takve da vrijedi (1.1) i (1.2). Prema tome, h je dobivena primitivnom rekurzijom od f i g.

Primjer 1.1.5. *Neka je* $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ *,* $h(y,x) = y \cdot x$*. Vrijedi*

$$h(0,x) = 0 = z(x)$$

$$h(y+1,x) = yx + x = h(y,x) + x = g(h(y,x), y, x)$$

pri čemu je $g : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ *funkcija definirana sa* $g(a,b,c) = a + c$*. Dakle,*

$$h(0,x) = z(x)$$

$$h(y+1,x) = g(h(y,x), y, x).$$

Prema tome, h je dobivena primitivnom rekurzijom od z i g.

Neka je $zb : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ *funkcija definirana sa* $zb(y,x) = y + x$*. Tada je*

$$g(a,b,c) = a + c = zb(a,c) = zb\left(I_1^3(a,b,c), I_3^3(a,b,c)\right).$$

Dakle, g je kompozicija funkcija zb, I_1^3, I_3^3*.*

Definirajmo niz skupova $\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1, \ldots$ induktivno na sljedeći način. Neka je $\mathcal{S}_0$ skup svih inicijalnih funkcija. Pretpostavimo da je $l \in \mathbb{N}$ te da smo definirali skup $\mathcal{S}_l$. Definiramo $\mathcal{S}_{l+1}$ kao skup svih funkcija h koje zadovoljavaju jedan od sljedeća tri uvjeta:

1. Postoje $n \in \mathbb{N}$ i funkcije $f, g_1, \ldots, g_n \in \mathcal{S}_l$ takve da je h dobivena kompozicijom funkcija $f, g_1, \ldots, g_n$.

2. Postoje funkcije $f, g \in \mathcal{S}_l$ takve da je h dobivena primitivnom rekurzijom od f i g.

3. $h \in \mathcal{S}_l$.

Na ovaj način smo definirali skupove $\mathcal{S}_l, l \in \mathbb{N}$. Uočimo da je $\mathcal{S}_l \subseteq \mathcal{S}_{l+1}$. Za funkciju f kažemo da je **primitivno rekurzivna** ako postoji $l \in \mathbb{N}$ takav da je $f \in \mathcal{S}_l$.

Uočimo da je svaka inicijalna funkcija primitivno rekurzivna.

Primjer 1.1.6. *Neka je* $g : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ *definirana sa*

$$g(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 1.$$

Funkcija g je kompozicija funkcija s i I_1^3 *(primjer 1.1.2) koje su inicijalne, dakle pripadaju skupu* $\mathcal{S}_0$*. Stoga je* $g \in \mathcal{S}_1$*. Prema tome g je primitivno rekurzivna funkcija.*

Nadalje, neka je $zb : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$*,*

$$zb(y,x) = y + x.$$

Prema primjeru 1.1.4 zb je dobivena primitivnom rekurzijom od funkcija I_1^1 *i g. Imamo* $I_1^1 \in \mathcal{S}_1$ *(jer je* $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{S}_1$*), dakle* $I_1^1, g \in \mathcal{S}_1$ *pa je* $zb \in \mathcal{S}_2$*. Prema tome zb je primitivno rekurzivna funkcija.*

Primjer 1.1.7. *Neka je $g : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa*

$$g(a, b, c) = a + c.$$

Prema primjeru 1.1.5 g je dobivena kompozicijom funkcija zb, I_1^3 i I_3^3, pri čemu je zb funkcija iz prethodnog primjera. Imamo $zb \in \mathcal{S}_2$ te također $I_1^3, I_3^3 \in \mathcal{S}_2$ (jer je $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{S}_2$). Stoga je $g \in \mathcal{S}_3$.

Neka je $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$,

$$h(y, x) = y \cdot x.$$

Prema primjeru 1.1.5 h je dobivena primitivnom rekurzijom od z i g. Stoga je $h \in \mathcal{S}_4$. Posebno, h je primitivno rekurzivna funkcija.

Propozicija 1.1.8. *1) Neka je $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka su $h, f, g_1, \ldots, g_n$ funkcije takve da je h dobivena kompozicijom funkcija $f, g_1, \ldots, g_n$. Pretpostavimo da su $f, g_1, \ldots, g_n$ primitivno rekurzivne funkcije. Tada je i h primitivno rekurzivna funkcija.*

2) Neka su h, f, g funkcije takve da je h dobivena primitivnom rekurzijom od f i g. Pretpostavimo da su f i g primitivno rekurzivne funkcije. Tada je i h primitivno rekurzivna funkcija.

Dokaz. 1) Uočimo prvo sljedeće. Ako su $i, j \in \mathbb{N}$ takvi da je $i \leq j$, onda je $\mathcal{S}_i \subseteq \mathcal{S}_j$. To slijedi iz činjenice da je $\mathcal{S}_l \subseteq \mathcal{S}_{l+1}$ za svaki $l \in \mathbb{N}$. Budući da je f primitivno rekurzivna funkcija postoji $l \in \mathbb{N}$ takav da je $f \in \mathcal{S}_l$. Nadalje, za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$ funkcija g_i je primitivno rekurzivna pa postoji $v_i \in \mathbb{N}$ takav da je $g_i \in \mathcal{S}_{v_i}$. Dakle, $f \in \mathcal{S}_l, g_1 \in \mathcal{S}_{v_1}, \ldots, g_n \in \mathcal{S}_{v_n}$. Neka je

$$w = \max\{l, v_1, ..., v_n\}.$$

Tada je svaki od brojeva $l, v_1, \ldots, v_n$ manji ili jednak od w pa je stoga svaki od skupova $\mathcal{S}_l, \mathcal{S}_{v_1}, ..., \mathcal{S}_{v_n}$ podskup od $\mathcal{S}_w$. Slijedi da su $f, g_1, \ldots g_n \in \mathcal{S}_w$. Prema tome $h \in \mathcal{S}_{w+1}$. Dakle, h je primitivno rekurzivna funkcija.

2) Budući da su f i g primitivno rekurzivne postoje $l_1, l_2 \in \mathbb{N}$ takvi da je $f \in \mathcal{S}_{l_1}$ i $g \in \mathcal{S}_{l_2}$. Neka je

$$w = \max\{l_1, l_2\}.$$

Tada je $\mathcal{S}_{l_1} \subseteq \mathcal{S}_w$ i $\mathcal{S}_{l_2} \subseteq \mathcal{S}_w$ pa su $f, g \in \mathcal{S}_w$. Slijedi da je $h \in \mathcal{S}_{w+1}$. Dakle, h je primitivno rekurzivna funkcija.

□

Propozicija 1.1.9. *Neka je $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Tada je svaka konstantna funkcija $\mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ primitivno rekurzivna.*

Dokaz. Za $a \in \mathbb{N}$ neka je $c_a : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa

$$c_a(x_1, \ldots, x_n) = a.$$

Očito je svaka konstantna funkcija $\mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ oblika c_a za neki $a \in \mathbb{N}$. Dokažimo da je c_a primitivno rekurzivna funkcija za svaki $a \in \mathbb{N}$ indukcijom po a.

Imamo

$$c_0(x_1, \ldots, x_n) = 0 = z(I_1^n(x_1, \ldots, x_n)).$$

Stoga je c_0 dobivena kompozicijom funkcija z i I_1^n. Iz propozicije 1.1.8 1) slijedi da je c_0 primitivno rekurzivna funkcija. Pretpostavimo da je c_a primitivno rekurzivna funkcija za neki $a \in \mathbb{N}$. Vrijedi

$$c_{a+1}(x_1, \ldots, x_n) = a + 1 = s(a) = s(c_a(x_1, \ldots, x_n)).$$

Prema tome c_{a+1} je dobivena kompozicijom funkcija s i c_a. Prema induktivnoj pretpostavci c_a je primitivno rekurzivna funkcija pa iz propozicije 1.1.8 1) slijedi da je c_{a+1} primitivno rekurzivna funkcija. Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Propozicija 1.1.10. *Neka je $b \in \mathbb{N}$ te neka je $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ primitivno rekurzivna funkcija. Definiramo $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sa*

$$h(0) = b$$

$$h(y + 1) = g(h(y), y).$$

Tada je h primitivno rekurzivna funkcija.

Dokaz. Neka je $H : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa $H(y, x) = h(y)$. Imamo

$$H(0, x) = h(0) = b \tag{1.3}$$

$$H(y + 1, x) = h(y + 1) = g(h(y), y) = g(H(y, x), y).$$

Definirajmo $G : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ sa

$$G(a, b, c) = g(a, b).$$

Tada je

$$g(H(y, x), y) = G(H(y, x), y, x)$$

za sve $x, y \in \mathbb{N}$. Stoga je

$$H(y + 1, x) = G(H(y, x), y, x). \tag{1.4}$$

Neka je $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa $F(x) = b$, za svaki $x \in \mathbb{N}$. Funkcija F je primitivno rekurzivna prema propoziciji 1.1.9. Prema (1.3) vrijedi $H(0, x) = F(x)$.

Iz ovoga i (1.4) slijedi da je H dobivena primitivnom rekurzijom od funkcija F i G. Iz definicije funkcije G slijedi da je

$$G(a,b,c) = g\left(I_1^3(a,b,c), I_2^3(a,b,c)\right),$$

tj. G je kompozicija funkcija g, I_2^3, I_2^3 pa je prema propoziciji 1.1.8 G primitivno rekurzivna funkcija. Stoga je i H primitivno rekurzivna funkcija. Iz definicije funkcije H slijedi da je

$$h(y) = H(y, 0)$$

za svaki $y \in \mathbb{N}$, tj.

$$h(y) = H\left(I_1^1(y), z(y)\right).$$

Ovo znači da je h dobivena kompozicijom funkcija H, I_1^1 i z iz čega slijedi da je h primitivno rekurzivna funkcija. □

Neka je $\mathrm{sg} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa

$$\mathrm{sg}(y) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } y > 0 \\ 0, & \text{ako je } y = 0 \end{cases}.$$

Imamo

$$\mathrm{sg}(0) = 0$$

$$\mathrm{sg}(y+1) = 1.$$

Neka je $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ konstantna funkcija s vrijednošću 1 (g je primitivno rekurzivna prema propoziciji 1.1.9). Vrijedi

$$\mathrm{sg}(0) = 0$$

$$\mathrm{sg}(y+1) = g(\mathrm{sg}(y), y).$$

Iz pretpodne propozicije 1.1.10 slijedi da je funkcija sg primitivno rekurzivna.

Neka je $\overline{\mathrm{sg}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa

$$\overline{\mathrm{sg}}(y) = \begin{cases} 0, & \text{ako je } y > 0 \\ 1, & \text{ako je } y = 0 \end{cases}.$$

Imamo

$$\overline{\mathrm{sg}}(0) = 1$$

$$\overline{\mathrm{sg}}(y+1) = 0.$$

Neka je $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ konstantna funkcija s vrijednošću 0 (g je primitivno rekurzivna prema propoziciji 1.1.9). Vrijedi

$$\overline{\mathrm{sg}}(0) = 1$$

$$\overline{\mathrm{sg}}\,(y+1) = g\left(\overline{\mathrm{sg}}\,(y), y\right).$$

Iz prethodne propozicije 1.1.10 slijedi da je funkcija $\overline{\mathrm{sg}}$ primitivno rekurzivna.

Primjer 1.1.11. *Neka je $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa*

$$p(y) = \begin{cases} y-1, & \text{ako je } y > 0 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}.$$

Imamo

$$p(0) = 0$$

$$p(y+1) = y.$$

Neka je $g = I_2^2$. Vrijedi

$$p(0) = 0$$

$$p(y+1) = g(p(y), y).$$

Iz ovoga i propozicije 1.1.10 slijedi da je p primitivno rekurzivna funkcija.

Neka su $x, y \in \mathbb{N}$ te neka je broj $x \dot{-} y$ definiran sa

$$x \dot{-} y = \begin{cases} x-y, & \text{ako je } x \geq y \\ 0, & \text{inače} \end{cases}.$$

Za funkciju $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, (x, y) \mapsto x \dot{-} y$ kažemo da je modificirano oduzimanje.

Propozicija 1.1.12. *Modificirano oduzimanje je primitivno rekurzivna funkcija.*

Dokaz. Neka je $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa

$$h(y, x) = x \dot{-} y.$$

Dokažimo da je h primitivno rekurzivna funkcija. Neka je $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcija iz prethodnog primjera 1.1.11. Neka su $x, y \in \mathbb{N}$. Tvrdimo da je

$$x \dot{-} (y+1) = p(x \dot{-} y). \tag{1.5}$$

1.slučaj: $x \geq y+1$

Tada je

$$x \dot{-} (y+1) = x - (y+1) = x - (y-1).$$

S druge strane iz $x \geq y+1$ slijedi $x \geq y$, štoviše $x - y \geq 1$ pa slijedi da je

$$p(x \dot{-} y) = p(x-y) = (x-y) - 1.$$

Prema tome (1.8) vrijedi.

2.slučaj: $x < y + 1$.

Tada je $x \leq y$ pa slijedi da su obje strane u (1.8) jednake 0. Dakle, (1.8) vrijedi.

Neka su $x, y \in \mathbb{N}$. Iz definicije funkcije h i (1.8) slijedi da je

$$h(0, x) = x = I_1^1(x)$$

$$h(y + 1, x) = x \dot{-} (y + 1) = p(x \dot{-} y) = p(h(y, x)). \tag{1.6}$$

Definirajmo funkciju $g : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ sa $g(a, b, c) = p(a)$. Iz (1.6) slijedi da je

$$h(0, x) = I_1^1(x)$$

$$h(y + 1, x) = g(h(y, x), y, x).$$

Iz ovoga zaključujemo da je funkcija h dobivena primjenom primitivne rekurzije na funkcije I_1^1 i g. Vrijedi

$$g(a, b, c) = p\left(I_1^3(a, b, c)\right)$$

iz čega zaključujemo da je g dobivena kompozicijom funkcija p i I_1^3. Stoga je g primitivno rekurzivna funkcija pa slijedi da je i h primitivno rekurzivna funkcija.

Neka je mo : $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ modificirano oduzimanje. Za sve $x, y \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\mathrm{mo}(x, y) = x \dot{-} y = h(y, x)$$

pa je

$$\mathrm{mo}(x, y) = h\left(I_2^2(x, y), I_1^2(x, y)\right).$$

Dakle, mo je dobivena kompozicijom funkcija h, I_2^2 i I_2^1 pa slijedi da je mo primitivno rekurzivna funkcija. □

Propozicija 1.1.13. *Neka je $k \in \mathbb{N}, k \geq 1$ te neka su $f, g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ primitivno rekurzivne funkcije. Tada su i funkcije $f + g, f \cdot g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ primitivno rekurzivne.*

Dokaz. Neka je $zb : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$,

$$zb(y, x) = y + x.$$

Funkcija zb je primitivno rekurzivna prema primjeru 1.1.6. Za sve $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$(f + g)(x_1, \ldots, x_k) = f(x_1, \ldots, x_k) + g(x_1, \ldots, x_k) = zb(f(x_1, \ldots, x_k), g(x_1, \ldots, x_k)).$$

Prema tome $f + g$ je kompozicija funkcija zb, f i g što povlači da je $f + g$ primitivno rekurzivna funkcija. Koristeći činjenicu da je funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, (y, x) \mapsto y \cdot x$ primitivno rekurzivna (primjer 1.1.7) analogno dobivamo da je $f \cdot g$ primitivno rekurzivna funkcija. □

Primjer 1.1.14. *Neka je $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa*

$$h(x, y) = |x - y| .$$

Uočimo da za sve $x, y \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$|x - y| = (x \dot{-} y) + (y \dot{-} x) .$$

Naime, ako je $x \geq y$, onda je

$$|x - y| = x - y = (x - y) + 0 = (x \dot{-} y) + (y \dot{-} x) .$$

Ako je $x < y$, onda je

$$|x - y| = -(x - y) = y - x = (x \dot{-} y) + (y \dot{-} x) .$$

Neka je $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ modificirano oduzimanje te neka je $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa $g(x, y) = y \dot{-} x$. Imamo

$$g(x, y) = f(y, x) = f\left(I_2^2(x, y), I_1^2(x, y)\right)$$

iz čega slijedi da je g kao kompozicija primitivno rekurzivnih funkcija primitivno rekurzivna funkcija. Vrijedi

$$h(x, y) = f(x, y) + g(x, y) = (f + g)(x + y) ,$$

dakle $h = f + g$, pa iz prethodne propozicije 1.1.13 slijedi da je h primitivno rekurzivna funkcija.

Propozicija 1.1.15. *Neka je $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa $h(y, x) = x^y$. Tada je h primitivno rekurzivna funkcija.*

Dokaz. Neka su $x, y \in \mathbb{N}$. Tada vrijedi

$$h(0, x) = 1$$

$$h(y + 1, x) = x^{y+1} = x^y \cdot x = h(y, x) \cdot x. \tag{1.7}$$

Definirajmo funkciju $g : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ sa

$$g(a, b, c) = a \cdot c.$$

Iz (1.7) slijedi da je

$$h(y + 1, x) = g(h(y, x), y, x) . \tag{1.8}$$

Neka je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f(x) = 1$. Prema propoziciji 1.1.9 f je primitivno rekurzivna. Vrijedi

$$h(0, x) = f(x)$$

pa iz ovoga i iz (1.8) slijedi da je h dobivena primitivnom rekurzijom od funkcija f i g. Preostaje dokazati da je g primitivno rekurzivna funkcija. Naime, tada će iz propozicije 1.1.8 slijediti da je h primitivno rekurzivna. No, očito je

$$g = I_1^3 \cdot I_3^3$$

pa iz propozicije 1.1.13 slijedi da je g primitivno rekurzivna. □

Lema 1.1.16. *Postoji primitivno rekurzivna funkcija $g : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ takva da za sve $x, y, k \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$g(x, y, k) = 0 \Leftrightarrow k + 1 > \frac{x}{y+1}. \tag{1.9}$$

Dokaz. Neka su $x, y, k \in \mathbb{N}$. Tada vrijede sljedeće ekvivalencije

$$k+1 > \frac{x}{y+1} \Leftrightarrow (k+1)(y+1) > x \Leftrightarrow (k+1)(y+1) \dot{-} x > 0 \Leftrightarrow \overline{\mathrm{sg}}((k+1)(y+1) \dot{-} x) = 0.$$

Definirajmo funkciju $g : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ sa

$$g(x, y, k) = \overline{\mathrm{sg}}((k+1)(y+1) \dot{-} x).$$

Tada za ovako definiranu funkciju g vrijedi (1.9). Preostaje još dokazati da je g primitivno rekurzivna. U tu svrhu dovoljno je dokazati da je funkcija $g_1 : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$,

$$g_1(x, y, k) = (k+1)(y+1) \dot{-} x$$

primitivno rekurzivna, naime g je kompozicija funkcija $\overline{\mathrm{sg}}$ i g_1. Neka je $g_2 : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$,

$$g_2(x, y, k) = (k+1) \cdot (y+1).$$

Tada je $g_1(x, y, z) = \mathrm{mo}\left(g_2(x, y, k), I_1^3(x, y, k)\right)$, pri čemu je mo modificirano oduzimanje. Stoga je dovoljno dokazati da je g_2 primitivno rekurzivna funkcija. Imamo

$$g_2 = \left(s \circ I_3^3\right) \cdot \left(s \circ I_2^3\right)$$

pa iz propozicije 1.1.13 slijedi da je g_2 primitivno rekurzivna. Time smo dokazali da je funkcija g primitivno rekurzivna. □

1.2 Rekurzivne funkcije

Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je $g : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ funkcija takva da za sve $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{N}$ postoji $y \in \mathbb{N}$ takav da je
$$g\,(x_1, \dots, x_n, y) = 0.$$
Za $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{N}$ označimo sa
$$\mu y\,(g\,(x_1, \dots, x_k, y) = 0)$$
najmanji broj $y \in \mathbb{N}$ takav da je $g\,(x_1, \dots, x_k, y) = 0$. Neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa
$$f\,(x_1, \dots, x_k) = \mu y\,(g\,(x_1, \dots, x_k, y) = 0)\,.$$
Tada za funkciju f kažemo da je dobivena primjenom μ-operatora na g.

Definiramo niz skupova $\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1, \dots$ induktivno na sljedeći način. Neka je $\mathcal{R}_0$ skup svih inicijalnih funkcija. Pretpostavimo da smo definirali skup $\mathcal{R}_l$ za neki $l \in \mathbb{N}$. Definiramo $\mathcal{R}_{l+1}$ kao skup svih funkcija h koje zadovoljavaju jedan od sljedećih uvjeta:

1. Postoje $n \in \mathbb{N}$ i funkcije $f, g_1, \dots, g_n \in \mathcal{R}_l$ takve da je h dobivena kompozicijom funkcija $f, g_1, \dots, g_n$.

2. Postoje funkcije $f, g \in \mathcal{R}_l$ takve da je h dobivena primitivnom rekurzijom od f i g.

3. Postoji funkcija $g \in \mathcal{R}_l$ takva da je h dobivena primjenom μ-operatora na g.

4. $h \in \mathcal{R}_l$.

Za ovako definiran niz skupova $(\mathcal{R}_l)_{l \in \mathbb{N}}$ očito vrijedi da je $\mathcal{R}_l \subseteq \mathcal{R}_{l+1}$, za svaki $l \in \mathbb{N}$. Za funkciju f kažemo da je **rekurzivna** ako postoji $l \in \mathbb{N}$ takav da je $f \in \mathcal{R}_l$.

Propozicija 1.2.1. *Svaka primitivno rekurzivna funkcija je rekurzivna.*

Dokaz. Dokažimo da je $\mathcal{S}_l \subseteq \mathcal{R}_l$ za svaki $l \in \mathbb{N}$ indukcijom. Očito je $\mathcal{S}_0 = \mathcal{R}_0$, posebno $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{R}_0$. Pretpostavimo da je $\mathcal{S}_l \subseteq \mathcal{R}_l$ za neki $l \in \mathbb{N}$. Tvrdimo da je
$$\mathcal{S}_{l+1} \subseteq \mathcal{R}_{l+1}. \tag{1.10}$$
Neka je $h \in \mathcal{S}_{l+1}$. To znači, po definiciji skupa $\mathcal{S}_{l+1}$, da je h dobivena kompozicijom nekih funkcija iz $\mathcal{S}_l$ ili primitivnom rekurzijom od nekih funkcija iz $\mathcal{S}_l$ ili je $h \in \mathcal{S}_l$. No, $\mathcal{S}_l \subseteq \mathcal{R}_l$ pa zaključujemo da je h dobivena kompozicijom nekih funkcija iz $\mathcal{R}_l$ ili primitivnom rekurzijom nekih funkcija iz $\mathcal{R}_l$ ili $h \in \mathcal{R}_l$. Stoga je $h \in \mathcal{R}_{l+1}$. Time smo dokazali da vrijedi (1.10). Dakle,
$$\mathcal{S}_l \subseteq \mathcal{R}_l$$
za svaki $l \in \mathbb{N}$. Stoga, ako je f primitivno rekurzivna funkcija onda je $f \in \mathcal{S}_l$ za neki $l \in \mathbb{N}$ pa je $f \in \mathcal{R}_l$, što znači da je f rekurzivna. □

Propozicija 1.2.2. *1) Neka je $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka su $h, f, g_1, \ldots, g_n$ funkcije takve da je h dobivena kompozicijom funkcija $f, g_1, \ldots, g_n$. Pretpostavimo da su $f, g_1, \ldots, g_n$ rekurzivne funkcije. Tada je i h rekurzivna funkcija.*

2) Neka su h, f, g funkcije takve da je h dobivena primitivnom rekurzijom od f i g. Pretpostavimo da su f i g rekurzivne funkcije. Tada je i h rekurzivna funkcija.

3) Neka su f i g funkcije takve da je f dobivena primjenom μ-operatora na g. Pretpostavimo da je g rekurzivna funkcija. Tada je i f rekurzivna funkcija.

Dokaz. 1) Ova tvrdnja se dokazuje posve analogno kao tvrdnja 1) u propoziciji 1.1.8.

2) Ova tvrdnja se također dokazuje posve analogno kao tvrdnja 2) u propoziciji 1.1.8.

3) Budući da je g rekurzivna funkcija, postoji $l \in \mathbb{N}$ takav da je $g \in \mathcal{R}_l$. Stoga je $f \in \mathcal{R}_{l+1}$. Dakle, f je rekurzivna funkcija.

□

Propozicija 1.2.3. *Neka je $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa $f(x, y) = \left\lfloor \frac{x}{y+1} \right\rfloor$. Tada je f rekurzivna funkcija.*

Dokaz. Neka su $x, y \in \mathbb{N}$. Neka je $k = f(x, y)$, tj. $k = \left\lfloor \frac{x}{y+1} \right\rfloor$. Tada je

$$k \leq \frac{x}{y+1} < k + 1.$$

Iz ovoga zaključujemo da je k najmanji element od $\mathbb{N}$ takav da je

$$k + 1 > \frac{x}{y+1}.$$

Naime, jasno je da za broj k ovo vrijedi, a s druge strane za niti jedan broj z takav da je $z < k$ ne vrijedi

$$z + 1 > \frac{x}{y+1}$$

jer $z < k$ povlači $z + 1 \leq k$ pa je

$$z + 1 \leq \frac{x}{y+1}.$$

Prema tome

$$k = \mu z \left(z + 1 > \frac{x}{y+1} \right).$$

Dakle,

$$f(x, y) = \mu z \left(z + 1 > \frac{x}{y+1} \right),$$

za sve $x, y \in \mathbb{N}$. Prema lemi 1.1.16 postoji primitivno rekurzivna funkcija $g : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ takva da za sve $x, y \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$g(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow z + 1 > \frac{x}{y+1}.$$

Stoga je

$$f(x, y) = \mu z (g(x, y, z) = 0).$$

Ovo znači da je funkcija f dobivena primjenom μ-operatora na funkciju g. Funkcija g je rekurzivna (jer je primitivno rekurzivna), stoga je prema propoziciji 1.2.2 3) funkcija f rekurzivna. □

Propozicija 1.2.4. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka su $f, g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije. Tada su i funkcije $f + g, f \cdot g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne.*

Dokaz. Ovu tvrdnju dokazujemo analogno kao tvrdnju propozicije 1.1.13. □

Korolar 1.2.5. *Neka su $k, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka su $f_1, \dots, f_n : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije. Tada su i funkcije $f_1 + \dots + f_n$, $f_1 \cdot \dots \cdot f_n : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne.*

Dokaz. Dokažimo indukcijom po n da su $f_1 + \dots + f_n$, $f_1 \cdot \dots \cdot f_n$ rekurzivne funkcije. Za $n = 1$ tvrdnja je jasna. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka su $f_1, \dots, f_{n+1} : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije. Vrijedi

$$f_1 + \dots + f_{n+1} = (f_1 + \dots + f_n) + f_{n+1}$$

pa iz induktivne pretpostavke i propozicije 1.2.4 slijedi da je $f_1 + \dots + f_{n+1}$ rekurzivna funkcija. Analogno dobivamo da je $f_1 \cdot \dots \cdot f_{n+1}$ rekurzivna funkcija. Time je tvrdnja korolara dokazana. □

Definirajmo funkciju ost : $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ na sljedeći način. Neka su $x, y \in \mathbb{N}$. Ako je $y \neq 0$ (tj. $y \geq 1$) onda postoje jedinstveni brojevi $q, r \in \mathbb{N}$ takvi da je

$$x = qy + r \text{ i } r < y.$$

Definiramo $\mathrm{ost}(x, y) = r$ (tj. $\mathrm{ost}(x, y)$ je cjelobrojni ostatak pri dijeljenju broja x sa y). Ako je $y = 0$, definiramo $\mathrm{ost}(x, y) = x$.

Propozicija 1.2.6. *Funkcija* ost *je rekurzivna.*

Dokaz. Neka su $x, y \in \mathbb{N}$, $y \geq 1$. Neka su $q, r \in \mathbb{N}$ takvi da je $r < y$ i

$$x = qy + r. \tag{1.11}$$

Tada je $\operatorname{ost}(x, y) = r$. Iz (1.11) slijedi

$$\frac{x}{y} = q + \frac{r}{y}$$

pa iz činjenice da je $\frac{r}{y} \in [0, 1\rangle$ slijedi da je $\left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor = q$. Sada iz (1.11) slijedi da je $x = \left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor y + r$ pa je

$$r = x \dot{-} \left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor \cdot y. \tag{1.12}$$

Neka je $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija iz propozicije 1.2.3. Tada iz (1.12) slijedi da je

$$\operatorname{ost}(x, y) = x \dot{-} f(x, y \dot{-} 1) \cdot y. \tag{1.13}$$

Uočimo da (1.13) vrijedi i za $y = 0$. Prema tome (1.13) vrijedi za sve $x, y \in \mathbb{N}$. Neka je $\operatorname{mo} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ modificirano oduzimanje te neka je $f_1 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa

$$f_1(x, y) = f(x, y \dot{-} 1) \cdot y.$$

Tada je

$$\operatorname{ost}(x, y) = \operatorname{mo}(x, f_1(x, y)) = \operatorname{mo}\left(I_1^2(x, y), f_1(x, y)\right),$$

dakle ost je kompozicija funkcija mo, I_1^2 i f_1. Ako je f_1 rekurzivna funkcija, onda je i ost rekurzivna kao kompozicija rekurzivnih funkcija (propozicija 1.2.2). Stoga je dovoljno dokazati da je f_1 rekurzivna funkcija. Neka je $f_2 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$,

$$f_2(x, y) = f(x, y \dot{-} 1).$$

Imamo $f_1 = f_2 \cdot I_2^2$, stoga je prema propoziciji 1.2.4 dovoljno dokazati da je f_2 rekurzivna funkcija. Neka je $f_3 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$,

$$f_3(x, y) = y \dot{-} 1.$$

Tada je f_2 kompozicija funkcija f, I_1^2 i f_3. Preostaje stoga dokazati da je f_3 rekurzivna (f je rekurzivna prema propoziciji 1.2.3). Neka je p funkcija iz primjera 1.1.11. Tada je

$$f_3(x, y) = p(y) = p\left(I_2^2(x, y)\right)$$

pa slijedi da je f_3 rekurzivna funkcija kao kompozicija rekurzivnih. Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

1.3 Rekurzivni skupovi

Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je $S \subseteq \mathbb{N}^k$. Kažemo da je S rekurzivan skup u $\mathbb{N}^k$ ako je karakteristična funkcija skupa S u $\mathbb{N}^k$

$$\chi_S : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$$

rekurzivna funkcija.

Primjer 1.3.1. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Tada su $\emptyset$ i $\mathbb{N}^k$ rekurzivni skupovi u $\mathbb{N}^k$. Naime, $\chi_\emptyset, \chi_{\mathbb{N}^k} : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ su konstantne funkcije s vrijednostima 0 i 1 pa su stoga i rekurzivne.*

Primjer 1.3.2. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Tada je svaki jednočlan podskup od $\mathbb{N}^k$ rekurzivan. Dokažimo to. Neka je $a \in \mathbb{N}^k$. Imamo*

$$a = (a_1, \ldots, a_k),$$

gdje su $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{N}$. Neka su $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{N}$. Imamo

$$\chi_{\{a\}}(x_1, \ldots, x_k) = \begin{cases} 1, & (x_1, \ldots, x_k) = (a_1, \ldots, a_k) \\ 0, & \textit{inače} \end{cases} = \begin{cases} 1, & x_1 = a_1, \ldots, x_k = a_k \\ 0, & \textit{inače} \end{cases}$$

$$= \overline{\mathrm{sg}}\,|x_1 - a_1| \cdot \ \ldots \ \cdot \overline{\mathrm{sg}}\,|x_k - a_k|.$$

Za $i \in \{1, \ldots, k\}$ neka je $f_i : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa

$$f_i(x_1, \ldots, x_k) = \overline{sg}\,|x_i - a_i|.$$

Dobili smo da za sve $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\chi_{\{a\}}(x_1, \ldots, x_k) = f_1(x_1, \ldots, x_k) \cdot \ \ldots \ \cdot f_k(x_1, \ldots, x_k).$$

Dakle,

$$\chi_{\{a\}} = f_1 \cdot \ \ldots \ \cdot f_k.$$

Prema korolaru 1.2.5 rekurzivnost funkcija $f_1, \ldots, f_k$ povlači rekurzivnost funkcije $\chi_{\{a\}}$, tj. rekurzivnost skupa $\{a\}$. Dakle, dovoljno je dokazati da su funkcije $f_1, \ldots, f_k$ rekurzivne. Neka je $i \in \{1, \ldots, k\}$. Neka je $f_i' : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa

$$f_i'(x_1, \ldots, x_k) = |x_i - a_i|.$$

Tada je f_i kompozicija funkcija $\overline{\mathrm{sg}}$ i f_i'. Neka je $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa

$$h(x, y) = |x - y|.$$

Funkcija h je rekurzivna prema primjeru 1.1.14. Budući da je f_i' kompozicija funkcija h, I_i^k i konstantne funkcije, imamo da je f_i' rekurzivna funkcija. Stoga je i f_i rekurzivna funkcija. Zaključak: $\{a\}$ je rekurzivan skup.

Propozicija 1.3.3. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka su S i T rekurzivni podskupovi od $\mathbb{N}^k$. Tada su i $S \cup T, S \cap T, S^c$ rekurzivni podskupovi od $\mathbb{N}^k$.*

Dokaz. Neka je $x \in \mathbb{N}^k$. Tada je

$$\chi_{S \cup T}(x) = \operatorname{sg}(\chi_S(x) + \chi_T(x)).$$

Prema tome $\chi_{S \cup T}$ je kompozicija funkcija sg i $\chi_S + \chi_T$. Stoga je $\chi_{S \cup T}$ rekurzivna funkcija, tj. $S \cup T$ je rekurzivan skup. Nadalje,

$$\chi_{S \cap T}(x) = \chi_s(x) \cdot \chi_T(x), \forall x \in \mathbb{N}^k$$

pa je $\chi_{S \cap T}$ rekurzivna funkcija kao produkt dvije rekurzivne funkcije. Dakle, $S \cap T$ je rekurzivan skup. Za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$\chi_{S^c}(x) = \overline{\operatorname{sg}}(\chi_S(x))$$

pa zaključujemo da je χ_{S^c} rekurzivna kao kompozicija rekurzivnih funkcija. Dakle, S^c je rekurzivan skup. □

Tvrdnju sljedećeg korolara dobivamo indukcijom po n, analogno kao tvrdnju korolara 1.2.5.

Korolar 1.3.4. *Neka su $k, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka su $S_1, \dots, S_n$ rekurzivni podskupovi od $\mathbb{N}^k$. Tada su i $S_1 \cup \cdots \cup S_n$ i $S_1 \cap \cdots \cap S_n$ rekurzivni podskupovi od $\mathbb{N}^k$.* □

Korolar 1.3.5. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Tada je svaki konačan podskup od $\mathbb{N}^k$ rekurzivan.*

Dokaz. Neka je S konačan podskup od $\mathbb{N}^k$. Ako je $S = \emptyset$ tvrdnja je jasna. Inače imamo $S = \{a_1, \dots, a_n\}$ gdje su $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}^k$. Stoga je

$$S = \{a_1\} \cup \cdots \cup \{a_n\}$$

pa tvrdnja slijedi iz primjera 1.3.2 i korolara 1.3.4. □

Primjer 1.3.6. *Neka je S skup svih parnih brojeva. Tada je S rekurzivan skup u $\mathbb{N}$. Naime, za svaki $x \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$\chi_S(x) = \overline{\operatorname{sg}}(\operatorname{ost}(x, 2))$$

iz čega zaključujemo da je χ_S, kao kompozicija rekurzivnih funkcija, rekurzivna, dakle S je rekurzivan skup.

Neka je DJ podskup od $\mathbb{N}^2$ definiran sa

$$\mathrm{DJ} = \left\{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x \mid y\right\}.$$

Propozicija 1.3.7. *Skup* DJ *je rekurzivan.*

Dokaz. Neka su $x, y \in \mathbb{N}$ takvi da je $x \geq 1$. Tada vrijedi

$$x \mid y \Leftrightarrow \operatorname{ost}(y, x) = 0. \tag{1.14}$$

Nadalje, vrijedi

$$0 \mid y \Leftrightarrow y = 0$$

te $\operatorname{ost}(y, 0) = y$ iz čega zaključujemo da (1.14) vrijedi i za $x = 0$. Dakle, (1.14) vrijedi za sve $x, y \in \mathbb{N}$ što povlači da je

$$\chi_{\mathrm{DJ}}(x, y) = \overline{\mathrm{sg}}(\operatorname{ost}(x, y)).$$

Prema tome, χ_{DJ} je rekurzivna funkcija i time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Neka je p prost broj te neka je $e_p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa

$$e_p(x) = \begin{cases} \max\left\{k \in \mathbb{N} \mid p^k \mid x\right\}, & x \geq 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Uočimo da za $x \geq 1$ vrijedi da je $e_p(x)$ eksponent kojim p ulazi u rastav od x na proste faktore.

Propozicija 1.3.8. *Neka je p prost broj. Tada je e_p rekurzivna funkcija.*

Dokaz. Neka je $x \in \mathbb{N}, x \geq 1$. Neka je $k = e_p(x)$. Tada $p^k \mid x$, ali $p^{k+1} \nmid x$. Stoga je k element skupa

$$\left\{y \in \mathbb{N} \mid p^{y+1} \nmid x\right\}. \tag{1.15}$$

No, k je ujedno i najmanji element tog skupa: ako je $y \in \mathbb{N}$ takav da je $y < k$, onda je $y + 1 \leq k$ pa iz $p^k \mid x$ slijedi $p^{y+1} \mid x$ što povlači da y nije element skupa (1.15). Uočimo da je $p^{y+1} \nmid x$ ekvivalentno sa

$$\chi_{\mathrm{DJ}}\left(p^{y+1}, x\right) = 0,$$

a ovo je ekvivalentno sa

$$x \cdot \chi_{\mathrm{DJ}}\left(p^{y+1}, x\right) = 0$$

(jer je $x \neq 0$). Stoga je k najmanji element skupa

$$\left\{y \in \mathbb{N} \mid x \cdot \chi_{\mathrm{DJ}}\left(p^{y+1}, x\right) = 0\right\},$$

dakle

$$e_p(x) = \min\left\{y \in \mathbb{N} \mid x \cdot \chi_{\mathrm{DJ}}\left(p^{y+1}, x\right) = 0\right\}.$$

Uočimo da ovo vrijedi i za $x = 0$. Prema tome, za sve $x, y \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$e_p(x) = \mu y\left(x \cdot \chi_{\mathrm{DJ}}\left(p^{y+1}, x\right) = 0\right). \tag{1.16}$$

Neka je $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa

$$g(x, y) = x \cdot \chi_{\mathrm{DJ}}\left(p^{y+1}, x\right).$$

Prema (1.16) vrijedi

$$e_p(x) = \mu y(g(x, y) = 0),$$

što znači da je funkcija e_p dobivena primjenom μ-operatora na funkciju g. Dovoljno je stoga dokazati da je g rekurzivna funkcija. (Iz propozicije 1.2.2 će tada slijediti da je e_p rekurzivna funkcija). U tu svrhu dovoljno je dokazati da je funkcija $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ definirana sa

$$f(x, y) = \chi_{\mathrm{DJ}}\left(p^{y+1}, x\right)$$

rekurzivna (naime, g je produkt funkcija I_1^2 i f). Neka je $f_1 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa

$$f_1(x, y) = p^{y+1}.$$

Funkcija f je kompozicija funkcija χ_{DJ}, f_1 i I_1^2. Preostaje dokazati da je f_1 rekurzivna funkcija. Neka je $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa

$$h(b, a) = a^b.$$

Tada je

$$f_1(x, y) = h(y + 1, p)$$

iz čega slijedi da je f_1 kompozicija funkcija $h, s \circ I_2^2$ i konstantne funkcije $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ s vrijednošću p. Stoga je f_1 rekurzivna funkcija (h je rekurzivna prema propoziciji 1.1.15). Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Propozicija 1.3.9. *Neka su $n, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka su $g_1, \ldots, g_n : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije. Neka su $S_1, \ldots, S_n$ rekurzivni skupovi u $\mathbb{N}^k$ takvi da za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ postoji jedinstveni $i \in \{1, \ldots, n\}$ takav da je $x \in S_i$. Neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa*

$$f(x) = \begin{cases} g_1(x), & x \in S_1 \\ & \vdots \\ g_n(x), & x \in S_n \end{cases}.$$

Tada je f rekurzivna funkcija.

Dokaz. Tvrdimo da je

$$f(x) = g_1(x) \cdot \chi_{S_1}(x) + \cdots + g_n(x) \cdot \chi_{S_n}(x) \tag{1.17}$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Naime, ako je $x \in \mathbb{N}^k$ onda postoji jedinstveni $i \in \{1, \ldots, n\}$ takav da je $x \in S_i$. Tada za svaki $j \in \{1, \ldots, n\}$, $j \neq i$ vrijedi da $x \notin S_j$ pa je

$$\chi_{S_j}(x) = 0.$$

Imamo $\chi_{S_i}(x) = 1$ pa je

$$g_1(x) \cdot \chi_{S_1}(x) + \cdots + g_n(x) \cdot \chi_{S_n}(x) = g_i(x).$$

S druge strane iz definicije funkcije f je jasno da je

$$f(x) = g_i(x).$$

Prema tome, (1.17) vrijedi. Iz toga zaključujemo da je

$$f = g_1 \cdot \chi_{S_1} + \cdots + g_n \cdot \chi_{S_n}$$

pa iz korolara 1.2.5 slijedi da je f rekurzivna funkcija. □

Poglavlje 2

Rekurzivne racionalne funkcije

Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ funkcija. Kažemo da je f rekurzivna funkcija ako postoje rekurzivne funkcije $a, b, c : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je $b(x) \neq 0$ i

$$f(x) = (-1)^{c(x)} \frac{a(x)}{b(x)}$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$.

Primjer 2.0.10. *Neka je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ funkcija definirana sa*

$$f(n) = \frac{1}{n+1}$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$. Tada je

$$f(n) = (-1)^{z(n)} \frac{c_1(n)}{s(n)}$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$ pri čemu je $c_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ konstantna funkcija s vrijednošću 1. Prema tome, f je rekurzivna funkcija. Nadalje, neka je $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{Q}$ funkcija definirana sa

$$g(x, y) = \frac{x^2}{x + y + 1}.$$

Tada je

$$g(x, y) = (-1)^{c(x,y)} \frac{a(x, y)}{b(x, y)}$$

pri čemu su $a, b, c : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcije definirane sa

$$a(x, y) = x^2, b(x, y) = x + y + 1, c(x, y) = 0.$$

Funkcija a je rekurzivna kao produkt rekurzivnih funkcija, b kao zbroj rekurzivnih funkcija, a c je rekurzivna jer je konstantna funkcija. Prema tome, g je rekurzivna funkcija.

Uočimo sljedeće: ako je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija, onda je f rekurzivna i kao funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$. Naime, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$f(x) = (-1)^{c_0(x)} \frac{f(x)}{c_1(x)}$$

pri čemu su $c_0, c_1 : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ konstantne funkcije s vrijednostima 0 i 1.

Lema 2.0.11. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka su $f, g, u, v : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije. Tada postoje rekurzivne funkcije $w, h : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je*

$$(-1)^{w(x)} h(x) = (-1)^{u(x)} f(x) + (-1)^{v(x)} g(x).$$

Dokaz. Neka je P skup svih parnih brojeva u $\mathbb{N}$, a N skup svih neparnih brojeva u $\mathbb{N}$. Neka je

$$U_P = \left\{x \in \mathbb{N}^k \mid u(x) \in P\right\},$$

$$U_N = \left\{x \in \mathbb{N}^k \mid u(x) \in N\right\},$$

$$V_P = \left\{x \in \mathbb{N}^k \mid v(x) \in P\right\},$$

$$V_N = \left\{x \in \mathbb{N}^k \mid v(x) \in N\right\}.$$

Skup P je rekurzivan prema primjeru 1.3.6. Iz propozicije 1.3.3 sada slijedi da je N rekurzivan skup kao komplement rekurzivnog skupa ($N = P^c$). Za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$\chi_{U_P}(x) = \chi_P(u(x)).$$

Ovo znači da je χ_{U_P} kompozicija funkcija χ_P i u iz čega slijedi da je χ_{U_P} rekurzivna funkcija. Dakle, U_P je rekurzivan skup. Nadalje, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$\chi_{U_N}(x) = \chi_N(u(x)),$$

$$\chi_{V_P}(x) = \chi_P(v(x)),$$

$$\chi_{V_N}(x) = \chi_N(v(x))$$

iz čega slijedi da su U_N, V_P i V_N rekurzivni skupovi. Neka je

$$S = \left\{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) \geq g(x)\right\} \text{ i } T = \left\{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) < g(x)\right\}.$$

Za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$\chi_T(x) = \mathrm{sg}(g(x) \dot{-} f(x)).$$

Dakle,

$$\chi_T(x) = \mathrm{sg}(h(x)) \tag{2.1}$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ pri čemu je $h : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa

$$h(x) = g(x) \dot{-} f(x).$$

Neka je mo : $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ modificirano oduzimanje. Tada je

$$h(x) = \mathrm{mo}(g(x), f(x))$$

iz čega zaključujemo da je h rekurzivna kao kompozicija rekurzivnih funkcija. Funkcija χ_T je prema (2.1) kompozicija funkcija sg i h pa je stoga rekurzivna. Dakle, T je rekurzivan skup. Vrijedi $S = T^c$ pa je i S rekurzivan skup. Neka je $x \in \mathbb{N}^k$. Tada je

$$(-1)^{u(x)} f(x) + (-1)^{v(x)} g(x) = \begin{cases} (-1)^0 (f(x) + g(x)), & \text{ako je } x \in U_P \cap V_P \\ (-1)^1 (f(x) + g(x)), & \text{ako je } x \in U_N \cap V_N \\ (-1)^0 (f(x) \dot{-} g(x)), & \text{ako je } x \in U_P \cap V_N \cap S \\ (-1)^1 (g(x) \dot{-} f(x)), & \text{ako je } x \in U_P \cap V_N \cap T \\ (-1)^0 (g(x) \dot{-} f(x)), & \text{ako je } x \in U_N \cap V_P \cap T \\ (-1)^1 (f(x) \dot{-} g(x)), & \text{ako je } x \in U_N \cap V_P \cap S \end{cases}.$$

Definirajmo funkcije $w, h : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ sa

$$w(x) = \begin{cases} 0, & \text{ako je } x \in U_P \cap V_P \\ 1, & \text{ako je } x \in U_N \cap V_N \\ 0, & \text{ako je } x \in U_P \cap V_N \cap S \\ 1, & \text{ako je } x \in U_P \cap V_N \cap T \\ 0, & \text{ako je } x \in U_N \cap V_P \cap T \\ 1, & \text{ako je } x \in U_N \cap V_P \cap S \end{cases},$$

$$h(x) = \begin{cases} f(x) + g(x), & \text{ako je } x \in U_P \cap V_P \\ f(x) + g(x), & \text{ako je } x \in U_N \cap V_N \\ f(x) \dot{-} g(x), & \text{ako je } x \in U_P \cap V_N \cap S \\ g(x) \dot{-} f(x), & \text{ako je } x \in U_P \cap V_N \cap T \\ g(x) \dot{-} f(x), & \text{ako je } x \in U_N \cap V_P \cap T \\ f(x) \dot{-} g(x), & \text{ako je } x \in U_N \cap V_P \cap S \end{cases}.$$

Iz propozicije 1.3.9 slijedi da su w i h rekurzivne funkcije, a očito je da je

$$(-1)^{w(x)} h(x) = (-1)^{u(x)} f(x) + (-1)^{v(x)} g(x).$$

□

Teorem 2.0.12. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka su $f, g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivne funkcije. Tada su i funkcije $-f, |f|, f+g, f \cdot g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivne. Nadalje, ako je $f(x) \neq 0$ za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ onda je i funkcija $\frac{1}{f} : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivna.*

Dokaz. Budući da su f i g rekurzivne postoje rekurzivne funkcije $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je $b_1(x) \neq 0, b_2(x) \neq 0$,

$$f(x) = (-1)^{c_1(x)} \frac{a_1(x)}{b_1(x)} \text{ i } g(x) = (-1)^{c_2(x)} \frac{a_2(x)}{b_2(x)}$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Neka je $x \in \mathbb{N}^k$. Tada je

$$(-f)(x) = -f(x) = -(-1)^{c_1(x)} \frac{a_1(x)}{b_1(x)} = (-1)^{c_1(x)+1} \frac{a_1(x)}{b_1(x)}$$

iz čega je jasno da je $-f$ rekurzivna funkcija. Nadalje,

$$|f|(x) = |f(x)| = \left| (-1)^{c_1(x)} \frac{a_1(x)}{b_1(x)} \right| = \frac{a_1(x)}{b_1(x)}.$$

Prema tome,

$$|f|(x) = (-1)^{c_0(x)} \frac{a_1(x)}{b_1(x)}$$

pri čemu je $c_0 : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ konstantna funkcija s vrijednošću 0. Stoga je $|f|$ rekurzivna funkcija. Vrijedi

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (-1)^{c_1(x)} \frac{a_1(x)}{b_1(x)} \cdot (-1)^{c_2(x)} \frac{a_2(x)}{b_2(x)} = (-1)^{c_1(x)+c_2(x)} \frac{a_1(x) \cdot a_2(x)}{b_1(x) \cdot b_2(x)}$$

$$= (-1)^{(c_1+c_2)(x)} \frac{(a_1 \cdot a_2)(x)}{(b_1 \cdot b_2)(x)}$$

pa zaključujemo da je $f \cdot g$ rekurzivna funkcija. Pretpostavimo da je $f(x) \neq 0$ za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Tada je $a_1(x) \neq 0$ za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Imamo

$$(\frac{1}{f})(x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{(-1)^{c_1(x)} \frac{a_1(x)}{b_1(x)}} = \frac{1}{(-1)^{c_1(x)}} \cdot \frac{b_1(x)}{a_1(x)} = \frac{(-1)^{2c_1(x)}}{(-1)^{c_1(x)}} \cdot \frac{b_1(x)}{a_1(x)} = (-1)^{c_1(x)} \cdot \frac{b_1(x)}{a_1(x)}.$$

Prema tome, $\frac{1}{f}$ je rekurzivna funkcija. Dokažimo sada da je $f+g$ rekurzivna funkcija. Neka je $x \in \mathbb{N}^k$. Imamo

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x) = (-1)^{c_1(x)} \frac{a_1(x)}{b_1(x)} + (-1)^{c_2(x)} \frac{a_2(x)}{b_2(x)} = \frac{(-1)^{c_1(x)} a_1(x) b_2(x) + (-1)^{c_2(x)} a_2(x) b_1(x)}{b_1(x) b_2(x)}.$$

Iz leme 2.0.11 slijedi da postoje rekurzivne funkcije $w, h : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je

$$(-1)^{w(x)}h(x) = (-1)^{c_1(x)}a_1(x)b_2(x) + (-1)^{c_2(x)}a_2(x)b_1(x)$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Stoga je

$$(f+g)(x) = \frac{(-1)^{w(x)}h(x)}{b_1(x)b_2(x)} = (-1)^{w(x)}\frac{h(x)}{(b_1b_2)(x)}$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Prema tome $f + g$ je rekurzivna funkcija. □

Propozicija 2.0.13. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivna funkcija. Neka je $S_1 = \left\{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) = 0\right\}$, $S_2 = \left\{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) > 0\right\}$ i $S_3 = \left\{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) \geq 0\right\}$. Tada su S_1, S_2 i S_3 rekurzivni skupovi.*

Dokaz. Postoje rekurzivne funkcije $a, b, c : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je $b(x) \neq 0$ i

$$f(x) = (-1)^{c(x)}\frac{a(x)}{b(x)}$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Neka je $x \in \mathbb{N}^k$. Tada je

$$x \in S_1 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow (-1)^{c(x)}\frac{a(x)}{b(x)} = 0 \Leftrightarrow a(x) = 0.$$

Stoga je

$$\chi_{S_1}(x) = \overline{\mathrm{sg}}(a(x))$$

pa je χ_{S_1} rekurzivna funkcija kao kompozicija rekurzivnih funkcija. Dakle, S_1 je rekurzivan skup. Nadalje, vrijedi

$$x \in S_2 \Leftrightarrow f(x) > 0 \Leftrightarrow (-1)^{c(x)}\frac{a(x)}{b(x)} > 0 \Leftrightarrow (-1)^{c(x)}a(x) > 0 \Leftrightarrow a(x) > 0 \text{ i } c(x) \text{ paran broj.}$$

Prema tome,

$$\chi_{S_2}(x) = \mathrm{sg}(a(x)) \cdot \chi_{2\mathbb{N}}(c(x)).$$

Stoga je

$$\chi_{S_2} = (\mathrm{sg} \circ a) \cdot (\chi_{2\mathbb{N}} \circ c)$$

iz čega slijedi da je χ_{S_2} rekurzivna funkcija, tj. S_2 je rekurzivan skup. Vrijedi

$$S_3 = S_1 \cup S_2$$

pa je prema propoziciji 1.3.3 skup S_3 rekurzivan. □

Korolar 2.0.14. *Neka je* $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ *te neka su* $g, h : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ *rekurzivne funkcije. Neka je* $S_1 = \left\{x \in \mathbb{N}^k \mid g(x) = h(x)\right\}$, $S_2 = \left\{x \in \mathbb{N}^k \mid g(x) < h(x)\right\}$ *i* $S_3 = \left\{x \in \mathbb{N}^k \mid g(x) \leq h(x)\right\}$. *Tada su* S_1, S_2 *i* S_3 *rekurzivni skupovi.*

Dokaz. Neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ funkcija definirana sa

$$f(x) = h(x) - g(x).$$

Uočimo da je

$$f = h + (-g).$$

Iz teorema 2.0.12 slijedi da je f rekurzivna funkcija. Vrijedi

$$S_1 = \left\{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) = 0\right\}, S_2 = \left\{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) > 0\right\} \text{ i } S_3 = \left\{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) \geq 0\right\}$$

pa iz propozicije 2.0.13 slijedi da su S_1, S_2, S_3 rekurzivni skupovi. □

Neka su $k, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$. Za $i \in \{1, \ldots, n\}$ neka je $f_i : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ funkcija definirana tako da je, za $x \in \mathbb{N}^k$, $f_i(x)$ broj koji se nalazi na i-tom mjestu u n-torci $f(x)$. Uočimo da za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x)).$$

Za $f_1, \ldots, f_n$ kažemo da su komponentne funkcije od f.

Neka su $k, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ te neka su $f_1, \ldots, f_n : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ komponentne funkcije od f. Za f kažemo da je rekurzivna funkcija ako su $f_1, \ldots, f_n$ rekurzivne funkcije.

Primjer 2.0.15. *Neka je* $f : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}^2$ *funkcija definirana sa*

$$f(x, y, z) = (x, y).$$

Tada su I_1^3 *i* I_2^3 *komponentne funkcije od* f *pa zaključujemo da je* f *rekurzivna. Općenitije, neka je* $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ *te neka je* $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}^k$ *funkcija definirana sa*

$$f(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}) = (x_1, \ldots, x_k).$$

Tada su $I_1^{k+1}, \ldots, I_k^{k+1}$ *komponentne funkcije od* f *pa je* f *rekurzivna funkcija.*

Propozicija 2.0.16. *Neka su* $n, k, l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ *te neka su* $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ *i* $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}^l$ *rekurzivne funkcije. Tada je* $f \circ g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^l$ *rekurzivna funkcija.*

Dokaz. Neka su $f_1, \dots, f_n$ komponentne funkcije od f. Tada za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (f_1(g(x)), \dots, f_l(g(x))).$$

Iz ovoga zaključujemo da su $f_1 \circ g, \dots, f_l \circ g$ komponentne funkcije od $f \circ g$. Preostaje dokazati da je $f_i \circ g$ rekurzivna funkcija za svaki $i \in \{1, \dots, l\}$. Neka je $i \in \{1, \dots, l\}$. Neka su $g_1, \dots, g_n : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ komponentne funkcije od g. Za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$(f_i \circ g)(x) = f_i(g(x)) = f_i(g_1(x), \dots, g_n(x)).$$

Ovo znači da je $f_i \circ g$ kompozicija funkcija $f_i, g_1, \dots, g_n$ (koje su rekurzivne jer su f i g rekurzivne). Stoga je $f_i \circ g$ rekurzivna. Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Propozicija 2.0.17. *Neka su $n, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka su $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ i $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{Q}$ rekurzivne funkcije. Tada je i $f \circ g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivna funkcija.*

Dokaz. Postoje rekurzivne funkcije $a, b, c : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ takve da je $b(x) \neq 0$ i

$$f(x) = (-1)^{c(x)} \frac{a(x)}{b(x)}$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^n$. Tada za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (-1)^{c(g(x))} \frac{a(g(x))}{b(g(x))} = (-1)^{(c \circ g)(x)} \frac{(a \circ g)(x)}{(b \circ g)(x)}.$$

Funkcije $a \circ g, b \circ g$ i $c \circ g$ su rekurzivne prema propoziciji 2.0.16 pa je $f \circ g$ rekurzivna po definiciji. □

Poglavlje 3

Rekurzivne realne funkcije

3.1 Rekurzivne aproksimacije

Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ funkcija. Kažemo da je f rekurzivna funkcija ako postoji rekurzivna funkcija $F : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ takva da za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ i svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$|f(x) - F(x, i)| < 2^{-i}.$$

Za funkciju F kažemo da je rekurzivna aproksimacija od f.

Primjer 3.1.1. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivna funkcija. Tada je f rekurzivna i kao funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$. Naime, neka je $F : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ funkcija definirana sa*

$$F(x_1, \ldots, x_k, i) = f(x_1, \ldots, x_k).$$

Tada je $F = f \circ \varphi$ gdje je $\varphi : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}^k$ funkcija definirana sa

$$\varphi(x_1, \ldots, x_k, i) = (x_1, \ldots, x_k).$$

Funkcija φ je rekurzivna prema primjeru 2.0.15 pa je F rekurzivna prema propoziciji 2.0.17. Za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ i svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$|f(x) - F(x, i)| = 0$$

pa je

$$|f(x) - F(x, i)| < 2^{-i}.$$

Prema tome f je rekurzivna kao funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$.

Lema 3.1.2. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ te neka su $F : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ i $M : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije takve da je*

$$|f(x) - F(x,i)| < M(x) \cdot 2^{-i} \tag{3.1}$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ i svaki $i \in \mathbb{N}$. Tada je f rekurzivna funkcija.

Dokaz. Dokažimo prvo indukcijom da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $n \leq 2^n$. Za $n = 0$ i $n = 1$ tvrdnja je jasna. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \geq 1$. Iz $1 \leq n$ slijedi

$$n + 1 \leq 2n \leq 2 \cdot 2^n = 2^{n+1},$$

dakle

$$n + 1 \leq 2^{n+1}.$$

Neka su $x \in \mathbb{N}^k$ i $i \in \mathbb{N}$. Vrijedi

$$M(x) \leq 2^{M(X)}$$

pa je

$$\frac{M(x)}{2^{M(x)}} \leq 1.$$

Koristeći ovo i (3.1) dobivamo

$$|f(x) - F(x, i + M(x))| < M(x) \cdot 2^{-(i+M(x))} = M(x) \cdot 2^{-i} \cdot 2^{-M(x)} = 2^{-i} \cdot \frac{M(x)}{2^{M(x)}} \leq 2^{-i}.$$

Prema tome

$$|f(x) - F(x, i + M(x))| < 2^{-i}.$$

Definirajmo $H : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ sa

$$H(x,i) = F(x, i + M(x)),$$

$x \in \mathbb{N}^k, i \in \mathbb{N}$. Tada je

$$|f(x) - H(x,i)| < 2^{-i}$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ i svaki $i \in \mathbb{N}$. Preostaje još stoga dokazati da je H rekurzivna funkcija. Definirajmo $\Phi : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}^{k+1}$ sa

$$\Phi(x,i) = (x, i + M(x)), x \in \mathbb{N}^k, i \in \mathbb{N}.$$

Tada je

$$H(x,i) = F(\Phi(x,i)),$$

tj.

$$H = F \circ \Phi.$$

Neka su $\Phi_1, \dots, \Phi_{k+1} : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ komponentne funkcije od Φ. Neka su $x_1, \dots, x_k, i \in \mathbb{N}$. Tada je

$$\Phi_j(x_1, \dots, x_j, i) = x_j,$$

za $j \in \{1, \dots, k\}$ i

$$\Phi_{k+1}(x_1, \dots, x_k, i) = i + M(x_1, \dots, x_k).$$

Stoga za svaki $j \in \{1, \dots, k\}$ vrijedi

$$\Phi_j = I_j^{k+1}$$

pa je Φ_j rekurzivna funkcija. Funkcija Φ_{k+1} je zbroj funkcija I_{k+1}^{k+1} i B, gdje je $B : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ definirana sa

$$B(x_1, \dots, x_k, i) = M(x_1, \dots, x_k).$$

B je rekurzivna jer je kompozicija funkcija $M, I_1^{k+1}, \dots, I_k^{k+1}$. Stoga je i Φ_{k+1} rekurzivna funkcija. Dakle Φ je rekurzivna funkcija pa iz $H = F \circ \Phi$ i propozicije 2.0.17 slijedi da je H rekurzivna funkcija. Time je tvrdnja leme dokazana. □

Lema 3.1.3. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ rekurzivna funkcija.*

1) Postoji rekurzivna funkcija $M : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takva da je

$$|f(x)| < M(x), \forall x \in \mathbb{N}^k.$$

2) Ako je $F : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ rekurzivna aproksimacija od f onda postoji rekurzivna funkcija $M : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takva da je

$$|F(x, i)| < M(x), \forall x \in \mathbb{N}^k, \forall i \in \mathbb{N}.$$

Dokaz. 1) Neka je $F : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ rekurzivna aproksimacija od f. Općenito, ako su $a, b \in \mathbb{R}$ onda je

$$|a| - |b| \leq |a - b|. \tag{3.2}$$

Naime, vrijedi

$$|a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b|$$

iz čega slijedi (3.2). Za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ i svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$|f(x) - F(x, i)| < 2^{-i}$$

pa posebno za $i = 0$ dobivamo

$$|f(x) - F(x, 0)| < 1.$$

Prema (3.2) vrijedi

$$|f(x)| - |F(x,0)| \leq |f(x) - F(x,0)|$$

pa slijedi

$$|f(x)| - |F(x,0)| < 1.$$

Stoga je

$$|f(x)| < 1 + |F(x,0)|\,. \tag{3.3}$$

Definirajmo $G : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ sa

$$G(x) = 1 + |F(x,0)|\,.$$

Neka je $h : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ funkcija definirana sa

$$h(x) = F(x,0).$$

Vrijedi $h = F \circ \Phi$ gdje je $\Phi : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^{k+1}$ funkcija definirana sa

$$\Phi(x) = (x,0).$$

Prvih k komponentnih funkcija od Φ su projekcije, a zadnja komponentna funkcija od F je konstantna funkcija (nul-funkcija). Stoga je Φ rekurzivna funkcija pa iz propozicije 2.0.17 slijedi da je h rekurzivna funkcija. Vrijedi

$$G(x) = 1 + |h(x)|$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ iz čega zaključujemo da je G zbroj funkcija $|h|$ i konstantne funkcije s vrijednošću 1. Stoga je G prema teoremu 2.0.12 rekurzivna funkcija. Iz (3.3) slijedi

$$|f(x)| < G(x).$$

Budući da je G rekurzivna funkcija postoje rekurzivne funkcije $a, b, c : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je

$$G(x) = (-1)^{c(x)} \frac{a(x)}{b(x)}, \forall x \in \mathbb{N}^k.$$

Stoga je

$$|f(x)| < a(x), \forall x \in \mathbb{N}^k.$$

Dakle, možemo uzeti $M = a$ i tvrdnja 1) je dokazana.

2) Neka je $F : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ rekurzivna aproksimacija od f. Prema 1) postoji rekurzivna funkcija $M : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takva da je

$$|f(x)| < M(x), \forall x \in \mathbb{N}^k.$$

Iz (3.2) slijedi da za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ i svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$|F(x,i)| - |f(x)| \leq |F(x,i) - f(x)| = |f(x) - F(x,i)| < 2^{-i} \leq 1.$$

Dakle,

$$|F(x,i)| - |f(x)| < 1$$

pa je

$$|F(x,i)| < 1 + |f(x)| < 1 + M(x).$$

Funkcija $M' : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ definirana sa

$$M'(x) = M(x) + 1$$

je očito rekurzivna i vrijedi

$$|F(x,i)| < M'(x), \forall x \in \mathbb{N}^k, \forall i \in \mathbb{N}.$$

□

Teorem 3.1.4. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka su $f, g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ rekurzivne funkcije. Tada su i funkcije $-f, |f|, f+g, f \cdot g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ rekurzivne.*

Dokaz. Neka je F rekurzivna aproksimacija od f te G rekurzivna aproksimacija od g. Neka su $x \in \mathbb{N}^k$ i $i \in \mathbb{N}$. Tada je

$$|(-f)(x) - (-F)(x,i)| = |-f(x) + F(x,i)| = |f(x) - F(x,i)| < 2^{-i}.$$

Dakle,

$$|(-f)(x) - (-F)(x,i)| < 2^{-i}$$

pa iz činjenice da je $-F : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ rekurzivna funkcija (teorem 2.0.12) slijedi da je $-F$ rekurzivna aproksimacija od $-f$. Dakle, $-f$ je rekurzivna funkcija. Neka su $u, v \in \mathbb{R}$. U dokazu leme 3.1.3 smo vidjeli da vrijedi

$$|u| - |v| \leq |u - v|$$

te također i

$$|v| - |u| \leq |v - u|.$$

Iz druge nejednakosti zaključujemo da je

$$-(|u| - |v|) \leq |u - v|,$$

a iz ovoga i prve nejednakosti zaključujemo da je

$$||u| - |v|| \leq |u - v|. \tag{3.4}$$

Neka su $x \in \mathbb{N}^k$ i $i \in \mathbb{N}$. Tada koristeći (3.4) dobivamo

$$||f(x)| - |F(x,i)|| \leq |f(x) - F(x,i)| < 2^{-i},$$

tj.

$$||f|(x) - |F|(x,i)| < 2^{-i}.$$

Stoga je $|F|$ rekurzivna aproksimacija od $|f|$, dakle $|f|$ je rekurzivna funkcija.

Neka su $x \in \mathbb{N}^k$ i $i \in \mathbb{N}$. Imamo

$$|f(x) + g(x) - (F(x,i) + G(x,i))| = |f(x) - F(x,i) + g(x) - G(x,i)| \leq$$

$$|f(x) - F(x,i)| + |g(x) - G(x,i)| < 2^{-i} + 2^{-i} = 2 \cdot 2^{-i}.$$

Dakle,

$$|(f+g)(x) - (F+G)(x,i)| < M(x) \cdot 2^{-i},$$

za sve $x \in \mathbb{N}^k$ i svaki $i \in \mathbb{N}$ pri čemu je $M : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ konstantna funkcija s vrijednošću 2. Iz leme 3.1.2 i činjenice da je $F + G$ rekurzivna funkcija (teorem 2.0.12) slijedi da je $f + g$ rekurzivna funkcija.

Prema lemi 3.1.3 1) postoji rekurzivna funkcija $N : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takva da je

$$|g(x)| < N(x)$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Nadalje, prema tvrdnji 2) iste leme postoji rekurzivna funkcija $M : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takva da je

$$|F(x,i)| < M(x)$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ i svaki $i \in \mathbb{N}$. Neka su $x \in \mathbb{N}^k$ i $i \in \mathbb{N}$. Imamo

$$|f(x)g(x) - F(x,i)G(x,i)| = |f(x)g(x) - F(x,i)g(x) + F(x,i)g(x) - F(x,i)G(x,i)| =$$

$$|(f(x) - F(x,i))g(x) + F(x,i)(g(x) - G(x,i))| \leq |f(x) - F(x,i)|\,|g(x)| + |F(x,i)|\,|g(x) - G(x,i)|$$

$$< 2^{-i} \cdot N(x) + M(x) \cdot 2^{-i} = (N(x) + M(x)) \cdot 2^{-i},$$

dakle

$$|(f \cdot g)(x) - (F \cdot G)(x,i)| < (N(x) + M(x)) \cdot 2^{-i}.$$

Iz leme 3.1.2 slijedi da je $f \cdot g$ rekurzivna funkcija. □

Lema 3.1.5. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ te neka je $F : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ rekurzivna aproksimacija od f.*

1) Ako je $x \in \mathbb{N}^k$ takav da je $f(x) \neq 0$, onda postoji $i_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $|F(x,i_0)| > 3 \cdot 2^{-i_0}$.

2) Ako su $x \in \mathbb{N}^k$ i $i_0 \in \mathbb{N}$ takvi da je $|F(x, i_0)| > 3 \cdot 2^{-i_0}$, onda je $|f(x)| > 2 \cdot 2^{-i_0}$ i $|F(x, i)| > 2^{-i_0}$, za svaki $i \geq i_0$.

Dokaz. 1) Neka je $x \in \mathbb{N}^k$ takav da je $f(x) \neq 0$. Tada je $|f(x)| > 0$ pa je $\frac{|f(x)|}{4} > 0$ iz čega slijedi da postoji $i_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\frac{|f(x)|}{4} > 2^{-i_0}.$$

Iz ovoga slijedi da je $|f(x)| > 4 \cdot 2^{-i_0}$ pa je

$$|f(x)| - 2^{-i_0} > 3 \cdot 2^{-i_0}. \tag{3.5}$$

S druge strane vrijedi

$$|f(x)| - |F(x, i_0)| \leq |f(x) - F(x, i_0)| < 2^{-i_0}$$

pa je

$$|f(x)| - 2^{-i_0} < |F(x, i_0)|.$$

Iz ovoga i (3.5) slijedi

$$|F(x, i_0)| > 3 \cdot 2^{-i_0}.$$

2) Pretpostavimo da su $x \in \mathbb{N}^k$ i $i \in \mathbb{N}$ takvi da je

$$|F(x, i_0)| > 3 \cdot 2^{-i_0}.$$

Tada je

$$|F(x, i_0)| - 2^{-i_0} > 2 \cdot 2^{-i_0}. \tag{3.6}$$

S druge strane

$$|F(x, i_0)| - |f(x)| \leq |F(x, i_0) - f(x)| < 2^{-i_0}$$

pa je

$$|F(x, i_0)| - 2^{-i_0} < |f(x)|.$$

Iz ovoga i (3.6) slijedi da je

$$|f(x)| > 2 \cdot 2^{-i_0}. \tag{3.7}$$

Neka je $i \geq i_0$. Imamo

$$|f(x)| - |F(x, i)| \leq |f(x) - F(x, i)| < 2^{-i} \leq 2^{-i_0}$$

pa je

$$|f(x)| - 2^{-i_0} < |F(x, i)|.$$

Iz (3.7) slijedi

$$|f(x)| - 2^{-i_0} > 2^{-i_0}$$

pa zaključujemo da je

$$|F(x,i)| > 2^{-i_0}.$$

□

Lema 3.1.6. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je S rekurzivan skup u $\mathbb{N}^{k+1}$ takav da za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ postoji $y \in \mathbb{N}$ takav da je $(x,y) \in S$. Tada postoji rekurzivna funkcija $\varphi : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takva da je $(x,\varphi(x)) \in S$ za svaki $x \in \mathbb{N}^k$.*

Dokaz. Neka su $x \in \mathbb{N}^k$ i $y \in \mathbb{N}$. Tada je

$$(x,y) \in S \Leftrightarrow \chi_S(x,y) = 1 \Leftrightarrow \overline{\mathrm{sg}}(\chi_S(x,y)) = 0,$$

dakle

$$(x,y) \in S \Leftrightarrow g(x,y) = 0, \tag{3.8}$$

pri čemu je $g : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa

$$g(x,y) = \overline{\mathrm{sg}}(\chi_S(x,y)).$$

Očito je g rekurzivna funkcija. Iz (3.8) zaključujemo da za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ postoji $y \in \mathbb{N}$ takav da je $g(x,y) = 0$. Neka je $\varphi : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ funkcija dobivena primjenom μ-operatora na g, dakle

$$\varphi(x) = \mu y(g(x,y) = 0).$$

Tada je φ rekurzivna funkcija i za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$g(x,\varphi(x)) = 0,$$

tj. prema (3.8) $(x,\varphi(x)) \in S$. □

Lema 3.1.7. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ rekurzivna funkcija takva da je $f(x) \neq 0$ za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Neka je $F : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ rekurzivna aproksimacija od f. Tada postoji rekurzivna funkcija $\varphi : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takva da je*

$$|F(x,\varphi(x))| > 3 \cdot 2^{-\varphi(x)}$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$.

Dokaz. Neka je

$$S = \left\{(x_1, \ldots, x_k, i) \in \mathbb{N}^{k+1} \mid |F(x_1, \ldots, x_k, i)| > 3 \cdot 2^{-i}\right\}.$$

Neka su $g, h : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ funkcije definirane sa

$$g(x_1, \ldots, x_k, i) = 3 \cdot 2^{-i} \text{ i } h(x_1, \ldots, x_k, i) = |F(x_1, \ldots, x_k, i)|.$$

Imamo $h = |F|$ pa iz teorema 2.0.12 slijedi da je h rekurzivna funkcija. Funkciju g možemo zapisati kao

$$g(x_1, \ldots, x_k, i) = (-1)^{c(x_1,\ldots,x_k,i)} \frac{a(x_1, \ldots, x_k, i)}{b(x_1, \ldots, x_k, i)}$$

gdje su $c, a : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ konstantne funkcije s vrijednostima 0 i 3 te $b : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa

$$b(x_1, \ldots, x_k, i) = 2^i.$$

Neka je $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa

$$h(y, x) = y^x.$$

Tada je

$$b(x_1, \ldots, x_k, i) = h(i, 2)$$

iz čega zaključujemo da je b kompozicija funkcija h, I_{k+1}^{k+1} i konstantne funkcije $\mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ s vrijednošću 2. Stoga je b rekurzivna. Očito su a i c rekurzivne pa zaključujemo da je i g rekurzivna funkcija. Vrijedi

$$S = \left\{z \in \mathbb{N}^{k+1} \mid g(z) < h(z)\right\}.$$

Iz korolara 2.0.14 slijedi da je S rekurzivan skup. Prema lemi 3.1.5 1) za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je

$$|F(x, i)| > 3 \cdot 2^{-i}.$$

To znači da za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $(x, i) \in S$. Iz leme 3.1.6 slijedi da postoji rekurzivna funkcija $\varphi : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takva da je

$$(x, \varphi(x)) \in S$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Dakle, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$|F(x, \varphi(x))| > 3 \cdot 2^{-\varphi(x)}.$$

Time je tvrdnja leme dokazana. $\square$

Teorem 3.1.8. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ rekurzivna funkcija takva da je $f(x) \neq 0$ za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Tada je $\frac{1}{f} : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ rekurzivna funkcija.*

Dokaz. Neka je F rekurzivna aproksimacija od f. Prema lemi 3.1.7 postoji rekurzivna funkcija $\varphi : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takva da je

$$|F(x, \varphi(x))| > 3 \cdot 2^{-\varphi(x)} \tag{3.9}$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Neka je $x \in \mathbb{N}^k$. Iz (3.9) i leme 3.1.5 2) slijedi da je

$$|f(x)| > 2 \cdot 2^{-\varphi(x)}, \tag{3.10}$$

$|F(x, i)| > 2^{-\varphi(x)}$ za svaki $i \geq \varphi(x)$. Posebno, za svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$|F(x, i + \varphi(x))| > 2^{-\varphi(x)}. \tag{3.11}$$

Iz (3.10) i (3.11) slijedi da je

$$\frac{1}{|f(x)|} < \frac{1}{2} \cdot 2^{\varphi(x)}$$

$$\frac{1}{|F(x, i + \varphi(x))|} < 2^{\varphi(x)}$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ i svaki $i \in \mathbb{N}$. Neka su $x \in \mathbb{N}^k$ i $i \in \mathbb{N}$. Imamo

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{F(x, i + \varphi(x))}\right| = \left|\frac{F(x, i + \varphi(x)) - f(x)}{f(x)F(x, i + \varphi(x))}\right| = \frac{|F(x, i + \varphi(x)) - f(x)|}{|f(x)F(x, i + \varphi(x))|} =$$

$$\frac{1}{|f(x)|} \cdot \frac{1}{|F(x, i + \varphi(x))|} |f(x) - F(x, i + \varphi(x))| < \frac{1}{2} \cdot 2^{\varphi(x)} \cdot 2^{\varphi(x)} \cdot 2^{-(i+\varphi(x))} < 2^{\varphi(x)} \cdot 2^{-i}.$$

Dakle,

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{F(x, i + \varphi(x))}\right| < 2^{\varphi(x)} \cdot 2^{-i}. \tag{3.12}$$

Neka je $G : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ funkcija definirana sa

$$G(x, i) = F(x, i + \varphi(x)).$$

Neka je $H : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}^{k+1}$ funkcija definirana sa

$$H(x, i) = (x, i + \varphi(x)).$$

Neka su $H_1, \ldots, H_{k+1} : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ komponentne funkcije od H. Imamo

$$H_1 = I_1^{k+1}, \ldots, H_k = I_k^{k+1}$$

pa je očito da su $H_1, \dots, H_k$ rekurzivne funkcije. Vrijedi

$$H_{k+1}(x_1, \dots, x_k, i) = i + \varphi(x_1, \dots, x_k).$$

Stoga je H_{k+1} zbroj funkcije I^{k+1}_{k+1} i funkcije koja je kompozicija od $\varphi, I^{k+1}_1, \dots, I^{k+1}_k$. Prema tome H_{k+1} je rekurzivna funkcija. Zaključujemo da je H rekurzivna funkcija. Iz definicija funkcija G i H slijedi da je

$$G = F \circ H$$

pa je prema propoziciji 2.0.17 funkcija G rekurzivna. Neka je $M : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa

$$M(x) = 2^{\varphi(x)}.$$

Vrijedi

$$M(x) = \omega\left(\varphi(x), 2\right)$$

pri čemu je $\omega : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa

$$\omega(a, b) = b^a.$$

Funkcija ω je rekurzivna prema propoziciji 1.1.15, a budući da je M kompozicija funkcija ω, φ i konstantne funkcije $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ s vrijednošću 2, imamo da je M rekurzivna funkcija. Iz (3.12) slijedi da je

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{G(x, i)}\right| < M(x) \cdot 2^{-i},$$

tj.

$$\left|\frac{1}{f}(x) - \frac{1}{G}(x, i)\right| < M(x) \cdot 2^{-i},$$

za sve $x \in \mathbb{N}^k, i \in \mathbb{N}$. Prema teoremu 2.0.12 funkcija $\frac{1}{G} : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ je rekurzivna pa iz leme 3.1.2 slijedi da je $\frac{1}{f}$ rekurzivna funkcija. □

3.2 Rekurzivni brojevi

Neka je $x \in \mathbb{R}$. Tada za svaki $\epsilon > 0$ postoji $q \in \mathbb{Q}$ takav da je

$$|x - q| < \epsilon \text{ i } q > x.$$

Naime, ako je $\epsilon > 0$ onda je $x < x + \epsilon$ pa postoji $q \in \mathbb{Q}$ takav da je

$$x < q < x + \epsilon$$

iz čega slijedi $0 < q - x < \epsilon$ pa je

$$|x - q| < \epsilon.$$

Posebno, za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoji racionalan broj q_k takav da je

$$|x - q_k| < 2^{-k}.$$

Dakle, postoji funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ takva da je

$$|x - f(k)| < 2^{-k}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Neka je $x \in \mathbb{R}$. Za x kažemo da je rekurzivan broj ako postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ takva da je

$$|x - f(k)| < 2^{-k},$$

za svaki $k \in \mathbb{N}$.

Primjer 3.2.1. *Neka je $q \in \mathbb{Q}$. Tada je q rekurzivan broj. Naime, imamo*

$$q = (-1)^u \frac{v}{w} \text{ gdje su } u, v, w \in \mathbb{N}, w \neq 0.$$

Neka je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ funkcija definirana sa

$$f(k) = q$$

za svaki $k \in \mathbb{N}$. Funkcija f je rekurzivna jer je

$$f(k) = (-1)^{c(k)} \frac{a(k)}{b(k)}$$

za svaki $k \in \mathbb{N}$ gdje su $a, b, c : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcije definirane sa

$$c(k) = u, a(k) = v, b(k) = w.$$

Za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$|q - f(k)| = |q - q| = 0 < 2^{-k}$$

iz čega slijedi da je q rekurzivan broj.

Propozicija 3.2.2. *Neka je r rekurzivan broj. Neka je $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa $f(x) = r$ za svaki $x \in \mathbb{N}^n$. Tada je f rekurzivna funkcija.*

Dokaz. Budući da je r rekurzivan broj postoji rekurzivna funkcija $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ takva da je

$$|r - g(k)| < 2^{-k}$$

za svaki $k \in \mathbb{N}$. Definirajmo funkciju $F : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{Q}$ sa

$$F(x, k) = g(k), x \in \mathbb{N}^n, k \in \mathbb{N}.$$

Vrijedi

$$|f(x) - F(x,k)| = |r - g(k)| < 2^{-k},$$

tj.

$$|f(x) - F(x,k)| < 2^{-k}$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ i svaki $k \in \mathbb{N}$. Vrijedi,

$$F = g \circ I_{n+1}^{n+1}$$

pa iz propozicije 2.0.17 slijedi da je F rekurzivna funkcija. Zaključak: f je rekurzivna funkcija. □

Propozicija 3.2.3. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ rekurzivna funkcija. Tada je $f(x)$ rekurzivan broj za svaki $x \in \mathbb{N}^k$.*

Dokaz. Budući da je f rekurzivna postoji rekurzivna funkcija $F : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ takva da je

$$|f(x) - F(x,i)| < 2^{-i}$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ i za svaki $i \in \mathbb{N}$. Neka je $x \in \mathbb{N}^k$. Definirajmo funkciju $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ sa

$$g(i) = F(x,i)$$

za svaki $i \in \mathbb{N}$. Tada je

$$|f(x) - g(i)| < 2^{-i} \tag{3.13}$$

za svaki $i \in \mathbb{N}$. Neka je $G : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^{k+1}$ funkcija definirana sa

$$G(i) = (x,i).$$

Neka su $G_1, \ldots, G_{k+1}$ komponentne funkcije od G. Imamo da su $G_1, \ldots, G_k$ konstantne funkcije te da je $G_{k+1} = I_1^1$. Stoga je G rekurzivna funkcija. Očito je

$$g = F \circ G$$

pa iz propozicije 2.0.17 slijedi da je g rekurzivna funkcija. Iz (3.13) sada slijedi da je $f(x)$ rekurzivan broj. □

Korolar 3.2.4. *Neka su α i β rekurzivni brojevi. Tada su i $-\alpha, |\alpha|, \alpha + \beta, \alpha \cdot \beta$ rekurzivni brojevi. Ako je $\alpha \neq 0$ onda je i $\frac{1}{\alpha}$ rekurzivan broj.*

Dokaz. Neka su $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ funkcije definirane sa

$$f(x) = \alpha \text{ i } g(x) = \beta$$

za svaki $x \in \mathbb{N}$. Prema propoziciji 3.2.2 funkcije f i g su rekurzivne. Tada su prema teoremu 3.1.4 rekurzivne i funkcije

$$-f, |f|, f + g, f \cdot g.$$

Odaberemo bilo koji $x \in \mathbb{N}$ (npr. $x = 0$). Prema propoziciji 3.2.3 brojevi

$$(-f)(x), |f|(x), (f + g)(x), (f \cdot g)(x)$$

su rekurzivni. Dakle,

$$-\alpha, |\alpha|, \alpha + \beta \text{ i } \alpha \cdot \beta$$

su rekurzivni brojevi. Pretpostavimo da je $\alpha \neq 0$. Tada je $f(x) \neq 0$ za svaki $x \in \mathbb{N}$ pa je prema teoremu 3.1.8 $\frac{1}{f}$ rekurzivna funkcija. Prema propoziciji 3.2.3 broj $\frac{1}{f}(x)$ je rekurzivan za svaki $x \in \mathbb{N}$. Stoga je $\frac{1}{\alpha}$ rekurzivan broj. □

3.3 Funkcija $\sqrt{f}$

Lema 3.3.1. *Neka su x i y nenegativni realni brojevi te neka je $\epsilon > 0$ takav da je*

$$\left|x^2 - y^2\right| < \epsilon^2.$$

Tada je $|x - y| < \epsilon$.

Dokaz. Imamo

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$

pa slijedi da je

$$|x - y| \cdot |x + y| < \epsilon^2.$$

Iz ovoga slijedi da je

$$|x - y| < \epsilon \text{ ili } |x + y| < \epsilon$$

(naime, u suprotnom bi vrijedilo $|x - y| \geq \epsilon$ i $|x + y| \geq \epsilon$ što bi povlačilo $|x - y| |x + y| \geq \epsilon^2$). Ako je $|x - y| < \epsilon$ onda smo gotovi, a ako je $|x + y| < \epsilon$ onda je

$$|x - y| = |x + (-y)| \leq |x| + |-y| = |x| + |y| = x + y = |x + y| < \epsilon,$$

dakle opet imamo $|x - y| < \epsilon$. □

Lema 3.3.2. *Neka je $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$ te neka je $\epsilon > 0$. Tada postoji pozitivan racionalan broj r takav da je $\left|x - r^2\right| < \epsilon$.*

Dokaz. Sigurno postoji racionalan broj r takav da je $r > \sqrt{x}$ i

$$\left|\sqrt{x} - r\right| < \min\left\{\frac{\epsilon}{2\sqrt{x} + 1}, 1\right\}. \tag{3.14}$$

Iz $r > \sqrt{x}$ slijedi $r > 0$. Nadalje, iz (3.14) slijedi

$$\left|\sqrt{x} - r\right| < 1,$$

pa zbog

$$\left|\sqrt{x} - r\right| = r - \sqrt{x}$$

imamo $r - \sqrt{x} < 1$, tj. $r < \sqrt{x} + 1$. Stoga je

$$\sqrt{x} + r < 2\sqrt{x} + 1$$

pa je

$$\frac{\sqrt{x} + r}{2\sqrt{x} + 1} < 1. \tag{3.15}$$

Iz (3.14) slijedi

$$\left|\sqrt{x} - r\right| < \frac{\epsilon}{2\sqrt{x} + 1}$$

pa množenjem sa $\sqrt{x} + r$ te korištenjem činjenice da je $\sqrt{x} + r = \left|\sqrt{x} + r\right|$ dobivamo

$$\left|\sqrt{x} - r\right|\left|\sqrt{x} + r\right| < \epsilon\frac{\sqrt{x} + r}{2\sqrt{x} + 1}$$

pa iz (3.15) slijedi

$$\left|x - r^2\right| < \epsilon.$$

Time je lema dokazana. □

Lema 3.3.3. *Neka su $k, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je $S \subseteq \mathbb{N}^{k+n}$ rekurzivan skup takav da za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ postoje $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{N}$ takvi da je $(x, y_1, \ldots, y_n) \in S$. Tada postoje rekurzivne funkcije $\varphi_1, \ldots, \varphi_n : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je $(x, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)) \in S$ za svaki $x \in \mathbb{N}^k$.*

Dokaz. Odaberimo n međusobno različitih prostih brojeva $p_1, \ldots, p_n$. Neka je

$$T = \left\{(x_1, \ldots, x_k, i) \in \mathbb{N}^{k+1} \mid (x_1, \ldots, x_k, e_{p_1}(i), \ldots, e_{p_n}(i)) \in S\right\}.$$

Neka su $x_1, \dots, x_k, i \in \mathbb{N}$. Imamo

$$\chi_T(x_1, \dots, x_k, i) = \begin{cases} 1, & (x_1, \dots, x_k, i) \in T \\ 0, & (x_1, \dots, x_k, i) \notin T \end{cases} = \begin{cases} 1, & \left(x_1, \dots, x_k, e_{p_1}(i), \dots, e_{p_n}(i)\right) \in S \\ 0, & \left(x_1, \dots, x_k, e_{p_1}(i), \dots, e_{p_n}(i)\right) \notin S \end{cases}$$

$$= \chi_S\left(x_1, \dots, x_k, e_{p_1}(i), \dots, e_{p_n}(i)\right).$$

Dakle,

$$\chi_T(x_1, \dots, x_k, i) = \chi_S\left(x_1, \dots, x_k, e_{p_1}(i), \dots, e_{p_n}(i)\right). \tag{3.16}$$

Definiramo funkciju $G : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}^{k+n}$ sa

$$G(x_1, \dots, x_k, i) = \left(x_1, \dots, x_k, e_{p_1}(i), \dots, e_{p_n}(i)\right).$$

Neka su $G_1, \dots, G_{k+n} : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ komponentne funkcije od G. Tada je

$$G_1 = I_1^{k+1}, \dots, G_k = I_k^{k+1}, G_{k+1} = e_{p_1} \circ I_{k+1}^{k+1}, \dots, G_{k+n} = e_{p_n} \circ I_{k+1}^{k+1}.$$

Prema tome funkcije $G_1, \dots, G_{k+n}$ su rekurzivne pa zaključujemo da je G rekurzivna funkcija. Iz definicije funkcije G i (3.16) slijedi da je

$$\chi_T = \chi_S \circ G.$$

Prema propoziciji 2.0.16 vrijedi da je funkcija χ_T rekurzivna. Prema tome T je rekurzivan skup. Neka je $x \in \mathbb{N}^k$. Tada postoje $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{N}$ takvi da je

$$(x, y_1, \dots, y_n) \in S.$$

Definirajmo $i = p_1^{y_1} \cdot \ \dots \ \cdot p_n^{y_n}$. Uočimo da je

$$e_{p_1}(i) = y_1, \dots, e_{p_n}(i) = y_n.$$

Stoga je

$$\left(x, e_{p_1}(i), \dots, e_{p_n}(i)\right) = (x, y_1, \dots, y_n)$$

pa je

$$\left(x, e_{p_1}(i), \dots, e_{p_n}(i)\right) \in S.$$

Prema tome

$$(x, i) \in T.$$

Dakle, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $(x, i) \in T$. Iz leme 3.1.6 slijedi da postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takva da je

$$(x, f(x)) \in T$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Stoga za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ po definiciji skupa T vrijedi

$$\Big(x, e_{p_1}(f(x)), \ldots, e_{p_n}(f(x))\Big) \in S. \tag{3.17}$$

Za $i \in \{1, \ldots, n\}$ definirajmo $\varphi_i : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ sa

$$\varphi_i(x) = e_{p_i}(f(x))$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Očito je za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$ funkcija φ_i rekurzivna. Nadalje, prema (3.17) vrijedi

$$(x, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)) \in S$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. □

Propozicija 3.3.4. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivna funkcija takva da je $f(x) \geq 0$ za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Neka je $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa $g(x) = \sqrt{f(x)}$ za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Tada je g rekurzivna funkcija.*

Dokaz. Neka je $x \in \mathbb{N}^k$ te neka je $i \in \mathbb{N}$. Premi lemi 3.3.2 postoji pozitivan racionalan broj r takav da je

$$\left|f(x) - r^2\right| < (2^{-i})^2.$$

Imamo

$$r = \frac{y_1}{y_2 + 1}, \text{ gdje su } y_1, y_2 \in \mathbb{N}.$$

Dakle, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ i svaki $i \in \mathbb{N}$ postoje $y_1, y_2 \in \mathbb{N}$ takvi da je

$$\left|f(x) - \left(\frac{y_1}{y_2 + 1}\right)^2\right| < (2^{-i})^2.$$

Definiramo skup

$$S = \left\{(x_1, \ldots, x_k, i, y_1, y_2) \in \mathbb{N}^{k+3} \mid \left|f(x_1, \ldots, x_k) - \left(\frac{y_1}{y_2 + 1}\right)^2\right| < (2^{-i})^2\right\}.$$

Za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ i svaki $i \in \mathbb{N}$ postoje $y_1, y_2 \in \mathbb{N}$ takvi da je

$$(x, i, y_1, y_2) \in S.$$

Dokažimo da je S rekurzivan skup. U tu svrhu definirajmo funkcije $q, h : \mathbb{N}^{k+3} \to \mathbb{Q}$ sa

$$q(x_1, \ldots, x_k, i, y_1, y_2) = f(x_1, \ldots, x_k) - \left(\frac{y_1}{y_2 + 1}\right)^2, \; h(x_1, \ldots, x_k, i, y_1, y_2) = (2^{-i})^2.$$

Funkcija q je rekurzivna jer je razlika funkcije

$$\mathbb{N}^{k+3} \to \mathbb{Q}, (x_1, \dots, x_k, i, y_1, y_2) \mapsto f(x_1, \dots, x_k)$$

(koja je rekurzivna jer je kompozicija rekurzivne funkcije $\mathbb{N}^{k+3} \to \mathbb{N}^k, (x_1, \dots, x_k, i, y_1, y_2) \mapsto (x_1, \dots, x_k)$ i funkcije f) i funkcije

$$\mathbb{N}^{k+3} \to \mathbb{Q}, (x_1, \dots, x_k, i, y_1, y_2) \mapsto \left(\frac{y_1}{y_2 + 1}\right)^2$$

(koja je rekurzivna prema definiciji rekurzivne funkcije u $\mathbb{Q}$ i teoremu 2.0.12). Stoga je q rekurzivna funkcija. Imamo

$$h(x_1, \dots, x_k, i, y_1, y_2) = \frac{1}{4^i}.$$

Stoga je h rekurzivna. Vrijedi

$$S = \left\{(x_1, \dots, x_k, i, y_1, y_2) \in \mathbb{N}^{k+3} \mid |q|(x_1, \dots, x_k, i, y_1, y_2) < h(x_1, \dots, x_k, i, y_1, y_2)\right\}.$$

Iz teorema 2.0.12 i korolara 2.0.14 slijedi da je S rekurzivan skup. Budući da za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ i svaki $i \in \mathbb{N}$ postoje $y_1, y_2 \in \mathbb{N}$ takvi da je

$$(x, i, y_1, y_2) \in S,$$

lema 3.3.3 povlači da postoje rekurzivne funkcije $\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ takve da je

$$(x, i, \varphi_1(x, i), \varphi_2(x, i)) \in S$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ i svaki $i \in \mathbb{N}$. Iz ovoga slijedi da je

$$\left| f(x) - \left(\frac{\varphi_1(x, i)}{\varphi_2(x, i) + 1}\right)^2 \right| < \left(2^{-i}\right)^2 \tag{3.18}$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ i svaki $i \in \mathbb{N}$. Definirajmo funkciju $G : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ sa

$$G(x, i) = \frac{\varphi_1(x, i)}{\varphi_2(x, i) + 1}, x \in \mathbb{N}^k, i \in \mathbb{N}.$$

Očito je G rekurzivna funkcija. Za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ i $i \in \mathbb{N}$ iz (3.18) i $f(x) = (g(x))^2$ slijedi

$$\left|(g(x))^2 - (G(x, i))^2\right| < (2^{-i})^2$$

pa iz leme 3.3.1 slijedi

$$|g(x) - G(x, i)| < 2^{-i}.$$

Ovo znači da je G rekurzivna aproksimacija od g. Dakle, g je rekurzivna funkcija. □

Napomena 3.3.5. *Neka je* $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ *te neka je* $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ *rekurzivna funkcija takva da je* $f(x) \geq 0$ *za svaki* $x \in \mathbb{N}^k$. *Tada postoji rekurzivna aproksimacija* $F : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ *od* f *takva da je*

$$F(x, i) \geq 0$$

za sve $x \in \mathbb{N}^k$ *i* $i \in \mathbb{N}$.

Naime, ako je $G : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ *rekurzivna aproksimacija od* f, *onda za* $F = |G|$ *vrijedi da je* F *rekurzivna funkcija te za sve* $x \in \mathbb{N}^k$ *i* $i \in \mathbb{N}$ *imamo*

$$|f(x) - F(x, i)| = ||f(x)| - F(x, i)| = ||f(x)| - |G(x, i)|| \leq |f(x) - G(x, i)| < 2^{-i},$$

tj.

$$|f(x) - F(x, i)| < 2^{-i}.$$

Prema tome, F *je rekurzivna aproksimacija od* f. *Očito je*

$$F(x, i) \geq 0$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ *i svaki* $i \in \mathbb{N}$.

Lema 3.3.6. *Neka je* $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, *neka je* $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ *te neka je* $G : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{R}$ *rekurzivna funkcija takva da je*

$$|g(x) - G(x, i)| < 2^{-i}$$

za sve $x \in \mathbb{N}^k, i \in \mathbb{N}$. *Tada je* g *rekurzivna funkcija.*

Dokaz. Budući da je G rekurzivna, postoji rekurzivna funkcija $H : \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{Q}$ takva da vrijedi

$$|G(x, i) - H(x, i, n)| < 2^{-n},$$

za sve $x \in \mathbb{N}^k, i, n \in \mathbb{N}$. Neka su $x \in \mathbb{N}^k$ i $i \in \mathbb{N}$. Imamo

$$|g(x) - G(x, i)| < 2^{-i} \text{ i } |G(x, i) - H(x, i, i)| < 2^{-i}$$

pa slijedi

$$|g(x) - H(x, i, i)| = |g(x) - G(x, i) + G(x, i) - H(x, i, i)| \leq$$
$$|g(x) - G(x, i)| + |G(x, i) - H(x, i, i)| < 2^{-i} + 2^{-i} = 2 \cdot 2^{-i}.$$

Dakle,

$$|g(x) - H(x, i, i)| < 2 \cdot 2^{-i}. \tag{3.19}$$

Definirajmo funkciju $K : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ sa

$$K(x, i) = H(x, i, i), x \in \mathbb{N}^k, i \in \mathbb{N}.$$

Neka je $L : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}^{k+2}$ funkcija definirana sa

$$L(x_1, \dots, x_k, i) = (x_1, \dots, x_k, i, i).$$

Očito je da je

$$K = H \circ L$$

te da je L rekurzivna funkcija. Iz propozicije 2.0.17 slijedi da je K rekurzivna funkcija. Iz (3.19) slijedi

$$|g(x) - K(x, i)| < 2 \cdot 2^{-i},$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ i svaki $i \in \mathbb{N}$. Prema lemi 3.1.2 funkcija g je rekurzivna. □

Lema 3.3.7. *Neka su $n, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka su $g : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}^k$ i $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ rekurzivne funkcije. Tada je $f \circ g : \mathbb{N}^n \to \mathbb{R}$ rekurzivna funkcija.*

Dokaz. Neka je $F : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ rekurzivna aproksimacija od f. Tada za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ i svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$|f(x) - F(x, i)| < 2^{-i}.$$

Iz ovoga slijedi da za svaki $x \in \mathbb{N}^n$ i svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$|f(g(x)) - F(g(x), i)| < 2^{-i}. \tag{3.20}$$

Neka je $H : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{Q}$ funkcija definirana sa

$$H(x, i) = F(g(x), i), x \in \mathbb{N}^n, i \in \mathbb{N}.$$

Neka su $g_1, \dots, g_k : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ komponentne funkcije od g. Tada za sve $x_1, \dots, x_n, i \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$H(x_1, \dots, x_n, i) = F(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_k(x_1, \dots, x_n), i). \tag{3.21}$$

Definirajmo funkciju $G : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}^{k+1}$ sa

$$G(x_1, \dots, x_n, i) = (g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_k(x_1, \dots, x_n), i), \ x_1, \dots, x_n, i \in \mathbb{N}.$$

Tvrdimo da je G rekurzivna funkcija. Neka su $G_1, \dots, G_{k+1}$ komponentne funkcije od G. Za sve $x_1, \dots, x_n, i \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$G_{k+1}(x_1, \dots, x_n, i) = i$$

pa zaključujemo da je

$$G_{k+1} = I_{n+1}^{n+1},$$

posebno G_{k+1} je rekurzivna funkcija. Neka je $j \in \{1, \dots, k\}$. Za sve $x_1, \dots, x_n, i \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$G_j(x_1, \dots, x_n, i) = g_j(x_1, \dots, x_n).$$

Stoga je G_j kompozicija funkcija $g_j, I_1^{n+1}, \dots, I_n^{n+1}$. Slijedi da je G_j rekurzivna funkcija. Dakle, $G_1, \dots, G_{k+1}$ su rekurzivne funkcije pa je G rekurzivna funkcija. Iz definicije funkcije G i (3.21) slijedi

$$H = F \circ G.$$

Iz propozicije 2.0.17 slijedi da je H rekurzivna funkcija. Iz definicije funkcije H i (3.20) slijedi da je

$$|(f \circ g)(x) - H(x, i)| < 2^{-i},$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^n$ i svaki $i \in \mathbb{N}$. Prema tome $f \circ g$ je rekurzivna funkcija. □

Teorem 3.3.8. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ rekurzivna funkcija takva da je $f(x) \geq 0$ za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Neka je $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa $g(x) = \sqrt{f(x)}$. Tada je g rekurzivna funkcija.*

Dokaz. Prema napomeni 3.3.5 postoji rekurzivna aproksimacija $F : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ od f takva da je

$$F(x, i) \geq 0$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ i svaki $i \in \mathbb{N}$. Definirajmo funkciju $G : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{R}$ sa

$$G(x, i) = \sqrt{F(x, i)}, x \in \mathbb{N}^k, i \in \mathbb{N}.$$

Prema propoziciji 3.3.4 funkcija G je rekurzivna. Neka su $x \in \mathbb{N}^k$ i $i \in \mathbb{N}$. Imamo

$$|f(x) - F(x, 2i)| < 2^{-2i},$$

tj.

$$\left|(g(x))^2 - (G(x, 2i))^2\right| < (2^{-i})^2.$$

Iz leme 3.3.1 slijedi da je

$$|g(x) - G(x, 2i)| < 2^{-i}. \tag{3.22}$$

Neka je $G^{'} : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa

$$G^{'}(x_1, \dots, x_k, i) = G(x_1, \dots, x_k, 2i).$$

Tada je

$$G^{'} = G \circ H, \tag{3.23}$$

gdje je $H : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}^{k+1}$ funkcija definirana sa

$$H(x_1, \dots, x_k, i) = (x_1, \dots, x_k, 2i).$$

Očito je H rekurzivna funkcija. Iz (3.23) i leme 3.3.7 slijedi da je G' rekurzivna funkcija. Iz (3.22) i definicije funkcije G' slijedi da je

$$\left|g(x) - G'(x, i)\right| < 2^{-i}$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ i svaki $i \in \mathbb{N}$. Iz leme 3.3.6 slijedi da je g rekurzivna funkcija. $\square$

3.4 Relacija $f(x, y) > 0$

Primjer 3.4.1. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ rekurzivna funkcija koja ima sljedeće svojstvo: $\forall x_1, \dots, x_k \in \mathbb{N}$ postoji $y \in \mathbb{N}$ takav da je*

$$f(x_1, \dots, x_k, y) > 0.$$

Tada postoji rekurzivna funkcija $\varphi : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takva da je

$$f(x_1, \dots, x_k, \varphi(x_1, \dots, x_k)) > 0$$

za sve $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{N}$.

Naime, neka je

$$S = \left\{(x_1, \dots, x_k, y) \in \mathbb{N}^{k+1} \mid f(x_1, \dots, x_k, y) > 0\right\}.$$

Prema propoziciji 2.0.13 skup S je rekurzivan. Prema pretpostavci za sve $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{N}$ postoji $y \in \mathbb{N}$ takav da je

$$(x_1, \dots, x_k, y) \in S.$$

Prema lemi 3.1.6 postoji rekurzivna funkcija $\varphi : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takva da je

$$(x_1, \dots, x_k, \varphi(x_1, \dots, x_k)) \in S$$

za sve $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{N}$. Stoga je

$$f(x_1, \dots, x_k, \varphi(x_1, \dots, x_k)) > 0$$

za sve $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{N}$.

Primjer 3.4.2. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka su $f, g : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ rekurzivne funkcije sa sljedećim svojstvom: za sve $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{N}$ postoji $y \in \mathbb{N}$ takav da je*

$$f(x_1, \dots, x_k, y) > g(x_1, \dots, x_k, y).$$

Tada postoji rekurzivna funkcija $\varphi : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takva da je

$$f(x_1, \dots, x_k, \varphi(x_1, \dots, x_k)) > g(x_1, \dots, x_k, \varphi(x_1, \dots, x_k))$$

za sve $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{N}$.

Naime, funkcija $h : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ definirana sa

$$h = f - g$$

je rekurzivna (teorem 2.0.12) i za sve $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{N}$ postoji $y \in \mathbb{N}$ takav da je

$$h(x_1, \dots, x_k, y) > 0$$

pa prema prethodnom primjeru postoji rekurzivna funkcija $\varphi : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takva da je

$$h(x_1, \dots, x_k, \varphi(x_1, \dots, x_k)) > 0$$

za sve $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{N}$ i to je tražena funkcija.

Lema 3.4.3. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ te neka je $F : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ rekurzivna aproksimacija od f.*

1) *Neka je $x \in \mathbb{N}^k$ takav da je $f(x) > 0$. Tada postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $F(x, i) > 3 \cdot 2^{-i}$.*

2) *Neka su $x \in \mathbb{N}^k$ i $i \in \mathbb{N}$ takvi da je*

$$F(x, i) > 3 \cdot 2^{-i}. \tag{3.24}$$

Tada je $f(x) > 0$.

Dokaz. 1) Imamo $f(x) \neq 0$ pa prema lemi 3.1.5 postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je

$$|F(x, i)| > 3 \cdot 2^{-i}.$$

Pretpostavimo da je $|F(x, i)| = -F(x, i)$. Tada je

$$-F(x, i) > 3 \cdot 2^{-i}$$

što zajedno sa $f(x) > 0$ daje

$$f(x) - F(x, i) > 3 \cdot 2^{-i}$$

pa je stoga

$$|f(x) - F(x,i)| > 3 \cdot 2^{-i}.$$

Ovo je nemoguće jer je $|f(x) - F(x,i)| < 2^{-i}$. Dakle, ne vrijedi

$$|F(x,i)| = -F(x,i)$$

pa je onda

$$|F(x,i)| = F(x,i).$$

Prema tome

$$F(x,i) > 3 \cdot 2^{-i}.$$

2) Pretpostavimo suprotno. Tada je $f(x) \leq 0$ pa je $-f(x) \geq 0$. Iz ovoga i (3.24) slijedi

$$F(x,i) - f(x) > 3 \cdot 2^{-i}.$$

Stoga je

$$|F(x,i) - f(x)| > 3 \cdot 2^{-i},$$

tj.

$$|f(x) - F(x,i)| > 3 \cdot 2^{-i}.$$

Kontradikcija. Prema tome,

$$f(x) > 0.$$

□

Teorem 3.4.4. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{R}$ rekurzivna funkcija. Pretpostavimo da za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ postoji $y \in \mathbb{N}$ takav da je $f(x,y) > 0$. Tada postoji rekurzivna funkcija $\varphi : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takva da je $f(x, \varphi(x)) > 0$ za svaki $x \in \mathbb{N}^k$.*

Dokaz. Neka je $F : \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{Q}$ rekurzivna aproksimacija od f. Neka je $x \in \mathbb{N}^k$. Tada postoji $y \in \mathbb{N}$ takav da je $f(x,y) > 0$ pa prema lemi 3.4.3 1) postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je

$$F(x,y,i) > 3 \cdot 2^{-i}.$$

Neka je $l = 2^y \cdot 3^i$. Tada je $y = e_2(l)$ i $i = e_3(l)$ pa je

$$F(x, e_2(l), e_3(l)) > 3 \cdot 2^{-e_3(l)}. \tag{3.25}$$

Dakle, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ postoji $l \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi (3.25). Neka su $h, g : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ funkcije definirane sa

$$h(x_1, \dots, x_k, l) = F(x_1, \dots, x_k, e_2(l), e_3(l))$$

i

$$g(x_1,\dots,x_k,l)=3\cdot 2^{-e_3(l)}.$$

Imamo

$$h=F\circ H$$

gdje je $H:\mathbb{N}^{k+1}\to\mathbb{N}^{k+2}$ funkcija definirana sa

$$H(x_1,\dots,x_k,l)=(x_1,\dots,x_k,e_2(l),e_3(l)).$$

Očito je H rekurzivna funkcija pa slijedi da je h rekurzivna funkcija. Vrijedi

$$g(x_1,\dots,x_k,l)=(-1)^0\frac{3}{b(x_1,\dots,x_k,l)} \tag{3.26}$$

za sve $x_1,\dots,x_k,l\in\mathbb{N}$ gdje je $b:\mathbb{N}^{k+1}\to\mathbb{N}$ funkcija definirana sa

$$b(x_1,\dots,x_k,l)=2^{e_3(l)}.$$

Neka je $\gamma:\mathbb{N}^2\to\mathbb{N}$ funkcija definirana sa

$$\gamma(x,y)=y^x.$$

Tada je

$$b(x_1,\dots,x_k,l)=\gamma(e_3(l),2)$$

za sve $x_1,\dots,x_k,l\in\mathbb{N}$ iz čega slijedi da je b rekurzivna kao kompozicija rekurzivnih funkcija. Iz (3.26) slijedi da je g rekurzivna funkcija. Znamo da za svaki $x\in\mathbb{N}^k$ postoji $i\in\mathbb{N}$ takav da vrijedi (3.25), prema tome za svaki $x\in\mathbb{N}^k$ postoji $i\in\mathbb{N}$ takav da je

$$h(x,l)>g(x,l).$$

Prema primjeru 3.4.2 postoji rekurzivna funkcija $\varphi:\mathbb{N}^k\to\mathbb{N}$ takva da je

$$h(x,\varphi(x))>g(x,\varphi(x))$$

za svaki $x\in\mathbb{N}^k$. Stoga je

$$F(x,e_2(\varphi(x)),e_3(\varphi(x)))>3\cdot 2^{-e_3(\varphi(x))}$$

za svaki $x\in\mathbb{N}^k$. Iz leme 3.4.3 2) slijedi da je

$$f(x,e_2(\varphi(x)))>0$$

za svaki $x\in\mathbb{N}^k$. Neka je $\psi:\mathbb{N}^k\to\mathbb{N}$ funkcija definirana sa

$$\psi(x)=e_2(\varphi(x)).$$

Tada je ψ rekurzivna funkcija i vrijedi

$$f(x,\psi(x))>0$$

za svaki $x\in\mathbb{N}^k$. □

Bibliografija

[1] Iljazović, Z.: Rekurzivnost lančastih i cirkularno lančastih kontinuuma, doktorska disertacija, PMF-MO, Zagreb, 2009.

[2] M. B. Pour-El, I. Richards, Computability in Analysis and Physics, Springer-Verlag, Berlin-Heielberg-New York, 1989.

[3] H. Rogers, Theory of recursive functions and effective computability, McGraw-Hill, 1967.

[4] M. Vuković, Izračunljivost, skripta, 2009.

[5] K. Weihrauch, Computable Analysis, Springer, Berlin, 2000.

Sažetak

U ovom diplomskom radu proučavali smo rekurzivne funkcije $\mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$. Rad je podijeljen na tri poglavlja. U prvom poglavlju definirali smo pojmove rekurzivne funkcije $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, primitivno rekurzivne funkcije i rekurzivnog skupa te proučavali njihova svojstva. U drugom poglavlju definirali smo rekurzivne racionalne funkcije i dokazali neke rezultate vezane za te funkcije. U trećem poglavlju definirali smo rekurzivne realne funkcije te s tim u vezi proučavali, između ostalog, rekurzivne aproksimacije, funkciju $\sqrt{f}$ i relaciju $f(x, y) > 0$. Također smo definirali i pojam rekurzivnog realnog broja te dokazali neke tvrdnje vezane uz rekurzivne brojeve.

Summary

In this diploma thesis we have studied recursive functions $\mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$. The thesis is divided into three chapters. In the first chapter we have defined the notions of a recursive function $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, a primitive recursive function and a recursive set and we have studied their properties. In the second chapter we have defined recursive rational functions and we have proved some results regarding these functions. In the third chapter we have defined recursive real functions and related to this we have examined, amoung others, recursive approximations, a function $\sqrt{f}$ and relation $f(x, y) > 0$. We have also defined the notion of a recursive real number and we have proved some claims related to recursive numbers.

Životopis

Rođena sam 2. svibnja 1991. godine u Splitu. Osnovnoškolsko obrazovanje započinjem 1997. godine u Osnovnoj školi Kralja Zvonimira u Segetu Donjem. Godine 2005. upisujem Srednju školu Ivana Lucića u Trogiru, smjer: opća gimnazija, gdje sam 2009. godine maturirala s odličnim uspjehom. Iste godine nastavljam daljnje školovanje na Prirodoslovno - matematičkom fakultetu, Matematički odsjek u Zagrebu. Godine 2013., nakon završenog Preddiplomskog sveučilišnog studija Matematika; smjer: nastavnički, upisujem Diplomski sveučilišni studij Matematika; smjer: nastavnički.