

Fizikalne osnove glazbenih tonova na primjeru gitare

Špehar, Vanessa

Master's thesis / Diplomski rad

2015

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:152898>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-11-25**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Vanessa Špehar

FIZIKALNE OSNOVE GLAZBENIH TONOVA NA
PRIMJERU GITARE

Diplomski rad

Voditelj rada:

Doc. dr. sc. Damir Pajić

Zagreb, 2015

Ovaj diplomski rad obranjen je dana _____ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. _____, predsjednik
2. _____, član
3. _____, član

Povjerenstvo je rad ocjenilo ocjenom _____.

Potpisi članova povjerenstva:

1. _____
2. _____
3. _____

Zahvaljujem mentoru doc. dr. sc. Damiru Pajiću na pomoći pri izradi ovog diplomskog rada

Sadržaj

Uvod	1
Teorijski dio	3
2.1 Valno gibanje- širenje poremećaja.....	3
2.2 Zvučni valovi	4
2.3 Jednadžba longitudinalnog valnog gibanja u elastičnom štapu.....	5
2.4 Longitudinalni valovi u plinovima	9
2.5 Jednadžba transverznog valnog gibanja.....	11
2.6 Stojni valovi na žici	13
2.7 Stojni valovi u stupcu zraka	15
2.8 Intenzitet zvuka	18
2.9 Glazbene ljestvice i intervali.....	20
2.10 Kromatična temperirana ljestvica	25
2.11 Fourierova analiza	27
2.12 Fizika gitare	29
Eksperimentalni dio	35
3.1 Visual analyser.....	35
3.2 Analiza eksperimentalno dobivenih podataka Visual analyserom	36
Zaključak.....	50
Literatura.....	52
Sažetak	53

Poglavlje 1

Uvod

Zvuci glazbe odjekivali su i prije petsto, tisuću i prije deset tisuća godina. Zemlja je od pamtivijeka bila ogromna glazbena radionica i koncertna estrada. Čovjek je i u najzabačenijem kutku pjevao, svirao i radio stvari koje zvižde, šume, grme ili klepeću. Glazba mu je pomagala pri radu, uljepšavala radost, ublažavala tugu. Glazba je zblizavala i sjedinjavala ljude. Postoje različiti glazbeni instrumenti kod raznih naroda, plemena i u raznim epohama. Isprva ljudi nisu ni znali što je zvuk, nisu znali zašto on nastaje, uslijed čega se mijenja. Mnogo vremena je trebalo proći, potrošiti se ogromna energija dok u pomoć glazbi nije stigla znanost. Kako zvuk postaje muzikalan i kako postiže visinu, što sve na to utječe proučavali su pretežno samo fizičari i glazbeni teoretičari. Fizičari su razlikovali zvučne pojave samo u okviru fizikalne akustike, a glazbeni teoretičari, oslonjeni na značajan rad fizičara Hermanna Helmholtza, proučavali samo glazbenu akustiku. Kako glazbena akustika ne seže tako duboko u strukturu materije, razumljivo je da je za većinu fizičara nezanimljiva, a za većinu glazbenika se takvim čini fizika glazbenog zvuka. [1]

Jedno od najvažnijih oruđa glazbene akustike je harmonijska analiza zvuka. Ako zbrojimo određeni broj najjednostavnijih (sinusoidalnih) valova, njihov će zbroj dati jedan val, čija će amplituda imati kompliciranu formu. To neće biti pravilni valovi, nego recimo planinski greben s nazubljenim vrhovima. Prema Fourierovom teoremu valove bilo kojeg oblika možemo rastaviti na skup jednostavnijih sinusoidalnih valova (oscilacija). Svaki nazubljeni planinski lanac je jednak zbroju određenog broja nizova običnih valova. Gottfried Wilhelm von Leibniz (njemački filozof i matematičar) jednom je rekao: „ Glazba je nesvjesno vježbanje duše u aritmetici. “ Zaista, mozak i uho neprekidno vrše munjevite proračune: oduzimaju, zbrajaju i množe akustičke frekvencije. Čak i najjednostavniji glazbeni podražaj, samo ako je dovoljno glasan, u predstavi slušaoca pretvara se u simfoniju. I baš ta simfonija određuje boju tona. Glazba je život zvukova u vremenu. [1]

U prvom poglavlju ovog rada ćemo proučavati teorijsku pozadinu zvučnih valova, te matematički opis glazbenih tonova. Razmatrat ćemo detaljnije nastanak tona na gitari, no spomenut ćemo i par puhačkih instrumenata. Nakon toga ćemo eksperimentalno provjeriti neke teorijske činjenice, te ćemo proučavati spektre frekvencija na gitari. Također ćemo za usporedbu proučiti spektre frekvencija klavira, klarineta, saksofona, flaute i viole.

Cilj ovog diplomskog rada je povezati fiziku, matematiku i glazbu te na taj način dobiti bolji uvid u svijet glazbe.

Poglavlje 2

Teorijski dio

2.1 Valno gibanje- širenje poremećaja

Mrežkanje na jezeru, zvukovi glazbe, seizmička podrhtavanja Zemlje prouzročena naglim oslobađanjem energije pohranjene u stijenama ispod Zemljine površine- potresi, sve su to valovi. Valovi se mogu dogoditi svaki put kad se sustav poremeti iz ravnotežnog položaja i kad se poremećaj ili deformacija može širiti s jednog mjesta na drugo. Valom se prenosi energija. [11] Općenito se prenošenje bilo kakvog poremećaja određenim sredstvom koje se sastoji od povezanih oscilatora naziva valom. [6] To sredstvo nazivamo medijem (za valove na vodi medij je voda jer se molekule vode ponašaju kao povezani oscilatori). Valove dijelimo na:

Mehaničke valove – mogu se širiti medijem čije su čestice međusobno povezane elastičnim silama (čestice tvari titraju oko ravnotežnog položaja) [3]

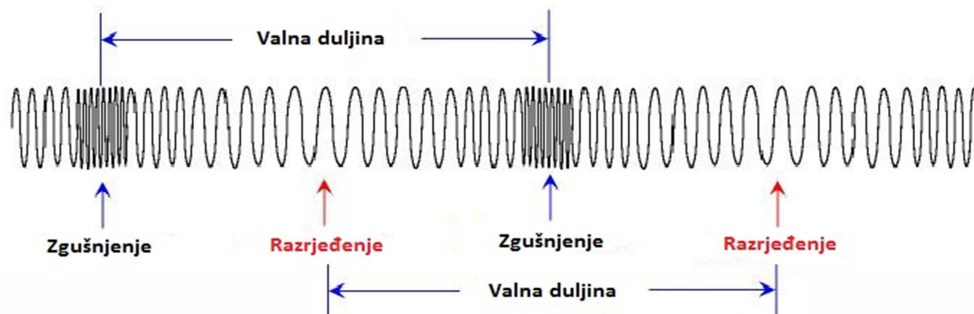
Elektromagnetske valove- njihovo važno svojstvo je da ne trebaju medij za širenje, odnosno mogu se rasprostirati i kroz vakuum. *“Vakuum je praznina, u idealnom smislu prazan prostor u kojem nema nikakvih čestica ni zračenja.”* [7, str. 243]

Prema načinu kako titraju čestice medija kroz koje se širi valove možemo podijeliti na transverzalne i longitudinalne. Kada se pri širenju vala čestice medija gibaju okomito na smjer širenja vala, val nazivamo transverzalnim. Kao i na svakom valu tako i na transverzalnom uočavamo valna uzvišenja koja se nazivaju brjegov i valna udubljenja ili dolovi. Kad se čestica nalazi na vrhu brjega ili na dnu dola, u tom trenutku ona postiže najviši, odnosno najniži položaj. Udaljenost tih dvaju položaja u odnosu na smjer širenja vala nazivamo amplituda. Razmak između dva susjedna brjega ili dva susjedna dola nazivamo valna duljina.



Slika 2.1: Transverzalni val

Čestice medija mogu se gibati usporedno pravcem duž kojega se val širi. Takav val nazivamo longitudinalnim. Brjegovi su zgušnjene dijelovi vala, a dolovi razrjeđeni dijelovi vala. U skupinu longitudinalnih valova spada i zvuk.



Slika 2.2: Longitudinalni val

2.2 Zvučni valovi

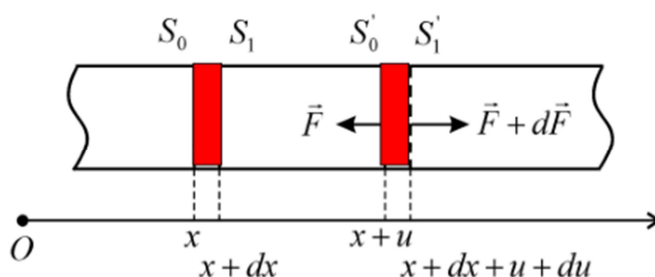
Kada udaramo dlanom o dlan tada naglo komprimiramo/sabijamo volumen zraka. Zbog svoje elastičnosti zvuk se odmah širi i komprimira/sabija okolni volumen zraka. Tako komprimirani i on teži da se raširi i sve se dalje širi nevidljivi val. A kad stigne do našeg uha on udara u bubnjić i stvara se osjećaj koji zovemo zvuk. [1, str. 56] Dakle, "zvukom nazivamo longitudinalne mehaničke valove (frekvencije 20 Hz do 20 000 Hz) koje registriamo uhom." [6] Zvuk opisujemo tlakom, dakle zgušnjeњу i razrjeđeњу zraka odgovaraju povećanje, odnosno smanjenje tlaka. Zvuk se može prostirati u čvrstim tijelima, tekućinama i plinovima. Zvučni valovi frekvencije niže niže od 20 Hz nazivamo infrazvuk, a valove više frekvencije od 20 000 Hz ultrazvuk. Te frekvencije čovjek ne čuje, no ti valovi imaju široku primjenu u tehnici i medicini.

Proučimo najprije longitudinalne valove na elastičnoj neograničenoj šipki.

2.3 Jednadžba longitudinalnog valnog gibanja u elastičnom štapu

Elastičnost željeza, drveta, stakla, čelika itd., omogućava da se te materijale pobudi na titranje i da se zatim njima počinja širiti progresivni valovi¹.

Promatramo ravni val koji se giba kroz cilindrični štap presjeka S , neograničene dužine na oba kraja:



Slika 2.3: Skica i definicija korištenih veličina za opis longitudinalnog vala u elastičnom štapu

Nadalje, promotrimo beskonačno tanki sloj štapa između poprečnih presjeka S_0 i S_1 koji u položaju imaju pripadne apscise x , $x + dx$, stoga je debljina štapa dx . Djelujemo li impulsom sile dolazi do longitudinalnih poremećaja što uzrokuje gibanje sloja S_0 , S_1 te se u nekom trenutku t , taj sloj nalazi u položaju S'_0 i S'_1 , s apscisama $x + u$, $x + dx + u + du$, gdje je u pomak danog presjeka (može biti veći, manji ili jednak nuli). No sloj štapa u trenutku t ima neku akceleraciju i pretrpio je određenu deformaciju (stoga je $du \neq 0$). Kad se val počeo širiti, tj. kad su poremećaji već nastupili, unutar sredstva počinje djelovati elastična sila (zbog elastičnog naprezanja čvrstog tijela). Na presjek S'_0 djeluje sila F , a na S'_1 sila $F + dF$ (suprotnog smjera u smislu udaljavanja od ravnotežnog položaja). Neuravnotežena sila dF daje ubrzanje sloju S'_0 , S'_1 . Da bismo pronašli jednadžbu gibanja sloja koristimo zakone mehanike (Newtonove zakone). [8] Pitamo se kolika je masa sloja debljine dx ?

¹ Valovi koji se kreću duž nekog pravca (mi ćemo uzeti da se valovi uvijek šire duž osi x). Ti valovi posljedica su longitudinalnih poremećaja. [4]

$$dm = \rho dV \Rightarrow dm = \rho S dx \quad (2.1)$$

gdje je ρ gustoća nenapregnutog sloja sredstva (gustoća štapa), a S površina presjeka štapa. Prema 2. Newtonovom zakonu imamo:

$$dF = adm \quad (2.2)$$

a akceleracija je druga vremenska derivacija položaja

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.3)$$

gdje je pomak u funkcija položaja i vremena, $u = u(x, t)$. Uvrstimo li formulu (2.3) u jednadžbu (2.2) i (2.1), dobivamo:

$$dF = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \rho S dx \quad (2.4)$$

Nadalje koristimo Hookeov zakon koji daje vezu između specifičnog izduženja sloja $\frac{du}{dx}$, presjeka S i modula elastičnosti E (što je tzv. Youngov modul elastičnosti):

$$F = ES \frac{\Delta l}{l} \quad (2.5)$$

gdje je $\frac{\Delta l}{l}$ relativno produženje. U našem slučaju $\Delta l \rightarrow \partial u$, $l \rightarrow \partial x$, stoga imamo:

$$F = ES \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.6)$$

Diferenciramo li jednadžbu (2.6) dobivamo:

$$\frac{dF}{dx} = ES \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.7)$$

Jednadžbe (2.4) i (2.7) daju:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.8)$$

Ovo je parcijalna diferencijalna jednadžba drugog reda koja opisuje longitudinalno valno gibanje u elastičnom sredstvu.

Pogledajmo što predstavlja $\frac{E}{\rho}$. Promotrimo dimenziju:

$$\left[\frac{E}{\rho} \right] = \left[\frac{ML^{-1}T^{-2}}{ML^{-3}} \right] = [L^2T^{-2}]$$

Fizikalna veličina koja ima dimenziju $[L^2T^{-2}]$ je kvadrat brzine. Konačno, uvrstimo $\frac{E}{\rho} = v^2$ u jednadžbu (2.8) dobivamo:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.9)$$

Opći integral diferencijalne jednadžbe (2.9.) longitudinalnog vala jednak je:

$$u = f(vt - x) + \varphi(vt + x) \quad (2.10)$$

gdje su f i φ dvije, bilo kakve funkcije.

Dokažimo to:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -f'(vt - x) + \varphi'(vt + x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = vf'(vt - x) + v\varphi'(vt + x), \text{ te} \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''(vt - x) + \varphi''(vt + x), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 f''(vt - x) + v^2 \varphi''(vt + x). \quad (2.12)$$

Uvrstimo li (2.12) u (2.9) dobijemo:

$$v^2 f''(vt - x) + v^2 \varphi''(vt + x) = v^2 f''(vt - x) + v^2 \varphi''(vt + x)$$

Vidimo da su lijeva i desna strana jednadžbe identične, dakle u jest rješenje valne jednadžbe (2.9).

Funkcija $u(x, t)$ je zbroj dviju funkcija:

$f(vt - x)$ je funkcija valnog gibanja u pozitivnom smjeru osi x , te $\varphi(vt + x)$ je funkcija valnog gibanja u negativnom smjeru osi x .

Budući da zasad proučavamo širenje samo jednog vala možemo ga opisati jednom od relacija, uzmimo relaciju $u = f(vt - x)$. Ta funkcija općeg integrala valnoga gibanja može imati veoma jednostavan i važan oblik, naime sinusni. Smatrat ćemo, dakle, da se

u sredstvu širi ravni, sinusni, beskonačni val pomaka. Označimo sa T period sinusne funkcije, s obzirom na vrijeme. Kako se ravni val u sredstvu (šipci) ne deformira i širi se nekom brzinom v , to se u nekom trenutku, u jednakim prostornim razmacima λ , koje val prevali u vremenu T ,

$$\lambda = vT, \quad (2.13)$$

moraju ponavljati jednake faze gibanja. Prostorni period λ naziva se spomenuta valna duljina vala. Funkcija f , koja predočuje val, mora imati dakle dva perioda: λ i T . U slučaju sinusne funkcije ovaj uvjet zadovoljava relacija:

$$u = A \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \quad (2.14)$$

Izlučimo iz argumenta $\frac{1}{\lambda}$, dobivamo:

$$u = A \cos \frac{2\pi}{vT} (vt - x) \quad (2.15)$$

Što je analogno općoj relaciji $f(vt - x)$ za širenje vala stalnom brzinom u pozitivnom smjeru osi x . Budući da se brzina v pojavljuje samo u fazi sinusne funkcije, zove se fazna brzina. Definiramo:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (2.16)$$

što nazivamo valnim brojem, te

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (2.17)$$

što nazivamo kutnom frekvencijom. Uvrstimo li (2.16) i (2.17) u (2.14) dobivamo

$$u = A \cos(kx - \omega t) \quad (2.18)$$

Ako u $x = 0, t = 0$, u nije 0, dobivamo općenit izraz:

$$u = A \cos(kx - \omega t + \phi) \quad (2.19)$$

2.4 Longitudinalni valovi u plinovima

Za opis širenja longitudinalnih valova, dakle, valova zvuka u plinovima (zraku) imamo sličnu predodžbu elastičnog sredstva kao i pri proučavanju longitudinalnih valova u čvrstim tijelima (štapovima). Istu valnu jednadžbu zadovoljit će valovi zvuka u plinu kao i longitudinalni valovi u čvrstim tvarima. Dakle, longitudinalni val u plinu je periodična promjena tlaka koja nastaje zgušnjavanjem i razrjeđivanjem plina. Dobili smo za brzinu širenja valova u čvrstim tvarima:

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (2.20)$$

Sada trebamo pronaći za plinove odgovarajuće veličine. Pokažimo da je brzina u plinu jednaka:

$$v = \sqrt{\frac{\kappa p}{\rho}}, \quad (2.21)$$

gdje je κ adijabatska konstanta, p je tlak, a ρ gustoća plina.

Pođimo od jednadžbe stanja idealnog plina²:

$$pV = nRT \quad (2.22)$$

Iz te jednadžbe proizlaze plinski zakoni (Boyle- Marriottov za izotermnu promjenu, Gay-Lussacov za izobarnu promjenu, te Charlesov zakon za izohornu promjenu stanja plina). Ako se plinom širi longitudinalni val tada se plinu mijenja gustoća, slično kao što smo imali kod longitudinalne deformacije štapa. No, ovdje su tlak i volumen povezani tzv. adijabatom, u termodinamici, krivuljom koja prikazuje ovisnost tlaka o volumenu pri adijabatskoj promjeni stanja plina³, opisanom izrazom:

$$pV^\kappa = konst., \quad (2.23)$$

² Jednadžba koja povezuje tlak p , termodinamičku temperaturu T , volumen V i količinu tvari n za idealni plin, a R je univerzalna plinska konstanta ($R = 8.314 \text{ J/molK}$) [7, str. 108]

³ Termodinamički proces u kojem nema izmjene topline između sustava i okoline ostvaruje se toplinskom izolacijom ili dovoljno brzim odvijanjem procesa, tako da sustav ne stigne okolini predati ni oduzeti toplinu. [7]

gdje je κ kao što je rečeno adijabatska konstanta, bezdimenzijska veličina koja ovisi o vrsti plina, tj. o broju atoma u molekuli plina. Za jednoatomne molekule (helij, neon, argon itd.) $\kappa = \frac{5}{3}$, a za dvoatomne (kisik O_2 , vodik H_2 , dušik N_2 itd.) $\kappa = \frac{7}{5}$. Zrak ima $\kappa = \frac{7}{5}$, jer je on smjesa uglavnom od dušika i kisika. Nadalje, promjena volumena, zbog prolaska longitudinalnog vala povezana je s promjenom tlaka prema (2.23) ovako:

$$dpV^\kappa + p\kappa V^{\kappa-1}dV = 0. \quad (2.24)$$

Sredimo li malo gornji izraz, dobijemo:

$$dp = -p\kappa \frac{dV}{V}. \quad (2.25)$$

Ako uzmemo "stupac plina" po analogiji sa štapom onda $V = Sl$ i $dV = Sdl$, pa (2.25) možemo napisati ovako:

$$\kappa p = -\frac{dp}{\frac{dl}{l}}, \quad (2.26)$$

što odgovara relaciji za modul elastičnosti (2.5). Iz općenitog izraza za brzinu longitudinalnih valova (2.20) možemo zapisati izraz za brzinu valova u plinu adijabatske konstante κ , gustoće ρ i nalazi se pod tlakom p (2.21). Taj izraz možemo izraziti i pomoću "mikroskopskih veličina", jer se plin u stvari sastoji od ogromnog broja molekula, odnosno atoma. Podijelimo li jednadžbu stanja idealnog plina s V i iskoristimo vezu Boltzmannove konstante k i univerzalne plinske konstante R preko Avogadrovog broja N_A , $R = N_A k$ i uzimajući u obzir da je Avogadrova konstanta broj molekula N u nekom sustavu podijeljen količinom tvari n tog sustava: $N_A = \frac{N}{n}$ i da je molarna masa M neke tvari omjer mase tvari m i količine tvari n : $M = \frac{m}{n}$, dobivamo za brzinu:

$$\sqrt{\frac{\kappa p}{\rho}} = \sqrt{\frac{\kappa \frac{nRT}{V}}{\frac{m}{V}}} = \sqrt{\frac{\kappa nRT}{m}} = \sqrt{\frac{\kappa RT}{M}} \quad (2.27)$$

Znači, brzina vala ne ovisi o tlaku plina. Ovisi o vrsti plina, jer su za određeni plin κ , R i M konstante, te za sve vrste plinova raste proporcionalno sa $T^{1/2}$.

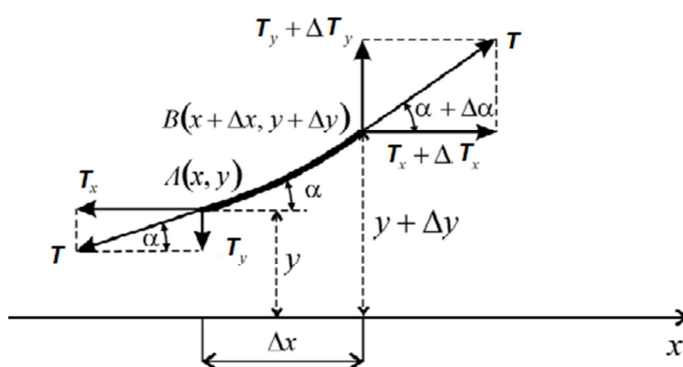
2.5 Jednadžba transverznog valnog gibanja

U ovom odjeljku želimo saznati kolika je brzina transverzalnih valova na žici. Brzina tih valova nam je važna jer je ona bitan dio za promatranje žičanih glazbenih instrumenata. Fizikalne veličine koje će nam trebati da odredimo brzinu transverzalnih valova na žici su napetost niti i linearna gustoća. Budući da je debljina žice zanemariva u odnosu na duljinu, uzimamo da žica ima samo jednu dimenziju (duljinu), pa njezinu gustoću definiramo kao omjer mase m i duljine l : $\mu = \frac{m}{l}$. Možemo pretpostaviti da povećanje napetosti žice povećava sile koje žicu vraćaju odnosno ravnaju i s time povećava brzinu vala. Možemo isto tako pretpostaviti da povećanje mase smanjuje brzinu titranja žice. Izvest ćemo formulu za odnos između brzine vala, napetosti žice i mase za određenu duljinu žice.

Promatramo savršeno elastičnu nit (žicu) zanemarive težine, u stanju ravnoteže, koju pravocrtno zateže napetost. Pod vanjskim utjecajima (npr. udarac), žica se može deformirati. Ako na mali element niti djelujemo silom te uzrokuje poremećaj, nastat će transverzalni pomak na žici. Uzimamo u obzir jako mali pomak, tada se napetost niti T ne mijenja, dakle kut žice prema osi x (na kojoj leži žica) je jako mali. Povećamo Δx , te promotrimo silu napetosti žice koju rastavljamo na okomitu i paralelnu komponentu. Na prvom kraju elementa za komponente vrijede sljedeći odnosi (slika 2.4.):

$$T_y = T \sin \alpha \quad (2.28)$$

$$T_x = T \cos \alpha \quad (2.29)$$



Slika 2.4: Transverzalni valovi na žici

Za vrlo mali kut α vrijede odnosi:

$$\cos \alpha \approx 1, \quad T_x \approx T, \quad \sin \alpha \approx \tan \alpha. \quad (2.30)$$

Po definiciji derivacije imamo

$$\tan \alpha = \frac{dy}{dx}, \quad (2.31)$$

uvrstimo li (2.30) u (2.31) dobijemo

$$\sin \alpha = \frac{dy}{dx} \quad (2.32)$$

Nadalje, uvrstimo li (2.32) u (2.28) dobijemo:

$$T_y = T \frac{dy}{dx} \quad (2.33)$$

Pretpostavljamo da nema pomaka u longitudinalnom smjeru ($\Delta T_x = 0$). Računamo rezultantu sile u okomitom smjeru (na žicu). Na prvom kraju elementa žice okomita sila je T_y (usmjerena prema dolje), a na drugom kraju elementa okomita sila je $T_y + \Delta T_y$ (prema gore). Rezultantna okomita sila je ΔT_y . Kako pronaći koliko je ΔT_y ? Diferenciramo (2.33):

$$\frac{dT_y}{dx} = \frac{d}{dx} \left(T \frac{dy}{dx} \right) \Rightarrow dT_y = T \frac{d^2y}{dx^2} dx \quad (2.34)$$

Sada ćemo upotrijebiti veličinu linearna gustoća mase $\mu = \frac{dm}{dx}$. Nadalje, 2. Newtonov zakon kaže da je diferencijal okomite sile jednak umnošku diferencijala mase i okomitog ubrzanja elementa žice (koje je prema definiciji druga derivacija puta po vremenu), imamo:

$$dT_y = dm a_y \Rightarrow dT_y = dm \frac{d^2y}{dt^2} \quad (2.35)$$

Kombiniramo li (2.35) sa (2.34) dobivamo:

$$T \frac{d^2y}{dx^2} dx = dm \frac{d^2y}{dt^2} \quad (2.36)$$

Uvrstimo li $\mu = \frac{dm}{dx}$ u jednadžbu (2.36) dobivamo:

$$T \frac{d^2y}{dx^2} dx = \mu dx \frac{d^2y}{dt^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\mu} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (2.37)$$

Dobivamo diferencijalnu jednadžbu drugog reda za transversalno valno gibanje. Opet se pitamo kolika je dimenzija od $\frac{T}{\mu}$?

$\left[\frac{T}{\mu}\right] = \left[\frac{N}{kg/m}\right] = \left[\frac{kgms^{-2}}{kg/m}\right] = [m^2s^{-2}]$, uočavamo da se radi o kvadratu brzine. Stoga slijedi:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (2.38)$$

Odnosno, brzina transversalnih valova na žici jednaka je:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (2.39)$$

Dobili smo isti oblik kao i kod longitudinalnog titranja.

2.6 Stojni valovi na žici

Promatramo li žicu mase m i duljine L pričvršćenu na oba kraja (takve žice imamo u mnogo instrumenata, npr. klavir, violina, gitara) koja je napeta silom T . Ako na jednom njezinom kraju uzrokuje valni puls tada će se on širiti žicom brzinom v (2.39). Kako je žica pričvršćena na oba kraja pulsi koji dolaze na desni kraj reflektiraju se pa taj reflektirani val putuje s desna na lijevo. Reflektirani valovi se zbrajaju (superponiraju) s upadnim valovima koji putuju s lijeva na desno. Matematički to zapisujemo prema (2.18):

$$y(x, t) = y_{\rightarrow}(t, x) + y_{\leftarrow}(t, x) = A \sin(kx - \omega t) + A \sin(kx + \omega t), \quad (2.40)$$

gdje je $y_{\rightarrow}(t, x)$ val koji se širi u pozitivnom smjeru x osi, a $y_{\leftarrow}(t, x)$ val koji se širi u negativnom smjeru osi x . Nadalje, prema adicijskom teoremu za sinus⁴ imamo:

⁴ $\sin(t \pm s) = \sin t \cos s \pm \cos t \sin s$

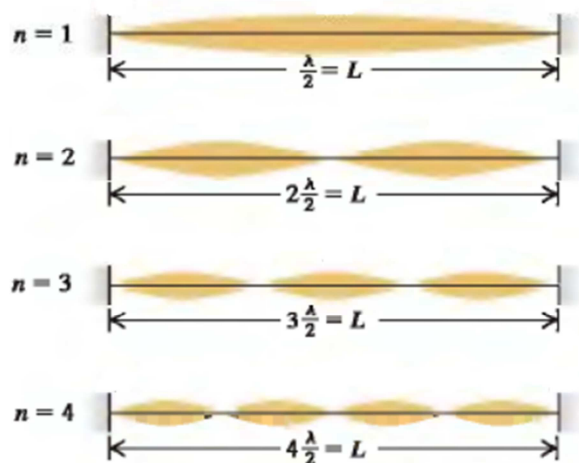
$$y(x, t) = A \sin x \cos \omega t - A \cos kx \sin \omega t + A \sin kx \cos \omega t + A \cos kx \sin \omega t \Rightarrow$$

$$y(x, t) = 2A \sin x \cos \omega t \quad (2.41)$$

Dobili smo rezultatni val. Rezultantno gibanje proporcionalno je produktu dviju sinusnih funkcija od kojih jedna faza ovisi samo o vremenu, a druga samo o prostoru. Ono se više ne širi u prostoru, jer je za širenje potrebno da faza ovisi o vremenu i prostoru. Jednadžba (2.41) predstavlja opis tzv. stojnog vala, tj. vala koji je nastao superpozicijom dvaju progresivnih valova suprotnih smjerova koji se razlikuju u fazi za π . Rezultantni val mora zadovoljiti rubne uvjete, tj. $y(t, 0) = 0$, $y(t, x = L) = 0$ i $y(t = 0, x) = 0$. Rubni uvjeti kažu da na krajevima imamo čvorove, tj. mjesta koja trajno miruju. A mjesta gdje stojni val ima maksimalnu amplitudu zovemo trbusi vala. Iz rubnih uvjeta dobivamo dozvoljene vrijednosti valnog broja k , odnosno valne duljine λ : $y(t, L) = 0 = 2A \sin kL \sin \omega t \Rightarrow k_n L = n\pi$ tj. $\frac{2\pi L}{\lambda_n} = n\pi$, odnosno

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.42)$$

Uzbudom žice dolazi se do vlatitih titranja koje se manifestiraju stojnim transverzalnim valovima. Za $n = 1$ imamo osnovni stojni val na žici, odnosno osnovnu valnu duljinu $\lambda_1 = 2L$, a za $n = 2, 3, 4, \dots$ imamo više harmonike, kao što vidimo na slici:



Slika 2.5: Neki od mogućih načina titranja napete žice

S obzirom da vrijedi da je $v = \lambda_n f_n$, vidimo da su odgovarajuće frekvencije stojnog vala jednake: $f_1 = \frac{v}{2L}$, $f_2 = \frac{2v}{2L}$, $f_3 = \frac{3v}{2L}$, ..., općenito:

$$f_n = \frac{nv}{2L} = nf_1 \quad (2.43)$$

Glazbenici te frekvencije f_2, f_3 itd. nazivaju alikvotni tonovi. f_2 je drugi harmonik ili prva alikvota. A f_3 je treći harmonik ili druga alikvota. Prvi harmonik je osnovna frekvencija zvučnog vala. [11]

Kao što smo pokazali brzina v valova na žici je dana formulom (2.39), kombiniramo li ju sa frekvencijom titranja žice (2.43), dobivamo:

$$f_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (2.44)$$

Postoji mnogo glazbenih instrumenata u kojih su napete žice izvori zvuka. Žice na glazbenim instrumentima se mogu pobuditi na sljedeće načine:

- udarcem mekanim batićem (klavir)
- trzanjem, odnosno hvatanjem žice u nekoj točki, otklanjanjem i naglim puštanjem (tamburica, gitara, harfa...)
- povlačenjem gudaalom (violina, viola, violončelo...)

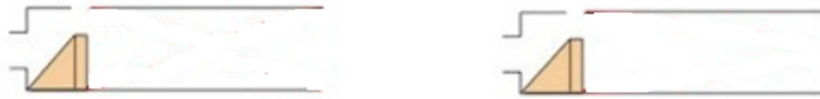
Svaki od tih načina uzbude daje karakterističan složen ton. ⁵ Kao što smo vidjeli osnovna frekvencija tona žičanih instrumenata se može mijenjati duljinom žice, napetošću i masom po jedinici duljine.

2.7 Stojni valovi u stupcu zraka

Kao što smo proveli razmatranja za transversalne valove na napetoj žici, tako možemo i na longitudinalne valove. Stojne longitudinalne valove možemo dobiti u štapovima, staklenim cijevima, sviralama ili na opruzi itd. Rubni uvjeti nam opet određuju

⁵ Ton- oštar zvuk točno zadane frekvencije kojom je određena njegova visina unutar glazbene ljestvice. (o njoj poslije) Ton je jednostavno sinusoidno titranje. Čisti ton moguće je proizvesti elektronički, ali se vrlo rijetko može dobiti nekim glazbenim instrumentom, a najbliži mu je zvuk dobiven glazbenom vilješkom. [7]

frekvencije, odnosno valne duljine titranja, dok je brzina vala određena jednadžbama (2.20) i (2.21). Promotrimo stojne longitudinalne valove koje dobivamo u sviralama na klin ispunjenim fluidom koje su s jedne strane zatvorene, a s druge otvorene, te u sviralama koje su s oba kraja otvorene. (slika 2.6)



Slika 2.6: Zatvorena i otvorena svirala

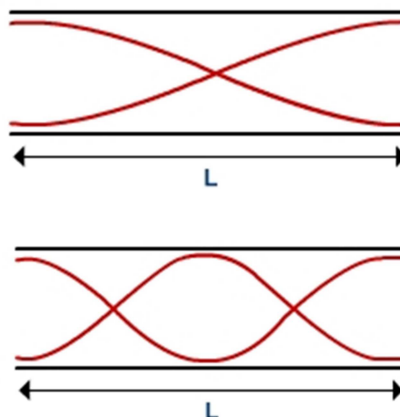
Struja zraka udara u oštricu svirale proizvodeći zračne vrtloge i tako ustitra stupac zraka u cijevi. Frekvencija kojom mijenjamo položaj vrtloga zraka koji se pojavljuje na jednoj pa na drugoj strani klina određena je stupcem zraka u sviralu, u kojem se pojavljuje stojni val. Kao što smo rekli postoje dvije mogućnosti:

- Svirala je otvorena

Osnovna frekvencija je dana stojnim valom koji ima dva trbuha pomaka: jedan u blizini klina, drugi na otvorenom kraju. Dužina svirale L tada je jednaka $\lambda/2$ ili $\lambda = 2L$ (slika 2.7). Jačim strujama zvuka od potrebnih za dobivanje osnovne frekvencije u sviralama se mogu pobuditi harmonici. Otvorene svirale mogu dati potpuni niz harmonika:

$$f_n = n \frac{v}{2L}, \quad (2.45)$$

gdje je $n = 1, 2, 3, \dots$, a v je brzina zvuka u zraku, a L duljina svirale od klina do kraja.



Slika 2.7: Stojni valovi u stupcu zraka u otvorenoj sviralu za $n = 1$ i $n = 2$.

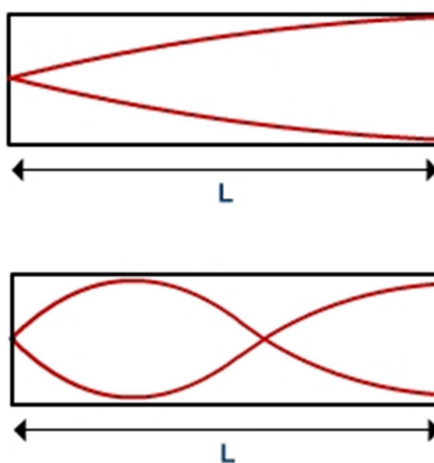
Boja zvuka⁶ otvorene labijalne svirale ovisi o njenoj geometrijskoj konstrukciji i materijalu od kojega je načinjena. Svirala izrađena od drveta daje mek i opojan ton u odnosu na metalnu sviralu, koja ima svježiji zvuk lakši za uho od tona odgovarajuće drvene svirale.

- Svirala je zatvorena

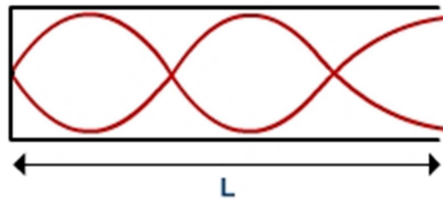
Njena je osnovna frekvencija dana stojnim valom koji ima jedan čvor pomaka na zatvorenom kraju, i jedan trbuh pomaka u blizini klina. Dužina svirale je tada jednaka $\lambda/4$ ili $\lambda = 4L$ (slika 2.8). Zatvorene svirale mogu dati harmonijske frekvencije:

$$f_n = (2n + 1) \frac{v}{4L}, \quad (2.46)$$

gdje je $n = 0, 1, 2, \dots$ dakle, nepotpuni niz harmonijskih frekvencija jer obuhvaća samo frekvencije s neparnim članovima.



⁶ Boja zvuka je pojam koji opisuje sastav zvuka prema zastupljenosti i glasnoći različitih frekvencija i njome razlikujemo ljudske glasove. Npr. gitara i klavir mogu proizvesti zvuk koji će odgovarati jednakoj jačini i visini i frekvenciji zvuka, a primjetit ćemo da isti ton različito zvuči. Tu razliku nazivamo bojom zvuka. Najniži harmonik će određivati visinu zvuka, a viši harmonici koji zajedno s osnovnim tvore zvuk će odrediti boju zvuka.

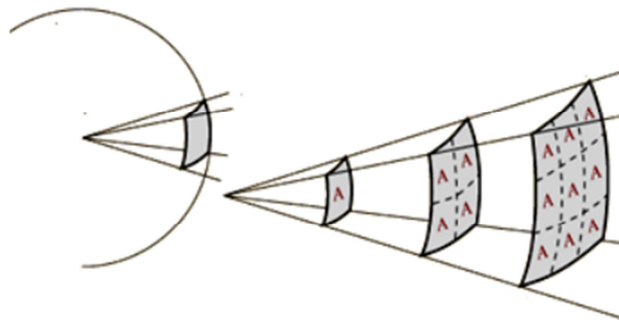


Slika 2.8: Stojni valovi u stupcu zraka u zatvorenoj svirali za $n = 1$, $n = 2$ i $n = 3$

Iako je za nepovjerovat, orgulje i minijaturna flauta su potomci jedne iste drevne obitelji. Orgulje i flauta su svirale na klin. Zvuk zatvorene svirale je taman, mukli, osjeća se u njemu neka praznina.[1]

2.8 Intenzitet zvuka

Zamislimo točkasti izvor koji emitira zvuk u vidu sfere koja se širi od izvora u prostor.



Slika 2.9: Točkasti izvor i sferno širenje zvuka u prostor

Kako se sfera povećava, njezina se površina udaljuje od točkastog izvora zvuka, a ista količina energije se distribuira po većoj površini. Time se intenzitet zvuka smanjuje. To je razlog zašto zvuk čujemo tiše ako je izvor udaljeniji od nas. Iz toga možemo zaključiti sljedeće: što je veća amplituda zvučnog vala, veća je glasnoća i veći je intenzitet zvuka. Kvadrat amplitude vala je proporcionalan intenzitetu zvučnog vala. Promotrimo npr. žicu gitare. Što se žica jače trzne, više se otkloni od položaja ravnoteže. Samim time veća je amplituda zvučnog vala i nastali zvuk je glasniji. Za razliku od amplitude, intenzitet zvuka nije teško izmjeriti. Intenzitet zvučnog vala se može opisati kao energija koju prenese val u nekom vremenu, po jedinici površine valne fronte. Jedinica

za inenzitet je wat po metru kvadratnom (W/m^2). Zvuk se obično „mjeri“ kao razina intenziteta. Razlika između stvarnog intenziteta i razine intenziteta je u tome što je skala razine intenziteta zvuka prilagođena ljudskoj precepciji glasnoće. Kako bismo pronašli razinu intenziteta izraženu u decibelima, počinjemo razmatranje od razine čujnosti, najmanjeg intenziteta $I_0 = 1 \cdot 10^{-12} W/m^2$ što iznosi 0 dB, i najmanji je intenzitet zvuka kojeg ljudsko uho može registrirati. Pošto se odnosi prikazuju na logaritamskoj skali, 10 puta glasniji zvuk od početnog ima razinu intenziteta od 10 dB, dok 100 puta glasniji zvuk ima intenzitet od 20 dB. Razina intenziteta zvuka koja izaziva bol je 120 dB što znači da je stvarni intenzitet zvuka jednak $1 W/m^2$. Matematička relacija koja povezuje intenzitet u W/m^2 i razinu intenziteta u dB glasi:

$$I(dB) = 10 \log_{10} \frac{I}{I_0} \quad (2.47)$$

U tablici su navedeni neki zvukovi koji se svakodnevno susreću, zajedno sa pripadajućim intenzitetima.

Zvuk	Razina intenziteta (dB)
Prag čujnosti	0
Šapat	10
Razgovor	60
Rock glazba	115
Prag bola	120
Puknuće bubnjića	160

Tablica 1: Neki zvukovi i njihovi intenziteti

2.9 Glazbene ljestvice i intervali

Kada čujete kakofoniju⁷ kao da čujete nepovezano gomilanje tonova. Ta nepovezanost je obilježje nemuzikalnosti. Ali ako su zvuci međusobno povezani, odnosno u međusobnom skladu- onda je riječ o glazbi. Glazbene veze su veoma raznolike. Jedne iste tonove će Rus, Kinez ili Indijac različito povezati. Što bismo nazvali glazbom, odnosno što to neki niz tonova čini ugodnim, odnosno neugodnim za slušanje? Pokazuje se da je to interval tonova. [1] Interval dvaju tonova je omjer njihovih frekvencija i intervali su ti koji imaju najveću ulogu u percepciji ugone, ili neugode zvukova. Interval može biti disonantan ukoliko kod slušača izaziva napetost ili nemir, te konsonantan ukoliko izaziva osjećaj harmonije i ugone. Postavlja se pitanje koji su intervali konsonantni, a koji disonantni.

Počeci teorije glazbe se vežu uz starogrčkog matematičara Pitagoru⁸ i njegove sljedbenike, pitagorejce. Izučavajući harmoniju u glazbi, došli su do zaključka da je u osnovi svega postojećeg- broj. Smatrali su da su principi matematike- principi svega i da se harmonija univerzuma zasniva na harmonijskim odnosima među brojevima. Pitagora je izrekao tvrdnju koja je poznata kao Pitagorin zakon malih brojeva koja kaže da je interval između dva tona konsonantan ukoliko se može prikazati kao omjer malih prirodnih brojeva (manjih ili jednakih 8). Pitagora je do tog zakona došao polazeći od rezultata eksperimenata sa zategnutim žicama različitih duljina. Ako uzmemo žicu određene debljine, onda visina tona koju ona proizvodi ovisi o njenoj duljini: što je žica kraća, to je ton viši. Ako žicu skratimo za pola (odnos 2:1), ton će skočiti za oktavu, ako je skratimo za jednu trećinu (odnos 3:2), ton će skočiti za kvintu, a ako žicu skratimo za jednu četvrtinu (odnos 4:3), ton će biti viši za kvartu. Intervali 1:2, 2:3 i 3:4 (oktave, kvinte i kvarte, redom) su konsonantni. U Tablici 2 možete pogledati neke intervale, njihove nazive⁹ (o kojima će poslije biti govora) i percepcije.

Omjer frekvencija	Naziv intervala	Percepcija
1:1	prima	konsonantan
16:15	mala sekunda	konsonantan
10:9, 9:8	velika sekunda	disonantan
6:5	mala terca	konsonantan
5:4	velika terca	konsonantan
4:3	kvarta	konsonantan

⁷ Neugodan zvukovni dojam što ga ostavlja skladba prepuna disonanci (nesklad, nesuglasje). [10]

⁸ Pitagora (otok Samos, oko 582.- Mezopotamija, oko 496. pr. Kr.)

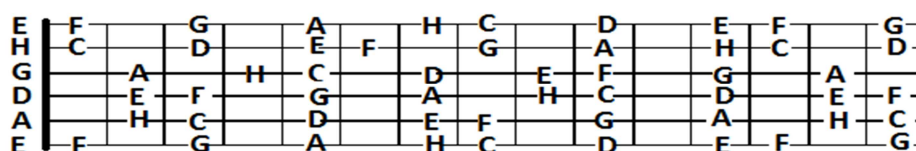
⁹ Naziv intervala označava međusobnu udaljenost u tonskom nizu brojeći od početnog tona uključujući s tonom kojim ga mjerimo. [10]

3:2	kvinta	konsonantan
8:5	mala seksta	konsonantan
5:3	velika seksta	konsonantan
9:5, 16:9	mala septima	disonantan
15:8	velika septima	disonantan
2:1	oktava	konsonantan

Tablica 2: Glazbeni intervali

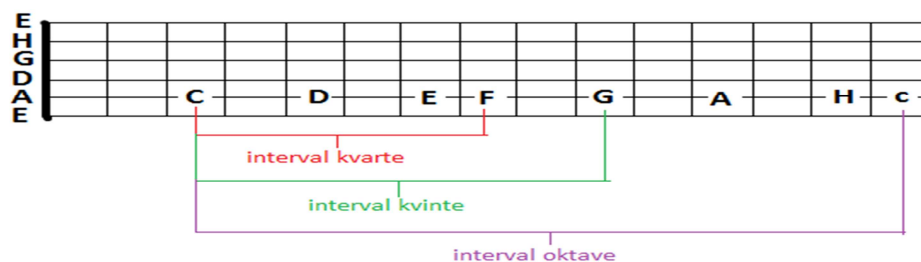
Skala (ljestvica) je niz više uzastopnih tonova koji se penju od jednog tona do drugog, kao po nekoj ljestvici. To se u principu može napraviti na beskonačno mnogo načina. Ima vrlo originalnih, kompliciranih ljestvica koje su sasvim strane našem uhu, zvuče nam čudno, kao na primjer u Indiji i nekim istočnim zemljama. Međutim, iako se ljestvice ponekad oštro razlikuju po bogatstvu glazbenih veza, raspoloženju, nacionalnoj obojenosti, zakonitosti njihovog građenja su jedinstvene i mogu se objasniti svojstvima zvuka i sluha. Struktura i zakoni ljestvice su kamen temeljac poznavanja glazbe. [1]

U osnovi zapadne glazbene kulture nalazi se tzv. dijatonska ljestvica. Pojasnimo to malo bolje. Promatrati ćemo shemu dijela vrata šesterožičane akustične gitare (slika 2.9). Akustična gitara ugođena je uobičajeno tj. tonovi koje će slobodne žice titranjem (od najtanje prema najdebljoj) proizvesti su E, H, G, D, A i E. Ostali tonovi se ostvaruju pritiskanjem žica na određene pragove vrata akustične gitare. Vrat gitare se promatra iz perspektive gitarista tako da se nadeblja žica (u ovom slučaju ugođena u tonu E) nalazi na dnu sheme.



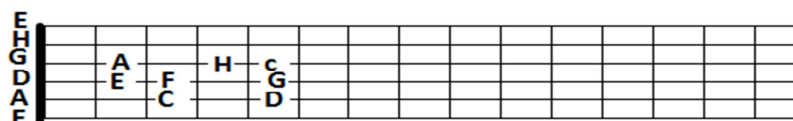
Slika 2.10: Shema vrata šesterožičane akustične gitare

Svaka nota predstavlja određenu osnovnu frekvenciju. Prema konvenciji, note se označavaju sa prvih sedam velikih slova abecede (A B C D E F G H). Promatramo niz tonova C, D, E, F, G, A, H, c, (slika 2.10) to je tzv. dijatonska ljestvica, a svima je poznata kao dur-ljestvica: u ovom slučaju C-dur. Od početnog tona C do idućeg tona c razmak je od osam tonova, a naziva se oktava. Od C do G je pet tonova, i to je interval kvinte. Interval kvarte, od C do F sadrži četiri tona. (slika 2.11)



Slika 2.11: Intervali oktave, kvinte i kvarte

Sa slike možemo vidjeti kako se ostvaruju određeni intervali. Ovaj interval smo mogli i drugačije ostvariti (slika 2.12). Zajedničko svakoj realizaciji je da žica koja ostvaruje ton C titra upola manjom frekvencijom od žice koja ostvaruje ton c. Inače, ton koji je za interval oktave udaljen od osnovnog tona naziva se oktavom na tom tonu (c je oktava na C). Isto vrijedi i za kvinte, kvarte, itd. Ako se tonovi intervala odsviraju jedan za drugim, nastaje melodijski interval. Ako tonove intervala odsviramo istovremeno, nastaje harmonijski interval koji čini osnovu za izgradnju akorada.



Slika 2.12: C-dur ljestvica

U prirodnoj durskoj ljestvici osnovne frekvencije su dane nizom:

$$\frac{1}{1} \cdot f, \frac{9}{8} \cdot f, \frac{5}{4} \cdot f, \frac{4}{3} \cdot f, \frac{3}{2} \cdot f, \frac{5}{3} \cdot f, \frac{15}{8} \cdot f, \frac{2}{1} \cdot f.$$

Frekvenciju f možemo odabrati u principu po volji, jer su sve frekvencije za uho jednako valjane i ravnopravne. Za teorijska razmatranja izgradnje ljestvica praktično je uzeti $f = 1$. No, da bi odabir bio u skladu s međunarodnim standardom o frekvenciji tona A^{10} , i u skladu s ustaljenim imenima tonova, treba odabrati za f vrijednost 264 Hz. Takvim izborom vrijednosti za f gornji niz frekvencija postaje C-dur ljestvica. U tablici 3

¹⁰ Glazbene vilice (masivne metalne konstrukcije relativno debelih krakova, poniklane da ne hrđaju, izrađuju se iz jednog jedinog kompaktnog dijela pa stoga nisu sklone raštivanju, te vremenom zadržavaju konstantne frekvencije i iz tih razloga služe kao etaloni.) na svakoj vilici mora biti ugraviran iznos frekvencije koju vilica mora imati na propisanoj temperaturi. Godine 1953. na međunarodnoj konferenciji u Londonu određena je visina tona A. Na temperaturi prostora od 15 °C ton A mora imati frekvenciju 440 Hz. [9]

prikazane su osnovne frekvencije tonova prirodne C-dur ljestvice i duljine napete žice koje daju te odgovarajuće tonove.

Ime tona	C	D	E	F	G	A	H	c
Frekvencija tona ($f = 264 \text{ Hz}$)	$\frac{1}{1}f$ 264	$\frac{9}{8}f$ 297	$\frac{5}{4}f$ 330	$\frac{4}{3}f$ 352	$\frac{3}{2}f$ 396	$\frac{5}{3}f$ 440	$\frac{15}{8}f$ 495	$\frac{2}{1}f$ 528
Odgovarajuća duljina žice	$\frac{1}{1}L$	$\frac{8}{9}L$	$\frac{4}{5}L$	$\frac{3}{4}L$	$\frac{2}{3}L$	$\frac{3}{5}L$	$\frac{8}{15}L$	$\frac{1}{2}L$

Tablica 3.

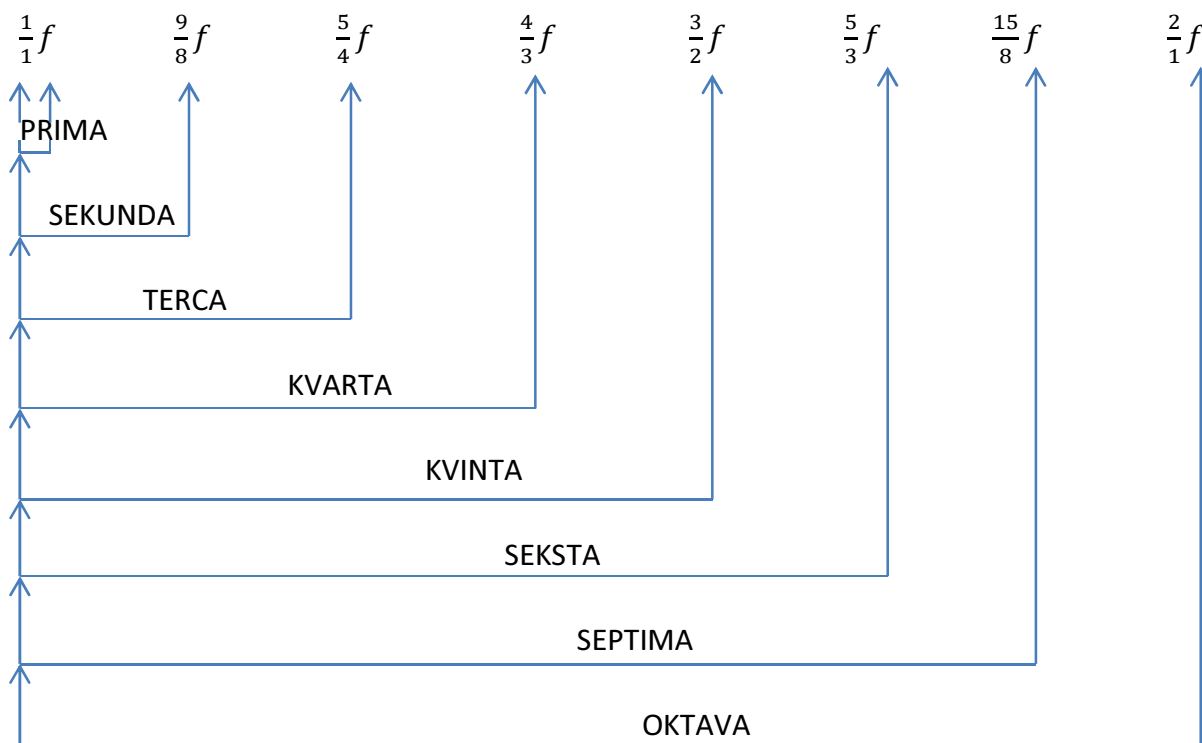
Postupkom udvostručavanja vrijednosti sedam osnovnih frekvencija prema višim frekvencijama ili upolovljavanjem prema nižim frekvencijama, skala se proširuje na cijelo područje osjetljivosti uha. Zadnji red tablice 3 možemo pojasniti ovako: ako žicu duljine L napnemo tako da ona daje osnovnu frekvenciju 264 Hz, tada će polovina žice $\frac{L}{2}$ kod iste napetosti dati osnovnu frekvenciju 528 Hz, dvije trećine duljine žice dati će frekvenciju 396 Hz. Tri petine duljine žice dati će frekvenciju 440 Hz i analogno dalje, po principu da je osnovna frekvencija žice kod stalne napetosti obrnuto proporcionalna duljini žice. Obrnuto, kod iste duljine žice frekvencija je proporcionalna s napetošću.

Navedena ljestvica bazira se na svom prvom tonu $C=264 \text{ Hz}$. Prvi ton svake ljestvice naziva se tonika. On diktira iznose frekvencija ostalih tonova durske ljestvice na temelju niza $\frac{1}{1} \cdot f, \frac{9}{8} \cdot f, \frac{5}{4} \cdot f, \frac{4}{3} \cdot f, \frac{3}{2} \cdot f, \frac{5}{3} \cdot f, \frac{15}{8} \cdot f, \frac{2}{1} \cdot f$ ($f = 264 \text{ Hz}$) iz kojeg možemo dobiti druge ljestvice. Svaka frekvencija može poslužiti kao ishodište ljestvice. Navedena durska ljestvica naziva se prirodnom durskom ljestvicom, jer se zasniva na omjerima prirodnih brojeva.

Ljestvicu od sedam tonova iz tablice 3 možemo proširiti po volji prema višim i nižim frekvencijama područja osjetljivosti ljudskog uha po principu da osnovne frekvencije tonova istog imena stoje u omjerima 1:2:4:8:16,...

Prvi ton bilo koje ljestvice naziva se prima, drugi sekunda, treći terca, četvrti kvarta, peti kvinta, šesti seksta, sedmi septima, a osmi, koji je dvostruko veće osnovne frekvencije od prvog, naziva se kao što smo već spomenuli oktavom. Oktavni ton započinje ponavljanje iste ljestvice u dvostruko višim frekvencijama. On je prvi ton (prima) nastavka iste ljestvice. Tako dobijemo proširenu ljestvicu. Deveti po redu ton zove se nona, a poklapa se sa sekundom, drugim tonom više ljestvice. Deseti ton po

redu naziva se decima i poklapa se s tercom više ljestvice. Jedanaesti ton je povećana decima. Dvanaesti je duodecima, on je kvinta iznad oktave. Nazivi prima, sekunda, terca,... osim što predstavljaju redni broj tona u durskoj ljestvici, predstavljaju također intervale između prvog tona u ljestvici (tonike) i svakog od ostalih tonova (slika 2.13).



Slika 2.13: Intervali bilo koje ljestvice

Frekvencije durske ljestvice nisu onakve kakve bi se na prvu pomisao mogle očekivati. One ne sadrže vizualno predočljive pravilnosti. Skokovi frekvencija nisu međusobno jednaki, kao što su jednake visine stepenica u nekom stubištu. Proučimo skokovitosti osnovnih frekvencija c-dur ljestvice.

Ime tona	C	D	E	F	G	A	H	c
f (Hz)	264	297	330	352	396	440	495	528

Δf (Hz)		33	33	22	44	44	55	33
Δf (%)		12.5	11.1	6.7	12.5	11.1	12.5	6.7

Tablica 4.

Pođemo li od tona C osnovne frekvencije 264 Hz ka tonu D osnovne frekvencije 297 Hz, vršimo skok u frekvenciji za iznos 33 Hz, što u odnosu na polaznu frekvenciju 264 Hz iznosi 12.5 %. Skok od tona D 297 Hz do tona E 330 Hz je 33 Hz, što u odnosu na 297 Hz iznosi 11.1 %. Skok od E do F 352 Hz iznosi 22 Hz, što u odnosu na 330 Hz iznosi 6.7 %. Vidimo da su skokovi nejednaki (tablica 4.). Uočavamo nejednakosti u aritmetičkom smislu tj. durska skala nije izgrađena po nekom običnom zakonu ravnomjernih skokova frekvencija, već po dubljim zakonima slaganja (konsonantnosti) spektara pripadnih tonova.

Proučimo interval kvinte [C, G] \rightarrow $[C, G] = \frac{\frac{3}{2}f}{\frac{1}{1}f} = \left(\frac{396 \text{ Hz}}{264 \text{ Hz}} \right) = \frac{3}{2}$. Ton G 396 Hz dobiven je iz tona C 264 Hz množenjem sa $\frac{3}{2}$. Redom sve spektralne frekvencije tona C množenjem sa $\frac{3}{2}$ prelaze u spektralne frekvencije tona G. Omjer $\frac{3}{2}$ govori da je svaka treća po redu (treća, šesta, deveta, ...) frekvencija iz C jednaka sa svakom drugom (druga, četvrta, šesta, ...) frekvencijom iz G. Tonovi C i G su vrlo srodni, jer imaju u velikoj mjeri podudarne spektre. Interval [C, c] $= \frac{\frac{2}{1}f}{\frac{1}{1}f} = \frac{2}{1}$ govori da su tonovi C i c maksimalno srodni, a mjera konsonantnosti im je 1. Interval terce [C, E] $= \frac{\frac{5}{4}f}{\frac{1}{1}f} = \frac{5}{4}$ ima konsonantnost $\frac{1}{4}$ jer je četvrtina spektralnih frekvencija iz E sadržana u tonu C. Konsonantnost intervala kvarte [C, F] $= \frac{\frac{4}{3}f}{\frac{1}{1}f} = \frac{4}{3}$ je $\frac{1}{3}$ jer je trećina spektralnih frekvencija iz tona F sadržana u tonu C, tj. postoji poklapanje među njihovim višim harmonicima. Konsonantnost intervala [C, D] je $\frac{1}{8}$, itd.

Najsrodniji tonovi su tonovi istog imena odnosno oktave. Kod slušanja tih intervala imamo ova iskustva: ako tonu C dodamo oktavu viši ton c, dobivamo veći sjaj zvuka i veći intenzitet. Dodavanjem tona G tonu C povećavamo ukupni intenzitet i boju. Dodani ton G daje tonu C briljantnost.

2.10 Kromatična temperirana ljestvica

Da bi u glazbi s uspjehom koristili intervale, potrebno je da ljestvice budu tako građene da možemo od proizvoljnog tona početi melodiju. To je moguće stoga što svaki njen

ton može biti ishodište ljestvice. Znamo da su frekvencije prirodne durske ljestvice niz: $\frac{1}{1}f, \frac{9}{8}f, \frac{5}{4}f, \frac{4}{3}f, \frac{3}{2}f, \frac{5}{3}f, \frac{15}{8}f, \frac{2}{1}f$. Odaberemo li $f = 264$ Hz, dobivamo C-dur ljestvicu. Radi jednostavnosti uzmimo $f = 1$. Sve nove tonske ljestvice dobijemo tako da pomnožimo intervale prve ljestvice s intervalima prirodne ljestvice $\frac{9}{8}, \frac{5}{4}, \frac{4}{3}$, do $\frac{15}{8}$.

	C	D	E	F	G	A	H	c	D ¹	E ¹	F ¹	G ¹	A ¹	H ¹
C-dur	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{2}{1}$...					
D-dur		$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{45}{32}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{135}{64}$	$\frac{9}{4}$...				
E-dur			$\frac{5}{4}$	$\frac{45}{32}$	$\frac{25}{16}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{25}{12}$	$\frac{75}{32}$	$\frac{5}{2}$...			
F-dur				$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{16}{9}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{20}{9}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{45}{16}$	$\frac{3}{1}$...	
G-dur					$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{45}{16}$	$\frac{3}{1}$...	
A-dur						$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{25}{12}$	$\frac{20}{9}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{25}{9}$	$\frac{25}{8}$	$\frac{10}{3}$...
H-dur							$\frac{15}{8}$	$\frac{135}{64}$	$\frac{75}{32}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{45}{16}$	$\frac{25}{8}$	$\frac{225}{64}$	$\frac{15}{4}$

Vidimo da se isti tonovi u različitim tonskim ljestvicama razlikuju iako su približni. Ono što neku melodiju čini prepoznatljivom su karakteristični intervali između tonova koji čine melodiju i koji moraju biti jednaki bez obzira u kojem tonalitetu se ta melodija svira. Međutim, vidimo da intervali između dva tona istog imena nisu jednaki u svim prirodnim ljestvicama. Stoga, ako bi glazbalo naštimalo da daje jedan od ovih nizova frekvencija i u tom nizu (duru) točno svirali neku melodiju, bilo bi nemoguće svirati istu melodiju u bilo kojem drugom nizu. Rješenje je ako se izjednače svi susjedni intervali.

Uvjet jednakosti intervala susjednih tonova su:

$$f_{n+1} = qf_n, \frac{f_{13}}{f_1} = 2 \text{ i } f_{n+1} = q^n f_1, \text{ gdje je } n \text{ prirodan broj.}$$

Frekvencije f_n čine geometrijski niz s kvocijentom q . Uvjet je da je trinaesti ton dvostruko veće frekvencije od prvoga, odnosno tona istog imena, daje dvanaest intervala ljestvice. Uvjeti $f_{13} = q^{12}f_1$ i $f_{13} = 2f_1$ daju $q^{12} = 2$ odnosno $q = \sqrt[12]{2}$. Ovakva ljestvica izjednačenih intervala zove se kromatična temperirana ljestvica. Svi intervali u toj ljestvici su potencije broja q : $[f_n, f_m] = q^{m-n}$.

Svi glazbeni instrumenti danas se podešavaju na temperiranu ljestvicu. Pronalazak temperirane ljestvice s faktorom $\sqrt[12]{2}$ omogućio je ravnopravnu ulogu svih tonaliteta. Nova ljestvica ima 12 bitno različitih tonova, a svi ostali se izvode iz njih na bazi omjera 1:2:4:8:..., u kojima stoje osnovne frekvencije tonova istog imena.

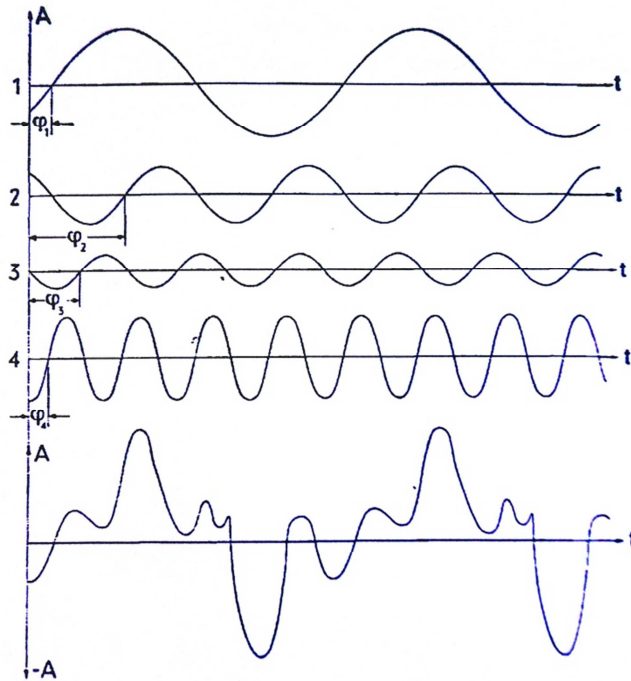
2.11 Fourierova analiza

Niti jedan glazbeni instrument ne može proizvoditi čiste pojedinačne frekvencije, već samo skupine odnosno spektre frekvencija. Svaki ton dobiven na nekom glazbenom instrumentu sastavljen je od istovremenog zvučanja niza parcijalnih frekvencija (tonova, alikvota):

$$\dots, \frac{f}{5}, \frac{f}{4}, \frac{f}{3}, \frac{f}{2}, f, 2f, 3f, 4f, 5f, \dots \quad (2.47)$$

Koji predstavlja spektar tona. U nizu (2.47) član f se zove osnovna frekvencija tona i on određuje akustičku tj. apsolutnu visinu tona izraženu u Hz, dok ostali članovi niza (2.47) zajedno s f tvore boju tona koja je rezultat superpozicije svih harmonijskih valova i ovisi o doprinosu (intenzitetu) svakog pojedinačnog vala, člana iz (2.47). Ljudsko uho niz frekvencija (2.47) čuje kao jedan kompaktan ton apsolutne visine f i neke određene boje zvuka. Poznato je da tonovi iste osnovne frekvencije proizvedeni na različitim instrumentima zvuče različito u pogledu fenomena kojeg nazivamo boja zvuka. Na primjer, tonovi violine zvuče resko i oštro u odnosu na iste tonove dobivene na flauti, koji djeluju meko, okruglasto i tamnije. Čak niti dva istovrsna instrumenta, npr. dvije violine, nemaju iste boje zvuka. Činjenica da uho čuje niz frekvencija (2.47) kao kompaktan ton određene visine f , odgovara fizikalnoj realnosti, jer superpozicijom harmonijskih valova valnih duljina $\lambda, \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{3}, \frac{\lambda}{4}, \dots$ tj. valova s frekvencijama $f, 2f, 3f, 4f, \dots$ dobivamo val valne duljine λ i frekvencije f . Dakle, superpozicijom ostaje samo jedna valna duljina odnosno jedna frekvencija koju uho čuje.

Prikažimo superpoziciju četiri harmonijska vala frekvencija $f, 2f, 3f, 4f$, s pripadajućim valnim duljinama $\lambda, \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{3}, \frac{\lambda}{4}$, faznim pomacima $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ i amplitudama A_1, A_2, A_3, A_4 .



Slika 2.14

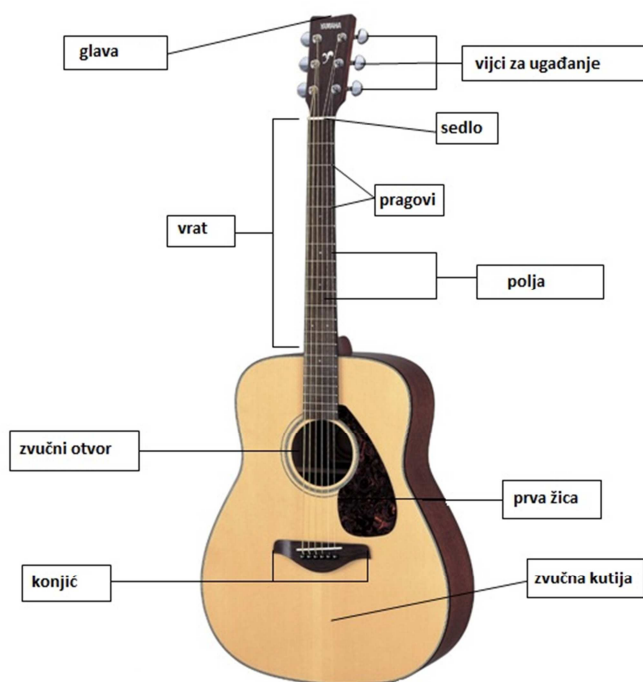
Iz slike 2.14. vidi se da dobiveni superponirani val ima valnu duljinu λ i frekvenciju f , ali je nesinusoidalnog oblika, možemo reći “obojenog” oblika. Što se tiče boje superponiranog vala (tona), nju zorno predstavlja “razvedenost” superponiranog vala kojom se on razlikuje od sinusoidalnog oblika.

Francuski matematičar Fourier je 1822. Godine dao teorem koji kaže da je bilo koje periodičko titranje, ma kako komplicirano, sastavljeno od niza jednostavnih harmonijskih titranja. Zvukovi glazbenih instrumenata obično se sastoje od jednog osnovnog i nekog dodanog skupa harmonika koji se mogu smatrati kao što smo rekli superpozicijom sinusnih valova osnovne frekvencije f i cjelobrojnih višekratnika te frekvencije. Proces analize- razlaganja zvuka glazbenog instrumenta ili bilo koje periodičke funkcije na osnovne konstituente (sinusne ili kosinusne valove) naziva se Fourierova analiza.

2.12 Fizika gitare

Moderna akustična gitara je potomak žičanih instrumenata koji datiraju od najranijih civilizacija. Prethodnici gitare su lutnja i kundi¹¹. Trijumfalni put lutnje trajao je tokom cijelog srednjeg vijeka. Glas joj je odjekivao u dvorcima i na narodnim svetkovinama. Nije bilo ni jednog viteškog romana da se u njemu nije spomenula lutnja. Tu kraljicu glazbe uništila je gitara. Lutnja se u usporedbi s gitarom činila glomaznom, kompliciranom i strašno staromodnom.

Fizičar i izrađivač gitare dr. Michael Kasha kaže da su osnovne karakteristike gitare vrat s pragovima, drveno tijelo s pojačanim rebratim potpornjima (učvršćenje), te njezina ravna leđa i obli bokovi. Iako su instrumenti slični gitari izrađeni već u 16. stoljeću, moderni izgled gitare počeo se pojavljivati tek na početku 19. stoljeća (slika 2.15)



Slika 2.15: Dijelovi akustične gitare

Sve akustične gitare imaju sličnu anatomiju. Žice su pričvršćene za gitaru na konjiću i vijcima za ugađanje, te titraju između sedla i konjića. Dvanaesti prag nalazi se točno na

¹¹ Afrički prethodnik harfe kojoj je vrat vrlo izvijen.

polovini žice. Vijci za ugađanje omogućuju mijenjanje napetosti žice, a konjić prenosi titranje žice na zvučnu kutiju. Kada je odsviran ton, žica zatitra gornji dio tijela zvučne kutije i zrak unutar kutije. Zajedno to titranje proizvodi zvuk. Titranje uzrokovano poremećajem kao npr. titranje žice stvara područja zgušnjavanja i razrjeđenja molekula u mediju kroz koji val putuje. Glasnoća zvuka ovisi o količini zraka koji titra. Objekt koji titra uzrokovat će titranje drugog objekta koji se nalazi pored njega. To se naziva prisilno titranje. Ako drugi objekt ima veću površinu, titranje će pomicati više zraka i proizvesti glasniji zvuk. Ovo je jedno od glavnih svojstava koje se koristi kod gitare. Na gitari žica prenosi titranje pomoću konjića na zvučnu kutiju i uzrokuje titranje zvučne kutije istom frekvencijom kao i žica zbog čega nastaje zvuk.

Kada na gitari odsviramo ton, žica titra i proizvodi val. Frekvencija note je određena brzinom vala na žici podijeljena s valnom duljinom:

$$f = \frac{v}{\lambda} \quad (2.49)$$

Gitara ima šest žica, svaka je različite debljine i podešena na različitu frekvenciju. Žice moraju biti različitih debljina jer brzina vala na žici ovisi o napetosti i linijskoj gustoći žice, prema (2.39). deblje žice imaju manju frekvenciju, a tanje žice više. Stoga što deblje žice imaju veću linijsku gustoću, time se smanjuje brzina vala na žici za određenu napetost, a rezultat je niža frekvencija. Za danu frekvenciju, veća valna duljina znači manju brzinu, a manja valna duljina veću brzinu. Žice na gitarama su standardno podešene na iste frekvencije iako se razlikuju po duljini. Manje gitare su podešene na istu frekvenciju kao i veće. Tablica 5 pokazuje odsvirani ton i frekvenciju u standardnom podešenju. Broj pored slova tona odnosi se na oktavu u kojoj se ton čuje.

Žica	Ton	Frekvencija/ Hz
1	<i>E</i>	82.41
2	<i>A</i> ¹	110
3	<i>D</i> ¹	146.83
4	<i>G</i> ²	196
5	<i>H</i> ²	246.94
6	<i>E</i> ³	329.63

Tablica 5: Odsvirani ton i pripadne frekvencije

Da bi se promijenila nota koja se svira, svirač skraćuje duljinu žice svojim prstima čime se mijenja valna duljina iste. Brzina vala na žici ostaje konstantna, a skraćivanjem valne duljine na žici frekvencija se povećava.

Valna duljina za žicu ovisi o veličini ljestvice gitare ili o udaljenosti od sedla gitare do konjića sa dvanaestim pragom na sredini. Prvi harmonik (osnovni harmonik) pokazuje gibanje slobodne žice (slika 2.5) koja vibrira između sedla i konjića što je pola valne duljine žice. Harmonici su višekratnici osnovnih frekvencija. Drugi harmonik nastaje stvaranjem čvora na dvanaestom pragu i on ima dvostruko veću frekvenciju nego slobodna žica. Stvaranjem čvora na petom ili sedamnaestom pragu stvara se treći harmonik i njegova je frekvencija tri puta veća od frekvencije slobodne žice.

Postoje dvije različite pojave koje efikasnije pretvaraju mehaničku energiju žice u zvučnu energiju kojima je posljedica glasniji zvuk koji gitara proizvodi. Kada žica zatitra iznad zvučnog otvora gitare, titranje žice stvara područja zgušnjavanja i razrjeđenja zraka oko zvučnog otvora. Ta titranja sabijaju zrak unutar gitare, što povećava unutarjni tlak, zatim zrak izlazi van zbog većeg tlaka. To se naziva Helmholtzova¹² rezonancija. Titranje zraka unutar tijela gitare većinom utječe na niže frekvencije, pa gitare s manjim tijelom proizvode nježnije niže frekvencije. Ovo postaje jasnije ako pogledamo violine. Niskofrekventni instrumenti poput violončela i kontrabasa imaju veća tijela nego violine i viole.

Druga pojava kojom gitara pretvara mehaničku energiju u zvučnu je preko titranja gornjeg dijela tijela gitare. Gornji dio gitare je konstruiran da titra, a zbog svoje velike površine titra jače nego zrak i žica. Titranje gornjeg dijela je primjer prisilnog titranja¹³. Žica titra uz most što uzrokuje titranje gornjeg dijela gitare. Gornji dio gitare prenosi više frekvencije gitare u okolni zrak. Što je veća površina gornjeg dijela gitare to su glasnije nastale frekvencije. Kombinacija niskih frekvencija iz unutrašnjosti gitare i visokih frekvencija iz unutrašnjosti gitare i visokih frekvencija nastalih titranjem gornjeg dijela gitare stvaraju unikatni zvuk gitare.

Kvaliteta zvuka svakog instrumenta (boja zvuka) ovisi o jedinstvenosti alikvotnog niza. Kada na gitari odsviramo notu čujemo osnovnu frekvenciju. Također postoji i kombinacija ostalih frekvencija, poznate kao parcijalni tonovi ili harmonici, koji se javljaju uz osnovnu frekvenciju. Količina harmonika utječe na boju zvuka instrumenta. Svaki instrument zvuči drugačije zbog harmonika i jačine svakog harmonika. Kombinacija tih harmonika naziva se alikvotni niz. Vidjet ćemo poslije koliko različitih frekvencija se pojavljuje kada odsviramo jedan ton na gitari. Alikvotni niz nije jedinstven samo za svaki instrument, nego i za svaku gitaru. Nekoliko komponenata

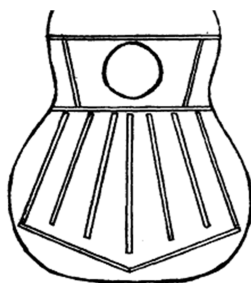
¹² Hermann von Helmholtz (Potsdam, 31. kolovoza 1821.- Berlin, 8. rujna 1894.) njemački liječnik i fizičar.

¹³ Prisilno (nametnuto) titranje stanje koje nastupa kad se frekvencija vanjske sile približi vlastitoj frekvenciji titrajnoga sustava.

utječe na alikvotni niz gitare, od vrste drveta od kojeg je gitara izrađena do načina trzanja žica. Najveći utjecaj imaju letvice koje se nalaze u unutrašnjosti tijela gitare.

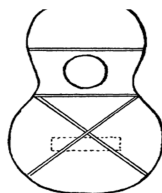
Svrha učvršćenja gitare letvicama je da spriječi savijanje gornjeg dijela gitare zbog napetosti žica kao i pomoć u prijenosu titranja žica na gornji dio gitare. Idealno, letvice prenose titranje žice na cijelu gornju površinu instrumenta.

Oko 1850-ih Antonio de Torres Jurado¹⁴ je uveo raspršeni uzorak učvršćenja na svim gitarama s plastičnim žicama (slika 2.16) Njegov uzorak ojačanja je davao dovoljnu jačinu gornje strane kao i pojačanje tonova instrumenta. Sve do danas taj uzorak je ostao kao jedna od najkorištenijih načina učvršćenja gitara.



Slika 2.16: Torresov način učvršćenja gitare

Čelične žice su se počele pojavljivati početkom 20. stoljeća i omogućile su glasnije zvukove nego plastične. Iako je Torresov uzorak bio dovoljan za plastične žice, pojačana napetost kod čeličnih žica je bila prevelika i uzrokovala je savijanje gornjeg dijela gitare. Da bi kompenzirali, proizvođači gitara počeli su koristiti uzorak X, koji pruža veću potporu za gornji dio. Christian Frederick Martin¹⁵ izumio je X uzorak (slika 2. 17).



Slika 2.17: X uzorak učvršćenja gitare

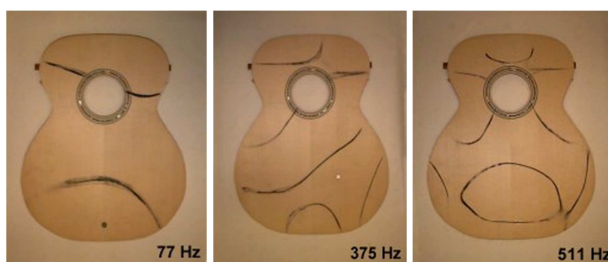
¹⁴ (Španjolska, 13. lipnja 1817.- 19. studenog 1892.) španjolski gitarist i izrađivač gitara, otac moderne klasične gitare.

¹⁵ (Njemačka, 31. siječnja 1796.- 16. veljače 1873.) izrađivač gitara

Martinov X uzorak je ostao standardan za gitare sa čeličnim žicama, a Torresov za gitare s plastičnim žicama.

Gornji dio tijela zvučne kutije gitare napravljen je da oscilira zbog titranja žica. Što se više može savijati to može proizvesti jači zvuk zbog veće količine zraka koji titra. Zvučna kutija bez učvršćenja bi proizvela zvuk mnogo glasniji nego zvučna kutija s učvršćenjem jer bi zvučna kutija mogla jače titrati, ali bi napetost žica uzrokovala savijanje drveta i instrument se ne bi mogao svirati. Izrađivač gitara Bert Eendebak objašnjava da strukturni zahtjevi gitare štete glazbenoj kvaliteti instrumenta.

Zvučna kutija gitare oscilira u različitim uzorcima ovisno o frekvenciji tona koji se odsvira. Jedan način da se vizualiziraju ti uzorci je pomoću Chaldnijevih¹⁶ figura. [vidi 2] Ako ravnu ploču pospemo pijeskom i na nju usmjerimo zvučne valove ili je neposredno pobuđujemo, na njoj dolazi do rezonancija pri čemu, u ovisnosti o frekvenciji i karakteristikama materijala, segmenti ploče titraju u različitim smjerovima. Na mjestima koja ne titraju nastaju *čvorne linije*. Na tim linijama će se prikupiti sitne čestice pijeska i pri titranju ploče vizualizirati će se pojava *čvornih linija*. Nastali pješčani obrasci se nazivaju Chaldnijeve figure. Kada zvučna kutija titra određenom frekvencijom, određeni dijelovi zvučne kutije ne titraju zbog stojnih valova. Stojni valovi se javljaju, kao što smo rekli, kada dva vala istih valnih duljina i amplituda, ali suprotnih smjerova širenja, interferiraju. Kada se materijal kao npr. pijesak stavi na ploču (ili zvučnu kutiju) koja titra određenom frekvencijom, pijesak se pomiče u dijelove koji miruju (čvorove). Valovi na zvučnoj kutiji putuju u dvije dimenzije. Slika 2.18 prikazuje čvorove koji nastaju na zvučnoj kutiji na frekvencijama redom 77 Hz, 375 Hz i 511 Hz. Ovi uzorci su primjer Chaldnijevih figura na gitari. Crne linije prikazuju područja u kojima se ne javlja titranje zvučne kutije.



Slika 2.18: Čvorovi na zvučnoj kutiji gitare

¹⁶ Ernst Florens Friedrich Chladni (Njemačka, 30. studeni 1756.-3. travnja 1827.) njemački fizičar i muzičar, poznat kao "otac" moderne akustike.

Chaldnijeve figure mogu pomoći u izradi gitara. Izrađivači gitara mogu pomoću uzoraka odrediti kako izmijeniti učvršćenje zvučne kutije. Iako uzorci nastali na zvučnoj kutiji ovise o obliku i materijalu iste, uzorci mogu biti korisni za završno oblikovanje letvica za učvršćivanje. Iako je glavna zadaća letvica učvršćivanje strukture zvučne kutije, one također pomažu u prenošenju titraja žice na cijelu zvučnu kutiju. Letvice moraju biti tako oblikovane da omjer čvrstoće i mase u svim smjerovima bude jednak, odnosno ujednačen na cijeloj površini. Mijenjanjem duljine i širine letvica mijenja se otpor savijanja. Uže letvice će se više savijati, dok deblje više učvršćuju. Debljina letvica ima utjecaj i na boju zvuka. Gitare s težim letvicama imaju bolji zvuk, ali manju glasnoću. Zbog debljih letvica zvučna kutija manje titra stoga se manja količina zraka zatitra. Lakše letvice ne prenose efektivno titranje žice kao teže letvice, ali omogućuju jače titranje zvučne kutije zbog čega je glasnoća jača.

Poglavlje 3

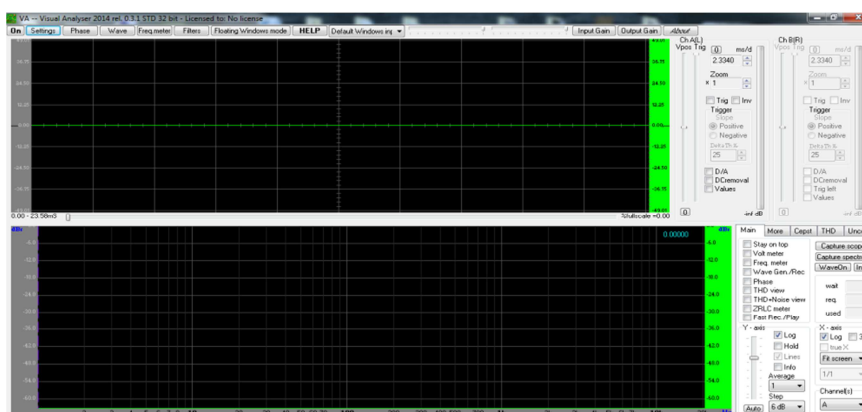
Eksperimentalni dio

3.1 Visual analyser

Visual analyser je program koji je jednostavan, pristupačan i dostupan svima koji se služe internetom. Instalacija je dostupna na Internet adresi www.sillanumsoft.org. Iako veličinom instalacije (samo 1.1 MB) ne ostavlja takav dojam, Visual analyser je poprilično moćan program. Svojim mogućnostima može zamijeniti niz uređaja i prikazati sve njihove funkcionalnosti na jednom mjestu- korisnikovom računalu. Visual analyser može se koristiti kao:

1. Osciloskop (dva kanala, x-y osi, vremenska podjela, trigger)
2. Analizator spektra sa prikazom amplitude i faze (linearni i logaritamski prikaz, linije, ...)
3. Generator valnih oblika (triangular, square, sinus, noise, pulsni generator)
4. "Frequency metter" (sa prikazom vremena i raspona frekvencija)
5. Voltmetar

Sučelje programa se sastoji od dva prozora od kojih gornji služi kao prikaz valnog oblika izvora zvuka i njegove amplitude, a donji prikaz prikazuje frekvencije koje se pojavljuju u promatranom valnom uzorku (prikazuje spektar frekvencija).



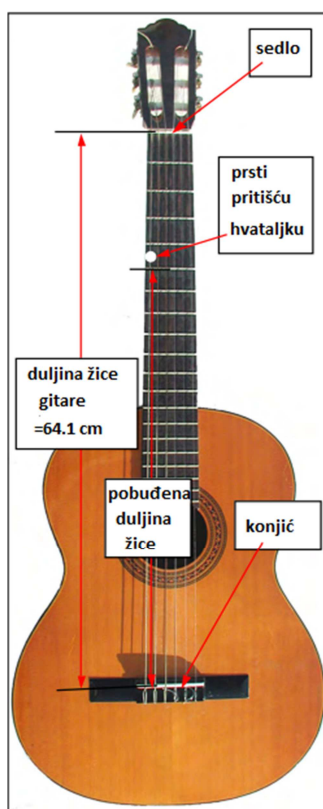
Slika 3.1: Sučelje Visual analysera

Visual analyser ima mogućnost točnog prikaza spektra frekvencije. Za vizualizaciju spektra frekvencije koristi FFT (brza Fourierova transformacija). FFT je algoritam koji računa diskretnu Fourierovu transformaciju (DFT) i njezin inverz. Fourierova analiza pretvara vrijeme u frekvenciju i suprotno, a FFT brzinski računa takve transformacije faktorizirajući DFT matricu u dijagonalne matrice. Posljedično, FFT algoritam se često koristi u mnogim aplikacijama u znanosti. S obzirom da u prirodi ne postoje čisti zvukovi, pomoću prikaza frekvencijskog spektra možemo uočiti točan broj harmonika od kojih je neki zvuk sastavljen uz onaj osnovni. Visual analyser ima mogućnost primanja signala na više načina: putem mikrofona, iz nekog vanjskog izvora zvuka direktno spojenog odgovarajućim kablom, ili sa CD/DVD uređaja na računalu.

Eksperimentalni postav koji je korišten za analizu je vrlo jednostavan: sastoji se od izvora zvuka (glazbeni instrumenti), računala opremljenog zvučnom karticom i Visual analysera. Pokazat ćemo više različitih valnih uzoraka i razmotriti ih na više različitih frekvencija.

3.2 Analiza eksperimentalno dobivenih podataka Visual analyserom

Najprije ćemo eksperimentalno provjeriti vrijede li omjeri napisani u tablici 3. No, ovoga puta smo uzeli da je osnovna frekvencija jednaka 130.81 Hz. Koristili smo akustičnu gitaru (metalne žice) koja ima 20 polja. Duljina žice gitare iznosila je 64.1 cm. Prikažimo teorijske i eksperimentalne podatke u tablici 6. Zvuk proizvodimo okidanjem žica desnom rukom, dok se pritiskanjem (pobuđivanjem) žica uz vrat gitare lijevom rukom mijenja visina tona (slika 3.1)



Slika 3.1: Akustična gitara

TEORIJSKO RAZMATRANJE:

TON	C	D	E	F	G	A	H	C ¹
f/Hz	130.81	146.83	164.81	174.61	196.0	220	246.94	261.63
L/cm	64.1	57	51.3	48.1	42.7	38.5	34.2	32.1

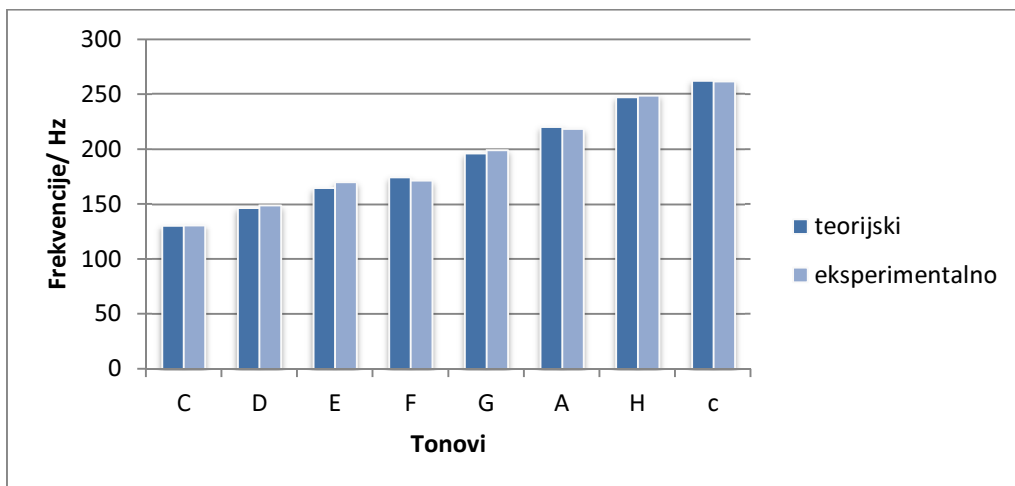
EKSPERIMENTALNO DOBIVENI PODACI:

TON	C	D	E	F	G	A	H	C ¹
f/Hz	131.1	149.1	170.0	171.6	199.0	218.2	248.4	261.1
L/cm	64.1	57.2	51.0	48.2	43.0	38.3	34.1	32.1

Tablica 6: Izmjerene frekvencije i odgovarajuće duljine žice

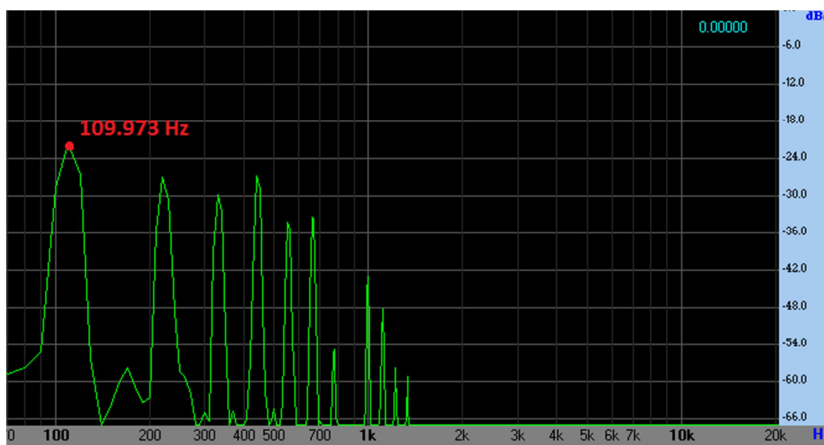
Najveće odstupanje od teorijske vrijednosti frekvencije je na tonu E, koje iznosi 3.15 %, dok su frekvencije na ostalim tonovima bliske teorijskim frekvencijama. Pogledajmo na

grafu (slika 20.) kako se odnose teorijska razmatranja sa eksperimentalno dobivenim podacima. Iz grafa vidimo da su frekvencije izmjerene eksperimentalno bliske teorijskim frekvencijama. Zaključujemo da ista žica pobuđena na različitim mjestima (različita valna duljina) daje tonove koji su u skladu sa teorijskim razmatranjima.

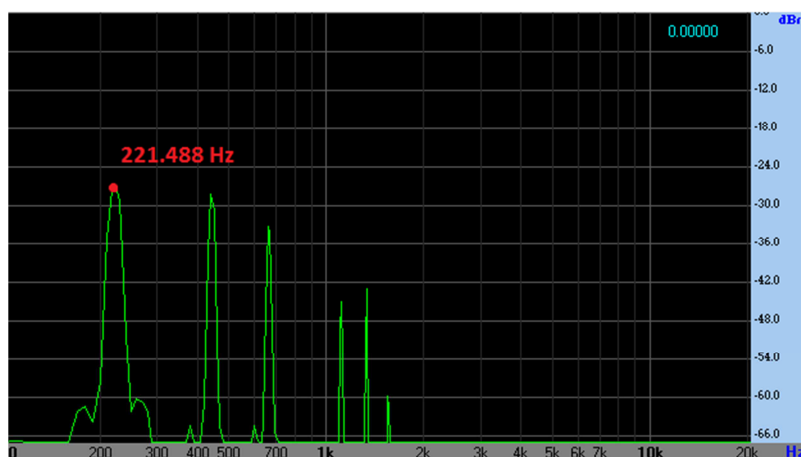


Slika 3.2: Prikaz frekvencija za određene tonove

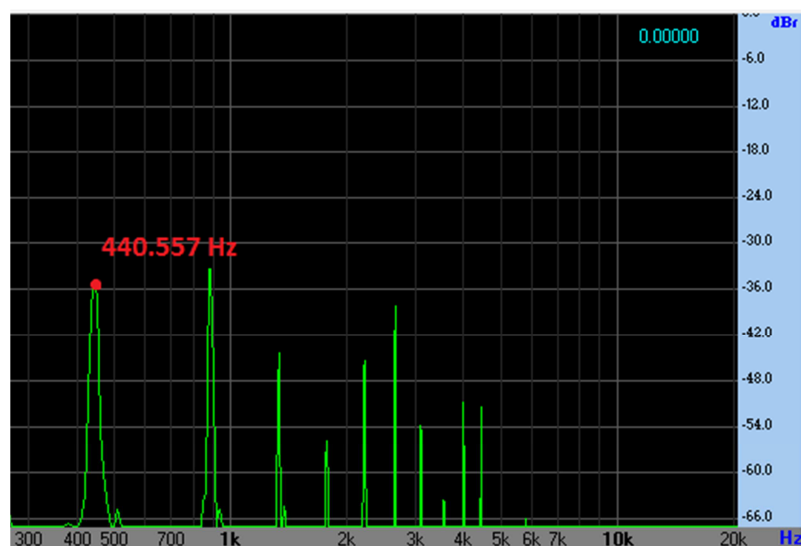
Sljedećim eksperimentom ćemo utvrditi pojam oktave. Ton koji je za oktavu viši od nekog datog tona ima zapravo dva puta veću frekvenciju, dok ton koji je za oktavu niži ima dva puta manju frekvenciju. Ton koji je za dvije oktave viši od datog tona ima četiri puta veću frekvenciju od istog. Skala se udvostručuje za svaku oktavu gore. Na primjer, za mali A je 110 Hz, za ton A je 220 Hz, a za A_1 je 440 Hz. Provjerimo to eksperimentalno. Koristili smo klasičnu gitaru (plastične žice) sa 20 polja. Slika 3.3 prikazuje spektre frekvencija i pripadnu osnovnu frekvenciju za odsvirane tonove.



a)



b)



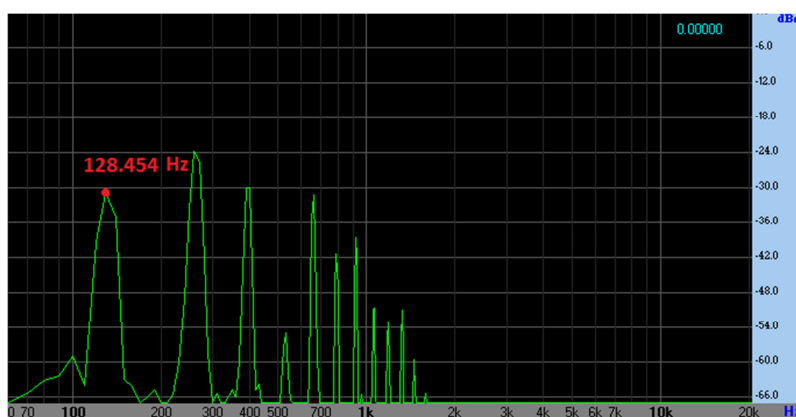
c)

Slika 3.3: Odsvirani tonovi i pripadne osnovne frekvencije: a) mali A, b) A, c) A_1 .

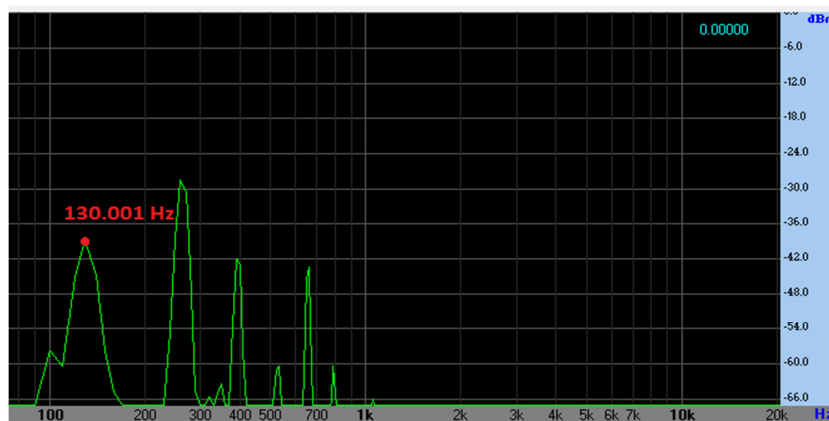
Možemo zaključiti da je ton A za oktavu viši od tona malog A, odnosno dva puta je veća frekvencija, dok je frekvencija tona A_1 za četiri puta veća od frekvencije tona malog A. Isto tako, ton A_1 ima dva puta veću frekvenciju u odnosu na ton A. Time smo ustanovili pojam oktave. Isto tako možemo uočiti da je zvuk u početku vrlo svjetao, dakle ima

jako izražene više harmonike (uzrok tome je udar prstiju po žici), a s vremenom postaje sve mekaniji, jer viši harmonici odumiru prije nego prvih nekoliko harmonika.

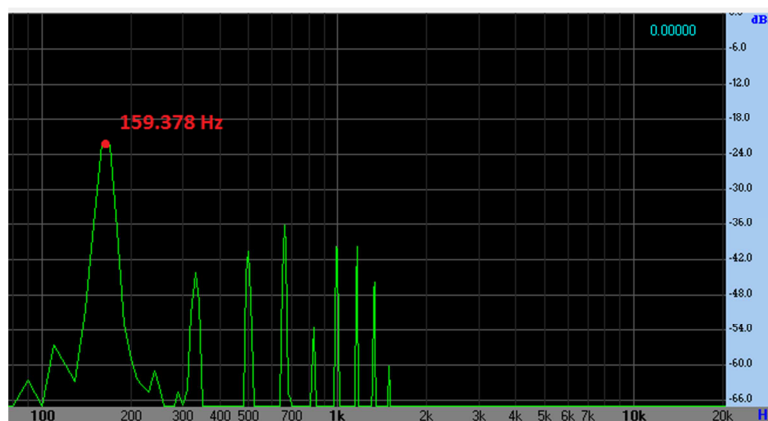
Sljedećim eksperimentom želimo ustanoviti ovisi li broj harmonika o jačini zvuka. Znamo da kvaliteta i boja zvuka ovise o broju i tipu viših harmonika koji se u njemu pojavljuju. Za eksperiment smo koristili klasičnu gitaru (plastične žice) sa 20 polja. Žicu na gitari smo trznuli najprije jače, te slabije, te smo tako dobili glasan i tihi ton. Odsvirali smo tonove C i E₁. Pogledajmo sliku 3.4 na kojoj su pripadni spektri frekvencija za pojedini ton trznut jače, potom slabije.



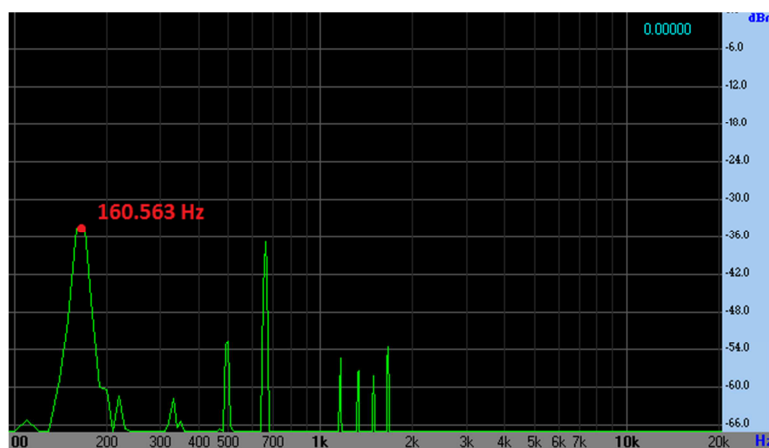
a) C (glasno)



b) C (tiho)



c) E_1 (glasno)



d) E_1 (tiho)

Slika 3.4: Spektri frekvencija odsviranih tonova

Na grafu a) se raspoznaje 10 viših harmonika uz osnovnu frekvenciju. Na ovoj web stranici <http://www.phy.mtu.edu/~suits/notefreqs.html> možemo pogledati točne frekvencije tonova za jednoliko temperiranu skalu, tako ton C iznosi 130.81 Hz. Prema toj osnovnoj frekvenciji ćemo teorijski pogledati na kojoj frekvenciji bi bili viši harmonici i usporediti s izmjenjenim frekvencijama pojedinih harmonika. U Tablici 7. predstavljeni su: izmjerene frekvencije pojedinih harmonika tona C, idealne frekvencije tona C, odnos izmjerene i idealne frekvencije pojedinih harmonika tona C i izmjereni nivo pojedinih harmonika tona C odsviranog glasno na klasičnoj gitari.

Harmonik	Idealan odnos frekvencija f/f_0	Izmjerena frekvencija f/Hz	Idealna frekvencija $n \cdot f_0 / Hz$	Izmjereni odnos frekvencija f/f_0	Izmjereni relativni nivo / dB
1	1:1	128.5	130.81	0.982	-37.92
2	2:1	265.2	261.62	1.01	-35.65
3	3:1	392.4	392.43	0.999	-37.82
4	4:1	526	523.24	1.01	-51.67
5	5:1	659.6	654.05	1.01	-40.85
6	6:1	790	784.86	1.01	-57.73
7	7:1	920.4	915.67	1.01	-49.50
8	8:1	1054	1046.48	1.01	-56.86
9	9:1	1162.1	1177.29	0.987	-78.07
10	10:1	1301	1308.1	0.995	-98.05
11	11:1	1432	1438.91	0.995	-109.51

Tablica 7: Osnovni rezultati mjerenja za ton C odsviran glasno na klasičnoj gitari

Na grafu b) se raspoznaje 5 viših harmonika uz osnovnu frekvenciju. U Tablici 8. pogledajmo: izmjerenu frekvenciju, odnos izmjerene i idealne frekvencije pojedinih harmonika tona C, te izmjereni nivo pojedinih harmonika tona C odsviranog slabo na klasičnoj gitari.

Harmonik	Idealan odnos frekvencija f/f_0	Izmjerena frekvencija f/Hz	Idealna frekvencija $n \cdot f_0 / Hz$	Izmjereni odnos frekvencija f/f_0	Izmjereni relativni nivo / dB
1	1:1	130	130.81	0.99	-40.08
2	2:1	263.9	261.62	1.01	-34.09
3	3:1	392.6	392.43	1.0004	-42.08
4	4:1	526.5	523.24	1.01	-62.74
5	5:1	655.2	654.05	1.002	-59.41
6	6:1	761	784.86	0.97	-72.63

Tablica 8: Osnovni rezultati mjerenja za ton C odsviran slabo na klasičnoj gitari

Možemo primijetiti da tiši ton ima više harmonika, dok glasan ton daje porast glasnoće viših harmonika. Isto tako možemo primijetiti da kod glasnog tona imamo izraženo 10 viših harmonika, a kod tišeg tona imamo izraženo 5 harmonika. Svi ti viši harmonici kod glasnog i tišeg tona se pojavljuju na približno jednakoj frekvenciji. Također im je i osnovna frekvencija približno jednaka teorijskoj vrijednosti.

Pogledajmo sada graf b) i predstavimo osnovne rezultate mjerenja u tablici 9. i tablici 10. Ton E iznosi 164.81 Hz.

Harmonik	Idealan odnos frekvencija f/f_0	Izmjerena frekvencija f/Hz	Idealna frekvencija $n \cdot f_0 / Hz$	Izmjereni odnos frekvencija f/f_0	Izmjereni relativni nivo / dB
1	1:1	159.4	164.81	0.98	-26.29
2	2:1	331.3	329.6	1.01	-43.64
3	3:1	496.1	494.4	1.003	-33.04
4	4:1	660.9	659.2	1.003	-30.15
5	5:1	832.9	824.1	1.01	-31.67
6	6:1	997.7	988.9	1.01	-32.57
7	7:1	1162.5	1153.7	1.01	-42.31

8	8:1	1327.3	1318.5	1.01	-59.42
---	-----	--------	--------	------	--------

Tablica 9: Osnovni rezultati mjerenja za ton E odsviran glasno na klasičnoj gitari

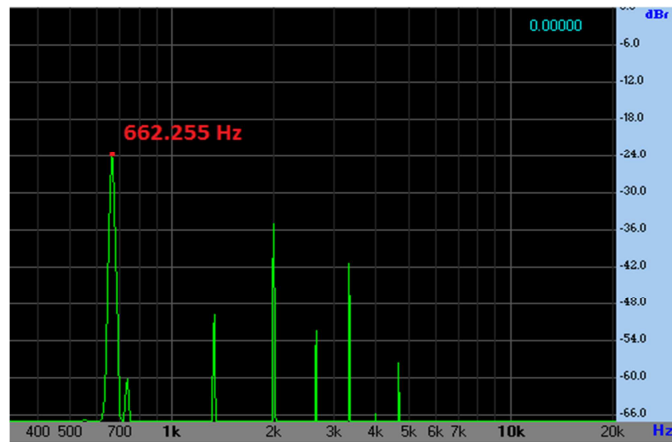
Harmonik	Idealan odnos frekvencija f/f_0	Izmjerena frekvencija f / Hz	Idealna frekvencija $n \cdot f_0$ / Hz	Izmjereni odnos frekvencija f/f_0	Izmjereni relativni nivo / dB
1	1:1	160.6	164.81	0.974	-41.49
2	2:1	338.4	329.6	1.03	-70.49
3	3:1	497.4	494.4	1.01	-44.61
4	4:1	661.7	659.2	1.004	-54.83
5	5:1		824.1		
6	6:1		988.9		
7	7:1	1160.2	1153.7	1.01	-77.31
8	8:1	1378.5	1318.5	1.05	-87.67
9	9:1		1483.3		
10	10:1	1658.7	1648.1	1.01	-77.99
11	11:1	1790.7	1812.9	0.99	-82.08

Tablica 10: Osnovni rezultati mjerenja za ton E odsviran tiho na klasičnoj gitari

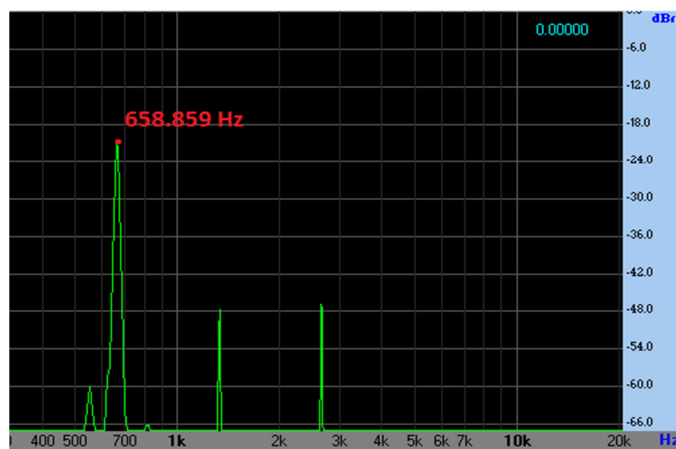
Osnovne frekvencije su približno jednake, no vidimo da je kod tona E odsviranog tiho intenzitet manji. Isto tako možemo uočiti da je prvi harmonik kod tona E odsviranog tiho manjeg intenziteta u odnosu na prvi harmonik kod tona E odsviranog glasno. također možemo vidjeti na slici 3.4 na grafovima c) i d) kako neki harmonici nedostaju. Kod tona E odsviranog tiho nedostaju 5., 6. i 9. harmonik, dok kod tona E odsviranog glasno nedostaju 9., 10. i 11. harmonik. Vidi se i da su 7. i 8. harmonik na grafu c) većeg intenziteta nego na grafu d) na slici 3.4.

Kako smo vidjeli da zvukove razlikujemo po boji jer je svaki zvuk sastavljen od harmonika, slike 3.3 i 3.4 isto tako pokazuju tu različitost boje odnosno sami spektar frekvencije. Kad se gitara svira tiho, ona ima mekan zvuk s blago izraženim višim harmonicima (ili nedostaju, kao što je slučaj kod tona C), što se glasnije svira, sadržaj viših harmonika se povećava i zvuk postaje oštriji.

Upoznajmo i proučimo pojam *flageolet* (franc., čita se: flažolet). To je posebna vrsta zvuka koji po boji podsjeća na zvuk flaute, visoki tonovi koji nastaju kad se žica prstom ne pritisne nego samo dodiruje. Proizvest ćemo prirodni *flageolet* koji se dobiva na praznoj žici. Pogledajmo (slika 3.5) kako izgledaju spektri frekvencija tona E odsviranog normalno pritiskom prsta na određeno polje na vratu gitare, potom tona E dobivenog *flageoletom*.



a)



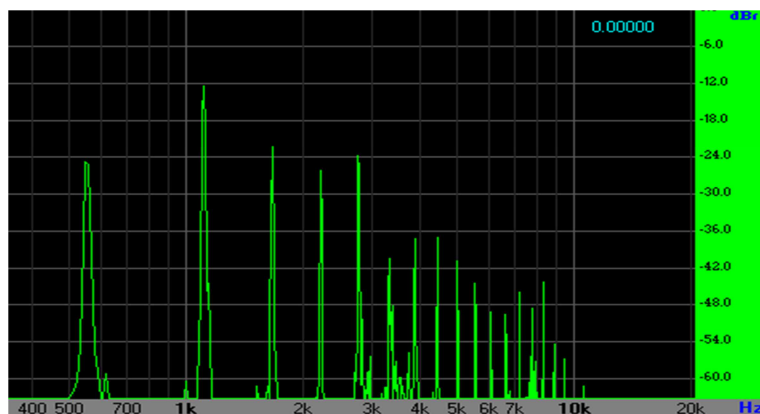
b)

Slika 3.5: Ton E odsviran: a) standardno, b) *flageolotom*

Možemo primijetiti da *flageolet* proizvodi relativno čisti i jasan ton dobre kvalitete. Također intenzitet osnovne frekvencije tona E odsviranog *flageolotom* je veći od intenziteta osnovne rekvencije tona E odsviranog standardno. Vidimo da je razlika otprilike oko 10 dB što predstavlja deset puta veći intenzitet zvuka, računajući prema formuli (2.47), ali treba imati na umu da je i uho logaritamski instrument detekcije, te mi 10 puta jači intenzitet ne percipiramo kao 10 puta jači intenzitet.

Bitno je iz ovih spektara frekvencija uočiti da kod sviranja trzanjem, visoke frekvencije puno brže zamiru, što nije slučaj kod npr. sviranja gudalom (slika 3.6). Boja tona ne ovisi samo o titranju žice, nego i građi glazbala, odnosno kompleksnom sustavu vibracije koje se šire sa žice na samo glazbalo, te naravno i tehnika sviranja uvelike utječe na boju tona, stoga možda zvučna kutija gitare preferira pojačati neke od harmonika, što možemo vidjeti na slikama 3.3c), 3.4 a) i b). U pravilu kod dobrih

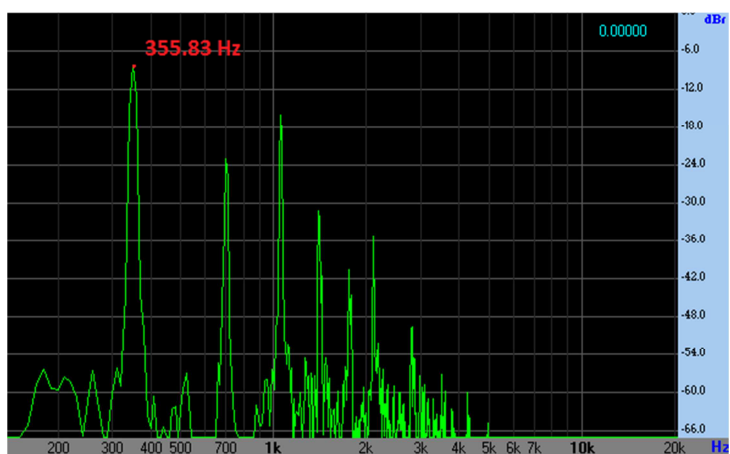
instrumenta viši harmonici po intenzitetu ne prevladavaju nad osnovnim tonom dok se kod slabijih to događa. [3]



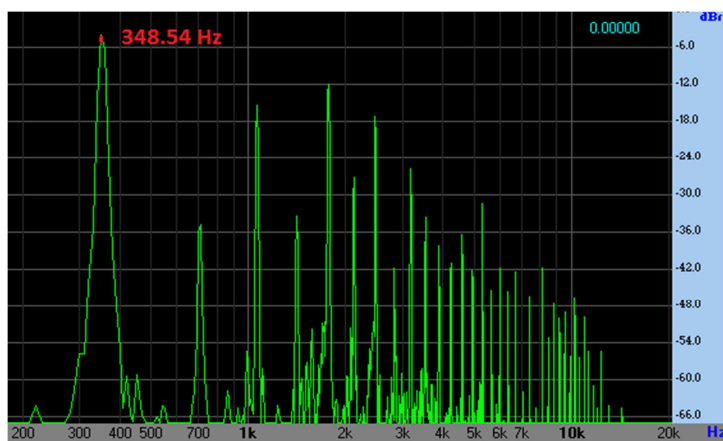
Slika 3.6: Spektar frekvencije tona C odsviranog na violi

Sa slike 3.6 možemo vidjeti kako viola ima mnogo više harmonika u odnosu na gitaru. Glazbala s gudalima konstantno pobuđuju žicu što bitno mijenja boju zvuka instrumenta.

Promotrimo malo spektre frekvencija odabranih puhačkih instrumenata. Rekli smo (2.7. poglavlje) da puhački instrumenti proizvode zvuk pomoću utitravanja stupca zraka u svirali. Primjer svirale otvorene s obje strane je flauta (slika 3.7 a)), a svirale zatvorene se jedne strane je klarinet (slika 3.7 b)). Imamo i sviralu zatvorenu s jedne strane, ali u obliku konusa, npr. saksofon čija se osnovna frekvencija ponaša slično kao kod instrumenta s dva otvorena kraja.



a)



b)

Slika 3.7: Odsviran ton F (349.23 Hz) na: a) flauta, b) klarinet

Flauta je jedan od najstarijih i najrasprostranjenijih glazbenih instrumenata. U simfonijskom orkestru, nakon dirigentske palice, najjednostavnija je flauta. Kod flaute osciliranje stupca zraka nastaje kada svirač upuhuje zrak preko malog otvora na jednom kraju instrumenta. Dok kod klarineta stupac zraka zatitra kada svirač puše u usnik u kojemu je jednostruki ili dvostruki jezičak. Visina tona je određena duljinom stupca zraka. Duljina stupca zraka može se mijenjati otvaranjem i zatvaranjem rupica koje su trajno napravljene u tijelu instrumenta. Boja tona flaute i klarineta ovisi o obliku cijevi instrumenta i vrste jezička. Osim toga klarinet i flauta se razlikuju po izgledu i konstrukciji, stoga im se razlikuje i boja tona. Klarinet se izrađuje od drveta, dok se flauta i saksofon izrađuju od metala. Svi ti parametri utječu na raspored i jakost viših harmonika u spektru frekvencija, koji daju boju tonu, po čemu razlikujemo tonove instrumenata.



a)



b)



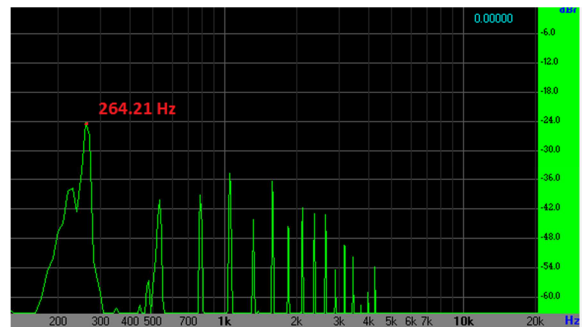
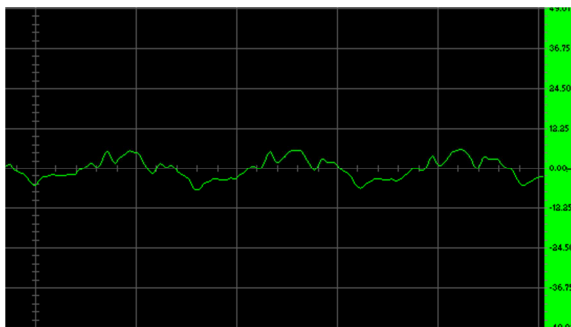
c)



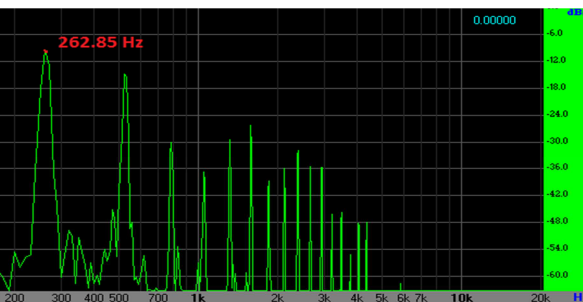
d)

Slika 3.8 Glazbeni instrumenti: a) flauta, b) klarinet, c) saksofon, d) klavir.

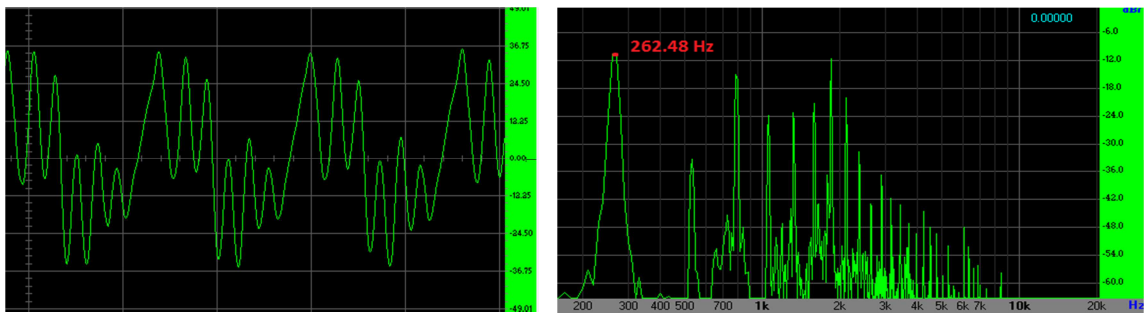
Pogledajmo valni oblik i spektre frekvencija tona C (261.63 Hz) odsviranog na klasičnoj gitari, klaviru, klarinetu, alt saksofonu i tenor saksofonu (slika 3.9).



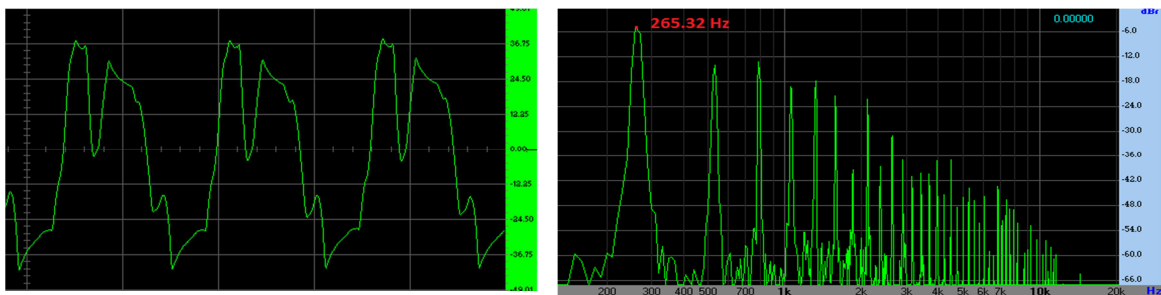
a)



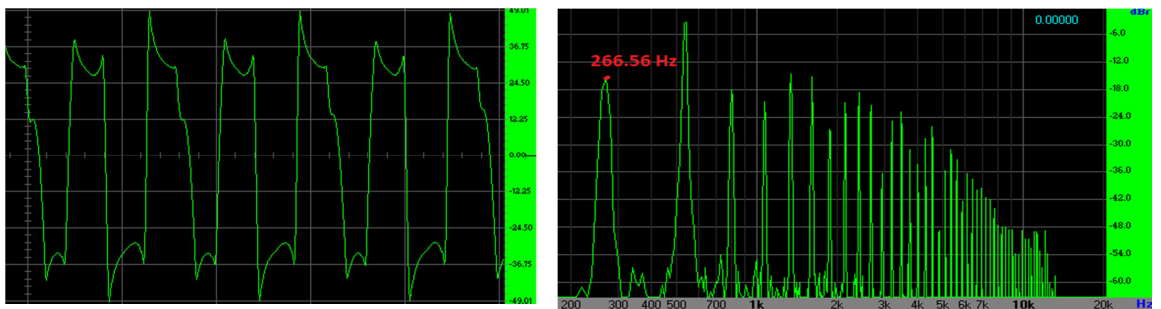
b)



c)



d)



d)

Slika 3.9: Ton C odsviran na: a) klasičnoj gitari, b) klarinetu, c) alt saksofonu, d) tenor saksofonu.

Klavir je glazbeni instrument s tipkama koji proizvodi ton udarom batića, koji je povezan s tipkom, u žicu.

Saksofon je najmlađi instrument u obitelji drvenih puhačkih instrumenata, iako je izrađen od metala. Uvrštava se u drvene puhačke intrumente zbog svoje mehanike (čunjasta cijev i tehnika su slične oboi) i faktora koji prozivodi ton- jednostruki jezičak

koji je sličan klarinetovom. Saksofon ima boju tona sličnu ljudskom glasu. Lijepog je i toplog tona i velikih tehničkih mogućnosti. U simfonijskim orkestrima upotrebljava se vrlo rijetko, uglavnom za izvođenje solo dionica, nezamjenjiv je u jazz glazbi. Alt saksofon je manji i može svirati više tonove, a tenor saksofon je veći i može svirati dublje tonove.

Vidimo da vremenske promjene zvučnih valova imaju različite oblike za različite instrumente. Na osnovu te razlike stječe se dojam različite boje zvuka- razlikuju se glazbeni instrumenti. Isto tako, analiza frekvencija pokazuje različit doprinos viših harmonika u valnom obliku. Te razlike ovise o frekvenciji, amplitudi i fazi svakog harmonika, a one su različite za različite instrumente. U usporedbi s gitarom i klavirom, klarinet i saksofon imaju puno više harmonika, koji su slabijeg intenziteta na višim frekvencijama. Evidentna je razlika između gitare, klavira, klarineta i saksofona i ako se njima odsvira ton jednake visine, odnosno frekvencije.

Dakle, svaki instrument će posjedovat svoje vlastite, specifične više harmonike i time boju zvuka jedinstvenu unutar tipa instrumenta.

Zaključak

U ovom radu opisujemo i proučavamo nekoliko veza između matematike, fizike i glazbe. Krenuli smo općenito od valnog gibanja, opisali smo detaljnije nastanak longitudinalnih valova u elastičnom štapu. Potom smo razmatrali longitudinalne valove u plinovima, konkretno smo dobili izraz za brzinu vala. Isto tako dobili smo izraz za brzinu transversalnih valova na napetoj žici. Zatitramo li neko mjesto na toj napetoj žici kojoj su oba kraja učvršćena, s tog će se mjesta prema krajevima žice širiti dva jednaka vala, nastat će tzv. stojni val. U žičanim glazbenim instrumentima titrajuća napeta žica pobuđuje čestice zraka na titranje, pri čemu nastaju tonovi čije su frekvencije jednake vlastitim frekvencijama.

Upoznali smo se s pojmovima glazbene ljestvice i intervala. Krenuli smo od Pitagore i njegovih otkrića koja su dovela do današnjih glazbenih intervala i ljestvica. Zatim smo promatrali tzv. dijatonsku ljestvicu na shemi dijela vrata šesterožičane akustične gitare. Da bismo u glazbi s uspjehom koristili intervale, potrebno je da ljestvice budu tako građene da možemo od proizvoljnog tona početi melodiju. Danas su svi glazbeni instrumenti sa stalnim tonovima podešeni na temperiranu ljestvicu.

Detaljnije smo razmotrili fiziku gitare. Zaključili smo da žica sama po sebi daje jedva čujne zvukove, stoga upotrebljujemo rezonatore, odnosno zvučnu drvenu kutiju.

U eksperimentalnom dijelu koristili smo program Visual analyser koji ima mogućnost točnog prikaza spektra frekvencije koristeći FFT algoritam. Prvim eksperimentom smo ustanovili omjere koje je nagovještao Pitagora. Na akustičnoj gitari smo pobuđivali žicu na različitim duljinama žice, te dobili odgovarajuće frekvencije titranja te žice. Zaključili smo da žica pobuđena na različitim mjestima (različita valna duljina) daje tonove koji su u skladu sa teorijskim razmatranjima. Sljedećim eksperimentom smo utvrdili pojam oktave. Na klasičnoj gitari odsvirali smo tri tona (mali A, A, A_1). Zaključili smo da je ton A za oktavu viši od tona malog A, odnosno dva puta je veća frekvencija, dok je frekvencija tona A, za četiri puta veća od frekvencije tona malog A. Zatim smo neke tonove na klasičnoj gitari odsvirali tiho, potom glasno. Kad se gitara svira tiho, ona ima mekan zvuk s blago izraženim višim harmonicima, što se glasnije svira, sadržaj viših harmonika se povećava i zvuk postaje oštriji. Upoznali smo se s pojmom *flageolet*. *Flageoletom* dobivamo osnovni ton većeg intenziteta. Na kraju smo usporedili spektre frekvencija gitare, klavira, flaute, klarineta, te saksofona na primjeru jednog odsviranog

tona. Zaključili smo da se glazbeni instrumenti uveliko razlikuju po frekvencijama koje su prisutne u njihovim spektrima, odnosno po boji.

A ono što se u glazbi ne može fizikalno i matematički objasniti je subjektivan doživljaj koji svaka osoba ima prilikom slušanja neke skladbe.

Literatura

- [1] G. Anfilov, *Physics and music*, Mir Publishers Moscow, Moscow, 1966.
- [2] O. Bilan, *Chladnijeve figure*, preuzeto 18.4.2015. sa <http://www.audiologs.com/ozrenbilan/Chladni.pdf>
- [3] N. Brković, *Fizika 3- udžbenik za 3. razred gimnazija*, LUK d.o.o., Zagreb, 1999.
- [4] D. Horvat, *Fizika- odabrana poglavlja*, Hinus, Zagreb, 1999.
- [5] I. Johnston, *Measured tones- the interplay of physics and music*, Institute of Physics Publishing, London, 2002.
- [6] J. Labor, *Fizika 3- udžbenik za 3. razred gimnazije*, Alfa, Zagreb, 2007.
- [7] V. Lopac, *Leksikon fizike*, Školska knjiga, Zagreb, 2009.
- [8] M. Paić, *Gibanja, sile, valovi*, Školska knjiga, Zagreb, 1997.
- [9] J. Reber, *The physics of acoustic guitar*, preuzeto 6.5.2015. sa <http://newt.phys.unsw.edu.au/music/guitar/guitarintro.html>
- [10] Z. Šikić, Z. Šćekić, *Matematika i muzika*, Profil, Zagreb, 2013.
- [11] H.D. Young, R. A. Freedman, *Sears and Zemansky's University Physics with modern physics*, Pearson Education, USA, 2008.

Sažetak

Glazba je često ta, koja daje smisao našem životu i u kojoj možemo naći i utjehu i veselje. Jedan od najpopularnijih instrumenata je sigurno gitara. Na boju zvuka gitare utječu mnogi parametri, kao što su drvo od kojeg je gitara izrađena, žica koje se koriste, oblika vrata itd., stoga dvije gitare nikada neće zvučati isto. To možemo vidjeti i na spektru frekvencija, čija superpozicija daje karakterističnu boju zvuka, od kojih se sastoji bilo koji ton gitare. Istraživanjem veza između matematike, fizike i glazbe može se dobiti bolji uvid u strukturu i pozadinu glazbe.

Summary

It is music that gives our life meaning, so that we can find in it, both comfort and joy. The most popular of instruments is surely the guitar. There are many parameters that affect the timbre of the guitar, such as the type of wood used, the type of strings, the shape of its neck, ect. and as a result, no two guitars will ever sound the same. This can also be seen on the frequency spectrum, where the superposition gives the characteristic timbre, a vital part of any guitar tone. Researching the links between mathematics, physics and music, one can get a better insight into the structure and background of music.

Životopis

Zovem se Vanessa Špehar. Rođena sam 9.8.1988. u Karlovcu gdje sam pohađala osnovnu i srednju školu. Maturirala sam 2007. godine u Šumarskoj i drvodjeljskoj školi, smjer meteorološki tehničar.

Iste godine sam upisala integrirani preddiplomski i diplomski sveučilišni studij Matematika i fizika, smjer nastavnički.

