B-splajn i interpolacija

Šućur, Marija

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Marija Šućur

B-SPLAJN I INTERPOLACIJA

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Tina Bosner

Zagreb, srpanj, 2014

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Ovaj diplomski rad posvećujem svojim roditeljima koji su kroz svo vrijeme bili moja velika podrška i oslonac. Zahvalila bih se svojim prijateljima koji su također bili uz mene u dobrim i lošim danima te usprkos svemu još uvijek su tu. Na kraju, željela bih još zahvaliti svojoj mentorici doc. dr. sc. Tini Bosner što mi je kao mentorica svojim korisnim primjedbama i savjetima mnogo pomogla prilikom izrade ovog diplomskog rada.

Sadržaj

Sadržaj **iv**

Uvod **1**

1 Podijeljene razlike **2**
1.1 Definicija i svojstva podijeljenih razlika 2

2 B-splajn **6**
2.1 Definicija i rekurzivna relacija B-splajna 6
2.2 Nosač i pozitivnost 8
2.3 Particija jedinice 9
2.4 Prostor splajnova $\$_{k,\mathbf{t}}$ 10
2.5 Marsdenov identitet 11
2.6 Po dijelovima polinomne funkcije u $\$_{k,t}$ 13
2.7 Lokalna linearna nezavisnost 14
2.8 Dualni funkcionali 15

3 Evaluacija B-splajnova **17**
3.1 Derivacija B-splajna 18

4 Interpolacija splajnom **20**
4.1 Schoenberg-Whitney teorem 21
4.2 ”Vrpčasti” oblik interpolacijske matrice 24
4.3 Totalna pozitivnost interpolacijske matrice 24
4.4 Ocjena greške 25

5 Primjer interpolacije B-splajnom **29**
5.1 Objašnjenje definiranih funkcija 29
5.2 Primjena definiranih funkcija na primjeru 31

Bibliografija **35**

Uvod

Splajn je numerička funkcija sastavljena od po dijelovima polinomnih funkcija. Naziv dolazi od fleksibilne metalne trake koja je pomagala za crtanje zakrivljenih linija. Prije korištenja računala, numerička računanja su se ručno izvodila i za to je posebno preferirana bila polinomna interpolacija. S razvojem računala, splajnovi su lagano zamijenili polinome u interpolaciji radi poželjnih svojstava koja imaju. Zahvaljujući njima splajnovi se mogu relativno brzo i jednostavno računati. U ovom diplomskom radu će se pokazati zašto je kod splajnova najpogodnija baza **B-splajnova**. Na samom početku je bitno istaknuti da će ih se definirati preko podijeljenih razlika čija su svojstva tema prvog poglavlja.

U drugom poglavlju kreće se od definicije B-splajna i de Boor-Coxove rekurzije preko koje se oni zapravo računaju. Nadalje, imaju minimalni nosač i čine particiju jedinice. Jedna od karakteristika B-splajna je da se bilo koja splajn funkcija može prikazati kao linearna kombinacija B-splajnova istog reda. Isto tako će se dokazati kako je prostor B-splajnova zapravo jednak prostoru svih po dijelovima polinomnih funkcija reda k, sa točakama prekida ξ koje su određen broj puta neprekidno derivabilne u tim točkama prekida.

Također, dokazat će se valjanost de Boor-ovog algoritma, a još jedna zanimljivost kod B-splajnova je da derivacija splajna s je ponovno splajn sa istim nizom čvorova, ali za jedan red manji što je obrađeno u trećem poglavlju rada.

Tema četvrtog poglavlja je pokazivanje na koji način je najjednostavnije interpolirati funkcije pomoću B-splajnova te će se dokazati jako važan rezultat (Schoenberg-Whitney teorem). Kolokacijska matrica kod ovakve interpolacije je "vrpčasta" širine k. Prednost rješavanja sustava sa vrpčastom matricom je činjenica da je potrebno manje memorije u odnosu na druge interpolacije. Odnosno, dovoljno je spremiti $(2k - 1)n$ elemenata matrice u memoriju, umjesto svih $n \times n$.

Na samom kraju rada će se na primjerima pokazati da je odabir interpolacijskih točaka jako bitan jer kod svake interpolacije postoje greške odnosno odstupanja od originalne funkcije. Izbor Greville-ovih točaka za interpolaciju će biti pokazan kao najbolji mogući. Također, bit će istaknuto da broj interpolacijskih točaka utječe na ponašanje grešaka. Funkcije koje računaju sve navedeno će biti implementirane u programskom jeziku MATLAB.

Poglavlje 1

Podijeljene razlike

B-splajnovi su definirani korištenjem podijeljenih razlika čija teorija ima jako bitnu ulogu u "Numeričkoj analizi". U ovom poglavlju ćemo definirati i navesti neka bitna njihova svojsta.

1.1 Definicija i svojstva podijeljenih razlika

Jedan od načina definiranja podijeljenih razlika je putem kvocijenta determinanti. Prednost takvog pristupa je što omogućava brzu i jednostavnu derivaciju splajnova.

Definicija 1.1.1. *Neka je $\{u_i\}_1^m$ skup funkcija definiranih na nekom skupu I, te neka su $t_1, \ldots, t_m$ točke iz I za koje vrijedi*

$$t_1 < t_2 < \cdots < t_m.$$

Tada definiramo ***matricu*** *određenu sa $\{u_i\}_1^m$ i sa $\{t_i\}_1^m$ na sljedeći način:*

$$M\begin{pmatrix} t_1, \ldots, t_m \\ u_1, \ldots, u_m \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} u_1(t_1) & u_2(t_1) & \cdots & u_m(t_1) \\ u_1(t_2) & u_2(t_2) & \cdots & u_m(t_2) \\ \cdots & & & \\ u_1(t_m) & u_2(t_m) & \cdots & u_m(t_m) \end{bmatrix}, \tag{1.1}$$

dok se njena ***determinanta*** *označava sa:*

$$D\begin{pmatrix} t_1, \ldots, t_m \\ u_1, \ldots, u_m \end{pmatrix} = \det M\begin{pmatrix} t_1, \ldots, t_m \\ u_1, \ldots, u_m \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

Korisno je još definirati matrice za skup točaka za koje vrijedi:

$$t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_m \tag{1.3}$$

gdje se neke od t_i ponavljaju. Kako bi se opisalo koje točke su jednake pretpostavljamo sljedeće

$$t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_m = \overbrace{\tau_1, \ldots, \tau_1}^{l_1}, \ldots, \overbrace{\tau_d, \ldots, \tau_d}^{l_d}, \tag{1.4}$$

gdje se svaka od τ_i ponavlja točno l_i puta i vrijedi da je $\sum_{i=1}^{d} l_i = m$. Tada za bilo koje dovoljno puta derivabilne funkcije $u_1, \ldots, u_m$, definiramo

$$M\begin{pmatrix} t_1, \ldots, t_m \\ u_1, \ldots, u_m \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} u_1(\tau_1) & u_2(\tau_1) & \cdots & u_m(\tau_1) \\ Du_1(\tau_1) & Du_2(\tau_1) & \cdots & Du_m(\tau_1) \\ \cdots & & & \\ D^{l_1-1}u_1(\tau_1) & D^{l_1-1}u_2(\tau_1) & \cdots & D^{l_1-1}u_m(\tau_1) \\ \cdots & & & \\ u_1(\tau_d) & u_2(\tau_d) & \cdots & u_m(\tau_d) \\ Du_1(\tau_d) & Du_2(\tau_d) & \cdots & Du_m(\tau_d) \\ \cdots & & & \\ D^{l_d-1}u_1(\tau_d) & D^{l_d-1}u_2(\tau_d) & \cdots & D^{l_d-1}u_m(\tau_d) \end{bmatrix} \tag{1.5}$$

Definicija 1.1.2. *Za točke $t_1, ..., t_{r+1}$, i dovoljno puta derivabilnu funkciju f definiramo njenu* ***podijeljenu razliku reda r u točkama*** *$t_1, ..., t_{r+1}$ sa*

$$[t_1, ..., t_r]f = \frac{D\begin{pmatrix} t_1, ..., t_{r+1} \\ 1, x, ..., x^{r-1}, f \end{pmatrix}}{D\begin{pmatrix} t_1, ..., t_{r+1} \\ 1, x, ..., x^{r} \end{pmatrix}} \tag{1.6}$$

uz pretpostavku da su točke $t_1, ..., t_{r+1}$ rastuće tj. $t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_{r+1}$.

Ako su točke $\mathbf{t}$ različite, tada je $[t_1, ..., t_{r+1}]f$ definirano za svaku funkciju koja ima konačnu vrijednost u tim točkama. U slučaju da se neke od točaka $\mathbf{t}$ ponavljaju više nego jednom tada vrijednost determinante iz definicije ovisi o određenim derivacijama od f, i odgovarajuća podijeljena razlika ima smisla samo za funkcije koja posjeduje te potrebne derivacije.
Sljedeći teorem daje neka temeljna svojstva podijeljenih razlika:

Teorem 1.1.3. *Ako su $t_1, ..., t_{r+1}$ međusobno različite, tada*

$$[t_1, ..., t_{r+1}]f = \sum_{i=1}^{r+1} \frac{f(t_i)}{\omega'(t_i)} = \sum_{i=1}^{r+1} \frac{f(t_i)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{r+1}(t_i - t_j)} \tag{1.7}$$

gdje je

$$\omega(t) = (t - t_1)(t - t_2)...(t - t_{r+1})$$

Općenito, ako je

$$t_1, ..., t_{r+1} = \overbrace{\tau_1, \cdots, \tau_1}^{l_1}, \ldots, \overbrace{\tau_d, \ldots \tau_d}^{l_d} \tag{1.8}$$

gdje su $\tau_1 < \ldots < \tau_d$, *tada je*

$$[t_1, ..., t_{r+1}]f = \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{l_i} \alpha_{i,j} D^{j-1} f(\tau_i) \tag{1.9}$$

gdje je

$$\alpha_{i,l_i} \neq 0 \; i = 1, 2, \ldots, d.$$

Tako je podijeljena razlika reda r linearni funkcional definiran na svim dovoljno glatkim funkcijama. Ako se funkcije f *i* g *podudaraju u točkama* $(t_i)_1^{r+1}$ *u smislu da*

$$D^{j-1} f(\tau_i) = D^{j-1} g(\tau_i), \; j = 1, \ldots, l_i \; i \; i = 1, \ldots, d \tag{1.10}$$

tada vrijedi $[t_1, ..., t_{r+1}]f = [t_1, ..., t_{r+1}]g$.

Još jedno od bitnih svojstava je da se podijeljene razlike rekurzivno računaju, na način kako je opisano u teoremu:

Teorem 1.1.4. *Za bilo koji izbor točaka* $t_1, \ldots, t_{r+1}$ *i za proizvoljnu, dovoljno glatku funkciju* f,

$$[t_1, ..., t_{r+1}]f = \frac{[t_2, ..., t_{r+1}]f - [t_1, ..., t_r]f}{t_{r+1} - t_1} \tag{1.11}$$

ako je $t_1 \neq t_{r+1}$. *Ako je* $t_1 = t_2 = \ldots = t_{r+1}$, *tada je*

$$[t_1, ..., t_{r+1}]f = \frac{D^r f(t_i)}{r!} \tag{1.12}$$

Ako je $C^r[a, b]$, *gdje je* $a = min_{1 \leq i \leq r+1} t_i$ *i* $b = max_{1 \leq i \leq r+1} t_i$, *za neki* θ *vrijedi*

$$[t_1, ..., t_{r+1}]f = \frac{D^r f(\theta)}{r!}, \; a \leq \theta \leq b. \tag{1.13}$$

Što se tiče podijeljenih razlika potencija od x, imamo

$$[t_1, ..., t_{r+1}]x^j = \begin{cases} 0, & j = 0, 1, \ldots, r-1 \\ \rho_{j-r}(t_1, \ldots, t_{r+1}), & j = r, r+1, \ldots \end{cases} \tag{1.14}$$

gdje je $\rho_0(t_1, \ldots, t_{r+1}) = 1$ *i*

$$\rho_l(t_1, \dots, t_{r+1}) = \sum_{1 \le i_1 \le i_2 \le \dots \le i_l \le r+1} (t_{i_1} t_{i_2} \dots t_{i_l}). \tag{1.15}$$

Sljedeći teorem je *Leibnizovo pravilo* za podijeljenu razliku produkta dviju funkcija:

Teorem 1.1.5. *Za bilo koji izbor točaka $t_1, t_2, \dots, t_{r+1}$ i funkcije f i g vrijedi*

$$[t_1, ..., t_{r+1}]fg = \sum_{i=1}^{r+1} [t_1, ..., t_i] f [t_i, ..., t_{r+1}] g \tag{1.16}$$

Teorem 1.1.6. *Ako je g polinom reda $k+1$, tada je $[t_i, \dots, t_{i+k}]g$ konstanta kao funkcija u točkama $t_i, \dots, t_{i+k}$. Također,*

$$[t_i, \dots, t_{i+k}]g = 0, \ \textit{za svaki } g \in \Pi_{<k} \tag{1.17}$$

U nastavku rada su nam potrebna svojstva podijeljenih razlika koja su navedena u ovom poglavlju. Njihove dokaze se može naći u [5].

Poglavlje 2

B-splajn

Jedna velika klasa funkcija koja ima zanimljiva i poželjna svojstva u numerici su B-splajnovi. Tema ovog poglavlja je definicija B-splajnova kao i obrada spomenutih zanimljivih svojstava. Pokazat će se također i činjenica da B-splajnovi čine bazu za prostor po dijelovima polinomnih funkcija.

2.1 Definicija i rekurzivna relacija B-splajna

B-splajnove će se definirati pomoću k-tih podijeljenih razlika funkcije odsječenih potencija.

Definicija 2.1.1. *Neka je* $\mathbf{t} := (t_j)$ *za* $j = 1, \ldots, n + k$ *nepadajući niz čvorova.* ***j-ti B-splajn reda*** k *za niz čvorova* $\mathbf{t}$*, u oznaci* $B_{j,k,\mathbf{t}}$*, definira se sa:*

$$B_{j,k,\mathbf{t}}(x) := (-1)^k (t_{j+k} - t_j)[t_j, ..., t_{j+k}](x - t)_+^{k-1}, \forall x \in \mathbb{R}, j = 1, ...n. \tag{2.1}$$

S druge strane, odsječena potencija $(x)_+^r$ *je definirana na sljedeći način:*

$$(x)_+^r := \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x^r & x > 0 \end{cases} \tag{2.2}$$

za r=1,2,3,. . ., a za $r = 0$ *:*

$$(x)_+^0 = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

Ako se k i $\mathbf{t}$ podrazumijevaju tada će se umjesto $B_{j,k,\mathbf{t}}$ uglavnom pisati B_j ili $B_{jk} = B_{j,k}$. B-splajnovi reda k se mogu računati pomoću B-splajnova manjeg reda, odnosno putem rekurzivne relacije. Da bi se moglo rekurzivno računati, potrebno je znati početne uvjete koji su u ovom slučaju dani kada je $k = 1$. Zatim, ćemo dokazati valjanost relacije (2.5) za sve $k > 1$.

Teorem 2.1.2. *(de Boor-Cox-ova rekurzija) U slučaju kada je $k = 1$, za sve $x \in [t_j, t_{j+1}\rangle$ vrijedi:*

$$B_{j,1}(x) = \begin{cases} 1, & \textit{ako je } t_j \leq x < t_{j+1} \\ 0, & \textit{inače.} \end{cases} \tag{2.4}$$

Za $k > 1$

$$B_{j,k} = \omega_{j,k} B_{j,k-1} + (1 - \omega_{j+1,k}) B_{j+1,k-1} \tag{2.5}$$

gdje je

$$\omega_{j,k}(x) := \begin{cases} \frac{x - t_j}{t_{j+k-1} - t_j} & , \textit{ za } t_j \neq t_{j+k-1} \\ 0 & , \textit{inače} \end{cases} \tag{2.6}$$

Dokaz. Prvo, dokazuje se da vrijedi relacija (2.4) gdje je $k = 1$, a zatim ćemo dokazati za $k > 1$.

Neka je $t_j < t_{j+1}$ tada je

$$B_{j,1}(x) = -(t_{j+1} - t_j)(x - t)_+^0 [t_j, t_{j+1}] = -(x - t_{j+1})_+^0 + (x - t_j)_+^0.$$

Obzirom da je x proizvoljan potrebno je provjeriti sljedeća tri slučaja:

1. $x < t_j \Rightarrow B_{j,1}(x) = 0 + 0 = 0$
2. $t_j \leq x < t_{j+k} \Rightarrow B_{j,1}(x) = 0 + 1 = 1$
3. $x \geq t_{j+k} \Rightarrow B_{j,1}(x) = -1 + 1 = 0$

Dokazano je da u slučaju $k = 1$ tvrdnja vrijedi, provjerimo za $k > 1$.
Izraz $(x - t)_+^{k-1}$ se može zapisati kao

$$(x - t)_+^{k-1} = (x - t)(x - t)_+^{k-2}.$$

Budući da vrijede sljedeće jednakosti:

1. $[t_j](x - t) = (x - t_j)$
2. $[t_j, t_{j+1}](x - t) = -1$
3. $[t_j, \ldots, t_r](x - t) = 0$ za $r > j + 1$,

uz primjenu Teorema 1.1.5, dobije se

$$[t_j, \dots, t_{j+k}](x-t)_+^{k-1} = (x-t_j)[t_j, \dots, t_{j+k}](x-t)_+^{k-2} - 1[t_{j+1}, \dots, t_{j+k}](x-t)_+^{k-2}. \tag{2.7}$$

Nadalje, Teorem 1.1.4 i relacija (2.7) daju

$$\begin{aligned}
&(-1)^k[t_j, \dots, t_{j+k}](x-t)_+^{k-1} = \frac{(-1)^k}{t_{j+k}-t_j}\Big([t_{j+1}, \dots, t_{j+k}](x-t)_+^{k-1} - [t_j, \dots, t_{j+k-1}](x-t)_+^{k-1}\Big)\\
&= \frac{(-1)^k}{t_{j+k}-t_j}\Big((x-t_{j+1})[t_{j+1}, \dots, t_{j+k}](x-t)_+^{k-2} - [t_{j+2}, \dots, t_{j+k}](x-t)_+^{k-2} -\\
&- (x-t_j)[t_j, \dots, t_{j+k-1}](x-t)_+^{k-2} + [t_{j+1}, \dots, t_{j+k-1}](x-t)_+^{k-2}\Big)\\
&= \frac{(-1)^{k-1}}{t_{j+k}-t_j}\Big((x-t_j)[t_j, \dots, t_{j+k-1}](x-t)_+^{k-2} + (t_{j+1}-x)[t_{j+1}, \dots, t_{j+k}](x-t)_+^{k-2} +\\
&+ (t_{j+k}-t_{j+1})[t_{j+1}, \dots, t_{j+k}](x-t)_+^{k-2}\Big).
\end{aligned} \tag{2.8}$$

a pomnoži li se izraz (2.8) sa $(t_{j+k} - t_j)$ dobije se

$$\begin{aligned}
&(-1)^k(t_{j+k}-t_j)[t_j, \dots, t_{j+k}](x-t)_+^{k-1} =\\
&= (-1)^{k-1}(x-t_j)[t_j, \dots, t_{j+k-1}](x-t)_+^{k-2} + (-1)^{k-1}(t_{j+k}-x)[t_{j+1}, \dots, t_{j+k}](x-t)_+^{k-2}\\
&= \frac{x-t_j}{t_{j+k-1}-t_j}B_{j,k-1} + \frac{t_{j+k}-x}{t_{j+k}-t_{j+1}}B_{j+1,k-1}.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Naposljetku, uvrštavanjem $\omega_{j,k}$ iz (2.6) tvrdnja je dokazana. □

2.2 Nosač i pozitivnost

Iduće svojstvo pokazuje da je nosač B-splajna relativno mali, a da je unutar nosača njegova vrijednost pozitivna.

Teorem 2.2.1. *B-splajn $B_{j,k,t}$ je po dijelovima polinomna funkcija reda k s točkama prekida $t_j, \dots, t_{j+k}$, sastavljena od najviše k netrivijalnih polinomnih funkcija, koje iščezavaju izvan intervala $[t_j, t_{j+k}\rangle$ i pozitivna je na interioru tog intervala, odnosno,*

$$B_{j,k,\mathbf{t}} > 0, \;\; t_j < x < t_{j+k}.$$

Vrijedi

$$t_j = t_{j+k} \Rightarrow B_{j,k,\mathbf{t}} = 0.$$

Dokaz. Iz definicije funkcije odsječenih potencija je $(x)_+^r = 0$ za sve $x < 0$, što vrijedi i u slučaju funkcije $(x-t)_+^{k-1} = 0$ kada je $x < t_j$, a $t = t_l$, $l = j, \ldots, j+k$. S druge strane, k-ta podijeljena razlika polinoma $(x-t)^{k-1}$ također je jednaka nuli za $x > t_{j+k}$. Time smo dokazali da se nosač B-splajna nalazi unutar intervala $[t_j, t_{j+k}]$.
Dokaz pozitivnosti provodi se indukcijom po k. Za slučaj $k = 1$ i $t_j < t_{j+1}$ dokaz slijedi iz (2.4). Neka se pretpostavi da tvrdnja vrijedi za B-splajnove reda $k-1$. Za sve x za koje vrijedi $t_j < x < t_{j+k}$ i u slučaju kada je $t_j < t_{j+k-1}$ ili $t_{j+1} < t_{j+k}$, $B_{j,k}$ je dobiven linearnom kombinacijom s pozitivnim koeficijentima dvaju nenegativnih $B_{j,k-1}$ i $B_{j+1,k-1}$ od kojih je barem jedan pozitivan, što slijedi iz (2.5). Dakle, tvrdnja vrijedi i za $B_{j,k}$. Iz (2.5) slijedi da se B-splajn sastoji od najviše k netrivijalnih polinomnih funkcija, odnosno nakon što se primjeni rekurzivna relacija (2.5) $k-1$ puta, dobije se $B_{j,k}$ u obliku

$$B_{j,k} = \sum_{r=j}^{j+k-1} b_{r,k} B_{r,1}, \tag{2.10}$$

gdje je svaki od $b_{r,k}$ polinom reda k. Ti polinomi su sume produkata od $k-1$ linearnih polinoma, tj. svaki od $b_{r,k}$ u relaciji (2.10) je stupnja $k-1$. Još je ostalo za dokazati da vrijedi

$$t_j = t_{j+k} \Rightarrow B_{j,k,\mathbf{t}} = 0, \tag{2.11}$$

što lagano slijedi iz same definicije B-splajna i (1.12) . □

Također, vrijedi i sljedeći rezultat:

Korolar 2.2.2. *Ako je $t \in \langle t_j, t_{j+1} \rangle$ tada je $B_{i,k}(t) > 0$ za $i = j-k+1, \ldots, j$.*

Dokaz. Nosač od B-splajna $B_{i,k}$ je sadržan u intervalu $[t_i, t_{i+k}]$. Ako je $t_j \in \{t_i, t_{i+1}, \ldots, t_{i+k-1}\}$ i ako je $t_j < t_{j+1}$ tada je $B_{i,k}(t) > 0$ za $t \in \langle t_j, t_{j+1} \rangle$. Dakle, $i = j-k+1, \ldots, j-1, j$. □

2.3 Particija jedinice

Još jedno od korisnih svojstava B-splajnova je particija jedinice koja nam pokazuje da je suma svih $B_{j,k}(x)$ na intervalu $[t_j, t_{j+k}\rangle$ jednaka 1 što će biti dokazano u nastavku.

Teorem 2.3.1. *Niz $B_{j,k}$ čini pozitivnu i lokalnu particiju jedinice tj. vrijedi*

$$\sum_j B_{j,k} = 1 \text{ za } t_j < x < t_{j+k}. \tag{2.12}$$

Dokaz. Dokaz provodimo indukcijom po k.

Neka je $k = 1$:

$$\sum_i B_{i,k}(x) \overset{Korolar.2.2.2}{=} \sum_{i=j+1-k}^{j} B_{i,k}(x) = (k = 1) = \sum_{i=j}^{j} B_{i,1}(x) = 1.$$

Pretpostavka je da tvrdnja vrijedi za B-splajnove reda $k - 1$.

$$\begin{aligned}
\sum_i B_{i,k}(x) &= \sum_{i=j+1-k}^{j} B_{i,k}(x) \\
&= \sum_{i=j+1-k}^{j} \frac{x - t_i}{t_{i+k-1} - t_i} B_{i,k-1}(x) + \sum_{i=j+1-k}^{j} \frac{t_{i+k} - x}{t_{i+k} - t_{i+1}} B_{i+1,k-1}(x) \\
&= \sum_{i=j+1-k}^{j} \frac{x - t_i}{t_{i+k-1} - t_i} B_{i,k-1}(x) + \sum_{i=j+2-k}^{j+1} \frac{t_{i+k-1} - x}{t_{i+k-1} - t_i} B_{i,k-1}(x) \\
&= \sum_{i=j+2-k}^{j} B_{i,k-1}(x) = 1
\end{aligned}$$

Iz nosača B-splajna slijedi da je $B_{j+1-k,k-1}(x) = 0$ i $B_{j+1,k-1}(x) = 0$ za $x \in [t_j, t_{j+1}\rangle$. □

2.4 Prostor splajnova $\$_{k,\mathbf{t}}$

U ovom dijelu pokazat će se kako se definiraju prostori $\Pi_{<k}, \Pi_{<k,\xi}$ i $\Pi_{<k,\xi,\nu}$ koji su potrebni da bi u konačnici mogli pojasniti što je zapravo prostor razapet B-splajnovima. Glavni cilj je pokazati jednakost tog prostora splajnova i prostora po dijelovima polinomnih funkcija određene glatkoće.

Definicija 2.4.1. $\mathbf{\Pi_{<k}}$ *je linearni prostor svih polinoma reda k.*

Definicija 2.4.2. *Niz* $\xi := (\xi_i)_1^{l+1}$ *je strogo rastući niz točaka i neka je k pozitivan cijeli broj. Linearni prostor svih po dijelovima polinomnih funkcija reda k koje imaju prekid u točkama niza* ξ *je prostor* $\mathbf{\Pi_{<k,\xi}}$.

Definicija 2.4.3. *Podskup svih funkcija* $f \in \Pi_{<k,\xi}$ *za koje su za dani vektor* $\nu := (\nu_i)_2^l$ $f^{(j)}$, $j = 0, \ldots, \nu_i - 1$ *neprekidne u* ξ_i *za* $i = 2, \ldots, l$ *označavamo sa* $\Pi_{<k,\xi,\nu}$.

Nakon što smo definirali prostor $\Pi_{<k,\xi,\nu}$ odredit ćemo i bazu za taj prostor. Treba nam niz funkcija $\rho_1, \rho_2, \ldots$, koje su sve elementi $\Pi_{<k,\xi,\nu}$ tako da se bilo koja funkcija $f \in \Pi_{<k,\xi,\nu}$ može zapisati na jedinstveni način kao linearna kombinacija $\sum_j \alpha_j \rho_j$. Sljedeći teorem daje takvu bazu:

Teorem 2.4.4. *Funkcije $\rho_{i,j}(x)$ definirane na sljedeći način:*

$$\rho_{i,j}(x) := \begin{cases} (x-\xi_1)^j, & i = 1,\ j = 0,\dots,k-1 \\ (x-\xi_i)^j, & i = 2,\dots,l,\ j = \nu_i,\dots,k-1. \end{cases} \tag{2.13}$$

čine bazu za prostor $\Pi_{<k,\xi,\nu}$.

Neka je niz $\mathbf{t} := (t_i)_1^{n+k}$ definiran na način da je:

$$\mathbf{t} := (t_1,\dots,t_k,\underbrace{\xi_2,\dots,\xi_2}_{k-\nu_2},\underbrace{\xi_3,\dots,\xi_3}_{k-\nu_3},\dots,\underbrace{\xi_l,\dots,\xi_l}_{k-\nu_l},t_{n+1},\dots,t_{n+k}) \tag{2.14}$$

gdje je $t_1 \le t_2 \le \ldots \le t_k = \xi_1$ i $\xi_{l+1} = t_{n+1} \le t_{n+2} \le \ldots \le t_{n+k}$ i vrijedi da je

$$n := k + \sum_{i=2}^{l}(k-\nu_i) = lk - \sum_{i=2}^{l}\nu_i \tag{2.15}$$

Definicija 2.4.5. ***Splajn reda** k sa nizom čvorova* $\mathbf{t}$ *je svaka linearna kombinacija B-splajnova reda k u točkama niza* $\mathbf{t}$. *Skup svih takvih funkcija označava se sa $\$_{k,\mathbf{t}}$:*

$$\$_{k,\mathbf{t}} := \left\{ \sum_i \alpha_i B_{i,k,\mathbf{t}} : \alpha_i \in \mathbb{R},\ \textit{za svaki } i \right\} \tag{2.16}$$

Svaka funkcija $f \in \$_{k,\mathbf{t}}$ je po dijelovima polinomna i stupnja manjeg od k sa točkama prekida $\mathbf{t}$, jer to vrijedi i za svaki $B_{i,k}$ onda vrijedi inkluzija $\$_{k,\mathbf{t}} \subseteq \Pi_{<k,\mathbf{t}}$. Jednakost linearnih prostora $\$_{k,\mathbf{t}}$ i $\Pi_{<k,\xi,\nu}$ za neki niz prekida ξ i za neki niz ν, će biti naknadno dokazana sa Teoremom (2.6.1).

2.5 Marsdenov identitet

Važnost Marsdenovog identiteta leži u činjenici da se zapravo svaka funkcija oblika $(x-\tau)^{k-1}$ može zapisati kao linearna kombinacija B-splajnova.

Teorem 2.5.1. *Za svaki $\tau \in \mathbb{R}$ vrijedi*

$$(x-\tau)^{k-1} = \sum_j \psi_{j,k}(\tau) B_{j,k}(x) \tag{2.17}$$

gdje je

$$\psi_{j,k}(\tau) := (t_{j+1}-\tau)\cdots(t_{j+k-1}-\tau). \tag{2.18}$$

Dokaz. Za početak krećemo od relacije:

$$\sum_j \alpha_j B_{j,k}, \text{ gdje je } \alpha_j := \psi_{j,k}(\tau), \text{ za } \forall i.$$

Tada iz rekurzije

$$B_{j,k} = \omega_{j,k} B_{j,k-1} + (1 - \omega_{i+1,k}) B_{i+1,k-1}$$

slijedi

$$\sum_j \alpha_j B_{j,k} = \sum_j B_{j,k-1}((1 - \omega_{j,k})\alpha_{j-1} + \omega_{j,k}\alpha_j). \tag{2.19}$$

Ako je $B_{j,k-1} \neq 0$ tj. $t_j < t_{j+k-1}$ onda je

$$(1-\omega_{j,k}(x))\alpha_{j-1}+\omega_{j,k}(x)\alpha_j = ((1-\omega_{j,k}(x))(t_j-\tau)+\omega_{j,k}(x)(t_{j+k-1}-\tau))\psi_{j,k-1}(\tau) = (x-\tau)\psi_{j,k-1}(\tau),$$

jer je

$$(1 - \omega_{j,k}) f(t_j) + \omega_{j,k} f(t_{j+k-1})$$

jedinstveni pravac koji prolazi kroz točke $(t_j, f(t_j))$ i $(t_{j+k-1}, f(t_{j+k-1}))$, te mora biti jednak f ako je i sam f pravac. Tada se induktivno dobiva:

$$\begin{aligned}\sum_j B_{j,k}(x)\psi_{j,k}(\tau) &= (x-\tau)\sum_j B_{j,k-1}(x)\psi_{j,k}(\tau) \\ &= \cdots \\ &= (x-\tau)^{k-1}\sum_j B_{j,1}(x)\underbrace{\psi_{j,1}(\tau)}_{=1} = (x-\tau)^{k-1}.\end{aligned} \tag{2.20}$$

□

Obzirom da je τ proizvoljan, skup $\$_{k,\mathbf{t}}$ sadrži sve polinome reda k jer za proizvoljne $\tau_1 < \ldots < \tau_k$ niz $((x - \tau_j)^{k-1} : j = 1, \ldots, k)$ čini bazu za $\Pi_{<k}$, pa je linearni prostor $\Pi_{<k}$ podskup prostora $\$_{k,\mathbf{t}}$. Podijeli li se relacija (2.17) sa $(k-1)!$ i derivira li se $\nu - 1$ puta po varijabli τ, onda slijedi

$$\frac{(x-\tau)^{k-\nu}}{(k-\nu)!} = \sum_j \frac{(-D)^{\nu-1}\psi_{j,k}(\tau)}{(k-1)!} B_{j,k}, \ \nu > 0 \tag{2.21}$$

što se uvrsti u Taylorovu formulu:

$$p = \sum_{\nu=1}^{k} \frac{(x-\tau)^{k-\nu}}{(k-\nu)!} D^{k-\nu} p(\tau), \tag{2.22}$$

za svaki $p \in \Pi_{<k}$. Nadalje,

$$p = \sum_j (\lambda_{j,k} p) B_{j,k}, \; p \in \Pi_{<k}, \tag{2.23}$$

linearni funkcional $\lambda_{j,k}$ je definiran sa:

$$\lambda_{j,k} f := \sum_{\nu=1}^{k} \frac{(-D)^{\nu-1} \psi_{j,k}(\tau)}{(k-1)!} D^{(k-\nu)} f(\tau) \tag{2.24}$$

2.6 Po dijelovima polinomne funkcije u $\$_{k,t}$

Marsdenov identitet osigurava i rastav odsječenih potencija po B-splajnovima.
Za $t_i \in \langle t_j, t_{j+k} \rangle$ slijedi da je $D^{\nu-1}\psi_{j,k}(t_i) = 0$ za svaki $\nu \leq \#t_i$ gdje je $\#t_i$ broj ponavljanja čvora t_i. Ako se u formuli (2.21) uzme da je $\tau = t_i$ tada će od svih elemenata iz te sume preživjeti samo oni B-splajnovi čiji nosači su ili lijevo od t_i ili desno od t_i, odnosno

$$\frac{(x-\tau)_+^{k-\nu}}{(k-\nu)!} = \sum_{j \geq i} \frac{(-D)^{\nu-1}\psi_{j,k}(\tau)}{(k-1)!} B_{j,k}, \; 1 < \nu < \#t_i, \; \tau = t_i. \tag{2.25}$$

Iz čega slijedi da je

$$(x - t_i)_+^{k-\nu} \in \$_{k,\mathbf{t}}, \text{ za } 1 \leq \nu \leq \#t_i, \tag{2.26}$$

što je bitno za dokaz teorema:

Teorem 2.6.1. *(Curry-Schoenberg) Neka je* $\mathbf{t}$ *nepadajući niz koji se sastoji od međusobno različitih točaka iz* ξ*, s tim da se svaki od* ξ_i *pojavljuje točno* $k - \nu_i, i = 2, \ldots, l$ *puta u* $\mathbf{t}$*. Prostor* $\$_{k,\mathbf{t}}$ *jednak je prostoru* $\Pi_{<k,\xi,\nu}$ *svih po dijelovima polinomnih funkcija reda* k *i sa točkama prekida* ξ_i *koje su* $\nu_i - 1$ *puta neprekidno derivabilne u točkama* ξ_i.

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti pretpostavlja se da je $t_i < t_{i+k}$ za svaki i. Dovoljno je dokazati da je za bilo koji konačni interval $I := [a, b]$, restrikcija $(\Pi_{<k,\xi,\nu})_{|I}$ prostora $\Pi_{<k,\xi,\nu}$ na interval I jednaka restrikciji prostora $\$_{k,\mathbf{t}}$ na taj isti interval. Prostor $\$_{k,\mathbf{t}}$ je razapet sa svim B-splajnovima čiji su nosači u I, tj. sa svimi $B_{i,k}$ za koji vrijedi $I \cap \langle t_i, t_{i+k} \rangle \neq \emptyset$. Iz Teorema (2.4.4) se vidi da baza prostora $(\Pi_{<k,\xi,\nu})_{|I}$ sadrži funkcije oblika

$$(x-a)^{k-\nu}, \; \nu = 1, \ldots, k; \; (x - t_i)_+^{k-\nu}, \; \nu = 1, \ldots, \#t_i, \text{ za } a < t_i < b, \tag{2.27}$$

gdje su t_i, točke prekida. Sada bilo koja proizvoljna po dijelovima polinomna funkcija f, koja ima prekid u točki t_i i $k - 1 - \#t_i$ puta je neprekidno derivabilna, se može jedinstveno zapisati

$$f = p + \sum_{\nu=1}^{\#t_i} (x - t_i)_+^{k-\nu} c_\nu,$$

gdje je p polinom stupnja manjeg od k, a c_ν su prikladni koeficijenti. Obzirom da je svaka od funkcija u (2.27) element prostora $\$_{k,\mathbf{t}}$, primjenjujući (2.25) zaključujemo da je

$$(\Pi_{<k,,\xi,\nu})_{|I} \subseteq (\$_{k,\mathbf{t}})_{|I}. \tag{2.28}$$

S druge strane, dimenzija prostora $(\Pi_{<k,\xi,\nu})_{|I}$ tj. broj funkcija (2.27) jednak je broju B-splajnova koji imaju nosač u I jer je to jednako $k + \sum_{a<t_i<b} \#t_i$, a to je i gornja ograda za dimenziju prostora $(\$_{k,\mathbf{t}})_{|I}$. Iz čega slijedi jednakost u (2.28). □

Napomena 2.6.2. *U dokazu Teorema* (2.6.1) *iskorišten je sljedeći argument:*
Ako je $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ baza za neki prostor F, te ako $(g_1, g_2, \ldots, g_m)$ razapinje prostor G koji sadrži svaki od f_i tada je sigurno $F \subseteq G$ i vrijedi $n = \dim F \leq \dim G = m$. Nadalje, ako je $n = m$ tada je sigurno $F = G$. Odnosno, $\dim G = m$ što znači da su $(g_1, g_2, \ldots, g_m)$ linearno nezavisni i čine bazu za G. U ovom konkretnom slučaju, skup B-splajnova koji imaju nosač u I moraju biti linearno nezavisni nad I.

2.7 Lokalna linearna nezavisnost

Da bi se dokazala linearna nezavisnost B-splajnova kreće se od formuliranja baze B-splajnova B. Budući da je poznato da je baza linearno nezavisan skup, samom konstrukcijom takve baze smo dokazali traženu tvrdnju.

Teorem 2.7.1. *Za bilo koji niz čvorova $\mathbf{t}$ i bilo koji interval $I = [a, b] \subseteq I_{k,\mathbf{t}} := [t_k, t_{n+1}]$ koji sadrži konačno mnogo čvorova t_i, niz*

$$B := (B_{j,k,\mathbf{t}|I} : B_{j,k,\mathbf{t}|I} \neq 0) \tag{2.29}$$

čini bazu za $\Pi_{<k,\xi,\nu|I}$ gdje je ξ strogo rastući niz koji sadrži a, b i $t_i \in I$. Onda je $\nu_i := k - min(k, \#\{r : t_r = \xi_i\})$ i B je linearno nezavisan.

Dokaz. Ako se u nizu $\mathbf{t}$ nalazi neki čvor čiji je broj ponavljanja veći od k, potrebno je reducirati ponavljanje do k. Time su izbačeni B-splajnovi koji su identički nula, te je niz B ostao nepromijenjen. Nadalje, izostavi li se iz $\mathbf{t}$ onaj t_i za koji ni B_i ni B_{i-k} nemaju nosač u I, B je i dalje nepromijenjen. Sada B sadrži restrikciju na skupu I svih B-splajnova reda k sa nizom čvorova $\mathbf{t}$ i točkama ξ_i koje se pojavljuju točno $k - \nu_i$ puta u $\mathbf{t}$. Tvrdnja (2.29) slijedi primjenom Teorema 2.6.1 i Napomene 2.6.2. □

Neka je dana particija

$$a := \xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_l < \xi_{l+1} := b$$

intervala $I := [a, b]$ te prostor $\Pi_{<k,\xi,\nu}$. Baza B-splajnova za ovakav prostor dana je sa (2.29) i sa nizom čvorova **t** koji je sastavljen od točaka prekida ξ na sljedeći način:

$$(\underbrace{\xi_2, \ldots, \xi_2}_{k-\nu_2}, \underbrace{\xi_3, \ldots, \xi_3}_{k-\nu_3}, \ldots, \underbrace{\xi_l, \ldots, \xi_l}_{k-\nu_l}) \tag{2.30}$$

gdje je prvih k točaka $\leq a$, a zadnjih k točaka $\geq b$. Točke u (2.30) trebaju biti odabrane tako da bude zadovoljena željena glatkoća u određenim točkama prekida. $2k$ dodatnih čvorova su najčešće odabrani tako da budu jednaki a odnosno b. U tom slučaju, krajnja desna točka b mora biti uključena u nosač splajna $B_{i,1}$. Drugim riječima, ako je n takav da je $t_n < t_{n+1} = b$ tada se redefinira

$$B_{n,1}(t) := X_n(t) := \begin{cases} 1, & t_n \leq t \leq b \\ 0, & \text{inače} \end{cases} \tag{2.31}$$

S ovim je osigurano postojanje limesa u slučaju računanja derivacija splajnova u točki b.

2.8 Dualni funkcionali

Teorem 2.8.1. *Ako je τ iz definicije linearnog funkcionala* (2.24) *odabran iz intervala $[t_i, t_{i+k}\rangle$ tada vrijedi*

$$\lambda_{i,k}\Big(\sum_j B_{j,k} a_j\Big) = a_i. \tag{2.32}$$

Dokaz. Dovoljno je dokazati da je

$$\lambda_{i,k} B_{j,k} = \delta_{i,j} := \begin{cases} 1, & \text{ako je } i = j \\ 0, & \text{inače} \end{cases}. \tag{2.33}$$

Ako je $\tau \in [t_l, t_{l+1}\rangle \subset [t_i, t_{i+k}\rangle$ tada relacija (2.33) zahtijeva dokaz za $j = l - k + 1, ..., l$ jer za sve ostale $j, i \neq j$ i $B_{j,k}$ iščezava na intervalu $[t_l, t_{l+1}\rangle$, a iz toga također proizlazi da je $\lambda_{i,k} B_{j,k} = 0$. Za svaki od preostalih j neka je p_j polinom koji se podudara sa $B_{j,k}$ na intervalu $[t_l, t_{l+1}\rangle$. Tada je

$$\lambda_{i,k} B_{j,k} = \lambda_{i,k} p_j \tag{2.34}$$

S druge strane,

$$p_j = \sum_{i=l-k+1}^{l} p_i \lambda_{i,k} p_j, \tag{2.35}$$

jer to vrijedi po (2.23), na intervalu $[t_l, t_{l+1}\rangle$ što povlači da je $\lambda_{i,k} p_j$, a onda i $\lambda_{i,k} B_{j,k}$ jednako $\delta_{i,j}$ za $i, j = l - k + 1, \ldots, l$. Iz Teorema 2.7.1 uz interval $[a, b] = [t_l, t_{l+1}]$ vrijedi da za svaki $p \in \Pi_{<k}$ niz

$$p_{l-k+1}, \ldots, p_l \tag{2.36}$$

je linearno nezavisan. □

Napomena 2.8.2. *U gornjem dokazu za linearnu nezavisnost niza* $(f_1, \ldots, f_n)$ *iskorišten je argument:*
izraz

$$f_i = \sum_{j=1}^{n} f_j a_{i,j} \tag{2.37}$$

vrijedi ako je $a_{i,j} = 1$ *kad je* $i = j$*, i* 0 *inače. Nadalje, linearna nezavisnost niza* $p_{l-k+1}, \ldots, p_l$ *slijedi iz valjanosti formule* (2.23) *za svaki* $p \in \Pi_{<k}$ *jer to implicira da niz duljine k razapinje k dimenzionalni prostor* $\Pi_{<k}$.
Dva niza $(B_{i,k})$ *i* $(\lambda_{j,k})$ *su međusobno dualni jer zadovoljavaju* (2.33) *. Iz tog razloga, linearni funkcional* $\lambda_{i,k}$ *se ponekad naziva* ***dualni funkcional za B-splajn****.*

Poglavlje 3

Evaluacija B-splajnova

U ovom poglavlju će se pokazati kako se efikasno pomoću relacije (2.5) mogu računati splajnovi

$$s = \sum_i B_{i,k} a_i \tag{3.1}$$

Iz relacije (2.19) slijedi

$$s = \sum_i B_{i,k} a_i = \sum_i B_{i,k-1} a_i^{[1]} \tag{3.2}$$

gdje je

$$a_i^{[1]} := (1 - \omega_{i,k}) a_{i-1} + \omega_{i,k} a_i. \tag{3.3}$$

$a_i^{[1]}$ je pravac koji prolazi kroz točke (t_i, a_{i-1}) i (t_{i+k-1}, a_i). Specijalno, $a_i^{[1]}$ je konveksna kombinacija od a_{i-1} i a_i za $t_i \le t \le t_{i+k-1}$. Istim postupkom kao u (2.20) je vidljivo da se nakon $k-1$ iteracija dobije formula

$$s = \sum_i B_{i,1} a_i^{[k-1]}$$

što znači da je

$$s = a_i^{[k-1]}, \text{ na intervalu } [t_i, t_{i+1}\rangle.$$

Algoritam za računanje je sljedeći:
Zadani konstantni polinomi $a_i^{[0]} := a_i$, $i = j-k+1, \ldots, j$, koji određuju $s := \sum_i B_{i,k} a_i$ na intervalu $[t_j, t_{j+1}\rangle$, generiraju polinome $a_i^{[r]}$, $r = 1, \ldots, k-1$ rekurzivno

$$a_i^{[r+1]} := (1 - \omega_{i,k-r}) a_{i-1}^{[r]} + \omega_{i,k-r} a_i^{[r]}, \;\; j-k+r+1 < i \le j. \tag{3.4}$$

Tada je $s = a_j^{[k-1]}$ na intervalu $[t_j, t_{j+1}\rangle$, a dodatno vrijedi i da je za $t_j \le t \le t_{j+1}$, $\omega_{i,k-r}(t)$ iz relacije (3.4) leži između 0 i 1. Stoga se računanje $s(t) = a_j^{[k-1]}(t)$ preko (3.4) sastoji od konveksnih kombinacija.

3.1 Derivacija B-splajna

Teorem 3.1.1. *Neka je $t_i < t_{i+k}$. Derivacija od $B_{i,k}$ je dana sa*

$$DB_{i,k}(x) = (k-1)\Big(\frac{B_{i,k-1}(x)}{t_{i+k-1}-t_i} - \frac{B_{i+1,k-1}(x)}{t_{i+k}-t_{i+1}}\Big). \tag{3.5}$$

Dokaz. Dokaz se provodi koristeći rekurziju za podijeljene razlike (1.1.4)

$$\begin{aligned} DB_{i,k}(x) &= (t_{i+k}-t_i)(D(t-x)_+^{k-1})[t_i,\dots t_{i+k}] \\ &= (t_{i+k}-t_i)\Big(-(k-1)(t-x)_+^{k-2}\Big)[t_i,\dots,t_{i+k}] \\ &= -(k-1)(t_{i+k}-t_i)\frac{(t-x)_+^{k-2}[t_{i+1},\dots,t_{i+k}] - (t-x)_+^{k-2}[t_i,\dots,t_{i+k-1}]}{t_{i+k}-t_i} \\ &= (k-1)(t-x)_+^{k-2}[t_i,\dots,t_{i+k-1}] - (t-x)_+^{k-2}[t_{i+1},\dots,t_{i+k}] \\ &= (k-1)\Big(\frac{B_{i,k-1}(x)}{t_{i+k-1}-t_i} - \frac{B_{i+1,k-1}(x)}{t_{i+k}-t_{i+1}}\Big) \end{aligned} \tag{3.6}$$

□

Derivacija Ds splajna $s \in \$_{k,\mathbf{t}}$ je ponovno splajn sa istim nizom čvorova, za jedan red manja, što znači da se iz relacije (2.32) njegovi koeficijenti (a_i') računaju preko formule

$$a_i' = \lambda_{i,k-1}(Ds)$$

pod uvjetom da je $\tau \in [t_i, t_{i+k-1}\rangle$. Promatrajući relaciju (2.24) i

$$(t_{i+k-1}-t_i)\psi_{i,k-1} = \psi_{i,k} - \psi_{i-1,k} \tag{3.7}$$

proizlazi:

$$\begin{aligned} (\lambda_{i,k}-\lambda_{i-1,k})f(\tau) &= \sum_{\nu=1}^{k} \frac{(-D)^{\nu-1}(\psi_{i,k}-\psi_{i-1,k})(\tau)}{(k-1)!} D^{k-\nu} f(\tau) \\ &= (t_{i+k-1}-t_i)\sum_{\nu=1}^{k-1} \frac{(-D)^{\nu-1}\psi_{i,k-1}(\tau)}{(k-1)!} D^{k-\nu} f(\tau), \end{aligned} \tag{3.8}$$

gdje zadnja jednakost vrijedi iz (3.7) i iz $D^{k-1}\psi_{i,k-1} = 0$. S druge strane, iz (2.24) slijedi

$$\begin{aligned} \lambda_{i,k-1} Df(\tau) &= \sum_{\nu=1}^{k-1} \frac{(-D)^{\nu-1}\psi_{i,k-1}(\tau)}{(k-2)!} D^{k-1-\nu} Df(\tau) \\ &= (k-1)\sum_{\nu=1}^{k-1} \frac{(-D)^{\nu-1}\psi_{i,k-1}(\tau)}{(k-1)!} D^{k-\nu} f(\tau). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Usporedbom (3.8) i (3.9) se dobije:

$$\lambda_{i,k-1}D = \frac{k-1}{t_{i+k-1}-t_i}(\lambda_{i,k}-\lambda_{i-1,k}). \tag{3.10}$$

Ako se pretpostavi da je $B_{i,k-1} \neq 0$ tj. $t_i < t_{i+k-1}$ onda se može izabrati $\tau \in \langle t_i, t_{i+k-1}\rangle = \langle t_{i-1}, t_{i+k-1}\rangle \cap \langle t_i, t_{i+k}\rangle$. Što dovodi do sljedećeg algoritma:
$\sum a_i' B_{i,k-1} := D \sum a_i B_{i,k}$:

$$a_i' = (k-1)\frac{a_i - a_{i-1}}{t_{i+k-1}-t_i}, \text{ ako je } t_i < t_{i+k-1}. \tag{3.11}$$

U slučaju $t_i = t_{i+k-1}$ iz Teorema. 2.2.1 slijedi da je $B_{i,k-1} = 0$, tako da nema potrebe računati a_i'. Preciznije rečeno, splajn $s = \sum_i B_{i,k}a_i$ u točki t_i nije neprekidan, zbog čega računanje derivacije u toj točki nema nekog smisla. S druge strane, računanje derivacija u točkama s lijeva i s desna od t_i, odnosno $(Ds)(t_i-)$ i $(Ds)(t_i+)$ uvijek ima smisla, i algoritam (3.11) osigurava sve a_j' potrebne za njihovo računanje.

Poglavlje 4

Interpolacija splajnom

U ovom poglavlju bavit ćemo se interpolacijom splajnom te interakcijom između interpolacijskih točaka i čvorova kako bi se proizvela razumna interpolacijska shema.

Neka je u nastavku $\mathbf{t} := (t_i)_{i=1}^{n+k}$ nepadajući niz čvorova za koji vrijedi $t_i < t_{i+k}$ za svaki i. Cilj je za dane $\tau = (\tau_i)_{i=1}^{n}$ i funkciju f naći splajn $s \in \$_{k,\mathbf{t}}$ za koji vrijedi

$$s(\tau_i) = f(\tau_i),\ i = 1, \dots, n, \tag{4.1}$$

jer je dimenizija prostora $\$_{k,\mathbf{t}}$ jednaka n. Nadalje, ako je

$$s = \sum_{j=1}^{n} c_j B_{j,k} \text{ i } f_i := f(\tau_i),$$

onda se traže $(c_i)_{i=1}^{n}$ takvi da vrijedi

$$\sum_{j=1}^{n} c_j B_{j,k}(\tau_i) = f_i,\ i = 1, \dots, n. \tag{4.2}$$

Neka je $c := (c_1, \dots, c_n)^T$, $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^{n} := (B_{j,k}(\tau_i))_{i,j=1}^{n}$ i $f = (f_1, \dots, f_n)^T$, preko rješavanja linearnog sustava

$$Ac = f \tag{4.3}$$

se dolazi do traženog cilja. Matricu A zovemo kolokacijska matrica.
U slučaju da je kolokacijska matrica regularna, sustav (4.3) ima jedinstveno rješenje za svaki izbor funkcije f.

4.1 Schoenberg-Whitney teorem

Schoenberg-Whitney teorem je bitan rezultat kod interpolacije splajnom jer nam daje nužne i dovoljne uvjete za regularnost kolokacijske matrice. Znamo da sa regularnosti matrice dolazi zaključak da sustav koji odgovara toj matrici ima jedinstveno rješenje, što je u ovom slučaju od velikog značaja.

Teorem 4.1.1. *(Schoenberg-Whitney) Neka je τ strogo rastući niz točaka takav da vrijedi $a < t_i = \ldots = t_{i+r} = \tau_j = b$, iz čega slijedi da je $r < k - 1$. Tada je matrica $A = \left(B_{j,\mathbf{k}}(\tau_i)\right)$ linearnog sustava* (4.2) *regularna ako i samo ako je*

$$B_{i,\mathbf{k}}(\tau_i) \neq 0, \ i = 1, \ldots, n, \tag{4.4}$$

što vrijedi ako i samo ako je $t_i < \tau_i < t_{i+k}$ (osim u slučaju da je $\tau_1 = t_1^+$ i $\tau_n = t_{n+k}^-$).

Za dokaz teorema je potrebno navesti sljedeće:

Lema 4.1.2. *(Rolle) Neka je $\mathbf{t} = (t_i)_1^{n+k}$ nepadajući, $s \in \$_{k,\mathbf{t}}$ neprekidan na $[t_1, t_{n+k}]$ i s ne iščezava na niti jednom podintervalu od $[t_1, t_{n+k}]$. Tada je $Z(s') \geq Z(s) - 1$ gdje je Z broj nultočaka uključujući i broj ponavljanja točki prekida. Točka prekida se broji kao nultočka ukoliko splajn u njoj mijenja predznak.*

Dokaz. Neka su $\tau_1 < \ldots < \tau_d$ nultočke na $[t_1, \ldots, t_{n+k}]$ s multiplicitetima $m_1, \ldots, m_d > 0$. Obzirom da s ne iščezava (po pretpostavci leme) vrijedi $Z(s) = \sum_{i=1}^{d} m_i$. Ako je τ_i nultočka splajna s multipliciteta m_i, ona je također nultočka za s' sa multiplicitetom $m_i - 1$.
Po Teoremu srednje vrijednosti slijedi da je $0 = s(\tau_{i+1}) - s(\tau_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} s'(\tau) d\tau$, u slučaju kada je $s \in C[t_1, t_{n+k}]$, $s' = 0$, povlači da je $s = const. = 0$ zbog neprekidnosti. Što znači da smo došli do kontradikcije sa pretpostavkom da s ne iščezava. Dakle, s' mijenja predznak na $\langle \tau_i, \tau_{i+1} \rangle$, odnosno postoji nova nultočka od s' (barem jedna) i vrijedi:

$$Z(s') \geq \sum_{i=1}^{d} (m_i - 1) + d - 1 = \sum_{i=1}^{d} m_i - 1 = Z(s) - 1. \tag{4.5}$$

□

Lema 4.1.3. *Neka je $s \in \$_{k,\mathbf{t}}$, $k \geq 2$ tada $\exists \delta > 0$ i $s_\delta \in \$_{k,t_\delta} \subseteq C[t_1, t_{n+k}]$ za koji je $s_\delta = s$ svugdje osim na konačnom broju intervala širine δ i $Z(s_\delta) = Z(s)$*

Dokaz Leme 4.1.3 je jednostavan i može ga se naći u [5].

Lema 4.1.4. *Neka je $\mathbf{t} = (t_i)_{i=1}^{n+k}$, $s \in \$_{k,\mathbf{t}}$ i s ne iščezava na otvorenom podintervalu od $\langle t_1, t_{n+k} \rangle$. Tada broj unutarnjih (izoliranih) nultočaka $Z_u(s)$ zadovoljava $Z_u(s) \leq n - 1$, gdje je n dimenzija prostora.*

Dokaz. Dokaz provodimo indukcijom po k. Neka je $k = 1$. Promotrimo niz točaka $t_1 < t_2 < \ldots < t_n < t_{n+1}$, gdje je moguće najviše $(n-1)$ promjena predznaka splajna s, odnosno zadovoljena je tvrdnja: $Z_u(s) \leq n-1$.
Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $k-1$. Neka je $s \in \$_{k,\mathbf{t}}$ i pretpostavimo da je $Z_u(s) \geq n$ i s je neprekidan što možemo bez smanjenja općenitosti zbog Leme 4.1.3. Za s' postoje dva slučaja:

1. s' ne iščezava na nekom intervalu:
   Neka je Z_r := broj rubnih nultočaka splajna s, i neka je $s' \in \$_{k-1,\mathbf{t}}$ i za točke $t_1, \ldots, t_n, t_{n+1}, \ldots, t_{n+1+(k-1)}$ vrijedi po pretpostavci indukcije da je $Z_u(s') \leq n+1-1$ jer je $(n+1)$ dimenzija prostora. Ako bi t_1 bio $k-$struki čvor tada bi dimenzija od $\$_{k-1,\mathbf{t}}$ pala za jedan. Isto bi vrijedilo da je i t_{n+k} $k-$struk. Ako definiramo $m \in \{0,1,2\}$ kao broj $k-$strukih rubova, po pretpostavci indukcije onda vrijedi $Z_u(s') \leq (n+1-m)-1 = n-m$. Lagano se može pokazati da je broj rubnih nultočaka za s' je jednak $Z_r(s') = Z_r(s) - 2 + m$ pa vrijedi

   $$Z(s') = Z_r(s') + Z_u(s') \overset{Lema 4.1.2}{\geq} Z(s) - 1 = Z_r(s) + Z_u(s) - 1. \tag{4.6}$$

   Uvrstimo li $Z_r(s')$ vrijedi sljedeća nejednakost:

   $$Z_u(s') - 2 + m \geq Z_u(s) - 1 \geq n - 1 \tag{4.7}$$

   po pretpostavci indukcije vrijedi

   $$Z_u(s') \leq (n+1-m) - 1 = n - m \tag{4.8}$$

   iz čega se dobije da je $-2 \geq -1$ što je kontradikcija.

2. s' iščezava na nekom intervalu $[t_r, t_l]$:
   Lagano je za zaključiti da je $s = const. \neq 0$ na $[t_r, t_l]$ jer s ne iščezava na tom intervalu, što nas navodi da su nultočke od s unutar intervala $[t_1, t_r\rangle$ ili $\langle t_l, t_{n+k}]$. Neka su $\bar{I}_1, \ldots, \bar{I}_N$ intervali na kojima s' ne iščezava, i splajn se može nezavisno razbiti na više splajnova. K_j je broj čvorova u $\bar{I}_j := [t_a, t_b]$, netrivijalni B-splajnovi su samo oni čiji nosači su unutar intervala. Ako s_k ne iščezava na intervalu $[t_a, t_b]$ slijedi onda da je $b - a \geq k$. Sada možemo raspisati $Z_u(s')$

   $$Z_u(s') \leq \sum_{i=1}^{N}(K_i - k) - m = \sum_{i=1}^{N} K_i - kN - m \leq n + k - Nk - m, \tag{4.9}$$

   broj nultočaka je u tom slučaju jednak:

   $$Z(s') = Z_u(s') + Z_r(s') \leq n - k(N-1) - m + Z_r(s) - 2 + m = n - k(N-1) - 2 + Z_r(s), \tag{4.10}$$

što po Lemi.4.1.2 znači da je:

$$Z(s') \geq Z(s) - 1 = Z_u(s) + Z_r(s) - 1 \geq n + Z_r(s) - 1 \tag{4.11}$$

te na samom kraju kad usporedimo (4.10) i (4.11) dobijemo kontradikciju i s time smo dokazali lemu.

□

Sada je moguće dokazati Teorem 4.1.1:

Dokaz. Neka je A regularna i neka ne vrijedi tvrdnja Teorema 4.4. Tada:

- Ako je, za neki i, $t_{i+k} \leq \tau_i$ tada prvih i stupaca matrice A ima elemente različite od nule u prvih $i-1$ redova. Što znači da je tih prvih i stupaca linearno zavisno, odnosno A nije regularna.
- Ako je $\tau_i \leq t_i$, tada stupci $i, \ldots, n$ imaju elemente različite od nule u redovima $i + 1, \ldots, n$ pa opet A nije regularna.

S druge strane, pretpostavimo da je $B_{i,k}(\tau_i) \neq 0, i = 1, \ldots, n$, nadalje neka je $s \in \$_{k,\mathbf{t}}$ neprekidan, u slučaju da nije primjeni se Lema 4.1.3. Neka je $k = 1$. Matrica $A = \big(B_{j,k}(\tau_i)\big)$ je dijagonalna (jedinična) iz čega slijedi da je regularna.
Neka je $k > 1$. Pretpostavimo suprotno: $B_{i,k}(\tau_i) \neq 0$ i matrica A je singularna. Što znači da postoje $c_1, \ldots, c_n$ od kojih je barem jedan različit od nule takvi da je $s(\tau_i) = \sum_{j=1}^{n} c_j B_{j,k}(\tau_i) = 0$ za $i = 1, \ldots, n$ (stupci su linearno zavisni). Neka je c_l prvi nenul koeficijent i definira se

$$r := \min\{j \geq l : s(x) = 0 \text{ na intervalu čiji je lijevi rub } t_{j+k}\} \tag{4.12}$$

Sada, slijedi $c_{r+1} = c_{r+2} = \cdots = c_{r+k} = 0$ jer za $\gamma \in [t_{r+k}, t_{r+k+1}]$ vrijedi da je

$$s(\gamma) = \sum_{i=r+1}^{r+k} c_i B_{i,\mathbf{k}} = 0. \tag{4.13}$$

Primjenivši Teorem 2.7.1 slijedi da su svi $c_i = 0$ za $i = r+1, \ldots, r+k$.
Ako se definira $\bar{s} := \sum_{j=l}^{r} c_j B_{j,k}$, tada je $\bar{s} = s_{|[t_l, t_{r+k}]}$, i $\bar{s}(\tau_j) = 0$, za $j = l, \ldots, r$. Po pretpostavci za $\tau_j \in \langle t_l, t_{r+k}\rangle$ vrijedi $B_{j,k}(\tau_j) \neq 0$, $j = l, \ldots, r$ i $\bar{s}$ ne iščezava na intervalu $[t_l, t_{r+k}]$. Ako se primjeni Lema 4.1.4 onda vrijedi da je

$$Z_u(\bar{s}) \leq r - l, \tag{4.14}$$

a pokazano je da je $\bar{s}(\tau_j) = 0$ za $j = l, \ldots, r$. Zaključuje se da je barem jedna od nultočaka na rubu tj. $\tau_l = t_l$ ili $\tau_r = t_{r+k}$.

Neka je $\tau_r = t_{r+k} \Rightarrow \bar{s}(t_{r+k}) = c_r B_{r,k}(t_{r+k}) = 0$. Po preptostavci teorema vrijedi da je $0 \neq B_{r,k}(\tau_r) = B_{r,k}(t_{r+k})$ iz čega zapravo slijedi da je $c_r = 0$ pa je $\bar{s} \equiv 0$ na $[t_{r+k-1}, t_{r+k}]$ što nije moguće radi izbora broja r.

S druge strane, neka je $\tau_l = t_l$ nultočka s drugog ruba, onda je $B_{l,k}(\tau_l) = B_{l,k}(t_l) \neq 0$. $0 = \bar{s}(t_l) = c_l B_{l,k}(t_l) \Rightarrow c_l = 0$, što nije moguće radi odabira broja l.
Zaključuje se da su svi τ_i unutarnji čvorovi, što je u kontradikciji sa Lemom 4.1.4. □

4.2 "Vrpčasti" oblik interpolacijske matrice

Pretpostavimo da je matrica $\big(B_{j,k}(\tau_i)\big)$ dimenzija $n \times n$ regularna, stoga je $t_i < \tau_i < t_{i+k}$ za svaki i po Teoremu. 4.1.1 . Glavna prednost korištenja B-splajnova je činjenica da matrica $\big(B_{j,k}(\tau_i)\big)$ je vrpčasta sa širinom k, tj. matrica sa manje nego k dijagonala iznad i manje nego k dijagonala ispod glavne dijagonale. To slijedi iz toga što je

$$B_{j,k}(\tau_i) \neq 0 \text{ ako i samo ako je } t_j < \tau_i < t_{j+k}$$

onda $B_{i,k}(\tau_i) \neq 0$ i $B_{j,k}(\tau_i) \neq 0$ zajedno impliciraju da je $t_i < \tau_i < t_{i+k}$ i $t_j < \tau_i < t_{j+k} \Rightarrow |j - i| < k$, odnosno, $B_{j,\mathbf{k}}(\tau_i) = 0$ za $|j - i| \geq k$.

4.3 Totalna pozitivnost interpolacijske matrice

Jedno od važnijih svojstava linearnog sustava (4.2) je totalna pozitivnost matrice koeficijenata. Podmatricu dane matrice definiramo:

Definicija 4.3.1. *Za danu $m \times n$ matricu $A := (a_{i,j})$ i za dane nizove $I := (i_1, \ldots, i_r)$ i $J := (j_1, \ldots, j_s)$ definiramo:*

$$A\begin{pmatrix} I \\ J \end{pmatrix} := (a_{i_p, j_q})_{p=1}^{r};_{q=1}^{s}. \tag{4.15}$$

Definicija 4.3.2. *Matrica A je totalno pozitivna ako i samo ako su joj sve minore nenegativne, odnosno, ako i samo ako je za $r = 1, 2, \ldots,$*

$$\det A\begin{pmatrix} i_1, \ldots, i_r \\ j_1, \ldots, j_r \end{pmatrix} \geq 0 \ \textit{kadgod je} \ \begin{matrix} 1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq m \\ 1 \leq j_1 < \cdots < j_r \leq n \end{matrix}. \tag{4.16}$$

Teorem 4.3.3. *(Karlin) Matrica $B_{j,k}(\tau_i)$ je totalno pozitivna za sve $\tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_n$.*

Dokaz teorema se može naći u [4].
Linearni sustav sa totalno pozitivnom matricom može biti jednostavno riješen pomoću Gaussovih eliminacija bez pivotiranja. S obzirom da je matrica $B_{j,k}(\tau_i)$ vrpčasta, tada za

riješavanje sustava (4.2) je potrebno maksimalno $(2k-1)n$ elemenata matrice spremiti u memoriju, umjesto svih $n \times n$.

Moguće je da se u interpolaciji splajnom dogodi da se interpolacijske točke sjedine i tako postižu **osklulatornu interpolaciju**.

Definicija 4.3.4. *Neka je $\tau := (\tau_i)_1^n$ niz točaka koje nisu nužno različite. Funkcija p se podudara sa funkcijom g u τako za svaku točku ζ koja se pojavljuje m puta u nizu $\tau_1, \ldots, \tau_n$ vrijedi*

$$p^{(i-1)}(\zeta) = g^{(i-1)}(\zeta) \text{ za } i = 1, \ldots, m.$$

Teorem 4.3.5 (Karlin-Ziegler)**.** *Neka je dan nepadajući niz $\tau = (\tau_i)_1^n$ za koji je $\tau_i < \tau_{i+k}$ za svaki i. Pretpostavimo da je*

$$t_k < \tau_{i+1} = \cdots = \tau_{i+r} = t_{j+1} = \cdots = t_{j+s} < t_{n+1} \Rightarrow r + s \leq k. \tag{4.17}$$

Tada za svaku glatku funkciju f postoji jedinstven $s \in \$_{k,\mathbf{t}}$ koji se slaže s f na τ ako i samo ako je $B_{i,k}(\tau_i) \neq 0$ za svaki i.

Dokaz. vidi [4]. □

4.4 Ocjena greške

Neka je

$$\|g\| := \max_{a \leq x \leq b} |g(x)| \tag{4.18}$$

za neki fiksni interval $[a, b]$ koji sadrži sve točke $\tau_1, \ldots, \tau_n$, odnosno promatrat će se niz čvorova $\mathbf{t} = (t_i)_1^{n+k}$ gdje je

$$a = t_i = \cdots = t_k < t_{k+1} \leq \cdots \leq t_n < t_{n+1} = \cdots = t_{n+k} = b.$$

Nadalje, pretpostavlja se da je

$$B_{i,k}(\tau_i) > 0, \; i = 1, \ldots, n,$$

tako da (4.2) ima točno jedno rješenje. Neka je $\mathbf{I}$ oznaka za odgovarajući interpolacijski operator koji funkciji f pridružuje interpolacijski splajn s interpolacijskim točkama τ_i. Ako za neku funkciju s vrijedi $s \in \$_{k,\mathbf{t}}$ onda je $Is = s$.

Lema 4.4.1. *Za svaku neprekidnu funkciju g na intervalu $[a, b]$, interpolacijska greška je ograničena sa:*

$$\|g - Ig\| \leq (1 + \|I\|)\text{dist}(g, \$_{k,t}) \tag{4.19}$$

gdje su

$$\|I\| := \max\left\{\frac{\|Ig\|}{\|g\|} : g \in C[a,b] \text{ isključujući } 0\right\}, \tag{4.20}$$

$$\operatorname{dist}(g, \$_{k,\mathbf{t}}) := \min_{s \in \$_{k,\mathbf{t}}} \|g - s\|. \tag{4.21}$$

Dokaz. Neka je

$$\|g - Ig\| = \|g - s - I(g - s)\| \leq \|g - s\| + \|I\|\|g - s\| = (1 + \|I\|)\|g - s\| \tag{4.22}$$

za svaki $s \in \$_{k,\mathbf{t}}$. Obzirom da vrijedi za svaki, onda vrijedi i za onaj na kojem se postiže minimum tj.

$$\|g - Ig\| \leq (1 + \|I\|)\operatorname{dist}(g, \$_{k,t}). \tag{4.23}$$

□

Potrebno je posvetiti pažnju odabiru interpolacijskih točaka tako da se izbjegne velika vrijednost od $1 + \|I\|$ u relaciji (4.19) , što ovisi o $|\mathbf{t}|$ gdje je

$$|\mathbf{t}| := \max_i (t_{i+1} - t_i), \tag{4.24}$$

ali i o τ. Za gornju ogradu u relaciji (4.19) ne znači nužno da je interpolacijska greška za svaku funkciju g relativno velika kad god je $\|I\|$ velika.

Lema 4.4.2. *Postoji pozitivna konstanta $const_k$ takva da je norma interpolacijskog procesa I ograničena odozdo sa*

$$\|I\| \geq const_k \max_i \frac{\min\{t_{j+k-1} - t_j : \langle t_j, t_{j+k-1}\rangle \cap \langle \tau_i, \tau_{i+1}\rangle \neq 0\}}{\tau_{i+1} - \tau_i} \tag{4.25}$$

Iz Leme (4.4.2) se vidi da interpolacijska norma $\|I\|$ može biti proizvoljno velika ako dvije susjedne interpolacijske točke dovoljno približimo.

Neka je $\omega(g; h) := \max\left\{|g(x) - g(y)| : |x - y| \leq h, x, y \in [a, b]\right\}$, što zovemo **modul neprekidnosti**. Za modul neprekidnosti vrijedi da je monotona i subaditivna funkcija tj. vrijedi:

1. $\omega(g; h) \leq \omega(g; h + k) \leq \omega(g; h) + \omega(g; k)$ za nenegativne h i k.

2. $\omega(g; \alpha h) \leq \lceil \alpha \rceil \omega(g; h)$ za $\lceil \alpha \rceil \geq 0$ gdje je $\lceil \alpha \rceil := \min\{n \in \mathbb{Z} : \alpha \leq n\}$.

Za udaljenost neke neprekidne funkcije g od prostora splajnova može se pokazati slijedeća ocjena:

$$\mathrm{dist}(g, \$_{k,\mathbf{t}}) := \min\{\|g - s\| : s \in \$_{k,\mathbf{t}}\} \leq const_k \omega(g; |\mathbf{t}|). \tag{4.26}$$

Udaljenost funkcije g od prostora $\$_{k,\mathbf{t}}$ je jednaka udaljenosti funkcije $g - s$ također iz prostora $\$_{k,t}$ u slučaju da je s splajn reda k sa čvorovima $\mathbf{t}$. Odnosno,

$$\mathrm{dist}(g, \$_{k,\mathbf{t}}) = \mathrm{dist}(g - s, \$_{k,\mathbf{t}}) \text{ za sve } s \in \$_{k,\mathbf{t}} \tag{4.27}$$

Stoga, iz (4.26) slijedi

$$\mathrm{dist}(g, \$_{k,\mathbf{t}}) \leq const_k \omega(g - s; |\mathbf{t}|) \text{ za sve } s \in \$_{k,\mathbf{t}} \cap C[a, b].$$

Nadalje, vrijedi

$$\omega(g - s; h) \leq h\|Dg - Ds\|,$$

u slučaju da su g i s dovoljno glatke i možemo zaključiti da vrijedi

$$\mathrm{dist}(g, \$_{k,\mathbf{t}}) \leq const_k |\mathbf{t}| \|Dg - Ds\| \text{ za sve } s \in \$_{k,\mathbf{t}} \cap C[a, b].$$

Ako izaberemo s takav da je ograda što manja moguća i znajući da je $\$_{k-1,\mathbf{t}} = \{Ds : s \in \$_{k,\mathbf{t}} \cap C[a, b]\}$ na $[a, b]$, dobije se

$$\mathrm{dist}(g, \$_{k,\mathbf{t}}) \leq const_k |\mathbf{t}| \mathrm{dist}(Dg, \$_{k-1,\mathbf{t}}), \tag{4.28}$$

naravno, g mora imati po djelovima neprekidnu derivaciju. Koristeći (4.26) ponovno, no ovaj put da se procijeni $\mathrm{dist}(Dg, \$_{k-1,\mathbf{t}})$ ako je Dg neprekidna:

$$\mathrm{dist}(g, \$_{k,\mathbf{t}}) \leq const'_k |\mathbf{t}| \omega(Dg; |\mathbf{t}|), \tag{4.29}$$

gdje je $const'_k := const_k const_{k-1}$. Ako je funkcija g dovoljno glatka i ako je $k - 1 > 1$ uz ponavljanje istog postupka dobije se

$$\mathrm{dist}(g, \$_{k,\mathbf{t}}) \leq const''_k |\mathbf{t}|^2 \omega(D^2 g; |\mathbf{t}|),$$

sa $const''_k := const'_k const_{k-2}$. Nastavljući isti postupak dobije se tvrdnja sljedećeg teorema:

Teorem 4.4.3. *Za $j = 0, \ldots, k - 1$, postoji konstanta $const_{k,j}$ takva da, za sve $\mathbf{t} = (t_i)_1^{n+k}$ sa*

$$t_1 = \cdots = t_k = a < t_{k+1} \leq \cdots \leq b = t_{n+1} = \cdots = t_{n+k} \tag{4.30}$$

i za svaki $g \in C^j[a, b]$,

$$\mathrm{dist}(g, \$_{k,\mathbf{t}}) \leq const_{k,j} |\mathbf{t}|^j \omega(D^j g; |\mathbf{t}|). \tag{4.31}$$

Posebno, za $j = k - 1$, imamo

$$\mathrm{dist}(g, \$_{k,\mathbf{t}}) \leq const_k |\mathbf{t}|^k \|D^k g\|, \tag{4.32}$$

u slučaju da g ima k neprekidnih derivacija pošto je $\omega(D^{k-1} g; h) \leq h\|D^k g\|$

Dokaz. vidi [2]. □

Ako se interpolacijske točke τ_i mogu slobodno birati, tada za danu proširenu particiju **t** se preporučaju **Greville-ove točke**:

$$\tau_i = t^*_{i,k} := \frac{t_{i+1} + \cdots + t_{i+k-1}}{k-1}. \tag{4.33}$$

Ako sa I^*_k označimo interpolacijski operator koji interpolira splajnom reda k u Greville-ovim točkama, može se pokazati da vrijedi

$$\|I^*_2\| = 1, \ \|I^*_3\| \leq 2, \ \|I^*_4\| \leq 27. \tag{4.34}$$

Zato što je

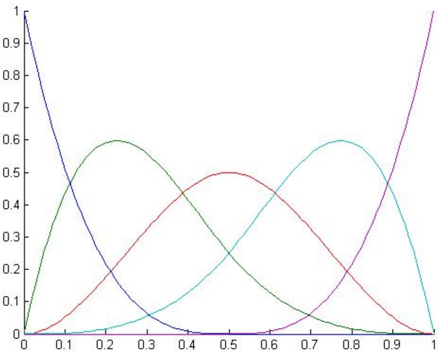
$$\|g - I^*_k g\| \leq (1 + \|I^*_k\|)\mathrm{dist}(g, \$_{k,\mathbf{t}}), \tag{4.35}$$

onda za "umjeren" k, $I^*_k g$ je gotovo najbolja aproksimacija funkcije g u prostoru $\$_{k,\mathbf{t}}$.

Poglavlje 5

Primjer interpolacije B-splajnom

Na primjeru će se pokazati zašto je izbor B-splajnova pogodan za interpolaciju, osim toga vidjet će se da je za određen izbor točaka interpolacija bolja tj. greške kod interpolacije su manje. Cijeli program računanja B-splajnova, interpolacije i grafova je napravljen u programskom jeziku MATLAB. Za sve točke unutar intervala $[0, 1]$ kubični B-splajn je oblika:



Slika 5.1: Prikaz B-splajna

5.1 Objašnjenje definiranih funkcija

U ovom poglavlju će se pojasniti osnovne funkcije koje su definirane za računanje B-splajnova i interpolacije. Funkcija **bspl** računa vrijednosti B-splajna u točkama **x** reda k. Iz Korolara 2.2.2 se vidi da postoji samo k netrivijalnih B-splajnova što se pokazalo korisno iz razloga što je potrebna minimalna količina memorije.

```
function [B]=bspl(n,k,u,t,i)
B=zeros(k,1);
if (u == t(1))
    B(1)=1 ;
end
if (u==t(k+n))
    B(k)=1;
end
B(rem(i,k)+1)=1;
for st=1:(k-1)
    B(rem((i-st),k)+1)=(t(i+1)-u)/(t(i+1)-t(i-st+1))*
    *B(rem((i-st+1),k)+1);
    for j=(i-st+1):(i-1)
        B(rem(j,k)+1)=(u-t(j))/(t(j+st)-t(j))*B(rem(j,k)+1)+
        +(t(j+st+1)-u)/(t(j+st+1)-t(j+1)*B(rem((j+1),k)+1);
    end
    B(rem(i,k)+1)=(u-t(i))/(t(i+st)-t(i))*B(rem(i,k)+1);
end
end
```

Napomena 5.1.1. *Objašnjenje parametara funkcije* **bspl***: n je broj interpolacijskih točaka, k označava red B-splajna,u je točka $u \in$* **x***, gdje je* **x** *niz interpolacijskih točaka, indeks i definira interval za koji je točka $u \in [t_i, t_{i+1}\rangle$, a* **t** *je niz od $(n + k)$ čvorova.*

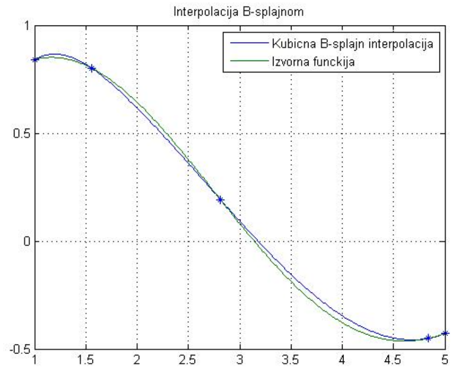
Iako se B-splajnovi računaju putem de Boor-Coxove rekurzije, funkcija **bspl** ih računa iterativno i to jedino one netrivijalne vrijednosti. Nadalje, nakon što se izračunaju vrijednosti niza B, one se spremaju u matricu A na način da je redak određen redoslijedom interpolacijske točke u nizu **x**, a stupci se u danom retku pune od $(i - k + 1)$-tog do i-tog, dok su ostali jednaki 0. Rješavanjem sustava $A * alpha = f$, gdje je f niz vrijednosti originalne funkcije u točkama **x**, dobijemo koeficijente $alpha$. Time je riješen problem interpolacije B-splajnom. Sljedeći dio koda je spomenuti **de Boor-ov algoritam** koji efikasno računa vrijednosti interpolirane funkcije:

```
function [a_novi]=deBoor(k,x,t,j,alpha)
for r=1:(k-1)
   for i=(j-k+r+1):(j)
       omega=(x-t(i))/(t(i-r+1)-t(i));
       a_novi(i)=(1-omega)*a_novi(i-1)+omega*a_novi(i);
    end
end
end
```

Funkcija **nadji** vraća indeks i koji određuje interval $[t_i, t_{i+1}\rangle$ u kojem se nalazi točka u.

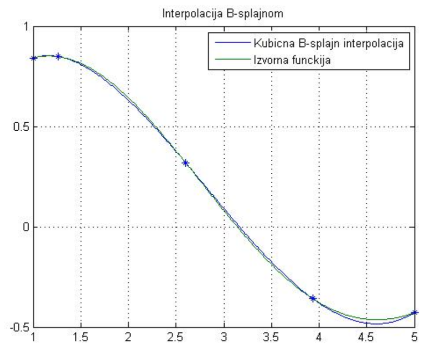
5.2 Primjena definiranih funkcija na primjeru

Za početak ću na jednostavnom primjeru pokazati interpolaciju funkcije $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ na intervalu $[1, 5]$. Odabrala sam 5 proizvoljnih interpolacijskih točaka, a cilj je pokazati na koji način se interpolira neka proizvoljno odabrana funkcija pomoću B-splajnova. Na sljedećoj slici je prikazana originalna funkcija zajedno sa interpolantom:



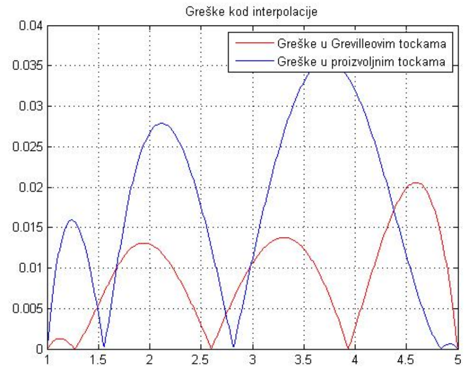
Slika 5.2: Interpolacija u proizvoljnim točkama

Zanimljiva je interpolacija u Greville-ovim točakama iz razloga što daje puno bolje rezultate i manje greške (vidi Sliku (5.4)).



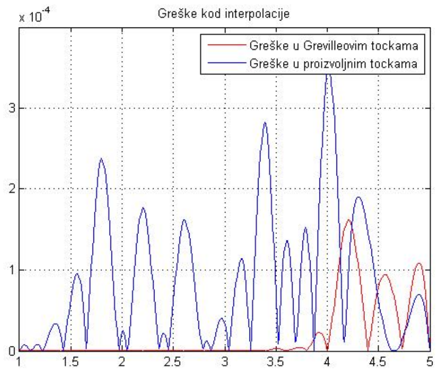
Slika 5.3: Interpolacija u Grevilleovim točkama

Ostalo je još za pokazati u kojem su odnosu greške interpolacije u proizvoljnim točkama i u Greville-ovim točkama. U ovom primjeru je jako malen broj interpolacijskih točaka tako da greške nisu neznatne, što se vidi po njihovim vrijednostima na zajedničkom grafu. Povećavanjem broja interpolacijskih točaka se poboljšava interpolacija originalne funkcije splajnom i samim time su greške manje, što će biti pokazano na sljedećih nekoliko slika.



Slika 5.4: Grafički prikaz grešaka interpolacije

U slučaju kada se uzme $n = 20$ interpolacijskih točaka greške poprimaju vrijednosti koje iznose oko 10^{-4}. Greškama interpolacije koje su vidljive na slikama se želi ukazati na

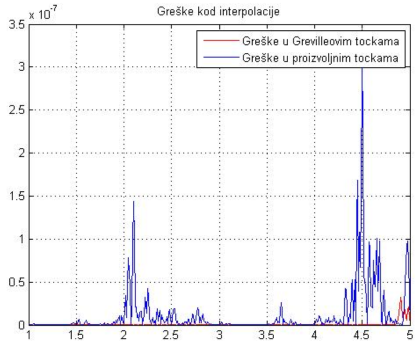


Slika 5.5: Greške za $n = 20$

sljedeće:

- Povećavanjem interpolacijskih točaka interpolacija je točnija.
- Postoji razlika u greškama kod proizvoljnih točaka i Greville-ovih točaka, odnosno interpolacija u Greville-ovim točkama je bolja.

Nadalje, kada je $n = 40$ greške su još manjih vrijednosti, točnije vrijednosti su oko 10^{-5}, dok su za $n = 80$ oko 10^{-6}, a za $n = 160$ su oko 10^{-7} što se vidi na slici (5.6). U sljedećoj tablici sam navela maksimalne apsolutne greške kod proizvoljnih točaka i kod Greville-ovih točaka. Kao što je već navedeno, ponovno se vidi da je izbor Greville-ovih točaka



Slika 5.6: Greške za $n = 160$

puno bolji za interpolaciju. Iz tablice je vidljivo u kolikoj mjeri se greške smanjuju sa povećavanjem broja interpolacijskih točaka.

n	**proizvoljne točke**	**Greville-ove točke**
16	$1.6000 \cdot 10^{-2}$	$1.0380 \cdot 10^{-4}$
32	$4.0377 \cdot 10^{-5}$	$7.4025 \cdot 10^{-6}$
64	$4.9418 \cdot 10^{-6}$	$4.8280 \cdot 10^{-7}$
128	$2.5369 \cdot 10^{-6}$	$3.0700 \cdot 10^{-8}$
256	$3.9200 \cdot 10^{-8}$	$2.0000 \cdot 10^{-9}$

Tablica 5.1: Maximalna apsolutna greška

Iz Teorema 4.4.3 znamo da postoji sljedeća ocjena greške koja vrijedi za funkcije klase C^k: $\mathrm{dist}(g, \$_{k,\mathbf{t}}) \leq const_{k,r}|\mathbf{t}|^r \|D^r g\|$. Pomoću grešaka iz Tablice 5.1 pokazat će se da je r priblizno jednak k. Broj točaka sam birala preko potencije broja 2, te se laganim izvodom pokaže da je $r \approx log(errn_1/errn_2)/log(2)$, gdje su $errn_1$ i $errn_2$ maksimalne apsolutne greške za $n_2 = 2n_1$. Iz tablice se može uočiti da je bolja aproksimacija kod Greville-ovih

	proizvoljne točke	**Greville-ove točke**
$\mathbf{n_1 = 16, n_2 = 32}$	5.3066	3.8096
$\mathbf{n_1 = 32, n_2 = 64}$	3.0304	3.9385
$\mathbf{n_1 = 64, n_2 = 128}$	2.3599	3.9751
$\mathbf{n_1 = 128, n_2 = 256}$	9.3380	3.9402
$\mathbf{n_1 = 256, n_2 = 512}$	5.4998	3.3219
$\mathbf{n_1 = 512, n_2 = 1024}$	4.5146	3.7942

Tablica 5.2: **r**

točaka. Ukoliko postoji mogućnost da sami biramo točke u kojima ćemo interpolirati neku proizvoljnu funkciju, izabrat ćemo Greville-ove točke upravo radi svih boljih rezultata koji su vidljivi iz obrađenih primjera.

Bibliografija

[1] Singer S. Bosner, T., *Polinomna splajn interpolacija*, `http://web.math.pmf.unizg.hr/~nela/nadpredavanja/15nb.pdf`, predavanje.

[2] Carl De Boor, *A practical guide to splines*, sv. 27, Springer-Verlag New York, 1978.

[3] Carl de Boor, *B (asic)-spline basics*, (1986).

[4] C de Boor, *Total positivity of the spline collocation matrix*, Indiana Univ. Math. J (1976), br. 25, 541–551.

[5] Larry L Schumaker, *Spline functions: basic theory*, sv. 1981, Wiley New York, 1981.

Sažetak

Cilj ovog diplomskog rada je definirati B-splajn i pojasniti njegova svojstva. Započinjem definiranjem podijeljenih razlika i navođenjem njihovih osnovnih svojstava pomoću kojih će se pojasniti svojstva i definirati sam B-splajn nekog određenog reda. Zatim, pokazujem na koji način se jednostavno računaju B-splajnovi i zašto je izbor B-splajnova najpogodniji za interpolaciju funkcija. Kod interpolacije se spominje kolokacijska matrica B-splajnova koja ima jako zanimljiva svojstva: regularna je, totalno pozitivna i trakasta. Navedena svojstva olakšavaju postupak interpolacije. Pokazano je također da izborom točaka (Greville-ove točke) možemo smanjiti grešku interpolacije tako da se na samom kraju dobije gotovo najbolja moguća aproksimacija funkcije iz prostora splajnova.

Summary

The main goal of this thesis is to define B-spline and clarify its properties. It begins by defining the divided differences and mentioning their basic properties which will help to define B-spline and prove its properties. Then, it is shown how to easily calculate the B-spline and why is the choice of B-spline the most appropriate for function interpolation. In the fourth chapter was mentioned collocation matrix of B-splines that has very interesting properties. It is regular, total positive and banded. It was also shown that by good choice of points (Greville's point) we can reduce the error of interpolation so that, at the end, we get almost the best possible approximation of functions from the spline space.

Životopis

Rođena sam u Makarskoj gdje sam 2003. godine završila osnovnu školu, te potom upisala opću gimnaziju u Srednjoj školi fra Andrije Kačića Miošića u Makarskoj. 2006. godine sam sudjelovala na općinskom natjecanju iz matematike te zatim iste godine i na županijskom. Maturirala sam na temu ”Nafta” 2007. godine s odličnim uspjehom. Iste godine sam upisala Preddiplomski sveučilišni studij matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Na istom fakultetu 2011. godine upisujem Diplomski sveučilišni studij Matematička statistika.