SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Marija Šuker

BROWNOVO GIBANJE

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Ante Mimica

Zagreb, rujan, 2015.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Brownovo gibanje je proces koji ima velik praktični i teorijski značaj. On je sigurno najvažniji slučajni proces i zauzima najvažnije mjesto i najvažniju ulogu u modernoj teoriji slučajnih procesa. Njegovo otkriće znatno je utjecalo na proučavanje Gaussovskih procesa, martingala i Markovljevih procesa. Također, Brownovo gibanje ima primjene u mnogim područjima znanosti i financijske matematike te je zbog toga vrlo zanimljivo.

Ako promatramo čestice biljne peludi u kapljici vode kroz mikroskop, uočit ćemo neprekidno i nepravilno gibanje tih čestica. Iako je njemački biolog Wilhlem Friedrich von Gleichen otkrio ta neobična gibanja čestica peludi, škotski botaničar Robert Brown je bio prvi koji je izdao 1828. i 1829. godine znanstvene članke na temu Brownovog gibanja opisujući ga na sljedeći način:

(1) gibanje je vrlo nepravilno i čine ga translacije i rotacije,
(2) čestice se gibaju nezavisno jedna od druge,
(3) gibanje je aktivnije ako su čestice manje,
(4) gustoća čestica nema utjecaja na gibanje,
(5) gibanje je aktivnije ako je viskoznost tekućine manja,
(5) gibanje nikada ne staje,
(6) gibanje nije uzrokovano promjenama u tekućini ni isparavanjem.

Nadalje, francuski matematičar Louis Bachelier je 1900. godine u svojoj doktorskoj disertaciji prvi put iskoristio Brownovo gibanje u svrhe financijske matematike. Naime, upotrijebio je Brownovo gibanje da bi razvio model za tržište dionica, tj. da bi opisao opcije kao jedan od fiancijskih instrumenata. To je zapravo bio prvi put da je korištena napredna matematika u proučavanju financija.

Cilj ovog diplomskog rada je na najjednostavniji način definirati i opisati Brownovo gibanje, njegovu konstrukciju, neka zanimljiva svojstva i način simuliranja.

Poglavlje 1

Definicija i konstrukcija Brownovog gibanja

U ovom poglavlju ćemo dati definiciju Brownovog gibanja i prikazati ga kao Gaussovski proces. Nakon toga ćemo dati prikaz jedne od konstrukcija Brownovog gibanja, Lévyjeve konstrukcije.

Pretpostavljamo da se nalazimo na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Definicija 1.0.1. *Brownovo gibanje B je slučajan proces $B = \{B_t : t \geq 0\}$ koji zadovoljava sljedeća svojstva:*

(i) $B_0 = 0$ $\mathbb{P}$-g.s.,

(ii) B ima nezavisne priraste, tj. za svaki $n \in \mathbb{N}$ i za sva vremena $t_0, t_1, \ldots, t_n$ takva da je $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n < \infty$ vrijedi da su prirasti $B_{t_n} - B_{t_{n-1}}, B_{t_{n-1}} - B_{t_{n-2}}, \ldots, B_{t_1} - B_{t_0}$ nezavisne slučajne varijable,

(iii) za svaki $t \geq 0$ i za svaki $h > 0$ je prirast $B_{t+h} - B_t$ normalno distribuiran s očekivanjem 0 i varijancom h, tj. $B_{t+h} - B_t \sim N(0, h)$,

(iv) za sva vremena $t \in [0, \infty)$ i za $\mathbb{P}$-g.s. $\omega \in \Omega$ je funkcija $t \longmapsto B_t(\omega)$ neprekidna.

Po definiciji, dakle, vrijedi da je Brownovo gibanje slučajan proces koji kreće iz 0 i ima nezavisne i normalno distribuirane priraste te neprekidne trajektorije.

1.1 Brownovo gibanje kao Gaussovski proces

Sjetimo se da za vektor $X = (X_1, \ldots, X_n)^\tau$ kažemo da je normalni (Gaussovski) slučajni vektor ako postoje matrica $A \in M_{n\times k}$ i $\mu \in \mathbb{R}^n$ takvi da vrijedi da je $X = AZ + \mu$, gdje je $Z = (Z_1, \ldots, Z_k)^\tau$ standardni normalni slučajni vektor, tj. $Z_i \sim N(0, 1)$, $i = 1,\ldots, k$ su nezavisne slučajne varijable. Neka je $\gamma_{st} := \mathrm{Cov}(X_s, X_t) = \mathbb{E}[(X_s - m_s)(X_t - m_t)] = \mathbb{E}[X_sX_t] - m_sm_t$, gdje smo s $m_t := \mathbb{E}X_t$ označili očekivanje slučajne varijable X_t. Tada funkciju m zovemo funkcija očekivanja, a funkciju γ kovarijacijska funkcija slučajnog procesa $X = \{X_t : t \geq 0\}$.

Definicija 1.1.1. *Slučajan proces $X = \{X_t : t \geq 0\}$ je Gaussovski proces ako su svi vektori $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$, $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq t_1 < \cdots < t_n < \infty$, normalni slučajni vektori.*

Pokažimo sada odnos Brownovog gibanja i Gaussovskog procesa.

Teorem 1.1.2. *Slučajan proces $B = \{B_t : t \geq 0\}$ s $\mathbb{P}$-g.s. neprekidnim trajektorijama je Brownovo gibanje ako i samo ako je B Gaussovski proces s funkcijom očekivanja $m = 0$ i s kovarijacijskom funkcijom $\gamma_{st} = s \wedge t$.*

Dokaz. $\Rightarrow$ Neka su $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n < \infty$, za neki $n \in \mathbb{N}$ i označimo s $\Delta := (B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}})^\tau$ vektor prirasta Brownovog gibanja $B = \{B_t : t \geq 0\}$. Prema svojstvima (*ii*) i (*iii*) iz Definicije 1.0.1, tj. budući da su prirasti nezavisni i normalno distribuirani, slijedi da je vektor prirasta Δ normalni slučajni vektor pa je linearna transformacija

$$\begin{bmatrix} B_{t_1} \\ B_{t_2} \\ \vdots \\ B_{t_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \Delta$$

također normalni slučajni vektor, iz čega slijedi da je B Gaussovski proces. Nadalje, budući da zbog normalnosti prirasta Brownovog gibanja vrijedi da je $m_t = \mathbb{E}B_t = \mathbb{E}[B_t - B_0] = 0$, za svaki $t \geq 0$, slijedi da je i funkcija očekivanja $m = 0$. Preostaje izračunati kovarijacijsku funkciju γ. Za $s \leq t$ vrijedi

$$\gamma_{st} = \mathbb{E}[B_s B_t] - m_s m_t = \mathbb{E}[B_s B_t - B_s^2 + B_s^2] = \mathbb{E}[B_s(B_t - B_s)] + \mathbb{E}[B_s^2] =$$

$$= \mathbb{E}B_s \mathbb{E}[B_t - B_s] + s = s = s \wedge t.$$

$\Leftarrow$ Neka je sada $B = \{B_t : t \geq 0\}$ Gaussovski proces s funkcijom očekivanja $m = 0$, kovarijacijskom funkcijom $\gamma_{st} = (s \wedge t)$ i $\mathbb{P}$-g.s. neprekidnim trajektorijama. Dakle, svojstvo (*iv*) iz Definicije 1.0.1 je zadovoljeno. Svojstvo (*i*) također direktno slijedi iz pretpostavki, tj. $B_0 = 0$. Nadalje, budući da je B Gaussovski proces, slijedi da je vektor $(B_{t_1}, B_{t_2}, \dots, B_{t_n})^\tau$, $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n < \infty, n \in \mathbb{N}$, normalni slučajni vektor. Uočimo da linearnom transformacijom dobivamo

$$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{t_1} \\ B_{t_2} \\ B_{t_3} \\ \vdots \\ B_{t_n} \end{bmatrix},$$

iz čega slijedi da je slučajni vektor prirasta Δ također normalni slučajni vektor. Slijedi da su prirasti nezavisni i normalno distribuirani. Nadalje, za $0 \leq t_j < t_k$ vrijedi

$$\mathrm{Var}(B_{t_k} - B_{t_j}) = \mathrm{Cov}(B_{t_k} - B_{t_j}, B_{t_k} - B_{t_j}) = (t_k - t_j) \wedge (t_k - t_j) = t_k - t_j$$

što daje svojstvo (*iii*) iz Definicije 1.0.1. Dakle, proces B je Brownovo gibanje. □

Dokažimo još par tvrdnji vezanih uz normalne slučajne vektore koje ćemo koristiti u dokazima kasnije.

Lema 1.1.3. *Neka je X standardna normalno distribuirana slučajna varijabla. Tada za svaki $x > 0$ vrijedi*

$$\frac{x}{x^2+1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2} \leq \mathbb{P}(X > x) \leq \frac{1}{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2}.$$

Dokaz. Desna nejednakost slijedi iz činjenice da je

$$\mathbb{P}(X > x) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^\infty \frac{u}{x}\mathrm{e}^{-u^2/2}du = \frac{1}{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2}.$$

Da bismo dokazali lijevu nejednakost, definiramo

$$f(x) := x\mathrm{e}^{-x^2/2} - (x^2+1)\int_x^\infty \mathrm{e}^{-u^2/2}du.$$

Uočimo da je $f(0) < 0$ i $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Također,

$$f'(x) = (1 - x^2 + x^2 + 1)\mathrm{e}^{-x^2/2} - 2x\int_x^\infty \mathrm{e}^{-u^2/2}du = -2x\left(\int_x^\infty \mathrm{e}^{-u^2/2}du - \frac{\mathrm{e}^{-x^2/2}}{x}\right),$$

što je pozitivno za $x > 0$. Dakle, f je strogo rastuća pa je $f(x) < f(0) < 0$, odakle slijedi druga nejednakost. □

Sljedeća lema pokazuje da djelovanje ortogonalne matrice na standardni normalni slučajni vektor ne mijenja njegovu distribuciju.

Lema 1.1.4. *Ako je A ortogonalna $d \times d$ matrica i $X = (X_1, \ldots, X_d)^\tau$ d-dimenzionalni standardni normalni slučajani vektor, onda je AX također d-dimenzionalni standardni normalni slučajni vektor.*

Dokaz. Neka je vektor $X = (X_1, \ldots, X_d)^\tau$ d-dimenzionalni standardni normalni slučajani vektor. Budući da su koordinate vektora X nezavisne i normalno distribuirane, X ima gustoću

$$f_X(x) = f_X(x_1, \ldots, x_d) = \prod_{i=1}^{d} f_{X_i}(x_i) = \prod_{i=1}^{d} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-x_i^2/2} = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d} x_i^2} = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \mathrm{e}^{-|x|^2/2},$$

gdje je $|\cdot|$ Euklidska norma.

Definiramo sada vektor $Y := AX$, gdje je A ortogonalna matrica dimenzije $d \times d$. Uočimo da vrijedi sljedeće:

$$\mathbb{P}(Y \in B) = \mathbb{P}(AX \in B) = \int_{Ax \in B} f_X(x) dx = \begin{bmatrix} z = Ax \Rightarrow x = A^{-1}z \\ dz = |\det A|\, dx \end{bmatrix} =$$

$$= \int_{z \in B} f_X\left(A^{-1}z\right) \frac{dz}{|\det A|} = \int_{z \in B} \left|\det A^{-1}\right| f_X\left(A^{-1}z\right) dz,$$

iz čega slijedi da je gustoća od Y jednaka $\left|\det A^{-1}\right| f_X\left(A^{-1}x\right)$. Determinanta je jednaka 1 i, budući da ortogonalne matrice čuvaju Euklidsku normu, slijedi da je gustoća vektora X nepromijenjena djelovanjem matrice A. Da pojasnimo, ako s $A_i, i = 1, \ldots, d$, označimo retke matrice A^τ, gustoća slučajnog vektora Y je jednaka

$$f_Y(x) = \left|\det A^{-1}\right| f_X\left(A^{-1}x\right) = f_X\left(A^\tau x\right) = f_X\left(A_1 x, \ldots, A_d x\right) = \prod_{i=1}^{d} f_{X_i}\left(A_i x\right) =$$

$$= \prod_{i=1}^{d} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-(A_i x)^2/2} = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}(A_i x)^2} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|A^\tau x|^2} = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \mathrm{e}^{-|x|^2/2},$$

gdje zadnja jednakost slijedi iz činjenice da je A ortogonalna matrica. Dakle, i vektor Y je standardni normalni slučajni vektor. □

Korolar 1.1.5. *Neka su X_1 i X_2 nezavisne i jednako distribuirane slučajne varijable, $X_i \sim N(0, \sigma^2)$, $\sigma^2 > 0, i = 1, 2$. Tada su njihov zbroj i razlika nezavisne i normalno distribuirane slučajne varijable s očekivanjem* 0 *i varijancom* $2\sigma^2$.

Dokaz. Uočimo da je vektor $X = (X_1/\sigma, X_2/\sigma)^\tau$ standardni normalni slučajni vektor. Promatramo ortogonalnu matricu

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Slijedi da je

$$AX = \begin{bmatrix} \frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}\sigma} \\ \frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\sigma} \end{bmatrix},$$

a taj slučajni vektor, po definiciji normalnog slučajnog vektora, mora imati nezavisne i normalno distribuirane koordinate. □

Propozicija 1.1.6. *Ako su X i Y d-dimenzionalni normalni slučajni vektori takvi da je $\mathbb{E}X = \mathbb{E}Y$ i $\mathrm{Cov}X = \mathrm{Cov}Y$, onda X i Y imaju jednaku distribuciju.*

Dokaz. Dovoljno je pokazati slučaj kada je $\mathbb{E}X = \mathbb{E}Y = 0$. Po definiciji normalnih slučajnih vektora, postoje standardni normalni slučajni vektori X_1 i X_2 te matrice A i B takvi da je $X = AX_1$ i $Y = BX_2$. Ako je potrebno, dodamo nul-stupce u matrice A i B i možemo pretpostaviti da su X_1 i X_2 k-dimenzionalni slučajni vektori za neki k, a A i B matrice dimenzije $d \times k$. Neka su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ vektorski potprostori od $\mathbb{R}^k$ generirani recima matrica A i B. Da bi pojednostavnili zapis, pretpostavimo da prvih $l \leq d$ redaka matrice A čine bazu za $\mathcal{A}$. Definiramo linearno preslikavanje $L : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ s

$$L(A_i) := B_i, \quad i = 1, \dots, l, \tag{1.1}$$

gdje je A_i i-ti redak matrice A, a B_i i-ti redak matrice B. Cilj je pokazati da je L ortogonalni izomorfizam, a zatim iskoristiti prethodnu lemu. Prvo ćemo pokazati da je L izomorfizam. Pretpostavka o jednakosti kovarijanci daje da je $AA^\tau = BB^\tau$. Pretpostavimo da postoji vektor $v_1A_1 + \cdots + v_lA_l$ čija je slika 0. Tada d-dimenzionalni vektor $v = (v_1, \dots, v_l, 0, \dots, 0)$ zadovoljava $vB = 0$. Slijedi,

$$||vA||^2 = vAA^\tau v^\tau = vBB^\tau v^\tau = 0.$$

Zaključujemo da je $vA = 0$. Slijedi da je L injekcija i $dim\mathcal{A} \leq dim\mathcal{B}$. Zamjenom uloga od A i B dobijemo da je L izomorfizam. Budući da se na (i, j)-tom mjestu matrice AA^τ nalazi skalarni produkt A_i i A_j, a na (i, j)-tom mjestu matrice BB^τ skalarni produkt B_i i B_j, slijedi da je preslikavanje L ortogonalno. Možemo proširiti tvrdnju na ortogonalno preslikavanje $L : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$, odnosno na ortogonalnu $k \times k$ matricu L, za koju zbog (1.1) vrijedi $LA^\tau = B^\tau$. Slijedi da je $B = AL^\tau$. Tada je $X = AX_1$ i $Y = BX_2 = AL^\tau X_2$. Budući da je prema Lemi 1.1.4 $L^\tau X_2$ standardni normalni slučajni vektor, X i Y imaju istu distribuciju. □

Definicija 1.1.7. *Neka slučajna varijabla X ima funkciju distribucije F_X i neka je $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ niz slučajnih varijabli s pripadnim funkcijama distribucije $\{F_{X_n} : n \in \mathbb{N}\}$. Kažemo da taj niz konvergira po distribuciji prema slučajnoj varijabli X ako vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x),$$

za sve $x \in \mathbb{R}$ u kojima je F_X neprekidna.

Propozicija 1.1.8. *Pretpostavimo da je* $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ *niz normalnih slučajnih vektora i da je* $\lim_n X_n = X$, *g.s. Ako postoje* $b := \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}X_n$ *i* $C := \lim_{n\to\infty} \mathrm{Cov}X_n$, *onda je* X *normalni slučajni vektor s očekivanjem* b *i kovarijacijskom matricom* C.

Dokaz. Prema Propoziciji 1.1.6 slijedi da X_n ima jednaku distribuciju kao i normalni slučajni vektor $A = \mathbb{E}X_n + \mathrm{Cov}(X_n)Z$, gdje je Z standardni normalni slučajni vektor. Očito je da slučajni vektor A po distribuciji konvergira normalnom slučajnom vektoru s očekivanjem b i kovarijacijskom matricom C. Slijedi da i vektor X_n po distribuciji konvergira istom vektoru. Budući da g.s. konvergencija implicira konvergenciju po distribuciji, to mora biti i distribucija od X. □

1.2 Lévyjeva konstrukcija Brownovog gibanja

Značajno pitanje je da li su uvjeti (i), (ii) i (iii) iz Definicije 1.0.1 u kontradikciji sa zahtjevom neprekidnih trajektorija, odnosno postoji li uopće Brownovo gibanje, proces opisan zahtjevima iz Definicije 1.0.1. U ovom odjeljku ćemo pokazati da kontradikcije nema i da Brownovo gibanje zaista postoji.

Konstruirat ćemo Brownovo gibanje kao limes neprekidnih funkcija, što će automatski povlačiti da taj proces ima neprekidne trajektorije. U dokazu koristimo svojstva normalnih slučajnih vektora, koji predstavljaju višedimenzionalni analogon normalnoj distribuciji.

U konstrukciji Brownovog gibanja koristit ćemo Borel-Catellijevu lemu čiji se dokaz može pronaći u [1] na 15. stranici.

Teorem 1.2.1. ***(Borel-Cantellijeva lema)*** *Neka je* $\{A_n : n \geq 1\}$ *niz događaja.*

(i) Ako je $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty$, *onda je* $\mathbb{P}(\limsup_n A_n) = 0$.

(ii) Ako su A_n *nezavisni događaji i* $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty$, *onda je* $\mathbb{P}(\limsup_n A_n) = 1$.

Teorem 1.2.2. ***(Wienerov teorem)*** *Brownovo gibanje postoji.*

Dokaz. Prvo ćemo konstruirati Brownovo gibanje na segmentu $[0, 1]$ kao slučajan element u prostoru $C[0, 1]$ [1]. Ideja je postepeno konstruirati zajedničku distribuciju Brownovog gibanja na konačnim skupovima dijadskih točaka $\mathcal{D}_n := \left\{\frac{k}{2^n} : 0 \leq k \leq 2^n\right\}$. Zatim ćemo linearno interpolirati vrijednosti u $\mathcal{D}_n$ te provjeriti postoji li limes tih neprekidnih funkcija i jesu li Brownovo gibanje.

Neka je $\mathcal{D} = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} \mathcal{D}_n$ i neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor na kojem je definiran skup $\{Z_t : t \in \mathcal{D}\}$, $Z_t \sim \mathrm{N}(0, 1)$ nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli te neka su

[1] $C[0, 1]$ je topološki prostor svih neprekidnih funkcija na segmentu $[0, 1]$ na kojem je definirana norma $\|f\| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$.

$B(0) := 0$ i $B(1) := Z_1$. Nadalje, za svaki $n \in \mathbb{N}$ definiramo slučajne varijable $B(d), d \in \mathcal{D}_n$ takve da vrijedi:

(1) za sve $r, s, t \in \mathcal{D}_n$, takve da je $r < s < t$, slučajna varijabla $B(t) - B(s)$ nezavisna je od $B(s) - B(r)$ i vrijedi $B(t) - B(s) \sim N(0, t - s)$,

(2) vektori $(B(d) : d \in \mathcal{D}_n)$ i $(Z_t : t \in \mathcal{D} \backslash \mathcal{D}_n)$ su nezavisni.

Primijetimo da je su gornje dvije točke već ispunjene za $\mathcal{D}_0 = \{0, 1\}$. Koristeći princip matematičke indukcije, možemo pretpostaviti da su ispunjene i za neki $(n - 1) \in \mathbb{N}$, tj. $\mathcal{D}_{n-1}$. Zatim definiramo $B(d)$ za $d \in \mathcal{D}_n \backslash \mathcal{D}_{n-1}$ s

$$B(d) := \frac{B(d - 2^{-n}) + B(d + 2^{-n})}{2} + \frac{Z_d}{2^{(n+1)/2}}. \tag{1.2}$$

Primijetimo da je prvi pribrojnik u izrazu linearna kombinacija vrijednosti vektora B u točkama prethodnika i sljedbenika vrijednosti d u $\mathcal{D}_{n-1}$. Dakle, $B(d)$ je nazavisna od $(Z_t : t \in \mathcal{D} \backslash \mathcal{D}_n)$, čime je ispunjeno drugo svojstvo. Štoviše, budući da $\frac{1}{2}[B(d + 2^{-n}) - B(d - 2^{-n})]$ ovisi samo o $(Z_t : t \in \mathcal{D}_{n-1})$, nezavisna je od $Z_d/2^{(n+1)/2}$. Prema pretpostavci matematičke indukcije, oba izraza $\frac{1}{2}[B(d + 2^{-n}) - B(d - 2^{-n})]$ i $Z_d/2^{(n+1)/2}$ su normalno distribuirana s očekivanjem 0 i varijancom $2^{-(n+1)}$. Prema Korolaru 1.1.5 slijedi da su njihov zbroj $B(d) - B(d - 2^{-n})$ i njihova razlika $B(d + 2^{-n}) - B(d)$ nezavisne i normalno distribuirane s očekivanjem 0 i varijancom 2^{-n}.

Zaista, svi prirasti $B(d) - B(d - 2^{-n})$, za $d \in \mathcal{D}_n \backslash \{0\}$, su nezavisni. Da bismo dokazali tu tvrdnju, budući da je vektor tih prirasta normalni slučajni vektor, dovoljno je pokazati da su prirasti u parovima nezavisni. Pokazali smo da su parovi $B(d) - B(d - 2^{-n})$ i $B(d + 2^{-n}) - B(d)$, za $d \in \mathcal{D}_n \backslash \mathcal{D}_{n-1}$ nezavisni. Druga mogućnost je da su prirasti kroz vrijeme razdvojeni nekim $d \in \mathcal{D}_{n-1}$. Uzmimo $d \in \mathcal{D}_j$ s tim svojstvom i najmanji j takav da su dva vremena sadžana u $[d - 2^{-j}, d]$ i $[d, d + 2^{-j}]$. Po pretpostavci indukcije, prirasti kroz ta dva vremena udaljenosti 2^{-j} su nezavisna, a prirasti kroz vremena udaljenosti 2^{-n} su konstruirani od nezavinih prirasta $B(d) - B(d - 2^{-j})$ i $B(d + 2^{-j}) - B(d)$ koristeći disjunktne skupove slučajnih varijabli $(Z_t : t \in \mathcal{D}_n)$. Dakle, ti prirasti na uzastopnim intervalima su nezavisni. Nadalje, prirasti na intervalima koji nisu uzastopni se mogu dobiti kombinacijom dva disjunktna skupa slučajnih varijabli Z_t pa su i oni nezavisni, što dokazuje prvu tvrdnju i time smo dokazali i korak indukcije.

Sada kada smo odabrali vrijednosti procesa u svim dijadskim točkama, interpolirat ćemo između njih. Definiramo

$$F_0(t) := \begin{cases} Z_1, & \text{za } t = 1, \\ 0, & \text{za } t = 0, \\ \text{linearna}, & \text{između}, \end{cases}$$

i, za svaki $n \geq 1$,

$$F_n(t) := \begin{cases} 2^{-(n+1)/2} Z_t, & \text{za } t \in \mathcal{D}_n \backslash \mathcal{D}_{n-1}, \\ 0, & \text{za } t \in \mathcal{D}_{n-1}, \\ \text{linearna}, & \text{između uzastopnih točaka u } \mathcal{D}_n. \end{cases}$$

Ove funkcije su neprekidne na segmentu $[0, 1]$ i za sve $n \in \mathbb{N}$ i $d \in \mathcal{D}_n$ vrijedi

$$B(d) = \sum_{i=0}^{n} F_i(d) = \sum_{i=0}^{\infty} F_i(d), \tag{1.3}$$

a tu jednakost možemo dokazati također principom matematičke indukcije. Jednakost vrijedi za $n = 0$. Pretpostavimo da vrijedi i za $(n - 1)$. Neka je $d \in \mathcal{D}_n \backslash \mathcal{D}_{n-1}$. Budući da je za $0 \leq i \leq n - 1$ funkcija F_i linearna na $[d - 2^{-n}, d + 2^{-n}]$, slijedi

$$\sum_{i=0}^{n-1} F_i(d) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{F_i(d - 2^{-n}) + F_i(d + 2^{-n})}{2} = \frac{B(d - 2^{-n}) + B(d + 2^{-n})}{2}.$$

Budući da je $F_n(d) = 2^{-(n+1)/2} Z_d$, koristeći gornju jednakost i (1.2), dobijemo jednakost (1.3).

Nadalje, prema definiciji slučajne varijable Z_d i prema Lemi 1.1.3, za $c > 1$ i dovoljno veliki n vrijedi

$$\mathbb{P}\left(|Z_d| \geq c\sqrt{n}\right) \leq \exp\left\{\frac{-c^2 n}{2}\right\},$$

pa red

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(\exists d \in \mathcal{D}_n \text{ t.d. } |Z_d| \geq c\sqrt{n}\right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{d \in \mathcal{D}_n} \mathbb{P}\left(|Z_d| \geq c\sqrt{n}\right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} (2^n + 1) \exp\left\{\frac{-c^2 n}{2}\right\},$$

konvergira čim je $c > \sqrt{2 \log 2}$. Fiksiramo takav c. Prema Borel-Cantellijevoj lemi, tj. po Teoremu 1.2.1, postoji slučajan (ali gotovo sigurno konačan) N takav da za sve $n \geq N$ i $d \in \mathcal{D}_n$ vrijedi $|Z_d| < c\sqrt{n}$. Slijedi da, za sve $n \geq N$, vrijedi

$$\|F_n\|_\infty < c\sqrt{n} 2^{-n/2}. \tag{1.4}$$

Koristeći ovu ocjenu slijedi da, gotovo sigurno, red

$$B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(t)$$

uniformno konvergira na $[0,1]$. Slijedi da je slučajan proces $\{B(t) : t \in [0,1]\}$ neprekidan kao uniformni limes neprekidnih funkcija. Preostaje dokazati da se konačno-dimenzionalne distribucije ovog procesa i Brownovog gibanja podudaraju. To izravno slijedi iz svojstava procesa B na gustom skupu $\mathcal{D} \subset [0,1]$ i neprekidnosti trajektorija. Zaista, neka su $t_1, t_2, \ldots, t_n \in [0,1]$, $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$. Uzmimo $t_{1,k} \leq t_{2,k} \leq \cdots \leq t_{n,k}$ iz $\mathcal{D}$ takve da $\lim_{k\uparrow\infty} t_{i,k} = t_i$. Iz neprekidnosti od B, za $1 \leq i \leq (n-1)$, slijedi

$$B(t_{i+1}) - B(t_i) = \lim_{k\uparrow\infty} \left(B(t_{i+1,k}) - B(t_{i,k})\right).$$

Budući da je

$$\lim_{k\uparrow\infty} \mathbb{E}[B(t_{i+1,k}) - B(t_{i,k})] = 0$$

i

$$\lim_{k\uparrow\infty} \mathrm{Cov}(B(t_{i+1,k}) - B(t_{i,k}), B(t_{j+1,k}) - B(t_{j,k})) = \lim_{k\uparrow\infty} \mathbb{1}_{\{i=j\}}(t_{i+1,k} - t_{i,k}) = \mathbb{1}_{\{i=j\}}(t_{i+1} - t_i),$$

prirasti $B(t_{i+1}) - B(t_i)$ su, prema Propoziciji 1.1.8 , nezavisne normalne slučajne varijable s očekivanjem 0 i varijancom $t_{i+1} - t_i$.

Dakle, konstruirali smo neprekidni proces $B : [0,1] \to \mathbb{R}$ s konačno-dimenzionalnim distribucijama istim kao Brownovo gibanje. Uzmimo sada niz $B_0, B_1, \ldots$ nezavisnih slučajnih varijabli s vrijednostima u $C[0,1]$ i distribucijom procesa B te definiramo proces $\{B(t) : t \geq 0\}$ *priljepljujući* dijelove, tj.

$$B(t) := B_{\lfloor t \rfloor}(t - \lfloor t \rfloor) + \sum_{i=0}^{\lfloor t \rfloor - 1} B_i(1), \quad \text{za } t \geq 0.$$

Time smo definirali neprekidnu slučajnu funkciju $B : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ koja je Brownovo gibanje. $\square$

Poglavlje 2

Svojstva Brownovog gibanja

Brownovo gibanje je proces s puno zanimljivih svojstava. U ovom poglavlju ćemo prikazati i opisati neka od njih.

2.1 Skalirajuće svojstvo

Prvo svojstvo koje ćemo opisati je svojstvo invarijantnosti na skaliranje Brownovog gibanja. Skaliranje predstavlja jednu od transformacija koja mijenja slučajne varijable Brownovog gibanja, ali ne mijenja njihovu distribuciju.

Lema 2.1.1. ***(Skaliranje)*** *Neka je $B = \{B_t : t \geq 0\}$ Brownovo gibanje i neka je $a > 0$. Tada je proces $X = \{X_t : t \geq 0\}$ definiran s*

$$X_t := \frac{1}{\sqrt{a}} B_{at}$$

također Brownovo gibanje.

Dokaz. Ovu tvrdnju dokazat ćemo koristeći Teorem 1.1.2.

Budući da je, za sve $0 < t_1 < \cdots < t_n < \infty$ i za svaki $n \in \mathbb{N}$, vektor $(B_{at_1}, \ldots, B_{at_n})$ normalni slučajni vektor, slijedi da je i

$$(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) = \frac{1}{\sqrt{a}}(B_{at_1}, \ldots, B_{at_n})$$

normalni slučajni vektor iz čega slijedi da je X Gaussovski proces.

Nadalje, računamo očekivanje, za neki t,

$$m_t = \mathbb{E}X_t = \mathbb{E}\left[\frac{1}{\sqrt{a}} B_{at}\right] = \frac{1}{\sqrt{a}} \mathbb{E}B_{at} = 0,$$

jer je $\mathbb{E}B_{at} = 0$. Dakle, funkcija očekivanja je $m = 0$.

Zatim računamo kovarijacijsku funkciju, za neke s i t,

$$\gamma_{st} = \mathrm{Cov}(X_s, X_t) = \mathrm{Cov}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}B_{as}, \frac{1}{\sqrt{a}}B_{at}\right) = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a}}\mathrm{Cov}(B_{as}, B_{at}) = \frac{1}{a}[as \wedge at] = s \wedge t.$$

Uočimo još da je funkcija $t \longmapsto X_t = \frac{1}{\sqrt{a}}B_{at}$ neprekidna, tj. da X ima g.s. neprekidne trajektorije.

Dakle, budući da su svi zahtjevi Teorema 1.1.2 zadovoljeni, tj. budući da je $X = \{X_t : t \geq 0\}$ Gaussovski proces s $\mathbb{P}$-g.s. neprekidnim trajektorijama, funkcijom očekivanja $m = 0$ i kovarijacijskom funkcijom $\gamma_{st} = s \wedge t$, slijedi da je proces X Brownovo gibanje. □

2.2 Svojstvo vremenske inverzije

Kao i u prethodnom odjeljku, sljedeće važno svojstvo Brownovog gibanja, invarijantnost na vremensku inverziju, predstavlja invarijantnost na transformaciju koja mijenja Brownovu slučajnu varijablu bez mijenjanja distribucije.

Teorem 2.2.1. ***(Vremenska inverzija)*** *Neka je $B = \{B_t : t \geq 0\}$ Brownovo gibanje. Tada je proces $X = \{X_t : t \geq 0\}$ definiran s*

$$X_t := \begin{cases} 0, & \text{za } t = 0, \\ tB_{\frac{1}{t}}, & \text{za } t > 0, \end{cases}$$

također Brownovo gibanje.

Dokaz. Ovu tvrdnju ćemo također dokazati upotrebom Teorema 1.1.2.

Za početak, dokažimo da je X Gaussovski proces. Budući da je konačno-dimenzionalan vektor elemenata Brownovog gibanja, tj., za sve $0 < t_1 < \cdots < t_n < \infty$ i za svaki $n \in \mathbb{N}$, slučajni vektor $(B_{\frac{1}{t_n}}, \ldots, B_{\frac{1}{t_1}})^\tau$, normalni slučajni vektor, slijedi da je i linearna transformacija

$$\begin{bmatrix} X_{t_1} \\ \vdots \\ X_{t_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 B_{\frac{1}{t_1}} \\ \vdots \\ t_n B_{\frac{1}{t_n}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & t_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \iddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_{\frac{1}{t_n}} \\ \vdots \\ B_{\frac{1}{t_1}} \end{bmatrix}$$

normalni slučajni vektor. Dakle, X je po definiciji Gaussovski slučajni proces.

Računamo sada funkciju očekivanja m. Vrijedi

$$m_t = \begin{cases} \mathbb{E}0 = 0, & \text{za } t = 0, \\ \mathbb{E}[tB_{\frac{1}{t}}] = t\mathbb{E}B_{\frac{1}{t}} = 0, & \text{za } t > 0. \end{cases}$$

Dakle, $m = 0$.

Nadalje, za neke $s, t > 0$, vrijedi

$$\gamma_{st} = \mathrm{Cov}(X_s, X_t) = \mathrm{Cov}(sB_{\frac{1}{s}}, tB_{\frac{1}{t}}) = st \cdot \mathrm{Cov}(B_{\frac{1}{s}}, B_{\frac{1}{t}}) =$$

$$= st\left(\frac{1}{s} \wedge \frac{1}{t}\right) = \frac{st}{s} \wedge \frac{st}{t} = t \wedge s.$$

Dakle, kovarijacijska funkcija je $\gamma_{st} = s \wedge t$.

Preostaje dokazati da proces X ima $\mathbb{P}$-g.s. neprekidne trajektorije. Očito je da su za svaki $t > 0$ trajektorije $t \longmapsto X_t$ neprekidne. Još je potrebno pokazati da je $\lim_{t\to 0+} X_t = X_0 = 0, \mathbb{P}$-g.s. Zato računamo

$$\mathbb{P}(\lim_{t\to 0+} X_t = 0) = \mathbb{P}\left((\forall n \geq 1)(\exists m \geq 1)\left(\forall r \in \mathbb{Q} \cap \left(0, \frac{1}{m}\right]\right)\left(|X_r| \leq \frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{r\in\mathbb{Q}\cap(0,\frac{1}{m}]}\left\{|X_r| \leq \frac{1}{n}\right\}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{r\in\mathbb{Q}\cap(0,\frac{1}{m}]}\left\{|B_r| \leq \frac{1}{n}\right\}\right) =$$

$$= \mathbb{P}(\lim_{t\to 0+} B_t = 0) = 1,$$

gdje predzadnja jednakost slijedi iz činjenice da su X i B Gaussovski procesi s istom funkcijom očekivanja i kovarijacijskom funkcijom, a zadnja iz činjenice da je $t \longmapsto B_t$ g.s. neprekidna na $[0, \infty)$.

Dakle, po Teoremu 1.1.2 slijedi da je slučajan proces X Brownovo gibanje. □

Da bismo pokazali upotrebu i važnost svojstva invarijantnosti na vremensku inverziju Brownovog gibanja, pogledajmo sljedeći zanimljiv rezultat.

Korolar 2.2.2. ***(Zakon velikih brojeva)*** *Neka je $B = \{B_t : t \geq 0\}$. Vrijedi*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{B_t}{t} = 0 \ g.s.$$

Dokaz. Neka je $X = \{X_t : t \geq 0\}$ slučajan proces definiran kao u Teoremu 2.2.1. Slijedi,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{B_t}{t} = \lim_{t\to\infty} X_{\frac{1}{t}} = X_0 = 0 \text{ g.s.}$$

□

2.3 Svojstvo simetrije

Sljedeće jednostavno svojstvo koje ćemo opisati je svojstvo invarijantnosti na simetriju Brownovog gibanja.

Lema 2.3.1. ***(Simetrija)*** *Neka je $B = \{B_t : t \geq 0\}$ Brownovo gibanje. Tada je proces $X = \{X_t : t \geq 0\}$ definiran s*

$$X_t := -B_t, \quad t > 0,$$

također Brownovo gibanje. Drugim riječima, Brownovo gibanje sa suprotnim predznakom je i dalje Brownovo gibanje.

Dokaz. Ovu lemu dokazujemo na isti način kao i prethodna dva svojstva, upotrebom Teorema 1.1.2.

Očito je X Gaussovski proces, jer je, za sve $0 < t_1 < \cdots < t_n < \infty$ i za svaki $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{bmatrix} X_{t_1} \\ \vdots \\ X_{t_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_{t_1} \\ \vdots \\ B_{t_n} \end{bmatrix}$$

normalni slučajni vektor kao linearna transformacija normalnog slučajnog vektora $(B_{t_1}, \ldots, B_{t_n})^\tau$.

Nadalje, vrijedi

$$m_t = \mathbb{E}X_t = -\mathbb{E}B_t = 0$$

i

$$\gamma_{st} = \mathrm{Cov}(X_s, X_t) = \mathrm{Cov}(-B_s, -B_t) = \mathrm{Cov}(B_s, B_t) = s \wedge t.$$

Također, očito je da proces X ima neprekidne trajektorije.

Zbog svega navedenog i po Teoremu 1.1.2, slijedi da je slučajan proces X Brownovo gibanje. □

2.4 Markovljevo svojstvo

Da bismo opisali i dokazali Markovljevo svojstvo Brownovog gibanja, potrebno je prvo dokazati takozvano obnavljajuće svojstvo Brownovog gibanja.

Lema 2.4.1. ***(Obnavljanje)*** *Neka je $B = \{B_t : t \geq 0\}$ Brownovo gibanje i neka je $a > 0$. Tada je slučajan proces $X = \{X_t : t \geq 0\}$ definiran s*

$$X_t := B_{t+a} - B_a$$

također Brownovo gibanje.

Dokaz. Ovu tvrdnju dokazujemo pokazujući svojstva Brownovog gibanja navedena u Definiciji 1.0.1:

(i) $X_0 = B_a - B_a = 0$,

(ii) za sve $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n < \infty$ i za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\begin{aligned}
X_{t_n} - X_{t_{n-1}} &= B_{t_n+a} - B_a - B_{t_{n-1}+a} - B_a = B_{t_n+a} - B_{t_{n-1}+a}, \\
X_{t_{n-1}} - X_{t_{n-2}} &= B_{t_{n-1}+a} - B_{t_{n-2}+a}, \\
&\vdots \\
X_{t_1} - X_{t_0} &= B_{t_1+a} - B_a,
\end{aligned}$$

iz čega slijedi da proces X ima nezavisne priraste,

(iii) za svaki $t \geq 0$ i za svaki $h > 0$ vrijedi

$$\begin{aligned}
X_{t+h} - X_t &= B_{t+h+a} - B_a - B_{t+a} + B_a = \\
&= B_{t+h+a} - B_{t+a} \sim N(0, t+h+a-t-a) = N(0, h),
\end{aligned}$$

(iv) $t \longmapsto X_t = B_{t+a} - B_a$ je g.s. neprekidna.

Budući da su sva četiri uvjeta zadovoljena, zaključujemo da je proces X Brownovo gibanje. □

Posljedica ove leme je da Brownovo gibanje nema memoriju, tj. povijest. To je zapravo očito u sljedećem teoremu. Naime, intuitivno je da Markovljevo svojstvo kaže da, iako nam je poznat slučajan proces $\{X_t : t \geq 0\}$ na intervalu $[0, s]$, za predviđanje budućnosti $\{X_t : t \geq s\}$ korisno je samo poznavanje završne točke X_s.

Teorem 2.4.2. ***(Markovljevo svojstvo Brownovog gibanja)*** *Neka je $B = \{B_t : 0 \leq t \leq a\}$ Brownovo gibanje i neka je $X = \{X_t : t \geq 0\}$ slučajan proces definiran kao u prethodnoj Lemi 2.4.1. Tada su B i X nezavisni slučajni procesi, tj. σ-algebre generirane tim procesima su nezavisne:*

$$\sigma(\{B_t : 0 \leq t \leq a\}) =: \mathcal{F}_a^B \text{ je nezavisna od } \mathcal{F}_\infty^X := \sigma(\{X_t : t \geq 0\}).$$

Posebno, za sve $0 \leq s < t$ slučajna varijabla $B_t - B_s$ je nezavisna od $\mathcal{F}_s^B$.

Dokaz. Pokažimo prvo da za slučajne varijable $A_0, A_1, \ldots, A_n$ vrijedi da je

$$\sigma(A_0, A_1, \ldots, A_n) = \sigma(A_0, A_1 - A_0, A_2 - A_1, \ldots, A_n - A_{n-1}). \tag{2.1}$$

Budući da su A_0 i $A_j - A_{j-1}$ $\sigma(A_0, A_1, \ldots, A_n)$-izmjerive varijable, slijedi inkluzija $\supset$. Da bismo dokazali obrnutu inkluziju $\subset$, uočimo da možemo zapisati

$$A_k = A_0 + \sum_{j=1}^{k} (A_j - A_{j-1}), \quad k = 0, 1, \ldots, n,$$

što znači da su A_j $\sigma(A_0, A_1 - A_0, A_2 - A_1, \dots, A_n - A_{n-1})$-izmjerive.

Nadalje, neka su $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_m = a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$. Po svojstvu (*ii*) iz Definicije 1.0.1 slijedi da su slučajne varijable

$$B_{s_1} - B_{s_0}, \dots, B_{s_m} - B_{s_{m-1}}, B_{t_1} - B_{t_0}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$$

nezavisne. Slijedi,

$$\sigma(B_{s_1} - B_{s_0}, \dots, B_{s_m} - B_{s_{m-1}}) \text{ je nezavisna od } \sigma(B_{t_1} - B_{t_0}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}).$$

Budući da je

$$X_{t_k - t_0} - X_{t_{k-1} - t_0} = B_{t_k - t_0 + a} - B_a - B_{t_{k-1} - t_0 + a} + B_a = B_{t_k} - B_{t_{k-1}}$$

i

$$X_0 = B_0 = 0,$$

možemo upotrijebiti (2.1) da bismo dobili da

$$\sigma(B_{s_1}, B_{s_2}, \dots, B_{s_m}) \text{ je nezavisna od } \sigma(X_{t_1 - t_0}, X_{t_2 - t_0}, \dots, X_{t_n - t_0})$$

i

$$\bigcup_{\substack{0 < s_1 < \cdots < s_m \leq a \\ m \geq 1}} \sigma(B_{s_1}, B_{s_2}, \dots, B_{s_m}) \text{ je nezavisna od } \bigcup_{\substack{0 < u_1 < \cdots < u_n \\ n \geq 1}} \sigma(X_{u_1}, X_{u_2}, \dots, X_{u_n}).$$

Familije σ-algebri na lijevoj i desnoj strani su generatori od $\mathcal{F}_a^B$ i $\mathcal{F}_\infty^X$ pa slijedi da je $\mathcal{F}_a^B$ nezavisna od $\mathcal{F}_\infty^X$.

Nadalje, uzmemo li da je $a = s$, dobijemo da je $X_{t-s} = B_{t-s+s} - B_s = B_t - B_s$ što je $\mathcal{F}_\infty^X$-izmjerivo i zbog toga nezavisno od $\mathcal{F}_s^B$. □

Definicija 2.4.3. *Neka je $B = \{B_t : t \geq 0\}$ Brownovo gibanje. Kažemo da je familija σ-algebri $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}$ na Ω Brownovska filtracija ako vrijedi:*

(i) $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$, za sve $0 \leq s \leq t$,

(ii) B_t je $\mathcal{F}_t$-izmjeriva, za svaki $t \geq 0$,

(iii) $B_t - B_s$ je nezavisna od $\mathcal{F}_s$, za sve $0 \leq s \leq t$.

Također ćemo navesti jednu lemu koja će nam koristit u dokazu sljedećeg teorema. Dokaz te leme pogledati u [6], u dodatku na stranici 333.

Lema 2.4.4. *Neka su $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (D, \mathcal{D})$ i $Y : (\Omega, \mathcal{F}) \to (E, \mathcal{E})$ dvije slučajne varijable. Pretpostavimo da su $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \subset \mathcal{F}$ dvije σ-algebre takve da je X $\mathcal{X}/\mathcal{D}$-izmjeriva, Y $\mathcal{Y}/\mathcal{E}$-izmjeriva i $\mathcal{X}$ nezavisna od $\mathcal{Y}$. Tada, za sve omeđene $\mathcal{D} \times \mathcal{E}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$-izmjerive funkcije $\phi : D \times E \to \mathbb{R}$, vrijedi*

$$\mathbb{E}[\phi(X, Y)|\mathcal{X}] = [\mathbb{E}\phi(x, Y)]|_{x=X} = \mathbb{E}[\phi(X, Y)|X].$$

Teorem 2.4.5. ***(Markovljevo svojstvo)*** *Neka je $B = \{B_t : t \geq 0\}$ Brownovo gibanje i neka je $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}$ Brownovska filtracija. Tada, za svaku omeđenu Borelovu funkciju $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, vrijedi*

$$\mathbb{E}[u(B_{t+s})|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}\,[u(B_t + x)]|_{x=B_s} =: \mathbb{E}_{B_s}[u(B_t)]. \tag{2.2}$$

Dokaz. Računamo

$$\mathbb{E}[u(B_{t+s})|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[u(B_s + B_{t+s} - B_s)|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[u(B_s + (B_{t+s} - B_s))|\mathcal{F}_s].$$

Budući da je B_s $\mathcal{F}_s$-izmjeriva slučajna varijabla, a $B_{t+s} - B_s$ nezavisna od $\mathcal{F}_s$, po prethodnoj Lemi 2.4.4 slijedi nastavak gornje jednakosti, tj.

$$\mathbb{E}[u(B_{t+s})|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[u(x + (B_{t+s} - B_s))]|_{x=B_s} = \mathbb{E}[u(x + B_t)]|_{x=B_s},$$

gdje zadnja jednakost slijedi iz činjenice da je $B_{t+s} - B_s \overset{d}{=} B_t$. □

2.5 Jako Markovljevo svojstvo

U ovom poglavlju opisujemo jako Markovljevo svojstvo Brownovog gibanja kao poopćenje prethodnog poglavlja uvodeći neke nove termine vezane uz Brownovo gibanje.

Definicija 2.5.1. *Kažemo da je $\tau : \Omega \to [0, +\infty]$ vrijeme zaustavljanja ako je $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$, za svaki $t \geq 0$.*

Zapravo ćemo pokazati da Markovljevo svojstvo (2.2) vrijedi i ako zamjenimo vrijeme s vremenom zaustavljaja τ. Budući da vremena zaustavljanja mogu poprimiti vrijednost $+\infty$, moramo se pobrinuti da je B_τ definirana čak i u tom slučaju. Dakle, ako je $X = \{X_t : t \geq 0\}$ slučajan proces i τ vrijeme zaustavljanja, definiramo

$$X_\tau(\omega) := \begin{cases} X_{\tau(\omega)}(\omega), & \text{za } \tau(\omega) < \infty, \\ \lim_{t\to\infty} X_t(\omega), & \text{za } \tau(\omega) = \infty \text{ ako limes postoji,} \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Nadalje, potrebno je još definirati familiju $\mathcal{F}_\tau^+$ kao

$$\mathcal{F}_\tau^+ := \left\{ A \in \mathcal{F}_\infty := \sigma\left(\bigcup_{t\geq 0} \mathcal{F}_t \right) : A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t^+, \forall t \geq 0 \right\},$$

gdje je

$$\mathcal{F}_t^+ = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s.$$

Prije iskaza i dokaza teorema u kojem ćemo opisati jako Markovljevo svojstvo, pokažimo još jedan pomoćni korolar koji će nam pomoći u dokazivanju istog svojstva.

Korolar 2.5.2. *Za svaki $a \geq 0$, proces X iz Leme 2.4.1 je nezavisan od σ-algebre $\mathcal{F}_a^+$.*

Dokaz. Zbog neprekidnosti za strogo rastući niz $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ koji konvergira prema a vrijedi

$$X_t = B_{t+a} - B_a = \lim_{n\to\infty}(B_{a_n+t} - B_{a_n}).$$

Prema Teoremu 2.4.2, za sve $t_1, \ldots, t_m \geq 0$, vrijedi da je slučajni vektor

$$(X_{t_1}, \ldots, X_{t_m}) = (B_{t_1+a} - B_a, \ldots, B_{t_m+a} - B_a) = \lim_{j\nearrow\infty}(B_{t_1+a_j} - B_{a_j}, \ldots, B_{t_m+a_j} - B_{a_j})$$

nezavisan od $\mathcal{F}_a^+$, što znači da je i proces X nezavisan od $\mathcal{F}_a^+$. □

Teorem 2.5.3. ***(Jako Markovljevo svojstvo)*** *Neka je $B = \{B_t : t \geq 0\}$ Brownovo gibanje i neka je $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}$ Brownovska filtracija. Neka je τ g.s. konačno vrijeme zaustavljanja. Tada je proces $X = \{X_t : t \geq 0\}$, definiran s*

$$X_t := B_{\tau+t} - B_\tau,$$

također Brownovo gibanje koje je nezavisno od $\mathcal{F}_\tau^+$.

Dokaz. Prvo ćemo pokazati tvrdnju za vremena zaustavljanja τ_n koja diskretno odozgo aproksimiraju vrijeme zaustavljanja τ,

$$\tau_n := \frac{m+1}{2^n}, \quad \text{za} \quad \frac{m}{2^n} \leq \tau < \frac{m+1}{2^n},$$

gdje vrijedi da je $\inf_{j\geq 1} \tau_j = \tau$.

Označimo s $B^k = \{B_t^k : t \geq 0\}$ Brownovo gibanje definirano s

$$B_t^k := B_{t+\frac{k}{2^n}} - B_{\frac{k}{2^n}}$$

i označimo s $B^* = \{B_t^* : t \geq 0\}$ slučajan proces definiran s

$$B_t^* := B_{t+\tau_n} - B_{\tau_n}.$$

Pretpostavimo da je $E \in \mathcal{F}_{\tau_n}^+$. Tada, za svaki događaj $\{B^* \in A\}$, vrijedi

$$\mathbb{P}(\{B^* \in A\} \cap E) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(\{B^k \in A\} \cap \left\{\tau_n = \frac{k}{2^n}\right\} \cap E\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(B^k \in A)\mathbb{P}\left(\left\{\tau_n = \frac{k}{2^n}\right\} \cap E\right),$$

jer je po prethodnom Korolaru 2.5.2 $\{B^k \in A\}$ nezavisan od $\left\{\tau_n = \frac{k}{2^n}\right\} \cap E \in \mathcal{F}^+_{\frac{k}{2^n}}$. Sada, prema Lemi 2.4.1 slijedi da $\mathbb{P}(B^k \in A) = \mathbb{P}(B \in A)$ ne ovisi o k pa zato imamo

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(B^k \in A)\mathbb{P}\left(\left\{\tau_n = \frac{k}{2^n}\right\} \cap E\right) = \mathbb{P}(B \in A) \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(\left\{\tau_n = \frac{k}{2^n}\right\} \cap E\right) = \mathbb{P}(B \in A)\mathbb{P}(E).$$

Koristeći prethodnu jednakost, za $E = \Omega$ slijedi da je $\mathbb{P}(B^* \in A) = \mathbb{P}(B \in A)$ i dobili smo dakle $\mathbb{P}(\{B^* \in A\} \cap E) = \mathbb{P}(B^* \in A)\mathbb{P}(E)$, što dokazuje činjenicu da je B^* Brownovo gibanje koje je nezavisno od E, a time i od $\mathcal{F}^+_{\tau_n}$.

Preostaje ovu tvrdnju generalizirati i proširiti na vremena zaustavljanja τ. Budući da $\tau_n \searrow \tau$, slijedi da je proces B^* Brownovo gibanje koje je nezavisno od $\mathcal{F}^+_{\tau_n} \supset \mathcal{F}^+_{\tau}$. Dakle, prirasti

$$B_{s+t+\tau} - B_{t+\tau} = \lim_{n\to\infty}(B_{s+t+\tau_n} - B_{t+\tau_n})$$

slučajnog procesa X su nezavisni i normalno distribuirani s očekivanjem 0 i varijancom s. Budući da je proces g.s. neprekidan, slijedi da je Brownovo gibanje. Štoviše, svi prirasti, a time i sam proces X, su nezavisni od $\mathcal{F}^+_{\tau}$. □

2.6 Princip refleksije

Sljedeće svojstvo, princip refleksije, je zapravo primjena jakog Markovljevog svojsta Brownovog gibanja. Ono kaže da je Brownovo gibanje, koje se u nekom vremenu zaustavljanja krene reflektirati, i dalje Brownovo gibanje.

Teorem 2.6.1. ***(Princip refleksije)*** *Neka je $B = \{B_t : t \geq 0\}$ Brownovo gibanje i neka je τ vrijeme zaustavljanja. Slučajan proces $X = \{X_t : t \geq 0\}$ definiran s*

$$X_t := \begin{cases} B_t, & za\ t \leq \tau, \\ B_\tau - (B_t - B_\tau) = 2B_\tau - B_t, & za\ t > \tau. \end{cases}$$

je također Brownovo gibanje.

Dokaz. Ako je τ konačno vrijeme zaustavljanja, onda su, po jakom Markovljevom svojstvu, tj. po Teoremu 2.5.3, i po svojstvu simetrije, tj. po Lemi 2.3.1, procesi $B^+ := \{B_{t+\tau} - B_\tau : t \geq 0\}$ i $B^- := \{B_\tau - B_{t+\tau} : t \geq 0\}$ Brownova gibanja nezavisna od procesa $\{B_t : 0 \leq t \leq \tau\}$. Vidimo da, ako proces $\{B_t : 0 \leq t \leq \tau\}$ u krajnjoj točki spojimo s procesom B^- u toj istoj točki, dobijemo proces X pa slijedi da je B Brownovo gibanje kao kombinacija dva Brownova gibanja. □

2.7 Martingalno svojstvo

U ovom odjeljku opisat ćemo martingalno svojstvo Brownovog gibanja. Za početak je zato potrebno definirati pojam martingala.

Definicija 2.7.1. *Slučajan proces* $M = \{M_t : t \geq 0\}$ *je matringal u odnosu na filtraciju* $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}$ *ako vrijedi:*

(i) proces M *je adaptiran u odnosu na fitraciju* $\mathbb{F}$*, tj. za svaki* $t \geq 0$ *je* M_t $\mathcal{F}_t$*-izmjeriva slučajna varijabla,*

(ii) $\mathbb{E}|M_t| < \infty$*, za svaki* $t \geq 0$*,*

(iii) $\mathbb{E}[M_t|\mathcal{F}_s] = M_s$ *g.s., za sve* $0 \leq s \leq t$*.*

Napomena 2.7.2. *Kažemo da je proces* M *submartingal ako u prethodoj definiciji u dijelu* (iii) *znak jednakosti zamijenimo znakom* $\geq$*, a supermartingal ako znak jednakosti zamijenimo znakom* $\leq$*.*

Lema 2.7.3. ***(Martingalno svojstvo)*** *Brownovo gibanje* $B = \{B_t : t \geq 0\}$ *je martingal u odnosu na Brownovsku filtraciju* $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}$*.*

Dokaz. Proces B je adaptiran u odnosu na prirodnu filtraciju $\mathbb{F}$. Nadalje, vrijedi da je $B_t \sim N(0, t)$ pa slijedi da je $\mathbb{E}|B_t| < \infty$, za svaki $t \geq 0$.

Za $0 \leq s \leq t$ vrijedi

$$\mathbb{E}[B_t|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[B_t - B_s + B_s|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[B_t - B_s|\mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[B_s|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[B_t - B_s] + B_s = B_s,$$

gdje predzadnja jednakost slijedi iz činjenice da su za Brownovo gibanje B prirasti nezavisni i iz činjenice da je B_s $\mathcal{F}_s$-izmjeriva slučajna varijabla, a zadnja jednakost slijedi iz činjenice da su prirasti normalno distribuirani s očekivanjem 0.

Dakle, sva tri svojstva martingala iz Definicije 2.7.1 su zadovoljena pa slijedi da je proces B martingal. □

Poglavlje 3

Regularnost trajektorija Brownovog gibanja

3.1 Svojstva neprekidnosti Brownovog gibanja

Definicija 1.0.1 Brownovog gibanja zahtijeva gotovo sigurnu neprekidnost njegovih trajektorija. To znači da su na nekom kompaktnom intervalu (npr. na intervalu $[0,1]$) trajektorije Brownovog gibanja uniformno neprekidne, tj. da postoji funkcija φ takva da je $\lim_{h\downarrow 0}\varphi(h) = 0$ i tu funkciju zovemo modul neprekidnosti funkcije $B : [0,1] \to \mathbb{R}$ ako vrijedi

$$\limsup_{h\downarrow 0} \sup_{t\in[0,1-h]} \frac{|B(t+h) - B(t)|}{\varphi(h)} \leq 1. \tag{3.1}$$

Teorem 3.1.1. *Neka je $B = \{B_t : t \geq 0\}$ Brownovo gibanje. Postoji konstanta $C > 0$ takva da, gotovo sigurno, za svaki dovoljno mali $h > 0$ i za svaki $t \in [0, 1-h]$ vrijedi*

$$|B_{t+h} - B_t| \leq C\sqrt{h\log\left(\frac{1}{h}\right)}.$$

Dokaz. Podsjetimo se Lévyjeve konstrukcije Brownovog gibanja iz Teorema 1.2.2. Konstruirali smo Brownovo gibanje kao red definiran s

$$B_t = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(t),$$

gdje je svaka F_n po dijelovima linearna funkcija. Derivacija funkcije F_n postoji gotovo svuda i po njenoj konstrukciji vrijedi

$$\frac{\|F_n\|_\infty}{\left\|F_n'\right\|_\infty} \leq \frac{1}{2^n}.$$

Koristeći gornju nejednakost i nejednakost (1.4), za svaki $c > \sqrt{2\log 2}$ postoji $N \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n > N$ vrijedi

$$\|F_n'\|_\infty \leq \frac{\|F_n\|_\infty}{2^{-n}} \leq c\sqrt{n}2^{\frac{n}{2}}. \tag{3.2}$$

Nadalje, po Teoremu srednje vrijednosti, za sve $t, t+h \in [0,1]$ vrijedi

$$|B_{t+h} - B_t| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} F_n(t+h) - \sum_{n=0}^{\infty} F_n(t)\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |F_n(t+h) - F_n(t)| \leq$$

$$\leq \sum_{n=0}^{l} h\|F_n'\|_\infty + \sum_{n=l+1}^{\infty} 2\|F_n\|_\infty.$$

Koristeći nejednakosti (1.4) i (3.2), dobijemo da je gornji izraz za sve $l > N$ omeđen s izrazom

$$h\sum_{n=0}^{N}\|F_n'\|_\infty + ch\sum_{n=N}^{l}\sqrt{n}2^{\frac{n}{2}} + 2c\sum_{n=l+1}^{\infty}\sqrt{n}2^{-\frac{n}{2}}.$$

Pretpostavimo sada da je h dovoljno mali da je prvi pribrojnik u gornjem izrazu manji od $\sqrt{h\log\left(\frac{1}{h}\right)}$. Nadalje, pretpostavimo da je l, za koji vrijedi da je $h \in \left(\frac{1}{2^l}, \frac{1}{2^{l-1}}\right]$, veći od N. Za ovakav izbor konstante l i drugi i treći pribrojnik su omeđeni s $k\sqrt{h\log\left(\frac{1}{h}\right)}$ za neku konstantu k jer su obe sume dominirane svojim najvećim elementom. Dakle, slijedi da vrijedi izraz (3.1) za funkciju $\varphi(h) = C\sqrt{h\log\left(\frac{1}{h}\right)}$. □

Teorem 3.1.2. *Neka je $B = \{B_t : t \geq 0\}$ Brownovo gibanje. Za svaku konstantu $c < \sqrt{2}$ i za svaki $\epsilon > 0$ postoje $h \in (0,\epsilon)$ i $t \in [0, 1-h]$ takvi da, gotovo sigurno, vrijedi*

$$|B_{t+h} - B_t| \geq c\sqrt{h\log\left(\frac{1}{h}\right)}.$$

Dokaz. Neka je $c < \sqrt{2}$ i za $k, n \geq 0$ definiramo događaje

$$A_{k,n} := \left\{B_{\frac{k+1}{e^n}} - B_{\frac{k}{e^n}} > c\sqrt{n}e^{-\frac{n}{2}}\right\}.$$

Za svaki $k \geq 0$ vrijedi

$$\mathbb{P}(A_{k,n}) = \mathbb{P}\left(B_{\frac{k+1}{e^n}} - B_{\frac{k}{e^n}} > c\sqrt{n}e^{-\frac{n}{2}}\right) = \mathbb{P}\left(B_{\frac{1}{e^n}} > c\sqrt{n}e^{-\frac{n}{2}}\right) =$$

$$= \mathbb{P}\left(B_1 > c\sqrt{n}\right) \geq \frac{c\sqrt{n}}{c^2n+1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-c^2\frac{n}{2}},$$

gdje zadnja jednakost slijedi iz svojstva skaliranja Brownovog gibanja, tj. iz Leme 2.1.1, a zadnja nejednakost iz Leme 1.1.3.

Budući da je

$$e^n\mathbb{P}(A_{k,n}) \geq \frac{c\sqrt{n}}{c^2n+1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{n-c^2\frac{n}{2}},$$

prema pretpostavci o konstanti c slijedi da $e^n\mathbb{P}(A_{k,n}) \to \infty$ kad $n \to \infty$. Stoga, koristeći još nezavisnost prirasta i činjenicu da je $1 - x \leq e^{-x}$ za svaki $x \geq 0$, dobijemo

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{\lfloor e^n-1\rfloor} A_{k,n}^c\right) = \prod_{k=0}^{\lfloor e^n-1\rfloor}\mathbb{P}\left(A_{k,n}^c\right) = (1-\mathbb{P}(A_{0,n}))^{\lfloor e^n-1\rfloor+1} \leq \exp\left(-\left(e^n-1\right)\mathbb{P}\left(A_{0,n}\right)\right) =$$

$$= \exp\left(\mathbb{P}\left(A_{0,n}\right)\right)\exp\left(-e^n\mathbb{P}\left(A_{0,n}\right)\right) \leq e\exp\left(-e^n\mathbb{P}\left(A_{0,n}\right)\right) \to 0.$$

Ako uzmemo $h = e^{-n}$, onda za svaki $\epsilon > 0$ vrijedi

$$\mathbb{P}\left(|B_{t+h} - B_t| \leq c\sqrt{h\log\left(\frac{1}{h}\right)}, \forall h \in (0,\epsilon), t \in [0, 1-h]\right) = 0.$$

$\square$

Iz prethodna dva teorema možemo zaključiti da, za najbolji modul neprekidnosti $\varphi(h) = c\sqrt{h\log\left(\frac{1}{h}\right)}$, optimalna konstanta c iznosi $\sqrt{2}$. Budući da smo dokazali Teorem 3.1.2 za donju granicu, potrebno je još dokazati i gornju granicu. Definiramo za sve $n, m \in \mathbb{N}$ skup intervala

$$\Lambda_n(m) := \left\{\left[\frac{k+b-1}{2^{n-a}}, \frac{k+b}{2^{n-a}}\right], lk \in \{1,\ldots,2^n\}, a, b \in \left\{0, \frac{1}{m}, \ldots, \frac{m-1}{m}\right\}\right\}$$

i definiramo

$$\Lambda(m) := \bigcup_n \Lambda_n(m).$$

Dokazat ćemo još dvije leme koje će nam pomoći u dokazu gornje ograde.

Lema 3.1.3. *Neka je $B = \{B_t : t \geq 0\}$ Brownovo gibanje. Za svaku konstantu m i za svaki $c > \sqrt{2}$, gotovo sigurno, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ i za svaki interval $[t, t+h] \in \Lambda_n(m)$ vrijedi*

$$|B_{t+h} - B_t| \leq c\sqrt{h \log\left(\frac{1}{h}\right)}.$$

Dokaz. Računamo

$$\mathbb{P}\left(\sup_{k\in\{1,\dots,2^n\}} \sup_{a,b\in\left\{0,\frac{1}{m},\dots,\frac{m-1}{m}\right\}} \left|B_{\frac{k+b}{2^{n-a}}} - B_{\frac{k+b-1}{2^{n-a}}}\right| > c\sqrt{\frac{\log(2^{n-a})}{2^{n-a}}}\right) =$$

$$= \mathbb{P}\left(\bigcup_{k\in\{1,\dots,2^n\}} \bigcup_{a,b\in\left\{0,\frac{1}{m},\dots,\frac{m-1}{m}\right\}} \left|B_{\frac{k+b}{2^{n-a}}} - B_{\frac{k+b-1}{2^{n-a}}}\right| > c\sqrt{\frac{\log(2^{n-a})}{2^{n-a}}}\right) \leq$$

$$\leq \sum_{k\in\{1,\dots,2^n\}} \sum_{a,b\in\left\{0,\frac{1}{m},\dots,\frac{m-1}{m}\right\}} \mathbb{P}\left(\left|B_{\frac{1}{2^{n-a}}}\right| > c\sqrt{\frac{\log(2^{n-a})}{2^{n-a}}}\right) \leq$$

$$\leq 2^n m^2 \mathbb{P}\left(X > c\sqrt{\log(2^{n-1})}\right) \leq \frac{m^2}{c\sqrt{\log(2^{n-1})}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2^{n\left(1-\frac{c^2}{2}\right)} < \infty,$$

gdje predzadnja nejednakost slijedi iz Leme 1.1.3 za standardnu normalnu slučajnu varijablu X. Sada iz Borel-Cantellijeve leme 1.2.1 slijedi da je vjerojatnost da je

$$|B_{t+h} - B_t| > c\sqrt{h \log\left(\frac{1}{h}\right)}$$

jednaka 0. □

Lema 3.1.4. *Za svaki $\epsilon > 0$ postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da za svaki interval $[s, t] \subset [0, 1]$ postoji interval $[s', t'] \in \Lambda(m)$ za koji vrijedi*

$$|s - s'| < \epsilon(t - s) \quad i \quad |t - t'| < \epsilon(t - s).$$

Dokaz. Uzmimo dovoljno veliki m takav da vrijedi

$$\frac{1}{m} < \frac{\epsilon}{4} \quad \text{i} \quad 2^{\frac{1}{m}} < 1 + \frac{\epsilon}{2}$$

i uzmimo neki interval $[s,t] \subset [0,1]$. Neka je n takav da je

$$t - s \in \left[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

i neka je $a \in \left\{0, \frac{1}{m}, \dots, \frac{m-1}{m}\right\}$ takav da je

$$t - s \in \left[\frac{1}{2^{n-a}}, \frac{1}{2^{n-a-1/m}}\right).$$

Nadalje, uzmimo još $k \in \{1, \dots, 2^n\}$ takav da vrijedi

$$s \in \left(\frac{k-1}{2^{n-a}}, \frac{k}{2^{n-a}}\right]$$

i $b \in \left\{0, \frac{1}{m}, \dots, \frac{m-1}{m}\right\}$ takav da vrijedi

$$s \in \left(\frac{k+b-1}{2^{n-a}}, \frac{k+b-1+\frac{1}{m}}{2^{n-a}}\right].$$

Neka je $s' = \frac{k+b-1}{2^{n-a}}$. Slijedi

$$|s - s'| = s - \frac{k+b-1}{2^{n-a}} \leq \frac{k+b-1+\frac{1}{m}-k-b+1}{2^{n-a}} \leq$$

$$\leq \frac{\frac{1}{m}}{2^{n-a}} \leq \frac{\frac{\epsilon}{4}}{2^{n-a}} \leq \frac{\epsilon}{4}(t-s).$$

Ako uzmemo $t' = \frac{k+b}{2^{n-a}}$, slijedi da je $[s', t'] \in \Lambda_n(m)$ i, koristeći nejednakost trokuta i gornje definicije,

$$|t - t'| = |t - t' + s - s + s - s'| \leq |s - s'| + |(t-s) - (t'-s')| \leq$$

$$\leq \frac{\epsilon}{4}(t-s) + \left(\frac{1}{2^{n-a-1/m}} - \frac{1}{2^{n-a}}\right) = \frac{\epsilon}{4}(t-s) + \frac{2^{1/m}-1}{2^{n-a}} \leq \frac{\epsilon}{4}(t-s) + \frac{\epsilon}{2}\frac{1}{2^{n-a}} \leq$$

$$\leq \frac{\epsilon}{4}(t-s) + \frac{\epsilon}{2}(t-s) \leq \epsilon(t-s).$$

□

Teorem 3.1.5. ***(Lévyjev modul neprekidnosti)*** *Neka je $B = \{B_t : t \geq 0\}$ Brownovo gibanje. Gotovo sigurno vrijedi*

$$\limsup_{h \downarrow 0} \sup_{t \in [0,1-h]} \frac{|B_{t+h} - B_t|}{\sqrt{2h \log\left(\frac{1}{h}\right)}} = 1.$$

Dokaz. Neka je $c > \sqrt{2}$ i neka je $\epsilon \in (0,1)$ dovoljno mali da bi vrijedilo $z := c - \epsilon > \sqrt{2}$. Uzmimo $m \in \mathbb{N}$ iz Leme 3.1.4. Nadalje, uzmimo dovoljno veliki $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da za svaki $n \geq n_0$ i za sve intervale $[s', t'] \in \Lambda_n(m)$, gotovo sigurno, po Lemi 3.1.3 vrijedi

$$|B_{t'} - B_{s'}| \leq z \sqrt{(t' - s') \log\left(\frac{1}{t' - s'}\right)}. \tag{3.3}$$

Neka je sada interval $[s,t] \subset [0,1]$ takav da vrijedi $(t-s) < \frac{1}{2^{n_0}} \wedge \epsilon$, a interval $[s', t'] \in \Lambda(m)$ takav da vrijedi $|t - t'| < \epsilon(t-s)$ i $|s - s'| < \epsilon(t-s)$ kao u Lemi 3.1.4. Tada, koristeći nejednakost trokuta u prvoj nejednakosti, Teorem 3.1.1 i prethodnu nejednakost (3.3) u drugoj nejednakosti te Lemu 3.1.4 u zadnjoj nejednakosti, dobijemo

$$\begin{aligned}
|B_t - B_s| &= |B_t - B_s + B_{t'} - B_{t'} + B_{s'} - B_{s'}| \leq |B_t - B_{t'}| + |B_{t'} - B_{s'}| + |B_{s'} - B_s| \leq \\
&\leq C\sqrt{|t-t'| \log\left(\frac{1}{|t-t'|}\right)} + z\sqrt{(t'-s')\log\left(\frac{1}{t'-s'}\right)} + C\sqrt{|s-s'|\log\left(\frac{1}{|s-s'|}\right)} \leq \\
&\leq \sqrt{(t-s)\log\left(\frac{1}{t-s}\right)}\left(C\sqrt{\epsilon}\left(\frac{\sqrt{\log\left(\frac{1}{|t-t'|}\right)}}{\sqrt{\log\left(\frac{1}{t-s}\right)}} + \frac{\sqrt{\log\left(\frac{1}{|s-s'|}\right)}}{\sqrt{\log\left(\frac{1}{t-s}\right)}}\right) + z\sqrt{\frac{|t'-s'|}{t-s}}\frac{\sqrt{\log\left(\frac{1}{t'-s'}\right)}}{\sqrt{\log\left(\frac{1}{t-s}\right)}}\right) \leq \\
&\leq \sqrt{(t-s)\log\left(\frac{1}{t-s}\right)}\left(C\sqrt{\epsilon}\left(\sqrt{\frac{\log|t-t'|}{\log(t-s)}} + \sqrt{\frac{\log|s-s'|}{\log(t-s)}}\right) + \right. \\
&\qquad \left. + z\sqrt{\frac{|t'-t+t-s+s-s'|}{t-s}\frac{\log(t'-s')}{\log(t-s)}}\right) \leq \\
&\leq \sqrt{(t-s)\log\left(\frac{1}{t-s}\right)}\left(2C\sqrt{\epsilon}\sqrt{\frac{\log(\epsilon(t-s))}{\log(t-s)}} + z\sqrt{\frac{(t-s)(1+2\epsilon)}{t-s}\frac{\log((t-s)(1+2\epsilon))}{\log(t-s)}}\right) \leq \\
&\leq \sqrt{(t-s)\log\left(\frac{1}{t-s}\right)}\left(2C\sqrt{\epsilon}\sqrt{\frac{2\log\epsilon}{\log(t-s)}} + z\sqrt{(1+2\epsilon)\left(1 + \frac{\log(1+2\epsilon)}{\log(t-s)}\right)}\right) \leq \\
&\leq \sqrt{(t-s)\log\left(\frac{1}{t-s}\right)}\left(2\sqrt{2}C\sqrt{\epsilon}\frac{\sqrt{\log\left(\frac{1}{\epsilon}\right)}}{\sqrt{\log\left(\frac{1}{t-s}\right)}} + z\sqrt{(1+2\epsilon)(1+\log(1+2\epsilon))}\right). \\
&\leq \sqrt{(t-s)\log\left(\frac{1}{t-s}\right)}\left(2\sqrt{2}C\sqrt{\epsilon} + z\sqrt{(1+2\epsilon)(1+\log(1+2\epsilon))}\right).
\end{aligned}$$

Ako uzmemo $\epsilon > 0$ dovoljno mali da je prvi faktor u gornjem izrazu blizu c, dobijemo dokaz za gornju ogradu, koji u kombinaciji s dokazom Teorema 3.1.2 daje dokaz ovog teorema. □

Definicija 3.1.6. *Kažemo da je funkcija $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ lokalno α-Hölder neprekidna u $x \geq 0$ ako postoje $\epsilon > 0$ i $c > 0$ takvi da je*

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^{\alpha}, \quad \textit{za sve } y \geq 0 \textit{ takve da je } |y - x| < \epsilon.$$

Za $\alpha > 0$ kažemo da je Hölderov eksponent, a za $c > 0$ Hölderova konstanta.

Korolar 3.1.7. *Ako je $\alpha < \frac{1}{2}$, onda je, gotovo sigurno, Brownovo gibanje svugdje lokalno α-Hölder neprekidno.*

Dokaz. Neka je $C > 0$ kao u Teoremu 3.1.1. Primjenjujući taj teorem na Brownovo gibanje definirano s $\{B_t - B_k : t \in [k, k+1]\}$, gdje je k nenegativan cijeli broj, dobijemo da, gotovo sigurno, za svaki k postoji $h(k) > 0$ takva da za sve $t \in [k, k+1)$ i za sve $h \in (0, (k+1-t) \wedge h(k))$, vrijedi

$$|B_{t+h} - B_t| \leq C\sqrt{h \log\left(\frac{1}{h}\right)} \leq Ch^{\alpha},$$

gdje smo iskoristili nejednakost $\sqrt{h \log\left(\frac{1}{h}\right)} \leq h^{\alpha}$, za $\alpha < \frac{1}{2}$ i h dovoljno malen. Napravimo li istu stvar s Brownovim gibanjem $\{B_{k+1-t} - B_{k+1} : t \in [k, k+1]\}$, dokazali smo tvrdnju. □

3.2 Nediferencijabilnost Brownovog gibanja

Teorem 3.2.1. *Za gotovo sve $0 < a < b < \infty$, Brownovo gibanje nije monotono na intervalu $[a, b]$.*

Dokaz. Neka je $B = \{B_t : t \geq 0\}$ Brownovo gibanje i neka je $[a, b]$ interval pozitivne duljine. Pretpostavimo suprotno, tj. pretpostavimo da je Brownovo gibanje B monotono na intervalu $[a, b]$:

$$B_s \leq B_t, \quad \text{za sve } s \leq t \text{ takve da je } s, t \in [a, b].$$

Neka su sada $a = a_1 \leq \cdots \leq a_{n+1} = b$ čime smo podijelili interval $[a, b]$ na n podintervala $[a_i, a_{i+1}]$. Zbog monotonosti Brownovog gibanja na intervalu $[a, b]$ svi prirasti $B_{a_i} - B_{a_{i-1}}$

moraju biti istog predznaka. Budući da su prirasti nezavisni, vjerojatnost da su svi prirasti istog predznaka je jednaka

$$\mathbb{P}\left(B_{a_i} - B_{a_{i-1}} \leq 0, \forall i \in \{1, \ldots, n\}\right) + \mathbb{P}\left(B_{a_i} - B_{a_{i-1}} \geq 0, \forall i \in \{1, \ldots, n\}\right) =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(B_{a_i} - B_{a_{i-1}} \leq 0\right) + \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(B_{a_i} - B_{a_{i-1}} \geq 0\right) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2} + \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2} = \frac{2}{2^n}.$$

Kada pustimo $n \to \infty$, slijedi da je vjerojatnost da je interval $[a, b]$ interval monotonosti jednaka 0.

Uzmemo li prebrojivu uniju, slijedi da, gotovo sigurno, ne postoji interval monotonosti pozitivne duljine s racionalnim krajevima, a svaki interval $[a, b]$ pozitivne duljine sadrži racionalni podinterval $[p, q] \subset [a, b]$ pozitivne duljine. Budući da Brownovo gibanje B nije monotono na intervalu $[p, q]$, ne može biti monotono i na intervalu $[a, b]$. □

Da bismo dokazali sljedeću propoziciju koristi ćemo Hewitt-Savageov 0-1 zakon, čiji dokaz se nalazi u [2] na 174. stranici.

Definicija 3.2.2. *Neka je* $\{X_t : t \geq 0\}$ *niz slučajnih varijabli i neka je* A *skup takav da je* $\{X_1, X_2, \ldots \in A\} \in \mathcal{F}$. *Kažemo da je događaj* $\{X_1, X_2, \ldots \in A\}$ *izmjenjiv ako*

$$\{X_1, X_2, \ldots \in A\} \subset \{X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \ldots \in A\}$$

za sve konačne permutacije $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$*, gdje konačna permutacija znači da je* σ *bijekcija takva da je* $\sigma(n) = n$ *počevši od dovoljno velikog* n.

Lema 3.2.3. ***(Hewitt-Savageov 0-1 zakon)*** *Ako je* E *neki izmjenjiv događaj za nezavisan i jednako distribuiran niz slučajnih varijabli, onda je* $\mathbb{P}(E) \in \{0, 1\}$.

Također ćemo koristiti i Fatouovu lemu, čiji se dokaz može naći u [3] na 11. stranici.

Lema 3.2.4. ***(Fatouova lema)*** *Neka je* $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *prostor mjere i neka je* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *niz funkcija* $f_n : X \to \bar{\mathbb{R}}$ *za svaki* $n \in \mathbb{N}$ *koje su* $\left(\mathcal{F}, \mathcal{B}\left(\bar{\mathbb{R}}\right)\right)$*-izmjerive i* $f_n \geq 0$. *Tada vrijedi*

$$\int_X \left(\liminf_n f_n\right) d\mu \leq \liminf_n \int_X f_n d\mu.$$

Lema 3.2.5. ***(Obrnuta Fatouova lema)*** *Ako postoji integrabilna funkcija* f *takva da je* $f_n \leq f$ *za svaki* n*, tj. ako je niz* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dominiran integrabilnom funkcijom* f*, onda vrijedi*

$$\int_X \left(\limsup_n f_n\right) d\mu \geq \limsup_n \int_X f_n d\mu.$$

Dokaz. Definiramo niz nenegativnih funkcija $g_n := f - f_n \geq 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Prema Fatouovoj lemi, tj. Lemi 3.2.4, slijedi

$$\int_X \left(\liminf_n g_n\right) d\mu \leq \liminf_n \int_X g_n d\mu,$$

tj. slijedi

$$\int_X \left(\liminf_n (f - f_n)\right) d\mu \leq \liminf_n \int_X (f - f_n)\, d\mu.$$

Nadalje,

$$\int_X f d\mu - \int_X \left(\liminf_n (-f_n)\right) d\mu \leq \int_X f d\mu - \liminf_n \int_X (-f_n)\, d\mu,$$

pa slijedi

$$\int_X \left(\liminf_n (-f_n)\right) d\mu \geq \liminf_n \int_X (-f_n)\, d\mu.$$

Budući da je $\liminf_n (-f_n) = \limsup_n f_n$, dobijemo

$$\int_X \left(\limsup_n f_n\right) d\mu \geq \limsup_n \int_X f_n d\mu.$$

□

Propozicija 3.2.6. *Neka je $B = \{B_t : t \geq 0\}$ Brownovo gibanje. Tada, gotovo sigurno, vrijedi*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{B_n}{\sqrt{n}} = +\infty \quad i \quad \liminf_{n\to\infty} \frac{B_n}{\sqrt{n}} = -\infty.$$

Dokaz. Prema Obrnutoj Fatouovoj lemi 3.2.5 vrijedi

$$\mathbb{P}\left(B_n > c\sqrt{n} \text{ beskonačno mnogo puta}\right) = \mathbb{E}\left[\limsup_n \mathbb{1}_{\{B_n > c\sqrt{n}\}}\right] \geq$$

$$\geq \limsup_n \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{B_n > c\sqrt{n}\}}\right] = \limsup_n \mathbb{P}\left(B_n > c\sqrt{n}\right).$$

Prema skalirajućem svojstvu, tj. prema Lemi 2.1.1, vrijedi da je

$$\mathbb{P}\left(B_n > c\sqrt{n}\right) = \mathbb{P}\left(B_1 > c\right) > 0.$$

Neka je $X_n := B_n - B_{n-1}$. Budući da je $\sum_{j=1}^n X_j = B_n$, vrijedi

$$\left\{B_n > c\sqrt{n} \text{ beskonačno mnogo puta}\right\} = \left\{\sum_{j=1}^n X_j > c\sqrt{n} \text{ beskonačno mnogo puta}\right\}$$

i to je izmjenjiv događaj. Po Hewitt-Savageovom 0-1 zakonu, tj. po Lemi 3.2.3, slijedi da je, s vjerojatnošću 1, $B_n > c\sqrt{n}$ beskonačno mnogo puta. Ako uzmemo presjek po svim pozitivnim cijelim brojevima c dobijemo prvi dio tvrdnje. Drugi dio se dokazuje analogno. □

Definicija 3.2.7. *Za funkciju f definiramo gornju desnu derivaciju s*

$$D^* f(t) := \limsup_{h \downarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h},$$

i donju desnu derivaciju s

$$D_* f(t) := \liminf_{h \downarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}.$$

Teorem 3.2.8. *Neka je $t \geq 0$. Tada, gotovo sigurno, Brownovo gibanje $B = \{B_t : t \geq 0\}$ nije diferencijabilno u t. Nadalje, $D^* B_t = +\infty$ i $D_* B_t = -\infty$.*

Dokaz. Konstruiramo Brownovo gibanje $X = \{X_t : t \geq 0\}$ kao u Teoremu 2.2.1 definirano s

$$X_t := \begin{cases} 0, & \text{za } t = 0, \\ tB_{\frac{1}{t}}, & \text{za } t > 0. \end{cases}$$

Slijedi,

$$D^* X_0 = \limsup_{h \downarrow 0} \frac{X_h - X_0}{h} \geq \limsup_{n \to \infty} \frac{X_{\frac{1}{n}} - X_0}{\frac{1}{n}} = \limsup_{n \to \infty} n X_{\frac{1}{n}} \geq$$
$$\geq \limsup_{n \to \infty} \sqrt{n} X_{\frac{1}{n}} = \limsup_{n \to \infty} \frac{B_n}{\sqrt{n}} = +\infty,$$

gdje zadnja jednakost slijedi iz Propozicije 3.2.6. Slično, pokaže se da vrijedi $D_* X_0 = -\infty$. Slijedi da Brownovo gibanje X nije diferencijabilno u 0. Uzmimo sada proizvoljan $t > 0$. Prema Lemi 2.4.1, slijedi da je slučajan proces $Y = \{Y_s : s \geq 0\}$ definiran s $Y_s := B_{s+t} - B_t$ također Brownovo gibanje. Budući da Brownovo gibanje Y nije diferencijabilno u 0, slijedi da Brownovo gibanje B nije diferencijabilno u t. □

Iako prethodni teorem dokazuje da je svaki t gotovo sigurno točka nediferencijabilnosti za Brownovo gibanje, to ne znači da je gotovo svaka točka t točka nediferencijabilnosti Brownovog gibanja. Dokazana je tvrdnja za sva Brownova gibanja izvan skupa vjerojatnosti 0, koji može ovisiti o t, a neprebrojva unija takvih skupova vjerojatnosti 0 ne mora biti skup vjerojatnosti 0.

Teorem 3.2.9. ***(Paley, Wiener and Zygmund)*** *Gotovo sigurno, Brownovo gibanje $B = \{B_t : t \geq 0\}$ nije nigdje diferencijabilno. Nadalje, gotovo sigurno, za svaki t vrijedi*

$$\text{ili} \quad D^* B_t = +\infty \quad \text{ili} \quad D_* B_t = -\infty \quad \text{ili oboje.}$$

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji $t_0 \in [0,1]$ takav da je $-\infty < D_* B_{t_0} \leq D^* B_{t_0} < +\infty$. Tada vrijedi

$$\limsup_{h \downarrow 0} \frac{\left|B_{t_0+h} - B_{t_0}\right|}{h} < \infty$$

i, koristeći omeđenost Brownovog gibanja na intervalu $[0,2]$, slijedi da za neku konačnu konstantu M postoji t_0 takav da vrijedi

$$\sup_{h \in [0,1]} \frac{\left|B_{t_0+h} - B_{t_0}\right|}{h} \leq M.$$

Dovoljno je pokazati da je vjerojatnost ovog događaja jednaka 0 za svaki M.

Uzmimo, dakle, neki fiksni M. Ako se t_0 nalazi u intervalu $\left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right]$ za $n > 2$, onda za svaki $j \in [1, 2^n - k]$, zbog nejednakosti trokuta, vrijedi

$$\left|B_{\frac{k+j}{2^n}} - B_{\frac{k+j-1}{2^n}}\right| \leq \left|B_{\frac{k+j}{2^n}} - B_{t_0}\right| + \left|B_{t_0} - B_{\frac{k+j-1}{2^n}}\right| \leq M \frac{2j+1}{2^n}.$$

Definiramo događaje

$$\Omega_{n,k} := \left\{\left|B_{\frac{k+j}{2^n}} - B_{\frac{k+j-1}{2^n}}\right| \leq M \frac{2j+1}{2^n}, \text{ za } j = 1,2,3\right\}.$$

Zbog nezavisnosti prirasta Brownovog gibanja, što koristimo u prvoj nejednakosti, i skalirajućeg svojstva, tj. Leme 2.1.1, koje koristimo u drugoj nejednakosti, za $k \in [1, 2^n - 3]$ vrijedi

$$\mathbb{P}(\Omega_{n,k}) \leq \prod_{j=1}^{3} \mathbb{P}\left(\left|B_{\frac{k+j}{2^n}} - B_{\frac{k+j-1}{2^n}}\right| \leq M \frac{2j+1}{2^n}\right) \leq \mathbb{P}\left(|B_1| \leq \frac{7M}{\sqrt{2^n}}\right)^3 = \mathbb{P}\left(B_1 \in \left[-\frac{7M}{\sqrt{2^n}}, \frac{7M}{\sqrt{2^n}}\right]\right)^3 =$$

$$= \left(\int_{\frac{-7M}{\sqrt{2^n}}}^{\frac{7M}{\sqrt{2^n}}} f(x)dx\right)^3 \leq \left(2 \cdot \frac{7M}{\sqrt{2^n}} \cdot \frac{1}{2}\right)^3 \leq \left(\frac{7M}{\sqrt{2^n}}\right)^3,$$

gdje zadnja jednakost slijedi iz činjenice da je gustoća normalne slučajne varijable omeđena s $\frac{1}{2}$, tj. $f(x) \leq \frac{1}{2}$. Slijedi,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{2^n-3} \Omega_{n,k}\right) \leq 2^n \left(\frac{7M}{\sqrt{2^n}}\right)^3 = \frac{(7M)^3}{\sqrt{2^n}},$$

što je konačno za sve n. Dakle, upotrebom Borel-Cantellijeve leme, tj. Teorema 1.2.1, dobijemo

$$\mathbb{P}\left(\exists t_0 \in [0,1] \quad \text{takav da} \quad \sup_{h \in [0,1]} \frac{\left|B_{t_0+h} - B_{t_0}\right|}{h} \leq M\right) \leq$$

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{2^n-3} \Omega_{n,k} \quad \text{za beskonačno mnogo } n \right) = 0.$$

□

Poglavlje 4

Simuliranje Brownovog gibanja

U ovom poglavlju ćemo prikazati kako simulirati Brownovo gibanje. Simulacija će se temeljiti na normalnoj distribuciji prirasta Brownovog gibanja.

Neka su $X_1, \ldots, X_n$ nezavisne i jednako distribuirane slučajne varijable sa zajedničkom distribucijom F. Za svaki $\omega \in \Omega$ n-torku $(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega))$ zovemo slučajni uzorak distribucije F. Realizaciju slučajnog uzorka $(x_1, \ldots, x_n)$, gdje su x_i opažene vrijednosti od X_i, $i = 1, \ldots, n$, zovemo uzorkom distribucije F i označavamo $x_j \stackrel{s}{\sim} F$. U simulacijama tretiramo uzorak kao da je slučajan uzorak.

Prvi algoritam nam omogućuje da uzorak uniformne distribucije $\mathrm{U}_{(0,1)}$ transformiramo u uzorak bilo koje druge distribucije.

Algoritam 4.0.1. *Neka je F funkcija distribucije.*
(1) Generiramo $u \stackrel{s}{\sim} \mathrm{U}_{(0,1)}$.
(2) Definiramo $x := F^{-1}(u)$.
Tada je $x \stackrel{s}{\sim} F$.

Dokaz. Neka je X slučajna varijabla, $X \sim \mathrm{U}_{(0,1)}$. Budući da fukcija distribucije ne mora uvijek biti strogo rastuća, definiramo generalizirani inverz funkcije F

$$F^{-1}(u) := \inf\{x : F(x) \geq u\}.$$

Tada vrijedi

$$\mathbb{P}\left(F^{-1}(X) \leq x\right) = \mathbb{P}\left(\inf\{t : F(t) \geq X\} \leq x\right) = \mathbb{P}\left(X \leq F(x)\right) = F(x),$$

tj. $F^{-1} \sim F$. Slijedi,

$$x \stackrel{s}{\sim} \mathrm{U}_{(0,1)} \Rightarrow F^{-1}(x) \stackrel{s}{\sim} F.$$

□

Postoji mnogo algoritama za generiranje uzorka uniformne distribucije $\mathrm{U}_{(0,1)}$ i ti algoritmi su većinom implementirani u programske jezika. Pretpostavljamo, dakle, da znamo generirati $x \overset{s}{\sim} \mathrm{U}_{(0,1)}$.

Primjer 4.0.2. *Za $a < b$ funkcija distribucije od $\mathrm{U}_{(a,b)}$ je dana s*

$$F(x) = \frac{x-a}{b-a}, \quad x \in [a, b].$$

Slijedi

$$F^{-1}(x) = x(b-a) + a.$$

Koristeći prethodni Algoritam 4.0.1 dobijemo da vrijedi

$$u \overset{s}{\sim} \mathrm{U}_{(0,1)} \Rightarrow u(b-a) + a \overset{s}{\sim} \mathrm{U}_{(a,b)}.$$

Primjer 4.0.3. *Neka je $p \in [0,1]$ i $U \sim \mathrm{U}_{(0,1)}$. Slijedi da je $\mathbb{1}_{[0,p]}(U) \sim \mathrm{B}(p)$, gdje je $\mathrm{B}(p)$ Bernoullijeva distribucija s vjerojatnosti p. Vrijedi*

$$u \overset{s}{\sim} \mathrm{U}_{(0,1)} \Rightarrow \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2}]}(u) \overset{s}{\sim} \mathrm{U}_{\{0,1\}}$$

i

$$2 \cdot \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2}]}(u) - 1 \overset{s}{\sim} \mathrm{U}_{\{-1,1\}}.$$

Primjer 4.0.4. *Funkcija distribucije eksponencijalne distribucije s parametrom $\lambda > 0$, Exp_λ, je*

$$F(x) = \begin{cases} 0, & za\ x < 0, \\ 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}, & za\ x \geq 0. \end{cases}$$

Slijedi

$$F^{-1}(y) = -\frac{1}{\lambda} \log(1-y), \quad 0 \leq y \leq 1.$$

Također vrijedi

$$U \sim \mathrm{U}_{(0,1)} \Rightarrow 1 - U \sim \mathrm{U}_{(0,1)}.$$

Koristeći Algoritam 4.0.1 slijedi

$$u \overset{s}{\sim} \mathrm{U}_{(0,1)} \Rightarrow -\frac{1}{\lambda} \log(u) \overset{s}{\sim} \mathrm{Exp}_\lambda.$$

Algoritam 4.0.5. *Neka su F i G funkcije distribucije s gustoćama f i g takve da za neku konstantu $c > 0$ i za svaki x vrijedi $f(x) \leq cg(x)$.*

(1) Generiramo $y \overset{s}{\sim} G$.

(2) Generiramo $u \overset{s}{\sim} \mathrm{U}_{(0,1)}$.

(3) Ako je $ucg(y) \leq f(y)$, onda $x := y$, inače se vratimo na (1).

Tada je $x \overset{s}{\sim} F$.

Dokaz. Ako su $Y \sim G$ i $U \sim \mathrm{U}_{(0,1)}$ nezavisne slučajne varijable, onda ovaj algoritam generira opaženu vrijednost distribucije na sljedeći način:

$$\mathbb{P}(Y \in A | Ucg(Y) \leq f(Y)) = \frac{\mathbb{P}(Y \in A, Ucg(Y) \leq f(Y))}{\mathbb{P}(Ucg(Y) \leq f(Y))}.$$

Računamo

$$\mathbb{P}(Y \in A, Ucg(Y) \leq f(Y)) = \int_0^1 \int_A \mathbb{1}_{\{(v,z): vcg(z) \leq f(z)\}}(u, y) g(y) dy du =$$

$$= \int_{A \setminus \{g=0\}} \int_0^{\frac{f(y)}{cg(y)}} du g(y) dy = \int_{A \setminus \{g=0\}} \frac{f(y)}{cg(y)} g(y) dy =$$

$$= \frac{1}{c} \int_{A \setminus \{g=0\}} f(y) dy = \frac{1}{c} \int_A f(y) dy.$$

Za $A = \mathbb{R}$ vrijedi

$$\mathbb{P}(Ucg(Y) \leq f(Y)) = \mathbb{P}(Y \in \mathbb{R}, Ucg(Y) \leq f(Y)) = \frac{1}{c}.$$

Dakle, slijedi

$$\mathbb{P}(Y \in A | Ucg(Y) \leq f(Y)) = \int_A f(y) dy.$$

□

Primjer 4.0.6. *Možemo primjeniti prethodi Algoritam 4.0.5 na jednostranu normalnu distribuciju, čija je gustoća dana s*

$$f(x) = 2\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x),$$

i Exp_1 *distribuciju, čija je gustoća dana s*

$$g(x) = \mathrm{e}^{-x} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x).$$

Tražimo najmanju konstantu $c > 0$ takvu da za svaki x vrijedi $f(x) \leq cg(x)$:

$$c = \sup_x \frac{f(x)}{g(x)} = \sup_x \frac{2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-1/2x^2}}{\mathrm{e}^{-x}} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x) = \sup_{x \in [0,\infty)} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{x - \frac{1}{2}x^2}.$$

Budući da maksimum funkcije $h(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x$ iznosi $\frac{1}{2}$, slijedi da je

$$c = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}.$$

Algoritam 4.0.7. *Neka je F distribucija s gustoćom f oblika*

$$f(x) = \int g_y(x)\mu(dy),$$

gdje je μ vjerojatosna mjera, a g_y gustoća za svaki y.
(1) Generiramo $y \overset{s}{\sim} \mu$.
(2) Generiramo $x \overset{s}{\sim} g_y$.
Tada je $x \overset{s}{\sim} F$.

Dokaz. Neka je $Y \sim \mu$ i neka je $X \sim g_y$ uz uvjet $\{Y = y\}$. Slijedi

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \int \mathbb{P}(X \leq x | Y = y)\mu(dy) = \int \int_{-\infty}^{x} g_y(z) dz \mu(dy) = \int_{-\infty}^{x} f(z) dz.$$

Dakle, $X \sim F$. □

4.1 Simuliranje normalne distribucije

Postoji više algoritama za generiranje standardne normale distribucije.

Algoritam 4.1.1. ***(Kompozicija jednostrano normalno distribuiranog uzorka)*** *Neka je g_1 gustoća jednostrane normalne distribucije (kao u Primjeru 4.0.3).*
(1) Generiramo $y \overset{s}{\sim} \mathrm{U}_{\{-1,1\}}$.
(2) Generiramo $z \overset{s}{\sim} g_1$.
(3) Definiramo $x := yz$.
Tada je $x \overset{s}{\sim} \mathrm{N}(0, 1)$.

Dokaz. Gustoću standardne normalne distribucije možemo zapisati na sljedeći način:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} = \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \mathbb{1}_{(-\infty,0]}(x) + \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x) =: \frac{1}{2} g_{-1}(x) + \frac{1}{2} g_1(x),$$

tj. ako definiramo $\mu(dy) := \frac{1}{2}\delta_{-1}(dy) + \frac{1}{2}\delta_1(dy)$, slijedi

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_y(x)\mu(dy).$$

Uočimo da znamo generirati $Z \sim g_1$ kao u Primjeru 4.0.6. Također vrijedi

$$Z \sim g_1 \Rightarrow -Z \sim g_{-1}.$$

Nadalje, koristeći Primjer 4.0.3 generiramo $Y \sim \mathrm{U}_{\{-1,1\}}$. Po prethodnom Algoritmu 4.0.7 vrijedi da je $YZ \sim \mathrm{N}(0,1)$. □

Algoritam 4.1.2. ***(Numerička inverzija)*** *Neka je F funkcija distribucije standardne normalne distribucije.*

(1) Generiramo $u \overset{s}{\sim} \mathrm{U}_{(0,1)}$.

(2) Definiramo $x := F^{-1}(u)$.

Tada je $x \overset{s}{\sim} \mathrm{N}(0,1)$.

Dokaz. Tvrdnja trivijalno slijedi iz Algoritma 4.0.1. □

Ako imamo generiran uzorak iz standardne normalne razdiobe, sljedećim algoritmom možemo generirati uzorak normalne razdiobe.

Algoritam 4.1.3. *Neka je* $\mu \in \mathbb{R}$ *i* $\sigma > 0$.

(1) Generiramo $y \overset{s}{\sim} \mathrm{N}(0,1)$.

(2) Definiramo $x := \sigma y + \mu$.

Tada je $x \overset{s}{\sim} \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$.

Dokaz. Ovaj algoritam slijedi trivijalno iz činjenice

$$X \sim \mathrm{N}(0,1) \Rightarrow \sigma X + \mu \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2).$$

□

4.2 Simuliranje Brownovog gibanja

Simulacija neprekidnog procesa se uvijek temelji na konačnom uzorku jer u konačnom vremenu možemo generirati samo konačno mnogo vrijednosti. Brownovo gibanje se obično simulira na diskretnoj vremenskoj mreži. Najjednostavniji način za simulaciju trajektorija Brownovog gibanja je iskoristiti svojstvo nezavisnosti i normalne distribuiranosti prirasta Brownovog gibanja. Budući da znamo generirati uzorke normalne distribucije, možemo generirati i priraste Brownovog gibanja.

Algoritam 4.2.1. ***(Nezavisni prirasti)*** *Neka je* $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ *ekvidistantna subdivizija vremenskog intervala* $[0, t]$.

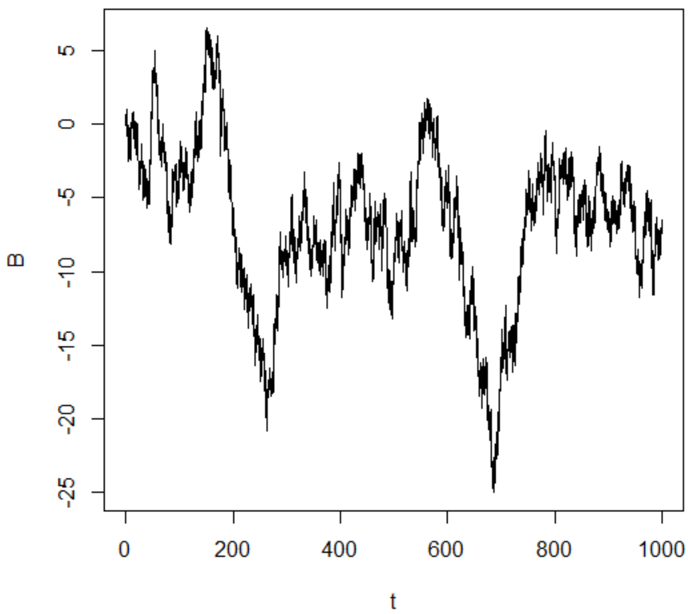
(1) Postavimo početno stanje $b_0 := 0$.

(2) Za j *od* 1 *do* n*:*

(a) generiramo $y \overset{s}{\sim} \mathrm{N}\left(0, t_j - t_{j-1}\right)$,

(b) definiramo $b_{t_j} := b_{t_{j-1}} + y$.

Tada je $(b_0, b_{t_1}, \ldots, b_{t_n}) \overset{s}{\sim} (B_0, B_{t_1}, \ldots, B_{t_n})$*, gdje je* $\{B_t : t \geq 0\}$ *Brownovo gibanje.*



Slika 4.1: Brownovo gibanje

Bibliografija

[1] T. K. Chandra, *The Borel-Cantelli Lemma*, SpringerBriefs in Statistics, 2012.

[2] R. Durrett, *Probability: Theory and examples*, Duxbury Press, 1996.

[3] O. Kallenberg, *Foundations of Modern Probability, Second Edition*, Springer, 2002.

[4] P. Mörters i Y. Peres, *Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics*, Cambridge University Press, 2010.

[5] S. I. Resnick, *Adventures in Stohastic Processes*, Birkhäuser Boston, 1992.

[6] R. L. Schilling i L. Partzsch, *Brownian Motion: An Introduction to Stohastic Processes*, De Gruyter, 2011.

Sažetak

U ovom diplomskom radu smo definirali i opisali Brownovo gibanje, njegovu konstrukciju, neka zanimljiva svojstva i načine simuliranja.

Za početak smo definirali Brownovo gibanje i opisali ga kao Gaussovski proces. Za taj opis su nam bile potrebne definicije standardnih normalnih slučajnih vektora, normalnih slučajnih vektora i Gaussovskog procesa. Koristeći te definicije, opisali smo Brownovo gibanje kao Gaussovski proces s neprekidim trajektorijama, funkcijom očekivanja $m = 0$ i i kovarijacijskom funkcijom $\gamma_{st} = s \wedge t$. U nastavku smo dokazali još neka svojstva standardnih normalnih slučajnih vektora. Zatim smo opisali Lévyjevu konstrukciju Brownovog gibanja, tj. konstruirali smo Brownovo gibanje kao uniformni limes neprekidnih funkcija, što automatski povlači da taj proces ima neprekidne trajektorije.

U drugom poglavlju opisali smo i dokazali razna zanimljiva svojstva Brownovog gibanja. Neka jednostavnija svojstva su invarijantnost na skaliranje, na vemensku inverziju, na simetriju i na obnavljanje. Svojstvo invarijantnosti Brownovog gibanja na obnavljanje smo koristili u dokazu Markovljevog svojstva Brownovog gibanja koje zapravo znači da Brownovo gibanje nema memoriju ni povijest. Nadalje, dokazali smo i jako Markovljevo svojstvo Brownovog gibanja koje smo primijenili da bismo pokazali princip refleksije Brownovog gibanja. Princip refleksije je svojstvo koje kaže da je Brownovo gibanje, koje se u nekom vremenu zaustavljanja krene reflektirati, i dalje Brownovo gibanje. Na kraju drugog poglavlja pokazali smo i da je Brownovo gibanje martingal.

U trećem poglavlju ispitivali smo regularnost trajektorija Brownovog gibanja. Poglavlje smo podijelili na dva dijela. U prvom dijelu smo ispitivali i pokazivali svojstva neprekidnosti Brownovog gibanja preko Lévyjevog modula neprekidnosti, a u drugom dijelu smo, koristeći razne rezultate poput Hewitt-Savageovog 0-1 zakona i Fatouove leme, dokazali da Brownovo gibanje gotovo sigurno nije nigdje diferencijabilno.

Za kraj smo pokazali najjednostavnije načine za simuliranje Brownovog gibanja. Simulacija Brownovog gibanja se temelji na nezavisnosti i normalnoj distribuciji prirasta Brownovog gibanja. Izveli smo nekoliko algoritama i primjera za simuliranje uniformne i normalne distribucije, a na kraju smo simulirali Brownovo gibanje koristeći nezavisnost i normalnu distribuiranost njegovih prirasta.

Summary

In this thesis we have defined and described Brownian motion, its construction, some interesting properties and methods for its simulation.

At the beginning we have defined Brownian motion and described it as a Gaussian process. For this description we needed definitions of standard normal random vectors, normal random vectors and Gaussian processes. By using these definitions, we could describe Brownian motion as Gaussian process with continuous sample paths, with mean $m = 0$ and covariance function $\gamma_{st} = s \wedge t$. In addition, we have proven another properties of standard normal random vectors. Then, we have described Lévy's construction of Brownian motion, i.e. we have constructed Brownian motion as a uniform limit of continous functions, to ensure that it automatically has continous paths.

In the second chapter, we have described and proven various interesting properties of Brownian motion. Some of the simpliest properties are scaling invariance property, time inversion, symmetry invariance property and renewal invariance property. We have used the renewal invarance property of Brownian motion in the proof of Markov property of Brownian motion. The fact that Brownian motion has Markov property means that Brownian motion does not have memory or history. Furthermore, we have proven strong Markov property of Brownian motion, which we have used to prove the reflection principle of Brownian motion. The reflection principle is property which states that Brownian motion reflected at some stopping time is still a Brownian motion. At the end of the second chapter we have shown that Brownian motion is also a martingale.

In the third chapter, we have examined the regularity of Brownian motion. We have divided the chapter into two parts. In the first part we have examined and proven some continuity properties of Brownian motion by using the Lévy's modul of continuity. In the second part, we have proven, by using results such as Hewitt-Savage 0-1 Law and Fatou's lemma, that Brownian motion is, almost surely, nowhere differentiable.

In the end, we have shown the simpliest ways to simulate Brownian motion. The simulation of Brownian motion is based on the independence and normal distribution of increments of Brownian motion. We have shown several examples and algorithms for simulating uniform and normal distribution, and finally we have simulated Brownian motion by using independence and normal distribution of its increments.

Životopis

Rođena sam 27. srpnja 1991. godine u Zagrebu. Odrasla sam i živim u Zaprešiću.

Školovanje sam započela 1997. godine u Osnovnoj školi Ljudevita Gaja u Zaprešiću i nastavila upisujući gimnaziju u Srednjoj školi ban Josip Jelačić u Zaprešiću 2005. godine. Kroz cijelo osnovnoškolsko i srednjoškolsko obrazovanje bila sam sudionik raznih matematičkih natjecanja.

Po završetku srednje škole, upisala sam Prirodoslovno-matematički fakultet, matematički odjel i 2013. godine završila preddiplomski nastavnički smjer i stekla titulu sveučilišne prvostupnice edukacijske matematike (bacc. edu. math.). Iste godine sam upisala diplomski studij Financijske i poslovne matematike koji uspješno dovršavam.

Tijekom svog školovanja stekla sam razne računalne vještine, a to su poznavanje rada u programima Dev-C++, MySQL, GeoGebra, Mathematica, Matlab, R i programskom paketu Miccrosoft Office.

Paralelno sam radila razne studentske poslove i obavljala posao demonstratora na predmetu Elementarna geometrija, što mi je pomoglo da dobro razvijem svoje komunikacijske vještine, vještine potrebne za rad u timu i vještine potrebne za vodstvo.

Nadalje, već dvadeset godina pohađam razne tečajeve engleskog jezika, kojim se aktivno služim u govoru i pismu. Dobro se služim i njemačkim jezikom.