Polinomi i primjene

Kolakovski, Tena

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Tena Kolakovski

POLINOMI I PRIMJENE

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Maja Starčević

Zagreb, 2016.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

U ovome diplomskom radu opisat ćemo razvoj koncepta polinoma i razne primjene znanja o polinomima tijekom osnovnoškolskog, srednjoškolskog i visokoškolskog obrazovanja. Kako bismo razumjeli pojam polinoma, najprije ga je potrebno definirati:

Definicija 0.0.1. *Polinom (jedne varijable) je funkcija realnog argumenta x koju možemo zapisati u obliku*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad a_i \in \mathbb{R}, i = 1 \dots n, \quad a_n \neq 0.$$

Brojeve $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ *zovemo koeficijenti polinoma P, broj* a_0 *slobodni koeficijent, a* a_n *vodeći koeficijent. Broj n zovemo stupanj polinoma (stP = n).*

Napomena 0.0.2. *Polinome možemo definirati i kao funkcije više varijabli i kao funkcije kompleksnog argumenta.*

Trenutačno u osnovnoškolskom gradivu ne postoji nastavna cjelina koja se bavi samo polinomima, već se koncept polinoma počinje izgrađivati na indirektan način. Prvi put se s polinomima susrećemo u sedmom razredu osnovne škole izgradnjom pojma linearne funkcije, odnosno polinoma prvog stupnja. Linearna funkcija pojavljuje se u zadacima u kojima je potrebno opisati linearnu ovisnost dviju varijabli. Zatim u osmom razredu počinje izgradnja pojma kvadratne funkcije, odnosno polinoma drugog stupnja, koja se nastavlja u drugom razredu srednje škole. U srednjoj školi precizno se definira polinom i osnovne operacije nad polinomima (zbrajanje, oduzimanje, množenje i dijeljenje polinoma) te se uče formule za određivanje nultočaka kvadratne funkcije. Također se detaljno upoznajemo s grafom kvadratne funkcije i njezinim ekstremima. U četvrtom razredu srednje škole učenici se upoznaju s osnovama diferencijalnog računa te pomoću njega, mogu istraživati i neke polinome višeg stupnja, koji se za razliku od polinoma prvog i drugog stupnja ne obrađuju detaljno. Pomoću diferencijalnog računa mogu se crtati grafovi polinoma višeg stupnja te se na taj način uočavaju i neka njihova svojstva. U visokoškolskom obrazovanju polinomi se gledaju i šire, kao specijalni primjeri nekih struktura, poput prstena i vektorskog prostora, ulazi se dublje u činjenice o polinomima pa se precizno dokazuju teoremi o polinomima i njihovim svojstvima. Zbog svoje jednostavnosti, polinomi se koriste u mnogim situacijama u kojima se, primjenom njihovih svojstava, pojednostavnjuje račun. Primjrice ako su poznate vrijednosti nekih točaka funkcije, ali ne i njezino pravilo, tada možemo aproksimirati tu funkciju pomoću polinoma. Također, koristeći znanje o polinomima možemo odrediti svojstvene vrijednosti matrica koje nam mogu pomoći u rješavanju diferencijalnih i diferencijskih jednadžbi. Primjena polinoma je neograničena, a mali dio te primjene opisan je u sljedećim poglavljima.

Poglavlje 1

Polinomi u osnovnoškolskom obrazovanju

1.1 Linearna funkcija

Učenici se prvi put susreću s pojmom funkcije u sedmom razredu osnovne škole, i to s polinomom prvog stupnja koji poznajemo kao linearnu funkciju. Zasad se u udžbenicima za osnovnu školu ne definira pojam polinoma, čak se ni ne spominje. Više se obraća pozornost na razvoj koncepta funkcije. Učenici se dotad nisu susreli s pojmom funkcije, a njega izgrađuju pomoću linearne funkcije zbog njezine jednostavne definicije. Naime, lako je izračunavati pojedine točke grafa linearne funkcije, računati nultočku linearne funkcije, ispitivati tok te funkcije i slično. Za sve ove postupke učenici koriste jednostavne elementarne operacije s kojima su već dotad upoznati. U nastavku ćemo pokazati da rastom stupnja polinoma raste i složenost funkcije pa je zbog svoje jednostavnost, linearna funkcija najbolji mogući početak razvoja i pojma polinoma i pojma funkcije.
Prije definiranja samog pojma linearne funkcije učenici otkrivaju što je to pravilo pridruživanja, odnosno da funkcija jednom elementu nekog skupa pridružuje točno jedan element nekog drugog skupa. Učenicima su u tom trenutku pojmovi domene i kodomene komplicirani i apstraktni, pa zbog toga o funkciji govorimo kao o preslikavanju s jednog skupa u drugi skup. Zatim se upoznaju sa zapisom $y = ax$ u kojemu je x nezavisna varijabla jer ne ovisi ni o jednoj drugoj varijabli, dok je y zavisna varijabla jer se mijenja ovisno o varijabli x. Pridruživanje zapisujemo kao $x \longmapsto ax$, a kako bismo naglasili da y jednoznačno ovisi o x, pišemo $y = f(x), f(x) = ax$. $f(x)$ je *vrijednost* funkcije, a x se naziva *argument* funkcije. Analogno se otkrivaju funkcije oblika $f(x) = x+a$ i $f(x) = ax+b$. Tako dolazimo do definicije linearne funkcije, odnosno do definicije polinoma prvog stupnja.

Definicija 1.1.1. *Funkciju koja svakom realnom broju pridružuje realan broj po pravilu pridruživanja $f(x) = ax + b, a \neq 0$ nazivamo linearna funkcija (polinom prvog stupnja), pri čemu a nazivamo vodeći koeficijent, a b slobodni koeficijent funkcije f.*

Napomena 1.1.2. *U nekoj literaturi linearna funkcija definirana je za svaki realan broj a. U tom slučaju linearne funkcije uključuju i konstante funkcije, odnosno polinome stupnja nula.*

Linearna funkcija je definirana za sve realne brojeve. Međutim, pojam linearne funkcije obrađuje se u sedmom razredu osnovne škole, a pojam realnih brojeva tek u osmom razredu osnovne škole stoga u tom trenutku učenici shvaćaju linearnu funkciju kao preslikavanje sa skupa racionalnih brojeva na skup racionalnih brojeva. Zbog toga u nastavku ne spominjemo domenu i kodomenu linearne funkcije, već govorimo o funkciji opisanoj pravilom pridruživanja $f(x) = ax + b$. Sljedeći pojam koji učenici otkrivaju jest nultočka funkcije.

Definicija 1.1.3. *Nultočka je vrijednost nezavisne varijable, tj. broj x_0 za koji je vrijednost funkcije jednaka nuli.*

Napomena 1.1.4. *Nultočka linearne funkcije f računa se na sljedeći način:*
Tražimo za koje $x \in \mathbb{R}$ je $f(x) = 0$, tj. tražimo za koje $x \in \mathbb{R}$ je $ax + b = 0$. Dobivamo:

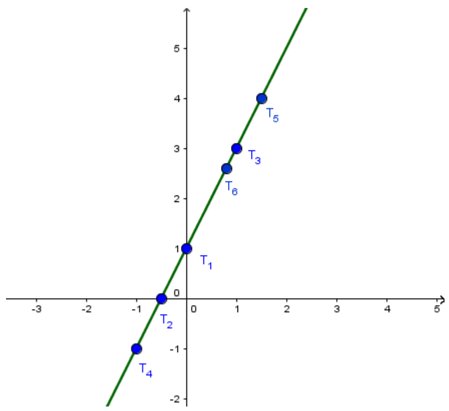
$$\begin{aligned} &ax + b = 0 \\ &\Leftrightarrow ax = -b \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}. \end{aligned}$$

Dakle, $f(x) = 0$ za $x = -\frac{b}{a}$.

Zatim otkrivamo monotonost funkcija, odnosno rastuće i padajuće linearne funkcije. Linearna funkcija može biti rastuća i padajuća funkcija, a hoće li biti padajuća ili rastuća ovisi o njezinu vodećem koeficijentu. Ako je vodeći koeficijent pozitivan, onda je linearna funkcija rastuća, a ako je vodeći koeficijent negativan, onda je linearna funkcija padajuća. Ovo svojstvo može se zapisati simbolima:

- f je rastuća funkcija ako $(\forall\ x_1, x_2) \quad x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$;
- f je padajuća funkcija ako $(\forall\ x_1, x_2) \quad x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Nakon toga interpretiramo koeficijente linearne funkcije. Slobodni koeficijent je vrijednost linearne funkcije u nuli, a vodeći koeficijent nam govori za koliko se promijeni vrijednost funkcije $f(x)$ ako se vrijednost argumenta funkcije x poveća za 1. Općenito možemo zapisati:



Slika 1.1: Konstrukcija grafa linearne funkcije

- Ako je $a < 0$, onda se vrijednost funkcije smanji.
- Ako je $a > 0$, onda se vrijednost funkcije poveća.

Nakon što su učenici usvojili definiciju linearne funkcije te pojam nultočke i monotonosti, otkrivaju graf linearne funkcije. Učenici najprije povezuju parove pridruženih vrijednosti $(x, f(x))$ funkcije zadane pravilom pridruživanja $f(x) = ax + b$ s točkama koordinatne ravnine. Otkrivaju da je par $(x, f(x))$ uređeni par, odnosno da ne možemo zamijeniti poredak koordinata, tj. da je općenito $(x, f(x)) \neq (f(x), x)$. Zatim učenici otkrivaju da svi uređeni parovi $(x, f(x))$ linearne funkcije, odnosno pripadajuće točke u koordinatnom sustavu, pripadaju jednom pravcu u koordinatnom sustavu. Postupak objašnjavamo na jednom primjeru (Slika 1.1).

Primjer 1.1.5. *Zadana je linearna funkcija s pravilom pridruživanja* $f(x) = 2x + 1$. *Svaki učenik odabire jedan x, zatim se izračuna pripadna vrijednost* $f(x)$ *prema pravilu* $f(x) = 2x + 1$ *i onda nastavnik, u alatu dinamične geometrije, ucrtava sve točke* $(x, f(x))$ *u pravokutni koordinatni sustav. Nakon što je svaki učenik rekao jednu točku, nastavnik konstruira pravac dvjema točkama i učenici uočavaju da sve nacrtane točke pripadaju jednom pravcu. Bitno je provjeriti i obrnuti smjer. Odabiremo stoga proizvoljne točke s pravca i provjeravamo da njihove koordinate* (x, y) *zadovoljavaju jednakost* $y = 2x + 1$. *Time intuitivno dolazimo do zaključka da graf funkcije f nije samo podskup pravca, nego je i jednak tom pravcu.*

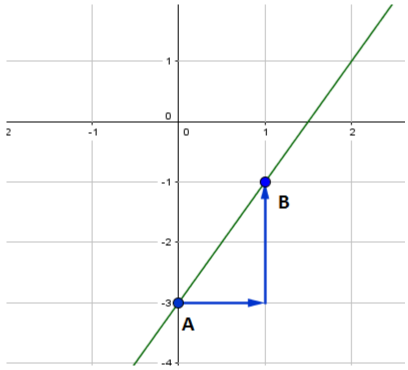
Napomena 1.1.6. *Možemo uočiti da racionalni brojevi neće iscrpsti cijeli pravac, ali će učenici to doznati kasnije, kad se budu upoznali sa skupom realnih brojeva (u osmom razredu). Radi jednostavnosti ne spominjemo im da nismo pokrili cijeli pravac.*

Upoznavši se s grafom linearne funkcije, učenici shvaćaju zašto je funkcija dobila takav naziv. Funkcija f zadana pravilom $f(x) = ax+b$ naziva se linearna funkcija zato što je graf te funkcije pravac $y = ax + b$. Pravac se na latinskom jeziku naziva *linea*, odakle dolazi naziv linearna funkcija.
Nakon što su učenici otkrili da je graf linearne funkcije pravac, trebaju otkriti da je graf linearne funkcije *kosi* pravac u koordinatnom sustavu. Zaključuju da horizontalni pravac nije graf linearne funkcije zato što je tada $a = 0$, a vertikalni pravac nije graf linearne funkcije zato što u tom slučaju nekom argumentu x pridružujemo beskonačno mnogo vrijednosti y. Dakle, graf linearne funkcije je kosi pravac u koordinatnom sustavu. Slijedi konstruiranje različitih grafova linearne funkcije. Učenici su već prije uočili da su dovoljne dvije točke za konstrukciju grafa, a sada će vidjeti kako to napraviti što jednostavnije. Kako je ponekad teško ucrtavati točke u koordinatni sustav (primjerice kada su koeficijenti u razlomačkom obliku), učenike učimo da konstruiraju pravac metodom "koračaj pa skoči", ali da bi učenici mogli koristiti tu metodu, potrebna im je *geometrijska interpretacija koeficijenata* linearne funkcije. Apsolutnu vrijednost slobodnog koeficijenta geometrijski interpretiramo kao udaljenost ishodišta do točke u kojoj graf funkcije siječe $y-$os. Dakle, graf linearne funkcije siječe $y-$os u točki $(0, b)$. Broj a označava za koliko se promijeni (poveća/smanji) vrijednost funkcije $f(x)$ ukoliko x uvećamo za 1. Strelice (vidi slike u nastavku), kojima je na grafu zadane funkcije f označeno povećanje argumenta funkcije i povećanje/smanjenje vrijednosti funkcije, s grafom funkcije f čine trokut. Tako dobiven trokut je pravokutan, a omjer duljina njegovih kateta (duljine katete paralelne s y osi i duljine katete paralelne s x osi) jednak je apsolutnoj vrijednosti vodećeg koeficijenta funkcije, odnosno koeficijenta a.

Razlikujemo 4 slučaja:

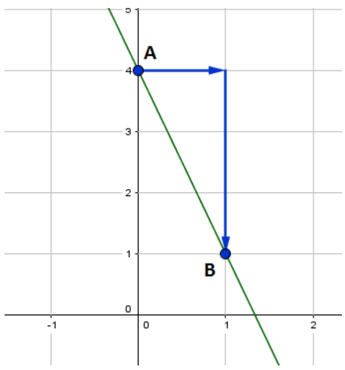
1. slučaj
Zadana je linearna funkcija s pravilom pridruživanja $f(x) = ax + b$. U koordinatnom sustavu prvo označimo točku $A(0, b)$. Ona pripada traženom grafu. Neka je a pozitivan cijeli broj. Zapišimo ga u obliku $a = \frac{a}{1}$. Duljina horizontalne katete pravokutnog trokuta koji crtamo jednaka je nazivniku u prikazu broja a kao razlomka, a duljina vertikalne katete jednaka je brojniku tog razlomka. Prema tome drugu točku grafa funkcije odredimo tako da se od točke A pomaknemo za jednu jediničnu dužinu udesno i za a jediničnih dužina prema gore. Radi lakšeg snalaženja prikažimo postupak crtanja na jednom primjeru. Nacrtajmo graf funkcije zadane pravilom $f(x) = 2x - 3$. Najprije ucrtamo točku $A(0, -3)$. Zatim se od točke A pomaknemo za jednu jediničnu dužinu udesno i za dvije jedinične dužine prema gore. Dobili smo točku $B(1, -1)$ (Slika 1.2).

2. slučaj



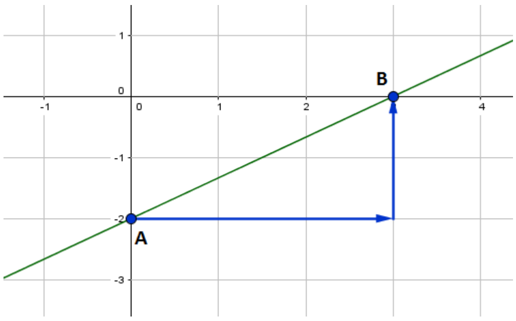
Slika 1.2: Konstrukcija grafa funkcije f zadane pravilom $f(x) = 2x - 3$ metodom "Koračaj pa skoči"

Zadana je linearna funkcija s pravilom pridruživanja $f(x) = ax + b$. U koordinatnom sustavu prvo označimo točku $A(0, b)$. Ona pripada traženom grafu. Neka je a negativan cijeli broj. Zapišimo ga u obliku $a = \frac{a}{1}$. Duljina horizontalne katete pravokutnog trokuta koji crtamo jednaka je nazivniku u prikazu broja a kao razlomka, a duljina vertikalne katete jednaka je brojniku tog razlomka. Prema tome drugu točku grafa funkcije odredimo tako da se od točke A pomaknemo za jednu jediničnu dužinu udesno i za $|a|$ jediničnih dužina prema dolje. Radi lakšeg snalaženja prikažimo postupak crtanja na jednom primjeru. Nacrtajmo graf funkcije zadane pravilom $f(x) = -3x + 4$. Najprije ucrtamo točku $A(0, 4)$. Zatim se od točke A pomaknemo za jednu jediničnu dužinu udesno i za tri jedinične dužine prema dolje. Dobili smo točku $B(1, 1)$ (Slika 1.3).



Slika 1.3: Konstrukcija grafa funkcije f zadane pravilom $f(x) = -3x+4$ metodom "Koračaj pa skoči"

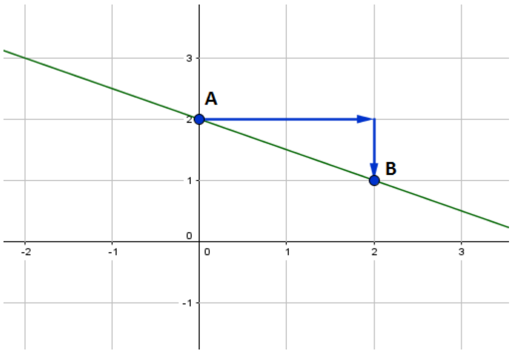
3. slučaj
Zadana je linearna funkcija s pravilom pridruživanja $f(x) = ax+b$. U koordinatnom sustavu prvo označimo točku $A(0, b)$. Ona pripada traženom grafu. Neka je a pozitivan racionalan broj. Zapišimo ga u obliku $a = \frac{m}{n}$. Duljina horizontalne katete pravokutnog trokuta koji crtamo jednaka je nazivniku u prikazu broja a kao razlomka, a duljina vertikalne katete jednaka je brojniku tog razlomka. Prema tome drugu točku grafa funkcije odredimo tako da se od točke A pomaknemo za n jediničnih dužina udesno i za m jediničnih dužina prema gore. Radi lakšeg snalaženja prikažimo postupak crtanja na jednom primjeru. Nacrtajmo graf funkcije zadane pravilom $f(x) = \frac{2}{3}x - 2$. Najprije ucrtamo točku $A(0, -2)$. Zatim se od točke A pomaknemo za tri jedinične dužine udesno i za dvije jedinične dužine prema gore. Dobili smo točku $B(3, 0)$ (Slika 1.4).



Slika 1.4: Konstrukcija grafa funkcije f zadane pravilom $f(x) = \frac{2}{3}x - 2$ metodom "Koračaj pa skoči"

4. slučaj
Zadana je linearna funkcija s pravilom pridruživanja $f(x) = ax+b$. U koordinatnom sustavu prvo označimo točku $A(0, b)$. Ona pripada traženom grafu. Neka je a negativan racionalan broj. Zapišimo ga u obliku $a = -\frac{m}{n}$. Duljina horizontalne katete pravokutnog trokuta koji crtamo jednaka je nazivniku u prikazu broja a kao razlomka, a duljina vertikalne katete jednaka je brojniku tog razlomka. Prema tome drugu točku grafa funkcije odredimo tako da se od točke A pomaknemo za n jediničnih dužina udesno i za m jediničnih dužina prema dolje. Radi lakšeg snalaženja prikažimo postupak crtanja na jednom primjeru. Nacrtajmo graf funkcije zadane pravilom $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$. Najprije ucrtamo točku $A(0, 2)$. Zatim se od točke A pomaknemo za dvije jedinične dužine udesno i za jednu jediničnu dužinu prema dolje. Dobili smo točku $B(2, 1)$ (Slika 1.5).

Napomena 1.1.7. *Radi provjere možemo nacrtati još nekoliko točaka jer je s trima nacrtanim točkama (ili više njih) teže napraviti pogrešku tijekom crtanja. Crtamo ih tako da i*



Slika 1.5: Konstrukcija grafa funkcije f zadane pravilom $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$ metodom "Koračaj pa skoči"

brojnik i nazivnik u koeficijentu a pomnožimo istim prirodnim brojem te ponovimo postupak. Onda ćemo dobiti još jedan trokut koji je sličan prethodnomu i također je pravokutan.

Na kraju učenici otkrivaju geometrijsku interpretaciju monotonosti kojom monotonost interpretiraju veličinom kuta koju graf linearne funkcije zatvara s pozitivnim dijelom x-osi. Ako je vodeći koeficijent a funkcije f, zadane pravilom pridruživanja $f(x) = ax+b$, pozitivan, graf funkcije f zatvara šiljasti kut s pozitivnim dijelom x-osi. Ako je vodeći koeficijent a funkcije f, zadane pravilom pridruživanja $f(x) = ax + b$, negativan, graf funkcije f zatvara tupi kut s pozitivnim dijelom x-osi. Za funkciju f zadanu pravilom pridruživanja $f(x) = ax + b$ vrijedi: što je vodeći koeficijent a po apsolutnoj vrijednosti veći, to je graf funkcije strmiji. Koeficijent a naziva se *koeficijent smjera* jer opisuje nagib pravca.

1.2 Primjene linearne funkcije

U ovom poglavlju rješavat ćemo zadatke vezane uz primjenu linearne funkcije. U prvom zadatku učenici će prepoznati da je funkcijska ovisnost linearna i da se u tom zadatku lako prepozna o kojim se koeficijentima radi, tj. zadani podaci odgovaraju koeficijentima traženih linearnih funkcija. U sljedećem zadatku ti su koeficijenti malo skriveniji, do vodećeg koeficijenta dolazimo promatranjem vrijednosti funkcije u dvama različitim trenutcima. U drugom zadatku se vrijednost funkcije smanjuje pa se, prema tome, može zaključiti da će vodeći koeficijent biti manji od nule. U oba zadatka promatramo neki proces u vremenu. Uočavamo da se promatrana vrijednost jednoliko smanjuje ili povećava što upućuje na linearnu ovisnost. Količina za koju se promatrana vrijednost povećava ili smanjuje daje vodeći koeficijent. Treći zadatak je drugačijeg, geometrijskog karaktera. Tu se koristi poznata formula za opseg pravokutnika pa se možda ne stekne odmah dojam da se radi o linearnoj funkciji kao u prethodna dva primjera, nego tek kad izvedemo izraz za funkciju. Naime, kako već imamo formulu, nije potrebno uočavati pravilnost na nekom skupu vrijednosti. U četvrtom zadatku se pojavljuje po dijelovima linearna funkcija, tj. postoje dvije različite linearne ovisnosti koje učenici trebaju prepoznati.

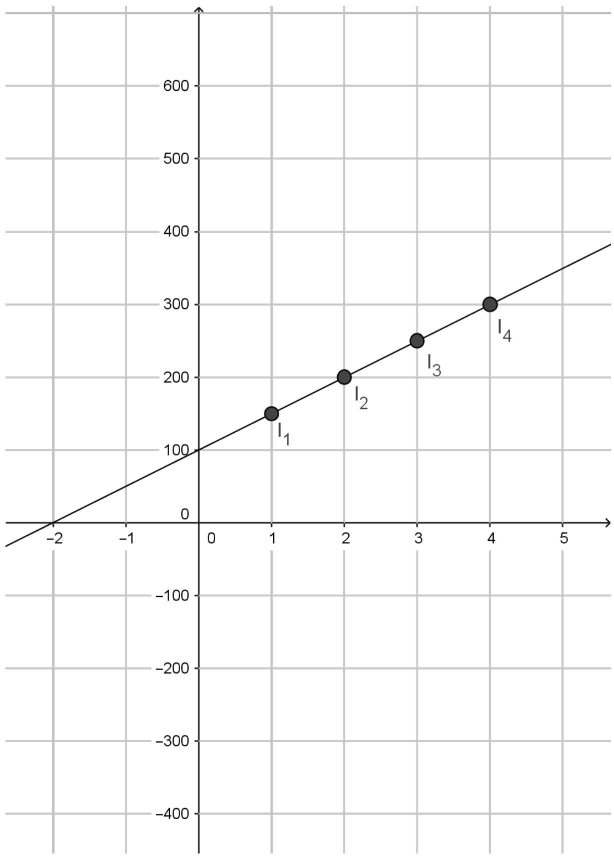
Zadatak 1.

a) Ivan trenira plivanje. Svaki trening prepliva 100 metara za zagrijavanje. Kako bi poboljšao svoje rezultate, odlučio je svaki tjedan za zagrijavanje preplivati 50 metara više nego prethodni tjedan. Funkcijom I opišite kako Ivan napreduje, tj. nađite funkciju koja će opisivati duljinu puta koju će Ivan preplivati nakon x tjedana (s tim da vrijeme mjerimo od trenutka kad je odlučio da će svaki sljedeći tjedan preplivati nekoliko metara više).
b) Ivanov prijatelj Petar krenuo je trenirati onog tjedna kad Ivan počinje povećavati broj metara koje ispliva na treningu. Petar je odlučio svaki tjedan povećati duljinu puta tijekom zagrijavanja za 150 metara. Funkcijom P opišite kako Petar napreduje, tj. nađite funkciju koja opisuje duljinu puta koju će Petar preplivati nakon x tjedana.
c) Tko će preplivati veću duljinu puta u 5. tjednu, Ivan ili Petar?
d) U kojem tjednu će Ivan i Petar preplivati istu duljinu puta?

Rješenje

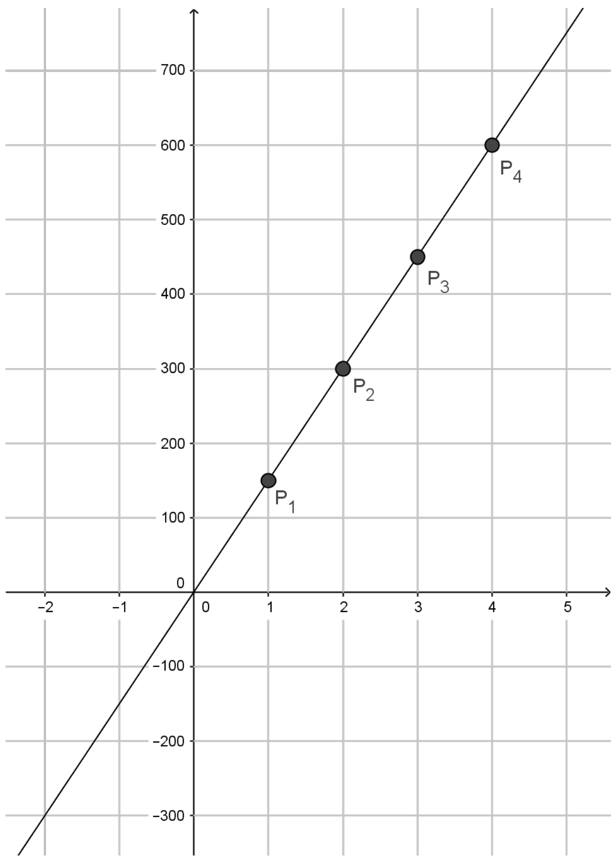
a) Ivan prvog tjedna prepliva $100 + 50 = 100 + 50 \cdot 1 = 150$ metara. U drugom tjednu prepliva 50 metara više nego u prvom tjednu, tj. prepliva $150 + 50 = 100 + 50 \cdot 2 = 200$ metara. U trećem tjednu prepliva 50 metara više nego u drugom tjednu, tj. prepliva $200 + 50 = 100 + 50 \cdot 3 = 250$ metara. Učenici uočavaju pravilnosti te analogijom i generalizirajući nepotpunom indukcijom zaključuju da Ivanovo napredovanje mogu opisati pravilom $I(x) = 100 + 50x$ gdje je x broj tjedana. Ostaje pitanje s kojeg se skupa u koji skup funkcija, koja opisuje Ivanovo napredovanje, preslikava. Broj tjedana ne može biti negativan broj, kao ni duljina puta pa se funkcija I preslikava sa skupa prirodnih brojeva u skup prirodnih brojeva. Grafički, Ivanovo napredovanje možemo shvatiti kao skup točaka koje pripadaju istom pravcu, i to pravcu $y = 100 + 50x$ (Slika 1.6).

b) Kao i u *a*) dijelu zadatka učenici uočavaju pravilnosti ispisivanjem preplivanih metara u prvih nekoliko tjedana, tj. uočavaju da je Petar prvog tjedna preplivao $150 \cdot 1 = 150$ metara. U drugom tjednu preplivao je dvostruko više nego u prvom tjednu, tj. preplivao je $150 + 150 = 150 \cdot 2 = 300$ metara. U trećem tjednu preplivao je triput više nego u prvom



Slika 1.6: Grafički prikaz Ivanova napredovanja

tjednu, tj. preplivao je $300 + 150 = 150 \cdot 3 = 450$ metara. Učenici zaključuju da Petrovo napredovanje mogu opisati pravilom $P(x) = 150x$ gdje je x broj tjedana. Još moramo zaključiti iz kojeg se skupa funkcija koja opisuje Petrovo napredovanje preslikava, kao i u koji skup se preslikava. Broj tjedana je prirodan broj, kao i duljina puta, pa se funkcija P preslikava sa skupa prirodnih brojeva u skup prirodnih brojeva. Možemo primijetiti razliku između Ivanova i Petrova napredovanja. Ivan je svaki tjedan povećavao duljinu puta koju će preplivati (za 50 m), a počeo je s preplivanih 100 metara i zbog toga je slobodni koeficijent funkcije I jednak 100, dok je Petar počeo odmah povećavati duljinu puta za 150 metara, a prethodno nije plivao. Zbog toga je slobodni član funkcije P jednak nuli. Petrovo napredovanje grafički možemo shvatiti kao skup točaka koje pripadaju istom pravcu, i to pravcu $y = 150x$ (Slika 1.7).



Slika 1.7: Grafički prikaz Petrova napredovanja

Napomena 1.2.1. *Grafovi funkcija koje opisuju Ivanovo i Petrovo napredovanje nisu pravci, već samo točke na pravcima kojima su apscise prirodni brojevi.*

c) Ako izračunamo koliko je Ivan preplivao petog tjedna i koliko je Petar preplivao petog tjedna, saznat ćemo koji je više preplivao, što znači da treba izračunati $I(x)$ i $P(x)$ za x jednako 5 tjedana. Računamo:

$$I(5) = 100 + 50 \cdot 5 = 350 \text{ metara},$$
$$P(5) = 150 \cdot 5 = 750 \text{ metara}.$$

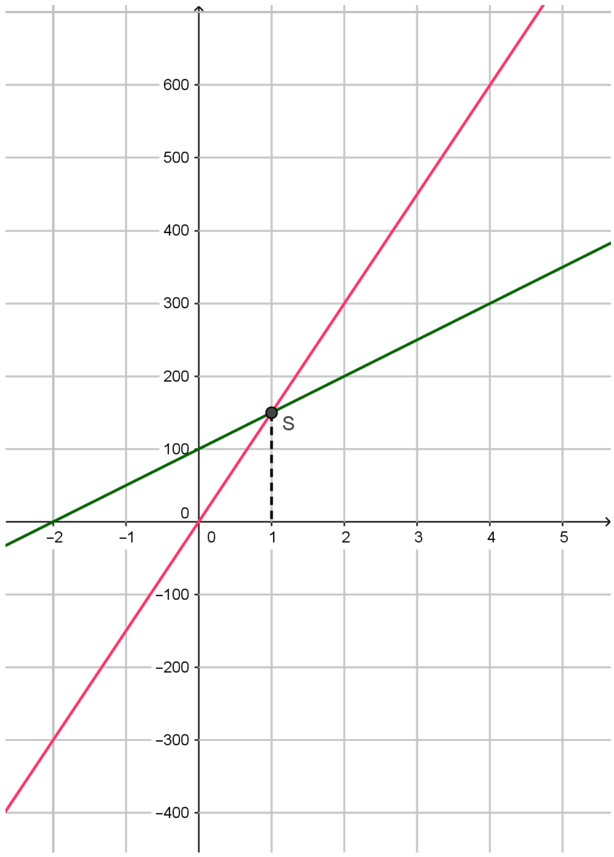
Vidimo da je 350 m < 750 m, tj. $I(5) < P(5)$. Prema tome možemo zaključiti da bi Ivan nakon 5 tjedana preplivao manju duljinu od Petra.

d) Pitamo se kada će Ivan i Petar preplivati istu udaljenost, tj. kada je $I(x) = P(x)$, tj.

kada je $100 + 50 \cdot x = 150 \cdot x$.
Dobivamo:

$$\begin{aligned} 100 + 50 \cdot x &= 150 \cdot x \\ \Leftrightarrow 100 \cdot x &= 100 \\ \Leftrightarrow x &= 1. \end{aligned}$$

Ivan i Petar će jednaku duljinu puta preplivati nakon prvog tjedna. Ovaj problem možemo sagledati i s grafičkog aspekta. Možemo promatrati u kojoj se točki sijeku pravci $y = 50x + 100$ i $y = 150x$ (Slika 1.8). Rješenje je apscisa dobivenog sjecišta.



Slika 1.8: Grafičko rješenje jednadžbe $I(x) = P(x)$. Apscisa točke S rješenje je dane jednadžbe.

Zadatak 2.

4 minute nakon početka preuzimanja datoteke, preostalo je 250 MB, a 6 minuta nakon početka preuzimanja preostalo je 150 MB. Opišite kako napreduje preuzimanje datoteke, tj. nađite funkciju P koja će opisivati količinu još nepreuzetog dijela datoteke nakon x minuta.

a) U kojem će trenutku nakon početka preuzimanja datoteke preostati 45 MB?
b) Nakon koliko će se vremena datoteka u potpunosti preuzeti?
c) Koja je veličina datoteke koja se preuzima?

Rješenje

Nakon što su prošle 4 minute od preuzimanja datoteke preostalo je 250 MB, a 6 minuta nakon početka preuzimanja preostalo je 150 MB. To znači da se u 6 – 4 = 2 minute preuzelo 100 MB datoteke. To jest, u jednoj minuti preuzelo se 100 : 2 = 50 MB. Ako je x vrijeme u minutama, koristeći interpretaciju vodećeg koeficijenta (vodeći koeficijent govori nam za koliko se promijeni vrijednost funkcije ako argument funkcije uvećamo za jedan), zaključujemo da je vodeći koeficijent funkcije P jednak -50. Ispred vodećeg koeficijenta nalazi se minus zato što se veličina nepreuzetog dijela datoteke smanjuje kako vrijeme prolazi. Dakle, dobivamo funkciju $P(x) = -50 \cdot x + b$. Trebamo izračunati slobodan koeficijent b. Iskoristimo podatke koji su nam poznati. U 4. minuti preostalo je još 250 MB, pa je $P(4) = 250$, odnosno:

$$\begin{aligned} 250 &= -50 \cdot 4 + b \\ \Leftrightarrow 250 &= -200 + b \\ \Leftrightarrow b &= 450. \end{aligned}$$

Dakle, funkcija P je dana pravilom pridruživanja $P(x) = -50 \cdot x + 450$. Ostaje pitanje s kojeg skupa u koji skup se funkcija P preslikava. Vrijeme ne može biti negativno, kao ni veličina dijela datoteke koji još nije preuzet, ali argumenti funkcije i vrijednost funkcije ne moraju biti prirodni brojevi. Primjerice, za 4.5 minuta će se preuzeti 225 MB datoteke, pa zaključujemo da se funkcija P zadana pravilom $P(x) = -50 \cdot x + 450$ preslikava sa skupa pozitivnih racionalnih brojeva u skup pozitivnih racionalnih brojeva.

a) Zanima nas kada će nakon početka preuzimanja datoteke preostati 45 MB, tj. kada će vrijednost funkcije P biti 45 MB. Dakle, tražimo kada je $P(x) = 45$. Dobivamo:

$$P(x) = 45$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow -50 \cdot x + 450 = 45 \\
&\Leftrightarrow -50 \cdot x = -405 \\
&\Leftrightarrow x = 8.1.
\end{aligned}$$

Preostat će 45 MB datoteke nakon 8.1 minute, tj. nakon 8 minuta i 6 sekundi.

b) Datoteka će se preuzeti u potpunosti kad vrijednost funkcije P bude 0.
Iz toga proizlazi:

$$\begin{aligned}
&P(x) = 0 \\
&\Leftrightarrow -50 \cdot x + 450 = 0 \\
&\Leftrightarrow -50 \cdot x = -450 \\
&\Leftrightarrow x = 9.
\end{aligned}$$

Datoteka će se u potpunosti preuzeti nakon 9 minuta.

c) Veličina datoteke vrijednost je funkcije P prije samog početka preuzimanja datoteke, tj. kad je $x = 0$. Dakle, trebamo izračunati vrijednost funkcije P za $x = 0$. Slijedi: $P(0) = 450$ MB. Datoteka koja se preuzima je veličine 450 MB.

Zadatak 3.

Zadan je niz od n kvadrata složenih kao na Slici 1.9. Duljina stranice pojedinog kvadrata jednaka je 1 cm. Koliki je opseg cijelog lika kojega čini niz od n kvadrata?

Rješenje

Skup od n kvadrata u zadanom nizu čini pravokutnik. Duljina pravokutnika jednaka je $n \cdot 1 = n$ cm, a širina pravokutnika iznosi 1 cm. Opseg dobivenog lika O iznosi $O = 2 \cdot n + 2 \cdot 1 = 2n + 2$, gdje je n broj kvadrata u nizu. Duljina i širina kvadrata su prirodni brojevi kao i broj kvadrata. Dakle, imamo funkciju O zadanu pravilom pridruživanja $O(n) = 2n + 2$ koja se preslikava sa skupa prirodnih brojeva u skup prirodnih brojeva. Primijetimo da smo dobili linearnu ovisnost.

Zadatak 4.

Vita je potpisala ugovor za internet u trajanju od 24 mjeseca. Odabrala je opciju prema kojoj internet prva tri mjeseca plaća 1 kn/mj., a preostalih 21 mjesec plaća 99,90 kn/mj. Odredite funkciju koja prikazuje ukupan plaćeni iznos u ovisnosti o broju proteklih mjeseci.

Slika 1.9: Niz od n kvadrata stranice duljine 1 cm

Rješenje

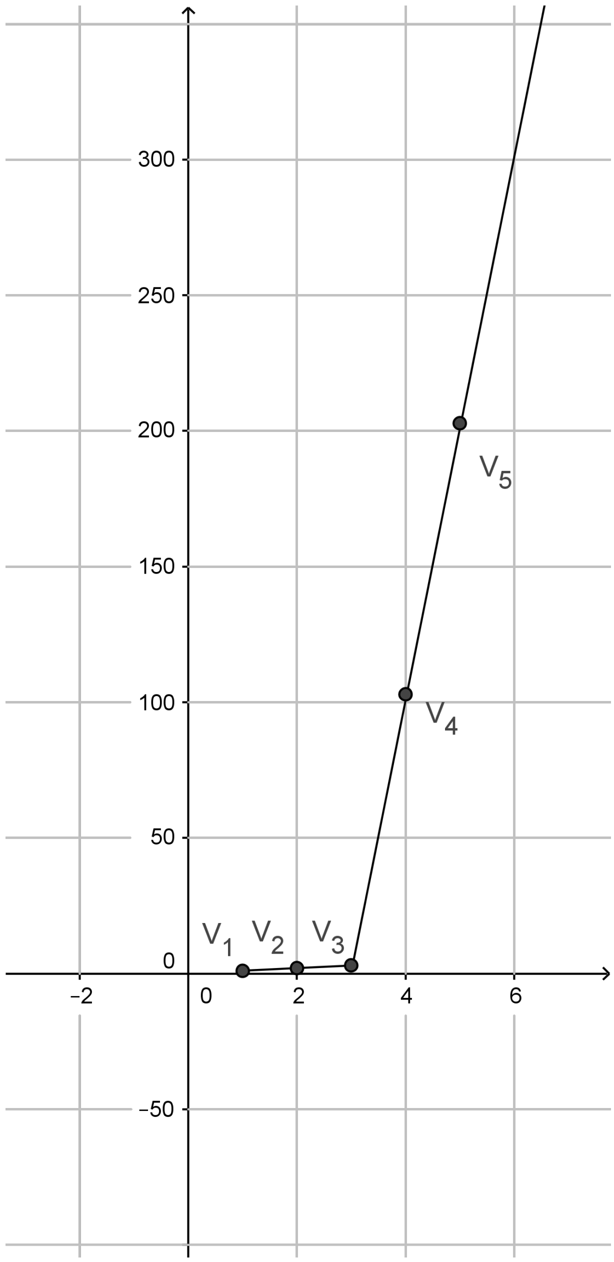
Označimo s V linearnu funkciju koja prikazuje ukupan plaćeni iznos ovisan o broju proteklih mjeseci x. Iznos i protekli mjeseci ne mogu biti negativni brojevi, pa se funkcija V preslikava sa skupa prirodnih brojeva u skup racionalnih brojeva. Uočimo da se prva tri mjeseca troškovi ponašaju po jednom pravilu, a nakon toga po drugome. Prvi mjesec je Vita ukupno internet platila 1 kunu. Drugi mjesec je ukupno platila $1 + 1 = 2$ kune, a treći mjesec $1 + 1 + 1 = 3$ kune. Dakle, $V(1) = 1$, $V(2) = 2$ i $V(3) = 3$. Možemo uočiti linearnu ovisnost $V(x) = x$. Počinje se s iznosom nula pa je slobodni koeficijent te linearne funkcije jednak nula. Kasnije dolazi do promjene pravila, imamo na početku stanje 3, što je jednako $V(3)$, zatim se svaki mjesec potroši 99.90 kuna te će to biti vodeći koeficijent nove linearne funkcije. Moramo uočiti da je, nakon određenog broja mjeseci, broj mjeseci za koje se internet plaćao po 99.90 kuna za tri manji od ukupnog broja mjeseci u kojima se gleda potrošen iznos. Za tu linearnu ovisnost slobodni koeficijent nije jednak početnom iznosu, zbog pomaka u mjesecima. Dakle, za razdoblje od 4. mjeseca nadalje funkcija V zadana je sljedećim pravilom pridruživanja: $V(x) = 3 + 99.90(x - 3)$. Sveukupno pravilo pridruživanja funkcije V zapisujemo kao:

$$V(x) = \begin{cases} x & , \ 1 \leq x \leq 3 \\ 3 + 99.90(x - 3) & , \ 4 \leq x \leq 24. \end{cases}$$

Dobivena funkcija V nije linearna, nego je po dijelovima linearna, do $x = 3$ imamo jednu linearnu ovisnost, a zatim drugu. Grafički to možemo prikazati kao razlomljeni pravac (Slika 1.10). Graf funkcije V čine točke koje pripadaju razlomljenom pravcu, odnosno tri točke pripadaju jednom pravcu, a ostale drugom pravcu.

1.3 Algebarski izrazi

Na početku osmog razreda prvi se put spominju algebarski izrazi. *Algebarski izraz* je bilo koji izraz kojeg čine varijable i konstante povezane osnovnim algebarskim operacijama. Razliku između varijabli i konstanti učenici su uočili kod uvođenja linearne jednadžbe s



Slika 1.10: Grafički prikaz funkcije V

jednom nepoznanicom u sedmom razredu. Na redovnoj nastavi ne spominju se izrazi kao što su monomi (jednočlani algebarski izrazi), binomi (dvočlani algebarski izrazi), trinomi (tročlani algebarski izrazi) i polinomi (višečlani algebarski izrazi), ali se mogu spomenuti na dodatnoj nastavi, iako se ni tamo ne definiraju kao funkcije. U ovoj cjelini računamo s polinomima s jednom, ali i više varijabli. Učenici kvadriraju umnoške, količnike, zbroj i razliku algebarskih izraza, ali ih pritom ne opterećujemo preciznim definicijama polinoma i operacija.

Primjer 1.3.1. *(Operacije s algebarskim izrazima)*

Prvo ćemo kvadrirati algebarski izraz $3xy$*. Kvadriranje interpretiramo kao množenje algebarskog izraza sa samim sobom, tj. kao* $(3xy)^2 = (3xy) \cdot (3xy)$*. Koristeći asocijativnost i komutativnost (iz ta dva svojstva slijedi da faktorima u umnošku možemo mijenjati mjesta i da ih možemo množiti proizvoljnim redoslijedom te stoga možemo pomnožiti posebno konstante i jednake varijable) dobivamo:*

$$(3xy)^2 = (3xy) \cdot (3xy) = 3 \cdot x \cdot y \cdot 3 \cdot x \cdot y = (3 \cdot 3) \cdot (x \cdot x) \cdot (y \cdot y) = 9x^2y^2.$$

Zatim kvadriramo količnik $\frac{2x}{y}$*. Prema definiciji kvadriranja imamo:* $(\frac{2x}{y})^2 = (\frac{2x}{y}) \cdot (\frac{2x}{y})$*. Koristeći asocijativnost i komutativnost dobivamo:*

$$(\tfrac{2x}{y})^2 = (\tfrac{2x}{y}) \cdot (\tfrac{2x}{y}) = \tfrac{(2x)^2}{(y)^2} = \tfrac{2 \cdot x \cdot 2 \cdot x}{y \cdot y} = \tfrac{4x^2}{y^2}.$$

Zatim možemo kvadrirati zbroj dvaju algebarskih izraza, npr. algebarski izraz $a + b$*. Kvadriranje interpretiramo kao množenje algebarskog izraza u zagradi sa samim sobom, tj.* $(a+b)^2 = (a+b) \cdot (a+b)$*. Algebarske izraze iz zagrade množimo tako da svaki član iz prve zagrade pomnožimo sa svakim članom iz druge zagrade:*

$$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b.$$

Koristeći komutativnost dobivamo:

$$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a \cdot a + a \cdot b + a \cdot b + b \cdot b = a^2 + 2ab + b^2.$$

Pogledajmo kako bismo kvadrirali izraz $2x + 4yz$ *koristeći upravo dokazanu formulu za kvadrat zbroja:*

$$(2x + 4yz)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot (2x \cdot 4yz) + (4yz)^2 = 4x^2 + 16xyz + 16y^2z^2.$$

Slično se izvodi i primjenjuje formula $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$*.*

Napomena 1.3.2. *Važno je naglasiti da se na kraju postupak ne raspisuje toliko detaljno kao što smo zapisali u primjeru, već da je bitno da učenici kod tih uvodnih primjera shvate princip računanja. Primjerice, kod kvadriranja monoma se uočava da je potrebno kvadrirati sve konstante i varijable. U osmom razredu se dosta vremena posvećuje učenju i primjeni izvedenih formula. Osim samog izračunavanja, formule su korisne kasnije kod faktorizacije algebarskih izraza, što nam između ostalog ponekad može pomoći u izračunavanju nultočaka polinoma.*

Operacije s algebarskim izrazima učenicima će biti od velike važnosti tijekom cijelog osmog razreda, npr. u cjelinama o Pitagorinom poučku i geometrijskim tijelima, kao i u nastavku školovanja. Zasad se u osnovnoj školi zaustavljamo na kvadriranju algebarskih izraza. U prvom razredu srednje škole učenici će naučiti još neke operacije s algebarskim izrazima.

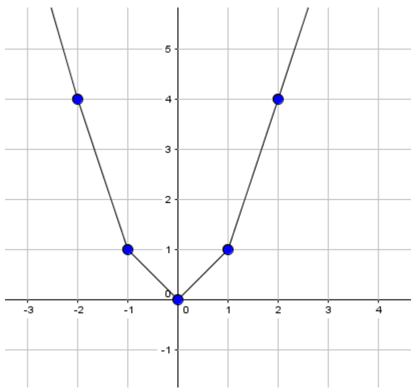
1.4 Kvadratna funkcija

U osmom razredu bavimo se još jednom vrstom polinoma kada obrađujemo pojam kvadratne funkcije koja je polinom drugog stupnja. U osnovnoj školi obrađuju se samo najjednostavniji oblici kvadratne funkcije, $f(x) = x^2$ i $g(x) = -x^2$, a ostali oblici se obrađuju u drugom razredu srednje škole. Analogno kao i kod linearne funkcije, učenicima se ne spominje da je kvadratna funkcija polinom. Nakon definicije, istražuju se razna svojstva kvadratne funkcije. Postupcima i metodama koje su koristili kod linearne funkcije, učenici određuju područja pada i rasta kod kvadratne funkcije f. Primijetit će razlike u odnosu na linearnu funkciju (kvadratna funkcija nije globalno monotona te postiže minimum u točki $x = 0$). Također se upoznaju s parnošću i nenegativnošću funkcije te s grafom kvadratne funkcije koji je parabola. Učenicima se još uvijek ne spominju pojmovi domene i kodomene, već učenici kvadratnu funkciju, analogno kao i linearnu funkciju, gledaju kao preslikavanje sa skupa racionalnih brojeva u skup racionalnih brojeva (realni brojevi obrađuju se nakon kvadratne funkcije). Učenici će, kao i kod linearne funkcije, prvo otkriti pravilo pridruživanja $x \mapsto x^2$ te funkciju f koja svakom broju pridružuje jedinstven kvadrat tog broja i naziva se *funkcija kvadriranja* ili *kvadratna funkcija*. Zatim učenici otkrivaju svojstva funkcije kvadriranja: *parnost* (vrijednosti funkcije kvadriranja u suprotnim brojevima su jednake, simbolički zapis: $f(x) = f(-x)$) i *nenegativnost* (vrijednosti funkcije kvadriranja su veće ili jednake nuli, simbolički zapis: $f(x) \geq 0$). Također uočavaju da funkcija kvadriranja *nije globalno monotona*, ali je *strogo rastuća* za pozitivne brojeve te *strogo padajuća* za negativne brojeve. Svojstvo monotonosti simbolički zapisuju ovako:

- f je rastuća funkcija ako $(\forall\, x_1, x_2) \quad x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$;

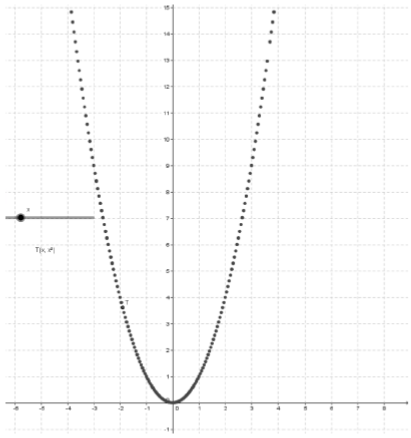
- f je padajuća funkcija ako $(\forall\ x_1, x_2) \quad x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$.

Drugim riječima, funkcija kvadriranja je strogo padajuća za $x < 0$ i strogo rastuća za $x > 0$. Nakon što su učenici otkrili svojstva funkcije kvadriranja, otkrivaju izgled grafa te funkcije i uočavaju njegova svojstva. Pri crtanju grafa kvadratne funkcije učenici mogu ucrtavati pojedine točke grafa, mogu koristiti parnost funkcije, tj. uvijek ucrtati i točku koja je simetrična ucrtanoj u odnosu na y-os. Nakon što ucrtaju nekoliko točaka, ne znaju kako zapravo skicirati graf jer je očito da točke ne leže na istom pravcu kao kod linearne funkcije. Većina učenika će spojiti točke dužinama (Slika 1.11), dok će tek neki nacrtati zaobljenu krivulju koja prolazi ucrtanim točkama i oni su bliže rješenju. Učenici se prvi put susreću s grafom kvadratne funkcije pa ga je najbolje pokazati u alatu dinamične geometrije pomoću traga točke. U alatu dinamične geometrije konstruiramo točku T s koordinatama $(a, f(a))$ pri čemu je a vrijednost koju mijenjamo pomoću klizača, a $f(a) = a^2$. Uključimo trag točke T, mijenjamo vrijednosti broja a pomoću klizača i dobivamo parabolu kao na slici 1.12.



Slika 1.11: Konstrukcija grafa funkcije f zadane pravilom $f(x) = x^2$, najčešća učenička pogreška

Također, učenici uočavaju svojstva funkcije kvadriranja na njezinom grafu. Sve točke grafa funkcije, osim točke (0,0), nalaze se iznad $x-$osi, jedino se točka (0,0) nalazi na $x-$osi, a to znači da su vrijednosti funkcije f nenegativne za svaki racionalan broj. Ako povećavamo x od $-\infty$ do 0, točke grafa funkcije kvadriranja će se "spuštati", a to znači da se vrijednosti kvadratne funkcije smanjuju ako se približavamo nuli slijeva po x-osi, tj. da je funkcija kvadriranja strogo padajuća za negativne brojeve. Ako povećavamo x od 0 do $+\infty$, točke grafa funkcije kvadriranja će se "penjati", a to znači da vrijednosti kvadratne funkcije rastu ako se udaljujemo od nule udesno po x-osi, tj. da je funkcija kvadriranja strogo rastuća za pozitivne brojeve. Parnost se vidi po tome što je graf funkcije kvadriranja simetričan u odnosu na y-os, tj. jednoj vrijednosti funkcije kvadriranja možemo pridružiti dva argumenta



Slika 1.12: Konstrukcija grafa funkcije f zadane pravilom $f(x) = x^2$

koji su međusobno suprotni brojevi. Nakon što su učenici otkrili funkciju danu pravilom $f(x) = x^2$, otkrivaju funkciju danu pravilom $g(x) = -x^2$. Uočit će da su vrijednosti te funkcije uvijek negativne ili jednake nuli. Također otkrivaju da je ta funkcija parna i strogo padajuća za pozitivne brojeve te strogo rastuća za negativne brojeve. U točki $x = 0$ postiže *maksimum* i iznosi 0. Analogno kao i kod funkcije f otkrivaju izgled grafa funkcije g i uočavaju svojstva na grafu.
Zatim uspoređuju grafove funkcija f i g te uočavaju da su grafovi funkcija f i g jedan drugome *osnosimetrični* obzirom na x-os.

Napomena 1.4.1. *U nekim udžbenicima za osnovnu školu obrađuju se i još neki oblici kvadratne funkcije, npr. funkcije zadane pravilom $f(x) = ax^2$, gdje je $a \neq 0$.*

Poglavlje 2

Polinomi u srednjoškolskom obrazovanju

2.1 Algebarski izrazi

Na početku prvog razreda srednje škole proširuje se gradivo vezano za algebarske izraze koje je obrađeno u osmom razredu osnovne škole. Nastavlja se s obradom algebarskih izraza, odnosno operacijama nad njima. Ponavljaju se već naučene formule, poput formule za razliku kvadrata, ali se proučavaju još neke složenije formule poput formule za kub zbroja i razlike, ili se uče formule pomoću kojih se faktoriziraju neki izrazi, poput formule za zbroj ili razliku kubova. Kasnije se računi proširuju i na razlomke koji sadrže algebarske izraze u brojnicima i nazivnicima. Međutim, prije gradiva o algebarskim izrazima, učenici ponavljaju sve skupove brojeva koje su naučili u osnovnoj školi (skup prirodnih, cijelih, racionalnih, iracionalnih i realnih brojeva) te se prisjećaju operacija sa skupovima, tj. presjeka i unije skupova. Zatim učenici nadograđuju svoje znanje o potencijama. Dosad su naučili da je potencija kraći zapis umnoška više jednakih faktora sa samim sobom, ali su ti faktori, u osnovnoj školi, bili samo dekadske jedinice. U prvom razredu srednje škole otkrivaju da baza potencije može biti bilo koji realni broj.
U cjelini o algebarskim izrazima prisjećaju se kvadrata zbroja i razlike, a sad otkrivaju i kub zbroja i razlike. Uočavaju da vrijedi:

$$(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = (a^2+2ab+b^2)(a+b) = a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3$$
$$= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

Na analogan način zaključujemo da vrijedi: $(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$. Množenjem dvaju višečlanih algebarskih izraza od kojih jedan ima m, a drugi n članova dobijemo ukupno $m \cdot n$ pribrojnika. Neki od tih pribrojnika ponekad se mogu zbrojiti ili oduzeti (kažemo da smo izraz *reducirali*) pa je broj članova u konačnom rezultatu obično manji od $m \cdot n$. Primjer koji to zorno ilustrira je razlika kvadrata brojeva a i b, tj. vrijedi da je $(a-b)(a+b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$. Učenicima se postavlja pitanje možemo li na sličan način doći do identiteta za razliku trećih potencija. Odgovor je potvrdan i to na sljedeći način:

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3 = a^3 - b^3.$$

Analognim postupkom dobivamo da je $(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3$. Koristeći svojstvo distributivnosti množenja prema zbrajanju i izvedene formule učenici različite algebarske izraze zapisuju u obliku umnoška, tj. rastavljaju ih na faktore. Postupak objašnjavamo na sljedećem primjeru:

Primjer 2.1.1. *Rastavi na faktore:* $8a^3b + 8a^2b^2 + 2ab^3$.

Rješenje

Izraz se sastoji od tri pribrojnika, svaki sadrži $2ab$ *kao faktor pa imamo:*

$$8a^3b + 8a^2b^2 + 2ab^3 = 2ab\underbrace{(4a^2+4ab+b^2)}_{kvadrat\ zbroja} = 2ab(2a+b)^2.$$

Zatim učenici otkrivaju algebarske razlomke.

Definicija 2.1.2. *Razlomak čiji je i brojnik i nazivnik algebarski izraz nazivamo algebarskim razlomkom.*

Učenici uočavaju da su operacije s algebarskim razlomcima ekvivalentne operacijama s "običnim razlomcima", tj. algebarski razlomci mogu se zbrajati, oduzimati, množiti, dijeliti, skraćivati i proširivati. Algebarski razlomak možemo skratiti ako mu brojnik i nazivnik imaju zajednički faktor. Algoritam za zbrajanje (oduzimanje) algebarskih razlomaka glasi:

1. razlomke svedemo na (najmanji) zajednički nazivnik;
2. nazivnik prepišemo;
3. brojnike zbrojimo (oduzmemo);
4. dobiveni rezultat potpuno skratimo.

Primjer 2.1.3. *(Zbrajanje algebarskih razlomaka).*

Rješenje

Izračunajmo: $\frac{3x}{x^2-16} + \frac{x}{x^2+8x+16}$.

Označimo $R_1 = \frac{3x}{x^2-16}$ *i* $R_2 = \frac{x}{x^2+8x+16}$. *U nazivniku razlomka* R_1 *prepoznajemo razliku kvadrata, a u nazivniku razlomka* R_2 *kvadrat zbroja pa dobivamo:*

$$R_1 + R_2 = \frac{3x}{x^2 - 16} + \frac{x}{x^2 + 8x + 16} = \frac{3x}{(x-4)(x+4)} + \frac{x}{(x+4)^2}.$$

Uočavamo da je najmanji zajednički nazivnik razlomaka R_1 *i* R_2 *nazivnik* $(x-4)(x+4)^2$ *pa oba razlomka svodimo na najmanji zajednički nazivnik i zatim ih zbrajamo tako da brojnike zbrojimo, a nazivnike prepišemo:*

$$R_1 + R_2 = \frac{3x(x+4)}{(x-4)(x+4)^2} + \frac{x(x-4)}{(x-4)(x+4)^2} = \frac{3x(x+4) + x(x-4)}{(x-4)(x+4)^2} = \frac{3x^2 + 12x + x^2 - 4x}{(x-4)(x+4)^2}$$

$$= \frac{4x^2 + 8x}{(x-4)(x+4)^2} = \frac{4x(x+2)}{(x-4)(x+4)^2}.$$

Kada množimo algebarski razlomak drugim algebarskim razlomkom (s pretpostavkom da su oba razlomka već skraćena), prvo skratimo brojnik prvog algebarskog razlomka i nazivnik drugog algebarskog razlomka te nazivnik prvog algebarskog razlomka i brojnik drugog algebarskog razlomka, ako nisu relativno prosti, a potom pomnožimo algebarske izraze u brojnicima te algebarske izraze u nazivnicima.

Primjer 2.1.4. *(Množenje algebarskih izraza).*

Rješenje

Izračunajmo: $(2x+4) \cdot \frac{5x+2}{x+2}$.

Imamo:

$$(2x+4) \cdot \frac{5x+2}{x+2} = \frac{2(x+2)}{1} \cdot \frac{5x+2}{x+2} = 2 \cdot (5x+2) = 10x + 4.$$

Algebarski razlomak možemo podijeliti algebarskim izrazom i algebarskim razlomkom tako da ga pomnožimo recipročnom vrijednošću algebarskog izraza, odnosno razlomka.

Napomena 2.1.5. *U ovom poglavlju, čitavo gradivo koje su učenici učili vezano je za polinome jedne ili više varijabli, ali učenici i dalje ne znaju te pojmove i njihovu definiciju. Npr. kod skraćivanja algebarskih razlomaka skrivena je djeljivost polinoma istim polinomom, ali naravno učenici ne razmišljaju još uvijek u tim terminima.*

2.2 Polinomi i operacije s polinomima

Nakon što su učenici nadopunili svoje znanje o algebarskim izrazima, po prvi put im se spominje polinom kao višečlani algebarski izraz s jednom varijablom i definira ga se kao funkciju (vidi Definiciju 0.0.1.). U većini škola polinom se definira kao funkcija pri čemu učenici shvaćaju polinom kao funkciju koja je zadana nekim algebarskim izrazom. U nekim školama se naglašava da su linearna i kvadratna funkcija specijalni slučajevi polinoma, odnosno polinomi prvog i drugog stupnja redom. Međutim, u svim školama uvježbavaju se operacije nad polinomima, tj. zbrajanje, oduzimanje, množenje i dijeljenje polinoma. Učenicima pritom pomažu dotad stečena znanja o algebarskim izrazima i potencijama. Kod zbrajanja, oduzimanja i množenja, za razliku od dijeljenja, nema velikih novina jer se te operacije svode na operacije s algebarskim izrazima s kojima su učenici već upoznati. Treba naglasiti da je novitet ipak u tome što im se zadaci zadaju u drugom kontekstu, u terminu polinoma, odnosno funkcija. Učenicima se dakle na primjeru polinoma prvi put objašnjava što je to zbroj, razlika, umnožak i kvocijent funkcija. Poseban naglasak se stavlja na stupanj polinoma i kako se on mijenja pri operacijama s polinomima. U sljedećim primjerima prikazani su tipični zadaci koji se rješavaju na nastavi. Učenici najprije zbrajaju i oduzimaju polinome tako da zbroje (oduzmu) algebarske izraze kojima su ti polinomi zadani. Zbrajanjem (oduzimanjem) dvaju ili više polinoma dobije se opet polinom pri čemu se stupanj polinoma ne može povećati, ali se može smanjiti.

Primjer 2.2.1. *(Smanjivanje stupnja polinoma kod zbrajanja polinoma)*

Neka su zadana dva polinoma $f(x) = x^3 + 2x^2 + 2x$ *i* $g(x) = -x^3 - x - 2$. *Primijetimo da su oba polinoma trećeg stupnja, tj. vrijedi:* $st(f) = 3$ *i* $st(g) = 3$. *Zbrajanjem tih dvaju polinoma dobivamo polinom drugog stupnja, tj. dobivamo:*

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = x^3 - x^3 + 2x^2 + 2x - x - 2 = 2x^2 + x - 2.$$

Zatim učenici množe polinome. Polinomi se množe tako da se svaki član prvog polinoma pomnoži sa svakim članom drugog polinoma i rezultati zbroje. Stupanj umnoška dvaju polinoma uvijek je jednak zbroju njihovih stupnjeva.

Primjer 2.2.2. *(Množenje polinoma)*

Neka su zadana dva polinoma $f(x) = x^3 + 2x$ *i* $g(x) = -x^3 - x - 2$. *Primijetimo da su oba polinoma trećeg stupnja, tj. vrijedi da je* $st(f) = 3$ *i* $st(g) = 3$. *Polinomi se množe tako da se svaki član prvog polinoma pomnoži sa svakim članom drugog polinoma i rezultati zbroje pa kao rezultat množenja ovih polinoma dobivamo:*

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (x^3 + 2x)(-x^3 - x - 2) = -x^6 - x^4 - 2x^3 - 2x^4 - 2x^2 - 4x = \\ -x^6 - 3x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 4x.$$

Primijetimo da smo dobili polinom šestog stupnja, tj. vrijedi da je $st(f \cdot g) = 6$.

Primijetimo da postupak množenja polinoma nalikuje postupku množenja prirodnih brojeva pa će tako i postupak dijeljenja nalikovati postupku dijeljenja prirodnih brojeva. Na ovoj razini najjednostavnije je pokazati dijeljenje na nekom konkretnom primjeru.

Primjer 2.2.3. *(Dijeljenje polinoma)*

U ovom primjeru podijelit ćemo polinome $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 5x + 6$ *i* $g(x) = 3x + 2$. *Postupak dijeljenja polinoma nalikuje dijeljenju prirodnih brojeva, jedina razlika je u tome što nemamo samo brojeve već i varijable. Najprije dijelimo* $3x^3$ *s* $3x$. *Dobivamo* x^2 *i zatim njega množimo s* $3x + 2$ *i dobiveni umnožak zapisujemo ispod djeljenika te ga oduzimamo od prva dva člana djeljenika, tj. od* $3x^3 - 4x^2$. *Rezultatu dopisujemo sljedeći član djeljenika te se postupak nastavlja kao u dijeljenju prirodnih brojeva. Postupak cijelog dijeljenja izgleda ovako:*

$$\begin{array}{l} (3x^3 - 4x^2 + 5x + 6) : (3x + 2) = x^2 - 2x + 3 \\ \underline{3x^3 + 2x^2} \ \downarrow \boxed{\textit{dopisujemo}} \\ \quad -6x^2 + 5x \\ \quad \underline{-6x^2 - 4x} \ \downarrow \boxed{\textit{dopisujemo}} \\ \qquad\qquad 9x+6 \\ \qquad\qquad \underline{9x+6} \\ \qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$

Polinom p stupnja n pri dijeljenju polinomom q stupnja m ($m \leq n$) daje kao rezultat količnik d (polinom stupnja $n - m$) i ostatak r čiji je stupanj manji od m. Rezultat dijeljenja pišemo ovako:

$$p(x) = d(x)q(x) + r(x) \quad \text{ili} \quad \frac{p(x)}{q(x)} = d(x) + \frac{r(x)}{q(x)}.$$

Ako je ostatak r jednak nuli, onda kažemo da je polinom p djeljiv polinomom q.

Primjer 2.2.4. *Odredimo realan broj a tako da polinom* f *bude djeljiv polinomom g pri čemu je* $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 7x + a$, $g(x) = 2x - 1$.

Rješenje

Želimo da polinomi f i g budu djeljivi, a to znači da je ostatak pri njihovom dijeljenju jednak nuli. Dijelimo polinome f i g:

$(2x^3 - 3x^2 + 7x + a) : (2x - 1) = x^2 - x + 3$
$\underline{2x^3 - x^2}$ $\downarrow$ $\boxed{\textit{dopisujemo}}$
$-2x^2 + 7x$
$\underline{-2x^2 + x}$ $\downarrow$ $\boxed{\textit{dopisujemo}}$
$6x+a$
$\underline{6x-3}$
$a+3$

Budući da želimo da su polinomi djeljivi, želimo da je ostatak pri dijeljenju jednak nula, a to će se dogoditi samo ako je $a = -3$. Zaključak možemo provjeriti množenjem:

$$(x^2 - x + 3)(2x - 1) = 2x^3 - 2x^2 + 6x - x^2 + x - 3 = 2x^3 - 3x^2 + 7x - 3,$$

a to smo i željeli dobiti.

Napomena 2.2.5. *Možemo primijetiti da se pojam polinoma u srednjoj školi ne obrađuje detaljno i ne posvećuje mu se (zbog količine gradiva) dovoljno pažnje. Zbog toga se često dogodi da učenici poistovjećuju pojam polinoma s algebarskim izrazom kojim je polinom zadan.*

2.3 Određivanje nultočaka polinoma

2.3.1 Kvadratna jednadžba

U osnovnoj školi, u osmom razredu, učenici su naučili rješavati kvadratnu jednadžbu oblika $ax^2+c = 0, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$. Prisjećaju se da takvu jednadžbu mogu svesti na jednadžbu oblika $ax^2 = -c$. Dijeljenjem te jednadžbe koeficijentom a, dobivaju ekvivalentnu jednadžbu $x^2 = -\frac{c}{a}$. Broj rješenja te jednadžbe ovisi o njenim koeficijentima, tj. ako koeficijenti a i c imaju različite predznake, onda kvadratna jednadžba $ax^2 + c = 0$ ima dva rješenja koja su međusobno suprotni brojevi. Ako je $c = 0$, tada kvadratna jednadžba ima jedno dvostruko rješenje i ono je jednako 0. U osnovnoj školi, ne uče se kompleksni brojevi pa se učenicima govori da, ako koeficijenti a i c imaju jednake predznake, onda kvadratna jednadžba $ax^2 + c = 0$ nema rješenja. U drugom razredu srednje škole otkrivaju da će, ako

koeficijenti a i c imaju jednake predznake, kao rješenje dobiti dva kompleksno konjugirana rješenja. Postupno otkrivaju te rješavaju i ostale oblike kvadratne jednadžbe. Najprije otkrivaju jednadžbu oblika $a(x-x_0)^2 = 0, a \neq 0, x_0 \neq 0$. Rješavaju je tako da je najprije podijele s koeficijentom a, a zatim dobivenu jednadžbu $(x-x_0)^2 = 0$ zapišu kao umnožak jednakih faktora: $(x-x_0)^2 = (x-x_0)(x-x_0) = 0$. Primjenjujući svojstva množenja, iščitavamo iz oba faktora da je $x - x_0 = 0$, odnosno $x = x_0$. Dakle, kvadratna jednadžba $a(x-x_0)^2 = 0$ ima jedno dvostruko rješenje x_0.
Zatim učenici otkrivaju i rješavaju kvadratnu jednadžbu oblika $ax^2 + bx = 0, a, b \neq 0$. Tu jednadžbu mogu svesti na oblik $x(ax+b) = 0$ te je rješavaju primjenom svojstva umnoška dvaju brojeva. Jedno od tih rješenja je uvijek 0, a drugo je jednako $-\frac{b}{a}$. Slijedi rješavanje jednadžbe $a(x-x_0)^2 + y_0 = 0, a, x_0, y_0 \neq 0$. Rješavaju je tako da je podijele s a i zatim dobivenu jednadžbu $(x-x_0)^2 + \frac{y_0}{a} = 0$ rješavaju tako da je svedu na razliku kvadrata. Ako su koeficijenti a i y_0 različitih predznaka, jednadžba u tom slučaju ima dva realna rješenja. Ako su koeficijenti a i y_0 jednakih predznaka, onda kvadratna jednadžba ima dva kompleksno konjugirana rješenja. Zatim učenici uočavaju da se opća kvadratna jednadžba oblika $a(x-x_0)^2 + y_0 = 0, a \neq 0$ može zapisati u obliku $ax^2 + bx + c = 0$ ako izraz $(x-x_0)^2$ raspišu po formuli za kvadrat razlike te pomnože koeficijentom a. Rješenja te jednadžbe su oblika:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a},$$

gdje je $D = b^2 - 4ac$. Broj D naziva se *diskriminantom* kvadratne jednadžbe. Uočava se da broj i vrsta rješenja kvadratne jednadžbe ovise o diskriminanti kvadratne jednadžbe. Ako je:

- $D > 0$, onda kvadratna jednadžba ima 2 realna rješenja;
- $D = 0$, onda kvadratna jednadžba ima jedno (dvostruko) realno rješenje;
- $D < 0$, onda kvadratna jednadžba ima 2 konjugirano − kompleksna rješenja.

Na kraju se otkriva da rješenja x_1 i x_2 kvadratne jednadžbe $ax^2 + bx + c = 0$ zadovoljavaju *Viètove formule*:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a},$$
$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

2.3.2 Kubna jednadžba

Možemo primijetiti da je lako izračunati nultočke polinoma drugog stupnja pomoću formula za nultočke kvadratne jednadžbe. Porastom stupnja polinoma način računanja nultočki polinoma je složeniji. Nemamo formule za nultočke općenitog polinoma, ali su poznate formule za polinom trećeg stupnja. Međutim, one su složenije od formula za rješenja kvadratne jednadžbe pa ih je teže pamtiti. Formule za računanje nultočki polinoma trećeg stupnja nazivaju se *Cardanove formule* (učenicima ih ne spominjemo na redovnoj nastavi, eventualno ih spominjemo na dodatnoj nastavi). Sada ćemo pokazati kako se dolazi do formula za računanje nultočki polinoma trećeg stupnja. Neka je zadan polinom oblika $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Da bismo pronašli njegove nultočke, potrebno je riješiti jednadžbu $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$. Traženje nultočaka sastoji se od nekoliko koraka. Prvi korak je taj da dobivenu jednadžbu normiramo, tj. podijelimo s a_3. Tada dobivamo:

$$x^3 + \frac{a_2}{a_3}x^2 + \frac{a_1}{a_3}x + \frac{a_0}{a_3} = 0. \tag{2.1}$$

Radi lakšeg zapisa definiramo $a = \frac{a_2}{a_3}, b = \frac{a_1}{a_3}, c = \frac{a_0}{a_3}$ pa dobivamo jednadžbu $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$. U drugom koraku se rješavamo kvadratnog člana supstitucijom $x = y - \frac{a}{3}$. Tada jednadžba poprima oblik:

$$y^3 + py + q = 0, \tag{2.2}$$

gdje je $p = b - \frac{1}{3}a^2, q = \frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c$. Jednadžba koja nema kvadratnog člana naziva se kanonski oblik jednadžbe trećeg stupnja. Daljnjim algebarskim manipulacijama dobiva se da su rješenja dobivene jednadžbe (2.2):

$$y_1 = u_1 + v_1,$$

$$y_2 = u_1\epsilon + v_1\epsilon^2,$$

$$y_3 = u_1\epsilon^2 + v_1\epsilon,$$

gdje su

$$u_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}, \quad v_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}, \quad \epsilon = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}.$$

Rješenja početne jednadžbe (2.1) dobiju se uvrštavanjem y_1, y_2 i y_3 u $x = y - \frac{a}{3}$.
Postupak pokazujemo na jednom primjeru.

Primjer 2.3.1. *Riješimo jednadžbu* $x^3 + 9x^2 + 18x + 28 = 0$.

<u>*Rješenje*</u>

Primijetimo prvo da je $a = 9, b = 18$ *i* $c = 28$. *Tada slijedi da je* $p = 18 - \frac{1}{3} \cdot 81$, *a* $q = \frac{2}{27} \cdot 9^3 - \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot 18 + 28$, *odnosno* $p = -9, q = 28$. *Dakle, početnu jednadžbu smo sveli na oblik* $y^3 - 9y + 28 = 0$. *Jedno rješenje jednadžbe* $y^3 - 9y + 28 = 0$ *jednako je:*

$$y_1 = u_1 + v_1 = \sqrt[3]{-\frac{28}{2} + \sqrt{\frac{28^2}{4} + \frac{(-9)^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{28}{2} - \sqrt{\frac{28^2}{4} + \frac{(-9)^3}{27}}}$$

$$= \sqrt[3]{-14 + \sqrt{169}} + \sqrt[3]{-14 - \sqrt{169}} = \sqrt[3]{-14 + 13} + \sqrt[3]{-14 - 13} = -1 - 3 = -4.$$

Ostala dva rješenja dobivamo na sljedeći način:

$$y_2 = u_1\epsilon + v_1\epsilon^2 = -1 \cdot \epsilon - 3 \cdot \epsilon^2 = -\left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) - 3\left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} - \frac{3i\sqrt{3}}{2} = 2 - i\sqrt{3}.$$

Dobili smo kompleksno rješenje pa znamo da je $y_3 = 2 + i\sqrt{3}$. *Sada možemo izračunati rješenja jednadžbe* $x^3 + 9x^2 + 18x + 28 = 0$. *Dobivamo:*

$$x_1 = y_1 - \frac{9}{3} = -4 - 3 = -7,$$

$$x_2 = y_2 - \frac{9}{3} = 2 - i\sqrt{3} - 3 = -1 - i\sqrt{3},$$

$$x_3 = y_3 - \frac{9}{3} = 2 + i\sqrt{3} - 3 = -1 + i\sqrt{3}.$$

Dakle, rješenja jednadžbe $x^3 + 9x^2 + 18x + 28 = 0$ *su*

$$x_1 = -7,$$

$$x_2 = -1 - i\sqrt{3},$$

$$x_3 = -1 + i\sqrt{3}.$$

2.4 Kvadratna funkcija

U drugom razredu srednje škole, nakon obrađene cjeline o kvadratnoj jednadžbi, učenici se upoznaju s općenitom kvadratnom funkcijom i njezinim grafom. U osnovnoj školi otkrili su grafove funkcija zadane pravilima $f(x) = x^2$ i $g(x) = -x^2$, ali nisu spominjali pojmove domene i kodomene. U srednjoj školi se učenicima napokon objašnjavaju pojmovi domene (područje definiranosti funkcije) i kodomene (područje vrijednosti funkcije) te mogu sve funkcije koje su do tada naučili zapisati matematički ispravno (u nekim školama ti se pojmovi uvode kod linearne funkcije, u nekim školama kod kvadratne funkcije, a u nekima kod logaritamske i eksponencijalne funkcije). Funkcija i njezin graf definiraju se na sljedeći način:

Definicija 2.4.1. *Ako je svakom elementu x nekog skupa A pridružen točno jedan element y skupa B, tad kažemo da je definirana funkcija f iz skupa A u skup B. Pišemo* $y = f(x)$*. Element x naziva se još i argument funkcije, a y vrijednost te funkcije. Skup A zovemo domena ili područje definicije funkcije f i označavamo s D ili* D_f*, a skup B zovemo kodomena ili područje vrijednosti funkcije f i označavamo s R ili* R_f*.*

Svaka funkcija zadana je:

1. svojom domenom (područjem definicije) D;
2. svojom kodomenom (područjem vrijednosti) R;
3. pravilom pridruživanja $x \mapsto f(x)$.

Graf Γ_f funkcije f skup je svih točaka $(x, f(x))$, za sve x iz domene D funkcije f:

$$\Gamma_f = \{(x, y) : x \in D, y = f(x)\}.$$

U drugom razredu učenici otkrivaju grafove ostalih oblika kvadratne funkcije. Učenicima je otkrivanje najlakše pomoću alata dinamične geometrije gdje se, mijenjajući vrijednosti koeficijenata u kvadratnoj funkciji, uočavaju promjene odgovarajućih grafova kvadratnih funkcija. Najprije otkrivaju graf funkcije $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_1(x) = ax^2$, $a \neq 0$ i njen tok. Uočit će da je graf te funkcije parabola te da koeficijent a određuje oblik parabole i kako je ona okrenuta:

1. Za $a > 0$ parabola je "otvorom" okrenuta prema gore.

   - Ako je $a > 1$, onda je parabola više strma („uža") od parabole koja je graf funkcije $f(x) = x^2$.

- Ako je $0 < a < 1$, onda je parabola manje strma („šira") od parabole koja je graf funkcije $f(x) = x^2$.
- Funkcija ima ista svojstva (parnost, nenegativnost, monotonost) kao funkcija zadana pravilom $f(x) = x^2$.

2. Za $a < 0$ parabola je "otvorom" okrenuta prema dolje.

- Ako je $-1 < a < 0$, onda je parabola manje strma („šira") od parabole koja je graf funkcije $g(x) = -x^2$.
- Ako je $a < -1$, onda je parabola više strma („uža") od parabole koja je graf funkcije $g(x) = -x^2$.
- Funkcija ima ista svojstva (parnost, nepozitivnost, monotonost) kao funkcija zadana pravilom $g(x) = -x^2$.

Učenici zatim otkrivaju graf funkcije $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_2(x) = ax^2 + y_0$, $a, y_0 \neq 0$ i njen tok. Uočit će: graf kvadratne funkcije f_2 dobiven je translacijom grafa funkcije f_1 za $|y_0|$ prema gore duž y-osi, ako je y_0 pozitivan, i za $|y_0|$ prema dolje duž y-osi ako je y_0 negativan. Točka tjemena grafa kvadratne funkcije f_2 je točka $T(0, y_0)$.
Zatim otkrivaju graf funkcije $f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_3(x) = a(x - x_0)^2$, $a, x_0 \neq 0$ i njen tok. Učenici uočavaju:

- Ako je $x_0 > 0$, onda je graf kvadratne funkcije f_3 dobiven translacijom grafa funkcije f_1 duž x-osi za $|x_0|$ udesno.

- Ako je $x_0 < 0$, onda je graf kvadratne funkcije f_3 dobiven je translacijom grafa funkcije f_1 duž x-osi za $|x_0|$ ulijevo.

- Točka tjemena grafa kvadratne funkcije f_3 je točka $T(x_0, 0)$.

Zatim otkrivaju graf funkcije $f_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_4(x) = a(x - x_0)^2 + y_0$, $a \neq 0$, $x_0 \neq 0$ i $y_0 \neq 0$ i njen tok. Učenici otkrivaju da se takav zapis funkcije naziva *tjemeni oblik* zapisa kvadratne funkcije jer se iz tog oblika može iščitati tjeme kvadratne funkcije. Tjeme grafa je u točki $T(x_0, y_0)$. Uočavaju:

- Za $a > 0$ vrijednosti $f_4(x)$ padaju za $x \in \langle -\infty, x_0 \rangle$ te vrijednosti $f_4(x)$ rastu za $x \in \langle x_0, \infty \rangle$.

- Za $a < 0$ vrijednosti $f_4(x)$ rastu za $x \in \langle -\infty, x_0 \rangle$ te vrijednosti $f_4(x)$ padaju za $x \in \langle x_0, \infty \rangle$.

Os simetrije grafa funkcije f_4 je pravac koji prolazi tjemenom grafa funkcije te je okomit na x-os, tj. $x = x_0$.

- Ako je $x_0 > 0$, onda je graf kvadratne funkcije f_4 dobiven pomicanjem grafa kvadratne funkcije f_2 za $|x_0|$ udesno duž $x-$ osi.

- Ako je $x_0 < 0$, onda je graf kvadratne funkcije f_4 dobiven pomicanjem grafa kvadratne funkcije f_2 za $|x_0|$ ulijevo duž $x-$ osi.

- Ako je $y_0 > 0$, onda je graf kvadratne funkcije f_4 dobiven pomicanjem grafa kvadratne funkcije f_3 za $|y_0|$ prema gore duž $y-$ osi.

- Ako je $y_0 < 0$, onda je graf kvadratne funkcije f_4 dobiven pomicanjem grafa kvadratne funkcije f_3 za $|y_0|$ prema dolje duž $y-$ osi.

Zatim učenici otkrivaju da svaku kvadratnu funkciju $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, možemo zapisati u obliku $f(x) = ax^2 + bx + c$ pri čemu su a, b i c iz skupa realnih brojeva i $a \neq 0$. To je *općeniti oblik* kvadratne funkcije. Tjeme grafa funkcije f nalazi se u točki $T(x_0, y_0)$, pri čemu je $x_0 = \frac{-b}{2a}$, $y_0 = \frac{4ac-b^2}{4a}$. Apscisa tjemena može se izračunati i pomoću nultočaka, aku su one realne. Apscisa tjemena jednaka je aritmetičkoj sredini nultočaka, tj. $x_0 = \frac{x_1+x_2}{2}$ pri čemu su x_1 i x_2 nultočke kvadratne funkcije (jer je graf kvadratne funkcije osnosimetričan s obzirom na pravac $x = x_0$). Učenici sada mogu povezati izgled grafa kvadratne funkcije s vrstom njezinih nultočaka, tj. s predznakom diskriminante. Ako je diskriminanta veća od nule, graf kvadratne funkcije siječe $x-$os u dvjema točkama, pa funkcija ima dvije različite realne nultočke. Ako je diskriminanta jednaka nuli, graf kvadratne funkcije dodiruje $x-$os u jednoj točki, pa funkcija ima jednu, dvostruku i realnu nultočku. Ako je diskriminanta manja od nule, graf kvadratne funkcije ne siječe $x-$os, pa funkcija nema realnih nultočaka (ali ima kompleksno konjugirana rješenja). Zatim učenici otkrivaju kako mogu otkriti pravilo pridruživanja kvadratne funkcije ako je ona zadana svojim grafom. Postoji više metoda (iščitavanjem nultočaka i tjemena, iščitavanjem triju točaka s grafa) te zaključuju da metodu odabira tri točke mogu koristiti uvijek, no tada dobivaju sustav triju jednadžbi s tri nepoznanice što povećava mogućnost pogreške u računu i zahtijeva duže vrijeme rješavanja. Bolje je promotriti graf funkcije te ako se mogu precizno očitati koordinate nultočaka ili tjemena, koristi se zapis koji sadrži te točke jer je tada račun kratak i jednostavan. Ako se ne može precizno očitati niti jedna od karakterističnih točaka, učenici odabiru tri različite točke te ih biraju tako da račun bude što lakši.

2.5 Primjena kvadratne funkcije

Kvadratna funkcija se pojavljuje i primjenjuje u fizikalnim problemima, poslovanju (pri računanju pada i rasta dionica), pri gradnji mostova i raznim drugim područjima. Često se zadaci, vezani uz kvadratnu funkciju, svode na traženje nultočaka kvadratne funkcije ili određivanje njezinog maksimuma, odnosno minimuma. U prvom i trećem zadatku, od zadataka koji slijede, potrebno je pronaći maksimum kvadratne funkcije, a u drugom zadatku nultočke kvadratne funkcije. Naravno, najprije je potrebno prepoznati kvadratnu funkciju vezanu uz tekst zadataka.

Zadatak 1.

Ivana želi napraviti pješčanik pravokutnog oblika uz zid svoje kuće. Tri strane pješčanika ogradit će drvenom ogradom (jer je jedna strana uz zid kuće). Na raspolaganju ima drvenu ogradu duljine 10 m. Kolika je najveća moguća površina pješčanika kojeg Ivana može ograditi?

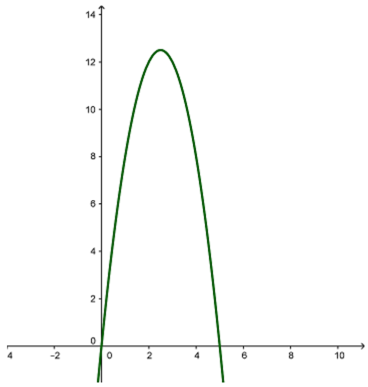
Rješenje

Ako s x označimo širinu pješčanika (pravokutnika), možemo zaključiti da je $x > 0$ jer širina ne može biti negativan broj. Ako s y označimo duljinu pješčanika (pravokutnika), možemo zaključiti da je $y > 0$ jer duljina ne može biti negativan broj. Označimo s P površinu pješčanika. Površina pješčanika računa se kao i površina pravokutnika jer je pješčanik pravokutnog oblika pa vrijedi $P = x \cdot y$. Ogradom dugom 10 m treba ograditi tri strane pješčanika, odnosno tri stranice pravokutnika koje su zajedno duge 10 m pa vrijedi $2x + y = 10$. Želimo da je površina pješčanika maksimalna (najveća moguća) pa treba odrediti x i y takve da:

$$\begin{gathered} 2x + y = 10 \\ P = x \cdot y \rightarrow max. \end{gathered}$$

Vidimo da je površina funkcija dviju nepoznanica pa ne znamo odrediti njezin maksimum. Međutim, x i y nisu međusobno nezavisni. Iz jednadžbe $2x + y = 10$ vidimo da vrijedi $y = 10 - 2x$ pa to možemo uvrstiti u izraz za površinu i dobivamo:

$$P = x \cdot y = x \cdot (10 - 2x) = 10x - 2x^2.$$



Slika 2.1: Graf funkcije $P(x) = 10x - 2x^2$

Dakle, problem se svodi na određivanje maksimuma funkcije zadane pravilom pridruživanja $P(x) = 10x - 2x^2$. Još je potrebno odrediti domenu te funkcije (za kodomenu možemo pretpostaviti da je cijeli $\mathbb{R}$). Budući da je vrijednost funkcije dane pravilom pridruživanja $P(x) = 10x - 2x^2$ vrijednost tražene površine, ona ne smije biti negativna što znači da $P(x) \geq 0$, tj. $10x - 2x^2 \geq 0$. Odredimo nultočke te kvadratne funkcije:

$$10x - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow 2x(5 - x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0, x_2 = 5.$$

Vodeći koeficijent te kvadratne funkcije je negativan pa je graf funkcije okrenut otvorom prema dolje što znači da će ta kvadratna funkcija poprimati nenegativne vrijednosti na intervalu $\langle 0, 5 \rangle$ (Slika 2.1). Dakle, problem se svodi na određivanje maksimuma funkcije $P : \langle 0, 5 \rangle \to \mathbb{R}$ zadane pravilom pridruživanja $P(x) = 10x - 2x^2$. Vodeći koeficijent ove kvadratne funkcije je negativan pa ona postiže maksimum za $x = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{5+0}{2} = 2.5$ (apscisu tjemena smo mogli izračunati i pomoću formule za tjeme koja koristi koeficijente kvadratne funkcije). Dakle, širina pješčanika iznosi 2.5 m, a duljina pješčanika $10 - 2.5 \cdot 2 = 5$ m. Pravokutnik najveće moguće površine ima duljinu 5 m i širinu 2.5 m, a površina mu je $P = 2.5 \cdot 5 = 12.5\ \text{m}^2$.

Zadatak 2.

Na dan predstave cijena ulaznice je za 10 kuna veća nego u pretprodaji. Kolika je cijena ulaznica u pretprodaji ako na dan predstave za 200 kuna možemo kupiti jednu ulaznicu manje nego u pretprodaji?

Rješenje

Ako s x označimo cijenu ulaznice u pretprodaji, tada je cijena ulaznice na dan predstave $x + 10$. Ako s n označimo broj kupljenih ulaznica u pretprodaji, tada je broj kupljenih ulaznica na dan predstave $n - 1$. Dakle, broj ulaznica koji možemo kupiti u pretprodaji za 200 kuna jednak je $\frac{200}{x}$, tj. $n = \frac{200}{x}$, a broj ulaznica koji možemo kupiti na dan predstave za 200 kuna jednak je $\frac{200}{x+10}$, tj. $n - 1 = \frac{200}{x+10}$. Na dan koncerta za 200 kn možemo kupiti jednu ulaznicu manje nego u pretprodaji pa vrijedi: $\frac{200}{x} - \frac{200}{x+10} = 1$. Svođenjem na zajednički nazivnik imamo:

$$\frac{200(x + 10) - 200x - x(x + 10)}{x(x + 10)} = 0.$$

Nakon sređivanja dobivamo:

$$\frac{-x^2 - 10x + 2000}{x(x + 10)} = 0 \Leftrightarrow -x^2 - 10x + 2000 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 + 8000}}{-2} = \frac{10 \pm 90}{-2} \Leftrightarrow x_1 = 40, x_2 = -50.$$

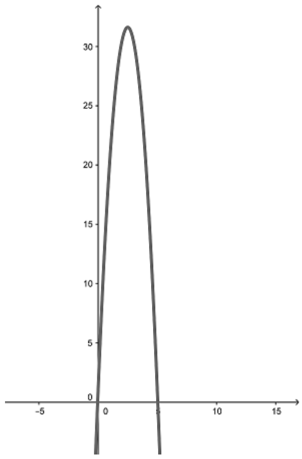
Dobili smo dva rješenja, ali odbacujemo negativno rješenje jer su rješenja jednadžbe predstavljala cijene ulaznica, a cijene ulaznica ne mogu biti negativni brojevi. Dakle, cijena ulaznice u pretprodaji iznosi 40 kuna.

Zadatak 3.

Ako s početne visine $h_0 = 1$ m udarimo nogometnu loptu vertikalno uvis uz početnu brzinu $v_0 = 24.5$ m/s, njezina će visina nakon t sekundi iznositi $h(t) = -0.5gt^2 + v_0t + h_0$ (gdje je $g = 9.8$ m/s^2.) Otpor zraka zanemarujemo.
a) Do koje će maksimalne visine doći nogometna lopta?
b) Koja je maksimalna visina koju lopta postigne u prve 2 sekunde?

Rješenje

a) Uvrstimo najprije poznate vrijednosti: $h_0 = 1$ m, $v_0 = 24.5$ m/s, $g = 9.8$ m/s^2. Dobivamo: $h(t) = -0.5 \cdot 9.8 \cdot t^2 + 24.5 \cdot t + 1 = -4.9t^2 + 24.5t + 1$. Budući da je vodeći koeficijent negativan, lopta maksimalnu visinu postiže u apscisi tjemena grafa funkcije (Slika 2.2). Apscisu tjemena (t_0) možemo izračunati pomoću formule za tjeme koja koristi koeficijente kvadratne funkcije, tj. $t_0 = -\frac{b}{2a}$, gdje su $a = -4.9$ i $b = 24.5$. Dakle, apscisa tjemena iznosi $t_0 = \frac{24.5}{2 \cdot 4.9} = 2.5$. To znači da funkcija h postiže maksimum za $t = 2.5$, tj. lopta maksimalnu visinu postiže nakon 2.5 s. Izračunajmo sada maksimalnu visinu koju postiže lopta, a to je visina koju lopta postigne nakon 2.5 s. Visinu dobijemo uvrštavanjem: $h(2.5) = -4.9 \cdot (2.5)^2 + 24.5 \cdot 2.5 + 1 = 31.625$ m. Maksimalna visina koju lopta postigne je 31.625 m.



Slika 2.2: Graf funkcije $h(t) = -4.9t^2 + 24.5t + 1$

b) S obzirom na to da je funkcija rastuća za $t \in [0, 2.5]$ (jer je rastuća na intervalu $\langle -\infty, 2.5]$), u prve 2 sekunde lopta najveću visinu , tj. maksimum na segmentu $[0, 2]$ postigne u trenutku $t = 2$, dakle, nakon 2 sekunde. Najveća visina koju lopta postigne u prve 2 sekunde je: $h(2) = -4.9 \cdot 2^2 + 24.5 \cdot 2 + 1 = 30.4$ m.

2.6 Analiza polinoma pomoću diferencijalnog računa

Obradom pojma derivacije učenici mogu proučavati i svojstva polinoma višeg stupnja. Svojstva polinoma prvog i drugog stupnja detaljno su izučili kroz cjeline o linearnoj i kvadratnoj funkciji. Polinomi trećeg i višeg stupnja se ne izučavaju toliko detaljno, ali se pomoću njihovih grafova može diskutirati tok tih funkcija. Međutim, kako bi mogli nacrtati grafove funkcija, učenike prvo treba upoznati s pojmovima kao što su nagib grafa, derivacija, stacionarne točke, ekstremi funkcije. . . Nakon što definiramo sve ove pojmove, objasnit će im se i postupak crtanja grafa pomoću derivacije.

Definicija 2.6.1. *Neka se na graf funkcije f može konstruirati tangenta u točki $(x_0, f(x_0))$. Nagib grafa funkcije f u točki $(x_0, f(x_0))$ definiramo kao nagib tangente položene na graf u toj točki. On je jednak koeficijentu smjera k tangente, a može se izraziti kao $k = \operatorname{tg} \alpha$, pri* *čemu je α kut što ga tangenta zatvara s pozitivnim dijelom x - osi.*

Definicija 2.6.2. *Derivacija funkcije f u točki x_0 je broj*

$$f^{'}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

ako ovaj limes postoji. Taj je broj jednak nagibu k tangente na graf $y = f(x)$ u točki $(x_0, f(x_0))$, odnosno $f^{'}(x_0) = k = \mathrm{tg}\,\alpha$, pri čemu je α kut što ga tangenta zatvara s pozitivnim dijelom x-osi.

Za funkciju f kažemo da je *derivabilna u točki* x_0 ako postoji $f^{'}(x_0)$. Funkcija je *derivabilna* (*diferencijabilna*) *na intervalu* $\langle a, b\rangle$ ako je derivabilna u svakoj točki tog intervala. Tada je na intervalu $\langle a, b\rangle$ definirana funkcija $f^{'}$ koju nazivamo *derivacija* funkcije f. Derivaciju u točki x možemo zapisati i kao $\frac{df(x)}{dx}$.

Interval $\langle a, b\rangle$ na kojemu je funkcija bilo padajuća bilo rastuća nazivamo *interval monotonosti* funkcije f. Intervale rasta i pada možemo ispitivati pomoću derivacije funkcije:

- Ako za svaki x iz intervala $\langle a, b\rangle$ vrijedi $f^{'}(x) > 0$, onda funkcija f *raste* na intervalu $\langle a, b\rangle$.

- Ako za svaki x iz intervala $\langle a, b\rangle$ vrijedi $f^{'}(x) < 0$, onda funkcija f *pada* na intervalu $\langle a, b\rangle$.

Stacionarne točke i intervale monotonosti funkcije f nalazimo ovim postupkom:

1. Izračunamo derivaciju $f^{'}$.
2. Riješimo jednadžbu $f^{'}(x) = 0$. Njezina su rješenja *stacionarne točke*.
3. Stacionarnim točkama područje definicije podijeljeno je na intervale monotonosti. Provjerom predznaka derivacije određujemo jesu li oni intervali rasta ili intervali pada funkcije.

Definicija 2.6.3. *Funkcija f ima u x_0 lokalni minimum ako postoji interval $\langle a, b\rangle$ koji sadrži x_0 tako da vrijedi: $f(x) \geq f(x_0)$, za svaki $x \in \langle a, b\rangle$. Funkcija f ima u x_0 lokalni maksimum, ako postoji interval $\langle a, b\rangle$ koji sadrži x_0 tako da vrijedi: $f(x) \leq f(x_0)$, za svaki $x \in \langle a, b\rangle$. Minimum i maksimum jednom riječju zovemo ekstremima funkcije f.*

Nužan uvjet za lokalni ekstrem je sljedeći: ako funkcija f poprima u x_0 lokalni ekstrem i ako f ima derivaciju u toj točki, tada vrijedi $f^{'}(x_0) = 0$.

Definicija 2.6.4. *Ako funkcija f ima prvu derivaciju na intervalu $\langle a, b\rangle$ i ako i funkcija f' ima prvu derivaciju na tom intervalu, onda derivaciju funkcije f' označavamo s f'' i nazivamo je drugom derivacijom funkcije f ili derivacijom drugog reda. Za veće brojeve n derivaciju $n-$tog reda označavamo s $f^{(n)}$.*

Napomena 2.6.5. *Za polinom stupnja n zadan s*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

vrijedi

$$\begin{gathered}
f'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + 2a_2 x + a_1, \\
f''(x) = n(n-1)a_n x^{n-2} + (n-1)(n-2)a_{n-1}x^{n-3} + \cdots + 2 \cdot a_2, \\
\cdots \\
f^{(n)}(x) = n(n-1)\ldots 2 \cdot 1 \cdot a_n = n!a_n, \\
f^{(k)}(x) = 0 \text{ za } k \geq n+1.
\end{gathered}$$

Karakter ekstrema istražujemo s pomoću druge derivacije na sljedeći način:

1. Izračunamo derivacije $f^{'}$ i $f^{''}$.
2. Riješimo jednadžbu $f^{'}(x) = 0$. Njezina rješenja su stacionarne točke.
3. - Ako je $f^{''}(x_0) > 0$, onda je x_0 minimum.
   - Ako je $f^{''}(x_0) < 0$, onda je x_0 maksimum.
   - Ako je $f^{''}(x_0) = 0$, onda karakter točke x_0 istražujemo pomoću predznaka prve derivacije.

Definicija 2.6.6. *Neka na nekom intervalu $\langle a, b\rangle$ vrijedi $f^{''}(x) > 0$. To znači da na tom intervalu prva derivacija raste, tj. raste nagib tangente, odnosno raste kut što ga ona zatvara s pozitivnim dijelom x-osi. Za funkciju f kažemo da je konveksna na intervalu $\langle a, b\rangle$. Ako je $f^{''}(x) < 0$, tad prva derivacija opada. Dakle, opada nagib tangente i kut što ga ona zatvara s pozitivnim dijelom x-osi. Za takvu funkciju kažemo da je konkavna na intervalu $\langle a, b\rangle$. Ako je na intervalima $\langle a, b\rangle$ i $\langle b, c\rangle$ druga derivacija funkcije f različitih predznaka, onda u točki b graf funkcije f prelazi iz konveksne u konkavnu granu ili obratno. Točku b nazivamo točkom pregiba (infleksije) funkcije f.*

Intervale konveksnosti, konkavnosti i točke pregiba nalazimo na sljedeći način:

1. Izračunamo f''.
2. Riješimo jednadžbu $f''(x) = 0$. Njezina su rješenja moguće pregibne točke.
3. Na onim intervalima na kojima je $f''(x) > 0$ funkcija je konveksna, a na ostalima je konkavna. Na granici između intervala konveksnosti i konkavnosti nalazi se pregibna točka.

Sada možemo nacrtati graf bilo kojeg polinoma pomoću ovih postupaka. To znači da možemo bez poznavanja svojstava grafa kvadratne funkcije nacrtati njezin graf. Postupak objašnjavamo na sljedećem primjeru.

Primjer 2.6.7. *Nacrtajmo graf kvadratne funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadane pravilom* $f(x) = -x^2 + x + 6$.

Rješenje

1. Funkcija je definirana na čitavom $\mathbb{R}$. Ponašanje funkcije u beskonačnosti kod polinoma lako se određuje jer ovisi o vodećem koeficijentu, odnosno o vodećem članu polinoma koji je za dovoljno velike vrijednosti od $|x|$ po apsolutnoj vrijednosti veći od vrijednosti ostatka polinoma. Kad x teži u $+\infty$, vrijednosti funkcije teže u $-\infty$ jer je vodeći koeficijent polinoma negativan. I kad x teži u $-\infty$ tada, vrijednosti funkcije teže u $-\infty$ jer je vodeći koeficijent polinoma negativan. Iz $f(-x) = f(x)$ slijedi

$$\begin{aligned} -(-x)^2 - x + 6 &= -x^2 + x + 6 \\ &\Leftrightarrow x = 0. \end{aligned}$$

Dakle, $f(-x)$ nije jednako $f(x)$ za $\forall x \in \mathbb{R}$ pa zaključujemo da funkcija nije parna. Iz $f(-x) = -f(x)$ slijedi

$$\begin{aligned} -(-x)^2 - x + 6 &= x^2 - x - 6 \\ &\Leftrightarrow 2x^2 = 12. \end{aligned}$$

Dakle, $f(-x)$ nije jednako $-f(x)$ za $\forall x \in \mathbb{R}$ pa zaključujemo da funkcija nije neparna. Nultočke funkcije možemo jednostavno odrediti. Nultočke ćemo dobiti kao rješenje jednadžbe $f(x) = 0$:

$$f(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + x + 6 = 0$$
$$\Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{-2} = \frac{-1 \pm 5}{-2}$$
$$\Leftrightarrow x_1 = 3, x_2 = -2.$$

2. Prva derivacija funkcije f iznosi:

$$f'(x) = -2x + 1.$$

Rješenje jednadžbe $f'(x) = 0$ je stacionarna točka $x = \frac{1}{2}$. Po predznacima prve derivacije određujemo intervale monotonosti funkcije f:

		$\frac{1}{2}$	
f'	$+$		$-$
f	$\nearrow$	$M = \frac{25}{4}$	$\searrow$

Dakle, f raste na intervalu $\left\langle -\infty, \frac{1}{2} \right\rangle$, a pada na $\left\langle \frac{1}{2}, +\infty \right\rangle$. U točki $x = \frac{1}{2}$ funkcija f postiže maksimum. Vrijednost funkcije u točki maksimuma je $M = f(\frac{1}{2}) = \frac{25}{4}$.

3. Druga derivacija iznosi

$$f''(x) = -2$$

što znači da je na cijeloj svojoj domeni funkcija f konkavna.
Na osnovi ovih podataka možemo skicirati graf funkcije (Slika 2.3).

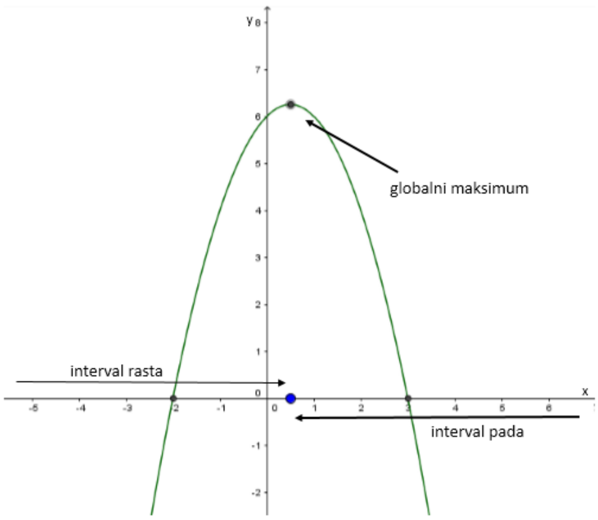
Osim grafova linearnih i kvadratnih funkcija, možemo nacrtati i graf polinoma višeg stupnja. Postupak objašnjavamo na jednom primjeru.

Primjer 2.6.8. *Nacrtajmo graf funkcije* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *zadane pravilom* $f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$.

Rješenje

1. Funkcija je definirana na čitavom $\mathbb{R}$. Kad x teži u $+\infty$, vrijednosti funkcije također teže u $+\infty$ jer je vodeći koeficijent polinoma pozitivan. Isto vrijedi i za $x \to -\infty$. Iz $f(-x) = f(x)$ slijedi

$$(-x)^4 - 2(-x)^3 + 1 = x^4 - 2x^3 + 1$$



Slika 2.3: Graf funkcije $f(x) = -x^2 + x + 6$

$$\Leftrightarrow x = 0.$$

Dakle, $f(-x)$ nije jednako $f(x)$ za $\forall x \in \mathbb{R}$ pa zaključujemo da funkcija nije parna. Iz $f(-x) = -f(x)$ slijedi

$$(-x)^4 - 2(-x)^3 + 1 = -x^4 + 2x^3 - 1$$
$$\Leftrightarrow 2x^4 = -2.$$

Dakle, $f(-x)$ nije jednako $-f(x)$ za $\forall x \in \mathbb{R}$ pa zaključujemo da funkcija nije neparna. Nultočke ne možemo jednostavno odrediti, iako se jedna od njih može pogoditi. Naime vrijedi da je $f(1) = 1^4 - 2 \cdot 1^3 + 1 = 0$ pa je 1 jedna nultočka funkcije f. Korisno je odrediti još vrijednosti u nekoliko susjednih točaka: $f(-1) = 4, f(0) = 1, f(2) = 1$.

2. Prva derivacija iznosi

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 = 2x^2(2x - 3).$$

Rješenja jednadžbe $f'(x) = 0$ su stacionarne točke $x_1 = 0$ i $x_2 = \frac{3}{2}$. Po predznacima prve derivacije određujemo intervale monotonosti funkcije f:

		0		$\frac{3}{2}$	
f'	$-$		$-$		$+$
f	$\searrow$		$\searrow$	$m = -\frac{11}{16}$	$\nearrow$

Dakle, f pada na intervalu $\left\langle -\infty, \frac{3}{2} \right\rangle$, a raste na $\left\langle \frac{3}{2}, +\infty \right\rangle$. Točka x_1 nije točka ekstrema, a u točki x_2 funkcija postiže minimum. Vrijednost funkcije u točki minimuma je $m = f(\frac{3}{2}) = -\frac{11}{16}$.

3. Druga derivacija iznosi

$$f''(x) = 12x^2 - 12x = 12x(x-1)$$

i jednaka je nuli u točkama $x_1 = 0$ i $x_2 = 1$. Po predznaku druge derivacije određujemo intervale konveksnosti, odnosno konkavnosti:

		0		1	
f''	$+$		$-$		$+$
f	$\cup$	p	$\cap$	p	$\cup$

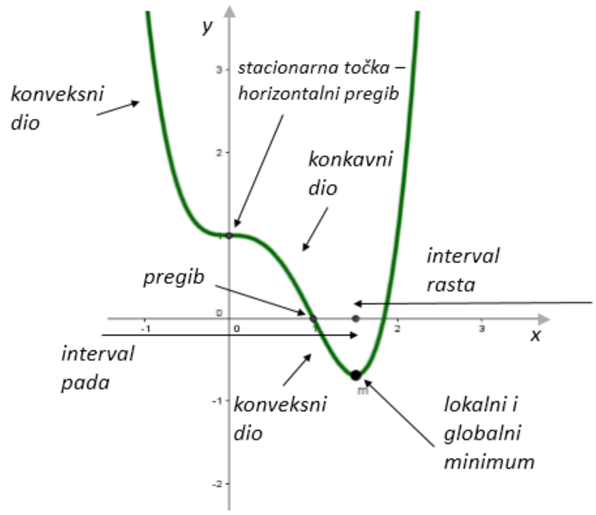
Na intervalima $\langle -\infty, 0\rangle$ i $\langle 1, +\infty\rangle$ funkcija je konveksna, a na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ konkavna. U točkama 0 i 1 ima pregib.
Na osnovi ovih podataka možemo skicirati graf funkcije (Slika 2.4).

Napomena 2.6.9. *Možemo primijetiti kako nismo precizno odredili sve nultočke funkcije iz prethodnog primjera, osim nultočke 1 koju smo pogodili, ali koristeći graf možemo očitati da postoji još jedna nultočka između* $\frac{3}{2}$ *i 2. Učenicima možemo pokazati koliki može sve biti broj nultočaka polinoma višeg stupnja tako da se u programu dinamične geometrije mijenjaju koeficijenti polinoma i uočavaju presjeci njihovih grafova s* $x-$ *osi. Na primjer, polinom trećeg stupnja može imati najmanje jednu realnu nultočku, a najviše tri realne nultočke dok polinom četvrtog stupnja ne mora nužno imati realnih nultočaka, a najviše može imati četiri realne nultočke. Više o nultočkama polinoma trećeg stupnja napisano je u sljedećem poglavlju.*

Također možemo promatrati grafove racionalnih funkcija. Opišimo kako se crta graf racionalne funkcije

$$f(x) = \frac{p_n(x)}{q_m(x)},$$

pri čemu su p_n polinom stupnja n i q_m polinom stupnja m. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je funkcija f skraćena tako da p_n i q_m nemaju zajedničkih nultočaka. Budući da je druga derivacija racionalne funkcije često složenog oblika, kako bismo lakše odredili izgled graf racionalne funkcije f, određujemo asimptote racionalne funkcije.



Slika 2.4: Graf funkcije zadane pravilom $f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$

Definicija 2.6.10. *Neka se točka T neprekinuto giba po grafu* Γ_f *funkcije* f *tako da barem jedna od njezinih koordinata teži u* $+\infty$ *ili* $-\infty$*. Ako pri tom njezina udaljenost do pravca p teži k nuli, onda se taj pravac naziva asimptota funkcije.*

Korisno je znati sljedeće o svojstvima asimptota racionalne funkcije:

1. Racionalna funkcija ima vertikalne asimptote u nultočkama nazivnika. Ponašanje funkcije s obiju strana asimptote ovisi o kratnosti nultočke. Ako je nultočka neparne kratnosti, funkcija će biti različitih predznaka. Kažemo da graf funkcije dolazi s različitih strana asimptote. Ako je nultočka parne kratnosti, funkcija će biti istog predznaka i njezin graf dolazi s istih strana asimptote.

2. Racionalna funkcija ima horizontalnu asimptotu onda i samo onda ako je stupanj brojnika manji ili jednak stupnju nazivnika. Ako je stupanj brojnika manji od stupnja nazivnika, onda je pravac $y = 0$ horizontalna asimptota. Ako je stupanj brojnika jednak stupnju nazivnika, onda je horizontalna asimptota pravac $y = \frac{a_n}{b_n}$, gdje su a_n i b_n vodeći koeficijenti polinoma u brojniku i nazivniku.

3. Racionalna funkcija ima kosu asimptotu ako je stupanj brojnika za jedan veći od stupnja nazivnika. Kosa asimptota je pravac $y = kx + l$ čije koeficijente određujemo

na sljedeći način:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x},$$
$$l = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx).$$

4. Funkcija nema ni horizontalnih ni kosih asimptota ako je stupanj brojnika barem za dva veći od stupnja nazivnika.

Primjer 2.6.11. *Nacrtajmo graf funkcije* $f : \mathbb{R}\backslash\{4\} \to \mathbb{R}$ *zadane pravilom*

$$f(x) = \frac{3x - x^2}{x - 4}.$$

Rješenje

1. Funkcija nije definirana u točki $x = 4$ pa nam je pravac $x = 4$ kandidat za njezinu vertikalnu asimptotu. Gledamo limes:

$$k = \lim_{x\to 4} \frac{3x - x^2}{x - 4} = \frac{3\cdot 4 - (4)^2}{4 - 4} = \frac{-4}{0} = \infty.$$

Dakle, pravac $x = 4$ je vertikalna asimptota. Tražimo nultočke funkcije f :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3x - x^2}{x - 4} = 0 \Leftrightarrow x(3 - x) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ili } x = 3.$$

Stupanj brojnika za jedan je veći od stupnja nazivnika pa funkcija ima kosu asimptotu. Odredimo je:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{3x-x^2}{x-4}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3 - x}{x - 4} = -1,$$

$$l = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{3x - x^2}{x - 4} + x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{3x - x^2 + x^2 - 4x}{x - 4}\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-x}{x - 4} = -1.$$

Dakle, kosa asimptota je pravac $y = -x - 1$.

2. Prva derivacija iznosi

$$f'(x) = \frac{(3 - 2x)(x - 4) - (3x - x^2)}{(x - 4)^2} = \frac{3x - 12 - 2x^2 + 8x - 3x + x^2}{(x - 4)^2} = \frac{-x^2 + 8x - 12}{(x - 4)^2}$$
$$= -\frac{(x - 2)(x - 6)}{(x - 4)^2}.$$

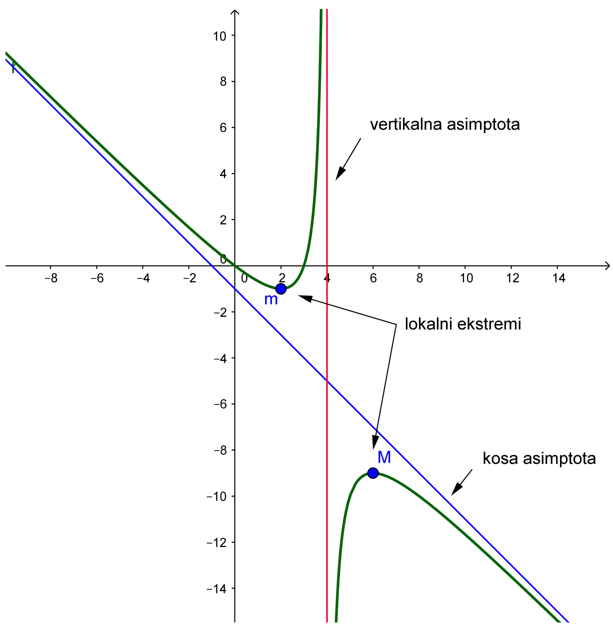
Rješenja jednadžbe $f'(x) = 0$ su stacionarne točke:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-6) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2, x_2 = 6.$$

Po predznacima prve derivacije određujemo intervale monotonosti funkcije f:

		2		4		6	
f'	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
f	$\searrow$	$m = -1$	$\nearrow$		$\nearrow$	M=-9	$\searrow$

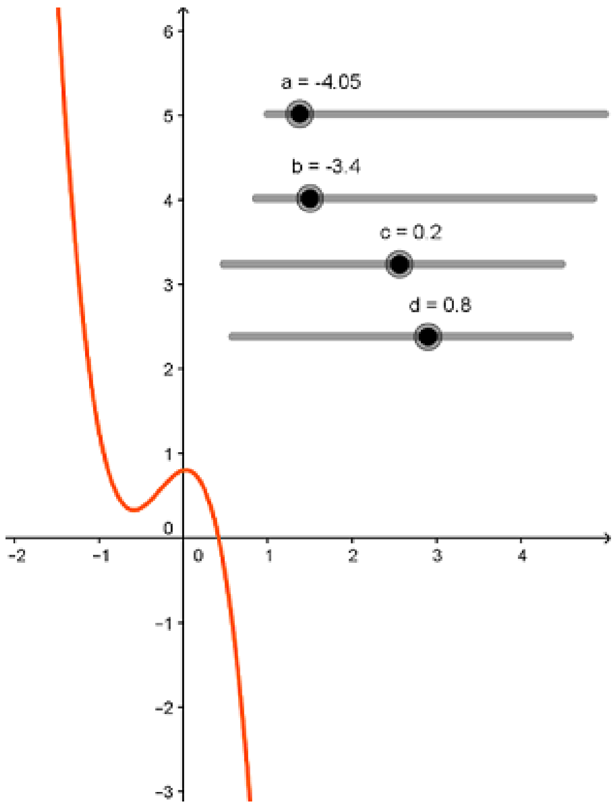
Dakle, f pada na intervalima $\langle -\infty, 2\rangle$ i $\langle 6, +\infty\rangle$, a raste na intervalima $\langle 2, 4\rangle$ i $\langle 4, 6\rangle$. U točki x_1 funkcija postiže minimum, a u točki x_2 funkcija postiže maksimum. Vrijednost funkcije u točki minimuma je $m = f(2) = -1$, a vrijednost funkcije u točki maksimuma je $M = f(6) = -9$. Sada možemo nacrtati graf funkcije f (Slika 2.5).



Slika 2.5: Graf funkcije zadane pravilom $f(x) = \frac{3x-x^2}{x-4}$

2.7 Istraživanje polinoma trećeg stupnja pomoću programa dinamične geometrije

Na dodatnoj nastavi možemo s učenicima diskutirati o broju nultočaka polinoma trećeg (i višeg) stupnja. U ovom poglavlju bavit ćemo se nultočkama polinoma trećeg stupnja, ali se analogan postupak može primijeniti i na polinome višeg stupnja. U diskusiji nam pomaže alat dinamične geometrije. U alatu dinamične geometrije nacrtamo općeniti polinom trećeg stupnja $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ pri čemu su a, b, c, d realni brojevi čija se vrijednost mijenja pomoću klizača. Postupno mijenjajući vrijednosti parametara učenici uočavaju što se događa s grafom polinoma ako mu se mijenjaju određeni koeficijenti. Nultočku funkcije na grafu učenici uočavaju tako da očitaju vrijednost argumenta u kojem graf funkcije siječe $x-$os ili ju dodiruje. Za te argumente je vrijednost funkcije jednaka nula. Za polinom trećeg stupnja mogu naći barem jedan takav argument (Slika 2.6), a kod nekih grafova i dva (Slika 2.7) ili tri (Slika 2.8).



Slika 2.6: Graf funkcije polinoma trećeg stupnja koji ima jednu realnu nultočku

Učenici neće moći na grafu uočavati kompleksne nultočke pa gledajući sam graf nije jasno koliko kompleksnih nultočaka ima dana funkcija. Stoga se s učenicima prisjećamo kvadratne funkcije, tj. polinoma drugog stupnja i njenog zapisa u kojem je lagano očitati nultočke tog polinoma. Npr. neka je g kvadratna funkcija zadana pravilom $g(x) = ax^2 + bx + c$ pri čemu su $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$. Tada se ona može zapisati u drugačijem obliku, tj. vrijedi $g(x) = ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$ pri čemu su x_1 i x_2 nultočke funkcije g. Analogno,

svaki polinom trećeg stupnja može se zapisati kao umnožak tri polinoma prvog stupnja, tj. vrijedi $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ pri čemu su x_1, x_2 i x_3 nultočke funkcije f. Dakle, polinom ima ukupno tri nultočke, kao što je i stupanj polinoma, međutim neke možda nisu realne. One dolaze u kompleksno-konjugiranom paru. U rastavu možemo imati i jednake polinome prvog stupnja što znači da neke nultočke mogu biti i višestruke, npr. može se dogoditi situacija da je $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)^2$. Zbog toga, ako npr. primijetimo samo jednu realnu nultočku na slici, zaključak je da su ostale ili konjugirano-kompleksne ili da je ta realna nultočka višestruka, točnije trostruka. Ako primijetimo dvije realne nultočke, tada je jedna od njih sigurno dvostruka, a ako primijetimo tri nultočke, tada su sve nultočke promatranog polinoma realne. Ostaje pitanje, može li se uvijek sa slike točno odrediti kakav je tip nultočaka? Najprije pogledajmo Sliku 2.7. Budući da imamo dvije realne nultočke, jedna od njih je dvostruka, samo ne znamo koja. Primjećujemo da graf funkcije u jednoj nultočki siječe $x-$os, a u drugoj nultočki dodiruje $x-$os. Učenike to može podsjetiti na polinom drugog stupnja, gdje je u slučaju da graf polinoma dodiruje $x-$os u nekoj točki, ta točka dvostruka nultočka polinoma pa učenici zaključuju da je dvostruka nultočka ona nultočka u kojoj graf dodiruje $x-$os. Zatim pogledajmo Sliku 2.10. Na njoj je prikazan graf funkcije h zadane pravilom $h(x) = x^3$ i graf funkcije k zadane pravilom $k(x) = x(x^2 + x + 1)$. Funkcija h ima jednu realnu nultočku kratnosti 3, a funkcija k ima jednu realnu nultočku i dvije konjugirano-kompleksne nultočke. Možemo uočiti da su grafovi tih funkcija jako slični (sijeku $x-$os u samo jednoj točki i obje funkcije su rastuće) te da ne možemo sa sigurnošću reći, gledajući samo graf, kakve nultočke ima polinom trećeg stupnja. Zbog toga je potrebno faktorizirati polinom kako bismo bili sigurni kakav tip nultočke ima dani polinom.
Na temelju ovih analiza možemo donijeti opći zaključak o nultočkama polinoma trećeg stupnja. Polinom trećeg stupnja može imati:

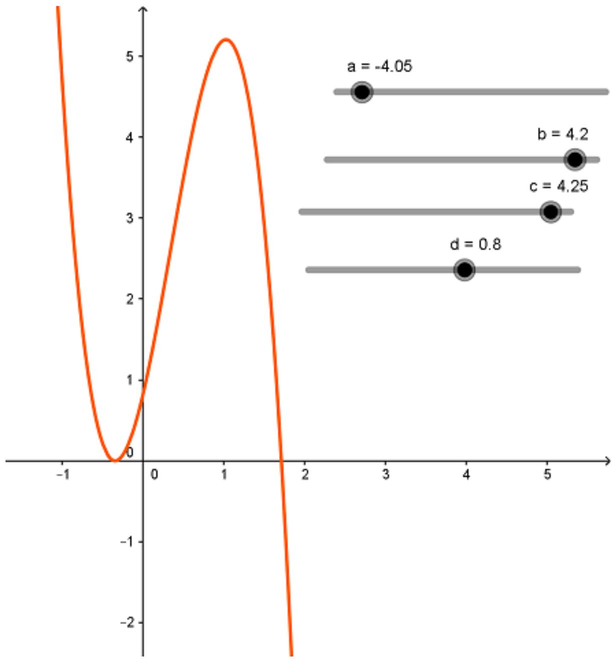
- jednu realnu nultočku i dvije konjugirano - kompleksne nultočke;
- jednu realnu nultočku kratnosti 1 i jednu realnu nultočku kratnosti 2;
- jednu realnu nultočku kratnosti 3;
- tri realne nultočke.

U sljedećem primjeru pokazat ćemo jedan zanimljiv zadatak kojeg učenici mogu riješiti koristeći upravo stečena znanja.

Primjer 2.7.1. *Na Slici 2.9 je prikazan graf jednog polinoma trećeg stupnja. To je graf polinoma:*

a) $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad a(x) = (x - 1)^2(x - 2)$

b) $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad b(x) = (x - 1)(x - 2)^2$



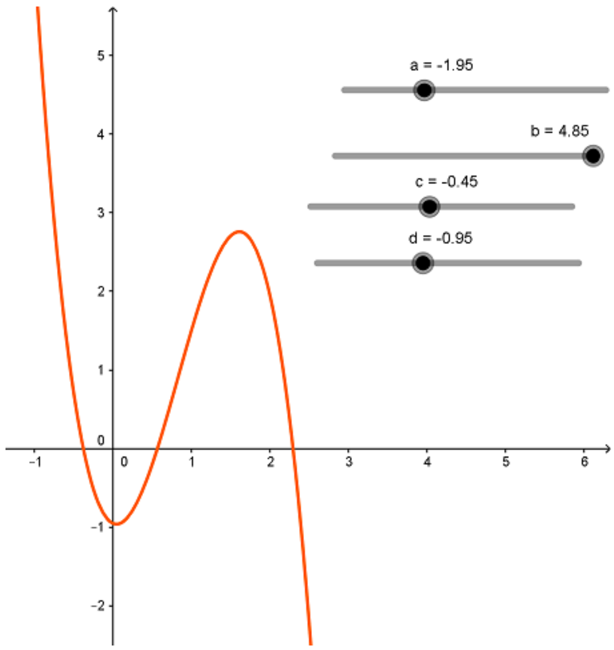
Slika 2.7: Graf funkcije polinoma trećeg stupnja koji ima dvije realne nultočke

c) $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad c(x) = (x-1)^2(x-2)^2$

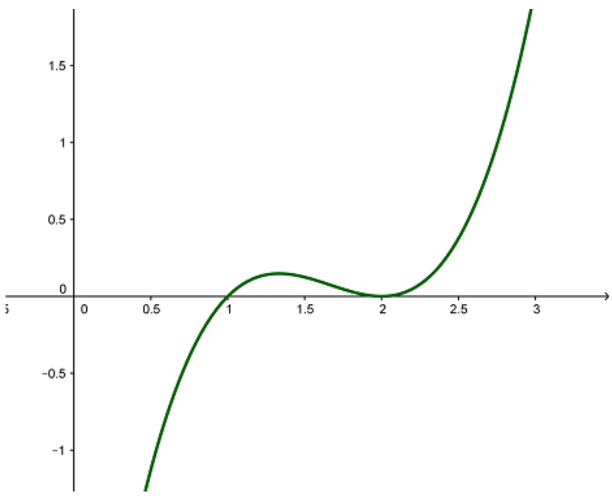
d) $d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad d(x) = (x-1)(x-2)^3$?

Rješenje

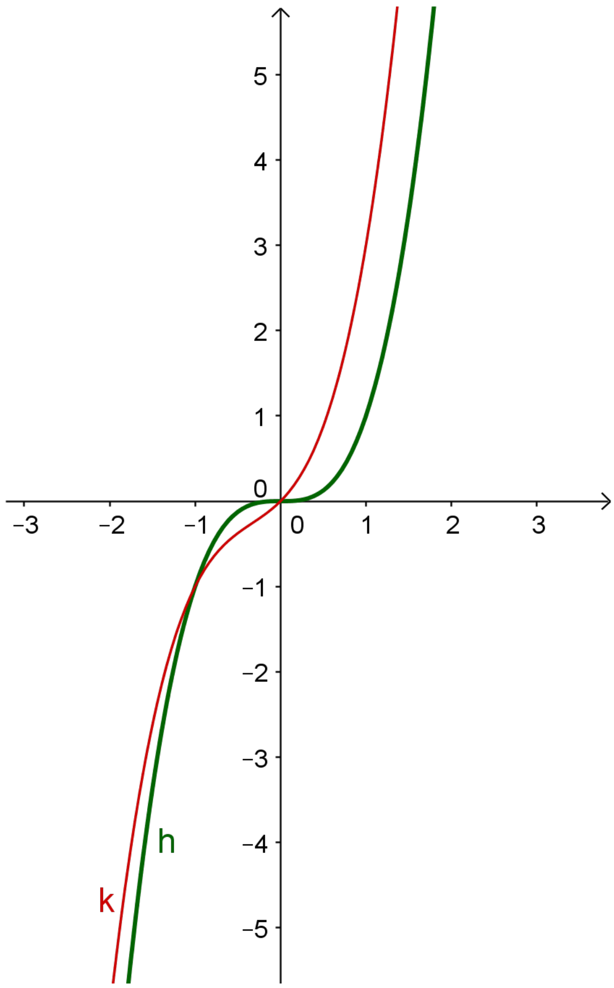
Budući da znamo da je prikazan graf polinoma trećeg stupnja, odmah možemo odbaciti slučajeve c) i d) (jer su to polinomi četvrtog stupnja). Analiziramo graf sa Slike 2.9. Uočavamo da polinom, čiji je graf prikazan na Slici 2.9, ima dvije realne nultočke. Jedna nultočka je $x_1 = 1$*, a druga nultočka* $x_2 = 2$*. Nultočka* x_1 *je kratnosti 1 jer graf u toj točki presijeca* $x-$*os, a nultočka* x_2 *je kratnosti 2 jer u toj točki graf dodiruje* $x-$*os. Dakle, na Slici 2.9 je prikazan polinom* $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, b(x) = (x-1)(x-2)^2$.



Slika 2.8: Graf funkcije polinoma trećeg stupnja koji ima tri realne nultočke



Slika 2.9: Graf funkcije zadane pravilom $b(x) = (x - 1)(x - 2)^2$



Slika 2.10: Grafovi funkcija h i k pri čemu su $h(x) = x^3$ i $k(x) = x(x^2 + x + 1)$

Poglavlje 3

Polinomi u visokoškolskom obrazovanju

U osnovnoj i srednjoj školi sustavno se upoznajemo s polinomima prvog i drugog stupnja. Rješavaju se zadaci u kojima je bitno prepoznati linearnu ili kvadratnu funkciju i proučavaju se grafovi tih funkcija, što je posebno važno za otkrivanje minimalnih i maksimalnih vrijednosti funkcija. Svojstva polinoma višeg stupnja ne obrađuju se detaljno, već se samo proučavaju neki konkretni primjeri uz pomoć diferencijalnog računa. Na fakultetu se polinomima pristupa općenitije, gledaju se polinomi općenitog stupnja i precizno se dokazuje većina rezultata koji se koriste. Također se obrađuju i razne algebarske strukture pri čemu se može prepoznati da su polinomi samo specijalni primjeri nekih struktura. To ujedno znači da ne moramo posebno izvoditi neka svojstva polinoma, već ih možemo uočiti za čitavu strukturu i kasnije primijeniti na polinomima. Dakle, pristup matematici apstraktniji je nego u prethodnom školovanju. Osim toga, na fakultetu se vrijeme posvećuje i nešto složenijim primjenama polinoma u raznim područjima koje su opisane u sljedećim potpoglavljima.

3.1 Polinomi i algebarske strukture

Na fakultetima se proučavaju algebarske strukture koje se sastoje od skupa i jedne ili više operacija koje su vezane za taj skup. Za skup svih polinoma tako se primjerice često upotrebljava izraz *prsten*. Konkretno, skup svih polinoma $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (vidi Definiciju 0.0.1.) označavamo s $\mathbb{R}[x]$ i zovemo *prsten polinoma* u jednoj varijabli x nad $\mathbb{R}$. Općenito, *prsten* je uređena trojka $(P, +, \cdot)$ pri čemu je P skup na kojem su definirane dvije operacije zbrajanje $+$ i množenje $\cdot$, to jest $+ : P \times P \to P$, $\cdot : P \times P \to P$, pri čemu vrijede ova svojstva:

1. $a + (b + c) = (a + b) + c, \quad \forall a, b, c \in P$ (asocijativnost zbrajanja);

2. $\exists 0 \in P$, tako da je $0 + a = a + 0 = a, \quad \forall a \in P$ (neutralni element);

3. $\forall a \in P, \exists -a \in P$, tako da je $a + (-a) = (-a) + a = 0$ (suprotni element);

4. $a + b = b + a, \quad \forall a, b \in P$ (komutativnost zbrajanja);

5. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c), \quad \forall a, b, c \in P$ (asocijativnost množenja);

6. $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c, \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad \forall a, b, c \in P$ (distributivnost slijeva i zdesna).

Prsten P je *prsten s jedinicom* ako postoji element $e \in P$, tako da je

$$a \cdot e = e \cdot a = a, \forall a \in P.$$

Element e se zove *jedinica* u P.

Prsten je *komutativan* ako je

$$a \cdot b = b \cdot a, \forall a, b \in P.$$

Skup svih polinoma, uz određene operacije, također je vektorski prostor i unitarni prostor. Te strukture definiramo u nastavku.

Definicija 3.1.1. *Neka je S neprazan skup. Svako preslikavanje $* : S \times S \to S$ naziva se binarna operacija na skupu S. Uređeni par $(S, *)$ skupa S i binarne operacije na njemu naziva se grupoid.*

Neka je $(S, *)$ grupoid. Kažemo da je $(S, *)$ grupa ako su ispunjena sljedeća svojstva:

1. $(\forall a, b, c \in S) \quad (a * b) * c = a * (b * c)$;

2. $(\exists e \in S)\,(\forall a \in S) \quad a * e = e * a = a$;

3. $(\forall a \in S)\,(\exists a' \in S) \quad a * a' = a' * a = e$.

Ako je još ispunjeno i svojstvo: $(\forall a, b \in S) \quad a * b = b * a$ kažemo da je grupa $(S, *)$ komutativna ili Abelova grupa.

Za definiciju vektorskog prostora trebamo poznavati stukturu polje.

Definicija 3.1.2. *Uređena trojka $(F, +, \cdot)$ naziva se polje ako vrijedi:*

- $(F, +)$ *je Abelova grupa;*

- $(F \setminus \{0\}, \cdot)$ *je Abelova grupa;*

- *distributivnost množenja prema zbrajanju.*

Zatim definiramo vektorski prostor.

Definicija 3.1.3. *Neka je V neprazan skup, a F polje. Kažemo da je V vektorski ili linearni prostor nad poljem F ako je na V definirana binarna operacija $+$ tako da je $(V, +)$ Abelova grupa i ako je zadano preslikavanje $s : F \times V \to V$ koje svakom uređenom paru $(\alpha, v) \in F \times V$ pridružuje $s(\alpha, v) = \alpha v$ tako da su ispunjena sljedeća svojstva:*

1. $(\forall \alpha, \beta \in F)\ (\forall v \in V) \quad \alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$;
2. $(\forall \alpha, \beta \in F)\ (\forall v \in V) \quad (\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$;
3. $(\forall \alpha \in F)\ (\forall v, w \in V) \quad \alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w$;
4. $(\forall v \in V) \quad 1 \cdot v = v$.

Kako bismo pokazali kako precizno dokazujemo da određeni skup čini neku strukturu, dokazat ćemo da je skup svih polinoma stupnja manjeg ili jednakog n (uz pripadne operacije) vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$. Neka je na P_n definirana binarna operacija zbrajanja s $(p + q)(x) = p(x) + q(x), p, q \in P_n, x \in \mathbb{R}$. Množenje skalarom je definirano kao $(\alpha p)(x) = \alpha p(x), \alpha \in \mathbb{R}, p \in P_n, x \in \mathbb{R}$.
Dokažimo najprije da je $(P_n, +)$ Abelova grupa. Dokazujemo sljedeća svojstva:

1. Želimo dokazati, ako su $p, q \in P_n$, $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$, tada vrijedi $p + q \in P_n$. Imamo:

   $$(p+q)(x) = p(x)+q(x) = a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x+a_0+b_n x^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1 x+b_0 = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_1 + b_1)x + a_0 + b_0$$

   iz čega slijedi da je $p + q \in P_n$.

2. Želimo dokazati da je $((p + q) + r)(x) = (p + (q + r))(x)$ za sve $p, q, r \in P_n$. Vrijedi:

   $$((p+q)+r)(x) = (p+q)(x)+r(x) = p(x)+q(x)+r(x) = p(x)+(q+r)(x) = (p+(q+r))(x),$$

   a to smo i željeli dokazati.

3. Želimo dokazati postojanje neutralnog elementa u P_n, tj. želimo naći polinom za koji vrijedi da kad ga zbrojimo s bilo kojim drugim polinomom p iz P_n, dobijemo polinom p. Označimo traženi polinom s p_0. Dakle želimo da je $(p_0 + p)(x) = p(x)$ za svaki $p \in P_n$. Očito je da je p_0 nulpolinom, odnosno da je $p_0(x) = d_n x^n + d_{n-1}x^{n-1} + \cdots + d_1 x + d_0$ pri čemu su $d_n, \ldots, d_0 = 0$. Vrijedi:

$$(p_0 + p)(x) = p_0(x) + p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 + d_n x^n + d_{n-1}x^{n-1} + \cdots + d_1 x + d_0 = (a_n + d_n)x^n + (a_{n-1} + d_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_1 + d_1)x + a_0 + d_0 = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = p(x).$$

Analogno se dokazuje da je $(p + p_0)(x) = p(x)$.

4. Za svaki polinom p iz P_n želimo naći neki drugi polinom z iz P_n t.d. je $(p+z)(x) = 0$. Očito je da će z biti definiran s $z(x) = -a_n x^n - a_{n-1}x^{n-1} - \cdots - a_1 x - a_0$, ako je $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$. Vrijedi:

$$(p+z)(x) = p(x)+z(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 - a_n x^n - a_{n-1}x^{n-1} - \cdots - a_1 x - a_0 = (a_n - a_n)x^n + (a_{n-1} - a_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_1 - a_1)x + a_0 - a_0 = 0.$$

Analogno se dokazuje da je $(z + p)(x) = 0$.

Dakle, vrijede sva svojstva pa je $(P_n, +)$ grupa. Da bismo dokazali da je $(P_n, +)$ Abelova grupa, moramo dokazati da za svaki $p, q \in P_n$ vrijedi da je $p + q = q + p$. Vrijedi:

$$(p+q)(x) = p(x)+q(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 + b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0 = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_1 + b_1)x + a_0 + b_0.$$

Koristeći komutativnost realnih brojeva dobivamo:

$$(a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_1 + b_1)x + a_0 + b_0 =$$
$$(\mathrm{b}_n + a_n)x^n + (b_{n-1} + a_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (b_1 + a_1)x + b_0 + a_0 =$$
$$\mathrm{b}_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0 + a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = q(x) + p(x).$$

Dakle, dokazali smo da je $(P_n, +)$ Abelova grupa.
Da bismo dokazali da je P_n vektorski prostor trebamo dokazati i sljedeća svojstva:

1. Želimo dokazati da za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i za svaki $p \in P_n$ vrijedi da je $\alpha(\beta p) = (\alpha\beta)p$. Imamo:

$$(\alpha(\beta p))(x) = \alpha((\beta p)(x)) = \alpha(\beta p(x)) = \alpha\beta p(x) = (\alpha\beta)p(x)$$

pa vrijedi da je

$$\alpha(\beta p) = (\alpha\beta)p,$$

a to smo i željeli dokazati.

2. Želimo dokazati da za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i za svaki $p \in P_n$ vrijedi da je $(\alpha+\beta)p = \alpha p + \beta p$. Vrijedi:

$$((\alpha+\beta)p)(x) = (\alpha+\beta)p(x) = \alpha p(x) + \beta p(x) = (\alpha p)(x) + (\beta p)(x) = (\alpha p + \beta p)(x),$$

a to smo i htjeli dokazati.

3. Želimo dokazati da za svaki $\alpha \in \mathbb{R}$ i za sve $p, q \in P_n$ vrijedi: $\alpha(p+q) = \alpha p + \alpha q$. Imamo:

$$(\alpha(p+q))(x) = \alpha((p+q)(x)) = \alpha(p(x)+q(x)) = \alpha p(x) + \alpha q(x) =$$
$$(\alpha p)(x) + (\alpha q)(x) = (\alpha p + \alpha q)(x),$$

a to smo i htjeli dokazati.

4. Želimo dokazati da za svaki $p \in P_n$ vrijedi da je $1 \cdot p = p$. Vrijedi:

$$(1 \cdot p)(x) = 1 \cdot p(x) = p(x),$$

a to smo i željeli dokazati.

Dakle, vrijede sva svojstva pa se od skupa svih polinoma stupnja manjeg ili jednakog n, može sagraditi vektorski prostor.

Napomena 3.1.4. *Skup svih polinoma (proizvoljnog stupnja) je također vektorski prostor.*

Od skupa P_n možemo sagraditi i neke druge strukture uz odgovarajuće operacije, npr. kod unitarnog prostora je to operacija skalarni produkt, a ako skupu P_n dodamo normu, dobivamo normirani prostor. U nastavku definiramo upravo spomenute pojmove.

Definicija 3.1.5. *Neka je V vektorski prostor nad poljem F pri čemu je F polje $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$. Preslikavanje s $V \times V$ u F koje svakom $(a,b) \in V \times V$ pridružuje neki skalar $\langle a,b \rangle \in F$ naziva se skalarni produkt na prostoru V ako su ispunjena sljedeća svojstva:*

1. $(\forall a \in V) \quad \langle a,a \rangle \geq 0$ *pri čemu je* $\langle a,a \rangle = 0 \Leftrightarrow a = 0$;
2. $(\forall a,b,c \in V) \quad \langle a+b,c \rangle = \langle a,c \rangle + \langle b,c \rangle$;
3. $(\forall \alpha \in F)\,(\forall a,b \in V) \quad \langle \alpha a,b \rangle = \alpha \langle a,b \rangle$;
4. $(\forall a,b \in V) \quad \langle a,b \rangle = \overline{\langle b,a \rangle}$.

Unitarni prostor definiramo na sljedeći način.

Definicija 3.1.6. *Neka je $\langle\ ,\ \rangle$ skalarni produkt na vektorskom prostoru V. Tada se $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ naziva unitarni prostor.*

Napomena 3.1.7. *Neka je P_n polinom stupnja manjeg ili jednakog n. Neka su $f, g \in P_n$. Može se dokazati da je funkcija definirana s*

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

skalarni produkt polinoma na prostoru P_n.

U sljedećem primjeru pokazat ćemo kako se računa skalarni produkt dvaju polinoma.

Primjer 3.1.8. *Neka su f i g polinomi dani s $f(t) = t^2+1$ i $g(t) = t-1$. Zadan je standardni skalarni produkt polinoma f, g s $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$. Izračunat ćemo skalarni produkt polinoma f i g.*

Rješenje

Skalarni produkt polinoma f i g jednak je

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt = \int_{-1}^{1}(t^2+1)(t-1)dt = \int_{-1}^{1}(t^3-t^2+t-1)dt =$$

$$= \int_{-1}^{1} t^3dt - \int_{-1}^{1} t^2dt + \int_{-1}^{1} tdt - \int_{-1}^{1} dt = -\frac{t^3}{3}\Big|_{-1}^{1} - t\Big|_{-1}^{1} = -(\frac{1}{3}-\frac{-1}{3})-(1-(-1)) = -\frac{2}{3}-2 = -\frac{8}{3}.$$

Sljedeća funkcija omogućava mjerenje "duljine" polinoma.

Definicija 3.1.9. *Neka je V vektorski prostor nad poljem F gdje je F $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$. Za preslikavanje $\|\ \| : V \to \mathbb{R}$ sa svojstvima:*

1. $(\forall x \in V)\quad \|x\| \geq 0;$
2. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0;$
3. $(\forall x \in V)\ (\forall \alpha \in F)\quad \|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\|\,;$
4. $(\forall x, y \in V)\quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

kažemo da je norma, duljina ili modul na V, a uređeni par $(V, \|\ \|)$ naziva se normirani prostor.

Napomena 3.1.10. *Svaki unitarni prostor U, uz normu $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}, x \in U$ postaje normirani prostor. Međutim, obrat ne vrijedi. Normirani prostor nije nužno unitaran, tj. ne mora postojati skalarni produkt na tom normiranom prostoru.*

Također možemo promatrati okomitost polinoma.

Definicija 3.1.11. *Neka je U unitaran prostor i $x, y \in U$. Za x i y kažemo da su ortogonalni (okomiti) ako je $\langle x, y \rangle = 0$. Za $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subseteq U$ kažemo da je ortogonalan skup ako je $\left\langle a_i, a_j \right\rangle = 0$, $i \neq j$. Ukoliko je još dodatno ispunjeno $\|a_i\| = 1, i = 1, 2, \dots, n$, tada ćemo za A reći da je ortonormiran.*

Svaki vektorski prostor ima bazu. Bazu čine linearno nezavisni vektori pomoću kojih se svaki vektor iz tog prostora može zapisati kao linearna kombinacija vektora iz baze.

Napomena 3.1.12. *Neka je V vektorski prostor nad F i $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}, n \in \mathbb{N}$. Kažemo da je skup S linearno nezavisan ako iz $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$ slijedi $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.*

Ako bismo željeli da baza bude ortonormirana, koristimo Gram−Schmidtov postupak. On glasi:
Neka je $A = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ uređeni linearno nezavisni skup vektora iz unitarnog prostora U. Taj se skup može ortonormirati, tj. zamijeniti novim skupom $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\} \subset U$, tako da vrijedi:

$$e_1 = \frac{1}{\|p_1\|} \cdot p_1,$$

$$q_j = p_j - \sum_{i=1}^{j-1} \left\langle p_j, e_i \right\rangle \cdot e_i,$$

$$e_j = \frac{1}{\left\|q_j\right\|} \cdot q_j, \ j = 2, \dots, n.$$

Svaki vektor p iz unitarnog prostora U, koji se može zapisati kao linearna kombinacija vektora $p_1, p_2, \dots, p_n$, može se zapisati i kao linearna kombinacija dobivenih ortonormiranih vektora, pri čemu se skalari u kombinaciji lako računaju. Konkretno vrijedi

$$p = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n$$

gdje je $\alpha_i = \langle p, e_i \rangle, i = 1, \dots, n$.

U sljedećem primjeru pokazat ćemo provođenje Gram-Schmidtovog postupka na konkretnom zadatku.

Primjer 3.1.13.

a) U unitarnom prostoru P_2 sa standardnim skalarnim produktom $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt$ ortonormirajmo bazu $\{p_1, p_2, p_3\}$ gdje je $p_1(t) = 1, p_2(t) = t, p_3(t) = t^2$.

b) Zapišimo polinom p, definiran s $p(t) = t^2$*, u dobivenoj ortonormiranoj bazi* $\{e_1, e_2, e_3\}$.

Rješenje

a) Da bismo izračunali $e_1(t)$*, najprije je potrebno izračunati normu od* p_1*:*

$$\|p_1\| = \sqrt{\langle 1, 1\rangle} = \sqrt{\int_{-1}^{1} dt} = \sqrt{2}.$$

Sad možemo izračunati $e_1(t)$ *pa dobivamo da je:*

$$e_1(t) = \frac{p_1(t)}{\|p_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Da bismo mogli dobiti $e_2(t)$*, najprije trebamo izračunati* $q_2(t)$*. Znamo da je:* $q_2(t) = p_2(t) - \langle p_2, e_1\rangle\, e_1(t)$*. Vrijedi:*

$$\langle p_2, e_1\rangle = \int_{-1}^{1} t\frac{\sqrt{2}}{2}dt = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_{-1}^{1} tdt = 0$$

pa je $q_2(t) = p_2(t) = t$*. Računamo normu od* q_2 *:*

$$\|q_2\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} t \cdot tdt} = \sqrt{\frac{t^3}{3}\Big|_{-1}^{1}} = \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Slijedi da je $e_2(t)$ *jednak*

$$e_2(t) = \frac{q_2(t)}{\|q_2\|} = \frac{t}{\sqrt{\frac{2}{3}}} = \sqrt{\frac{3}{2}}t.$$

Još preostaje izračunati $e_3(t)$*. Da bismo njega izračunali, potrebno je prvo izračunati* $\langle p_3, e_1\rangle, \langle p_3, e_2\rangle$ *te* $q_3(t)$ *i normu od* q_3*. Pa dobivamo:*

$$\langle p_3, e_1\rangle = \int_{-1}^{1} t^2\frac{\sqrt{2}}{2}dt = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{t^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{\sqrt{2}}{3}, \qquad \langle p_3, e_2\rangle = \int_{-1}^{1} t^2 \cdot t\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}dt = 0.$$

Dakle, vrijedi da je

$$q_3(t) = p_3(t) - \langle p_3, e_1\rangle\, e_1(t) - \langle p_3, e_2\rangle\, e_2(t) = p_3(t) - \frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = t^2 - \frac{1}{3},$$

a tada je

$$\|q_3\| = \sqrt{\int_{-1}^{1}\left(t^2-\frac{1}{3}\right)^2 dt} = \sqrt{\int_{-1}^{1} t^4 dt - \frac{2}{3}\int_{-1}^{1} t^2 dt + \frac{1}{9}\int_{-1}^{1} dt} = \sqrt{\frac{t^5}{5}\Big|_{-1}^{1} - \frac{2}{3}\cdot\frac{t^3}{3}\Big|_{-1}^{1} + \frac{1}{9}\cdot 2}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{5}-\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{9}} = \sqrt{\frac{2}{5}-\frac{2}{9}} = \sqrt{\frac{8}{45}} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{5}}.$$

Dakle, $e_3(t)$ jednak je

$$e_3(t) = \frac{q_3(t)}{\|q_3\|} = \frac{t^2-\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}\cdot\sqrt{\frac{2}{5}}} = \sqrt{\frac{5}{2}}\cdot\frac{3}{2}\left(t^2-\frac{1}{3}\right).$$

b) Želimo polinom p zapisati u bazi $\{e_1, e_2, e_3\}$, tj. želimo ga prikazati kao linearnu kombinaciju tih polinoma. Pretpostavimo da je $p = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$, pri čemu su $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$. Skalarnim množenjem te jednakosti s e_1 dobivamo da je $\langle p, e_1\rangle = \alpha_1$. Analogno, skalarnim množenjem jednakosti s e_2, odnosno s e_3, dobivamo da je $\langle p, e_2\rangle = \alpha_2$ i $\langle p, e_3\rangle = \alpha_3$. Računamo:

$$\alpha_1 = \langle p, e_1\rangle = \int_{-1}^{1} t^2\frac{\sqrt{2}}{2}dt = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{t^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{\sqrt{2}}{3},$$

$$\alpha_2 = \langle p, e_2\rangle = \int_{-1}^{1} t^2\cdot t\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}dt = 0,$$

$$\alpha_3 = \langle p, e_3\rangle = \int_{-1}^{1}\frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\cdot t^2\left(t^2-\frac{1}{3}\right)dt = \int_{-1}^{1}\frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\cdot t^4 dt - \int_{-1}^{1}\frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{t^2}{3}dt$$

$$= \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\left(\frac{t^5}{5}\Big|_{-1}^{1} - \frac{t^3}{9}\Big|_{-1}^{1}\right) = \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\left(\frac{2}{5}-\frac{2}{9}\right) = \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{8}{45} = \frac{4\sqrt{5}}{15\sqrt{2}}.$$

Tada je p, zapisan u bazi $\{e_1, e_2, e_3\}$, oblika

$$p = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 = \frac{\sqrt{2}}{3}e_1 + 0\cdot e_2 + \frac{4\sqrt{5}}{15\sqrt{2}}e_3 = \frac{\sqrt{2}}{3}e_1 + \frac{4\sqrt{5}}{15\sqrt{2}}e_3.$$

3.2 Neprekidnost i derivabilnost polinoma

Osim pojma polinoma, na fakultetu se precizno definiraju pojmovi neprekidnosti i derivabilnosti. Ti pojmovi su bitni jer se na temelju njih mogu zaključiti mnoga svojstva polinoma. Npr. neprekidna funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ na segmentu $[a, b]$ poprima minimum, maksimum i sve vrijednosti između vrijednosti minimuma i maksimuma. Ako neprekidna funkcija f ima na segmentu jednu nultočku, to znači da mora vrijediti $f(a)\cdot f(b) \le 0$. Slijede precizne definicije neprekidnosti i derivabilnosti.

Definicija 3.2.1. *Neka je $I \subset \mathbb{R}$ otvoreni interval. Funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ je neprekidna u $c \in I$ ako vrijedi*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in I)(|x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \epsilon).$$

Upravo smo naveli formalnu definiciju neprekidne funkcije. Postoji alternativna definicija neprekidnosti koja se spominje u nekim srednjim školama, neposredno nakon obrade limesa. Ona glasi:

Definicija 3.2.2. *Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoren interval i točka $c \in I$. Za funkciju $f : I \to \mathbb{R}$ kažemo da je neprekidna u točki c ako postoji limes funkcije f u točki c i*

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c).$$

Funkcija je neprekidna na skupu I ako je neprekidna u svakoj točki $c \in I$.

Sada želimo dokazati da je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana pravilom $f(x) = x$ neprekidna funkcija. Koristit ćemo definiciju 3.2.1. Želimo dokazati da je funkcija f neprekidna u proizvoljnoj točki $c \in \mathbb{R}$. Uzmimo proizvoljan $\epsilon > 0$ i definirajmo $\delta = \epsilon$. Neka je $x \in \mathbb{R}$ takav da je $|x - c| < \delta$. Budući da je $f(x) = x$ i $f(c) = c$ te $\delta = \epsilon$, slijedi da je $|f(x) - f(c)| = |x - c| < \delta = \epsilon$. Dakle, pronašli smo $\delta > 0$ takav da za svaki $x \in \mathbb{R}$ za koji vrijedi da je $|x - c| < \delta$ slijedi da je $|f(x) - f(c)| < \epsilon$. Dakle, funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana pravilom $f(x) = x$ je neprekidna funkcija.

Želimo dokazati da je svaki polinom neprekidna funkcija, a za to će nam biti potreban sljedeći teorem.

Teorem 3.2.3. *Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoren interval, $c \in I$ i neka su funkcije $f, g : I \to \mathbb{R}$ neprekidne u c. Tada vrijedi:*

1. *Za svaki $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ je funkcija $\alpha f + \beta g$ neprekidna u c.*
2. *Funkcija fg je neprekidna u c.*
3. *Ako je $g(x) \neq 0, \forall x \in I$, onda je funkcija $\frac{f}{g}$ neprekidna u c.*

Pomoću teorema 3.2.3 može se dokazati da je svaki polinom neprekidna funkcija samo na temelju činjenice da je funkcija, zadana s $f(x) = x$, neprekidna. Budući da su polinomi funkcije koje se mogu zapisati kao linearna kombinacija potencija, prema prethodnom teoremu lako se vidi da je svaki polinom neprekidna funkcija.

Zatim želimo dokazati da je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana pravilom $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}_0$ derivabilna u svakoj točki x svoje domene. Koristeći definiciju 2.6.2 dobivamo:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x - x)[(x+\Delta x)^{n-1} + (x+\Delta x)^{n-2}x + \cdots + (x+\Delta x)x^{n-2} + x^{n-1}]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} [(x+\Delta x)^{n-1} + (x+\Delta x)^{n-2}x + \cdots + (x+\Delta x)x^{n-2} + x^{n-1}]$$

$$= x^{n-1} + x^{n-2}x + \cdots + xx^{n-2} + x^{n-1} = \underbrace{x^{n-1} + x^{n-1} + \cdots + x^{n-1}}_{n puta} = nx^{n-1}.$$

Dakle, funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana pravilom $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}_0$ je derivabilna u svakoj točki x svoje domene. Slično kao i kod neprekidnosti, zbroj derivabilnih funkcija je derivabilna funkcija. Također je i umnožak derivabilne funkcije i konstante derivabilna funkcija. Budući da su polinomi funkcije koje se mogu zapisati kao linearna kombinacija potencija, a upravo smo dokazali da su potencije derivabilne funkcije, slijedi da je svaki polinom derivabilna funkcija. Općenito, vrijede sljedeća pravila deriviranja:

Teorem 3.2.4. *Neka su f i g funkcije derivabilne na istom intervalu I. Tada vrijede sljedeća pravila:*

1. *Funkcija $f + g$ je derivabilna i vrijedi $(f+g)' = f' + g'$.*
2. *Funkcija $f \cdot g$ je derivabilna i vrijedi $(f \cdot g)' = f'g + fg'$.*
3. *Funkcija $\frac{f}{g}$ je derivabilna u svakoj točki u kojoj je g definirana i vrijedi:*

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Napomena 3.2.5. *Svojstva pod točkom tri u teoremima 3.2.3. i 3.2.4. nisu nam potrebna za dokaz neprekidnosti i derivabilnosti polinoma, ali su korisna u izučavanju racionalnih funkcija.*

3.3 Teoremi o polinomima

U nekim srednjim školama se spominju i koriste činjenice o polinomima koje se ne dokazuju. Na matematičkim fakultetima se dio vremena posvećuje preciznim dokazima. Pokazat ćemo kako se precizno izvodi dokaz neke tvrdnje o polinomima na primjeru teorema o nulpolinomu. Također se taj teorem koristi u dokazima drugih važnih teorema koje ćemo navesti zbog njihove iznimne važnosti.
Prisjetimo se da je funkcija $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nulpolinom ako je $p(x) = 0, x \in \mathbb{R}$.

Teorem 3.3.1. *(o nulpolinomu)*

Polinom $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *zadan s* $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0, a_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, \ldots n$ *jest nulpolinom ako i samo ako je* $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$*, tj. ako su mu svi koeficijenti nula.*

Dokaz. Ako su svi $a_i = 0$, onda je jasno da vrijedi $f(x) = 0, x \in \mathbb{R}$. Dokažimo obrat. Pretpostavimo suprotno, tj. da je $f(x) = 0, x \in \mathbb{R}$ i da nisu svi koeficijenti a_i jednaki nula. Neka je $k \geq 0$ takav da je $a_k \neq 0$ i $a_j = 0$ za $j < k$. Stavimo li $p = n - k$ i $b_0 = a_k, b_1 = a_{k+1}, \ldots, b_p = a_{k+p} = a_n$, dobivamo

$$f(x) = b_0 x^k + b_1 x^{k+1} + \cdots + b_p x^{k+p} = 0, x \in \mathbb{R}.$$

Podijelimo li dobiveni polinom sa x^k $(x \neq 0)$, slijedi da je

$$b_0 + b_1 x + \cdots + b_p x^p = 0, x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}.$$

Označimo $M = \max\{|b_1|, |b_2|, \ldots, |b_p|\}$. Zbog $b_p \neq 0$ vrijedi $M > 0$. Uzmimo vrijednosti $x \in \left\langle 0, \frac{1}{2} \right\rangle$. Tada imamo redom

$$|b_0| = \left|b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_p x^p\right| \leq |b_1| x + |b_2| x^2 + \cdots + \left|b_p\right| x^p \leq Mx(1 + x + \cdots + x^{p-1}) \leq$$
$$Mx\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{p-1}}\right) = Mx\frac{1 - \frac{1}{2^p}}{1 - \frac{1}{2}} = 2Mx\left(1 - \frac{1}{2^p}\right) \leq 2Mx.$$

Zaključujemo da je $\frac{|b_0|}{2M} \leq x, x \in \left\langle 0, \frac{1}{2} \right\rangle$. Uzmemo li za x redom $x = \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \ldots, \frac{1}{2^m}, \ldots$ slijedi $\frac{|b_0|}{2M} \leq \frac{1}{2^m}, m = 2, 3, \ldots$ Zaključujemo da je $b_0 = 0$, što je u kontradikciji s početnom pretpostavkom da je $b_0 = a_k \neq 0$. Dakle, obrat vrijedi.

□

Kao što se može primijetiti, dokaz teorema o nulpolinomu nije tako trivijalan za dokazati. U matematici se kreće od jednostavnih definicija i teorema te se pomoću njih dokazuju teži i kompliciraniji teoremi, a pomoću njih još teži i kompliciraniji teoremi. Koristeći teorem o nulpolinomu možemo dokazati sljedeći teorem, a pomoću tog teorema još mnogo drugih teorema.

Teorem 3.3.2. *(o jednakosti polinoma)*

Polinomi $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *zadani s*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \; g(x) = \sum_{l=0}^{m} b_l x^l, \; a_n \neq 0, b_m \neq 0, a_k, b_l \in \mathbb{R},$$

jednaki su ako i samo ako je $m = n$ *i* $a_j = b_j$*, za sve* $j = 0, 1, \ldots, n$.

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $m > n$. Definirajmo funkciju $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kao $h = f - g$. Tada je

$$h(x) = f(x) - g(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 - b_m x^m - b_{m-1}x^{m-1} - \cdots - b_1 x - b_0$$

$$= -b_m x^m - \cdots - b_{n+1}x^{n+1} + (a_n - b_n)x^n + (a_{n-1} - b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_1 - b_1)x + a_0 - b_0.$$

Ako su polinomi f i g jednaki, tada je h nulpolinom. Budući da je h nulpolinom, onda mu koeficijenti, prema prethodnom teoremu, moraju biti nula pa slijedi

$$b_m = b_{n+1} = \cdots = a_n - b_n = a_{n-1} - b_{n-1} = \cdots = a_1 - b_1 = a_0 - b_0 = 0.$$

Budući da je u pretpostavci teorema $b_m \neq 0$ slijedi da je $m = n$ i $a_j = b_j, j = 0, 1, \ldots, n$. □

Posljedica ovog teorema je ta da je polinom jednoznačno određen sa svojim koeficijentima. Stoga polinom možemo identificirati s nizom svojih koeficijenata:

$$f = (a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots), a_i \in \mathbb{R}$$

gdje je $n = \mathrm{st} f$. U sljedećem primjeru rješavamo zadatak primjenjujući teorem o jednakosti polinoma.

Primjer 3.3.3. *Odredimo $f(x) \in \mathbb{R}[x]$, ako je $f(x - 1) = x^2 - 6x + 11$.*

Rješenje

Zbog teorema o jednakosti polinoma slijedi da f mora biti kvadratni polinom (tj. stupnja 2) pa postoje $A, B, C \in \mathbb{R}$ takvi da je $f(x) = Ax^2 + Bx + C$. Tada mora vrijediti:

$$x^2 - 6x + 11 = A(x - 1)^2 + B(x - 1) + C = Ax^2 + (-2A + B)x + A - B + C.$$

Izjednačavanjem koeficijenata (prema teoremu o jednakosti polinoma) dobivamo sljedeći sustav linearnih jednadžbi: $1 = A, -6 = -2A + B, 11 = A - B + C$. Rješavanjem sustava dobivamo $A = 1, B = -4, C = 6$. Dakle, traženi polinom je $f(x) = x^2 - 4x + 6$.

Napomena 3.3.4. *Prethodni zadatak znaju riješiti i učenici četvrtog razreda srednje škole i to na sljedeći način. Uvedemo supstituciju $t = x - 1$. Iz toga slijedi da je $x = t + 1$. Sad dobivamo da je $f(t) = (t + 1)^2 - 6(t + 1) + 11 = t^2 + 2t + 1 - 6t - 6 + 11 = t^2 - 4t + 6$. Time je funkcija određena, a ime varijable možemo označiti po volji pa dobivamo: $f(x) = x^2 - 4x + 6$. Primijetimo da se ovdje ne spominje jednakost polinoma već se ovaj postupak uvodi kao algoritam po kojem se rješavaju svi slični zadaci.*

Dijeljenje polinoma se radi u srednjoj školi, ali se ne dokazuju detalji. Na fakultetu se ti rezultati detaljnije proučavaju i dokazuju. Prisjetimo se: za polinom f kažemo da je *djeljiv* polinomom $g \neq 0$, ako postoji polinom h, takav da je $f = g \cdot h$. U tom slučaju vrijedi da je $\text{st}f = \text{st}g + \text{st}h$. Općenito vrijedi:

Teorem 3.3.5. *(o dijeljenju s ostatkom)*

Za svaka dva polinoma $f, g \in \mathbb{R}[x], g \neq 0$ postoje jedinstveni polinomi $q, r \in \mathbb{R}[x]$ takvi da vrijedi $f = g \cdot q + r$. U slučaju da je $r \neq 0$, tada vrijedi st $r <$ st g.

Napomena 3.3.6. *Dokaz prethodnog teorema radi se na fakultetima, ali ga u ovom radu nećemo dokazivati zbog njegove opširnosti. Ipak, bitno ga je spomenuti zbog njegovih važnih posljedica.*

Jedna od bitnih posljedica teorema 3.3.5 je dijeljenje polinoma linearnim polinomom $g(x) = x - \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$. Neka je f zadan s $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n, a_0 \neq 0, a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \ldots, n$ polinom n-tog stupnja nad $\mathbb{R}$, a g zadan s $g(x) = x - \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$ linearni polinom.

Napomena 3.3.7. *Uočimo da u ovom slučaju označavamo vodeći koeficijent s a_0. Notacija je takva zbog lakšeg snalaženja u Hornerovom algoritmu koji je opisan u nastavku.*

Prema teoremu o dijeljenju s ostatkom postoje jedinstveni polinomi q i r takvi da je $q(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \cdots + b_{n-1}$ i $r(x) = r$. Pri tome su $b_0, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ i $r \in \mathbb{R}$. Tada je $f(x) = (x - \alpha)q(x) + r(x)$. Uvrstimo li u prethodnu jednakost f i q, dobivamo:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = b_0x^n + (b_1 - \alpha b_0)x^{n-1} + (b_2 - \alpha b_1)x^{n-2} + \cdots + (b_{n-1} - \alpha b_{n-2})x + r - \alpha b_{n-1}.$$

Prema teoremu o jednakosti polinoma dobivamo: $b_0 = a_0, b_1 = \alpha b_0 + a_1, b_2 = \alpha b_1 + a_2, \ldots, b_{n-1} = \alpha b_{n-2} + a_{n-1}, r = \alpha b_{n-1} + a_n$. Te formule omogućuju da postepeno nađemo koeficijente $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ i ostatak r. Na tim se formulama temelji izračunavanje koeficijenata po *Hornerovoj shemi* (*algoritmu*). Radi lakšeg snalaženja Hornerov algoritam se zapisuje u sljedećem obliku:

	a_0	a_1	a_2	$\ldots$	a_{n-1}	a_n
α	$\underbrace{a_0}_{b_0}$	$\underbrace{\alpha a_0 + a_1}_{b_1}$	$\underbrace{\alpha b_1 + a_2}_{b_2}$	$\ldots$	$\underbrace{\alpha b_{n-2} + a_{n-1}}_{b_{n-1}}$	$\underbrace{\alpha b_{n-1} + a_n}_{r}$

U prvi redak upisuju se redom koeficijenti polinoma f, a na prvo mjesto drugog retka upisuje se slobodni član polinoma $g(x) = x - \alpha$ s promijenjenim predznakom, tj. α. Na drugo mjesto upisuje se a_0, dok se sljedeći članovi u drugom retku dobivaju na sljedeći način: broj koji stoji lijevo pomnožimo s α i dodamo mu broj iznad i tako postupak ponavljamo sve dok ne dobijemo r koji se nalazi u gore prikazanoj shemi ispod a_n. Na taj način dobijemo sve koeficijente kvocijenta q i ostatak r. Postupak ćemo pokazati na jednom primjeru.

Primjer 3.3.8. *Hornerovim algoritmom odredimo kvocijent polinoma zadanog pravilom* $f(x) = 5x^3 - x^2 + 2x + 7$ *i polinoma g zadanog pravilom* $g(x) = x - 3$.

Rješenje

Prema prethodno opisanom postupku dobivamo sljedeću tablicu

	5	-1	2	7
3	5	$3 \cdot 5 - 1 = 14$	$3 \cdot 14 + 2 = 44$	$3 \cdot 44 + 7 = 139$

Dakle, kvocijent je $q(x) = 5x^2 + 14x + 44$, a ostatak $r = 139$.

Napomena 3.3.9. *Hornerov algoritam se uči, u nekim školama, na dodatnoj nastavi kako bi učenici lakše dijelili polinome i imali određenu prednost na natjecanjima. Naravno, učenicima se Hornerov algoritam ne objašnjava toliko detaljno kao što je opisano u ovom radu.*

Hornerov algoritam nam pomaže i pri računanju kratnosti nultočke. Ako je polinom f djeljiv polinomom g zadanom s $g(x) = (x - \alpha)^k, k \in \mathbb{N}$, a nije djeljiv polinomom $h(x) = (x - \alpha)^{k+1}$, onda za $x = \alpha$ kažemo da je k - *struka* nultočka od f ili da je *kratnost* (*višestrukost*) nultočke $x = \alpha$ jednaka k. U sljedećem primjeru pokazat ćemo kako se određuje kratnost nultočke nekog polinoma.

Primjer 3.3.10. *Odredimo kratnost nultočke* $x = 1$ *polinoma* $f(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 + x^2 - 2x + 1$.

Rješenje

Prvo se trebamo uvjeriti da je $x = 1$ zaista nultočka polinoma f. Dobivamo da je $f(1) = 1^5 - 2 \cdot 1^4 + 1^3 + 1^2 - 2 + 1 = 1 - 2 + 1 + 1 - 2 + 1 = 0$. Dakle, $x = 1$ je zaista nultočka polinoma f. Dijeljenjem polinoma f s $x - 1$ Hornerovim algoritmom dobivamo:

	1	-2	1	1	-2	1
1	1	-1	0	1	-1	0

Zaključujemo da je polinom g, dobiven dijeljenjem polinoma f s $x - 1$, oblika $g(x) = x^4 - x^3 + x - 1$, a tada je $f(x) = (x - 1)(x^4 - x^3 + x - 1)$.
Lako se provjeri da je $g(1) = 0$ pa dijelimo polinom g s $x - 1$ i dobivamo

	1	−1	0	1	−1
1	1	0	0	1	0

Tada je polinom h, dobiven dijeljenjem polinoma g s $x-1$, oblika $h(x) = x^3 + 1$, a tada je $f(x) = (x-1)^2(x^3+1)$. Kako $x = 1$ nije nultočka polinoma h, h nije djeljiv s $x-1$ pa zaključujemo da je $x = 1$ dvostruka nultočka od f.

Ako je zadan polinom $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sa $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, n \geq 1, a_i \in \mathbb{C}, i = 0, 1, \ldots, n$, onda se postavlja pitanje ima li on nultočaka. O tome govori osnovni teorem algebre, jedan od najvažnijih teorema u teoriji polinoma.

Teorem 3.3.11. *(osnovni teorem algebre)*

Svaki polinom $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, n \geq 1$ s kompleksnim koeficijentima ima nultočku u $\mathbb{C}$.

Osnovni teorem algebre se uči u matematičkim gimnazijama u četvrtom razredu srednje škole, ali ga se ne dokazuje. Kao posljedica ovog teorema navodi se sljedeće:
Svaki polinom $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, n \geq 1$ s kompleksnim koeficijentima ima n nultočaka pri čemu je moguće da su neke višestruke. Tada polinom f možemo zapisati u sljedećem obliku $f(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$ pri čemu su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nultočke polinoma f. Ova posljedica pomaže učenicima pri rješavanju zadataka.

3.4 Interpolacija polinoma

Jedan od osnovnih problema numeričke matematike je kako aproksimirati zadanu funkciju pomoću neke druge funkcije, pri čemu funkcije imaju jednaku vrijednost u zadanim točkama te ocijeniti pogrešku koja je učinjena pri takvoj aproksimaciji. Najčešće funkcije kojima aproksimiramo dane funkcije su upravo polinomi zbog svoje jednostavnosti. Uzmimo da su nam poznate vrijednosti neke funkcije f u točkama $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Tražimo polinom L_n koji je stupnja n i vrijednosti mu se podudaraju s vrijednostima funkcije f u točkama $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Traženi polinom možemo zapisati kao

$$L_n = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) p_i(x)$$

gdje je polinom p_i takav da je $p_i(x_j) = 0$, za $i \neq j$, a $p_i(x_i) = 1$. Kako su $x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ nultočke od p_i taj polinom možemo zapisati u obliku

$$p_i(x) = c_i(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n).$$

Kako mora biti $1 = p_i(x_i)$, iz prethodne jednakosti slijedi

$$1 = c_i(x_i - x_0)(x_i - x_1)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n),$$

a kako je $x_i \neq x_j$ za $i \neq j$, slijedi:

$$c_i = \frac{1}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n)}.$$

Polinom L_n može se zapisati na sljedeći način:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\frac{(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\dots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n)}.$$

Dobiveni polinom zove se *Lagrangeov interpolacijski polinom*, a zadane točke su njegovi *čvorovi*. Izvest ćemo i *Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma za ekvidistantne čvorove*, tj. za čvorove za koje vrijedi $x_{i+1} - x_i = h, i = 0, 1, 2, \dots, n - 1$. Veličina h naziva se *korak interpolacije*. Ako označimo $t = \frac{x-x_0}{h}$, dobivamo: $x = x_0 + th$. Uvrstimo u $p_i(x)$ i dobivamo:

$$\begin{aligned}
&\frac{(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\dots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n)}\\
&= \frac{th(th - h)\dots[th - (i - 1)h][th - (i + 1)h]\dots(th - nh)}{ih(i - 1)h\dots h(-h)\dots[-(n - i)h]}\\
&= \frac{t(t - 1)\dots(t - n)}{t - i}\cdot\frac{(-1)^{n-i}}{i!(n - i)!} = \frac{t(t - 1)\dots(t - n)}{t - i}\cdot\frac{(-1)^{n-i}}{n!}\cdot\frac{n!}{i!(n - i)!}\\
&= (-1)^{n-i}\binom{n}{i}\cdot\frac{1}{t - i}\cdot\frac{t(t - 1)\dots(t - n)}{n!}.
\end{aligned}$$

Sada Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma izgleda ovako:

$$L_n(x) = L_n(x_0 + th) = (-1)^n\frac{t(t - 1)\dots(t - n)}{n!}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}\frac{f(x_i)}{t - i}.$$

Ako funkcija f koju interpoliramo ima $(n+1)$-u neprekidnu derivaciju, onda interpolacijom pravimo grešku

$$|f(x) - L_n(x)| \leq \frac{|w(x)|}{(n + 1)!}M_{n+1},$$

pri čemu je,

$$M_{n+1} := \max_{x\in[a,b]}\left|f^{n+1}(x)\right|, w(x) = \prod_{k=0}^{n}(x - x_k).$$

U sljedećem primjeru pokazat ćemo kako se graf interpolacijskog polinoma mijenja s obzirom na broj zadanih točaka i kolika se greška pri tome pojavljuje.

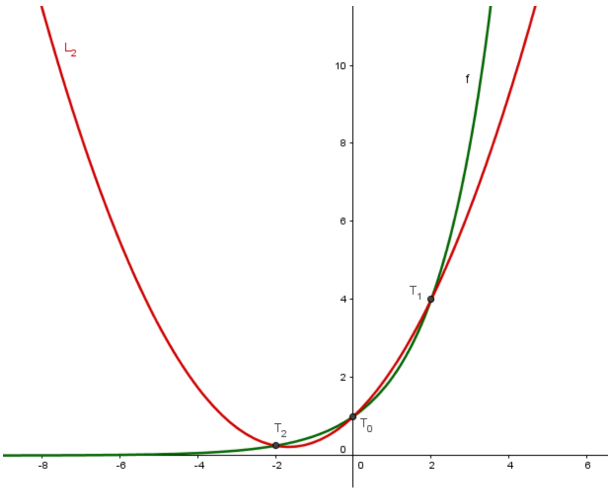
Primjer 3.4.1. *Odredimo interpolacijski polinom L_2 funkcije f zadane pravilom $f(x) = 2^x$ u sljedećim točkama: $x_0 = 0, x_1 = 2, x_2 = -2$ i interpolacijski polinom L_4 funkcije f u točkama $x_0 = 0, x_1 = 2, x_2 = -2, x_3 = 1$ i $x_4 = 3$. Usporedimo graf funkcije f i grafove interpolacijskog polinoma.*

Rješenje

Traženi interpolacijski polinom L_2 je oblika:

$$\begin{aligned} L_2(x) &= \frac{(x-2)(x+2)}{(0-2)(0+2)} \cdot 1 + \frac{(x-0)(x+2)}{(2-0)(2+2)} \cdot 4 + \frac{(x-0)(x-2)}{(-2-0)(-2-2)} \cdot \frac{1}{4} \\ &= \frac{x^2-4}{-4} + \frac{x^2+2x}{8} \cdot 4 + \frac{x^2-2x}{8} \cdot \frac{1}{4} \\ &= \frac{9}{32}x^2 + \frac{15}{16}x + 1. \end{aligned}$$

Na slici 3.1 prikazan je graf funkcije f i graf interpolacijskog polinoma. Uočimo da su im jedine zajedničke točke, točke $T_0 = (0,1), T_1 = (2,4)$, $T_2 = (-2, \frac{1}{4})$. Na intervalu $< -\infty, -2 >$ grafovi su jako udaljeni jedan od drugog, razilaze se. Na intervalu $[-2, 2]$ grafovi su jako blizu jedan drugog, a na intervalu $< 2, +\infty >$ grafovi se opet počinju razilaziti.



Slika 3.1: Grafovi funkcije f i interpolacijskog polinoma L_2

Traženi interpolacijski polinom L_4 je oblika:

$$L_4(x) = \frac{(x-2)(x+2)(x-1)(x-3)}{(0-2)(0+2)(0-1)(0-3)} \cdot 1 + \frac{(x-0)(x+2)(x-1)(x-3)}{(2-0)(2+2)(2-1)(2-3)} \cdot 4 \; +$$

$$\frac{(x-0)(x-2)(x-1)(x-3)}{(-2-0)(-2-2)(-2-1)(-2-3)}\cdot\frac{1}{4}+\frac{(x-0)(x-2)(x+2)(x-3)}{(1-0)(1-2)(1+2)(1-3)}\cdot 2\ +$$

$$\frac{(x-0)(x-2)(x+2)(x-1)}{(3-0)(3-2)(3+2)(3-1)}\cdot 8$$

$$\begin{aligned} = -\ &\frac{x^4-4x^3-x^2+16x-12}{12} - \frac{x^4-2x^3-5x^2+6x}{8}\cdot 4 \\ +\ &\frac{x^4-6x^3+11x^2-6x}{120}\cdot\frac{1}{4}+\frac{x^4-3x^3-4x^2+12x}{6}\cdot 2 \\ &+\frac{x^4-x^3-4x^2+4x}{30}\cdot 8 \end{aligned}$$

Dakle, traženi interpolacijski polinom L_4 je oblika

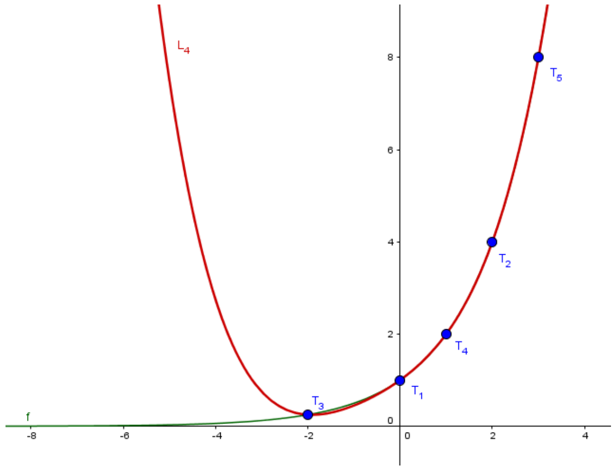
$$L_4(x)=\frac{3}{160}x^4+\frac{13}{240}x^3+\frac{33}{160}x^2+\frac{173}{240}x+1.$$

Na slici 3.2 prikazani su grafovi funkcije f i interpolacijskog polinoma L_4. Možemo primijetiti da se na intervalu $[-2,+\infty\rangle$ (koji se vidi na slici) grafovi gotovo podudaraju dok se na intervalu $\langle-\infty,-2\rangle$ razilaze. S obzirom na graf interpolacijskog polinoma L_2, interpolacijski polinom L_4 bolje aproksimira danu funkciju na tom intervalu. Uočavamo da povećavanjem broja točaka aproksimacija postaje sve točnija.

3.5 Svojstvene vrijednosti matrice

U raznim područjima matematike, pogotovo u algebri i analizi, korištenjem svojstvenih vrijednosti matrica pojednostavljujemo račun i lakše rješavamo zadatke. Budući da su svojstvene vrijednosti matrice nultočke određenih polinoma, za njihovo određivanje ili ispitivanje njihovih svojstava potrebno je imati određena znanja o polinomima. U nastavku definiramo što su to svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori matrice te pokazujemo njihovu primjenu u zadacima na raznim primjerima.

Neka je $A\in M_n(\mathbb{R})$ kvadratna matrica reda n. Skalar $\lambda\in\mathbb{C}$ se zove *svojstvena vrijednost* matrice A ako postoji vektor $v\in M_{n1}(\mathbb{C}), v\neq 0$ takav da vrijedi



Slika 3.2: Grafovi funkcije f i interpolacijskog polinoma L_4

$$Av = \lambda v.$$

Za vektor v kažemo da je *svojstveni vektor* matrice A koji pripada svojstvenoj vrijednosti λ. Polinom $k(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ zove se *karakteristični polinom* matrice A. Broj λ je svojstvena vrijednost matrice A ako i samo ako je nultočka pripadnog karakterističnog polinoma. U sljedećim primjerima pokazat ćemo primjenu svojstvenih vrijednosti matrice, a time i primjenu polinoma.

Primjer 3.5.1. *Neka je zadana matrica*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pronađimo njene svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore.

Rješenje

Karakteristični polinom matrice A je

$$k_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (2-\lambda)^2 - 1 = (2-\lambda-1)(2-\lambda+1) = (1-\lambda)(3-\lambda).$$

Njegove su nultočke $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$. To su svojstvene vrijednosti matrice A. Za svaku od njih treba naći pripadni svojstveni vektor, rješavajući homogeni sustav $(A - \lambda I)v = 0$ pri čemu je

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

a) Za $\lambda_1 = 1$ imamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_2.$$

Slijedi da je $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix}$ za bilo koju vrijednost $t \in \mathbb{R}$. Npr. možemo uzeti da je $t = 1$. Tada je prvi svojstveni vektor $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Svaki netrivijalan vektor koji je kolinearan s v_1 je također svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti λ_1.

b) Za $\lambda_2 = 3$ imamo

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Slijedi da je $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$ za bilo koju vrijednost $t \in \mathbb{R}$. Npr. možemo uzeti da je $t = 1$. Tada je drugi svojstveni vektor $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Matrica A predstavlja i matricu nekog linearnog operatora s $\mathbb{R}^n$ u $\mathbb{R}^n$ u kanonskoj bazi. Ponekad je moguće naći bazu u kojoj je matrični zapis operatora jednak nekoj dijagonalnoj matrici D. Tada vrijedi

$$D = P^{-1}AP,$$

gdje je P matrica prijelaza koja po stupcima predstavlja vektore nove baze zapisane u kanonskoj bazi. Dijagonalni elementi u matrici D su svojstvene vrijednosti matrice A.

Napomena 3.5.2. *Neka su X i Y vektorski prostori. Preslikavanje $A : X \to Y$ naziva se linearni operator ako vrijedi:*

$$(\forall x_1, x_2 \in X)(\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}) \qquad A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 A(x_1) + \alpha_2 A(x_2).$$

U sljedećem primjeru pokazujemo postupak dobivanja dijagonalnog oblika matrice.

Primjer 3.5.3. *Svedimo na dijagonalni oblik matricu $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Izračunajmo A^n za $n \in \mathbb{N}$.*

Rješenje

Kao što se može primijetiti, ovo je matrica iz prošlog zadatka. Ona ima dvije različite svojstvene vrijednosti: $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = 3$. Odgovarajući svojstveni vektori su: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ i $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Tada je $A = PDP^{-1}$ gdje je $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, a matrica $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Još trebamo izračunati inverz matrice P, tj. matricu P^{-1} :

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right).$$

Tada je $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Sada računamo A^n:

$$A^n = (PDP^{-1})(PDP^{-1})(PDP^{-1})\dots(PDP^{-1}) = PD\underbrace{P^{-1}P}_{=I}DP^{-1}\dots PD\underbrace{P^{-1}P}_{=I}DP^{-1}$$

$$\Rightarrow A^n = PD^nP^{-1} \text{ pri čemu je } D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$

U sljedećim primjerima pokazat ćemo primjenu svih prethodno riješenih zadataka.

Primjer 3.5.4. *Riješimo sustav rekurzija*

$$x_{n+1} = 2x_n + y_n$$
$$y_{n+1} = x_n + 2y_n$$

pri čemu je $x_1 = 1, y_1 = 2$.

Rješenje

Sustav možemo zapisati u matričnom obliku kao

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Matricu $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ prepoznajemo kao matricu A iz prethodnih zadataka pa vrijedi

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} x_{n-2} \\ y_{n-2} \end{pmatrix} = \ldots = A^{n-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

Prema prethodnom zadatku slijedi da je $A^{n-1} = PD^{n-1}P^{-1}$ pri čemu je $D^{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^{n-1} \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ i $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Dobivamo da je

$$A^{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^{n-1} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+3^{n-1} & -1+3^{n-1} \\ -1+3^{n-1} & 1+3^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Slijedi da je

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+3^{n-1} & -1+3^{n-1} \\ -1+3^{n-1} & 1+3^{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1+3^n \\ 1+3^n \end{pmatrix}.$$

Dakle, dobivamo:

$$x_n = \tfrac{1}{2}(-1+3^n),\ y_n = \tfrac{1}{2}(1+3^n).$$

3.6 Linearne diferencijalne jednadžbe

Svojstvene vrijednosti, a time i polinomi imaju veliku ulogu u rješavanju nekih diferencijalnih jednadžbi, odnosno sustava diferencijalnih jednadžbi. Pokažimo njihovu primjenu na jednadžbi oblika $y'' + py' + qy = 0, p, q \in \mathbb{R}$. Takve jednadžbe nazivaju se linearne homogene diferencijalne jednadžbe drugog reda s konstantnim koeficijentima. Dokažimo da sva rješenja jednadžbe $y'' + py' + qy = 0, p, q \in \mathbb{R}$ čine vektorski prostor.
Neka su u, v proizvoljna rješenja dane jednadžbe. Tada vrijedi: $u'' + pu' + qu = 0, v'' + pv' + qv = 0$. Pitamo se je li $\alpha u + \beta v, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ rješenje iste jednadžbe (jer ako je, tada će sva rješenja činiti vektorski prostor). Uvrštavanjem dobivamo:

$$(\alpha u + \beta v)'' + p(\alpha u + \beta v)' + q(\alpha u + \beta v) = \alpha u'' + \beta v'' + \alpha p u' + \beta p v' + \alpha q u + \beta q v$$

$$= \alpha \underbrace{(u'' + pu' + qu)}_{=0} + \beta \underbrace{(v'' + pv' + qv)}_{=0} = 0.$$

Uistinu, sva rješenja jednadžbe $y'' + py' + qy = 0, p, q \in \mathbb{R}$ čine vektorski prostor. Može se dokazati da taj prostor ima dimenziju 2. Potražimo bazu za prostor rješenja. Vektor baze ćemo tražiti u obliku $y = e^{\lambda x}$ pri čemu je λ konstanta. Tada je $y'(x) = \lambda e^{\lambda x}$, a $y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$.
Uvrštavanjem dobivamo:

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + p\lambda e^{\lambda x} + q e^{\lambda x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 + p\lambda + q = 0.$$

Primijetimo da smo dobili kvadratnu jednadžbu koju zovemo *karakteristična jednadžba* promatrane diferencijalne jednadžbe. Kao kod svake kvadratne jednadžbe, njena rješenja $\lambda_{1,2}$ mogu biti:

- realni i različiti brojevi - u tom slučaju rješenje početne jednadžbe dano je s
$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R};$$
- realni i jednaki brojevi ($\lambda_1 = \lambda_2$) - ovdje je rješenje početne jednadžbe dano s
$$y(x) = e^{\lambda_1 x}(C_1 + C_2 x), C_1, C_2 \in \mathbb{R};$$
- kompleksni brojevi - u tom slučaju vrijedi $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, jer znamo da su kompleksna rješenja kvadratne jednadžbe međusobno konjugirana. U ovom slučaju rješenje početne jednadžbe dano je s
$$y(x) = e^{\alpha x}(C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)), C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

U sljedećem primjeru pokazat ćemo kako se nalazi opće i partikularno rješenje homogene diferencijalne jednadžbe.

Primjer 3.6.1. *Nađimo opće rješenje jednadžbe* $y'' + y' - 6y = 0$ *te partikularno rješenje koje zadovoljava početne uvjete* $y(0) = 1, y'(0) = 0$.

Rješenje

U ovom slučaju karakteristična jednadžba glasi $\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$, a njena rješenja su
$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} \Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = -3.$$
Kako su rješenja različiti realni brojevi, dobivamo da je rješenje zadane diferencijalne jednadžbe
$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x}.$$
Iz $y(0) = 1$ dobivamo da je $C_1 + C_2 = 1$, a iz $y'(0) = 0$ dobivamo da je $2C_1 - 3C_2 = 0$. Slijedi $C_1 = \frac{3}{5}, C_2 = \frac{2}{5}$ pa je traženo partikularno rješenje $y(x) = \frac{3}{5}e^{2x} + \frac{2}{5}e^{-3x}$.

Ako je $y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2$ opće rješenje homogene jednadžbe $y'' + py' + qy = 0, p, q \in \mathbb{R}$ i ako je y_p bilo koje partikularno rješenje nehomogene jednadžbe $y'' + py' + qy = f(x)$, onda je $y = y_h + y_p$ opće rješenje nehomogene jednadžbe $y'' + py' + qy = f(x)$. U sljedećem primjeru pokazat ćemo kako se određuje opće rješenje nehomogene jednadžbe.

Primjer 3.6.2. *Pronađimo opće rješenje jednadžbe* $y'' + 4y = 4x^2$.

Rješenje

Riješimo najprije pripadajuću karakterističnu jednadžbu $\lambda^2 + 4\lambda = 0$. Rješenja te jednadžbe su $\lambda_1 = 2i, \lambda_2 = -2i$ pa je $y_h(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$. Da bismo našli partikularno rješenje, pitamo se koja to funkcija, ako ju zbrojimo s njenjom drugom derivacijom daje polinom drugog stupnja. Na primjer, to svojstvo će imati polinom drugog stupnja. Dakle, partikularno rješenje tražimo u obliku $y_p(x) = Ax^2 + Bx + C$. Tada je $y_p''(x) = 2A$ pa uvrštavanjem u zadanu jednadžbu dolazimo do jednadžbe

$$2A + 4(Ax^2 + Bx + C) = 4x^2$$

$$\Leftrightarrow 4Ax^2 + 4Bx + 2A + 4C = 4x^2.$$

Izjednačavanjem koeficijenata uz x^2, x^1 i x^0 na lijevoj i desnoj strani jednadžbe dolazimo do linearnog sustava:

$$\begin{aligned} 4A &= 4, \\ 4B &= 0, \\ 2A + 4C &= 0, \end{aligned}$$

čije je rješenje $A = 1, B = 0, C = -\frac{1}{2}$. Dakle, partikularno rješenje zadane jednadžbe je $y_p(x) = x^2 - \frac{1}{2}$. Pa je njezino opće rješenje

$$y = y_p(x) + y_h(x) = x^2 - \frac{1}{2} + C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

U sljedećem primjeru pokazat ćemo kako se, pomoću svojstvenih vrijednosti, rješava sustav diferencijalnih jednadžbi.

Primjer 3.6.3. *Neka su zadane jednadžbe*

$$x' = 2x + y$$

$$y' = x + 2y.$$

Odredimo x i y takve da vrijede dane jednadžbe.

Rješenje

Ako uzmemo da je $x = x(t)$ i $y = y(t)$ dobivamo:

$$x'(t) = 2x(t) + y(t)$$

$$y'(t) = x(t) + 2y(t).$$

Jednadžbe možemo zapisati u matričnom obliku kao

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Matricu $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ prepoznajemo kao matricu A iz primjera 3.5.3. Svojstvene vrijednosti te matrice su $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = 3$, a svojstveni vektori $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ i $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Opće rješenje ovog sustava je prema [11] linearna kombinacija dva linearno nezavisna rješenja. Njih tražimo u obliku $e^{\lambda t} v$, gdje je λ svojstvena vrijednost matrice A, a v je njezin pridruženi svojstveni vektor. Tada je jedno rješenje ovog sustava

$$e^{\lambda_1 t} v_1 = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Drugo rješenje ovog sustava je oblika

$$e^{\lambda_2 t} v_2 = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pa je opće rješenje ovog sustava je oblika

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Primijetimo da rješenja ovih jednadžbi čine jedan dvodimenzionalni potprostor.

Bibliografija

[1] Bakić, D., *Linearna algebra*, Školska knjiga, Zagreb, 2008.

[2] Baranović, I., Jerković, M., *Vježbe iz matematike 2*, dostupno na http://matematika.fkit.hr/novo/matematika%202/vjezbe/Mat2_Vjezbe13.pdf (ožujak 2016.)

[3] Bogner Boroš, A., Brkić, P., Havranek Bijuković, L., Karlo, M., Kuliš, M., *Matematika 7*, udžbenik sa zbirkom zadataka za matematiku u sedmom razredu osnovne škole, Školska knjiga, Zagreb, 2014.

[4] Dakić, B., Elezović N., *Matematika 1*, udžbenik i zbirka zadataka za prvi razred gimnazije, Element, Zagreb, 2009.

[5] Dakić, B., Elezović N., *Matematika 2*, udžbenik i zbirka zadataka za drugi razred gimnazije, Element, Zagreb, 2009.

[6] Dakić, B., Elezović N., *Matematika 4*, udžbenik i zbirka zadataka za četvrti razred gimnazije, Element, Zagreb, 2009.

[7] Elezović, N., Aglić, A., *Linearna algebra*, zbirka zadataka, Element, Zagreb, 2001.

[8] Horvatić, K., *Linearna algebra*, treći dio, Matematički odsjek PMF-a, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 1999.

[9] Ivanšić, I., *Numerička matematika*, Element, Zagreb, 2002.

[10] Kralj, L., Glasnović Gracin, D., Ćurković, Z., Stepić, M., Banić, S., *Petica 7*, udžbenik sa zbirkom zadataka za matematiku u sedmom razredu osnovne škole, Sys-Print d.o.o., Zagreb, 2007.

[11] Kelley W., G., Peterson, A., C., *The Theory of Differential Equations*, Springer, 2010.

[12] Milun T., *Cardanova formula*, dostupno na http://www.bitrak.org/tonimilun/Cardano%20i%20Ferrari%20formula%20za%20jednadzbe%20treceg%20i%20cetvrtog%20stupnja.pdf (travanj 2016.)

[13] Nemeth T., Stajčić G., *Matematika 8*, udžbenik i vježbenica za osmi razred osnovne škole, Profil, Zagreb, 2010.

[14] Paić, G., Bošnjak, Ž., Čulina, B., *Matematički izazovi 8*, udžbenik za osmi razred osnovne škole, Alfa, Zagreb, 2014.

[15] Pavković, B., Veljan, D., *Elementarna matematika*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992.

[16] Scitovski R., *Numerička matematika*, dostupno na http://www.mathos.unios.hr/nm/materijali/Num.PDF (ožujak 2016.)

Sažetak

U ovom radu proučavali smo pojam polinoma i njegov razvoj kroz osnovnoškolsko, srednjoškolsko i visokoškolsko obrazovanje. Polinomi se najprije spominju u sedmom razredu osnovne škole kad se obrađuje linearna funkcija. Zatim se u osmom razredu obrađuje kvadratna funkcija, tj. polinom drugog stupnja. S obradom polinoma drugog stupnja nastavlja se u drugom razredu srednje škole. Polinomi višeg stupnja se obrađuju na kraju četvrtog razreda srednje škole, praćenjem toka funkcije pomoću diferencijalnog računa. U visokoškolskom obrazovanju, nadograđuje se i produbljuje znanje o polinomima te se dokazuju mnogi teoremi o polinomima koji se zatim koriste pri rješavanju zadataka. Osim što smo opisali razvoj polinoma kroz obrazovanje, uočili smo mnoge primjene polinoma i njihovu upotrebu u svakodnevnom životu. U zadacima smo ilustrirali kako se, koristeći znanje o polinomima, može pojednostaviti račun u naizgled kompliciranim zadacima.

Summary

In this paper we have examined the concept of polynomial and its development through primary school, secondary school and university education. Polynomials are first mentioned in the seventh grade of primary school when a linear function is taught. It is followed by a quadratic function, i.e., a polynomial of the second degree which is taught in eighth grade and that continues in the second grade of secondary school. Polynomials of higher degrees are taught at the end of the fourth grade of secondary school when the students draw a graphic representation of a function using the differential calculus. The knowledge of polynomials is expanded and deepened in university education when many theorems are being proven and then used to solve tasks. Apart from describing the development of polynomials through education, we have noticed many applications of polynomials and their use in everyday life. We have illustrated how the knowledge of polynomials can be used to simplify the calculus in seemingly complicated tasks.

Životopis

Rođena sam u Slavonskom Brodu, 23.11.1992. godine. Osnovnu školu "Blaž Tadijanović" sam upisala 1999. godine, a njenim završetkom 2007. godine upisala sam opći smjer gimnazije "Matije Mesić" u Slavonskom Brodu. Nakon završene srednje škole upisala sam Preddiplomski sveučilišni studij Matematika; nastavnički smjer na Matematičkom odsjeku Prirodoslovnog - matematičkog fakulteta u Zagrebu. Završetkom Preddiplomskog sveučilišnog studija te stjecanjem prvostupničke diplome 2014. godine upisala sam Diplomski sveučilišni studij Matematika; nastavnički smjer na istom fakultetu.