Geometrija kugle i sfere

Korać, Ružica

Sveučilište u Zagrebu
Prirodoslovno-matematički fakultet
Matematički odsjek

Ružica Korać

GEOMETRIJA KUGLE I SFERE

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc.dr.sc. Maja Starčević

Zagreb, rujan 2015.

Svaki dan je prilika za promjenu!
Ovo izreka je posebice obilježila nekoliko posljednjih mjeseci moga života. Zahvaljujem se svima koji su bili uz mene i podnijeli sve moje velike promjene u ovom razdoblju, posebice mojoj prijateljici Kristini koja je uvijek blizu da pruži podršku i prijateljski savjet. Velika hvala mojoj majci koja mi je uvijek podrška, čak i za odgađanje rokova, te, ponajprije za to što je shvatila kako ni ja nisam tako čvrsta kako mogu glumiti. Nikad nije kasno. Zahvala mojoj dragoj prijateljici Ani, koja je bez obzira na svoju bolest ostala uvijek velika podrška slušajući moje djetinjaste probleme.

Sadržaj

Sadržaj **3**

Uvod **5**

1 Kugla **7**
1.1 Kugla 7
1.2 Dijelovi kugle 9

2 Sfera **24**
2.1 Općenito o sferi 24
2.2 Presjek sfere i ravnine 24
2.3 Kružnice sfere 27
2.4 Međusobni položaj sfera 30
2.5 Opisana i upisana sfera tetraedra 35
2.6 Površina sfere 38
2.7 Dijelovi sfere 40

3 Sferni koordinatni sustav **43**
3.1 Veza pravokutnih i sfernih koordinata 43
3.2 Zamjena varijabla 44

4 Sferna geometrija **48**
4.1 Geometrija sfere 48
4.2 Sferni mnogokut 49
4.3 Polarni trokut 53
4.4 Površina sfernog trokuta 55

Bibliografija **57**

Sažetak **58**

Summary **59**

Životopis **60**

Uvod

Zemlja na kojoj živimo podsjeća nas na kuglu, iako ne potpuno pravilnu, a njena površina na kojoj se nalazi ljudska populacija može se, u tom slučaju, poistovjetiti sa sferom. Stoga geometrija kugle i sfere ima svoju široku primjenu u području znanosti vezanima za Zemlju, dakle, u geografiji, geologiji i geodeziji. Osim Zemlje, kugle često susrećemo u sportu. Košarkaška, nogometna, rukometna lopta, te teniska loptica imaju oblik kugle. Nadalje, primijetimo da je razno voće i povrće (jabuka, šipak, kupus, kelj, rajčica) oblikovano nalik kugli. Sferne oblike možemo doista naći na raznim mjestima u prirodi, te se, zbog ljudske znatiželje, javlja potreba za njihovim opisivanjem.
U prvome poglavlju ovoga rada proučavat ćemo kuglu i njene dijelove. Definirat ćemo osnovne pojmove vezane uz kuglu, te na nekoliko načina dokazati formule za volumen kugle i njenih dijelova, odnosno kuglinog odsječka, isječka i sloja. Pri tome ćemo koristiti Cavalijerijev princip, integriranje, Simpsonovo pravilo, te mnoge teoreme poznate iz planimetrije.
U drugom poglavlju ćemo obraditi pojam sfere, promatrati njene presjeke sa ravninom, posebno slučajeve gdje u presjeku dobivamo kružnicu. Spomenut ćemo također specijalan slučaj gdje ravnina samo dodiruje sferu, te ju, slično kao što u planimetriji pravac koji dodiruje kružnicu nazivamo tangentom, u geometriji sfere nazivamo tangencijalnom ravninom. Zatim ćemo opisati u kakvom sve odnosu mogu biti sfere, te pokazati da je sfera određena sa četiri točke koje se ne nalaze u istoj ravnini. Zadnji dio ovoga poglavlja posvećen je oplošju sfere i njenih dijelova, sferne kalote i zone, odnosno oplošju već spomenutih dijelova kugle.
Treći dio rada govori o sfernom koordinatnom sustavu koji uvodimo pomoću zadanog pravokutnog koordinatnog sustava.
Zadnje poglavlje govori o geometriji na sferi, gdje uvodimo pojam sferne dužine, dijametralnih točaka, sfernog dvokuta, trokuta i poligona, te se kasnije bavimo uglavnom problemima sfernog trokuta. Pokazujemo da kod sfernog trokut također vrijede neka pravila za zbroj stranica, odnosno zbroj kutova u trokutu. Iz planimetrije nam je poznato pravilo nejednakosti trokuta, koje se provlači i u sfernoj geometriji. Na kraju uvodimo pojam polarnog trokuta koji nam kasnije koristi

za izračun površine sfernog trokuta.

Poglavlje 1

Kugla

1.1 Kugla

Prostor možemo promatrati kao skup točaka koje nazivamo elementima prostora. Kugla, geometrijsko tijelo koje promatramo u ovome poglavlju, je podskup prostora. Intuitivno nam je poznat pojam kugle, pa ćemo je i pobliže korektno matematički definirati, isto kao i njene osnovne dijelove.

Definicija 1.1.1. ***Kugla*** *je skup točaka ravnine koje su od neke čvrste točke O udaljene najviše za neku određenu duljinu. Točka O naziva se* ***središte*** *ili* ***centar*** *kugle, a dužina koja spaja središte sa najudaljenijom točkom kugle naziva se* ***polumjer*** *kugle. Dužina koja spaja dvije rubne točke kugle i prolazi njenim središtem naziva se* ***promjer*** *kugle.*

Napomena 1.1.2. *Duljinu polumjera ćemo, radi jednostavnosti, također zvati polumjer.*

Budući da je kugla geometrijsko tijelo, možemo izmjeriti njen volumen. S ciljem otkrivanja volumena kugle, navest ćemo sljedeći teorem koji nazivamo Cavalierijev princip.

Teorem 1.1.3 (Cavalierijev princip)**.** *Neka se dva geometrijska tijela nalaze između dvije paralelne ravnine. Ako presjeci ta dva tijela s proizvoljnom ravninom paralelnom zadanima imaju jednake površine, tada geometrijska tijela imaju jednake volumene.*

Kako bi došli do volumena kugle, trebamo pokazati da valjak polumjera i visine R iz kojega je odstranjen stožac polumjera i visine R ima jednak volumen kao i polukugla polumjera R.

Definicija 1.1.4. *Ako ravnina prolazi središtem kugle, dijeli kuglu na dvije polovice koje se nazivaju* ***polukugle****.*

Poznato je da se volumen valjka kojemu je polumjer baze R, a visina v računa formulom $V = R^2 v\pi$, a volumen stošca po formuli $V = \frac{1}{3}R^2 v\pi$, gdje je R polumjer baze stošca, a v duljina visine.

Teorem 1.1.5. *Odstranimo li iz valjka polumjera R i visine R uspravni stožac istog polumjera i visine, dobit ćemo tijelo čiji je volumen jednak volumenu polukugle polumjera R.*

Dokaz. Pomoću Cavalierijevog principa pokazat ćemo istinitost ove tvrdnje.
Neka je stožac postavljen tako da mu se baza podudara s jednom bazom valjka, a vrh mu se nalazi u središtu druge baze valjka. Postavimo li jednu bazu valjka bez stošca, kojoj pripada vrh stošca, i bazu polukugle u istu ravninu Π, te ih na udaljenosti x od ravnine Π presiječemo ravninom ρ usporednom ravnini Π, presjek kugle i ravnine bit će krug polumjera r, a presjek valjka bez stošca kružni vijenac kojemu je vanjski rub kružnica polumjera R, a unutarnji rub kružnica polumjera x. Polumjer r presjeka kugle ravninom Π možemo zapisati koristeći polumjer R i visinu x, odnosno

$$r^2 = R^2 - x^2.$$

Prisjetimo se da tražimo površine presjeka ovih dvaju tijela ravninom ρ.
Površina presjeka polukugle ravninom ρ je $P_1 = r^2\pi$.
Površinu presjeka valjka bez stošca ravninom ρ dobit ćemo kao razliku površine presjeka valjka i stošca ravninom ρ

$$P_2 = R^2\pi - x^2\pi = R^2\pi - R^2\pi + r^2\pi = r^2\pi.$$

Vidimo da su površine ovih dvaju presjeka jednake, pa prema Cavalierijevom principu zaključujemo da su volumeni dvaju promatranih tijela jednaki.
Volumen valjka bez stošca, odnosno polukugle dobit ćemo kao razliku volumena valjka i stošca

$$V = R^3\pi - \frac{1}{3}R^3\pi = \frac{2}{3}R^3\pi.$$

□

Korolar 1.1.6. *Volumen kugle dvostruko je veći od volumena polukugle, odnosno:*

$$V = \frac{4}{3}R^3\pi.$$

1.2 Dijelovi kugle

Presiječemo li kuglu ravninom te promatramo samo jedan dio prostora podijeljen ravninom, dobit ćemo neke dijelove kugle čiji volumen i oplošje također možemo izračunati. Definirajmo spomenute dijelove kugle.

Definicija 1.2.1. *Tijelo koje od kugle odsijeca ravnina naziva se* ***kuglin odsječak*** *ili* ***segment****. Krug u kojem ravnina siječe kuglu nazivamo* ***bazom (osnovkom)*** *odsječka, a udaljenost baze od njoj paralelne ravnine, tangencijalne na odsječak, nazivamo* ***visinom*** *kuglinog odsječka.*

Koristeći račun s integralima doći ćemo do volumena kuglinog odsječka.

Teorem 1.2.2 (Volumen kuglinog odsječka)**.** *Volumen kuglinog odsječka jednak je*

$$V = v^2\left(R - \frac{v}{3}\right)\pi,$$

pri čemu je R polumjer kugle, a v visina odsječka.

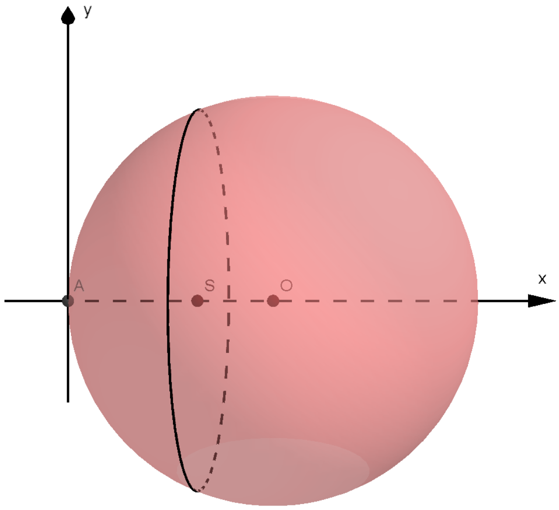
Dokaz. Kuglu možemo formirati puštajući krug $(x - R)^2 + y^2 = R^2$ da rotira oko x-osi. Odsječak se dobiva rotacijom dijela kruga koji se nalazi lijevo od pravca $x = v$ (Slika 1.1). Tada formulu za volumen kružnog odsječka možemo pronaći integriranjem. Prije toga ćemo izraziti veličinu y iz jednadžbe kružnice

$$y = \sqrt{2xR - x^2}.$$

Slijedi računanje volumena integriranjem:

$$V = \int_0^v \pi y^2 dx$$

$$= \pi \int_0^v \left(\sqrt{2xR - x^2}\right)^2 dx$$



Slika 1.1: Kugla smještena u koordinatni sustav

$$= \pi \int_0^v \left(2xR - x^2\right) dx$$

$$= \pi \left(x^2 R - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^v$$

$$= \left(v^2 R - \frac{v^3}{3}\right)\pi$$

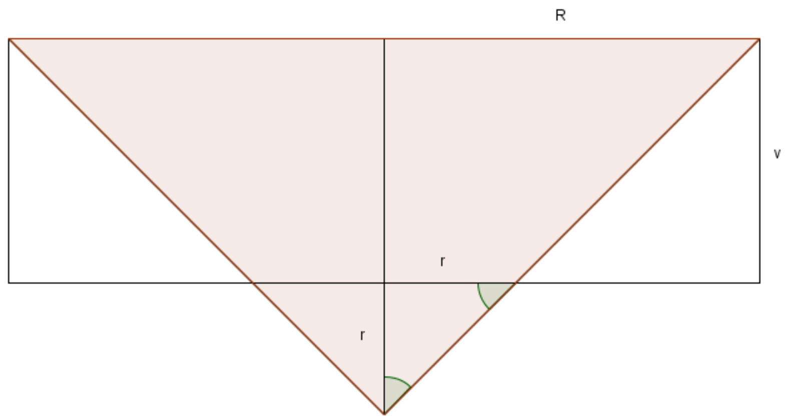
$$= v^2 \left(R - \frac{v}{3}\right)\pi.$$

□

Volumen odsječka izračunali smo analitički te koristeći integralni račun. Možemo ga izračunati elementarnije, koristeći istu činjenicu koju smo koristili kada smo računali volumen kugle, odnosno polukugle, dakle pomoću Cavalierijevog principa.

Teorem 1.2.3 (Volumen kuglinog odsječka)**.** *Kuglin odsječak visine v i polumjera kugle R ima volumen jednak volumenu valjka visine v i polumjera baze R bez krnjeg stošca visine v, te polumjera baza $R - v$ i R.*

Dokaz. Postavimo polukuglu polumjera R i valjak visine R i polumjera R tako da im baze pripadaju ravnini Π. Iz valjka odstranimo stožac visine R i polumjera



Slika 1.2: Osni presjek valjka bez krnjeg stošca

R postavljen tako da mu vrh pripada toj ravnini, nalazi se u središtu baze valjka, a baza mu se podudara s drugom bazom valjka. Zatim presiječemo ta dva tijela ravninom paralelnom Π na udaljenosti v od vrha polukugle. Na taj način dobivamo kuglin odsječak visine v i valjak bez krnjeg stošca polumjera baza R i r, te visine v. Analogno, kao u dokazu Teorema 1.1.5, koristeći Cavalijerijev princip dokazujemo da tijela imaju jednake volumene.
Dakle, kako bi dobili volumen kuglinog odsječka, izračunat ćemo volumen valjka bez krnjeg stošca. Jedna baza krnjeg stošca ima polumjer R, a druga r, i pritom vrijedi

$$r = R - v.$$

Naime, navedenu jednakost dobili smo iz jednakokračnog trokuta čiji su kutovi označeni na Slici 1.2, a stranice su mu duljine r.
Prema tome, volumen odsječka kugle polumjera R i visine v jednak je:

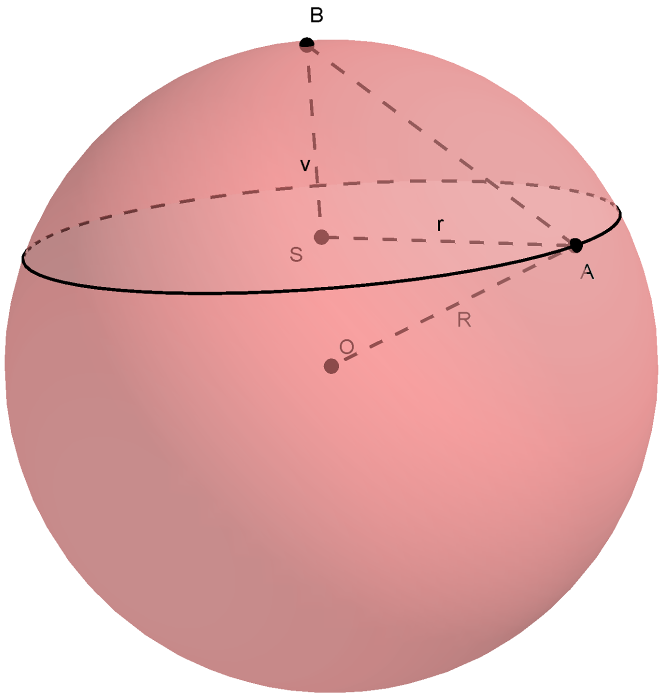
$$\begin{aligned} V &= R^2 v\pi - \frac{v}{3}\left(R^2 + r^2 + Rr\right)\pi \\ &= v\left(R^2 - \frac{1}{3}(R^2 + (R-v)^2 + R(R-v))\right)\pi \\ &= v\left(R^2 - \frac{1}{3}(R^2 + R^2 - 2Rv + v^2 + R^2 - Rv)\right)\pi \\ &= v\left(R^2 - R^2 + Rv - \frac{v^2}{3}\right)\pi \\ &= v^2\left(R - \frac{v}{3}\right)\pi. \end{aligned}$$

□

Korolar 1.2.4. *Volumen kuglinog odsječka glasi*

$$V = \frac{v}{6}\left(v^2 + 3r^2\right)\pi,$$

pri čemu je v visina, a r polumjer baze kuglinog odsječka.



Slika 1.3: Kuglin odsječak

Dokaz. Promotrimo Sliku 1.3. Primjenom Pitagorinog teorema dobivamo

$$r^2 + (R - v)^2 = R^2,$$

iz čega slijedi

$$Rv = \frac{r^2}{2} + \frac{v^2}{2},$$

odnosno

$$R = \frac{r^2}{2v} + \frac{v}{2}.$$

Prema Teoremu 1.2.2 dobivamo da je volumen odsječka kugle jednak:

$$V = v^2\left(\frac{v^2 + r^2}{2v} - \frac{v}{3}\right)\pi$$

$$= v^2\left(\frac{3v^2 + 3r^2 - 2v^2}{6v}\right)\pi$$

$$= \frac{v}{6}\left(v^2 + 3r^2\right)\pi.$$

□

Ako iz kugle izvadimo uspravan stožac s vrhom u središtu kugle i kuglin odsječak kojemu se baza podudara s bazom stošca, dobivamo dio kugle koji ćemo definirati u daljnjem tekstu.

Definicija 1.2.5. ***Kuglin isječak*** *je geometrijsko tijelo nastalo rotacijom kružnog isječka oko njegove osi simetrije.*

Sada ćemo izračunati volumen isječka, ali prije toga ćemo ponoviti Euklidov poučak poznat iz ravninske geometrije.

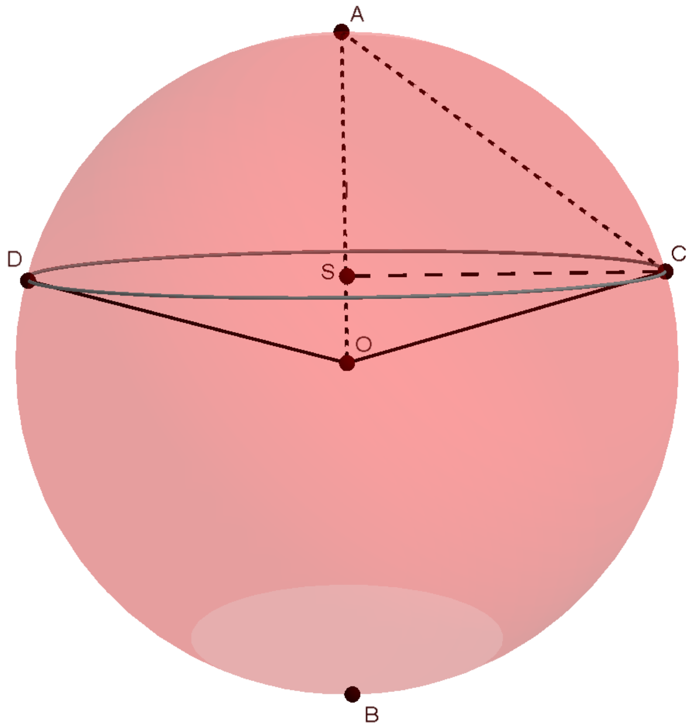
Teorem 1.2.6 (Euklidov poučak)**.** *Neka je zadan pravokutan trokut $\triangle ABC$ sa pravim kutom pri vrhu C. Neka je visina v spuštena iz vrha C, a N nožište navedene visine. Ako je $|AN| = q$, $|BN| = p$, vrijedi*

$$v = \sqrt{pq},$$
$$a = \sqrt{cp},$$
$$b = \sqrt{cq}.$$

Teorem 1.2.7 (Volumen kuglinog isječka)**.** *Volumen isječka kugle polumjera R i visine pripadnog odsječka v jednak je*

$$V = \frac{2}{3}R^2 v\pi.$$

Dokaz. Na Slici 1.4 promatramo kružni isječak sastavljen od kružnog odsječka baze polumjera baze $|CS|$ i visine $|AS|$ i stošca baze polumjera baze $|CS|$ i visine $|OS|$. Prema tome, volumen mu možemo izračunati zbrojimo li volumene ova dva tijela.



Slika 1.4: Kuglin isječak

Neka je r polumjer baze kružnog odsječka, a x visina stošca.
Dakle,

$$x = R - v.$$

Iz Teorema 1.2.6 slijedi

$$r^2 = (2R - v)v.$$

Volumen isječka je, dakle, jednak:

$$\begin{aligned}
V &= \frac{1}{3}r^2 x\pi + \frac{1}{6}v(v^2 + 3r^2)\pi \\
&= \frac{1}{6}\Big(2(2R - v)v(R - v) + v(v^2 + 3(2R - v)v)\Big)\pi \\
&= \frac{1}{6}\Big((4Rv - 2v^2)(R - v) + v(v^2 + 6Rv - 3v^2)\Big)\pi \\
&= \frac{1}{6}\Big(4R^2v - 4Rv^2 - 2Rv^2 + 2v^3 + v^3 + 6Rv^2 - 3v^3\Big)\pi \\
&= \frac{1}{6} \cdot 4R^2 v\pi
\end{aligned}$$

$$= \frac{2}{3}R^2 v\pi.$$

□

Na početku potpoglavlja smo promatrali dio kugle dobiven presijecanjem kugle jednom ravninom. U nastavku ćemo promatrati dio kugle između dvije ravnine.

Definicija 1.2.8. *Dio kugle koji se nalazi između dvije paralelne ravnine naziva se* ***kuglin sloj****. Krugove koji su presjeci tih paralelnih ravnina i kugle nazivamo* ***bazama****, a udaljenost tih dviju baza nazivamo* ***visinom*** *kuglinog sloja.*

Teorem 1.2.9 (Volumen kuglinog sloja)**.** *Neka su* r, r' *polumjeri baza kuglinog sloja, a* v *udaljenost baza. Tada je volumen kuglinog sloja jednak*

$$V = \frac{v}{6}\left(v^2 + 3r^2 + 3r'^2\right)\pi.$$

Dokaz. Promotrimo Sliku 1.5.
Neka su Π i ρ dvije paralelne ravnine kojima pripadaju baze kuglinog sloja, $\overline{AB}$ promjer okomit na njih i siječe ih u točkama S i S'. Neka je $|AS| = a, |AS'| = b$. Tada je

$$v = b - a.$$

Neka su r i r' redom polumjeri baza kuglinog sloja povučeni iz središta S i S'. Ako je R polumjer kugle, volumen kuglinog odsječka visine $|AS|$ jednak je

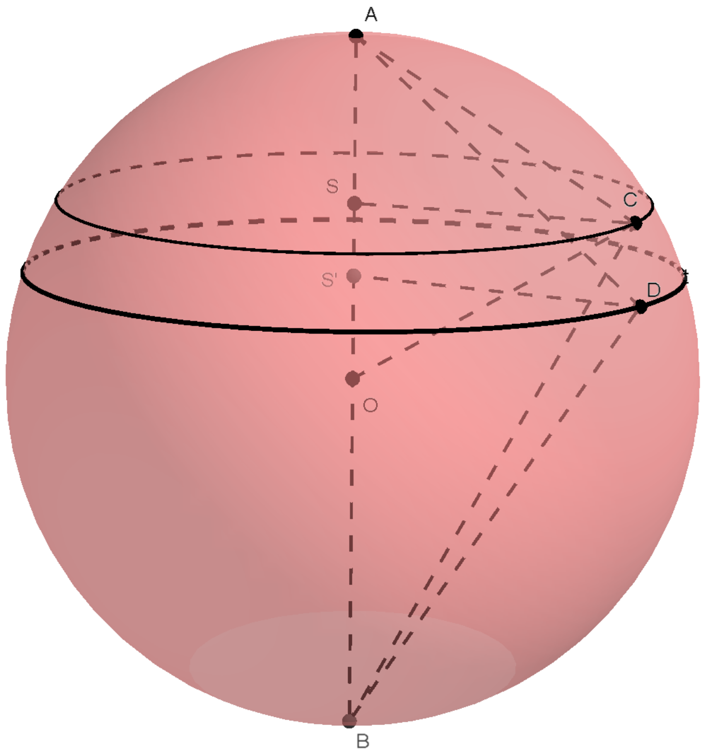
$$V_1 = a^2\left(R - \frac{a}{3}\right)\pi,$$

a volumen kuglinog odsječka visine $|AS'|$ jednak je

$$V_2 = b^2\left(R - \frac{b}{3}\right)\pi.$$

Neka je C bilo koja točka na rubu baze sloja sa središtem u S, a D bilo koja točka sa središtem u S'. Uočimo da je kut $\angle ACB$ obodni kut nad promjerom $\overline{AB}$, pa primjenom Talesovog teorema slijedi da je kut $\angle ACB$ pravi kut, što povlači da je trokut $\triangle ACB$ pravokutan. Analogno, uočimo da je kut $\angle ADB$ obodni kut nad promjerom $\overline{AB}$. Ponovno primjenom Talesovog teorema slijedi da je $\angle ADB$ pravi, što povlači da je trokut $\triangle ADB$ pravokutan. Primijenimo Euklidov teorem u navedenim pravokutnim trokutima:

$$|AC|^2 = 2Ra,$$



Slika 1.5: Kuglin sloj

$$|AD|^2 = 2Rb.$$

Promatrajmo trokut $\triangle ACS$, odnosno trokut $\triangle AS'D$. Trokuti su pravokutni te primjenom Pitagorinog teorema dobivamo

$$a^2 + r^2 = 2Ra, \tag{1.1}$$

$$b^2 + r'^2 = 2Rb. \tag{1.2}$$

Zbrojimo li jednakosti (1.1) i (1.2), dobivamo

$$R(a+b) = \frac{a^2 + r^2}{2} + \frac{b^2 + r'^2}{2}.$$

Vratimo se sada na volumen kuglinog sloja. Razlika volumena dvaju kuglinih odsječaka daje nam volumen kuglinog sloja:

$$V = V_2 - V_1$$

$$= b^2\left(R - \frac{b}{3}\right)\pi - a^2\left(R - \frac{a}{3}\right)\pi$$

$$= b^2R\pi - \frac{b^3}{3}\pi - a^2R\pi + \frac{a^3}{3}\pi$$

$$= R(b^2 - a^2)\pi - \frac{1}{3}(b^3 - a^3)\pi$$

$$= R(b-a)(b+a)\pi - \frac{1}{3}(b-a)(b^2 + ab + a^2)\pi$$

$$= \frac{1}{3}(b-a)\Big(3R(a+b) - (a^2 + ab + b^2)\Big)\pi$$

$$= \frac{1}{3}(b-a)\left(\frac{3}{2}(a^2 + r'^2 + b^2 + r^2) - (a^2 + ab + b^2)\right)\pi$$

$$= \frac{1}{3}v\left(\frac{3a^2 + 3r'^2 + 3b^2 + 3r^2 - 2a^2 - 2ab - 2b^2}{2}\right)\pi$$

$$= \frac{1}{3}v\left(\frac{3r'^2 + 3r^2 + a^2 - 2ab + b^2}{2}\right)\pi$$

$$= \frac{1}{6}v\Big(3r'^2 + 3r^2 + v^2\Big)\pi.$$

□

Volumen kuglinog sloja možemo pronaći na drugi način, koristeći Simpsonovo pravilo za poliedre. Stoga ga navodimo u sljedećem teoremu.

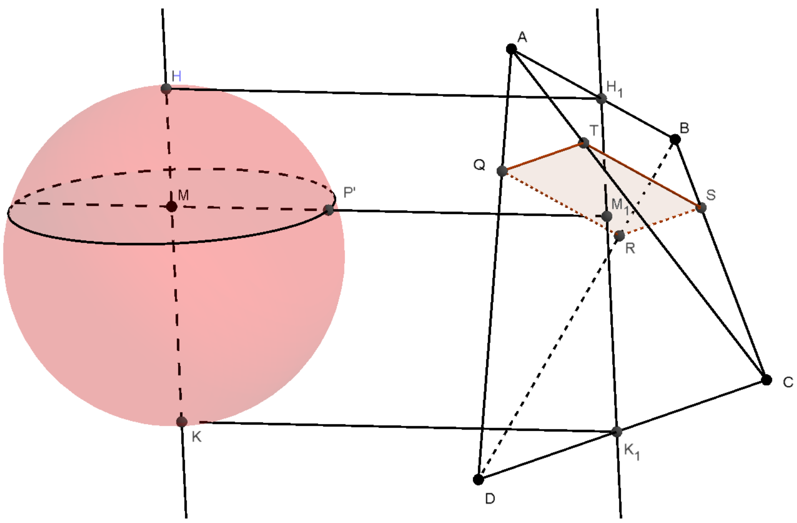
Teorem 1.2.10 (Simpsonovo pravilo za poliedar)**.** *Zadan je poliedar kojem su svi vrhovi u dvjema međusobno paralelnim ravninama čija je udaljenost jednaka h. Neka su A i B površine strana poliedra koje se nalaze u tim ravninama, te neka je M površina presjeka zadanog poliedra i ravnine koja je jednako udaljena od spomenute dvije ravnine. Tada je volumen poliedra jednak*

$$V = \frac{1}{6}h\left(A + B + 4M\right).$$

Sada ćemo doći do analognog pravila za kuglin sloj.

Teorem 1.2.11 (Simpsonovo pravilo)**.** *Ako su r, r' polumjeri baza kuglinog sloja, ρ polumjer kruga koji pripada kugli, paralelan bazama kuglinog sloja i jednako udaljen od obje baze, a v širina kuglinog sloja, volumen kuglinog sloja je jednak*

$$V = \frac{1}{6}v\left(r^2 + r'^2 + 4\rho^2\right)\pi. \tag{1.3}$$



Slika 1.6: Presjek kugle i tetraedra istom ravninom

Dokaz. Neka je Σ ravnina koja raspolavlja kuglu i sadrži promjer kugle $\overline{HK}$. Neka je Π bilo koja ravnina okomita na $\overline{HK}$ i neka ona u presjeku s kuglom daje krug polumjera r_1. Neka je $\overline{H_1K_1}$ dužina u ravnini Σ takva da je HKK_1H_1 pravokutnik.

Kroz točku H_1 povucimo dužinu $\overline{AB}$ duljine c, kroz točku K_1 dužinu $\overline{CD}$ duljine c' tako da te dvije dužine budu međusobno okomite i da vrijedi

$$\overline{AB} \perp \overline{H_1K_1},$$
$$\overline{CD} \perp \overline{H_1K_1}.$$

Točke A, B, C, D određuju tetraedar $ABCD$, a točke Q, R, S i T su presjeci ravnine Π s bridovima tetraedra $\overline{AD}$, $\overline{BD}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$. Onda je

$$RS \parallel CD,$$

$$TS \parallel AB.$$

Kako je $AB \perp CD$, vrijedi
$$RS \perp TS.$$

S obzirom da je i $TQ \parallel CD$ i $QR \parallel AB$, zaključujemo da je četverokut $QRST$ pravokutnik.
Cilj nam je odrediti c, c' tako da je površina pravokutnika $QRST$ jednaka površini kruga radijusa r_1, pa ćemo time dokazati da su za proizvoljnu, ovako postavljenu ravninu Π, njeni presjeci s kuglom i tetraedrom jednake površine. Neka je M_1 presjek ravnine Π i dužine $\overline{H_1K_1}$, $|H_1M_1| = x, |M_1K_1| = x', |H_1K_1| = d$.
Promotrimo li trokute $\triangle ABD$ i $\triangle QRD$, po $K - K$ teoremu zaključujemo da su slični, pa vrijedi sljedeće:

$$|QR| : |AB| = |DQ| : |DA| = |M_1K_1| : |K_1H_1|,$$

tj.
$$|QR| : c = x' : d,$$

odnosno
$$|QR| = \frac{cx'}{d}.$$

Analogno, promotrimo trokute $\triangle BCD$ i $\triangle BSR$, te po $K-K$ teoremu zaključujemo da su slični, pa vrijedi sljedeće:

$$|RS| : |CD| = |BR| : |BD| = |H_1M_1| : |H_1K_1|,$$

tj.
$$|RS| : c' = x : d,$$

odnosno
$$|RS| = \frac{c'x}{d}.$$

Dakle, površina pravokutnika $QRST$ jednaka je

$$P_p = \frac{cc'xx'}{d^2}. \tag{1.4}$$

Međutim, površina kruga kojeg od kugle odsijeca ravnina Π jednaka je

$$P_k = r_1^2\pi. \tag{1.5}$$

Neka je M središte, a P' proizvoljna točka ruba tog kruga. Kako je kut $\angle HP'K$ obodni kut nad promjerom kugle, slijedi da je navedeni kut pravi. Primijetimo da vrijedi $|HM| = |H_1M_1|$ i $|MK| = |M_1K_1|$.
Primjenom Euklidovog poučka možemo zapisati površinu

$$P_k = |HM||MK|\pi = xx'\pi.$$

Izjednačimo li (1.4) i (1.5), dobivamo

$$\frac{cc'xx'}{d^2} = xx'\pi,$$

odnosno

$$\pi = \frac{cc'}{d^2}.$$

Dakle, potrebno je odabrati c i c' tako da je $cc' = d^2\pi$ da bismo dobili presjeke jednakih površina.
Uz tako odabran tetraedar, prema Cavalierijevom principu slijedi da je volumen kuglinog sloja jednak volumenu sloja tetraedra, odnosno volumenu dijela tetraedra između paralelnih ravnina kojima pripadaju baze kuglinog sloja.
Sada uzimamo kuglin sloj s bazama r, r'. Promotrimo i krug polumjera ρ koji je presjek kugle i ravnine paralelne bazama sloja, jednako udaljene od njih. Presjeci tetraedra s ravninama kojima pripada taj krug i baze sloja su redom pravokutnici površina A, B, M. Primjenom Teorema 1.2.10 slijedi da je volumen sloja tetraedra jednak

$$V' = \frac{1}{6}v\,(A + B + 4M)\,.$$

Budući da smo pokazali kako su presjeci kugle i tetraedra jednakih površina, vrijedi da je volumen kuglinog sloja V jednak V', odnosno

$$V = \frac{1}{6}v\left(r^2\pi + r'^2\pi + 4\rho^2\pi\right),$$

odnosno

$$V = \frac{1}{6}v\left(r^2 + r'^2 + 4\rho^2\right)\pi.$$

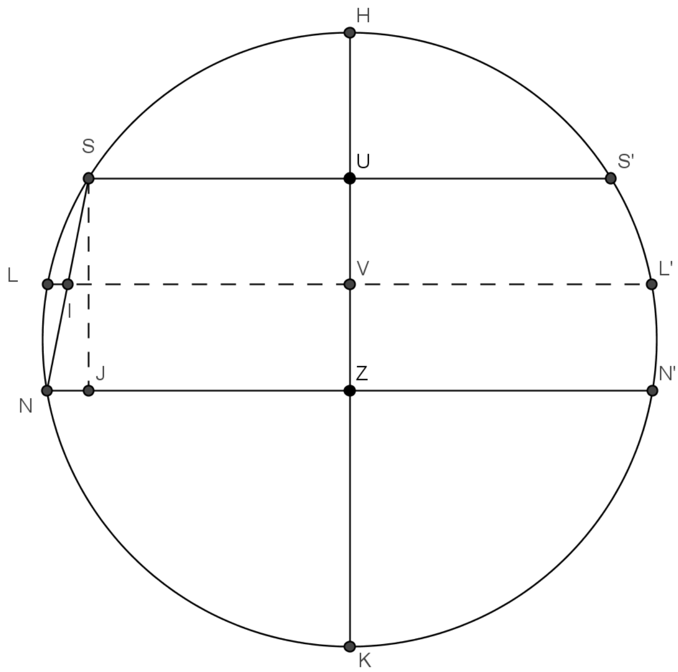
□

Definirajmo pojam potencije točke koji ćemo koristiti u dokazu sljedećeg korolara.

Definicija 1.2.12. *Neka je k kružnica i T proizvoljna točka u ravnini kružnice k. Povucimo točkom T pravac koji siječe kružnicu u točkama X i Y. Konstantni produkt $|TX| \cdot |TY|$ naziva se* ***potencija točke*** *obzirom na kružnicu k.*

Korolar 1.2.13. *Neka su* r, r' *polumjeri baza kuglinog sloja, a v udaljenost baza. Iz Simpsonovog pravila slijedi da je volumen kuglinog sloja jednak*

$$V = \frac{v}{6}\left(v^2 + 3r^2 + 3r'^2\right)\pi.$$



Slika 1.7: Prikaz presjeka kuglinog sloja $SNS'N'$

Dokaz. Promotrimo Sliku 1.7.
Neka je Σ ravnina koja raspolavlja zadanu kuglu i neka je $\overline{HK}$ promjer kugle koji pripada Σ i okomit je na baze kuglinog sloja. Dužine $\overline{SS'}$ i $\overline{NN'}$ su presjeci baza sloja, radijusa r i r', s ravninom Σ. Označimo s k krug koji je presjek kugle s ravninom paralelnom bazama sloja koja se nalazi na jednakoj udaljenosti od njih. Neka mu je polumjer ρ, a presjek s ravninom Σ mu je dužina $\overline{LL'}$. Neka je

c kružnica koja leži u ravnini Σ, a dužina $\overline{HK}$ joj je promjer. Koristeći svojstvo potencije točke na kružnicu c dobivamo

$$\begin{aligned}|LI||IL'| &= |SI||IN|,\\ (\rho - |IV|)(\rho + |IV|) &= \frac{1}{2}|SN| \cdot \frac{1}{2}|SN|,\\ \rho^2 - |IV|^2 &= \frac{1}{4}|SN|^2.\end{aligned}$$

Budući da je I polovište od $\overline{SN}$, slijedi

$$|LI||IL'| = |SI||IN|.$$

Neka su U, V, Z polovišta dužina $\overline{SS'}$, $\overline{LL'}$, $\overline{NN'}$. $\overline{IV}$ je srednjica trapeza $SNZU$, pa je

$$|IV| = \frac{1}{2}(r + r'). \tag{1.6}$$

Neka je J nožište okomice iz S na NN'. Primjenom Pitagorinog teorema dobivamo

$$|SN|^2 = |SJ|^2 + |JN|^2 = v^2 + (r' - r)^2. \tag{1.7}$$

Uvrstimo li (1.7) u (1.6), dobivamo

$$\rho^2 - \frac{1}{4}(r + r')^2 = \frac{1}{4}\left(v^2 + (r' - r)^2\right).$$

Raspisivanjem izraza dobivamo

$$v^2 = 4\rho^2 - 2r^2 - 2r'^2,$$

odnosno

$$4\rho^2 + r^2 + r'^2 = v^2 + 3r^2 + 3r'^2. \tag{1.8}$$

Vratimo (1.8) u (1.3) i dobivamo da je volumen kuglinog sloja jednak

$$V = \frac{v}{6}\left(v^2 + 3r^2 + 3r'^2\right)\pi.$$

□

Napomena 1.2.14. *Neka ravnina* Π *raspolavlja kuglu polumjera* R *i neka su baze kuglinog sloja paralelne ravnini* Π, *polumjera* r, *međusobno udaljene za duljinu* v *i na jednakoj udaljenosti od ravnine* Π. *Tada je krug koji je jednako udaljen od baza uvijek konstantan, odnosno leži u ravnini* Π. *Neka mu je polumjer* R. *Tada volumen kuglinog sloja preko Simpsonovog pravila možemo zapisati na sljedeći način:*

$$V = \frac{1}{6}v\left(r^2 + r^2 + 4R^2\right)\pi.$$

Kada se baze sve više udaljavaju od ravnine Π, *r se približava 0 i kuglin sloj postaje kugla, pa dobivamo volumen kugle*

$$V = \frac{2}{6}R \cdot (4R^2)\pi$$

$$V = \frac{4}{3}R^3\pi.$$

Poglavlje 2

Sfera

U prethodnom poglavlju smo proučili kuglu koja je geometrijsko tijelo i ima volumen. U ovome poglavlju proučavat ćemo samo njezin površinski dio, odnosno sferu.

2.1 Općenito o sferi

Definicija 2.1.1. *Plohu kojoj je udaljenost svih točaka od neke čvrste točke O jednaka duljini R nazivamo* ***sfera****. Takva točka se naziva* ***središte*** *ili* ***centar*** *sfere, a dužina koja spaja središte sa točkom na sferi naziva se* ***polumjer*** *sfere.* ***Promjer*** *sfere je dužina koja prolazi središtem sfere i spaja dvije točke sfere.*

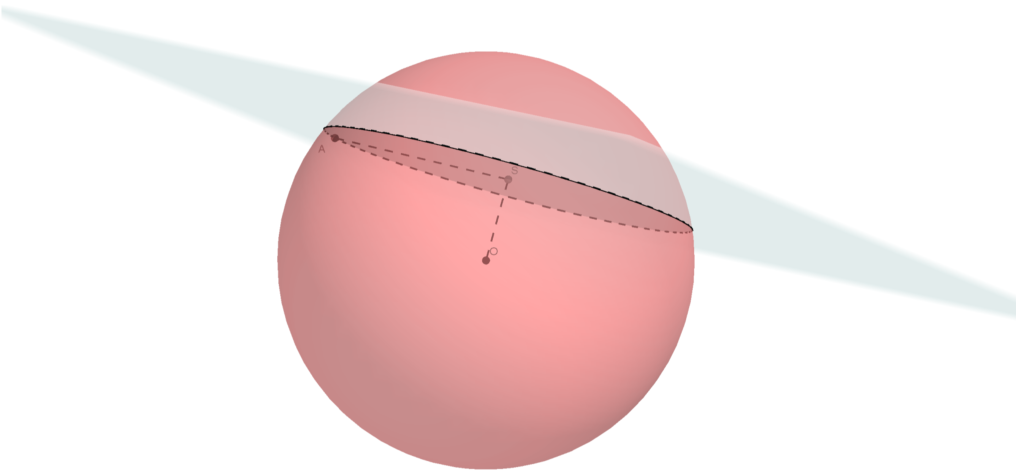
Svaka sfera je rubna ploha neke kugle. Ima polumjer i središte koji se poklapaju s polumjerom i središtem pripadne kugle.

Napomena 2.1.2. *Točke kojima je udaljenost od središta manja od polumjera sfere zovemo* ***unutarnjim*** *točkama sfere, a one kojima je udaljenost od središta veća od polumjera sfere zovemo* ***vanjskim*** *točkama sfere.*

2.2 Presjek sfere i ravnine

U poglavlju o kugli smo intuitivno često koristili činjenicu da je presjek sfere i ravnine kružnica, što ćemo sada precizno dokazati.

Teorem 2.2.1. *Svaki presjek sfere sa ravninom je ili kružnica ili točka ili prazan skup.*



Slika 2.1: Presjek sfere sa ravninom

Dokaz. Pretpostavimo da je presjek zadane ravnine i sfere neprazan skup.
Neka je O središte sfere s, R njezin polumjer i neka ravnina Π presijeca sferu s uzduž krivulje c. Treba pokazati da je krivulja c kružnica.
Neka je A proizvoljna točka krivulje presjeka, S nožište okomice iz O na ravninu Π, i neka je $A \neq S$. Dužina $\overline{OS}$ je okomita na ravninu Π, pa je kut $\angle OSA$ pravi kut. Prema Pitagorinom teoremu slijedi

$$|OA|^2 = |OS|^2 + |SA|^2.$$

Odnosno, vrijedi

$$|SA|^2 = |OA|^2 - |OS|^2.$$

Dužina $\overline{OA}$ je polumjer sfere s neovisno o poziciji točke A, $\overline{OS}$ je fiksna dužina. Stoga je duljina $|SA|$ također konstantna. Dakle, A pripada kružnici sa središtem u S polumjera $\sqrt{|OA|^2 - |OS|^2} = r$, koja pripada ravnini Π.
Pokažimo da vrijedi i obrat.
Uzmimo proizvoljnu točku A koja je presjek ravnine Π i sfere. U prethodnom dijelu dokaza vidjeli smo da ona pripada kružnici polumjera $r = \sqrt{|OA|^2 - |OS|^2}$ sa središtem u S, koje je definirano kao i prije. Nazovimo ju c. Pritom se c nalazi u ravnini Π.
Uzmimo neku točku B kružnice c i dokažimo da je i ona u presjeku sfere i ravnine Π. Kako je $c \subseteq \Pi$, imamo $B \in \Pi$. Nadalje, kako je $B \in c$, onda je

$$|SB| = \sqrt{|OA|^2 - |OS|^2},$$

pa je

$$|SB|^2 = |OA|^2 - |OS|^2.$$

Kako je $B \in \Pi$, znamo da je $OS \perp SB$, te iz Pitagorinog teorema imamo da je

$$|OB|^2 = |OS|^2 + |SB|^2 = (|OA|^2 - |SB|^2) + |SB|^2 = |OA|^2,$$

tj.

$$|OB| = |OA|.$$

Dakle, time smo dokazali da je B također na zadanoj sferi, pa je B stvarno u presjeku ravnine i sfere.
U slučaju kad ne postoji točka iz presjeka koja je različita od S zaključujemo da je upravo S presjek sfere i ravnine. Kako je OS okomit na Π, zaključujemo da je ravnina okomita na polumjer sfere s krajnjom točkom u točki presjeka ravnine i sfere.
Konačno, imamo još jedan slučaj koji trebamo izdvojiti, a to je kad se točka S podudara sa točkom O. Tada gornji račun ne funkcionira, jer nemamo $\triangle OSA$. Međutim, tada za A iz presjeka sfere i ravnine vrijedi $|OA| = R$, pa se točke iz presjeka očito nalaze na kružnici polumjera R sa središtem u O koja je u ravnini Π. Nazovimo tu kružnicu c.
Obratno, za $B \in c$, zbog $c \subseteq \Pi$ je i $B \in \Pi$, a zbog $|OB| = R$, B je sa sfere. Ponovno zaključujemo da je čitava takva kružnica traženi presjek. □

Korolar 2.2.2. *Ako ravnina prolazi središtem sfere, presjek sfere i ravnine je kružnica čiji je polumjer jednak polumjeru sfere.*

Dokaz. Tvrdnja je pokazana u dokazu Teorema 2.2.1. □

Definicija 2.2.3. *Ravnina koja siječe sferu u kružnici koja ima jednak polumjer kao i sfera naziva se* ***glavna ravnina sfere****.*

Korolar 2.2.4. *Od dvije kružnice nastale presjekom sfere ravninom koje su različito udaljene od središta sfere, bliža je središtu sfere ona većega polumjera.*

Dokaz. Neka je kružnica k sa središtem u O nastala prejekom sfere ravninom Π, i neka je$A \in k$. Pretpostavimo da ravnina Π ne prolazi središtem sfere i neka je S nožište okomice iz O na Π. Promotrimo Sliku 2.1, pravokutni trokut $\triangle ASO$ i njegove katete $\overline{OS}$ i $\overline{SA}$. Ukoliko se poveća duljina katete $\overline{OS}$, smanji se duljina katete $\overline{SA}$, tj. ukoliko se poveća udaljenost kružnice od središta sfere, smanji se njen polumjer, odnosno smanji li se udaljenost, povećava se polumjer. Polumjer kružnice je najveći kad je udaljenost ravnine koja siječe sferu do središta sfere jednaka nula, odnosno kad ravnina prolazi središtem sfere. □

Iz poznate činjenice da svaka kružnica ima tangentu, koju definiramo kao pravac koji dira kružnicu, generalizacijom dolazimo do pojma tangencijalne ravnine.

Definicija 2.2.5. *Ravninu nazivamo* **tangencijalna ravnina** *sfere ako ima jednu zajedničku točku sa sferom.*

Poznato nam je da u jednoj točki kružnice možemo povući točno jednu tangentu. Generalizacijom navedene tvrdnje dolazimo do sljedećeg korolara.

Propozicija 2.2.6. *Tangencijalna ravnina sfere u točki T sfere je ona ravnina koja je u toj točki okomita na polumjer koji spaja točku T sa središtem kugle. Prema tome, u svakoj točki sfere može se položiti samo jedna tangencijalna ravnina.*

Dokaz. Tvrdnja je pokazana u dokazu Teorema 2.2.1. □

Propozicija 2.2.7. *Zadanim pravcem p izvan sfere možemo položiti dvije tangencijalne ravnine na zadanu sferu.*

Dokaz. Neka je O središte sfere i Π ravnina koja prolazi središtem O i okomita je na pravac p. Ravnina Π siječe sferu u kružnici k, a pravac p u točki P. Položimo li tangente a i b na kružnicu k kroz točku P, dobit ćemo dvije ravnine određene pravcem a i p, odnosno pravcem b i p. Točke u kojima tangente a i b diraju kružnicu k označimo s A i B. Sada je promjer $\overline{OA}$ okomit na a. Znamo da je $\overline{OA}$ podskup od Π, a p je okomit na Π, pa je p okomit i na polumjer $\overline{OA}$. Dakle, $\overline{OA}$ je okomit i na ravninu određenu pravcima a i p. Kako ta ravnina prolazi točkom A sfere i okomita je na polumjer kojem je A krajnja točka, dobili smo jednu tangencijalnu ravninu na sferu koja prolazi pravcem p.
Analogno vrijedi i za ravninu određenu pravcima b i p. □

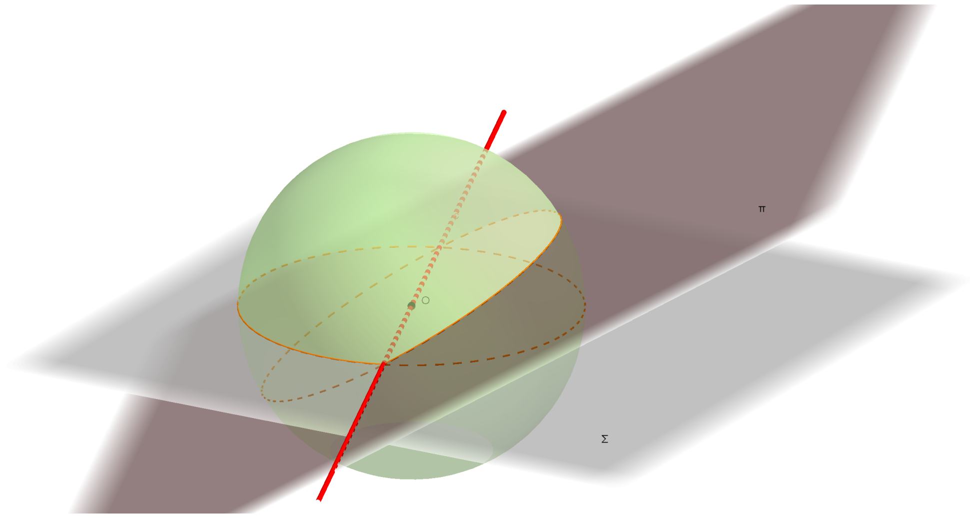
2.3 Kružnice sfere

Pokazali smo da je presjek sfere i ravnine u nekim slučajevima kružnica, te ovisno o tome prolazi li ravnina središtem sfere ili ne prolazi, ima odgovarajući naziv.

Definicija 2.3.1. *Kružnica nastala presijecanjem sfere i ravnine koja prolazi središtem sfere naziva se* **glavna kružnica** *sfere. Sve ostale kružnice nastale presijecanjem ravnine i sfere nazivaju se* **sporedne kružnice** *sfere.*

Navest ćemo neke osnovne tvrdnje koje vrijede za glavnu kružnicu.

Korolar 2.3.2. *Dvije glavne kružnice se uvijek međusobno raspolavljaju.*

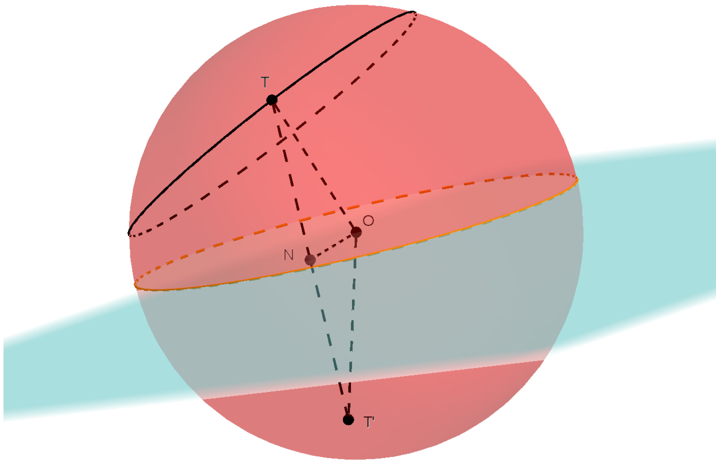


Slika 2.2: Presjek dviju glavnih kružnica

Dokaz. Neka su Π i Σ ravnine u kojima leže zadane glavne kružnice (Slika 2.2). Znamo da je presjek ravnina pravac i da obje ravnine sadrže središte sfere. Prema tome, pravac presjeka ravnina sadrži jedan promjer sfere. Krajnje točke tog promjera pripadaju zadanim glavnim kružnicama i očito ih raspolavljaju. □

Propozicija 2.3.3. *Svaka glavna kružnica sfere raspolavlja sferu.*

Dokaz. Neka je R polumjer sfere, a Π ravnina kojoj pripada zadana glavna kružnica. Ona po definiciji prolazi kroz središte sfere. Neka je T proizvoljna točka sfere, te neka je T' osnosimetrična slika točke T s obzirom na Π. Neka je N nožište okomice iz T na Π. Promotrimo trokute $\triangle TON$ i $\triangle T'ON$ (Slika 2.3). Stranica $\overline{ON}$ je zajednička stranica oba trokuta, kutovi $\angle TNO$ i $\angle ONT'$ su pravi, a stranice $\overline{TN}$ i $\overline{T'N}$ su sukladne. Prema $S-K-S$ poučku o sukladnosti trokuta, slijedi da su navedeni trokuti sukladni, tj. $|T'O| = |TO| = R$. Dakle, T' se nalazi na sferi. Tako se vidi da postoji bijekcija između dijelova sfere koje dobivamo presijecanjem ravninom Π, pa ravnina Π dijeli sferu na dvije polusfere. □



Slika 2.3: Glavna kružnica raspolavlja sferu

Propozicija 2.3.4. *Pomoću dvije zadane točke na površini sfere možemo odrediti barem jedan kružni luk glavne kružnice sfere.*

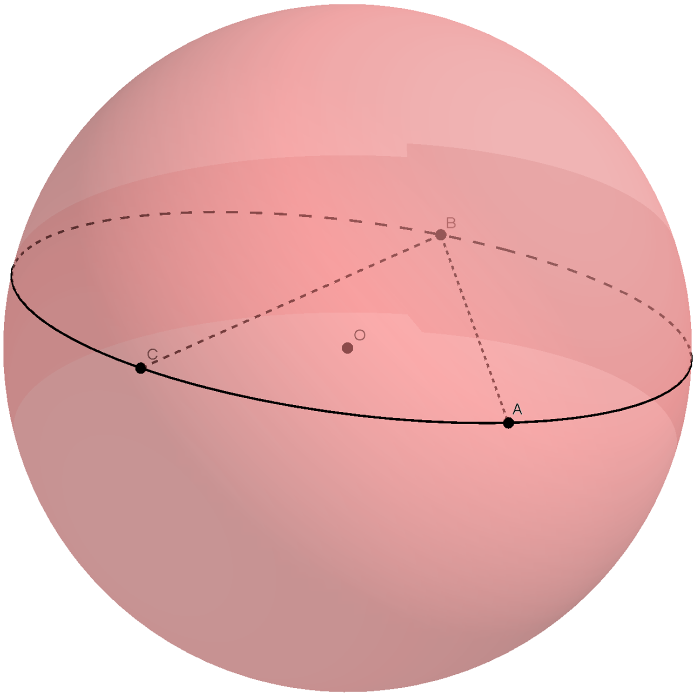
Dokaz. Ako dvije zadane točke i središte sfere ne leže na istom pravcu, onda te tri točke određuju jednu ravninu. Presjek te ravnine i sfere je glavna kružnica kojoj pripadaju zadane točke.
Ako su dvije zadane točke krajnje točke promjera sfere, onda zadane točke i središte sfere leže na promjeru. Kroz zadani promjer sfere možemo nacrtati beskonačno mnogo ravnina, prema tome kroz zadane dvije točke možemo konstruirati beskonačno mnogo glavnih kružnica.

□

Sada ćemo navesti jedan rezultat o sporednoj kružnici sfere.

Korolar 2.3.5. *Kroz tri zadane točke sfere prolazi samo jedna kružnica koja joj pripada. Tri dane točke određuju jednu i samo jednu ravninu.*

Dokaz. Neka su A, B, C tri točke na površini sfere (Slika 2.4). Pokažimo da su nekolinearne. Naime, točke pravca AB koje su različite od A i B su ili vanjske ili unutarnje točke sfere, pa C ne može pripadati pravcu AB, odnosno A, B i C su nekolinearne. Tada te tri točke određuju ravninu koja u presjeku sa sferom daje kružnicu kojoj zadane točke očito pripadaju. □



Slika 2.4: Tri zadane točke određuju jednu ravninu

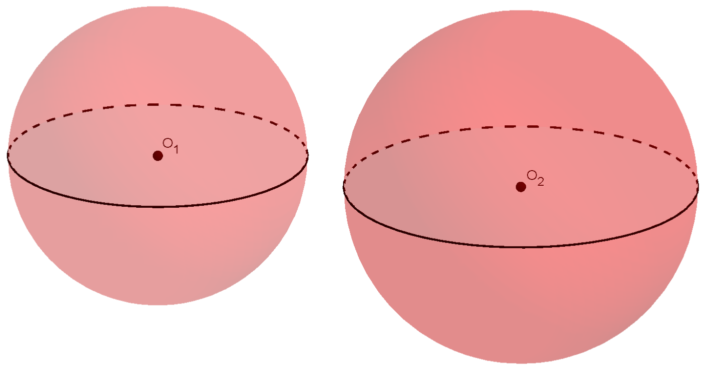
2.4 Međusobni položaj sfera

Sada ćemo proučiti međusobni položaj dviju sfera.
Razlikujemo sljedeće odnose sfera:
1) Sfere nemaju niti jednu zajedničku točku i pritom se jedna sfera nalazi unutar druge;
2) Sfere nemaju niti jednu zajedničku točku i nijedna sfera se ne nalazi unutar druge;
3) Sfere imaju jednu zajedničku točku i pritom se nijedna sfera ne nalazi unutar druge (kažemo da se sfere diraju izvana);
4) Sfere imaju jednu zajedničku točku, i jedna sfera se nalazi unutar druge (kažemo da se sfere diraju iznutra);
5) Sfere imaju više zajedničkih točaka.

Međusobne odnose dviju sfera možemo objasniti na još jedan način.
Uvedemo li ravninu koja presijeca sfere, problem presjeka sfera možemo svesti na ravninski problem preko kružnica. Na taj način možemo vidjeti kakav je odnos čitavih sfera.
Neka su zadane sfere s_1 i s_2 sa središtima O_1 i O_2. Kružnice k_1 i k_2 su redom

glavne kružnice sfera s_1 i s_2 dobivene presjekom sfera ravninom ρ. Razlikujemo sljedeće slučajeve:

1) Ako kružnice k_1 i k_2 nemaju zajedničkih točaka i nalaze se jedna izvan druge, onda se sfere s_1 i s_2 ne sijeku i kažemo da su jedna izvan druge.



Slika 2.5: Sfere se ne sijeku

2) Ako je kružnica k_1 unutar kružnice k_2, onda je svaka točka sfere s_1 unutarnja točka sfere s_2. Kažemo da sfera s_1 leži unutar sfere s_2.

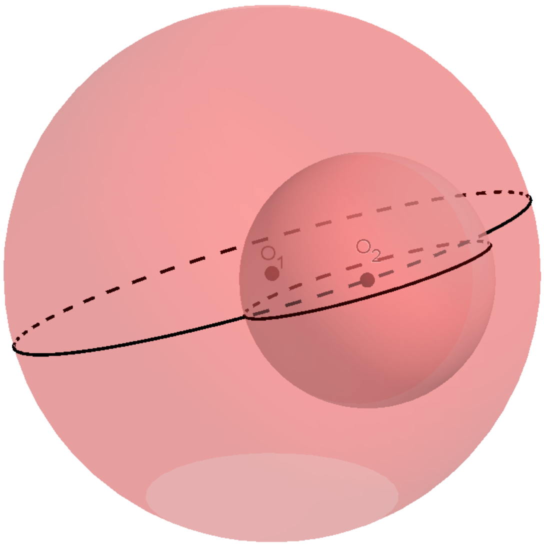
3) Ako kružnice k_1 i k_2 imaju jednu zajedničku točku i nalaze se jedna izvan druge, kažemo da se sfere s_1 i s_2 diraju izvana.

4) Ako kružnice k_1 i k_2 imaju jednu zajedničku točku i jedna se nalazi unutar druge, onda se sfere s_1 i s_2 diraju iznutra.

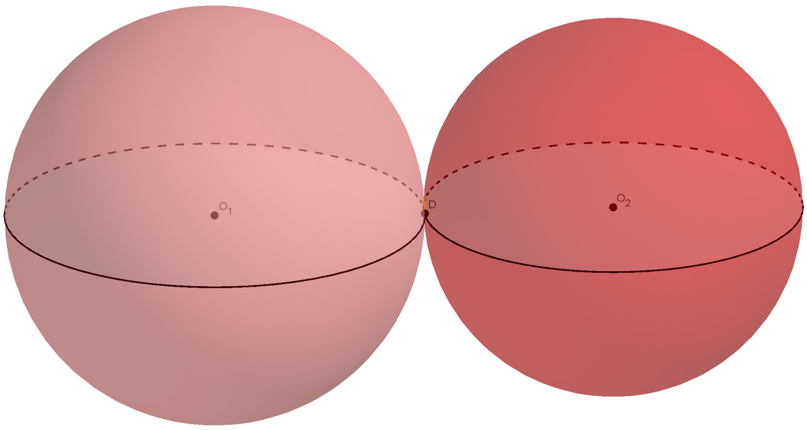
5) Ako kružnice k_1 i k_2 imaju bar dvije zajedničke točke, tada se sfere s_1 i s_2 sijeku u više od jedne točke.

Uočimo da preko polumjera sfera i udaljenosti njihovih središta možemo vidjeti kakav je njihov položaj.
Navedimo uvjete za udaljenost središta i polumjera sfera.

Teorem 2.4.1. *Dvije sfere*
► *nemaju zajedničkih točaka ako je* $|O_1O_2| > R_1 + R_2$ *i* $|O_1O_2| < |R_1 - R_2|$.
► *imaju jednu i samo jednu zajedničku točku ako je* $|O_1O_2| = R_1 + R_2$ *ili* $|O_1O_2| =$



Slika 2.6: Jedna sfera se nalazi unutar druge, ali se ne diraju

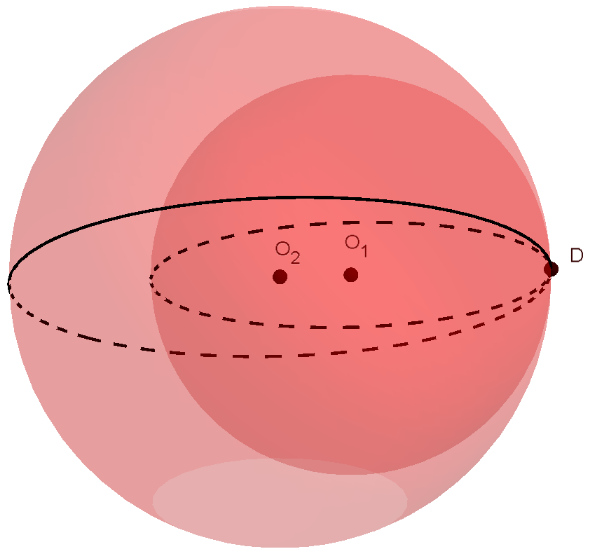


Slika 2.7: Sfere se diraju izvana u točki D

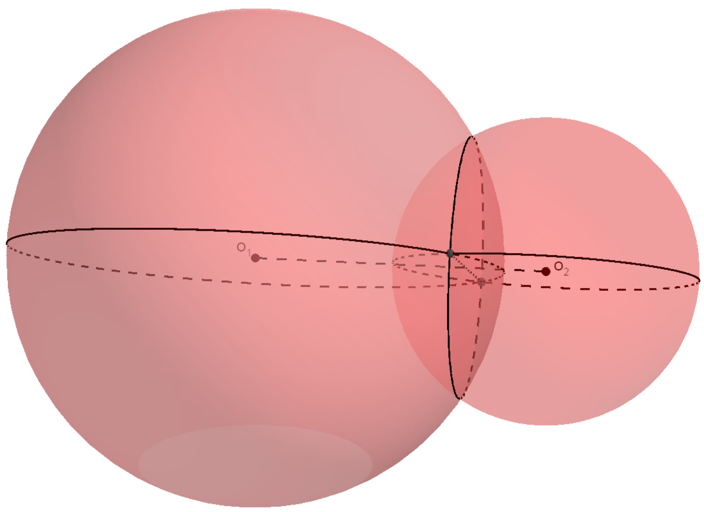
$|R_1 - R_2|$.
► *se sijeku ako je* $|O_1O_2| < R_1 + R_2$ *i* $|O_1O_2| > |R_1 - R_2|$.

Možemo precizirati kako izgleda presjek sfera u petom slučaju, što ćemo napraviti u sljedećem teoremu.

Teorem 2.4.2. *Ako se sfere sijeku u više od dvije točke, onda je njihov presjek kružnica koja leži u ravnini okomitoj na spojnicu središta tih sfera i kojoj se*



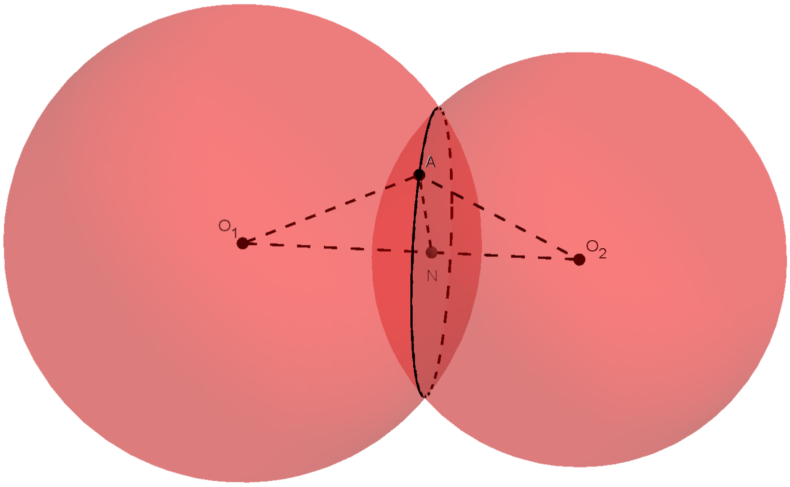
Slika 2.8: Sfere se diraju iznutra u točki D



Slika 2.9: Sfere se sijeku; presjek je kružnica

središte nalazi na toj spojnici.

Dokaz. Neka su R_1 i R_2 polumjeri sfera koje se sijeku. Uzmimo neku točku A iz presjeka sfera i neka je N nožište okomice iz A na O_1O_2 (Slika 2.10). Tada je moguće izračunati duljine $p = |O_1N|$ i $q = |O_2N|$ pomoću R_1, R_2 i $|AN|$. Iz



Slika 2.10: Presjek dviju sfera

Pitagorinog teorema, kad izrazimo $|AN|$ na dva načina, imamo

$$R_1^2 - p^2 = R_2^2 - q^2.$$

Vrijedi još i

$$p + q = |O_1O_2|.$$

Sad izrazimo q iz druge jednadžbe i ubacimo u prvu, pa dobivamo:

$$p = \frac{R_1^2 - R_2^2 + |O_1O_2|^2}{2|O_1O_2|},$$

$$q = \frac{-R_1^2 + R_2^2 + |O_1O_2|^2}{2|O_1O_2|}.$$

Dobivamo konstantne izraze koji ne ovise o izboru točke A. Tada vidimo da je položaj točke N uvijek jednak, kako god izabrali točku A u presjeku sfera. Sada je lako vidjeti da ni izraz $|AN|$ ne ovisi o izboru točke A. Označimo $r = |AN|$. Prema tome, sve točke iz presjeka leže na kružnici sa središtem u točki N, koja pripada ravnini okomitoj na O_1O_2 i polumjera je r. Tu kružnicu nazovimo k.
Obratno, uzmimo kružnicu k i proizvoljnu točku B koja joj pripada, te točku N koja je definirana kao i prije. Iz prvog dijela dokaza znamo da je

$$p^2 = R_1^2 - r^2,$$

$$q^2 = R_2^2 - r^2.$$

Primjenom Pitagorinog teorema na trokute $\triangle BO_1N$ i $\triangle BO_2N$ dobivamo sljedeće izraze

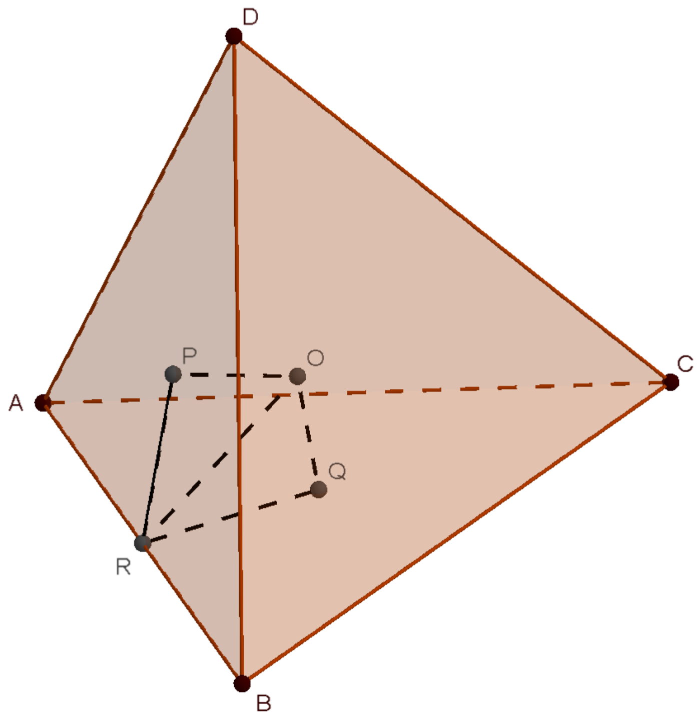
$$|O_1B|^2 = |BN|^2 + p^2 = r^2 + R_1^2 - r^2 = R_1^2,$$
$$|O_2B|^2 = |BN|^2 + q^2 = r^2 + R_2^2 - r^2 = R_2^2.$$

Dolazimo do zaključka da je $|O_1B| = R_1$ i $|O_2B| = R_2$, pa se B nalazi na obje sfere. □

2.5 Opisana i upisana sfera tetraedra

Podsjetimo se činjenice da u svaki trokut možemo upisati kružnicu, te proširimo navedenu tvrdnju na prostor.

Teorem 2.5.1. *U zadani tetraedar možemo upisati sferu.*



Slika 2.11: Tetraedru možemo upisati sferu

Dokaz. Neka je $ABCD$ zadani tetraedar.
Uzmimo ravnine koje raspolavljaju prostorne kutove između strana tetraedra koje se redom sijeku u bridovima $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$. Pokažimo da se te tri ravnine sijeku u jednoj točki, koju ćemo označiti s O.
Naime, svake dvije ravnine se sijeku u pravcu koji nije paralelan s trećom ravninom, pa presjek te tri ravnine nije neprazan. Također, svi takvi pravci presjeka su međusobno neparalelni. Spustimo okomicu iz točke O na strane ABD i ABC tako da sijeku navedene ravnine u točkama P i Q. Pritom ravnina PQO siječe AB u točki R. Iz sukladnosti trokuta $\triangle POR$ i $\triangle QOR$ slijedi da je $|OP| = |OQ|$ (Slika 2.11).
Spustimo sada okomicu iz točke O na strane ACD i BCD tako da sijeku navedene ravnine u točkama M i N. Pritom ravnina MON siječe CD u točki L. Iz sukladnosti trokuta $\triangle LOM$ i $\triangle LON$ slijedi da je $|OM| = |ON|$.
Analogno, spustimo okomicu iz točke O na strane ABC i BCD. Znamo već da one sijeku navedene ravnine u točkama Q i N. Pritom ravnina NOQ siječe BC u točki S. Iz sukladnosti trokuta $\triangle SOQ$ i $\triangle SON$ slijedi da je $|OQ| = |ON|$.
Iz

$$|OP| = |OQ|,$$
$$|OM| = |ON|,$$
$$|OQ| = |ON|$$

slijedi

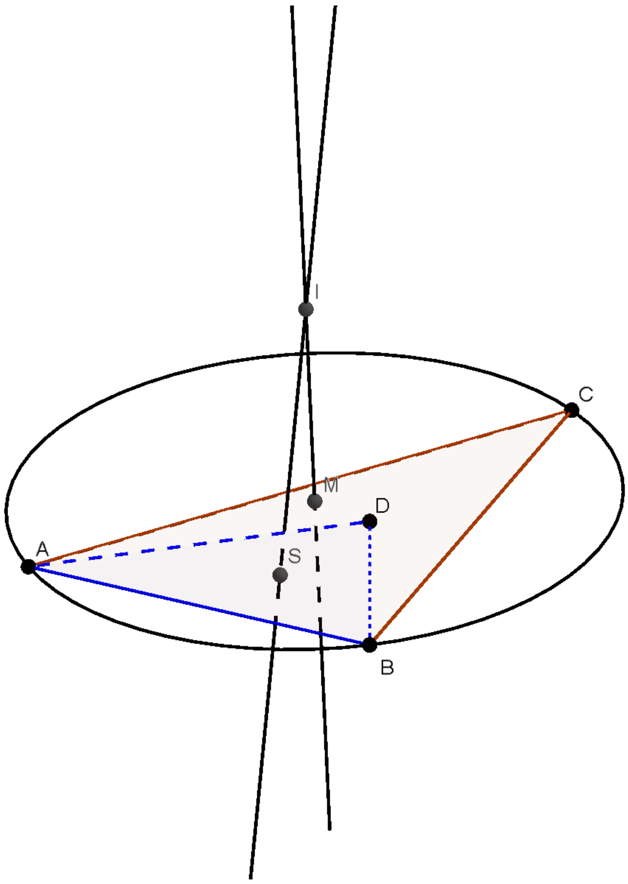
$$|OM| = |ON| = |OP| = |OQ|,$$

odnosno udaljenost točke O od svih strana tetraedra je jednaka, iz čega slijedi da je O središte tetraedru upisane sfere. □

Poznato nam je da je kružnica jedinstveno određena sa tri nekolinearne točke. Ako su zadane četiri nekomplanarne točke, imamo jedinstveno određenu sferu koja prolazi kroz te točke. Pokazat ćemo to u sljedećem korolaru.

Teorem 2.5.2. *Četiri točke koje ne leže u istoj ravnini određuju sferu.*

Dokaz. Neka su zadane četiri nekomplanarne točke A, B, C i D. Potrebno je opisati sferu kroz točke A, B, C, D. Neka je a pravac okomit na ravninu ABC koji prolazi kroz središte kružnice opisane trokutu $\triangle ABC$. Tada je a lokus svih točaka jednako udaljenih od A, B, C. Analogno, neka je b pravac okomit na ravninu ABD koji prolazi središtem kružnice opisane trokutu $\triangle ABD$. Tada je b lokus svih točaka jednako udaljenih od A, B, D. Neka je Π ravnina koja je okomita na dužinu $\overline{AB}$ i raspolavlja je. Tada pravci a i b pripadaju ravnini Π,



Slika 2.12: Sfera je određena sa četiri točke koje nisu komplanarne

i kako očito nisu paralelni, sijeku se u nekoj točki. Nazovimo ju O. Točka O jednako je udaljena od točaka A, B, C, D i jednoznačno određena. Prema tome, postoji samo jedna sfera koja prolazi kroz četiri zadane točke.

□

Korolar 2.5.3. *Svakom tetraedru se može opisati sfera.*

Dokaz. Tvrdnja je dokazana u Teoremu 2.5.2. □

Prethodni teorem i korolar možemo primijeniti na sljedećoj propoziciji.

Korolar 2.5.4. *Sfera je jednoznačno određena kružnicom k i točkom A koja ne leži u ravnini te kružnice.*

Dokaz. Iz Teorema 2.5.2 znamo da je sfera određena četirima točkama takvima da sve četiri ne leže u istoj ravnini. Budući da je svaka kružnica jednoznačno određena trima točkama koje ne leže na istom pravcu, a zadana točka A ne leži u ravnini kružnice, slijedi da je sfera jednoznačno određena tim četirima točkama. □

2.6 Površina sfere

Htjeli bismo izračunati površinu sfere, ali najveći nam problem stvara to što se sfera ne može položiti u ravninu kao, primjerice, plašt valjka i stožca. Zbog toga, kako bismo izračunali površinu sfere, uzimamo tijelo koje dovoljno dobro aproksimira kuglu, a oplošje mu znamo izračunati.

Teorem 2.6.1 (Površina sfere)**.** *Površina sfere polumjera R jednaka je*

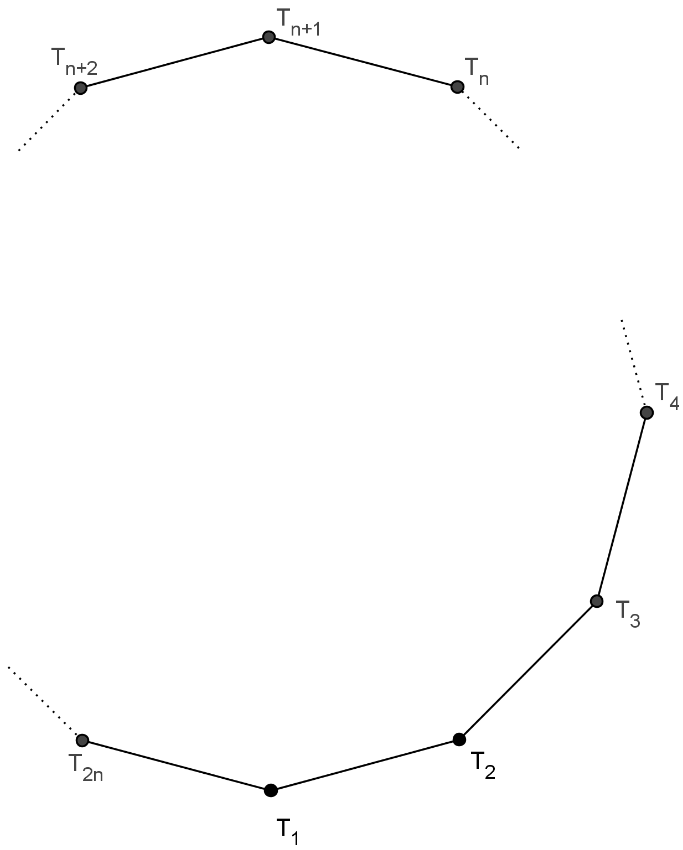
$$P = 4R^2\pi.$$

Dokaz. Upišimo u kružnicu pravilni $2n$-terokut (Slika 2.13). Za veći n kružnica je bolje aproksimirana. Rotacijom mnogokuta oko osi T_1T_{n+1} nastaje tijelo čije oplošje aproksimira površinu sfere.
To se rotacijsko tijelo sastoji od 2 stošca i $n-2$ krnjih stožaca. Prema tome, oplošje rotacijskog tijela jednako je zbroju površina plašteva svih tih stožaca.
Oplošje plašta krnjeg stošca računamo po formuli $O = s(R+r)\pi$, gdje su R i r polumjeri baza, a s duljina izvodnice. Kod klasičnog stošca jedan polumjer je jednak nuli.
Promotrimo Sliku 2.14. Proučavamo detaljnije krnji stožac nastao rotacijom dužine $\overline{T_{2n-i+1}T_{2n-i+2}}$. Polumjeri baza su r_i i r_{i+1}, a visina dobivenog krnjeg stošca je v_i. Neka je A polovište $\overline{T_{2n-i+1}T_{2n-i+2}}$, B nožište visine spuštene iz T_{2n-i+1} na $\overline{T_iT_{2n-i+2}}$, točke C i E redom polovišta dužina $\overline{T_{i+1}T_{2n-i+1}}$ i $\overline{T_iT_{2n-i+2}}$, a S središte mnogokutu opisane kružnice. Četverokut $T_{2n-i+1}T_{2n-i+2}EC$ je trapez, a $\overline{AD}$ njegova srednjica čija je duljina

$$\frac{r_i + r_{i+1}}{2}.$$

Točka A polovište je stranice $\overline{T_{2n-i+1}T_{2n-i+2}}$, pa je $|AS|$, u oznaci r, polumjer mnogokutu upisane kružnice. Promotrimo trokute $\triangle ADS$ i $\triangle T_{2n-i+1}BT_{2n-i+2}$ (Slika 2.14). Kutovi $\angle ADS$ i $\angle T_{2n-i+1}BT_{2n-i+2}$, te $\angle DSA$ i $\angle BT_{2n-i+2}T_{2n-i+1}$ su sukladni, jer su im kraci okomiti, pa prema $K-K$ poučku o sličnosti trokuta slijedi da su trokuti$\triangle ADS$ i $\triangle T_{2n-i+1}T_{2n-i+2}B$ slični, te vrijedi

$$|AD| : |T_{2n-i+1}B| = |AS| : |T_{2n-i+1}T_{2n-i+2}|,$$



Slika 2.13: $2n$-terokut bez opisane kružnice

odnosno

$$\frac{r_i + r_{i+1}}{2} : v_i = r : a,$$

iz čega je

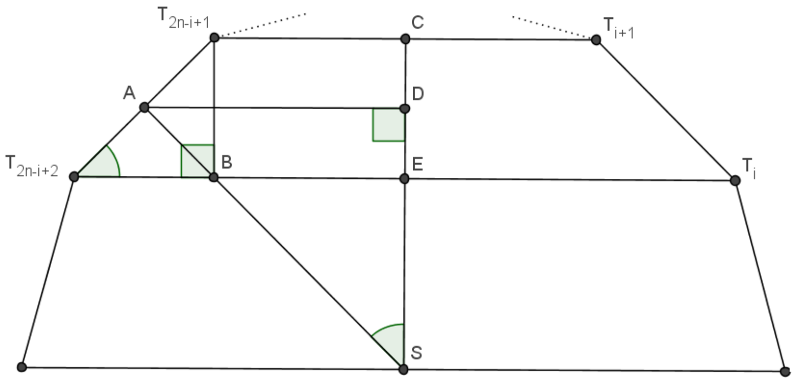
$$r_i + r_{i+1} = \frac{2rv_i}{a}.$$

Tada je površina plašta krnjeg stošca kojeg smo promatrali jednaka

$$P_i = a(r_i + r_{i+1})\pi = a\frac{2rv_i}{a}\pi = 2rv_i\pi,$$

a oplošje cijelog rotacijskog tijela je

$$\begin{aligned} P &= P_1 + P_2 + ... + P_n \\ &= 2rv_1\pi + 2rv_2\pi + ... + 2rv_n\pi \end{aligned}$$



Slika 2.14: Sukladnost trokuta po $K - K$ poučku

$$= 2r(v_1 + v_2 + ... + v_n)\pi$$
$$= 2r\pi \cdot 2R$$
$$= 4rR\pi.$$

R i r su polumjeri opisane, odnosno upisane kružnice mnogokuta. Za veći n aproksimacija je bolja, odnosno $r \to R$ kada $n \to \infty$ i rub poliedra teži u sferu, pa je površina sfere

$$P = 4R^2\pi.$$

□

2.7 Dijelovi sfere

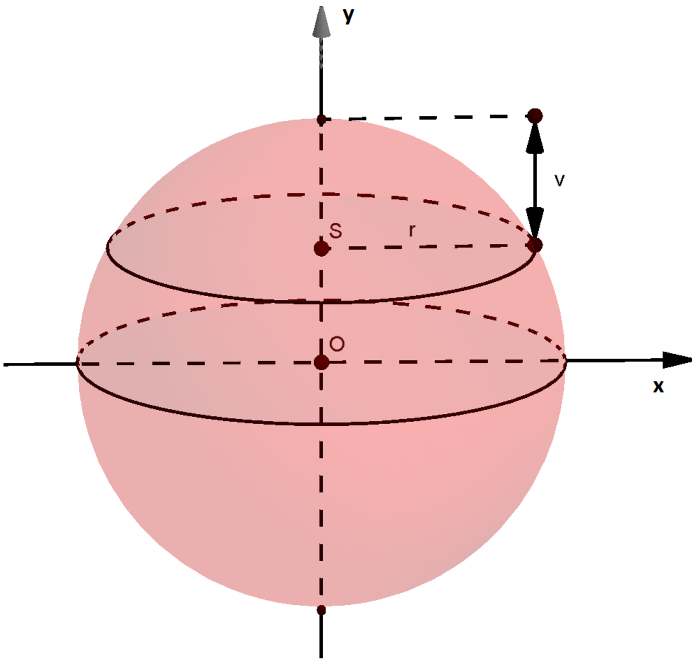
U poglavlju o kugli promatrali smo dijelove kugle dobivene presjekom kugle i ravnine. Slično tome možemo dobiti i neke dijelove sfere presiječemo li ju s jednom ili dvije ravnine.

Definicija 2.7.1. *Dio sfere određen polukuglom naziva se* ***polusfera****.*

Definicija 2.7.2. *Dio sfere na kuglinom segmentu zove se* ***kuglina kapica*** *ili* ***sferna kalota****.*

Volumen kuglinog odsječka izračunali smo koristeći integralni račun, što ćemo napraviti i za njegovu površinu.

Teorem 2.7.3 (Površina sferne kalote)**.** *Površina sferne kalote visine v i polumjera R pripadne sfere jednaka je $P = 2Rv\pi$.*



Slika 2.15: Sfera smještena u koordinatni sustav tako da joj se središte poklapa sa ishodištem koordinatnog sustava

Dokaz. Postavimo sferu u koordinatni sustav tako da se središte sfere poklapa sa ishodištem koordinatnog sustava (Slika 2.15). Sfera je ploha nastala rotacijom kružnice s jednadžbom $x^2 + y^2 = R^2$ oko $y-$osi.
Izračunat ćemo površinu kalote koristeći formulu za površinu rotacijske plohe koja općenito oglasi

$$P = \int_a^b x\sqrt{(1 + \frac{dx}{dy})^2 dy}.$$

Iz jednadžbe kružnice izrazimo x

$$x = \sqrt{R^2 - y^2},$$

pri čemu uzimamo da je $x > 0$. Računamo dalje:

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{2y}{2\sqrt{R^2 - y^2}} = -\frac{y}{x},$$

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy = \sqrt{1 + \left(-\frac{y}{x}\right)^2} dy = \sqrt{\frac{y^2 + x^2}{x^2}} dy = \frac{R}{x} dy.$$

Konačno je površina sferne kalote jednaka

$$P = 2\pi \int_{R-v}^{R} x \cdot \frac{dx}{dy} = 2\pi \int_{R-v}^{R} x \cdot \frac{R}{x} dy = 2\pi \cdot Ry|_{R-v}^{R} = 2\pi r(R - (R - v)) = 2Rv\pi.$$

□

Definicija 2.7.4. *Dio sfere određen kuglinim slojem naziva se* ***sferni pojas*** *ili* ***sferna zona****.*

Površinu sferne zone odredit ćemo tako da napravimo razliku površina dviju sfenih kalota čije se pripadne baze podudaraju s bazama sferne zone.

Teorem 2.7.5 (Površina sferne zone)**.** *Površina sferne zone visine h na sferi polumjera R jednaka je $P = 2Rh\pi$.*

Dokaz. Neka su zadane dvije sferne kalote različitih površina čije baze odgovaraju bazama sferne zone. Neka je visina kalote veće površine v_1, a visina kalote manje površine v_2. Tada je razlika visina kalota jednaka visini zone, odnosno $h = v_1 - v_2$.
Površina sferne zone jednaka je razlici površina sfernih kalota

$$P = 2Rv_1\pi - 2Rv_2\pi = 2R(v_1 - v_2)\pi,$$

$$P = 2Rh\pi.$$

□

Poglavlje 3

Sferni koordinatni sustav

Probleme određivanja volumena dijelova kugle i gibanja po sferi ponekad je lakše riješiti uvođenjem sfernog koordinatnog sustava, jer pripadne koordinate više odgovaraju geometriji te plohe.

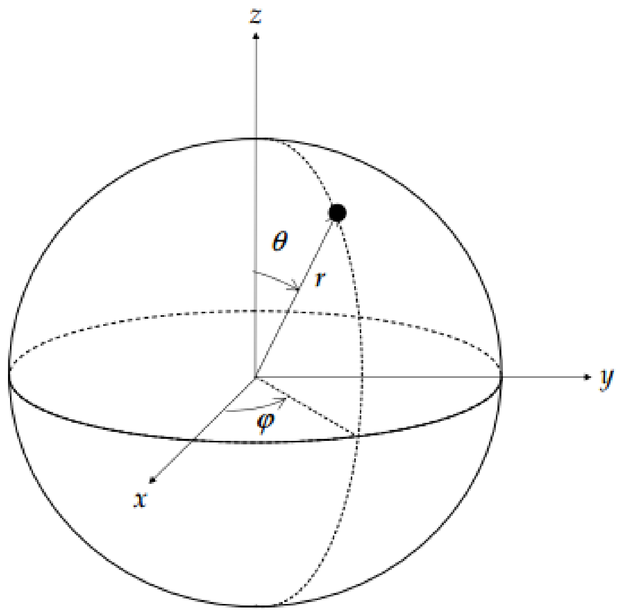
3.1 Veza pravokutnih i sfernih koordinata

Neka su u prostoru zadani pravokutni koordinatni sustav $(O; x, y, z)$. Uvodimo sferni sustav $(O; r, \theta, \varphi)$ tako da r predstavlja udaljenost zadane točke od ishodišta koordinatnog sustava, θ kut između pozitivnog dijela z-osi i pravca koji spaja ishodište i zadanu točku, a φ kut između projekcije pravca koji spaja ishodište koordinatnog sustava s točkom, na $xy-$ravninu, i pozitivnog dijela x-osi (Slika 3.1).
Veza između pravokutnih i polarnih koordinata bilo koje točke dana je sljedećim izrazima:

$$
\begin{aligned}
x(r, \theta, \varphi) &= r \sin\theta \cos\varphi, \\
y(r, \theta, \varphi) &= r \sin\theta \sin\varphi, \\
z(r, \theta, \varphi) &= r \cos\theta.
\end{aligned}
$$

Prethodni izrazi služe za prelazak iz sfernog u pravokutni sustav, a sljedeće formule za prelazak iz pravokutnog u sferni

$$
\begin{aligned}
r^2 &= x^2 + y^2 + z^2, \\
\cos\theta &= \frac{z}{r}, \\
\mathrm{tg}\varphi &= \frac{y}{x}.
\end{aligned}
$$



Slika 3.1: Veza sfernog i Kartezijevog koordinatnog sustava

Promatramo li točku u Zemljinom koordinatnom sustavu, r predstavlja udaljenost točke od središta Zemlje, kut φ je geografska dužina koja se mjeri istočno i zapadno od Greenwicha, a pomoću kuta θ možemo lako doći do geografske širine koja se mjeri sjeverno i južno od ekvatora.

3.2 Zamjena varijabla u trostrukom integralu

Neka je $Y \subset \mathbb{R}^3$ područje (u $r\theta\varphi$-koordinatnom sustavu) koje se bijektivnom transformacijom F određenom sa

$$(r, \theta, \varphi) \mapsto F(r, \theta, \varphi) = (x, y, z) = (a(r, \theta, \varphi), b(r, \theta, \varphi), c(r, \theta, \varphi),$$

preslikava u područje (u xyz-koordinatnom sustavu) $X \subset \mathbb{R}^3$. Pritom su $a, b, c : Y \to \mathbb{R}$ funkcije koje imaju neprekidne prve parcijalne derivacije. Definiramo Jacobijevu matricu

$$J_F(r, \theta, \varphi) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{bmatrix}.$$

Determinantu Jacobijeve matrice nazivamo Jacobijan.

Teorem 3.2.1. *Neka je $f : X \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija na području $X \subset \mathbb{R}^3$, a*

$$F = (a, b, c) : Y \subset \mathbb{R}^3 \to X$$

bijektivna transformacija čiji Jacobijan ne iščezava.
Tada je

$$\iiint\limits_X f(x, y, z) dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_Y f(a(r, \theta, \varphi), b(r, \theta, \varphi), c(r, \theta, \varphi)) |J_F(r, \theta, \varphi)| dr d\theta d\varphi.$$

Prethodni teorem sada ćemo primijeniti na sferne koordinate.
Uvrstimo li izraze za pretvorbu u Jacobijan, dobivamo:

$$|J_F(r, \theta, \varphi)| = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= r^2\cos^2\theta\sin\theta\cos^2\varphi + r^2\sin^3\theta\sin^2\varphi + r^2\sin\theta\cos^2\theta\sin^2\varphi + r^2\sin^3\theta\cos^2\varphi \\ &= r^2\sin^3\theta + r^2\sin\theta\cos^2\theta \\ &= r^2\sin\theta. \end{aligned}$$

Uočimo vezu između integrala iz Teorema 3.2.1 i sfernih koordinata, odnosno prethodno izračunatog Jacobijana:

$$\iiint\limits_X f(x, y, z) dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_Y f\left(a(r, \theta, \varphi), b(r, \theta, \varphi), c(r, \theta, \varphi)\right) r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$$

$$= \iiint\limits_Y f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta) r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi.$$

Primjer uporabe sfernih koordinata pokazat ćemo na sljedećem primjeru gdje ćemo računati volumen kugle, a zatim ćemo izvesti formulu za volumen kuglinog isječka.

Primjer 3.2.2. *Izračunajmo volumen kugle polumjera R koristeći trostruki integral.*

Rješenje. Koordinatni sustav je postavljen tako da mu je ishodište u središtu kugle. Tada je volumen kugle jednak

$$\begin{aligned} V &= \int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{R} r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_{0}^{\pi} \sin\theta d\theta \int_{0}^{R} r^2 dr \\ &= \varphi|_{-\pi}^{\pi}(-\cos\theta)|_{0}^{\pi}\frac{r^3}{3}|_{0}^{R} \\ &= \frac{4R^3}{3}\pi. \end{aligned}$$

Primjer 3.2.3 (Volumen kuglinog isječka)**.** *Volumen kuglinog isječka visine pripadnog odsječka v kugle polumjera R jednak je*

$$V = \frac{2R^2 v}{3}\pi.$$

Rješenje. Pokazat ćemo da vrijedi ova formula računajući trostruki integral. Ishodište koordinatnog sustava postavljamo u središte kugle O, a os simetrije isječka se nalazi na pozitivnom dijelu z-osi. Tako se mogu lako iščitati granice za pojedinu varijablu.
Neka je Π ravnina koja siječe sferu na visini v od vrha sfere A, S središte baze dobivenog kuglinog odsječka, C proizvoljna točka kružnice presjeka sfere i ravnine Π, (Slika 1.4). Kut $\angle AOC$ označimo sa ψ.
Računamo volumen:

$$\begin{aligned} V &= \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\psi}\int_{0}^{R} r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi \\ &= \varphi|_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\psi}\int_{0}^{R} r^2 \sin\theta dr d\theta \\ &= 2\pi\,(-\cos\theta)\,|_{0}^{\psi}\int_{0}^{R} r^2 dr \end{aligned}$$

$$= 2\pi\,(1-\cos\psi)\,\frac{r^3}{3}\Big|_0^R$$
$$= \frac{2R^3}{3}\,(1-\cos\psi)\,\pi.$$

Na Slici 1.4 iz trokuta $\triangle OSC$ možemo uočiti da je $\cos\psi = \frac{R-v}{R}$.
Vratimo izraz u formulu za volumen:

$$V = \frac{2R^3}{3}\cdot\frac{R-R+v}{R}\pi$$
$$= \frac{2R^2v}{3}\pi.$$

Poglavlje 4

Sferna geometrija

4.1 Geometrija sfere

Mjerimo li male udaljenosti na Zemljinoj površini, uzet ćemo da je Zemljina površina ravna, no trebamo li izmjeriti neku veću udaljenost, uzimamo da je Zemljina površina zakrivljena ploha. Tada udaljenost izračunavamo pomoću sferne geometrije.
Sferna geometrija je geometrija na kuglinoj površini, odnosno na sferi.
Sferu smo već definirali, kao i glavnu i sporednu kružnicu, pa slijede preostale definicije koje će nam biti potrebne u ovome poglavlju.

Definicija 4.1.1. *Krajnje točke svakog promjera sfere zovu se* ***suprotne*** *ili* ***dijametralne*** *točke sfere.*

Napomena 4.1.2. *Dvije glavne kružnice sfere se sijeku u točno dvije dijametralne točke.*

Definicija 4.1.3. *Neka su dane dvije točke na sferi koje nisu dijametralne. Sferna dužina određena tim točkama je manji luk između tih točaka koji pripada glavnoj kružnici sfere koju zadane točke određuju.*

Napomena 4.1.4. *Sferna dužina je jedinstveno određena.*

Želimo izmjeriti udaljenost dva mjesta na Zemljinoj površini. Dakle, kroz ta dva mjesta povučemo glavnu kružnicu sfere i njihova udaljenost je duljina manjeg luka na toj kružnici koji spaja zadana mjesta.
Budući da je veličina kružnog luka proporcionalna veličini njoj pridruženog središnjeg kuta, zaključujemo da, zbog jednostavnosti, možemo definirati duljinu sferne dužine kao veličinu središnjeg kuta.

4.2 Sferni mnogokut

Sada ćemo definirati neke likove na sferi, odnosno generalizirati pojam trokuta i mnogokuta koje poznajemo iz ravnine. Imamo također lik koji ne postoji u ravnini, a to je dvokut.

Definicija 4.2.1. ***Sferni dvokut*** *je dio sfere koji omeđuju dvije glavne polukružnice.*
Sferni trokut *je dio sfere određen sa tri točke od kojih nikoje dvije nisu dijametralne. Omeđen je s tri luka glavnih kružnica.*
Sferni poligon *je dio sfere određen s tri ili više točaka od kojih nikoje dvije nisu dijametralne. Omeđen je sa više od tri luka glavnih kružnica.*

Stranice sfernog trokuta, odnosno poligona, su lukovi, a njihove duljine jednake su veličinama njima pripadajućih središnjih kutova.

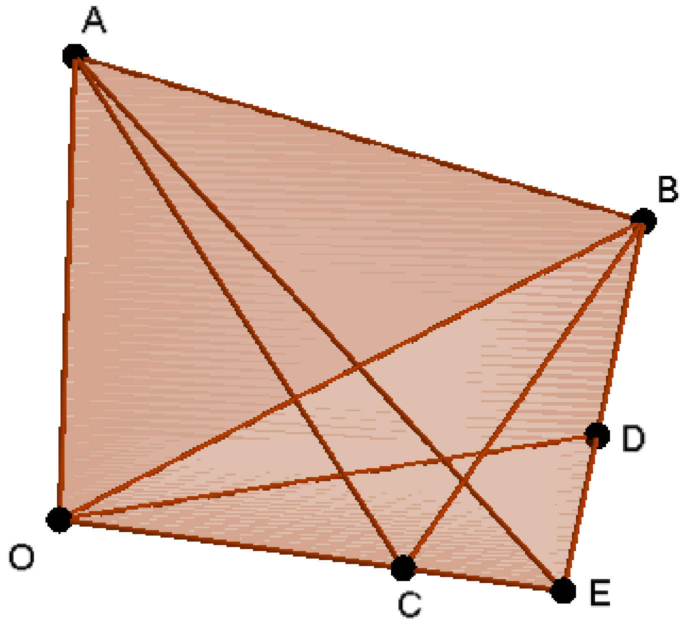
U daljnjem tekstu bavit ćemo se samo sfernim trokutom.
Pod sfernim trokutom podrazumijevamo uvijek onaj trokut koji je manji od polovine sfere. Ako promatramo veći sferni trokut određen istim točkama, potrebno je to posebno naglasiti.

Definicija 4.2.2. ***Kut sfernog trokuta*** *je kut između tangenata glavnih kružnica stranica trokuta koje se sastaju u vrhu kuta.*

Znamo da je u ravninskoj geometriji zbroj duljina dviju stranica trokuta veći od duljine treće stranice, što nazivamo nejednakost trokuta. Zanima nas kakav je odnos stranica sfernog trokuta, što ćemo obraditi u sljedećem teoremu.

Teorem 4.2.3. *Zbroj duljina dviju stranica sfernog trokuta uvijek je veći od duljine treće stranice.*

Dokaz. Neka su A, B, C vrhovi sfernog trokuta, a, b, c duljine njegovih stranica, a točka O središte sfere. Dokazat ćemo da je $a + b > c$.
Ako je $b > a$ ili $c > a$, onda je trivijalno $a < b + c$.
Dakle, promatramo slučaj kad ne vrijedi nijedna od te dvije nejednakosti.
Unutar kuta $\angle BOC$ tada možemo naći točku D takvu da je kut $\angle BOD$ jednak kutu $\angle BOA$ i da je $|OA| = |OD|$. Tada su trokuti $\triangle DBO$ i $\triangle ABO$ sukladni, pa je $|BD| = |AB|$.



Slika 4.1: Zbroj duljina dviju stranica sfernog trokuta je veći od duljine treće stranice

Neka je presjek pravaca BD i OC točka E. Sada iskoristimo nejednakost trokuta za ravninski trokut $\triangle ABE$, i imamo

$$|BE| = |BD| + |DE| < |AB| + |AE|,$$

odnosno $|DE| < |AE|$.
Promotrimo trokute $\triangle ODE$ i $\triangle OAE$. Uočimo da imaju jednu zajedničku stranicu $\overline{OE}$, te vrijedi $|OD| = |OA|$. Kako je $|DE| < |AE|$, zaključujemo da se samo jedan par stranica razlikuje u duljini i prema tome je kut $\angle DOE < \angle AOE$. Konačno je

$$\angle BOE = \angle BOD + \angle DOE < \angle BOA + \angle AOE,$$

što u terminima stranica sfernog trokuta $\triangle ABC$ glasi

$$a < b + c.$$

Preostale dvije relacije analogno dokazujemo. $\square$

Analogna tvrdnja vrijedi za sferni poligon, pa ćemo je iskazati u sljedećem korolaru.

Korolar 4.2.4. *Duljina bilo koje stranice sfernog poligona manja je od zbroja duljina preostalih stranica poligona.*

Dokaz. Neka je $A_1A_2...A_n$ sferni poligon, a duljine stranica su mu $a_i = \angle A_iOA_{i+1}$, $i = 1, ..., n-1$ i $a_n = \angle A_nOA_1$. Sa a_i označimo duljinu sfernih dužina $\widehat{A_1A_i}$, $i = 2, ..., n-1$. Tada, zbog nejednakosti trokuta koju smo dokazali u Teoremu 4.2.3, vrijedi

$$a_1 < a_2 + a'_3,$$

$$a'_3 < a_3 + a'_4,$$

$$a'_4 < a_4 + a'_5,$$

$$...$$

$$a'_{n-1} < a_{n-1} + a_n.$$

Zbrojimo li nejednakosti, dobivamo

$$a_1 < a_2 + ... + a_n.$$

□

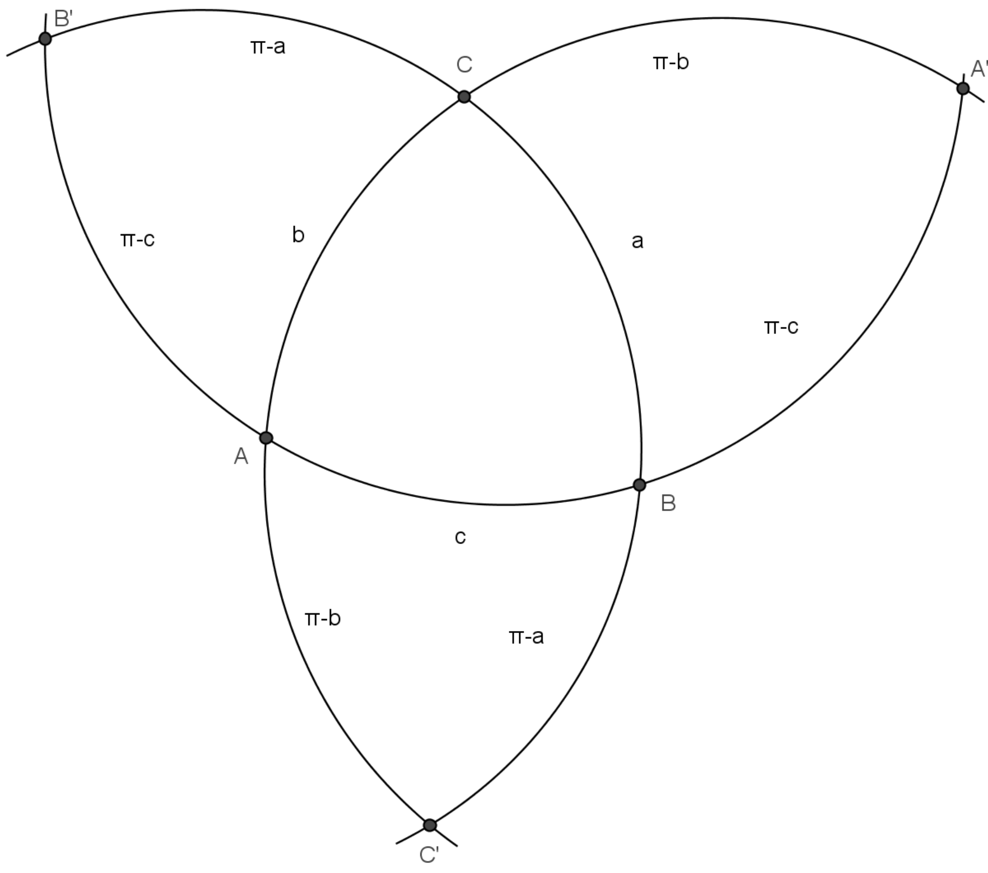
Kako bi pronašli gornju ogradu za sumu duljina stranica u sfernom trokutu, najprije ćemo definirati pojmove susjednih i suprotnih sfernih trokuta.
Susjedne sferne trokute dobijemo tako da jedan vrh sfernog trokuta zamijenimo njegovom dijametralnom točkom. Susjedni trokuti imaju jednu zajedničku stranicu, dok su im preostale stranice suplementarne. Spojimo li sferni trokut s jednim njegovim susjednim sfernim trokutom, dobivamo sferni dvokut.
Suprotan trokut je trokut kojemu su vrhovi suprotni odgovarajućim vrhovima zadanog trokuta.

Teorem 4.2.5. *Zbroj duljina stranica sfernog trokuta je manji od* 2π.

Dokaz. Neka su duljine stranica zadanog sfernog trokuta jednake a, b, c. Spojimo sferni trokut preko svih njegovih stranica sa njegovim susjednim sfernim trokutima, pri čemu dobivamo tri sferna dvokuta (Slika 4.2). Poznato nam je da su stranice susjednih sfernih trokuta suplementarne, odnosno jedna stranica je zajednička. Neka su duljine suplementarnih stranica jednake a', b', c'. Primijenimo Teorem 4.2.3 na nadopunjenim sfernim trokutima

$$a' + b' > c,$$

$$a' + c' > b,$$



Slika 4.2: Produžimo li sferni trokut preko njegovih stranica, dobivamo tri sferna dvokuta

$$b' + c' > a,$$

odnosno,

$$\pi - a + \pi - b > c,$$

$$\pi - a + \pi - c > b,$$

$$\pi - b + \pi - c > a.$$

Zbrojimo li navedene nejednakosti, dobivamo

$$a + b + c < 2\pi.$$

□

Sada imamo sljedeću definiciju.

Definicija 4.2.6. *Razliku* $2\pi - (a + b + c)$ *nazivamo* ***sferni defekt****.*

Napomena 4.2.7. *Iz prethodnog teorema slijedi da je sferni defekt pozitivan broj.*

4.3 Polarni trokut

Za dokaze pojedinih nejednakosti potreban nam je pojam polarnog trokuta, što ćemo definirati u daljnjem tekstu.

Definicija 4.3.1. ***Sferna kružnica*** *je svaka sporedna kružnica sfere.*
Sferno središte *sferne kružnice jest ona točka sfere koja je jednako udaljena od svih točaka te kružnice, a njezina udaljenost je manja od* π*. Sferno središte neke glavne kružnice je također točka sfere koja je jednako udaljena od svih točaka te kružnice. Takve točke se još zovu i polovi glavne kružnice. Svaka glavna kružnica ima dva pola i njihova je polara.*

Definicija 4.3.2. *Neka je* ABC *sferni trokut,* A', B', C' *redom polovi stranica* $\widehat{BC}$, $\widehat{CA}$ *i* $\widehat{AB}$ *takvi da su* A *i* A' *na istoj strani glavne kružnice kroz* $\widehat{BC}$, B *i* B' *na istoj strani glavne kružnice kroz* $\widehat{CA}$*, a* C *i* C' *na istoj strani od* $\widehat{AB}$*. Tada* $A'B'C'$ *nazivamo polarnim trokutom od* ABC*.*

Dosad smo promatrali dijelove kugle i sfere, a sada ćemo definirati jedan dio glavne kružnice sfere.

Definicija 4.3.3. *Četvrtina glavne kružnice zove se* ***kvadrant****. Sferni trokut kojemu je barem jedna stranica kvadrant zove se* ***kvadrantni sferni trokut****.*

Teorem 4.3.4. *Ako je* $A'B'C'$ *polarni trokut sfernog trokuta* ABC*, onda je* ABC *polarni trokut od* $A'B'C'$*.*

Dokaz. Ako je B' pol luka $\widehat{AC}$, onda je luk $\widehat{AB'}$ kvadrant. Analogno, ako je C' pol luka $\widehat{AB}$, onda je luk $\widehat{AC'}$ kvadrant. Dakle, A je jednako udaljen od B' i C', odnosno A je jednako udaljen od svake točke $\widehat{B'C'}$.
Kako luk $\widehat{B'C'}$ pripada glavnoj kružnici, slijedi da je A pol luka $\widehat{B'C'}$.
Analogno se može pokazati da je B pol od $\widehat{A'C'}$ i da je C pol od $\widehat{A'B'}$. Zaključujemo da je $\triangle ABC$ je polarni trokut $\triangle A'B'C'$. □

Promatramo li dva međusobno polarna trokuta, možemo uočiti i opisati vezu između stranica jednog i lukova drugog polarnog trokuta.

Teorem 4.3.5. *U dva međusobna polarna trokuta svaki kut jednog trokuta suplementaran je duljini stranice drugog trokuta koja je nasuprotna odgovarajućem vrhu.*

Dokaz. Neka su α, β, γ kutovi prvog trokuta, a, b, c redom stranice nasuprot njih i neka su $\alpha', \beta', \gamma', a', b', c'$ oznake za njima odgovarajuće veličine kutova i stranica pripadnog polarnog tokuta. Treba pokazati da tada vrijedi

$$\alpha + a' = \beta + b' = \gamma + c' = \pi,$$

$$\alpha' + a = \beta' + b = \gamma' + c = \pi.$$

Neka $\widehat{AB}$, $\widehat{AC}$ sijeku $\widehat{B'C'}$ u D, E. Tada, budući da je B' pol luka $\widehat{AC}$, $\widehat{B'E}$ je kvadrant. Isto tako, budući da je C' pol luka $\widehat{AB}$, $\widehat{C'D}$ je kvadrant. Zbrojimo li duljine dva kvadranta, dobivamo puni kut, odnosno

$$\angle B'OE + \angle C'OD = \pi,$$

što možemo zapisati

$$\angle B'OC' + \angle D'OE = \pi.$$

Budući da je O središte sfere, $\overline{DO}$ i $\overline{EO}$ su okomite na $\overline{AO}$, iz čega slijedi da je kut $\angle DOE$ jednak α, pa dobivamo

$$a' + \alpha = \pi.$$

Analogno se dokazuju preostale relacije. □

Dosad smo izveli gornju ogradu za zbroj stranica sfernog trokuta. Slijedi ocjena za zbroj kutova sfernog trokuta.

Teorem 4.3.6. *U svakom sfernom trokutu zbroj veličina kutova veći je od π i manji od 3π.*

Dokaz. Neka su α, β, γ kutovi sfernog trokuta, a', b', c' nasuprotne stranice polarnog trokuta. Tada vrijedi

$$\alpha + a' = \beta + b' = \gamma + c' = \pi.$$

Zbrajanjem gornje tri jednakosti dobivamo

$$\alpha + \beta + \gamma + a' + b' + c' = 3\pi,$$

pa zaključujemo da je

$$\alpha + \beta + \gamma < 3\pi.$$

S obzirom da vrijedi

$$a' + b' + c' < 2\pi,$$

što smo pokazali u Teoremu 4.2.5, slijedi da je

$$\alpha + \beta + \gamma > \pi.$$

□

Definicija 4.3.7. *Razliku $\xi = (\alpha + \beta + \gamma) - \pi$ nazivamo* ***sferni eksces****.*

Napomena 4.3.8. *Iz prethodnog teorema slijedi da je sferni eksces pozitivan broj.*

4.4 Površina sfernog trokuta

Pokazat ćemo da se, osim za trokut u ravninskoj geometriji, površina može izračunati i za trokut na sferi.

Teorem 4.4.1. *Površina sfernog trokuta jednaka je umnošku sfernog ekscesa i kvadrata polumjera sfere.*

Dokaz. Neka je na sferi polumjera R zadan sferni trokut ABC koji sa svojim susjednim trokutima tvori tri sferna dvokuta (Slika 4.2). Označimo površinu sfernog trokuta ABC sa P. Neka su A', B', C' dijametralne točkama A, B, C. Vrijede sljedeće jednakosti:

$$P + P_{A'BC} = \frac{R^2\alpha}{\frac{\pi}{2}}\pi,$$

$$P + P_{AB'C} = \frac{R^2\beta}{\frac{\pi}{2}}\pi,$$

$$P + P_{ABC'} = \frac{R^2\gamma}{\frac{\pi}{2}}\pi.$$

Zbrojimo li ove tri jednakosti, dobivamo

$$3P + P_{A'BC} + P_{AB'C} + P_{ABC'} = \frac{2R^2(\alpha + \beta + \gamma)}{\pi}\pi.$$

Dijametralno suprotan trokut trokuta $A'BC$ je trokut $AB'C'$, te, budući da oni imaju jednake površine, koristit ćemo $AB'C'$ u računu.
Trokuti ABC, $AB'C'$, $AB'C$ i ABC' zajedno prekrivaju polovinu sfere, pa vrijedi

$$P + P_{AB'C'} + P_{AB'C} + P_{ABC'} = 2R^2\pi.$$

Oduzimanjem dvije prethodne relacije dobivamo

$$2P = 2R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi),$$

odnosno

$$P = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi).$$

Budući da smo već definirali sferni eksces, možemo ga prepoznati u zagradi, te zamijeniti u gornjoj jednadžbi, pa je površina sfernog trokuta jednaka

$$P = R^2\xi.$$

□

Bibliografija

[1] Z. Hanžek, *Sferna trigonometrija*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1967.

[2] J. Justinijanović, *Sferna trigonometrija*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1956.

[3] C. Neuhauser, *Calculus for Biology and Medicine*, Pearson Education International, New Jersey, 2004.

[4] D. Palman, *Stereometrija*, Element, Zagreb, 2005.

[5] *Volume of spherical cap and spherical sector*, dostupno na `http://planetmath.org/volumeofsphericalcapandsphericalsector` (srpanj 2015.).

[6] *Sferna trigonometrija*, dostupno na `http://www2.geof.unizg.hr/~jbeban/M1/13.pdf` (kolovoz 2015.)

[7] *Zamjena varijabli*, dostupno na `http://lavica.fesb.hr/mat2/predavanja/node79.html` (srpanj 2015.)

[8] Cilindrične i sferne koordinate, dostupno na `http://lavica.fesb.hr/mat2/predavanja/node78.html` (srpanj 2015.)

[9] *Matematika 2*, dostupno na `http://www.gfmo.ba/anton/mat2/GF-M2-1112-predavanja.pdf` (srpanj 2015.)

[10] Ž. Andreić, *Fizika za studente RGN fakulteta*, dostupno na `http://rgn.hr/~zandreic/studenti/fizika/fizika_za_rgn.pdf` (kolovoz 2015.)

[11] N. Lustig, N. Mujakovi, *Dirichletov problem kod Laplaceove jednadžbe u sfernim koordinatama*, dostupno na `https://bib.irb.hr/datoteka/703867.Lustig_Mujakovic_-_Dirichletov_problem_kod_Laplaceove_jednadzbe_u_sfernim_koordinatama.pdf` (kolovoz 2015.)

[12] *Potencija točke obzirom na kružnicu*, dostupno na `http://baza.iugrina.com/index.php?id=790&stil=Nwin` (kolovoz 2015.)

Sažetak

U ovom radu proučavamo osnove geometrije kugle i sfere.
Prvo poglavlje analizira kuglu i njene dijelove, te njihove volumene.
U drugom poglavlju bavimo se sferom i površinom sfere i njenih dijelova, presjecima sfere i ravnine, te svojstvima kružnica koje se dobivaju tim presjecima. Određujemo sferu sa četiri nekomplanarne točke.
Treći dio govori o sfernim koordinatama, gdje uvodimo Jacobijevu matricu i pokazujemo kako doći do volumena kugle i nekih njenih dijelova koristeći sferni koordinatni sustav.
Posljednje, četvrto poglavlje, daje kratki pregled sferne geometrije, gdje se upoznajemo sa sfernim i polarnim trokutima.

Summary

In the first chapter we analyze the globe and its parts, and their volume.
In the second chapter we deal with the sphere and the surface area of the sphere and its parts, intersections between spheres and planes, and properities of circles that are obtained at intersections. We determine the sphere with four point that do not lie in the same plane.
The third part talks about the spherical coordinates, where we introduce the Jacobian matrix and show how to find the volume of a globe and its parts using a spherical coordinate system.
Lastly, the fourth chapter gives a brief overview of spherical geometry, where we meet spherical and polar triangles.

Životopis

Rođena sam u Požegi 16. ožujka 1990. godine, gdje sam završila svoje osnovnoškolsko i srednješkolsko obrazovanje. Nakon završenog prirodoslovno-matematičkog usmjerenja u Gimnaziji Požega, 2009. godine, upisujem Prirodoslovno-matematički fakultet u Zagrebu, te od tada živim u Zagrebu. Osim toga, u slobodno vrijeme se bavim sportom. Počela sam treniranjem košarke, pa sam preko trčanja došla do olimpijskog dizanja utega. Trenutno treniram za Dizački klub "Metalac" koji svoje sjedište ima u podrumu Doma sportova na zagrebačkoj Trešnjevci. Nedavno sam kupila cestovni bicikl, te sam i njega uklopila u svoj sportski život.
Do sada sam radila u dvije osnovne škole, kao zamjena za porodiljni dopust i bolovanje. Obje škole su smještene nedaleko samog centra Zagreba, Osnovna škola J.J. Strossmayera u Varšavskoj ulici, te Osnovna škola Izidora Kršnjavog sa sjedištem u istoimenoj ulici. Moj posao u drugoj navedenoj školi sam odrađivala u Klaićevoj bolnici, gdje navedena škola također ima svoj stručni kadar kako bi izašla ususret djeci koja izostaju iz škole dulje vremensko razdoblje. Ove školske godine sam se zaposlila u Osnovnoj školi Eugena Kumičića u Velikoj Gorici, također kao zamjena za porodiljni dopust.
Osim sporta i rada, za vrijeme studija sam se angažirala oko volontiranja u Učeničkom domu "Antun Gustav Matoš", Savjetovalištu "Luka Ritz", te u župi Marije Pomoćnice na Knežiji učeći s djecom matematiku.