SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Brigita Švec

REKURZIVNE FUNKCIJE

Diplomski rad

Voditelj rada:
Doc.dr.sc. Zvonko Iljazović

Zagreb, Rujan, 2014.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Cilj ovog rada je sustavno proučiti rekurzivne funkcije.

Krenut ćemo od RAM stroja i instrukcija koje on razumije te ćemo definirati program za RAM stroj. Zanimat će nas koje sve funkcije RAM stroj može izračunati, krenut ćemo od jednostavnijih (identiteta, konstantna funkcija) prema složenijima (kompozicija, primitivna rekurzija, μ operator). Definirat ćemo i makro program te pokazati da za svaki makro program postoji ekvivalentan program.

Zatim ćemo krenuti od inicijalnih funkcija te proučavati koje funkcije možemo dobiti od njih, u konačno mnogo koraka, primjenom kompozicije i primitivne rekurzije (primitivno rekurzivne funkcije), a kasnije ćemo dodati i μ operator (parcijalno rekurzivne funkcije). Tek ćemo tada moći definirati rekurzivne funkcije. Vidjet ćemo da su sve parcijalno rekurzivne funkcije ujedno i RAM izračunljive, a vrijedi i obrat. Pokušat ćemo parcijalno rekurzivnu funkciju proširiti do rekurzivne i vidjeti da to nije uvijek moguće. U tome važnu ulogu imaju rekurzivni skupovi.

Bavit ćemo se i rekurzivno prebrojivim skupovima. Zanimat će nas odnos između rekurzivnih i rekurzivno prebrojivih skupova te veza između parcijalno rekurzivnih funkcija i rekurzivno prebrojivih skupova.

Na kraju ćemo proširiti pojam rekurzivne funkcije i na funkcije čije su kodomene $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R}$ te ćemo vidjeti kakva svojstva imaju takve funkcije.

Poglavlje 1

RAM stroj

Smatramo da RAM stroj sadrži beskonačno registara u kojima su zapisani prirodni brojevi te da pomoću instrukcija možemo mijenjati sadržaj registara. Imamo 3 tipa instrukcija (uz $i, k \in \mathbb{N}$):

- INC R_i - povećaj sadržaj registra R_i za 1
- DEC R_i, k - smanji sadržaj registra R_i za 1 ako je u R_i zapisan broj veći od 0, inače prijeđi na instrukciju s oznakom k
- GOTO k - prijeđi na instrukciju k

Za broj k kažemo da je labela instrukcije DEC R_i, k te instrukcije GOTO k. Program za RAM stroj je konačan niz instrukcija $p_0, \ldots, p_n$, pri čemu je labela svake od ovih instrukcija manja ili jednaka n.

Primjer 1.0.1. *Program*

0. *INC* R_5
1. *INC* R_5
2. *INC* R_5

će u registar R_5 *(u kojem je na početku zapisana vrijednost* x*) upisati vrijednost* $x + 3$.

Primjer 1.0.2. *Imamo sljedeći program:*

0. *DEC* $R_2, 0$
1. *INC* R_2

Ovaj program staje ako je u registru R_2 na početku upisan broj veći od 0 i nakon njegovog izvršavanja stanje registara ostaje nepromijenjeno. Ako je u registru R_2 na početku upisan broj 0, program ne staje.

Primjer 1.0.3. *Program koji u registar R_1 zapisuje 0:*

0. *DEC* $R_1, 2$
1. *GOTO* 0
2. *INC* R_5
3. *DEC* $R_5, 3$

Primjer 1.0.4. *Neka su $i, j, k \in \mathbb{N}$ međusobno različiti brojevi. Želimo program koji sadržaj registra R_i kopira u R_j i pri tome svi registri osim R_j i R_k ostaju nepromijenjeni. Traženi program je:*

0. *DEC* $R_j, 2$
1. *GOTO* 0
2. *DEC* $R_k, 4$
3. *GOTO* 2
4. *DEC* $R_i, 8$
5. *INC* R_j
6. *INC* R_k
7. *GOTO* 4
8. *DEC* $R_k, 11$
9. *INC* R_i
10. *GOTO* 8
11. *INC* R_k
12. *DEC* $R_k, 12$

Primjer 1.0.5. *Program koji zbraja sadržaje registara R_1 i R_2 i zapisuje taj zbroj u R_0:*

0. *DEC* $R_0, 2$

1. *GOTO* 0
2. *DEC* $R_1, 5$
3. *INC* R_0
4. *GOTO* 2
5. *DEC* $R_2, 8$
6. *INC* R_0
7. *GOTO* 5
8. *INC* R_1

Definicija 1.0.6. *Neka je* $k \in \mathbb{N}, k \geq 1$. *Neka je* $S \subset \mathbb{N}^k$ *te* $f : S \to \mathbb{N}$ *funkcija. Kažemo da je* f *RAM izračunljiva funkcija ako postoji program (za RAM stroj) P takav da vrijedi sljedeće:*

- *ako su* $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{N}$ *takvi da je* $(x_1, \dots, x_k) \in S$, *onda program P staje ako je na početku u registrima* R_i *zapisana vrijednost* x_i *za* $i = 1, \dots, k$ *i 0 inače i nakon njegovog izvršavanja u registru* R_0 *se nalazi vrijednost* $f(x_1, \dots, x_k)$
- *ako su* $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{N}$ *takvi da* $(x_1, \dots, x_k) \notin S$, *onda program P ne staje ako je na početku u registrima* R_i *zapisana vrijednost* x_i *za* $i = 1, \dots, k$ *i 0 inače.*

Za program P kažemo da računa funkciju f.

Primjer 1.0.7. *Neka je* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *funkcija definirana sa:*

$$f(x) = x.$$

Program

0. *DEC* $R_1, 3$
1. *INC* R_0
2. *GOTO* 0
3. *INC* R_1

računa funkciju f.
Dakle, f *je RAM izračunljiva funkcija.*

Primjer 1.0.8. *Neka je $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa:*

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2.$$

Program iz primjera 1.0.5 očito računa funkciju f.
Dakle, f je RAM izračunljiva.

Primjer 1.0.9. *Neka je $f : \mathbb{N}\backslash\{0\} \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa:*

$$f(x) = x \quad , \forall x \in \mathbb{N}\backslash\{0\}.$$

Postoji li program koji računa f? Da!

0. *DEC* $R_1, 0$
1. *INC* R_1
2. *DEC* $R_1, 5$
3. *INC* R_0
4. *GOTO* 2
5. *INC* R_1

Dakle, f je RAM izračunljiva.

Primjer 1.0.10. *Neka je $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa:*

$$f(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}.$$

Program koji računa funkciju f je sljedeći:

0. *DEC* $R_1, 4$
1. *DEC* $R_2, 4$
2. *INC* R_0
3. *GOTO* 0
4. *INC* R_1

Dakle, f je RAM izračunljiva.

Primjer 1.0.11. *Postoje li programi koji računaju sljedeće funkcije:* $f_1 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$*,* $f_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$f_1(x,y) = \begin{cases} 1 & , x \geq y \\ 0 & , \textit{inače} \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} 1 & , x \textit{ paran} \\ 0 & , \textit{inače} \end{cases} \quad ?$$

Da!
Program koji računa funkciju f_1*:*

0. *DEC* $R_2, 3$
1. *DEC* $R_1, 4$
2. *GOTO* 0
3. *INC* R_0
4. *INC* R_1

Program koji računa funkciju f_2*:*

0. *DEC* $R_1, 3$
1. *DEC* $R_1, 4$
2. *GOTO* 0
3. *INC* R_0
4. *INC* R_1

Dakle, funkcije f_1 *i* f_2 *su RAM izračunljive.*

Definicija 1.0.12. *(Precizna definicija programa za RAM stroj)*
Formalno, definiramo da je INC R_i *uređeni par* $(0,i)$*, DEC* R_i, k *uređena trojka* $(1,i,k)$*, a GOTO k uređeni par* $(2,k)$*.*
Za k kažemo da je labela od DEC R_i, k *(tj. od* $(1,i,k)$*), te također da je labela od GOTO k (tj. od* $(2,k)$*).*
Neka je P konačan niz $p_0, \ldots, p_n$*, gdje su* $p_0, \ldots, p_n$ *instrukcije, pri čemu je labela svake od ovih instrukcija manja ili jednaka n. Tada za P kažemo da je program.*

Napomena 1.0.13. *Podsjetimo se: ako su S i T skupovi, onda sa* T^S *označavamo skup svih funkcija* $S \to T$*. Dakle,* $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ *je skup svih nizova u* $\mathbb{N}$*.*

Definicija 1.0.14. *Neka je p instrukcija. Tada definiramo funkciju* $\bar{p} : \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ *sa:*

- *ako je $p =$ INC R_i, onda*

$$\bar{p}(s, (r_j)) = (s + 1, (r'_j)),$$

gdje je

$$r'_j = \begin{cases} r_j & , j \neq i \\ r_j + 1 & , j = i \end{cases}$$

- *ako je $p =$ DEC R_i, k, onda*

$$\bar{p}(s, (r_j)) = (s', (r'_j)),$$

gdje su

$$s' = \begin{cases} k & , r_i = 0 \\ s + 1 & , inače \end{cases}, \qquad r'_j = \begin{cases} r_j - 1 & , j = i, r_i > 0 \\ r_j & , inače \end{cases}$$

- *ako je $p =$ GOTO k, onda*

$$\bar{p}(s, (r_j)) = (k, (r_j)).$$

Definicija 1.0.15. *Neka je P program s instrukcijama $p_0, \ldots, p_n$. Definiramo funkciju $\bar{P} : \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ sa:*

$$\bar{P}(s, (r_j)) = \begin{cases} \bar{p}_s(s, (r_j)) & , s \leq n \\ (s, (r_j)) & , inače. \end{cases}$$

Primjer 1.0.16. *Neka je P program s instrukcijama p_0, p_1, p_2, gdje vrijedi $p_0 = p_1 = p_2 =$ INC R_1, tj. P je sljedeći program:*

0. *INC R_1*

1. *INC R_1*

2. *INC R_1*

Sada imamo:

$$\bar{P}(0, (r_j)) = \bar{p}_0(0, (r_j)) = (1, (r_0, r_1 + 1, r_2, r_3, \ldots))$$

$$\bar{P}(1, (r_0, r_1 + 1, r_2, r_3, \ldots)) = \bar{p}_1(1, (r_0, r_1 + 1, r_2, r_3, \ldots)) = (2, (r_0, r_1 + 2, r_2, r_3, \ldots))$$

$$\bar{P}(2, (r_0, r_1 + 2, r_2, r_3, \ldots)) = \bar{p}_2(2, (r_0, r_1 + 2, r_2, r_3, \ldots)) = (3, (r_0, r_1 + 3, r_2, r_3, \ldots)).$$

Uočimo:

$$(3, (r_0, r_1 + 3, r_2, r_3, \ldots)) = \bar{P}^{(3)}(0, (r_j)).$$

Napomena 1.0.17. *Općenito, ako je S skup i $f : S \to \mathbb{N}$ funkcija, onda za $n \in \mathbb{N}$ definiramo $f^{(n)}$ induktivno sa:*

$$f^{(1)} = f$$
$$f^{(n+1)} = f \circ f^{(n)}.$$

Za $n = 0$ uzimamo $f^{(0)} = id_S$.

Definicija 1.0.18. *Neka je P program s instrukcijama $p_0, \dots, p_n$. Neka je $(r_j) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Kažemo da P staje za (r_j) i daje rezultat $(r'_j) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ako $\exists N \in \mathbb{N}, N \geq 1$ takav da $\bar{P}^{(N)}(0, (r_j))$ ima oblik $(s, (r'_j))$, gdje je $s > n$.*

Napomena 1.0.19. *Uočimo da rezultat (r'_j) ne ovisi o N.*

Primjer 1.0.20. *Neka je P program s instrukcijama:*

p_0 = *DEC* $R_1, 2$

p_1 = *GOTO* 0

p_2 = *INC* R_1 .

Neka je $(r_j) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Tada je

$$\bar{P}(0, (r_j)) = \bar{p}_0(0, (r_j)) = (1, (r_0, r_1 - 1, r_2, r_3, \dots))$$

ako je $r_1 > 0$. Nadalje,

$$\bar{P}^{(2)}(0, (r_j)) = \bar{P}(1, (r_0, r_1 - 1, r_2, r_3, \dots)) = (0, (r_0, r_1 - 1, r_2, r_3, \dots)),$$

$$\bar{P}^{(3)}(0, (r_j)) = (1, (r_0, r_1 - 2, r_2, r_3, \dots)), \quad \text{ako je } r_1 \geq 2.$$

Indukcijom se lako dobiva da $\forall k \in \mathbb{N}$ takav da je $1 \leq k \leq r_1$ vrijedi:

$$\bar{P}^{(2k-1)}(0, (r_j)) = (1, (r_0, r_1 - k, r_2, r_3, \dots))$$
$$\bar{P}^{(2k)}(0, (r_j)) = (0, (r_0, r_1 - k, r_2, r_3, \dots)).$$

Stoga je

$$\bar{P}^{(2r_1)}(0, (r_j)) = (0, (r_0, 0, r_2, r_3, \dots)).$$

Dalje imamo:

$$\bar{P}^{(2r_1+1)}(0, (r_j)) = (2, (r_0, 0, r_2, r_3, \dots))$$
$$\bar{P}^{(2r_1+2)}(0, (r_j)) = (3, (r_0, 1, r_2, r_3, \dots)).$$

Dakle, ako je $(r_j) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ onda P staje za (r_j) i daje rezultat $(r_0, 1, r_2, r_3, \dots)$

Primjer 1.0.21. *Neka je Q program s instrukcijama:*

0. $= INC\ R_2$

1. $= INC\ R_2$

2. $= INC\ R_2$.

Tada $\forall (r_j) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ *vrijedi:*

$$\bar{Q}^{(3)}(0,(r_j)) = (3,(r_0,r_1,r_2+3,r_3,\ldots)).$$

Prema tome, Q staje $\forall (r_j) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ *i daje rezultat* $(r_0,r_1,r_2+3,r_3,\ldots)$.

Definicija 1.0.22. *Neka je P program i neka je $\mathscr{S}$ skup svih* $(r_j) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ *takvih da P staje za* (r_j). *Definiramo funkciju* $P^* : \mathscr{S} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ *sa:*

$$P^*((r_j)) = (r'_j),$$

pri čemu je (r'_j) *rezultat kojeg P daje za* (r_j).

Definicija 1.0.23. *Neka je* $k \in \mathbb{N}, k \geq 1$. *Neka je* $S \subset \mathbb{N}^k$*, te neka je* $f : S \to \mathbb{N}$. *Kažemo da je f RAM izračunljiva funkcija ako postoji program P takav da za* $x_1,\ldots,x_k \in \mathbb{N}$ *vrijedi:*

$$(x_1,\ldots,x_k) \in S \quad \text{akko} \quad (0,x_1,\ldots,x_k,0,0\ldots) \in dom(P^*)$$

i u tom slučaju je $P^*(0,x_1,\ldots,x_k,0,0\ldots)$ *oblika* $(f(x_1,\ldots,x_k),r'_1,r'_2,\ldots)$. *Za P kažemo da je program koji računa funkciju f.*

1.1 Makro program

Definicija 1.1.1. *Neka je P program. Za uređeni par* $(3,P)$ *kažemo da je makro instrukcija. Neka je Q konačan niz* $q_0,\ldots,q_n$ *pri čemu je* $\forall k \in \{0,\ldots,n\}$ q_k *instrukcija ili makro instrukcija te pri čemu labela od* q_k *nije veća od n (ako je* q_k *instrukcija). Tada za Q kažemo da je makro program.*
Ako je Q makro program, $Q = (q_0,\ldots,q_n)$*, onda definiramo funkciju* $\bar{Q} : \mathbb{N}\times\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ *sa:*

$$\bar{Q}(s,(r_j)) = \begin{cases} \bar{q}_s(s,(r_j)) & s \leq n, q_s \text{ instrukcija} \\ (s+1,P^*((r_j))) & s \leq n, q_s = (3,P),(r_j) \in dom(P^*) \\ (s,(r_j)) & s \leq n, q_s = (3,P),(r_j) \notin dom(P^*) \\ (s,(r_j)) & s > n. \end{cases}$$

Neka su $(r_j),(r'_j) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. *Kažemo da Q staje za* (r_j) *i daje rezultat* (r'_j) *ako* $\exists N \in \mathbb{N}$ *takav da je* $\bar{Q}^{(N)}(0,(r_j)) = (s,(r'_j))$, *gdje je* $s > n$.
Analogno kao što smo definirali P^* *u slučaju kada je P program, definiramo funkciju* Q^*.

Primjer 1.1.2. *Neka je P program takav da je dom*$(P^*) = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ *i*

$$P^*((r_j)) = (r_1, r_1, 0, r_3, r_4, \ldots).$$

Vidjeli smo već da takav program postoji (primjer 1.0.4 - program koji kopira sadržaj registra R_i *u* R_j *koristeći* R_k*, u ovom slučaju i=1, j=0, k=2).*
Neka je Q makro program koji izgleda ovako:

$p_0 = (3, P)$

$p_1 = INC\ R_0.$

Neka je $(r_j) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. *Tada je*

$$\bar{Q}(0, (r_j)) = (1, P^*((r_j))) = (1, (r_1, r_1, 0, r_3, r_4, \ldots)).$$

Nadalje,

$$\bar{Q}^{(2)}(0, (r_j)) = (2, (r_1 + 1, r_1, 0, r_3, r_4, \ldots)).$$

Dakle, Q staje za (r_j) *i daje rezultat* $(r_1 + 1, r_1, 0, r_3, r_4, \ldots)$.

Primjer 1.1.3. *Neka su* $i, j, k \in \mathbb{N}$ *međusobno različiti. Znamo da postoji program P koji sadržaj registra* R_i *kopira u* R_j *i pri tome svi registri osim* R_j *i* R_k *ostaju nepromijenjeni , a u* R_k *program stavlja* 0.
Označimo makro instrukciju $(3, P)$ *sa*
MOVE R_i *TO* R_j *USING* R_k.
Nadalje, postoji program P koji zbraja sadržaje registara R_i *i* R_j *i zbroj zapisuje u* R_k*, u* R_i *i* R_j *stavlja* 0*, a svi ostali registri ostaju nepromijenjeni.*
Makro instrukciju $(3, P)$ *ćemo označavati sa*
$R_i + R_j \to R_k$.
Sada želimo napisati makro program Q takav da je dom$(Q^*) = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ *i* $Q^*(r_0, r_1, r_2, r_3, \ldots) = (r_1 r_2, r_1', r_2', \ldots)$. *Traženi makro program Q je dan sa:*

0. *DEC* $R_0, 2$

1. *GOTO* 0

2. *DEC* $R_2, 7$

3. *MOVE* R_0 *TO* R_3 *USING* R_5

4. *MOVE* R_1 *TO* R_4 *USING* R_5

5. $R_3 + R_4 \to R_0$

6. *GOTO* 2

7. *INC* R_5

Definicija 1.1.4. *Neka su Q_1 i Q_2 makro programi. Za Q_1 i Q_2 kažemo da su ekvivalentni ako je $Q_1^* = Q_2^*$.*

Uočimo da je svaki program ujedno i makro program.

Teorem 1.1.5. *Neka je Q makro program. Tada postoji program P takav da su P i Q ekvivalentni.*

Dokaz. Neka je Q konačan niz $q_0, \dots, q_n$. Ako je za svaki $i = 0, \dots, n$ q_i instrukcija, onda smo gotovi.
Pretpostavimo da je $i_0 \in \{0, \dots, n\}$ takav da je q_{i_0} makro instrukcija. Neka je $q_{i_0} = (3, W)$ te neka su $w_0, \dots, w_m$ instrukcije programa W. Neka je $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa:

$$\varphi(k) = \begin{cases} k & , k \leq i_0 \\ k + m & , k > i_0. \end{cases}$$

Promotrimo makro program Q' određen konačnim nizom

$$q'_0, \dots, q'_{i_0-1}, w'_0, \dots, w'_m, q'_{i_0+1}, \dots, q'_n$$

gdje je za $j \in \{0, \dots, m\}$

$$w'_j = \begin{cases} w_j & \text{, ako je } w_j \text{ instrukcija oblika INC } R_i \\ \text{DEC } R_i, (k + i_0) & \text{, ako je } w_j \text{ instrukcija oblika DEC } R_i, k \\ \text{GOTO } (k + i_0) & \text{, ako je } w_j \text{ instrukcija oblika GOTO } k \end{cases}$$

te gdje je, za $j \in \{0, \dots, n\} \setminus \{i_0\}$

$$q'_j = \begin{cases} q_j & \text{, ako je } q_j \text{ instrukcija oblika INC } R_i \text{ ili makro instrukcija} \\ \text{DEC } R_i, \varphi(k) & \text{, ako je } q_j \text{ instrukcija oblika DEC } R_i, k \\ \text{GOTO } \varphi(k) & \text{, ako je } q_j \text{ instrukcija oblika GOTO } k. \end{cases}$$

Neka su $\alpha, \beta : \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ i $\pi : \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$ funkcije definirane sa:

$$\alpha(s, r) = (\varphi(s), r), \qquad \beta(s, r) = (s + i_0, r), \qquad \pi(s, r) = s.$$

Neka je $r \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.
Dokažimo indukcijom da je

$$\begin{gathered} \beta(\bar{W}^{(N)}(0, r)) = \bar{Q}'^{(N)}(i_0, r), \\ \forall N \in \mathbb{N} \text{ takav da je } N = 0 \text{ ili } N \geq 1 \text{ i } \pi(\bar{W}^{(N-1)}(0, r)) \leq m. \end{gathered} \tag{1.1}$$

Za $N = 0$ tvrdnja očito vrijedi.
Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $N \in \mathbb{N}$. Nadalje, pretpostavimo da je $\pi(\bar{W}^{(N)}(0, r)) \leq m$. Želimo dokazati:

$$\beta(\bar{W}^{(N+1)}(0, r)) = \bar{Q}'^{(N+1)}(i_0, r). \tag{1.2}$$

Imamo $N = 0$ ili $N \geq 1$ i $\pi(\bar{W}^{(N-1)}(0, r)) \leq m$. Stoga, prema induktivnoj pretpostavci vrijedi

$$\beta(\bar{W}^{(N)}(0, r)) = \bar{Q}'^{(N)}(i_0, r).$$

Imamo

$$\bar{W}^{(N)}(0, r) = (s, r')$$

gdje je $s \leq m$. Stoga je

$$\bar{Q}'^{(N)}(i_0, r) = \beta(s, r') = (s + i_0, r').$$

Imamo

$$\bar{W}^{(N+1)}(0, r) = \bar{W}(s, r') = \bar{w}_s(s, r').$$

S druge strane

$$\bar{Q}'^{(N+1)}(i_0, r) = \bar{Q}'(s + i_0, r') = \bar{w}'_s(s + i_0, r').$$

1.slučaj $w_s = \text{INC } R_i$

Tada je

$$\bar{w}_s(s, r') = (s + 1, r''), \qquad \bar{w}'_s(s + i_0, r') = (s + i_0 + 1, r'')$$

za neki $r'' \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ pa slijedi (1.2).

2.slučaj $w_s = \text{DEC } R_i, k$

Tada je $w'_s = \text{DEC } R_i, k + i_0$.
Ako je $r'_i > 0$, onda kao u prethodnom slučaju dobivamo (1.2).
Ako je $r'_i = 0$, onda je

$$\bar{w}_s(s, r') = (k, r'), \qquad \bar{w}'_s(s + i_0, r') = (k + i_0, r')$$

pa opet vrijedi (1.2).

3.slučaj $w_s = \text{GOTO } k$

Analogno kao u 2. slučaju vrijedi (1.2).
Dakle, tvrdnja vrijedi za $N + 1$.
Zaključak: vrijedi (1.1).
Pretpostavimo da W staje za r. Tada $\exists N \in \mathbb{N}$ takav da je $\pi(\bar{W}^{(N)}(0, r)) > m$. Neka je N najmanji broj s tim svojstvom. Tada je $N \geq 1$ i vrijedi $\pi(\bar{W}^{(N-1)}(0, r)) \leq m$. Stoga je prema (1.1)

$$\beta(\bar{W}^{(N)}(0, r)) = \bar{Q}'^{(N)}(i_0, r).$$

Uočimo:

$$\pi(\bar{W}^{(N)}(0, r)) = m + 1,$$

dakle

$$\bar{W}^{(N)}(0, r) = (m + 1, W^*(r)).$$

Stoga je

$$\bar{Q}'^{(N)}(i_0, r) = (m + i_0 + 1, W^*(r)) = \alpha(i_0 + 1, W^*(r)) = \alpha(\bar{Q}(i_0, r)).$$

Dakle,

$$\alpha(\bar{Q}(i_0, r)) = \bar{Q}'^{(N)}(i_0, r). \tag{1.3}$$

Prema tome, ako W staje za r, onda $\exists N \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi (1.3).
Neka je sada $s \in \mathbb{N}$, $s \neq i_0$ te neka je $r \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Tada vrijedi:

$$\alpha(\bar{Q}(s, r)) = \bar{Q}'(\alpha(s, r)). \tag{1.4}$$

Dokažimo to.
Za $s > n$ tvrdnja je očita. Pretpostavimo $s \in \{0, \ldots, n\}$. Uzmimo $s < i_0$. Imamo:

$$\bar{Q}'(\alpha(s, r)) = \bar{Q}'(s, r).$$

Imamo 4 slučaja:

1.slučaj $q_s = \text{INC } R_i$

Tada je

$$\alpha(\bar{Q}(s, r)) = \alpha(s + 1, r') = (s + 1, r'), \qquad \bar{Q}'(\alpha(s, r)) = \bar{q}'_s(s, r) = (s + 1, r')$$

za neki $r' \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ pa (1.4) vrijedi.

2.slučaj $q_s = \text{DEC } R_i, k$

Ako je $r_i > 0$, onda kao u prethodnom slučaju dobivamo da vrijedi (1.4).
Ako je $r_i = 0$, onda imamo

$$\alpha(\bar{Q}(s, r)) = \alpha(k, r) = (\varphi(k), r), \qquad \bar{Q}'(\alpha(s, r)) = \bar{q}'_s(s, r) = (\varphi(k), r).$$

Dakle, (1.4) vrijedi.

3.slučaj $q_s = \text{GOTO } k$

Analogno kao u 2. slučaju dobijemo da vrijedi (1.4).

4.slučaj q_s je makro instrukcija

Tada je $q_s = (3, V)$
Ako je $r \in dom(V^*)$ onda je

$$\alpha(\bar{Q}(s, r)) = \alpha(s + 1, V^*(r)) = (s + 1, V^*(r)), \qquad \bar{Q}'(\alpha(s, r)) = \bar{q}'_s(s, r) = (s + 1, V^*(r))$$

pa slijedi (1.4).
Ako $r \notin dom(V^*)$ onda je

$$\alpha(\bar{Q}(s, r)) = (s, r), \qquad \bar{Q}'(\alpha(s, r)) = (s, r).$$

Dakle, (1.4) vrijedi.
Analogno dobivamo da (1.4) vrijedi u slučaju $s > i_0$.
Dokažimo sada da je Q^* jednako Q'^*.
Neka je $r \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Dokažimo indukcijom da $\forall N \in \mathbb{N}$ takav da je $N = 0$ ili $N \geq 1$ i $\bar{Q}^{(N-1)}(0, r)$ nije oblika (i_0, r'), gdje $r' \notin dom(W^*)$, $\exists N' \geq N$ takav da

$$\alpha(\bar{Q}^{(N)}(0, r)) = \bar{Q}'^{(N')}(0, r) \tag{1.5}$$

Za $N = 0$ tvrdnja vrijedi.
Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $N \in \mathbb{N}$. Dokažimo da tvrdnja vrijedi za $N + 1$. Pretpostavimo da $\bar{Q}^{(N)}(0, r)$ nije oblika $(i_0, r'), r' \notin dom(W^*)$. Tada je $N = 0$ ili $N \geq 1$ i $\bar{Q}^{(N-1)}(0, r)$ nije tog oblika jer bi u suprotnom i $\bar{Q}^{(N)}(0, r)$ bio tog oblika. Stoga $\exists N' \geq N$ takav da vrijedi (1.5). Imamo

$$\bar{Q}^{(N)}(0, r) = (s, r')$$

pa je prema (1.5)

$$\alpha(s, r') = \bar{Q}'^{(N')}(0, r). \tag{1.6}$$

Imamo

$$\alpha(\bar{Q}^{(N+1)}(0, r)) = \alpha(\bar{Q}(\bar{Q}^{(N)}(0, r)) = \alpha(\bar{Q}(s, r'))).$$

Pretpostavimo $s \neq i_0$. Prema (1.4) i (1.6) vrijedi:

$$\alpha(\bar{Q}(s, r')) = \bar{Q}'(\alpha(s, r')) = \bar{Q}'(\bar{Q}'^{(N')}(0, r)) = \bar{Q}'^{(N'+1)}(0, r).$$

Dakle,

$$\alpha(\bar{Q}^{(N+1)}(0, r)) = \bar{Q}'^{(N'+1)}(0, r).$$

Pretpostavimo $s = i_0$. Prema (1.3) postoji $L \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\alpha(\bar{Q}(i_0, r')) = \bar{Q}'^{(L)}(i_0, r') = \bar{Q}'^{(L)}(\alpha(i_0, r')) =$$
$$= \bar{Q}'^{(L)}(\alpha(\bar{Q}^{(N)}(0, r))) = \bar{Q}'^{(L)}(\bar{Q}'^{(N')}(0, r)) = \bar{Q}'^{(L+N')}(0, r).$$

Dakle,

$$\alpha(\bar{Q}^{(N+1)}(0, r)) = \bar{Q}'^{(L+N')}(0, r).$$

Zaključak: (1.5) vrijedi.
Pretpostavimo da za svaki $N \in \mathbb{N}$ $\bar{Q}^{(N)}(0, r)$ nije oblika $(i_0, r'), r' \notin dom(W^*)$. Tada za svaki $N \in \mathbb{N}$, postoji $N' \geq N$ takav da vrijedi (1.5).
Pretpostavimo da Q staje za r. Tada postoji $N \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\bar{Q}^{(N)}(0, r) = (n + 1, r').$$

Stoga postoji $N' \geq N$ takav da je

$$\alpha(n+1, r') = \bar{Q}'^{(N')}(0, r)$$

tj.

$$\bar{Q}'^{(N')}(0, r) = (n+m+1, r')$$

tj. Q' staje za r i daje isti rezultat.
Pretpostavimo da Q' staje za r. Tada postoji $N \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\bar{Q}'^{(N)}(0, r) = (n+m+1, r').$$

Znamo da postoji $N' \geq N$ takav da vrijedi (1.5). Budući da je $N' \geq N$ vrijedi

$$\bar{Q}'^{(N')}(0, r) = (n+m+1, r').$$

Stoga je prema (1.5)

$$\alpha(\bar{Q}^{(N)}(0, r)) = (n+m+1, r') \quad \Rightarrow \quad \bar{Q}^{(N)}(0, r) = (n+1, r').$$

Dakle, Q staje za r.
Pretpostavimo da $\exists N \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\bar{Q}^{(N)}(0, r) = (i_0, r'), \quad r' \notin dom(W^*).$$

Neka je M najmanji takav broj. Tada je $M = 0$ ili $M \geq 0$ i $\bar{Q}^{(M-1)}(0, r)$ nije oblika $(i_0, r'), r' \notin dom(W^*)$. Tada $\exists M' \geq M$ takav da je

$$\alpha(\bar{Q}^{(M)}(0, r)) = \bar{Q}'^{(M')}(0, r).$$

Znamo da je

$$\bar{Q}^{(M)}(0, r) = (i_0, r'), \quad r' \notin dom(W^*).$$

Stoga je

$$\bar{Q}'^{(M')}(0, r) = (i_0, r').$$

Budući da $r' \notin dom(W^*)$, imamo

$$\bar{Q}^{(M+k)}(0, r) = (i_0, r'), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Iz ovog slijedi da Q ne staje za r.
Za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi $\pi(\bar{W}^{(k)}(0, r')) \leq m$ jer $r' \notin dom(W^*)$. Stoga iz (1.1) slijedi:

$$\pi(\bar{Q}'^{(k)}(i_0, r')) \leq m + i_0 \leq m + n.$$

Dakle, za svaki $k \in \mathbb{N}$ imamo

$$\bar{Q}'^{(M'+k)} = \bar{Q}'^{(k)}(\bar{Q}'^{(M')}(0, r)) = \bar{Q}'^{(k)}(i_0, r').$$

Prema tome $\pi(\bar{Q}'^{(M'+k)}(0, r)) \leq m + n, \forall k \in \mathbb{N}$.
Dakle, Q' ne staje za r.
Zaključak: $Q^* = Q'^*$.
Uočimo da je broj makro instrukcija u Q' manji od broja makro instrukcija u Q. Stoga je jasno da u konačno mnogo koraka dolazimo da makro programa P koji je ekvivalentan s Q i u kojem nema makro instrukcija, što znači da je P program. □

Definicija 1.1.6. *Neka je $f : S \to \mathbb{N}$, $S \subset \mathbb{N}^k$. Neka je P program te $N \in \mathbb{N}, N > k$. Kažemo da program P računa funkciju f i čuva N ulaznih podataka ako za svaki niz $(x_i) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ vrijedi:*

$$(x_1, \ldots, x_k) \in S \Leftrightarrow (x_0, x_1, x_2, \ldots) \in dom(P^*)$$

i u tom slučaju vrijedi:

$$P^*(x_0, x_1, x_2, \ldots) = (f(x_1, \ldots, x_k), x_1, \ldots, x_N, x'_{N+1}, x'_{N+2}, \ldots).$$

Propozicija 1.1.7. *Neka je $f : S \to \mathbb{N}$, $S \subset \mathbb{N}^k$ RAM izračunljiva funkcija te neka je $N \in \mathbb{N}, N > k$. Tada postoji program V koji računa funkciju f i čuva N ulaznih podataka.*

Dokaz. Budući da je f RAM izračunljiva, postoji program P koji računa f. Neka je $m \in \mathbb{N}$ broj takav da je $m > i$, $\forall i \in \mathbb{N}$ takav da se instrukcija INC R_i ili DEC R_i, k (za neki $k \in \mathbb{N}$) javlja u programu P. Možemo pretpostaviti da je $m > N$.

Ako su $s \in \mathbb{N}$ i $r_0, r_1, \ldots, r_{m-1} \in \mathbb{N}$, onda $\bar{P}(s, (r_0, r_1, \ldots, r_{m-1}, 0, 0, \ldots))$ ima oblik $(s', (r'_0, r'_1, \ldots, r'_{m-1}, 0, 0, \ldots))$ te za te brojeve $s', r'_0, r'_1, \ldots, r'_{m-1}$ vrijedi

$$\bar{P}(s, (r_0, r_1, \ldots, r_{m-1}, a_0, a_1, \ldots)) = (s', (r'_0, r'_1, \ldots, r'_{m-1}, a_0, a_1, \ldots))$$

za svaki $(a_i) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Dakle, registri $R_m, R_{m+1}, \ldots$ ostaju nepromijenjeni i njihov sadržaj ne utječe na stanje registara $R_0, \ldots, R_{m-1}$.
Iz ovoga zaključujemo sljedeće:

ako su $(a_i) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $r_0, \ldots, r_{m-1} \in \mathbb{N}$ i $r'_0, \ldots, r'_{m-1} \in \mathbb{N}$ onda P staje za $(r_0, \ldots, r_{m-1}, 0, 0, \ldots)$ i daje rezultat $(r'_0, \ldots, r'_{m-1}, 0, 0, \ldots)$ akko P staje za $(r_0, \ldots, r_{m-1}, a_0, a_1, \ldots)$ i daje rezultat $(r'_0, \ldots, r'_{m-1}, a_0, a_1, \ldots)$.

(Naime, indukcijom po $j \in \mathbb{N}$ se dobiva da ako je $\bar{P}^{(j)}(0, (r_0, r_1, \ldots, r_{m-1}, 0, 0, \ldots)) = (s, (t_0, t_1, \ldots, t_{m-1}, 0, 0, \ldots))$ onda je i $\bar{P}^{(j)}(0, (r_0, r_1, \ldots, r_{m-1}, a_0, a_1, \ldots)) = (s, (t_0, t_1, \ldots, t_{m-1}, a_0, a_1, \ldots))$.)

Neka je $i \in \mathbb{N}$. Neka je W sljedeći program:

0. DEC $R_i, 2$

1. GOTO 0
2. INC R_i
3. DEC $R_i, 3$

Program W će u R_i zapisati 0, a svi ostali registri će ostati nepromijenjeni. Makro instrukciju $(3, W)$ označimo sa ZERO R_i.

Neka je Q sljedeći makro program:

0. MOVE R_0 TO R_m USING R_{m+N+1}

1. MOVE R_1 TO R_{m+1} USING R_{m+N+1}

$\vdots$

N. MOVE R_N TO R_{m+N} USING R_{m+N+1}

N+1. ZERO R_0

N+2. ZERO R_1

$\vdots$

N+m-k. ZERO R_{m-1}

N+m-k+1. $(3, P)$

N+m-k+2. MOVE R_{m+1} TO R_1 USING R_{m+N+1}

$\vdots$

2N+m-k+1. MOVE R_{m+N} TO R_N USING R_{m+N+1}

Neka je V program ekvivalentan s Q. Tada V računa funkciju f i čuva N ulaznih podataka.

□

Posve analogno dokazujemo sljedeću propoziciju.

Propozicija 1.1.8. *Neka je $f : S \to \mathbb{N}, S \subset \mathbb{N}^k$ RAM izračunljiva funkcija. Neka su $i_0, i_1, \ldots, i_k \in \mathbb{N}$ međusobno različiti brojevi te neka je N broj veći od svih njih. Tada postoji program V takav da za svaki $(x_n) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ vrijedi:*

$$(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}) \in S \Leftrightarrow (x_0, x_1, \ldots) \in dom(V^*).$$

U tom slučaju vrijedi:

$$V^*(x_0, x_1, \ldots) = (x_0, x_1, \ldots, x_{i_0-1}, f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}), x_{i_0+1}, \ldots, x_N, x'_{N+1}, x'_{N+2}, \ldots).$$

Dakle, V čuva N ulaznih podataka (osim R_{i_0}), a u registar R_{i_0} zapisuje $f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$.

Neka je f RAM izračunljiva funkcija mjesnosti k (tj. $f : S \to \mathbb{N}, S \subset \mathbb{N}^k$). Neka su $i_0, \ldots, i_k \in \mathbb{N}$ međusobno različiti brojevi te $N \in \mathbb{N}$ broj veći od svih njih. Neka je V program iz propozicije 1.1.8. Tada ćemo makro instrukciju $(3, V)$ označavati sa

$f(R_{i_1}, \ldots, R_{i_k}) \overset{N}{\to} R_{i_0}$.

1.2 Kompozicija, primitivna rekurzija i μ operator

Primjer 1.2.1. *Neka su $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ RAM izračunljive funkcije. Tada je $g \circ f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ RAM izračunljiva funkcija.*
Promotrimo sljedeći makro program:

0. $f(R_1) \overset{3}{\to} R_2$

1. $g(R_2) \overset{3}{\to} R_0$

Neka je P program ekvivalentan ovom makro programu. Tada P računa funkciju $g \circ f$.

Primjer 1.2.2. *Neka su $S, T \subset \mathbb{N}$ te $f : S \to \mathbb{N}$ i $g : T \to \mathbb{N}$ RAM izračunljive funkcije. Neka je $V = \{x \in S \mid f(x) \in T\}$ te neka je $h : V \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa*

$$h(x) = g(f(x)).$$

Tada je h RAM izračunljiva funkcija.
Program iz prethodnog primjera pokazuje da je h RAM izračunljiva.

Definicija 1.2.3. *Neka su $k, n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ te neka su $S_1, \ldots, S_n \subset \mathbb{N}^k$. Neka su $g_1 : S_1 \to \mathbb{N}$, $g_2 : S_2 \to \mathbb{N}$, $\ldots, g_n : S_n \to \mathbb{N}$. Neka je $T \subset \mathbb{N}^n$ te $f : T \to \mathbb{N}$. Neka je $V = \{x \in S_1 \cap \ldots \cap S_n \mid (g_1(x), \ldots, g_n(x)) \in T\}$.*
Definiramo funkciju $h : V \to \mathbb{N}$ sa

$$h(x) = f(g_1(x), \ldots, g_n(x))$$

Za funkciju h kažemo da je dobivena kompozicijom funkcija $f, g_1, \ldots, g_n$.
Pišemo: $h(x) \simeq f(g_1(x), \ldots, g_n(x)), x \in \mathbb{N}^k$.

Teorem 1.2.4. *Neka je h funkcija dobivena kompozicijom funkcija $f, g_1, \ldots, g_n$. Pretpostavimo da su funkcije $f, g_1, \ldots, g_n$ RAM izračunljive. Tada je h RAM izračunljiva funkcija.*

Dokaz. Sljedeći makro program računa funkciju h:

0. $g_1(R_1, \ldots, R_k) \xrightarrow{n+k+1} R_{k+1}$

1. $g_2(R_1, \ldots, R_k) \xrightarrow{n+k+1} R_{k+2}$

$\vdots$

n-1. $g_n(R_1, \ldots, R_k) \xrightarrow{n+k+1} R_{k+n}$

n. $f(R_{k+1}, \ldots, R_{k+n}) \xrightarrow{n+k+1} R_0$

□

Prethodni teorem kaže da je skup RAM izračunljivih funkcija zatvoren na kompoziciju funkcija.

Definicija 1.2.5. *Neka je $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ te neka su $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ i $g : \mathbb{N}^{n+2} \to \mathbb{N}$ funkcije. Definiramo funkciju $h : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ sa:*

$$h(0, x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n)$$

$$h(y + 1, x_1, \ldots, x_n) = g(h(y, x_1, \ldots, x_n), y, x_1, \ldots, x_n).$$

Za funkciju h kažemo da je dobivena primitivnom rekurzijom od funkcija f i g.

Primjer 1.2.6. *Neka su $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ i $g : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ RAM izračunljive funkcije. Neka je $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija dobivena primitivnom rekurzijom od f i g. Tada je i h RAM izračunljiva funkcija.*
Naime, sljedeći makro program računa h:

0. $f(R_2) \xrightarrow{3} R_0$

1. *MOVE* R_1 *TO* R_3 *USING* R_5

2. *ZERO* R_1

3. *DEC* $R_3, 8$

4. $g(R_0, R_1, R_2) \xrightarrow{5} R_4$

5. *MOVE* R_4 *TO* R_0 *USING* R_5

6. *INC* R_1
7. *GOTO* 3
8. *INC* R_4

Definicija 1.2.7. *Neka je* $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, $S \subset \mathbb{N}^n, T \subset \mathbb{N}^{n+2}$, $f : S \to \mathbb{N}$, *te* $g : T \to \mathbb{N}$.
Definiramo $n+1$ *mjesnu funkciju* h *na sljedeći način.*
Neka su $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{N}$. *Ako je* $(x_1, \dots, x_n) \in S$ *onda je* $(0, x_1, \dots, x_n) \in dom(h)$ *i*

$$h(0, x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n).$$

Pretpostavimo da je $y \in \mathbb{N}$ *te da je* $(y, x_1, \dots, x_n) \in dom(h)$.
Ako je $(h(y, x_1, \dots, x_n), y, x_1, \dots, x_n) \in T$, *onda je* $(y+1, x_1, \dots, x_n) \in dom(h)$ *i*

$$h(y+1, x_1, \dots, x_n) = g(h(y, x_1, \dots, x_n), y, x_1, \dots, x_n).$$

Za funkciju h *kažemo da je dobivena primitivnom rekurzijom od funkcija* f *i* g.

Teorem 1.2.8. *Neka je* $n \in \mathbb{N}, n \geq 1, S \subset \mathbb{N}^n$ *i* $T \subset \mathbb{N}^{n+2}$. *Neka su* $f : S \to \mathbb{N}$ *i* $g : T \to \mathbb{N}$ *RAM izračunljive funkcije te neka je* h *funkcija dobivena primitivnom rekurzijom od* f *i* g. *Tada je i* h *RAM izračunljiva funkcija.*

Dokaz. Makro program koji računa funkciju h jest:

0. $f(R_2, \dots, R_{n+1}) \xrightarrow{n+2} R_0$
1. MOVE R_1 TO R_{n+2} USING R_{n+3}
2. ZERO R_1
3. DEC R_{n+2}, 8
4. $g(R_0, R_1, \dots, R_{n+1}) \xrightarrow{n+5} R_{n+3}$
5. MOVE R_{n+3} TO R_0 USING R_{n+5}
6. INC R_1
7. GOTO 3
8. INC R_{n+5}

□

Dakle, skup RAM izračunljivih funkcija je zatvoren na primitivnu rekurziju.

Definicija 1.2.9. *Neka je* $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ *te* $g : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$. *Neka je* S *skup svih* $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{N}^n$ *za koje postoji* $y \in \mathbb{N}$ *takav da je* $g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$.
Definiramo funkciju $f : S \to \mathbb{N}$ *sa*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \min\{y \in \mathbb{N} \mid g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0\}.$$

Za funkciju f *kažemo da je dobivena primjenom* μ *operatora na funkciju* g.
Za $(x_1, \ldots, x_n) \in S$ *najmanji* $y \in \mathbb{N}$ *takav da je* $g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$ *označavamo sa*

$$\mu y(g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0).$$

Dakle, $f(x_1, \ldots, x_n) = \mu y(g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0) \quad , (x_1, \ldots, x_n) \in S$.
Pišemo: $f(x_1, \ldots, x_n) \simeq \mu y(g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0) \quad , (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{N}^n$.

Primjer 1.2.10. *Neka je* $g : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ *RAM-izračunljiva funkcija. Neka je* f *funkcija dobivena primjenom* μ *operatora na funkciju* g. *Tada je* f *RAM-izračunljiva.*
Naime, sljedeći makro program računa funkciju f:

0. $g(R_1, \ldots, R_n, R_0) \xrightarrow{n+2} R_{n+1}$
1. *DEC* $R_{n+1}, 4$
2. *INC* R_0
3. *GOTO* 0
4. *INC* R_{n+1}

Definicija 1.2.11. *Općenitije, neka je* $T \subset \mathbb{N}^{n+1}$ *te* $g : T \to \mathbb{N}$. *Definiramo n-mjesnu funkciju* f *na sljedeći način:*

$$f(x_1, \ldots, x_n) \simeq \mu y(g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0).$$

Pri tome smatramo da se dom(f) sastoji od onih $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{N}^n$ *za koje postoji* $y \in \mathbb{N}$ *takav da je* $(x_1, \ldots, x_n, i) \in T, \forall i \in \{0, \ldots, y\}$ *te* $g(x_1, \ldots, x_n, i) > 0, \forall i < y$ *i* $g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$ *je u tom slučaju* $f(x_1, \ldots, x_n) = y$.

Teorem 1.2.12. *Neka je* $g : T \to \mathbb{N}, T \subset \mathbb{N}^{n+1}$, *RAM izračunljiva funkcija. Neka je* f *dobivena primjenom* μ *operatora na* g. *Tada je* f *RAM izračunljiva funkcija.*

Dokaz. Makro program iz primjera 1.2.10 pokazuje da je f RAM izračunljiva funkcija. □

Dakle, skup RAM izračunljivih funkcija zatvorena je na μ operator.

Poglavlje 2

Rekurzivne funkcije

2.1 Primitivno rekurzivne funkcije

Definicija 2.1.1. *Neka su $z, s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcije definirane sa*

$$s(x) = x + 1 \quad z(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{N}.$$

Nadalje, za $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ i $j \in \{1, \ldots, n\}$ neka je $\mathcal{I}^n_j : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ projekcija na j-tu koordinatu tj.

$$\mathcal{I}^n_j(x_1, \ldots, x_n) = x_j, \quad \forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{N}^n.$$

Za funkcije s, z i $\mathcal{I}^n_j, n \in \mathbb{N}, j = 1, \ldots, n$ kažemo da su inicijalne funkcije.

Definiramo skupove $\mathscr{S}_0, \mathscr{S}_1, \ldots, \mathscr{S}_n, \ldots$ na sljedeći način. Neka je $\mathscr{S}_0$ skup svih inicijalnih funkcija. Pretpostavimo da je $n \in \mathbb{N}$ te da smo definirali skup $\mathscr{S}_n$. Tada definiramo A kao skup svih funkcija koje se mogu dobiti kompozicijom i primitivnom rekurzijom od funkcija iz $\mathscr{S}_n$. Stavimo da je $\mathscr{S}_{n+1} = A \cup \mathscr{S}_n$.

Za funkciju f kažemo da je primitivno rekurzivna ako postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $f \in \mathscr{S}_n$. Dakle, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathscr{S}_n$ je skup svih primitivno rekurzivnih funkcija.

Uočimo sljedeće: klasa primitivno rekurzivnih funkcija sadrži inicijalne funkcije te je zatvorena na kompoziciju i primitivnu rekurziju, tj. ako su $f, g_1, \ldots, g_k$ primitivno rekurzivne funkcije, onda je i funkcija h dobivena kompozicijom funkcija $f, g_1, \ldots, g_k$ primitivno rekurzivna te ako su f i g primitivno rekurzivne funkcije te h dobivena primitivnom rekurzijom od f i g, onda je i h primitivno rekurzivna.

Nadalje, uočimo da je klasa primitivno rekurzivnih funkcija najmanja klasa s tim svojstvom, tj. ako je $\mathscr{F}$ neka klasa funkcija koja sadrži inicijalne funkcije i koja je zatvorena na kompoziciju i primitivnu rekurziju, onda je $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathscr{S}_n \subset \mathscr{F}$. Naime, lako se indukcijom dobiva da je $\mathscr{S}_n \subset \mathscr{F}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Definicija 2.1.2. *Za funkciju $f : S \to \mathbb{N}, S \subset \mathbb{N}^n$ kažemo da je totalna ako je $S = \mathbb{N}^n$.*

Uočimo sljedeće: inicijalne funkcije su totalne te, ako su $f, g_1, \ldots, g_n$ totalne funkcije i h kompozicija od $f, g_1, \ldots, g_n$, onda je i h totalna. Nadalje, ako su f i g totalne i h dobivena primitivnom rekurzijom od f i g, onda je i h totalna. Iz ovog zaključujemo da je svaka primitivno rekurzivna funkcija totalna.

Primjer 2.1.3. *Neka je $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ te neka je $z_n : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ nul-funkcija, tj.*

$$z_n(x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad \forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{N}^n.$$

Imamo

$$z_n(x_1, \ldots, x_n) = z(\mathcal{I}_1^n(x_1, \ldots, x_n))$$

tj. z_n je kompozicija funkcija z i $\mathcal{I}_1^n$ koje su primitivno rekurzivne pa je i z_n primitivno rekurzivna funkcija.

Primjer 2.1.4. *Za $a \in \mathbb{N}$ neka je $c_a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ konstantna funkcija s vrijednošću a. Imamo $c_0 = z$ pa je c_0 primitivno rekurzivna funkcija. Nadalje,*

$$c_1(x) = s(z(x))$$

pa je c_1 primitivno rekurzivna funkcija kao kompozicija primitivno rekirzivnih funkcija. Općenito, za $a \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$c_{a+1}(x) = s(c_a(x)).$$

Dakle, c_{a+1} je kompozicija funkcija s i c_a. Iz ovog indukcijom zaključujemo da je c_a primitivno rekurzivna funkcija $\forall a \in \mathbb{N}$.

Primjer 2.1.5. *Neka je $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa:*

$$h(x_1, x_2) = x_1 + x_2.$$

Imamo:

$$h(0, x) = x = \mathcal{I}_1^1(x)$$

$$h(y + 1, x) = y + 1 + x = h(y, x) + 1 = s(h(y, x))$$

Neka je $g : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa:

$$g(a, b, c) = s(a).$$

Funkcija g je primitivna rekurzija jer je $g(a, b, c) = s(\mathcal{I}_1^3(a, b, c))$, tj. g je kompozicija funkcija s i $\mathcal{I}_1^3$. Imamo:

$$h(0, x) = \mathcal{I}_1^1(x)$$

$$h(y + 1, x) = g(h(y, x), y, x)$$

Zaključujemo da je funkcija h dobivena primitivnom rekurzijom od funkcija $\mathcal{I}_1^1$ i g. Stoga je h primitivno rekurzivna funkcija.

Primjer 2.1.6. *Neka je $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa:*

$$h(x_1, x_2) = x_1 x_2.$$

Tada je h primitivno rekurzivna funkcija.
Dokažimo to.
Neka je $zb : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $zb(a, b) = a + b$. Imamo:

$$h(0, x) = 0 = z(x)$$

$$h(y + 1, x) = (y + 1)x = yx + x = zb(yx, x) = zb(h(y, x), x)$$

Neka je $g : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa:

$$g(a, b, c) = zb(a, c).$$

Imamo:

$$h(0, x) = z(x)$$

$$h(y + 1, x) = g(h(y, x), y, x)$$

Vidimo da je h dobivena primitivnom rekurzijom od funkcija z i g.
Imamo $g(a, b, c) = zb(\mathcal{I}_1^3(a, b, c), \mathcal{I}_3^3(a, b, c))$. Dakle, g je kompozicija funkcija $zb, \mathcal{I}_1^3, \mathcal{I}_3^3$, stoga je g primitivno rekurzivna funkcija.
Zaključak: h je primitivno rekurzivna.

Primjer 2.1.7. *Neka je funkcija $pred : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definirana s*

$$pred(y) = \begin{cases} y - 1 & , y \geq 1 \\ 0 & , \textit{inače.} \end{cases}$$

Tada je pred primitivno rekurzivna funkcija.
Dokažimo to.
Neka je $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa

$$h(y, x) = pred(y).$$

Za svaki $y \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$pred(y) = h(y, 0) = h(\mathcal{I}_1^1(y), z(y)),$$

dakle, pred je kompozicija funkcija $h, \mathcal{I}_1^1$ i z. Stoga je dovoljno dokazati da je h primitivno rekurzivna.
Imamo:

$$h(0, x) = pred(0) = z(x)$$

$$h(y + 1, x) = pred(y + 1) = y = g(h(y, x), y, x),$$

gdje je $g = \mathcal{I}_2^3$. Dakle, h je dobivena primitivnom rekurzijom od funkcija z i $\mathcal{I}_2^3$ pa je i h primitivno rekurzivna funkcija.

Propozicija 2.1.8. *Neka je $a \in \mathbb{N}$ te neka je $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ primitivno rekurzivna funkcija. Neka je $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa:*

$$h(0) = a$$

$$h(y+1) = g(h(y), y).$$

Tada je h primitivno rekurzivna.

Dokaz. Neka je $H : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa:

$$H(y, x) = h(y).$$

Dovoljno je dokazati da je H primitivno rekurzivna funkcija (jer je h kompozicija od $H, \mathcal{I}_1^1$ i z). Imamo:

$$H(0, x) = h(0) = a = c_a(x)$$

$$H(y+1, x) = h(y+1) = g(h(y), y) = g(H(y, x), y).$$

Definiramo $G : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ sa

$$G(a, y, x) = g(a, y).$$

Tada je $H(y+1, x) = G(H(y, x), y, x)$. Iz ovog zaključujemo da je funkcija H dobivena primitivnom rekurzijom od funkcija c_a i G. Stoga ostaje još dokazati da je G primitivno rekurzivna. Imamo:

$$G(a, y, x) = g(\mathcal{I}_1^3(a, y, x), \mathcal{I}_2^3(a, y, x)),$$

dakle, G je kompozicija od $g, \mathcal{I}_1^3$ i $\mathcal{I}_2^3$. Prema tome G je primitivno rekurzivna. □

Primjer 2.1.9. *Neka je $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa:*

$$h(n) = n!.$$

Imamo:

$$h(0) = 1$$

$$h(n+1) = h(n) \cdot (n+1) = g(h(n), n)$$

gdje je $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $g(a, n) = a \cdot s(n)$. Prema prethodnoj propoziciji funkcija h je primitivno rekurzivna ako je g primitivno rekurzivna.
Neka je $p : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $p(x_1, x_2) = x_1 x_2$.
Imamo:

$$g(a, n) = p(\mathcal{I}_1^2(a, n), (s \circ \mathcal{I}_2^2)(a, n))$$

pa je g kompozicija funkcija $p, \mathcal{I}_1^2$ i $s \circ \mathcal{I}_2^2$ iz čega slijedi da je primitivno rekurzivna.

Napomena 2.1.10. *Neka je* $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ *te neka su* $f, g : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ *primitivno rekurzivne funkcije. Tada su i funkcije* $f + g, f \cdot g : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ *primitivno rekurzivne. Zašto?*
Neka je $zb : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, zb(a, b) = a + b$. *Imamo:*

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = zb(f(x), g(x))$$

pa zaključujemo da je $f + g$ *kompozicija funkcija* zb, f *i* g. *Dakle,* $f + g$ *je primitivno rekurzivna.*
Analogno dobivamo da je $f \cdot g$ *primitivno rekurzivna.*

Primjer 2.1.11. *Neka je* $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ *primitivno rekurzivna funkcija. Neka su* $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *i* $v : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ *funkcije definirane sa:*

$$g(x, y) = f(y, x)$$

$$h(x) = f(x, x)$$

$$v(x, y, z) = f(z, z).$$

Tada su g, h *i* v *također primitivno rekurzivne funkcije.*
Naime, imamo:

$$g(x, y) = f(\mathcal{I}_2^2(x, y), \mathcal{I}_1^2(x, y))$$
$$h(x) = f(\mathcal{I}_1^1(x), \mathcal{I}_1^1(x))$$
$$v(x, y, z) = f(\mathcal{I}_3^3(x, y, z), \mathcal{I}_3^3(x, y, z))$$

pa je svaka od tih funkcija primitivno rekurzivna kao kompozicija primitivno rekurzivnih funkcija.

Definicija 2.1.12. *Za* $x, y \in \mathbb{N}$ *označimo sa* $x \dot{-} y$ *broj definiran sa:*

$$x \dot{-} y = \begin{cases} x - y & , x \geq y \\ 0 & , \textit{inače}. \end{cases}$$

Funkciju $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, (x, y) \mapsto x \dot{-} y$ *nazivamo modificirano oduzimanje.*

Dokažimo da je modificirano oduzimanje primitivno rekurzivna funkcija.
Definiramo funkciju $h' : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ sa:

$$h'(y, x) = x \dot{-} y.$$

Imamo:

$$h'(0, x) = x = \mathcal{I}_1^1(x)$$

$$h'(y+1,x) = x\dot{-}(y+1) = pred(x\dot{-}y) = pred(h'(y,x)) = (pred \circ \mathcal{I}_1^3)(h'(y,x),y,x).$$

Dakle, h' je dobivena primitivnom rekurzijom od funkcija $\mathcal{I}_1^1$ i $pred \circ \mathcal{I}_1^3$ koje su primitivno rekurzivne pa je i h' primitivno rekurzivna.
Neka je h modificirano oduzimanje. Imamo:

$$h(x,y) = h'(y,x)$$

pa iz primjera 2.1.11 slijedi da je h primitivno rekurzivna funkcija.

Primjer 2.1.13. *Funkcija* $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, (x,y) \mapsto |x-y|$ *je primitivno rekurzivna.*
Naime, vrijedi:

$$|x-y| = (x\dot{-}y) + (y\dot{-}x)$$

pa tvrdnja slijedi iz činjenice da je zbroj primitivno rekurzivnih funkcija primitivno rekurzivna funkcija.

Primjer 2.1.14. *Funkcija* $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, (x,y) \mapsto \min\{x,y\}$ *je primitivno rekurzivna.*
Ovo slijedi iz činjenice da je

$$\min\{x,y\} = x\dot{-}(x\dot{-}y),$$

dakle,

$$\min\{x,y\} = h(\mathcal{I}_1^1(x,y), h(x,y))$$

gdje je h modificirano oduzimanje. Nadalje, $\forall x,y \in \mathbb{N}$ *vrijedi*

$$\max\{x,y\} = x + (y\dot{-}x) = zb(\mathcal{I}_1^1(x,y), h'(x,y)),$$

gdje su $zb, h' : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $zb(a,b) = a+b$, $h'(a,b) = h(b,a)$. *Stoga je funkcija* $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, (x,y) \mapsto \max\{x,y\}$ *primitivno rekurzivna.*

Neka su $\mathrm{sg}, \overline{\mathrm{sg}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcije definirane sa:

$$\mathrm{sg}(x) = \begin{cases} 1 & , x > 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases} \qquad \overline{\mathrm{sg}}(x) = \begin{cases} 0 & , x > 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases}$$

Imamo:

$$\mathrm{sg}(0) = 0$$

$$\mathrm{sg}(y+1) = 1 = (c_1 \circ \mathcal{I}_1^2)(\mathrm{sg}(y), y).$$

Iz propozicije 2.1.8 slijedi da je sg primitivno rekurzivna funkcija.
Nadalje,

$$\overline{\mathrm{sg}}(0) = 1$$

$$\overline{\mathrm{sg}}(y+1) = z_2(\overline{\mathrm{sg}}(y), y)$$

pa je i $\overline{\mathrm{sg}}$ primitivno rekurzivna.

Propozicija 2.1.15. *Neka je* $g : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ *primitivno rekurzivna funkcija. Definiramo funkciju* $f : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ *sa:*

$$f(a, x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^{a} g(i, x_1, \ldots, x_n), \quad a, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{N}.$$

Tada je f *primitivno rekurzivna funkcija.*

Dokaz. Vrijedi:

$$f(0, x_1, \ldots, x_n) = g(0, x_1, \ldots, x_n) = F(x_1, \ldots, x_n)$$

pri čemu je $F : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ definirana sa:

$$F(x_1, \ldots, x_n) = g(0, x_1, \ldots, x_n).$$

Vrijedi:

$$F(x_1, \ldots, x_n) = g(z_n(x_1, \ldots, x_n), \mathcal{I}^n_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \mathcal{I}^n_n(x_1, \ldots, x_n))$$

pa je F primitivno rekurzivna funkcija. Nadalje,

$$f(y+1, x_1, \ldots, x_n) = f(y, x_1, \ldots, x_n) + g(y+1, x_1, \ldots, x_n) = G(f(y, x_1, \ldots, x_n), y, x_1, \ldots, x_n)$$

pri čemu je $G : \mathbb{N}^{n+2} \to \mathbb{N}$, $G(a, y, x_1, \ldots, x_n) = a + g(y+1, x_1, \ldots, x_n)$. Funkcija G je zbroj funkcije $\mathcal{I}^{n+2}_1$ i funkcije $\mathbb{N}^{n+2} \to \mathbb{N}$, $(a, y, x_1, \ldots, x_n) \mapsto g(y+1, x_1, \ldots, x_n) = g((s \circ \mathcal{I}^{n+2}_2)(a, y, x_1, \ldots, x_n), \mathcal{I}^{n+2}_3(a, y, x_1, \ldots, x_n), \ldots, \mathcal{I}^{n+2}_{n+2}(a, y, x_1, \ldots, x_n))$ pa je stoga G primitivno rekurzivna funkcija.
Dakle,

$$f(0, x_1, \ldots, x_n) = F(x_1, \ldots, x_n)$$
$$f(y+1, x_1, \ldots, x_n) = G(f(y, x_1, \ldots, x_n), y, x_1, \ldots, x_n)$$

što znači da je f dobivena primitivnom rekurzijom od funkcija F i G.
Zaključak: f je primitivno rekurzivna funkcija. □

Propozicija 2.1.16. *Neka je* $g : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ *primitivno rekurzivna funkcija. Neka je* $f' : \mathbb{N}^{n+2} \to \mathbb{N}$ *funkcija definirana sa:*

$$f'(b, a, x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} \sum_{i=a}^{b} g(i, x_1, \ldots, x_n) & , a \leq b \\ 0 & , \textit{inače.} \end{cases}$$

Tada je f' *primitivno rekurzivna funkcija.*

Dokaz. Neka je $g' : \mathbb{N}^{n+2} \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa:

$$g'(i, a, x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} g(i, x_1, \ldots, x_n) & , a \leq i \\ 0 & , a > i. \end{cases}$$

Imamo

$$g'(i, a, x_1, \ldots, x_n) = g(i, x_1, \ldots, x_n) \cdot \overline{\mathrm{sg}}(a \dot{-} i)$$

pa je g' primitivno rekurzivna funkcija kao umnožak primitivno rekurzivnih funkcija.
($g(i, x_1, \ldots, x_n) = g(\mathcal{I}_1^{n+2}(i, a, x_1, \ldots, x_n), \mathcal{I}_3^{n+2}(i, a, x_1, \ldots, x_n), \ldots, \mathcal{I}_{n+2}^{n+2}(i, a, x_1, \ldots, x_n))$, $\overline{\mathrm{sg}}(a \dot{-} i) = (\overline{\mathrm{sg}} \circ h)(\mathcal{I}_2^{n+2}(i, a, x_1, \ldots, x_n), \mathcal{I}_1^{n+2}(i, a, x_1, \ldots, x_n))$, gdje je h modificirano oduzimanje).
Neka su $a, b, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{N}$ takvi da je $a \leq b$. Imamo:

$$\sum_{i=0}^{b} g'(i, a, x_1, \ldots, x_n) = \underbrace{\sum_{i=0}^{a-1} g'(i, a, x_1, \ldots, x_n)}_{=0} + \sum_{i=a}^{b} g'(i, a, x_1, \ldots, x_n) =$$

$$= \sum_{i=a}^{b} g(i, x_1, \ldots, x_n) = f'(b, a, x_1, \ldots, x_n).$$

Dakle,

$$f'(b, a, x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^{b} g'(i, a, x_1, \ldots, x_n) \tag{2.1}$$

Uočimo da ova jednakost vrijedi i kad je $a > b$(0=0). Iz jednakosti (2.1) i propozicije 2.1.15 slijedi da je f' primitivno rekurzivna funkcija. □

Propozicija 2.1.17. *Neka su $g : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ i $\alpha, \beta : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ primitivno rekurzivne funkcije. Neka je $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa:*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} \sum_{i=\alpha(x_1,\ldots,x_n)}^{\beta(x_1,\ldots,x_n)} g(i, x_1, \ldots, x_n) & , \alpha(x_1, \ldots, x_n) \leq \beta(x_1, \ldots, x_n) \\ 0 & , \textit{inače}. \end{cases}$$

Tada je f primitivno rekurzivna funkcija.

Dokaz. Neka je $f' : \mathbb{N}^{n+2} \to \mathbb{N}$ funkcija iz propozicije 2.1.16. Tada je

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f'(\beta(x_1, \ldots, x_n), \alpha(x_1, \ldots, x_n), x_1, \ldots, x_n).$$

Dakle,

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f'(\beta(x_1, \ldots, x_n), \alpha(x_1, \ldots, x_n), \mathcal{I}_1^n(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \mathcal{I}_n^n(x_1, \ldots, x_n))$$

pa zaključujemo da je f primitivno rekurzivna kao kompozicija primitivno rekurzivnih funkcija. □

Propozicija 2.1.18. *Neka je $g : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ primitivno rekurzivna funkcija. Definiramo funkciju $f : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ sa:*

$$f(a, x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=0}^{a} g(i, x_1, \ldots, x_n).$$

Tada je f primitivno rekurzivna funkcija.

Dokaz. Analogan dokazu propozicije 2.1.15. □

Propozicija 2.1.19. *Neka je $g : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ primitivno rekurzivna funkcija. Neka je $f' : \mathbb{N}^{n+2} \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa:*

$$f'(b, a, x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} \prod_{i=a}^{b} g(i, x_1, \ldots, x_n) & , a \leq b \\ 1 & , \textit{inače.} \end{cases}$$

Tada je f' primitivno rekurzivna funkcija.

Dokaz. Neka je $g' : \mathbb{N}^{n+2} \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa:

$$g'(i, a, x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} g(i, x_1, \ldots, x_n) & , a \leq i \\ 1 & , a > i. \end{cases}$$

Imamo

$$g'(i, a, x_1, \ldots, x_n) = g(i, x_1, \ldots, x_n) \cdot \overline{\mathrm{sg}}(a \dot{-} i) + \mathrm{sg}(a \dot{-} i)$$

pa kao u dokazu propozicije 2.1.16 zaključujemo da je g' primitivno rekurzivna funkcija. Vrijedi:

$$f'(b, a, x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=0}^{b} g'(i, a, x_1, \ldots, x_n)$$

pa iz propozicije 2.1.18 slijedi da je f' primitivno rekurzivna funkcija. □

Propozicija 2.1.20. *Neka su $g : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ i $\alpha, \beta : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ primitivno rekurzivne funkcije. Neka je $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa:*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} \prod_{i=\alpha(x_1,\ldots,x_n)}^{\beta(x_1,\ldots,x_n)} g(i, x_1, \ldots, x_n) & , \alpha(x_1, \ldots, x_n) \leq \beta(x_1, \ldots, x_n) \\ 1 & , \textit{inače.} \end{cases}$$

Tada je f primitivno rekurzivna funkcija.

Dokaz. Ovo slijedi iz propozicije 2.1.19 (slično kao u dokazu propozicije 2.1.17). □

Primjer 2.1.21. *Neka je $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa:*

$$f(x, y) = x^y.$$

Tada je za sve $x, y \in \mathbb{N}$ $\quad f(x, y) = \prod_{i=1}^{y} x$ tj.

$$f(x, y) = \prod_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} g(i, x, y),$$

gdje su $\alpha, \beta : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $g : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ funkcije definirane sa:

$$\alpha(x, y) = 1, \qquad \beta(x, y) = y, \qquad g(i, x, y) = x.$$

Funkcije α, β i g su očito primitivno rekurzivne pa iz propozicije 2.1.20 slijedi da je f primitivno rekurzivna funkcija.

Primjer 2.1.22. *Neka je $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa:*

$$f(x, y) = \begin{cases} \lfloor \frac{x}{y} \rfloor & , y \geq 1 \\ x & , y = 0. \end{cases}$$

Tada je f primitivno rekurzivna funkcija.
To slijedi iz činjenice da je

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{x} \overline{\mathrm{sg}}(iy \dot{-} x). \tag{2.2}$$

Dokažimo prvo da jednakost (2.2) vrijedi.
Ako je $y = 0$ onda je $f(x, y) = x$, a $\sum_{i=1}^{x} \overline{\mathrm{sg}}(iy \dot{-} x) = x$.
Pretpostavimo da je $y \geq 1$. Tada je $f(x, y) = \lfloor \frac{x}{y} \rfloor$. Označimo $k = \lfloor \frac{x}{y} \rfloor$. Tada je $k \leq \frac{x}{y} < k + 1$. Iz ovoga slijedi da $\forall i \in \{0, \ldots, k\}$ vrijedi $i \leq \frac{x}{y}$ pa je $iy \leq x$, a za svaki $i \geq k + 1$ vrijedi $\frac{x}{y} < i$ pa je $x < iy$. Uočimo da je $k \leq x$. Imamo:

$$\sum_{i=1}^{x} \overline{\mathrm{sg}}(iy \dot{-} x) = \sum_{i=1}^{k} \underbrace{\overline{\mathrm{sg}}(\underbrace{iy \dot{-} x}_{=0})}_{=1} + \sum_{i=k+1}^{x} \underbrace{\overline{\mathrm{sg}}(\underbrace{iy \dot{-} x}_{>0})}_{=0} = k.$$

Dakle, (2.2) vrijedi.
Definiramo funkciju $g : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ te $\alpha, \beta : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ sa:

$$g(i, x, y) = \overline{\mathrm{sg}}(iy \dot{-} x), \quad \alpha(x, y) = 1, \quad \beta(x, y) = x.$$

Tada je

$$f(x,y) = \sum_{i=\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} g(i,x,y)$$

pa je prema propoziciji 2.1.17 f primitivno rekurzivna funkcija ako su α, β i g primitivno rekurzivne funkcije.
Funkcije α i β su očito primitivno rekurzivne, a funkciju g možemo zapisati kao

$$g(i,x,y) = \overline{\mathrm{sg}}(\mathcal{I}^3_1(i,x,y) \cdot \mathcal{I}^3_3(i,x,y) \dot{-} \mathcal{I}^3_2(i,x,y))$$

pa vidimo da je i g primitivno rekurzivna funkcija.

Primjer 2.1.23. *Neka je $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa*

$$g(x,y) = \begin{cases} \lfloor \frac{x}{y} \rfloor & , y \geq 1 \\ 0 & , y = 0. \end{cases}$$

Funkcija g je primitivno rekurzivna jer je $g(x,y) = f(x,y) \cdot sg(y)$, gdje je f funkcija iz prethodnog primjera.

Primjer 2.1.24. *Neka je $ost : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa:*

$$ost(x,y) = x \dot{-} (y \cdot \left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor)$$

(uzimamo $\lfloor \frac{x}{0} \rfloor = x$). Tada je očito ost primitivno rekurzivna funkcija.
Uočimo sljedeće: ako su $x, y \in \mathbb{N}, y \neq 0$, onda je $ost(x,y)$ ostatak pri dijeljenju broja x sa y.

Definicija 2.1.25. *Neka je $S \subset \mathbb{N}^k$. Za skup S kažemo da je primitivno rekurzivan ako je njegova karakteristična funkcija $\chi_S : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ primitivno rekurzivna.*

Propozicija 2.1.26. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka su S i T primitivno rekurzivni podskupovi od $\mathbb{N}^k$. Tada su skupovi $S \cup T, S \cap T$ i S^c primitivno rekurzivni. Nadalje, za svaki $a \in \mathbb{N}^k$ je skup $\{a\}$ primitivno rekurzivan.*

Dokaz. Za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi:

$$\chi_{S \cap T}(x) = \chi_S(x) \cdot \chi_T(x)$$

$$\chi_{S \cup T}(x) = \mathrm{sg}(\chi_S(x) + \chi_T(x))$$

$$\chi_{S^c}(x) = \overline{\mathrm{sg}}(\chi_S(x))$$

pa slijedi da su skupovi $S \cup T, S \cap T$ i S^c primitivno rekurzivni.
Neka je $a \in \mathbb{N}^k, a = (a_1, \ldots, a_k)$. Vrijedi:

$$\chi_{\{a\}}(x_1, \ldots, x_k) = \overline{\mathrm{sg}}\,|x_1 - a_1| \cdot \ldots \cdot \overline{\mathrm{sg}}\,|x_k - a_k|. \tag{2.3}$$

Za svaki $i = 1, \ldots, k$ vrijedi

$$|x_i - a_i| = |\mathcal{I}_i^k(x_1, \ldots, x_k) - a_i|$$

pa koristeći primjer 2.1.13 zaključujemo da je funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}, (x_1, \ldots, x_k) \mapsto |x_i - a_i|$ primitivno rekurzivna. Iz ovoga i (2.3) zaključujemo da je $\chi_{\{a\}}$ primitivno rekurzivna kao produkt konačno mnogo primitivno rekurzivnih funkcija.
Zaključak: $\{a\}$ je primitivno rekurzivan skup. □

Primjer 2.1.27. *Neka je $S = \{0, 2, 4, \ldots\}$, tj. $S = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$. Tada je S primitivno rekurzivan skup.*
Naime, za svaki $x \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\chi_S(x) = \overline{\mathrm{sg}}(ost(x, 2))$$

iz čega zaključujemo da je S primitivno rekurzivan skup.

Primjer 2.1.28. *Neka je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa:*

$$f(x) = \prod_{i=2}^{x-1} ost(x, i).$$

Iz propozicije 2.1.20 slijedi da je f primitivno rekurzivna funkcija.
Uočimo sljedeće: ako je $x \geq 3$, onda je $f(x) = 0$ akko $\exists i \in \{2, \ldots, x-1\}$ takav da je $ost(x, i) = 0$ akko x nije prost. Dakle, $f(x) > 0$ akko je x prost. Uočimo da ovo vrijedi i za $x = 2$.

Neka je $\mathcal{P}$ skup svih prostih brojeva. Neka je f funkcija iz prethodnog primjera. Tada je

$$\chi_{\mathcal{P}}(x) = \mathrm{sg}(f(x)) \cdot \mathrm{sg}(x \dot{-} 1)$$

iz čega zaključujemo da je $\chi_{\mathcal{P}}$ primitivno rekurzivna funkcija pa je $\mathcal{P}$ primitivno rekurzivan skup.

Definicija 2.1.29. *Neka je $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ funkcija. Definiramo funkciju $g : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ sa:*

$$g(\mathbf{x}, z) = \begin{cases} \textit{najmanji } y \in \{0, \ldots z\} \textit{ takav da je } f(\mathbf{x}, y) = 0 & \textit{, ako takav } y \textit{ postoji} \\ z + 1 & \textit{, inače} \end{cases}$$

$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{N}^k, z \in \mathbb{N}$.
Kažemo da je funkcija g dobivena primjenom ograničenog μ operatora na funkciju f. Pišemo:

$$g(\mathbf{x}, z) = \mu y_{y \leq z}(f(\mathbf{x}, y) = 0).$$

Propozicija 2.1.30. *Neka je $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ primitivno rekurzivna funkcija. Neka je g funkcija dobivena primjenom ograničenog μ operatora na f. Tada je g primitivno rekurzivna funkcija.*

Dokaz. Tvrdimo da $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{N}^k$ i $z \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$g(\mathbf{x}, z) = \sum_{y=0}^{z} \left(\prod_{i=0}^{y} \operatorname{sg}(f(\mathbf{x}, i)) \right). \tag{2.4}$$

Imamo 2 slučaja:
1.slučaj $\exists y \in \{0, \ldots, z\}$ takav da je $f(\mathbf{x}, y) = 0$
Neka je k najmanji takav. Tada je $g(\mathbf{x}, z) = k$. S druge strane,

$$\sum_{y=0}^{z} \left(\prod_{i=0}^{y} \operatorname{sg}(f(\mathbf{x}, i)) \right) = \sum_{y=0}^{k-1} \left(\prod_{i=0}^{y} \operatorname{sg}(f(\mathbf{x}, i)) \right) + \sum_{y=k}^{z} \left(\prod_{i=0}^{y} \operatorname{sg}(f(\mathbf{x}, i)) \right) = k \cdot 1 + 0 = k.$$

2.slučaj $\nexists y \in \{0, \ldots, z\}$ takav da je $f(\mathbf{x}, y) = 0$
Tada je $g(\mathbf{x}, z) = z + 1$, a $\sum_{y=0}^{z} \left(\prod_{i=0}^{y} \operatorname{sg}(f(\mathbf{x}, i)) \right) = z + 1$.
Dakle (2.4) vrijedi.
Slijedi da je

$$g(\mathbf{x}, z) = \sum_{y=\alpha(\mathbf{x},z)}^{\beta(\mathbf{x},z)} g'(y, \mathbf{x}, z) \quad , \forall \mathbf{x} \in \mathbb{N}^k, z \in \mathbb{N}$$

pri čemu su $\alpha, \beta : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ i $g' : \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N}$ funkcije definirane sa:

$$\alpha(\mathbf{x}, z) = 0, \qquad \beta(\mathbf{x}, z) = z, \qquad g'(y, \mathbf{x}, z) = \prod_{i=0}^{y} \operatorname{sg}(f(\mathbf{x}, i)).$$

Stoga je prema propoziciji 2.1.17 dovoljno dokazati da je g' primitivno rekurzivna funkcija. Vrijedi:

$$g'(y, \mathbf{x}, z) = \prod_{i=\alpha'(y,\mathbf{x},z)}^{\beta'(y,\mathbf{x},z)} g''(i, y, \mathbf{x}, z)$$

pri čemu su $\alpha', \beta' : \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N}$, $g'' : \mathbb{N}^{k+3} \to \mathbb{N}$ funkcije definirane sa:

$$\alpha'(y, \mathbf{x}, z) = 0, \qquad \beta'(y, \mathbf{x}, z) = y, \qquad g''(i, y, \mathbf{x}, z) = \operatorname{sg}(f(\mathbf{x}, i)).$$

Po propoziciji 2.1.20 dovoljno je dokazati da je funkcija g'' primitivno rekurzivna. No to slijedi iz činjenice da je

$$g''(i,y,\mathbf{x},z) = (\mathrm{sg}\circ f)(\mathcal{I}_3^{k+3}(i,y,\mathbf{x},z),\dots,\mathcal{I}_{k+2}^{k+3}(i,y,\mathbf{x},z),\mathcal{I}_1^{k+3}(i,y,\mathbf{x},z)).$$

□

Korolar 2.1.31. *Neka je $f:\mathbb{N}^{k+1}\to\mathbb{N}$ primitivno rekurzivna funkcija. Neka je $\alpha:\mathbb{N}^k\to\mathbb{N}$ primitivno rekurzivna funkcija. Neka je $g:\mathbb{N}^k\to\mathbb{N}$ funkcija definirana sa:*

$$g(\mathbf{x}) = \mu y_{y\le\alpha(\mathbf{x})}(f(\mathbf{x},y)=0).$$

Tada je g primitivno rekurzivna funkcija.

Dokaz. Neka je $g':\mathbb{N}^{k+1}\to\mathbb{N}$ funkcija definirana sa:

$$g'(\mathbf{x},z) = \mu y_{y\le z}(f(\mathbf{x},y)=0).$$

Prema prethodnoj propoziciji slijedi da je g' primitivno rekurzivna funkcija. Primijetimo da $\forall\mathbf{x}\in\mathbb{N}^k$ vrijedi

$$g(\mathbf{x}) = g'(\mathbf{x},\alpha(\mathbf{x}))$$

iz čega slijedi da je g primitivno rekurzivna funkcija. □

Primjer 2.1.32. *Neka je $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ funkcija definirana sa:*

$$g(x) = \lfloor\sqrt{x}\rfloor.$$

Tvrdimo da je g primitivno rekurzivna funkcija.
Neka je $x\in\mathbb{N}$ te neka je $k=g(x)$. Tada je $k\le\sqrt{x}<k+1$ pa je $k^2\le x<(k+1)^2$. Nadalje, očito je $k\le x$. Iz ovoga zaključujemo da je k najmanji broj $y\in\{0,\dots,x\}$ takav da je $x<(y+1)^2$.
Za sve $x,y\in\mathbb{N}$ vrijedi $x<(y+1)^2$ akko $(y+1)^2\dot{-}x>0$ akko $\overline{\mathrm{sg}}((y+1)^2\dot{-}x)=0$.
Definiramo funkciju $f:\mathbb{N}^2\to\mathbb{N}$ sa:

$$f(x,y) = \overline{\mathrm{sg}}((y+1)^2\dot{-}x).$$

Tada je f primitivno rekurzivna funkcija i $x<(y+1)^2$ akko $f(x,y)=0$, stoga je k najmanji $y\in\{0,\dots,x\}$ takav da je $f(x,y)=0$.
Zaključak: $g(x)=\mu y_{y\le x}(f(x,y)=0)$.
Iz korolara 2.1.31 slijedi da je g primitivno rekurzivna funkcija.

Primjer 2.1.33. *Neka je $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa:*

$$g(x,t) = \lfloor \sqrt[t+1]{x} \rfloor.$$

Neka su $x, t \in \mathbb{N}$ te neka je $k = g(x,t)$. Tada je $k \leq \sqrt[t+1]{x} < k+1$ pa je $k^{t+1} \leq x < (k+1)^{t+1}$ pa kao u prethodnom primjeru zaključujemo da je k najmanji broj $y \in \{0, \ldots, x\}$ takav da je $f(x,t,y) = 0$ pri čemu je $f : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ funkcija dana sa:

$$f(x,t,y) = \overline{\mathrm{sg}}((y+1)^{t+1} \dot{-} x).$$

Dakle, $g(x,t) = \mu y_{y \leq x}(f(x,t,y) = 0)$.
Iz korolara 2.1.31 slijedi da je g primitivno rekurzivna funkcija.

Primjer 2.1.34. *Neka je $\sqrt{2} = a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots$ decimalni prikaz od $\sqrt{2}$ ($\sqrt{2} = 1,4142\ldots$). Neka je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa:*

$$f(n) = a_n, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dokažimo da je f primitivno rekurzivna funkcija.
Za $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$\sqrt{2} \cdot 10^n = a_0 a_1 \ldots a_n, a_{n+1} \ldots$$

pa je

$$\lfloor \sqrt{2} \cdot 10^n \rfloor = a_0 a_1 \ldots a_n.$$

Iz ovoga slijedi da je $a_n = ost(\lfloor \sqrt{2} \cdot 10^n \rfloor, 10)$.
Dakle, $f(n) = ost(\lfloor \sqrt{2 \cdot 10^{2n}} \rfloor, 10)$.
Koristeći primjer 2.1.32 zaključujemo da je f primitivno rekurzivna funkcija.

Za $n \in \mathbb{N}$ sa p_n označimo $(n+1)$-vi prosti broj. Dakle, $p_0 = 2, p_1 = 3, p_2 = 5, \ldots$.

Lema 2.1.35. *Postoji primitivno rekurzivna funkcija $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je*

$$p_n \leq g(n), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dokaz. Definiramo funkciju $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sa:

$$g(0) = 2$$

$$g(y+1) = (g(y))! + 1.$$

Koristeći propoziciju 2.1.8 i primjer 2.1.9 zaključujemo da je g primitivno rekurzivna funkcija. Uočimo da je $g(y) < g(y+1), \forall y \in \mathbb{N}$.
Dokažimo da je $p_n \leq g(n), \forall n \in \mathbb{N}$ indukcijom.
Jasno je da je $p_0 \leq g(0)$.

Pretpostavimo da je $p_n \leq g(n)$ za neki $n \in \mathbb{N}$. Pretpostavimo da je $p_{n+1} > g(n+1)$.
Tada je
$$p_n \leq g(n) < g(n+1) < p_{n+1}.$$
Ovo povlači da $g(n+1)$ nije prost broj pa je stoga djeljiv nekim od brojeva $p_0, \dots, p_n$.
Dakle, $\exists i \in \{0, \dots, n\}$ takav da $p_i \mid g(n+1)$.
No, $g(n+1) = (g(n))! + 1$, a broj $(g(n))!$ je očito djeljiv sa svakim brojem $k \in \{1, \dots, g(n)\}$ pa i sa p_i.
Dakle, $p_i \mid g(n+1), p_i \mid (g(n))!$ pa slijedi $p_i \mid 1$ što je nemoguće.
Dakle, $p_{n+1} \leq g(n+1)$. □

Propozicija 2.1.36. *Funkcija $\mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto p_n$ je primitivno rekurzivna.*

Dokaz. Neka je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa:
$$f(x) = \sum_{i=1}^{x} \chi_{\mathcal{P}}(i).$$
Iz propozicije 2.1.17 zaključujemo da je f primitivno rekurzivna funkcija.
Uočimo sljedeće: $\forall x \in \mathbb{N}$ vrijedi $f(x) = card\{i \leq x \mid i \in \mathcal{P}\}$.
Neka je $n \in \mathbb{N}$. Tada je $f(p_n) = n+1$ i $f(x) \leq n, \forall x \in \mathbb{N}, x < p_n$. Znamo da je $p_n \leq g(n)$.
Stoga je
$$p_n = \min\{x \in \{0, \dots, g(n)\} \mid f(x) = n+1\}.$$
Neka je $\tilde{f} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa:
$$\tilde{f}(n, x) = |f(x) - (n+1)|.$$
Tada je $\tilde{f}$ primitivno rekurzivna funkcija i $\forall n, x \in \mathbb{N}$ vrijedi $f(x) = n+1$ akko $\tilde{f}(n, x) = 0$.
Stoga je
$$p_n = \min\{x \in \{0, \dots, g(n)\} \mid \tilde{f}(n, x) = 0\}$$
tj. $p_n = \mu x_{x \leq g(n)}(\tilde{f}(n, x) = 0), \forall n \in \mathbb{N}$.
Iz korolara 2.1.31 slijedi da je funkcija $n \mapsto p_n$ primitivno rekurzivna. □

Propozicija 2.1.37. *Neka je $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa:*
$$h(j, i) = \begin{cases} \textit{eksponent s kojim } p_i \textit{ ulazi u rastav od } j \textit{ na proste faktore} & , j \geq 1 \\ 1 & , \textit{inače.} \end{cases}$$
Tada je h primitivno rekurzivna funkcija.

Dokaz. Neka su $j, i \in \mathbb{N}$, $j > 0$. Označimo $k = h(j, i)$. Tada vrijedi: $p_i^k \mid j$ i $p_i^{k+1} \nmid j$. Stoga je k najmanji $y \in \mathbb{N}$ takav da $p_i^{y+1} \nmid j$.
Općenito, ako je $a \in \mathbb{N}, a \geq 2$, onda je $n < a^n, \forall n \in \mathbb{N}$ što se lako dokazuje indukcijom.
Stoga je $j < p_i^j$ što povlači da p_i^j ne dijeli $j \Rightarrow k \leq j$.
Zaključak:

$$k = \min\{y \in \{0, \dots, j\} \mid p_i^{y+1} \nmid j\} \tag{2.5}$$

Neka je $g : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa:

$$g(j, i, y) = \overline{\mathrm{sg}}(ost(j, p_i^{y+1})).$$

Tada je g primitivno rekurzivna funkcija te $p_i^{y+1} \nmid j$ akko $g(j, i, y) = 0$ pa prema (2.5) imamo:

$$h(j, i) = \mu y_{y \leq j}(g(j, i, y) = 0) \tag{2.6}$$

Uočimo da (2.6) vrijedi i za j=0.
Iz korolara 2.1.31 slijedi da je funkcija h primitivno rekurzivna. □

Definicija 2.1.38. *Neka je h funkcija iz prethodne propozicije. Za $j, i \in \mathbb{N}$ broj $h(j, i)$ ćemo označavati sa $(j)_i$.*

Propozicija 2.1.39. *Neka je $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcija definirana na sljedeći način:*

$$h(0) = 0, \qquad h(1) = 0$$

a za $x \geq 2$ $h(x)$ je najveći $n \in \mathbb{N}$ takav da $p_n \mid x$.
Tada je h primitivno rekurzivna funkcija.

Dokaz. Neka je $x \in \mathbb{N}, x \geq 2$. Neka je $k = h(x)$.
Dakle,

$$k = \max\{n \in \mathbb{N} \mid p_n \mid x\}.$$

Iz činjenice da je $p_n < p_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$ indukcijom lako slijedi da je $n \leq p_n, \forall n \in \mathbb{N}$.
Stoga za svaki $n \in \mathbb{N}, n > x$ vrijedi $x < n \leq p_n$ pa $p_n \nmid x$. Prema tome $p_n \nmid x, \forall n > x$.
Budući da $p_k \mid x$, imamo $k \leq x$.
Dakle,

$$k = \max\{n \in \{0, \dots, x\} \mid p_n \mid x\}.$$

Iz ovoga zaključujemo da je

$$k = x \dot{-} \min\{n \in \{0, \dots, x\} \mid p_{x \dot{-} n} \mid x\}$$

pa je

$$h(x) = x \dot{-} \mu n_{n \leq x}(ost(x, p_{x \dot{-} n}) = 0).$$

Uočimo da ovo vrijedi i za $x = 0$ i $x = 1$.
Iz korolara 2.1.31 slijedi da je funkcija h primitivno rekurzivna. □

Propozicija 2.1.40. *Neka su $n, k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te neka su $F_1, \dots, F_n : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ primitivno rekurzivne funkcije. Neka su $S_1, \dots, S_n$ primitivno rekurzivni podskupovi od $\mathbb{N}^k$ takvi da za svaki $\mathbf{x} \in \mathbb{N}^k$ postoji točno jedan $i \in \{1, \dots, n\}$ takav da je $\mathbf{x} \in S_i$. Neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa:*

$$f(\mathbf{x}) = \begin{cases} F_1(\mathbf{x}) & , \textit{ako je } \mathbf{x} \in S_1 \\ \vdots & \\ F_n(\mathbf{x}) & , \textit{ako je } \mathbf{x} \in S_n. \end{cases}$$

Tada je f primitivno rekurzivna funkcija.

Dokaz. Za svaki $\mathbf{x} \in \mathbb{N}^k$ vrijedi:

$$F(\mathbf{x}) = F_1(\mathbf{x}) \cdot \chi_{S_1}(\mathbf{x}) + \dots + F_n(\mathbf{x}) \cdot \chi_{S_n}(\mathbf{x}).$$

Znači f je primitivno rekurzivna funkcija kao zbroj primitivno rekurzivnih funkcija. □

Propozicija 2.1.41. *Neka su $f, g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ funkcije koje se razlikuju u najviše konačno mnogo točaka, tj. takve da je skup $\{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) \neq g(x)\}$ konačan. Pretpostavimo da je f primitivno rekurzivna. Tada je i g primitivno rekurzivna.*

Dokaz. Neka su $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}^k$ takvi da je $f(x) = g(x), \forall x \in \mathbb{N}^k\backslash\{a_1, \dots, a_n\}$. Pri tome uzimamo da je $a_i \neq a_j, \forall i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j$. Vrijedi sljedeće:

$$g(x) = \begin{cases} g(a_1) & , x \in \{a_1\} \\ \vdots & \\ g(a_n) & , x \in \{a_n\} \\ f(x) & , x \in \mathbb{N}^k\backslash\{a_1, \dots, a_n\}. \end{cases}$$

Iz propozicija 2.1.26 i 2.1.40 slijedi da je g primitivno rekurzivna. □

Primjer 2.1.42. *Neka je $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa:*

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y & , x \leq 10 \\ xy & , x > 10, y \geq 5 \\ 2 & , \textit{inače}. \end{cases}$$

Tada je f primitivno rekurzivna funkcija.
Dokažimo to.
Neka su $F_1, F_2, F_3 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcije definirane sa:

$$F_1(x, y) = x + y, \qquad F_2(x, y) = xy, \qquad F_3(x, y) = 2.$$

Funkcije F_1, F_2, F_3 su očito primitivno rekurzivne.
Nadalje, neka su

$$S_1 = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 \mid x \le 10\}, \qquad S_2 = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 \mid x > 10, y \ge 5\}, \qquad S_3 = (S_1 \cup S_2)^c.$$

Zašto je S_1 primitivno rekurzivan skup?
Imamo:

$$\chi_{S_1}(x,y) = \overline{\text{sg}}(x \dot{-} 10)$$

pa zaključujemo da je S_1 primitivno rekurzivan skup.
Nadalje,

$$S_2 = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 \mid x > 10\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 \mid y \ge 5\}$$

pa je S_2 primitivno rekurzivan kao presjek dva primitivno rekurzivna skupa.
Da je S_3 primitivno rekurzivan slijedi iz propozicije 2.1.26.
Imamo:

$$f(x,y) = \begin{cases} F_1(x,y) & ,(x,y) \in S_1 \\ F_2(x,y) & ,(x,y) \in S_2 \\ F_3(x,y) & ,(x,y) \in S_3. \end{cases}$$

Iz propozicije 2.1.40 slijedi da je f primitivno rekurzivna funkcija.

2.2 Parcijalno rekurzivne funkcije

Definicija 2.2.1. *Definiramo niz skupova $\mathscr{S}_0, \mathscr{S}_1, \dots \mathscr{S}_n, \dots$ induktivno na sljedeći način: Neka je $\mathscr{S}_0$ skup svih inicijalnih funkcija. Pretpostavimo da je $n \in \mathbb{N}$ te da smo definirali $\mathscr{S}_n$. Neka je A skup svih funkcija koje se mogu dobiti primjenom kompozicije, primitivne rekurzije ili μ operatora na funkcije iz $\mathscr{S}_n$. Tada stavimo $\mathscr{S}_{n+1} = \mathscr{S}_n \cup A$.*
Za funkciju f kažemo da je parcijalno rekurzivna ako postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $f \in \mathscr{S}_n$.

Dakle, jasno je da svaka parcijalno rekurzivna funkcija f oblika $f : S \to \mathbb{N}$, gdje je $S \subset \mathbb{N}^k$ za neki $k \ge 1$.
Uočimo: $\mathscr{S}_0 \subset \mathscr{S}_1 \subset \dots \subset \mathscr{S}_n \subset \dots$.
Jasno $\cup_{n=1}^{\infty} \mathscr{S}_n$ je skup svih parcijalno rekurzivnih funkcija.
Uočimo sljedeće:

- Inicijalne funkcije su parcijalno rekurzivne.
- Ako je h dobivena kompozicijom funkcija $f, g_1, \dots, g_k$ koje su parcijalno rekurzivne, onda je i h parcijalno rekurzivna.
- Ako je h dobivena primjenom primitivne rekurzije na parcijalno rekurzivne funkcije f i g, onda je i h parcijalno rekurzivna.

- Ako je h dobivena primjenom μ operatora na parcijalno rekurzivnu funkciju, onda je i h parcijalno rekurzivna.

Uočimo sljedeće: $\cup_{n=1}^{\infty}\mathscr{S}_n$ je najmanji skup funkcija oblika $S \to \mathbb{N}, S \subset \mathbb{N}^k$ koji sadrži inicijalne funkcije te je zatvoren na kompoziciju, primitivnu rekurziju i μ operator, u smislu da je $\cup_{n=1}^{\infty}\mathscr{S}_n \subset \mathcal{K}$ za svaki takav skup funkcija $\mathcal{K}$.

Propozicija 2.2.2. *Svaka primitivno rekurzivna funkcija je parcijalno rekurzivna.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{A}$ skup primitivno rekurzivnih funkcija te $\mathcal{B}$ skup parcijalno rekurzivnih funkcija. Tada je $\mathcal{B}$ skup koji sadrži inicijalne funkcije i zatvoren je na kompoziciju i primitivnu rekurziju. S obzirom da je $\mathcal{A}$ najmanji takav skup, imamo $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ □

Primjer 2.2.3. *Neka je $f : \mathbb{N}\backslash\{0\} \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa:*

$$f(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{N}\backslash\{0\}.$$

Imamo:

$$f(x) \simeq \mu y[\overline{\text{sg}}(\mathcal{I}_1^2(x, y)) = 0]$$

tj.f je dobivena primjenom μ operatora na funkciju $\overline{\text{sg}} \circ \mathcal{I}_1^2$ koja je parcijalno rekurzivna (jer je primitivno rekurzivna). Iz ovoga zaključujemo da je f parcijalno rekurzivna.

Primjer 2.2.4. *Neka je f funkcija dobivena primjenom μ operatora na funkciju $\mathcal{I}_1^2$. Dakle, f je parcijalno rekurzivna i vrijedi:*

$$f(x) \simeq \mu y[\mathcal{I}_1^2(x, y) = 0].$$

Tada je domena od f jednaka $\{0\}$ i $f(0) = 0$.

Primjer 2.2.5. *Neka je $S = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x \geq y\}$ te neka je $f : S \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa:*

$$f(x, y) = x - y.$$

Neka je $g : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa:

$$g(x, y, z) = |x - (y + z)|.$$

Prema primjeru 2.1.13 funkcija g je primitivno rekurzivna.
Uočimo da je $g(x, y, z) = 0$ akko $x = y + z$. Stoga vrijedi:

$$f(x, y) \simeq \mu z(g(x, y, z) = 0)$$

pa je f parcijalno rekurzivna.

Primjer 2.2.6. *Neka je* $f : \mathbb{N}\backslash\{0\} \to \mathbb{N}$ *funkcija definirana sa:*

$$f(x) = x - 1.$$

Definiramo g na sljedeći način:

$$g(x, y) = |x - (y + 1)|, \quad \forall(x, y) \in \mathbb{N}^2.$$

Tada je g primitivno rekurzivna funkcija i vrijedi

$$f(x) \simeq \mu y(g(x, y) = 0).$$

Iz ovoga zaključujemo da je f parcijalno rekurzivna.

Primjer 2.2.7. *Neka je f funkcija dobivena primjenom* μ *operatora na funkciju* $\mathcal{I}_1^3$. *Tada je f parcijalno rekurzivna i*

$$f(x, y) \simeq \mu z(\mathcal{I}_1^3(x, y, z) = 0).$$

Imamo: $dom(f) = \{0\} \times \mathbb{N}$.

Primjer 2.2.8. *Neka je* $S \subset \mathbb{N}^k, S$ *konačan te neka je* $f : S \to \mathbb{N}$. *Tada je f parcijalno rekurzivna funkcija.*
Dokažimo to: Definiramo funkciju $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ *sa:*

$$g(x) = \begin{cases} f(x) + 1 & , x \in S \\ 0 & , \textit{inače.} \end{cases}$$

Funkcija g se od nul-funkcije $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ *razlikuje u najviše konačno mnogo točaka. Stoga je prema propoziciji 2.1.41 g primitivno rekurzivna funkcija.*
Neka je $h : \mathbb{N}\backslash\{0\} \to \mathbb{N}$ *definirana sa:*

$$h(x) = x - 1.$$

Prema primjeru 2.2.6 h je parcijalno rekurzivna. Vrijedi

$$f(x) \simeq h(g(x))$$

tj. f je kompozicija funkcija h i g. Stoga slijedi da je f parcijalno rekurzivna.

Definicija 2.2.9. *Parcijalno rekurzivne funkcije koje su totalne nazivamo rekurzivne funkcije.*

Uočimo da je svaka primitivno rekurzivna funkcija rekurzivna.

Teorem 2.2.10. *Svaka parcijalno rekurzivna funkcija je RAM izračunljiva.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{A}$ skup svih parcijalno rekurzivnih , $\mathcal{K}$ skup svih RAM izračunljivih funkcija. Tada je skup $\mathcal{K}$ zatvoren na kompoziciju, primitivnu rekurziju i μ operator (teoremi 1.2.4, 1.2.8, 1.2.12).
Nadalje, očito je da je svaka inicijalna funkcija RAM izračunljiva.
Dakle, $\mathcal{K}$ sadrži inicijalne funkcije i zatvoren je na spomenuta tri operatora. Stoga je $\mathcal{A} \subset \mathcal{K}$ jer je $\mathcal{A}$ najmanji takav skup funkcija. Time je tvrdnja teorema dokazana. □

Definicija 2.2.11. *Neka je $(r_j) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ te neka je $i \in \mathbb{N}$. Kažemo da je i kod niza (r_j) ako je $(i)_j = r_j, \forall j \in \mathbb{N}$.*

Primjer 2.2.12. *Imamo* $48 = 2^4 \cdot 3^1$ *pa je 48 kod niza* $(4, 1, 0, 0, \ldots)$.

Uočimo: ako je i kod niza (r_j), onda $\exists n \in \mathbb{N}$ takav da je $r_j = 0, \forall j \geq n$.
S druge strane, ako je (r_j) niz za koji $\exists m \in \mathbb{N}$ takav da je $r_j = 0, \forall j \geq m$, onda $\exists i \in \mathbb{N}$ takav da je i kod od (r_j). Naime, $i = p_0^{r_0} \cdot p_1^{r_1} \cdot \ldots \cdot p_m^{r_m}$.

Definicija 2.2.13. *Neka je p instrukcija. Definiramo broj x na sljedeći način:*

- *ako je p = INC R_i, tj. $p = (0, i)$, neka je $x = 2^0 \cdot 3^i$*
- *ako je p = DEC R_i, k, tj. $p = (1, i, k)$, neka je $x = 2^1 \cdot 3^i \cdot 5^k$*
- *ako je p = GOTO k, tj. $p = (2, k)$, neka je $x = 2^2 \cdot 3^k$*

Za broj x kažemo da je kod instrukcije p.
Neka je $i \in \mathbb{N}$ te $(s, (r_j)) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Kažemo da je i kod od $(s, (r_j))$ ako je i kod niza $(s, r_0, r_1, \ldots)$.

Propozicija 2.2.14. *Postoji primitivno rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ koja ima sljedeće svojstvo:*
ako je x kod instrukcije q = INC R_i te y kod od $(s, (r_j)) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, onda je $f(x, y)$ kod od $\bar{q}(s, (r_j))$.

Dokaz. Neka je x kod instrukcije q = INC R_i te y kod od $(s, (r_j))$. Tada je $x = 2^0 3^i$, a $y = 2^s p_1^{r_0} p_2^{r_1} \cdot \ldots$.
Vrijedi:

$$\bar{q}(s, (r_j)) = (s + 1, (r_0, r_1, \ldots, r_{i-1}, r_i + 1, r_{i+1}, \ldots))$$

pa je broj

$$z = 2^{s+1} p_1^{r_0} p_2^{r_1} \cdot \ldots \cdot p_i^{r_{i-1}} p_{i+1}^{r_i+1} p_{i+2}^{r_{i+1}} \cdot \ldots$$

kod od $\bar{q}(s,(r_j))$. No $z = 2 \cdot p_{i+1} \cdot y$.
Uočimo da je $i = (x)_1$ (jer je $x = 2^0 3^i$). Stoga je $z = 2 \cdot p_{(x)_1+1} \cdot y$.
Definiramo funkciju $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ sa:

$$f(x,y) = 2 \cdot p_{(x)_1+1} \cdot y.$$

Pokazali smo sljedeće:

ako je x kod od $q = \text{INC } R_i$, a y kod od $(s,(r_j))$, onda je $f(x,y)$ kod od $\bar{q}(s,(r_j))$.

Preostaje još dokazati da je f primitivno rekurzivna funkcija. Dovoljno je dokazati da je funkcija $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definirana sa:

$$\varphi(x) = p_{(x)_1+1}$$

primitivno rekurzivna. Znamo da je funkcija $\mathbb{N} \to \mathbb{N}, i \mapsto p_i$ primitivno rekurzivna i funkcija $x \mapsto (x)_1 + 1$ je također primitivno rekurzivna (propozicija 2.1.37). Funkcija φ je primitivno rekurzivna kao kompozicija ovih dviju funkcija. □

Propozicija 2.2.15. *Postoji primitivno rekurzivna funkcija $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ koja ima sljedeće svojstvo:*

ako je x kod instrukcije $q = DEC\ R_i, k$ te y kod od $(s,(r_j)) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, onda je $g(x,y)$ kod od $\bar{q}(s,(r_j))$.

Dokaz. Neka je x kod instrukcije $q = \text{DEC } R_i, k$ te y kod od $(s,(r_j))$. Tada je $x = 2^1 3^i 5^k$, a $y = 2^s p_1^{r_0} p_2^{r_1} \cdot \ldots$.
Uočimo da je tada $i = (x)_1, k = (x)_2$ te $r_i = (y)_{i+1} = (y_{(x)_1+1})$.
Vrijedi:

$$\bar{q}(s,(r_j)) = \begin{cases} (s+1,(r_0,r_1,\ldots,r_{i-1},r_i-1,r_{i+1},\ldots)) & ,r_i > 0 \\ (k,(r_0,r_1,\ldots)) & ,r_i = 0. \end{cases}$$

Definiramo broj $z \in \mathbb{N}$ sa:

$$z = \begin{cases} 2^{s+1} p_1^{r_0} p_2^{r_1} \cdot \ldots \cdot p_i^{r_{i-1}} p_{i+1}^{r_i - 1} p_{i+2}^{r_{i+1}} \cdot \ldots & ,r_i > 0 \\ 2^k p_1^{r_0} p_2^{r_1} \cdot \ldots & ,r_i = 0. \end{cases}$$

Očito je da je z kod od $\bar{q}(s,(r_j))$. Imamo:

$$z \quad = \quad \begin{cases} 2 \cdot \frac{y}{p_{i+1}} & ,r_i > 0 \\ \frac{y}{2^s} \cdot 2^k & ,r_i = 0 \end{cases} \quad = \quad \begin{cases} 2 \cdot \lfloor \frac{y}{p_{(x)_1+1}} \rfloor & ,(y)_{(x)_1+1} > 0 \\ \lfloor \frac{y}{2^{(y)_0}} \rfloor \cdot 2^{(x)_2} & ,(y)_{(x)_1+1} = 0. \end{cases}$$

Definiramo funkciju $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ sa:

$$g(x,y) = \begin{cases} 2 \cdot \lfloor \frac{y}{p_{(x)_1+1}} \rfloor & ,(y)_{(x)_1+1} > 0 \\ \lfloor \frac{y}{2^{(y)_0}} \rfloor \cdot 2^{(x)_2} & ,(y)_{(x)_1+1} = 0. \end{cases}$$

Pokazali smo sljedeće:

ako je x kod od q = DEC R_i, k, a y kod od $(s,(r_j))$, tada je $g(x,y)$ kod od $\bar{q}(s,(r_j))$.

Definiramo funkcije $F_1, F_2 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ sa:

$$F_1(x,y) = 2 \cdot \left\lfloor \frac{y}{p_{(x)_1+1}} \right\rfloor, \qquad F_2(x,y) = \left\lfloor \frac{y}{2^{(y)_0}} \right\rfloor \cdot 2^{(x)_2}$$

te skupove $S_1, S_2 \subset \mathbb{N}^2$ sa:

$$S_1 = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 \mid (y)_{(x)_1+1} > 0\}, \qquad S_2 = S_1^c.$$

Funkcije F_1 i F_2 su primitivno rekurzivne što slijedi iz činjenice da su funkcije $(a,b) \mapsto \lfloor \frac{a}{b} \rfloor$ i $(a,b) \mapsto a^b$ primitivno rekurzivne.

Skup S_1 je primitivno rekurzivan jer je

$$\chi_{S_1} = \mathrm{sg}((y)_{(x)_1+1}).$$

Stoga je i S_2 primitivno rekurzivan skup.

Vrijedi:

$$g(x,y) = \begin{cases} F_1(x,y) & ,(x,y) \in S_1 \\ F_2(x,y) & ,(x,y) \in S_2 \end{cases}$$

pa iz propozicije 2.1.40 slijedi da je g primitivno rekurzivna funkcija. □

Propozicija 2.2.16. *Postoji primitivno rekurzivna funkcija $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ koja ima sljedeće svojstvo:*

ako je x kod instrukcije q = GOTO k te y kod od $(s,(r_j)) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, onda je $f(x,y)$ kod od $\bar{q}(s,(r_j))$.

Dokaz. Neka je x kod instrukcije q = GOTO k te y kod od $(s,(r_j))$. Tada je $x = 2^2 3^k$, a $y = 2^s p_1^{r_0} p_2^{r_1} \cdot \ldots$.

Vrijedi:

$$\bar{q}(s,(r_j)) = (k,(r_j)).$$

Stoga je broj

$$z = \frac{y}{2^s} \cdot 2^k$$

kod od $\bar{q}(s,(r_j))$. Vrijedi:

$$z = \left\lfloor \frac{y}{2^{(y)_0}} \right\rfloor \cdot 2^{(x)_1}.$$

Definiramo funkciju $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ sa:

$$h(x,y) = \left\lfloor \frac{y}{2^{(y)_0}} \right\rfloor \cdot 2^{(x)_1}.$$

Očito je h tražena funkcija. □

Propozicija 2.2.17. *Postoji primitivno rekurzivna funkcija $\alpha : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da vrijedi sljedeće:*

ako je x kod instrukcije q te y kod od $(s, (r_j)) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, onda je $\alpha(x, y)$ kod od $\bar{q}(s, (r_j))$.

Dokaz. Neka su f, g, h funkcije iz propozicija 2.2.14, 2.2.15 i 2.2.16. Neka je $\alpha : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa:

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & , (x)_0 = 0 \\ g(x, y) & , (x)_0 = 1 \\ h(x, y) & , (x)_0 \geq 2. \end{cases}$$

Tada je α tražena funkcija (primitivna rekurzivnost od α slijedi iz propozicije 2.1.40). □

Definicija 2.2.18. *Neka je P program. Neka su $q_0, \ldots, q_n$ instrukcije programa P. Za $i \in \{0, \ldots, n\}$ neka je k_i kod instrukcije q_i. Neka je $x = p_0^{k_0} p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{k_n}$. Za x kažemo da je kod programa P.*

Primjer 2.2.19. *Neka je P sljedeći program:*

$q_0 = DEC\ R_1, 2$

$q_1 = GOTO\ 0$

$q_2 = INC\ R_2.$

Tada su brojevi

$$k_0 = 2^1 3^1 5^2 = 150$$

$$k_1 = 2^2 3^0 = 4$$

$$k_2 = 2^0 3^2 = 9$$

kodovi instrukcija od P.
Stoga je kod od P broj $2^{150} \cdot 3^4 \cdot 5^9$.

Definicija 2.2.20. *Neka je* dulj : $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *funkcija definirana sa:*

$$\text{dulj}(x) = \begin{cases} \max\{n \in \mathbb{N} \mid p_n \mid x\} & , x \geq 2 \\ 0 & , \textit{inače.} \end{cases}$$

Prema propoziciji 2.1.39 funkcija dulj je primitivno rekurzivna.
Uočimo sljedeće: ako je P program s instrukcijama $q_0, \ldots, q_n$ te ako je x kod programa P, onda je $\text{dulj}(x) = n$. Naime, $x = p_0^{k_0} \cdot \ldots \cdot p_n^{k_n}$, gdje su $k_0, \ldots, k_n$ kodovi instrukcija $q_0, \ldots, q_n$, a općenito je kod svake instrukcije očito veći ili jednak od 1. Prema tome je $k_n \geq 1$ pa je očito $\text{dulj}(x) = n$.

Propozicija 2.2.21. *Postoji primitivno rekurzivna funkcija $\beta : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ sa sljedećim svojstvom:*

ako je P program, $(s,(r_j)) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ te ako je x kod programa P, a y kod od $(s,(r_j))$, onda je $\beta(x,y)$ kod od $\bar{P}(s,(r_j))$.

Dokaz. Pretpostavimo da je x kod programa P te y kod od $(s,(r_j))$. Neka su $q_0, \ldots, q_n$ instrukcije od P te $k_0, \ldots, k_n$ njihovi kodovi. Tada je $x = p_0^{k_0} \cdot \ldots \cdot p_n^{k_n}$.
Ako je $s \leq n$, onda je $(x)_s$ kod instrukcije q_s. Uočimo da je $s = (y)_0$. Stoga je $(x)_{(y)_0}$ kod od q_s.
Imamo:

$$\bar{P}(s,(r_j)) = \begin{cases} \bar{q}_s(s,(r_j)) & , s \leq n \\ (s,(r_j)) & , s > n \end{cases} = \begin{cases} \bar{q}_s(s,(r_j)) & , (y)_0 \leq \operatorname{dulj}(x) \\ (s,(r_j)) & , \text{inače.} \end{cases}$$

Neka je α funkcija iz prethodne propozicije.
Ako je $s \leq n$, onda je $\alpha((x)_{(y)_0}, y)$ kod od $\bar{q}_s(s,(r_j))$.
Definiramo funkciju $\beta : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ sa:

$$\beta(x,y) = \begin{cases} \alpha((x)_{(y)_0}, y) & , (y)_0 \leq \operatorname{dulj}(x) \\ y & , \text{inače.} \end{cases}$$

Iz svega navedenoga slijedi da je β tražena funkcija. $\square$

Definicija 2.2.22. *Neka je $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija. Za $z \in \mathbb{N}$ definiramo funkciju $f_z : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sa:*

$$f_z(x) = f(z,x), \quad x \in \mathbb{N}.$$

Lema 2.2.23. *Neka je $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ primitivno rekurzivna funkcija. Neka je $H : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa:*

$$H(n,z,x) = f_z^{(n)}(x)$$

(n-ta iteracija funkcije f_z u x).
Tada je H primitivno rekurzivna funkcija.

Dokaz. Imamo:

$$H(0,z,x) = x$$

$$H(n+1,z,x) = f_z^{(n+1)}(x) = f_z(f_z^{(n)}(x)) = f(z, f_z^{(n)}(x)) = f(z, H(n,z,x)).$$

Dakle,

$$H(0,z,x) = \mathcal{I}_2^2(z,x)$$

$$H(n+1,z,x) = G(H(n,z,x), n, z, x)$$

gdje je $G : \mathbb{N}^4 \to \mathbb{N}$ definirana sa:

$$G(a, n, z, x) = f(z, a).$$

Očito je G primitivno rekurzivna pa je i H primitivno rekurzivna. □

Propozicija 2.2.24. *Neka je β funkcija iz propozicije 2.2.21. Neka je x kod nekog programa P te y kod od $(s, (r_j)) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Tada $\forall N \in \mathbb{N}$ vrijedi da je $\beta_x^{(N)}(y)$ kod od $\bar{P}^{(N)}((s, (r_j))$.*

Dokaz. Dokažimo tvrdnju indukcijom po N.
Za $N = 0$ tvrdnja je jasna.
Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $N \in \mathbb{N}$. Tada je

$$\beta_x^{(N+1)}(y) = \beta_x(\beta_x^{(N)}(y)) = \beta(x, \beta_x^{(N)}(y)).$$

Prema induktivnoj pretpostavci i propoziciji 2.2.21, $\beta(x, \beta_x^{(N)}(y))$ je kod od $\bar{P}(\bar{P}^{(N)}(s, (r_j))) = \bar{P}^{(N+1)}(s, (r_j))$. Time je tvrdnja dokazana. □

Napomena 2.2.25. *Ako je $S \subset \mathbb{N}^{k+1}$ primitivno rekurzivan skup, onda je k-mjesna funkcija g definirana sa:*

$$g(x) \simeq \mu y((x, y) \in S)$$

parcijalno rekurzivna (dom(g) se sastoji od onih $x \in \mathbb{N}^k$ za koje $\exists y$ takav da je $(x, y) \in S$ i pri tome je $g(x)$ najmanji takav y).
Uočimo: $(x, y) \in S \quad \Leftrightarrow \quad \chi_S(x, y) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{\mathrm{sg}}(\chi_S(x, y)) = 0.$

2.3 Kleenijev teorem o normalnoj formi

Definicija 2.3.1. *Neka je $e \in \mathbb{N}$ te $k \in \mathbb{N}, k \geq 1$. Definiramo k-mjesnu funkciju $\{e\}_k$ na sljedeći način:*

- *Pretpostavimo da je e kod nekog programa P. Neka se domena od $\{e\}_k$ sastoji od svih $(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{N}^k$ takvih da je $(0, x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots) \in dom(P^*)$ i u tom slučaju je $\{e\}_k(x_1, \ldots, x_k)$ prva komponenta niza $P^*(0, x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots)$*

- *pretpostavimo da e nije kod niti jednog programa P. Neka je tada $\{e\}_k$ prazna funkcija (domena je prazan skup).*

Primjer 2.3.2. *Neka je $k \in \mathbb{N}, k \geq 1$. Promotrimo funkciju $\{2\}_k$. Broj 2 je kod programa P koji ima samo jednu instrukciju $q_0 = INC\ R_0$. Očito je $dom(P^*) = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ i*

$$P^*(r_0, r_1, \ldots) = (r_0 + 1, r_1, \ldots).$$

Stoga je $dom(\{2\}_k) = \mathbb{N}^k$ *i*

$$\{2\}_k(x) = 1, \quad \forall x \in \mathbb{N}^k.$$

Nadalje, uočimo da broj 5 *nije kod niti jednog programa. Stoga je* $\{5\}_k$ *prazna funkcija za svaki* $k \geq 1$.

Napomena 2.3.3. *Ako je* e *kod nekog programa* P *te* $k \geq 1$, *onda program* P *računa funkciju* $\{e\}_k$. *Iz ovoga zaključujemo sljedeće:*

> *ako je* f *k-mjesna funkcija, onda je* f *RAM izračunljiva akko* $\exists e \in \mathbb{N}$ *takav da je* $f = \{e\}_k$.

Lema 2.3.4. *Neka je* $k \in \mathbb{N}, k \geq 1$ *te neka su* $f, g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ *primitivno rekurzivne funkcije. Tada su sljedeći skupovi primitivno rekurzivni:*

$$A = \{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) = g(x)\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) \leq g(x)\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) < g(x)\}.$$

Dokaz. Imamo:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & , \overline{\text{sg}}(|f(x) - g(x)|) = 1 \\ 0 & , \text{inače.} \end{cases}$$

Prema tome

$$\chi_A(x) = \overline{\text{sg}}(|f(x) - g(x)|)$$

pa je A primitivno rekurzivan skup (χ_A je kompozicija primitivno rekurzivnih funkcija). Nadalje,

$$\chi_B(x) = \overline{\text{sg}}(f(x) \dot{-} g(x))$$

te

$$C = B \backslash A = B \cap A^c$$

čime je tvrdnja dokazana. □

Propozicija 2.3.5. *Neka je* $Prog = \{e \in \mathbb{N} \mid e \text{ je kod nekog programa}\}$. *Tada je* $Prog$ *primitivno rekurzivan skup.*

Dokaz. Neka je

$$S = \{(x, n) \in \mathbb{N}^2 \mid x \text{ je kod neke instrukcije te je labela te instrukcije (ako postoji) } \leq n\}.$$

Dokažimo da je S primitivno rekurzivan skup.
Skup S je unija sljedećih skupova:

$$\{(x, n) \in \mathbb{N}^2 \mid (x)_0 = 0, \text{dulj}(x) \leq 1, x \neq 0\}$$

$$\{(x,n) \in \mathbb{N}^2 \mid (x)_0 = 1, \mathrm{dulj}(x) \leq 2, (x)_2 \leq n\}$$

$$\{(x,n) \in \mathbb{N}^2 \mid (x)_0 = 2, \mathrm{dulj}(x) \leq 1, (x)_1 \leq n\}$$

a svaki od tih skupova je presjek 3 skupa koji su po lemi 2.3.4 primitivno rekurzivni pa je i S primitivno rekurzivan skup (propozicija 2.1.26).
Primjetimo: $x \in Prog \quad \Leftrightarrow \quad ((x)_i, \mathrm{dulj}(x)) \in S, \forall i \in \{0, \ldots, \mathrm{dulj}(x)\}$
pa je

$$\chi_{Prog}(x) = \prod_{i=0}^{\mathrm{dulj}(x)} \chi_S((x)_i, \mathrm{dulj}(x))$$

pa slijedi tvrdnja propozicije. □

Lema 2.3.6. *Neka je $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te neka su $g : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$, $f_1, f_2 : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ i $u : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ primitivno rekurzivne funkcije. Tada postoje primitivno rekurzivne funkcije $U : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ i $G : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ takve da vrijedi:*

$$u(\mu N(g(z,N) = 0), f_1(z), f_2(z)) \simeq U(\mu y(G(z,y) = 0)), \quad z \in \mathbb{N}^k.$$

Dokaz. Definiramo funkciju $U : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sa:

$$U(a) = u((a)_0, (a)_1, (a)_2).$$

Neka je $z \in \mathbb{N}^k$. Tvrdimo da je

$$u(\mu N(g(z,N) = 0), f_1(z), f_2(z)) \simeq U(\mu y(g(z,(y)_0) = 0), (y)_1 = f_1(z), (y)_2 = f_2(z)). \quad (2.7)$$

Pretpostavimo da $\exists N \in \mathbb{N}$ takav da je $g(z,N) = 0$. Neka je $\tilde{N}$ najmanji takav.
Definiramo:

$$\tilde{y} = 2^{\tilde{N}} 3^{f_1(z)} 5^{f_2(z)}.$$

Tvrdimo da je $\tilde{y}$ najmanji $y \in \mathbb{N}$ takav da je

$$g(z,(y)_0) = 0, \qquad (y)_1 = f_1(z), \qquad (y)_2 = f_2(z). \quad (2.8)$$

Jasno je da $\tilde{y}$ zadovoljava (2.8).
S druge strane, pretpostavimo da je $y \in \mathbb{N}$ takav da y zadovoljava (2.8). Tada je $g(z,(y)_0) = 0$ pa je $\tilde{N} \leq (y)_0$. Stoga je

$$y \geq 2^{(y)_0} 3^{(y)_1} 5^{(y)_2} = 2^{(y)_0} 3^{f_1(z)} 5^{f_2(z)} \geq 2^{\tilde{N}} 3^{f_1(z)} 5^{f_2(z)} = \tilde{y}.$$

Dakle, $\tilde{y}$ je najmanji y koji zadovoljava (2.8).
Imamo da je lijeva strana od (2.7) jednaka $u(\tilde{N}, f_1(z), f_2(z))$, a desna $U(\tilde{y})$. No,

$$U(\tilde{y}) = u((\tilde{y})_0, (\tilde{y})_1, (\tilde{y})_2) = u(\tilde{N}, f_1(z), f_2(z)).$$

S druge strane, ako $\exists y \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi (2.8), onda za $N = (y)_0$ vrijedi $g(z, N) = 0$. Time je dokazano da (2.7) vrijedi.
Neka je S skup svih $(z, y) \in \mathbb{N}^{k+1}$ takvih da vrijedi (2.8). Tada je S primitivno rekurzivan skup kao presjek tri primitivno rekurzivna skupa.
Definiramo funkciju $G : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ sa:

$$G(z, y) = \overline{\mathrm{sg}}(\chi_S(z, y)).$$

Tada je $G(z, y) = 0$ akko $(z, y) \in S$, tj. $G(z, y) = 0$ akko za (z, y) vrijedi (2.8).
Iz ovoga i (2.7) slijedi:

$$u(\mu N(g(z, N) = 0), f_1(z), f_2(z)) \simeq U(\mu y(G(z, y) = 0)).$$

□

Teorem 2.3.7. *Neka je $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Tada postoje primitivno rekurzivne funkcije $U : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ i $G : \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N}$ takve da je*

$$\{e\}_k(x) \simeq U(\mu y(G(e, x, y) = 0)), \quad e \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{N}^k.$$

Dokaz. Neka je β funkcija iz propozicije 2.2.21. Definiramo $H : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ sa:

$$H(N, x, y) = \beta_x^{(N)}(y).$$

Iz leme 2.2.23 slijedi da je H primitivno rekurzivna funkcija.
S druge strane, iz propozicije 2.2.24 slijedi:

ako je x kod programa P te y kod od $(s, (r_j)) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, onda je $\forall N \in \mathbb{N}$ $H(N, x, y)$ kod od $\bar{P}^{(N)}((s, (r_j))$.

Neka je $e \in \mathbb{N}$ te neka su $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{N}$. Pretpostavimo da je e kod nekog programa P. Pretpostavimo da je $(x_1, \ldots, x_k) \in dom(\{e\}_k)$. Tada je $\{e\}_k(x_1, \ldots, x_k)$ prva komponenta niza $P^*(0, x_1, \ldots, x_k, 0, 0, \ldots)$.
Dakle, ako želimo odrediti $\{e\}_k(x_1, \ldots, x_k)$, treba naći $N \in \mathbb{N}$ takav da je prva komponenta od $\bar{P}^{(N)}(0, (0, x_1, \ldots, x_k, 0, 0, \ldots))$ veća od dulj(e) i tada je druga komponenta ovog niza upravo to što nama treba, tj. $\{e\}_k(x_1, \ldots, x_k)$.
Neka je $y = p_2^{x_1} \cdot \ldots \cdot p_{k+1}^{x_k}$. Tada je y kod od $(0, (0, x_1, \ldots, x_k, 0, 0, \ldots))$. Stoga imamo: $\forall N \in \mathbb{N}$ je $H(N, e, y)$ kod od $\bar{P}^{(N)}(0, (0, x_1, \ldots, x_k, 0, 0, \ldots))$.
Dakle, tražimo $N \in \mathbb{N}$ takav da je

$$(H(N, e, y))_0 > \mathrm{dulj}(e)$$

i tada je

$$\{e\}_k(x_1, \ldots, x_k) = (H(N, e, y))_1.$$

S druge strane, ako $(x_1, \ldots, x_k) \notin dom(\{e\}_k)$, onda ne postoji $N \in \mathbb{N}$ takav da je $(H(N, e, y))_0 >$ dulj(e).
Definiramo funkciju $\delta : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ sa:

$$\delta(x_1, \ldots, x_k) = p_2^{x_1} \cdot \ldots \cdot p_{k+1}^{x_k}.$$

Tada je δ očito primitivno rekurzivna funkcija.
Definiramo (k+1)-mjesnu funkciju γ sa:

$$\gamma(e, x_1, \ldots, x_k) \simeq \mu N(e \in ProgiH(N, e, \delta(x_1, \ldots, x_k)))_0 > \text{dulj}(e)).$$

Tada je γ parcijalno rekurzivna funkcija i domena od γ se sastoji od svih $(e, x_1, \ldots, x_k)$ takvih da je e kod nekog programa i $(x_1, \ldots, x_k) \in dom(\{e\}_k)$.
U tom slučaju vrijedi:

$$\{e\}_k(x_1, \ldots, x_k) = (H(\gamma(e, x_1, \ldots, x_k), e, \delta(x_1, \ldots, x_k)))_1.$$

Imamo sljedeći zaključak:

$$\{e\}_k(x_1, \ldots, x_k) \simeq (H(\gamma(e, x_1, \ldots, x_k), e, \delta(x_1, \ldots, x_k)))_1, \quad e, x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{N}.$$

Imajući na umu definiciju funkcije γ, dolazimo do sljedećeg zaključka: postoje primitivno rekurzivne funkcije $u : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ i $g : \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N}$ takve da je

$$\{e\}_k(x_1, \ldots, x_k) \simeq u(\mu N(g(e, x_1, \ldots, x_k, N) = 0), e, \delta(x_1, \ldots, x_k)).$$

Prema lemi 2.3.6 postoje primitivno rekurzivne funkcije $U : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ i $G : \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N}$ takve da je

$$\{e\}_k(x_1, \ldots x_k) \simeq U(\mu y(G(e, x_1, \ldots, x_k, y) = 0)).$$

Time je teorem dokazan. □

Korolar 2.3.8. *Svaka RAM izračunljiva funkcija je parcijalno rekurzivna.*

Dokaz. Ako je f RAM izračunljiva funkcija, onda $\exists e \in \mathbb{N}$ takav da je $f = \{e\}_k$, za neki $k \in \mathbb{N}$. Prema teoremu 2.3.7, funkcija $\{e\}_k$ je parcijalno rekurzivna. □

Korolar 2.3.9. *Funkcija je RAM izračunljiva akko je parcijalno rekurzivna.*

Teorem 2.3.10. *(Kleenijev teorem o normalnoj formi)*
Neka je $k \in \mathbb{N}, k \geq 1$. Tada postoje primitivno rekurzivne funkcije $U : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ i $G : \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N}$ takve da za svaku k-mjesnu parcijalno rekurzivnu funkciju f postoji $e \in \mathbb{N}$ takav da je

$$f(x) \simeq U(\mu y(G(e, x, y) = 0)).$$

Dokaz. Neka su U, G funkcije iz teorema 2.3.7 (za dani k). Ako je f parcijalno rekurzivna, onda je i RAM izračunljiva pa $\exists e \in \mathbb{N}$ takav da je $f = \{e\}_k$ iz čega slijedi tvrdnja (teorem 2.3.7). □

Primjer 2.3.11. *Iz Kleenijevog teorema o normalnoj formi slijedi da postoje primitivno rekurzivne funkcije $U : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ i $G : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ takve da za svaku 1-mjesnu parcijalno rekurzivnu funkciju f postoji $e \in \mathbb{N}$ takav da je*

$$f(x) \simeq U(\mu y(G(e, x, y) = 0)).$$

Definiramo 2-mjesnu funkciju L na sljedeći način:

$$L(e, x) \simeq U(\mu y(G(e, x, y) = 0)).$$

Funkcija L je parcijalno rekurzivna i vrijedi sljedeće:

za svaku 1-mjesnu parcijalno rekurzivnu funkciju f postoji $e \in \mathbb{N}$ takav da je $f(x) \simeq L(e, x)$.

Primjer 2.3.12. *Postoji li primitivno rekurzivna funkcija $L : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ koja ima sljedeće svojstvo:*

za svaku primitivno rekurzivnu funkciju $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\exists e \in \mathbb{N}$ takav da je $f(x) = L(e, x), \forall x \in \mathbb{N}$?

Ne!

Pretpostavimo suprotno, da takva funkcija L postoji. Definiramo $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sa:

$$f(x) = L(x, x) + 1.$$

Tada je f primitivno rekurzivna funkcija pa $\exists e \in \mathbb{N}$ takav da je

$$f(x) = L(e, x), \quad \forall x \in \mathbb{N}.$$

Dakle,

$$L(x, x) + 1 = L(e, x), \quad \forall x \in \mathbb{N}.$$

Posebno, za $x = e$ je

$$L(e, e) + 1 = L(e, e) \quad \Longrightarrow\Longleftarrow$$

Znači, takva funkcija L ne postoji.

Napomena 2.3.13. *Neka je $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, neka su $S, T \subset \mathbb{N}^k$ te neka su $f : S \to \mathbb{N}$ i $g : T \to \mathbb{N}$ parcijalno rekurzivne funkcije. Definiramo funkciju $h : S \cap T \to \mathbb{N}$ sa:*

$$h(x) = f(x) + g(x), \quad \forall x \in S \cap T$$

(možemo reći ovako: h je k-mjesna funkcija definirana sa: $h(x) \simeq f(x) + g(x)$).
Tada je i h parcijalno rekurzivna funkcija.
Naime, h je kompozicija funkcija zb, f, g, gdje je $zb : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $zb(x, y) = x + y$.
Isto tako, funkcija $S \cap T \to \mathbb{N}, x \mapsto f(x) \cdot g(x)$ je parcijalno rekurzivna.

Primjer 2.3.14. *Neka je L funkcija iz primjera 2.3.11. Neka je f 1-mjesna funkcija definirana sa:*

$$f(x) \simeq L(x, x) + 1.$$

Tada je f parcijalno rekurzivna po prethodnoj napomeni.
Neka je S domena funkcije f. Tvrdimo da se funkcija f ne može proširiti do rekurzivne funkcije, tj. ne postoji rekurzivna funkcija $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je

$$g(x) = f(x), \quad \forall x \in S.$$

Pretpostavimo suprotno, da takva funkcija g postoji. Tada $\exists e \in \mathbb{N}$ takav da je

$$g(x) = L(e, x), \quad \forall x \in \mathbb{N}.$$

Ovo posebno znači da je $(e, e) \in dom(L)$ pa iz definicije od f slijedi da je $e \in S$. Imamo:

$$L(e, e) + 1 = f(e) = g(e) = L(e, e) \quad \Longrightarrow\Longleftarrow$$

Napomena 2.3.15. *Iz Kleenijevog teorema o normalnoj formi slijedi, neformalno govoreći, ovo:*

> *svaka parcijalno rekurzivna funkcija može se u konačno mnogo koraka dobiti od inicijalnih funkcija primjenom kompozicije, primitivne rekurzije i točno jednom primjenom μ operatora.*

Napomena 2.3.16. *Iz dokaza teorema 2.3.7 i leme 2.3.6 slijedi da funkcija U iz Kleenijevog teorema o normalnoj formi ne ovisi o k.*

Definicija 2.3.17. *Za $S \subset \mathbb{N}^k$ kažemo da je rekurzivan ako mu je karakteristična funkcija rekurzivna.*

Posve analogno kao propozicije 2.1.40 i 2.1.26 dokazujemo sljedeće propozicije.

Propozicija 2.3.18. *Neka su $n, k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te neka su $F_1, \ldots, F_n : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije. Neka su $S_1, \ldots, S_n$ rekurzivni podskupovi od $\mathbb{N}^k$ takvi da $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{N}^k\ \exists! i \in \{1, \ldots, n\}$ takav da je $\mathbf{x} \in S_i$. Neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa:*

$$f(\mathbf{x}) = \begin{cases} F_1(\mathbf{x}) & , \text{ako je } \mathbf{x} \in S_1 \\ \vdots & \\ F_n(\mathbf{x}) & , \text{ako je } \mathbf{x} \in S_n. \end{cases}$$

Tada je f rekurzivna funkcija.

Propozicija 2.3.19. *Neka je $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te neka su S i T rekurzivni podskupovi od $\mathbb{N}^k$. Tada su skupovi $S \cup T, S \cap T$ i S^c rekurzivni. Nadalje, $\forall a \in \mathbb{N}^k$ je skup $\{a\}$ rekurzivan.*

Propozicija 2.3.20. *Neka je $S \subset \mathbb{N}$ te $f : S \to \mathbb{N}$ parcijalno rekurzivna funkcija. Pretpostavimo da je S rekurzivan skup. Tada se f može proširiti do rekurzivne funkcije.*

Dokaz. Ako je $S = \emptyset$ tvrdnja je jasna.
Pretpostavimo da je $S \neq \emptyset$. Odaberimo $s_0 \in S$. Definirajmo funkciju $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sa:

$$h(x) = \begin{cases} x & , x \in S \\ s_0 & , x \notin S. \end{cases}$$

Očito je h rekurzivna funkcija.
Neka je g kompozicija funkcija f i h. Uočimo da je $h(x) \in S, \forall x \in \mathbb{N}$. Stoga je $dom(g) = \mathbb{N}$. Očito je g parcijalno rekurzivna pa je i rekurzivna. Nadalje, za svaki $x \in S$ vrijedi $h(x) = x$. Stoga je $g(x) = f(x), \forall x \in S$. □

Napomena 2.3.21. *Iz primjera 2.3.14 i propozicije 2.3.20 zaključujemo da postoji $S \subset \mathbb{N}$ i parcijalno rekurzivna funkcija $f : S \to \mathbb{N}$ tako da S nije rekurzivan skup.*
Budući da je f parcijalno rekurzivna, znamo da je RAM izračunljiva pa postoji program P koji ju računa. Uočimo da je tada:

$$S = \{x \in \mathbb{N} \mid P \textit{ staje za } (0, x, 0, 0, \ldots)\}.$$

No S nije rekurzivan pa χ_S nije rekurzivna funkcija što znači da ne postoji program P koji računa χ_S. Iz ovoga zaključujemo da postoji program P takav da ne postoji program Q s ovim svojstvom:

$\forall x \in \mathbb{N}$, Q staje za $(0, x, 0, 0, \ldots)$ i u registar R_0 zapisuje 1 ako P staje za $(0, x, 0, 0, \ldots)$, a zapisuje u R_0 0 ako P ne staje za $(0, x, 0, 0, \ldots)$.

Definicija 2.3.22. *Neka je $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, $S \subset \mathbb{N}^k$, $f : S \to \mathbb{N}$ te $e \in \mathbb{N}$. Kažemo da je e indeks funkcije f ako je $f = \{e\}_k$.*

Iz napomene 2.3.3 slijedi da funkcija ima indeks akko je RAM izračunljiva.

Propozicija 2.3.23. *Neka su $n, k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Pretpostavimo da su $S_1, \ldots, S_n$ rekurzivni podskupovi od $\mathbb{N}^k$ takvi da $\forall x \in \mathbb{N}^k$ postoji najviše jedan $i \in \{1, \ldots, n\}$ takav da je $x \in S_i$. Nadalje, neka su $F_1, \ldots, F_n$ k-mjesne parcijalno rekurzivne funkcije. Neka je f k-mjesna funkcija definirana na sljedeći način:*

$$f(x) \simeq \begin{cases} F_1(x) & , x \in S_1 \\ \vdots & \\ F_n(x) & , x \in S_n. \end{cases}$$

Tada je f parcijalno rekurzivna funkcija.

Dokaz. Neka je $i \in \{1, \dots, n\}$. Budući da je F_i parcijalno rekurzivna funkcija, ona je i RAM izračunljiva pa $\exists e_i \in \mathbb{N}$ takav da je e_i indeks od F_i. Definiramo funkciju $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ sa:

$$g(x) = \begin{cases} e_1 & , x \in S_1 \\ \vdots & \\ e_n & , x \in S_n \\ 0 & , \text{inače.} \end{cases}$$

Iz propozicije 2.3.18 slijedi da je g rekurzivna funkcija.
Uočimo da vrijedi:

$$f(x) \simeq \{g(x)\}_k(x), \quad \forall x \in \mathbb{N}^k.$$

Iz ovoga slijedi da je f parcijalno rekurzivna funkcija. Naime, neka je H (k+1)-mjesna funkcija definirana sa:

$$H(e, x) \simeq \{e\}_k(x), \quad e \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{N}^k.$$

Tada je H parcijalno rekurzivna funkcija prema teoremu 2.3.7 te imamo

$$f(x) \simeq \{g(x)\}_k(x) \simeq H(g(x), x).$$

$\square$

Napomena 2.3.24. *Uočimo da propoziciju 2.3.20 alternativno možemo dokazati koristeći propoziciju 2.3.23.*

Poglavlje 3

Rekurzivno prebrojivi skupovi

Definicija 3.0.25. *Neka je $S \subset \mathbb{N}$. Za S kažemo da je rekurzivno prebrojiv skup ako je $S = \emptyset$ ili ako postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $f(\mathbb{N}) = S$.*

Propozicija 3.0.26. *Neka je S rekurzivan podskup od $\mathbb{N}$. Tada je S rekurzivno prebrojiv.*

Dokaz. Ako je $S = \emptyset$ tvrdnja je jasna.
Pretpostavimo da je $S \neq \emptyset$. Odaberimo $s_0 \in S$. Definiramo funkciju $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sa:

$$f(x) = \begin{cases} x & , x \in S \\ s_0 & , x \notin S. \end{cases}$$

Tada je f rekurzivna funkcija i $f(\mathbb{N}) = S$. □

Lema 3.0.27. *Neka je T neprazan, rekurzivan podskup od $\mathbb{N}^2$. Tada postoje rekurzivne funkcije $\tau_1, \tau_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takve da je $T = \{(\tau_1(x), \tau_2(x)) \mid x \in \mathbb{N}\}$.*

Dokaz. Uočimo da je $\mathbb{N}^2 = \{((x)_1, (x)_2) \mid x \in \mathbb{N}\}$. Neka je $(t_1, t_2) \in T$.
Definiramo funkcije $\tau_1, \tau_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sa:

$$\tau_1(x) = \begin{cases} (x)_1 & \text{, ako je } ((x)_1, (x)_2) \in T \\ t_1 & \text{, inače} \end{cases}, \qquad \tau_2(x) = \begin{cases} (x)_2 & \text{, ako je } ((x)_1, (x)_2) \in T \\ t_2 & \text{, inače.} \end{cases}$$

Funkcije τ_1, τ_2 su rekurzivne po propoziciji 2.3.18.
Za svaki $x \in \mathbb{N}$ očito vrijedi:

$$(\tau_1(x), \tau_2(x)) = \begin{cases} ((x)_1, (x)_2) & \text{, ako je } ((x)_1, (x)_2) \in T \\ (t_1, t_2) & \text{, inače.} \end{cases}$$

Iz ovoga je očito da je $\{(\tau_1(x), \tau_2(x)) \mid x \in \mathbb{N}\} = T$. □

Teorem 3.0.28. *Neka je $S \subset \mathbb{N}$. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

1. *S je rekurzivno prebrojiv skup*

2. *S je domena neke parcijalno rekurzivne funkcije*

3. *postoji primitivno rekurzivan skup $T \subset \mathbb{N}^2$ takav da $\forall x \in \mathbb{N}$ vrijedi:*

   $x \in S \Leftrightarrow \exists y \in \mathbb{N}$ *takav da je* $(x, y) \in T$

4. *postoji rekurzivan skup $T \subset \mathbb{N}^2$ takav da $\forall x \in \mathbb{N}$ vrijedi:*

   $x \in S \Leftrightarrow \exists y \in \mathbb{N}$ *takav da je* $(x, y) \in T$

Dokaz. Dokažimo $1 \Rightarrow 2$.
Pretpostavimo da je S rekurzivno prebrojiv. Ako je $S = \emptyset$, onda je jasno da je domena neke parcijalno rekurzivne funkcije.
Pretpostavimo da je $S \neq \emptyset$. Tada postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $S = f(\mathbb{N})$. Neka je g 1-mjesna funkcija definirana sa:

$$g(x) \simeq \mu y(|f(y) - x| = 0).$$

Očito je g parcijalno rekurzivna funkcija.
Nadalje, za $x \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$x \in dom(g) \Leftrightarrow \exists y \in \mathbb{N} \text{ takav da je } |f(y) - x| = 0 \Leftrightarrow \exists y \in \mathbb{N} \text{ takav da je } f(y) = x \Leftrightarrow x \in S.$$

Dakle, S je domena od g.
Dokažimo $2 \Rightarrow 3$.
Pretpostavimo da vrijedi 2, tj. da postoji parcijalno rekurzivna funkcija $f : S \to \mathbb{N}$. Prema Kleenijevom teoremu o normalnoj formi postoje primitivno rekurzivne funkcije $U : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ i $G : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ te $e \in \mathbb{N}$ takve da je

$$f(x) \simeq U(\mu y(G(e, x, y) = 0)).$$

Iz ovoga zaključujemo:

$$x \in dom(f) \Leftrightarrow \exists y \in \mathbb{N} \text{ takav da je } G(e, x, y) = 0.$$

Definiramo:

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid G(e, x, y) = 0\}.$$

Imamo:

$$\chi_T(x, y) = \overline{\mathrm{sg}}(G(e, x, y))$$

pa zaključujemo da je T primitivno rekurzivan skup. Vrijedi:

$$x \in S \Leftrightarrow \exists y \in \mathbb{N} \text{ takav da je } (x, y) \in T.$$

Očito je da 3 $\Rightarrow$ 4.
Dokažimo još 4 $\Rightarrow$ 1.
Pretpostavimo da je $T \subset \mathbb{N}^2$ rekurzivan skup takav da $\forall x \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$x \in S \Leftrightarrow \exists y \in \mathbb{N} \text{ takav da je } (x, y) \in T. \tag{3.1}$$

Ako je $S = \emptyset$ onda je očito rekurzivno prebrojiv.
Pretpostavimo da je $S \neq \emptyset$. Tada je i $T \neq \emptyset$ pa prema lemi 3.0.27 postoje rekurzivne funkcije τ_1, τ_2 takve da je

$$T = \{(\tau_1(x), \tau_2(x)) \mid x \in \mathbb{N}\}.$$

Iz ovoga i (3.1) slijedi da je

$$S = \{\tau_1(x) \mid x \in \mathbb{N}\}.$$

Dakle, $S = \tau_1(\mathbb{N})$ pa je S rekurzivno prebrojiv. □

Korolar 3.0.29. *Postoji rekurzivno prebrojiv skup koji nije rekurzivan.*

Dokaz. Prema napomeni 2.3.21 postoji parcijalno rekurzivna funkcija $f : S \to \mathbb{N}$ takva da S nije rekurzivan skup, a iz prethodnog teorema slijedi da je S rekurzivno prebrojiv. □

Korolar 3.0.30. *Neka je $S \subset \mathbb{N}$. Tada je S rekurzivno prebrojiv akko postoji 1-mjesna parcijalno rekurzivna funkcija f čija je slika jednaka S.*

Dokaz. Ako je S rekurzivno prebrojiv, onda je jasno da takva funkcija f postoji (za $S = \emptyset$, f je prazna funkcija).
Pretpostavimo sada da $S = Im(f)$, gdje je $f : T \to \mathbb{N}$ parcijalno rekurzivna funkcija, $T \subset \mathbb{N}$. Ako je $T = \emptyset$, onda je $S = \emptyset$ pa je S rekurzivno prebrojiv. Pretpostavimo $T \neq \emptyset$. Prema teoremu 3.0.28 skup T je rekurzivno prebrojiv pa postoji rekurzivna funkcija $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $g(\mathbb{N}) = T$. Promotrimo kompoziciju $f \circ g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. To je rekurzivna funkcija i $(f \circ g)(\mathbb{N}) = S$ pa je S rekurzivno prebrojiv. □

Propozicija 3.0.31. *Neka su S i T rekurzivno prebrojivi skupovi. Tada su i skupovi $S \cup T$ i $S \cap T$ rekurzivno prebrojivi.*

Dokaz. Dokažimo da je $S \cup T$ rekurzivno prebrojiv skup.
Ako je $S = \emptyset$ ili $T = \emptyset$ tvrdnja je jasna.
Pretpostavimo da je $S \neq \emptyset$ i $T \neq \emptyset$. Tada postoje rekurzivne funkcije $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takve

da je $f(\mathbb{N}) = S$ i $g(\mathbb{N}) = T$. Neka je $P = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Tada je P primitivno rekurzivan skup ($\chi_P(x) = \overline{\text{sg}}(ost(x, 2))$). Definiramo funkciju $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sa:

$$h(x) = \begin{cases} f(\lfloor \frac{x}{2} \rfloor) & , x \in P \\ g(\lfloor \frac{x \dot{-} 1}{2} \rfloor) & , x \notin P. \end{cases}$$

Po propoziciji 2.3.18 slijedi da je h rekurzivna funkcija i očito je $h(\mathbb{N}) = S \cup T$.
Dokažimo da je $S \cap T$ rekurzivno prebrojiv skup.
Tvrdnja je jasna ako je $S = \emptyset$ ili $T = \emptyset$.
Pretpostavimo da je $S \neq \emptyset$ i $T \neq \emptyset$. Tada postoje rekurzivne funkcije $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takve da je $f(\mathbb{N}) = S$ i $g(\mathbb{N}) = T$.
Neka je $x \in \mathbb{N}$. Imamo: $x \in S \cap T$ akko $x \in S$ i $x \in T$ akko $\exists i, j \in \mathbb{N}$ takvi da je $x = f(i)$ i $x = g(j)$ akko $\exists y \in \mathbb{N}$ takav da je $x = f((y)_0)$ i $x = g((y)_1)$.
Neka je

$$V = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x = f((y)_0), x = g((y)_1)\}.$$

Imamo:

$$x \in S \cap T \quad \Leftrightarrow \quad \exists y \in \mathbb{N} \text{ takav da } (x, y) \in V. \tag{3.2}$$

Iz leme 2.3.4 slijedi da je V rekurzivan skup (kao presjek dva rekurzivna skupa). Iz teorema 3.0.28 i (3.2) slijedi da je $S \cap T$ rekurzivno prebrojiv. □

Propozicija 3.0.32. *Neka je $S \subset \mathbb{N}$ takav da su S i S^c rekurzivno prebrojivi skupovi. Tada je S rekurzivan skup.*

Dokaz. Ako je $S = \emptyset$ ili $S^c = \emptyset$ tvrdnja je jasna.
Pretpostavimo da je $S \neq \emptyset$ i $S^c \neq \emptyset$. Tada postoje rekurzivne funkcije $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takve da je $f(\mathbb{N}) = S$ i $g(\mathbb{N}) = S^c$.
Definiramo 1-mjesnu funkciju h sa:

$$h(x) \simeq \mu y(x = f(y) \text{ ili } x = g(y)).$$

Očito je h parcijalno rekurzivna i totalna, dakle rekurzivna.
Za svaki $x \in \mathbb{N}$ vrijedi $x = f(h(x))$ ili $x = g(h(x))$. Stoga je

$$x \in S \quad \Leftrightarrow \quad x = f(h(x)).$$

Iz leme 2.3.4 slijedi da je S rekurzivan skup. □

Primjer 3.0.33. *Neka je S rekurzivno prebrojiv skup koji nije rekurzivan (takav postoji prema korolaru 3.0.29). Tada S^c nije rekurzivno prebrojiv skup (jer bi u suprotnom, po propoziciji 3.0.32 S bio rekurzivan skup).*

3.1 Rekurzivne funkcije $\mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$

Za funkciju $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ kažemo da je rekurzivna ako su njene komponentne funkcije rekurzivne.

Uočimo sljedeće: ako je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ rekurzivna funkcija te $g : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ također rekurzivna, onda je i $g \circ f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivna.

Definicija 3.1.1. *Neka je $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Za funkciju $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ kažemo da je rekurzivna ako postoje rekurzivne funkcije $a, c : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je*

$$f(x) = (-1)^{c(x)} a(x), \quad \forall x \in \mathbb{N}^k.$$

Propozicija 3.1.2. *Neka je $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$. Tada je f rekurzivna akko postoje rekurzivne funkcije $\varphi, \psi : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je*

$$f(x) = \varphi(x) - \psi(x), \quad \forall x \in \mathbb{N}^k. \tag{3.3}$$

Dokaz. Pretpostavimo da postoje rekurzivne funkcije $\varphi, \psi : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da vrijedi (3.3). Tada je

$$f(x) = (-1)^{c(x)} |\varphi(x) - \psi(x)|$$

gdje je $c : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa:

$$c(x) = \begin{cases} 0 & , \varphi(x) > \psi(x) \\ 1 & , \text{inače.} \end{cases}$$

Dakle, f je rekurzivna.

Obratno, pretpostavimo da je f rekurzivna funkcija. Tada postoje rekurzivne funkcije $a, c : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je

$$f(x) = (-1)^{c(x)} a(x).$$

Imamo:

$$f(x) = (-1)^{c(x)} a(x) = \chi_{2\mathbb{N}}(c(x)) \cdot a(x) - \chi_{2\mathbb{N}+1}(c(x)) \cdot a(x)$$

pri čemu je $2\mathbb{N}$ skup svih parnih, a $2\mathbb{N} + 1$ skup svih neparnih brojeva. Iz ovoga slijedi tvrdnja. □

Propozicija 3.1.3. *Neka su $f, g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ rekurzivne funkcije. Tada su i funkcije $f \cdot g, -f$ i $f + g$ također rekurzivne.*

Dokaz. Neka su $a, c, a', c' : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije takve da je

$$f(x) = (-1)^{c(x)} a(x), \qquad g(x) = (-1)^{c'(x)} a'(x).$$

Tada je

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (-1)^{c(x)} a(x) \cdot (-1)^{c'(x)} a'(x) = (-1)^{c(x)+c'(x)} a(x) \cdot a'(x)$$

pa je očito da je $f \cdot g$ rekurzivna funkcija.

Nadalje, vrijedi:

$$(-f)(x) = -f(x) = -(-1)^{c(x)} a(x) = (-1)^{c(x)+1} a(x)$$

pa imamo i da je $-f$ rekurzivna funkcija.

Prema propoziciji 3.1.2 postoje rekurzivne funkcije $\varphi, \psi, \varphi', \psi' : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je

$$f(x) = \varphi(x) - \psi(x), \qquad g(x) = \varphi'(x) - \psi'(x).$$

Tada je

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = (\varphi(x) - \psi(x)) + (\varphi'(x) - \psi'(x)) = (\varphi(x) + \varphi'(x)) - (\psi(x) + \psi'(x))$$

pa iz iste propozicije slijedi da je $f + g$ rekurzivna. □

Uočimo: ako je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivna, onda je rekurzivna i kao funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$.

Definicija 3.1.4. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ funkcija. Za f kažemo da je rekurzivna ako postoje rekurzivne funkcije $a, b, c : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je $b(x) \neq 0$ i*

$$f(x) = (-1)^{c(x)} \frac{a(x)}{b(x)}, \quad \forall x \in \mathbb{N}^k.$$

Uočimo: funkcija $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ je rekurzivna akko postoje rekurzivna funkcija $a : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ i rekurzivna funkcija $b : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je $b(x) \neq 0$ i

$$f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}, \quad \forall x \in \mathbb{N}^k.$$

Propozicija 3.1.5. *1. Neka su $f, g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivne funkcije. Tada su i funkcije $f \cdot g, -f, f+g$ i $|f|$ također rekurzivne. Nadalje, ako je $f(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{N}^k$, onda je i $\frac{1}{f}$ rekurzivna funkcija.*

2. Ako je $h : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}^k$ rekurzivna funkcija, onda je i $f \circ h : \mathbb{N}^n \to \mathbb{Q}$ rekurzivna.

Dokaz. Očito je da 2. vrijedi.

Dokažimo 1. Neka su $a, a' : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ i $b, b' : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije takve da je $b(x) \neq 0, b'(x) \neq 0$ i

$$f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}, \qquad g(x) = \frac{a'(x)}{b'(x)}.$$

Tada je
$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \frac{a(x) \cdot a'(x)}{b(x) \cdot b'(x)} = \frac{(a \cdot a')(x)}{(b \cdot b')(x)}$$
pa slijedi da je $f \cdot g$ rekurzivna funkcija.

Nadalje, vrijedi
$$(-f)(x) = -f(x) = -\frac{a(x)}{b(x)} = \frac{(-a)(x)}{b(x)}$$
pa je i $-f$ rekurzivna funkcija.

Vrijedi
$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{a(x)}{b(x)} + \frac{a'(x)}{b'(x)} = \frac{a(x) \cdot b'(x) + a'(x) \cdot b(x)}{b(x) \cdot b'(x)}$$
pa iz propozicije 3.1.3 slijedi da je $f + g$ rekurzivna.

Neka su $a, b, c : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije takve da je $b(x) \neq 0$ i
$$f(x) = (-1)^{c(x)} \frac{a(x)}{b(x)}, \quad \forall x \in \mathbb{N}^k.$$
Imamo:
$$|f(x)| = \frac{a(x)}{b(x)}$$
pa je očito $|f|$ rekurzivna funkcija.

Pretpostavimo da je $f(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{N}^k$. Tada je i $a(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{N}^k$ te vrijedi
$$\frac{1}{f}(x) = (-1)^{c(x)} \frac{b(x)}{a(x)}$$
i to je očito opet rekurzivna funkcija. □

Definicija 3.1.6. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ funkcija. Za f kažemo da je rekurzivna ako postoji rekurzivna funkcija $F : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ takva da je*
$$|f(x) - F(x,i)| < 2^{-i}, \quad \forall x \in \mathbb{N}^k, \forall i \in \mathbb{N}.$$
Za funkciju F kažemo da je rekurzivna aproksimacija od f.

Primjer 3.1.7. *Neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivna funkcija. Tada je f rekurzivna i kao funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$. Naime, ako definiramo funkciju $F : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ sa $F(x,i) = f(x)$ onda je F rekurzivna i vrijedi*
$$|f(x) - F(x,i)| < 2^{-i}, \quad \forall x \in \mathbb{N}^k, \forall i \in \mathbb{N}.$$

Lema 3.1.8. *Neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ funkcija, neka je $F : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ rekurzivna funkcija te neka je $H : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija takva da je*

$$|f(x) - F(x,i)| < H(x) \cdot 2^{-i}, \quad \forall x \in \mathbb{N}^k, \forall i \in \mathbb{N}.$$

Tada je f rekurzivna funkcija.

Dokaz. Definiramo funkciju $F' : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ sa:

$$F'(x,i) = F(x, i + H(x)).$$

Tada je F' rekurzivna funkcija prema propoziciji 3.1.5 - 2.
Uočimo sljedeće: za svaki $l \in \mathbb{N}$ vrijedi $l \leq 2^l$.
Neka su $x \in \mathbb{N}^k, i \in \mathbb{N}$. Imamo:

$$|f(x) - F'(x,i)| = |f(x) - F(x, i + H(x))| < H(x) \cdot 2^{-H(x)} \cdot 2^{-i} \leq 2^{-i}.$$

Dakle, F' je rekurzivna aproksimacija od f. Prema tome f je rekurzivna. □

Propozicija 3.1.9. *Neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ te neka su $F : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{R}$ i $H : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije takve da je*

$$|f(x) - F(x,i)| < H(x) \cdot 2^{-i}, \quad \forall x \in \mathbb{N}^k, \forall i \in \mathbb{N}.$$

Tada je f rekurzivna funkcija.

Dokaz. Neka je $F' : \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{Q}$ rekurzivna aproksimacija od F. Tada za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ i za svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$|f(x) - F'(x,i,i)| = |f(x) - F(x,i) + F(x,i) - F'(x,i,i)| \leq$$
$$\leq |f(x) - F(x,i)| + |F(x,i) - F'(x,i,i)| < H(x) \cdot 2^{-i} + 2^{-i} = (H(x)+1) \cdot 2^{-i}$$

tj.

$$|f(x) - F'(x,i,i)| < (H(x)+1) \cdot 2^{-i}. \tag{3.4}$$

Definiramo funkciju $F'' : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ sa:

$$F''(x,i) = F'(x,i,i).$$

Po propoziciji 3.1.5 F'' je rekurzivna funkcija pa iz (3.4) i leme 3.1.8 slijedi da je f rekurzivna. □

Lema 3.1.10. *1. Neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivna funkcija. Tada postoji rekurzivna funkcija $H : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takva da je*

$$|f(x)| \leq H(x), \quad \forall x \in \mathbb{N}^k.$$

2. *Neka je* $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ *rekurzivna funkcija. Tada postoji rekurzivna funkcija* $H : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ *takva da je*
$$|f(x)| \leq H(x), \quad \forall x \in \mathbb{N}^k.$$

Dokaz. Dokažimo tvrdnju 1. Imamo

$$f(x) = (-1)^{c(x)} \frac{a(x)}{b(x)}, \quad \forall x \in \mathbb{N}^k$$

pri čemu su $a, b, c : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije ($b(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{N}^k$). Stoga je

$$|f(x)| = \frac{a(x)}{b(x)} \leq a(x), \quad \forall x \in \mathbb{N}^k$$

pa možemo uzeti $H = a$.

Dokažimo sada tvrdnju 2. Neka je F rekurzivna aproksimacija od f. Neka je $x \in \mathbb{N}^k$. Tada je
$$|f(x) - F(x, 0)| < 2^{-0} = 1.$$

Općenito, ako su $a, b \in \mathbb{R}$, onda je

$$|a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b|$$

pa je
$$|a| - |b| \leq |a - b|.$$

Stoga je
$$|f(x)| - |F(x, 0)| \leq |f(x) - F(x, 0)| < 1$$

pa je
$$|f(x)| < 1 + |F(x, 0)|.$$

Funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}, x \mapsto 1 + |F(x, 0)|$ je rekurzivna pa prema prvoj tvrdnji ove leme postoji rekurzivna funkcija $H : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takva da je

$$1 + |F(x, 0)| \leq H(x), \quad \forall x \in \mathbb{N}^k.$$

Stoga je
$$|f(x)| \leq H(x), \quad \forall x \in \mathbb{N}^k.$$

□

Propozicija 3.1.11. *Neka su* $f, g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ *rekurzivne funkcije. Tada su i funkcije* $f + g, f \cdot g, -f, |f| : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ *rekurzivne.*

Dokaz. Neka su F i G rekurzivne aproksimacije od f i g. Neka su $x \in \mathbb{N}^k$, $i \in \mathbb{N}$. Imamo:

$$|(f+g)(x) - (F+G)(x,i)| = |f(x) + g(x) - F(x,i) - G(x,i)| =$$
$$= |f(x) - F(x,i) + g(x) - G(x,i)| \leq |f(x) - F(x,i)| + |g(x) - G(x,i)| < 2^{-i} + 2^{-i} = 2 \cdot 2^{-i}.$$

Dakle,

$$|(f+g)(x) - (F+G)(x,i)| < 2 \cdot 2^{-i}.$$

Po lemi 3.1.8 i propoziciji 3.1.5 vrijedi da je $f+g$ rekurzivna funkcija.

Prema lemi 3.1.10 postoje rekurzivne funkcije $H, N : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je

$$|g(x)| \leq N(x) \quad \text{i} \quad |f(x)| \leq H(x), \quad \forall x \in \mathbb{N}^k.$$

Neka su $x \in \mathbb{N}^k$, $i \in \mathbb{N}$. Tada je

$$|F(x,i)| - |f(x)| \leq |f(x) - F(x,i)| < 2^{-i} \leq 1$$

pa je

$$|F(x,i)| < |f(x)| + 1$$

iz čega slijedi

$$|F(x,i)| < H(x) + 1.$$

Neka su $x \in \mathbb{N}^k$, $i \in \mathbb{N}$. Tada je

$$|(f \cdot g)(x) - (F \cdot G)(x,i)| = |f(x) \cdot g(x) - F(x,i) \cdot G(x,i)| =$$
$$= |f(x) \cdot g(x) - F(x,i) \cdot g(x) + F(x,i) \cdot g(x) - F(x,i) \cdot G(x,i)| \leq$$
$$\leq |g(x)| \cdot |f(x) - F(x,i)| + |F(x,i)| \cdot |g(x) - G(x,i)| < N(x) \cdot 2^{-i} + (H(x)+1) \cdot 2^{-i} =$$
$$= (N(x) + H(x) + 1) \cdot 2^{-i}$$

Dakle,

$$|(f \cdot g)(x) - (F \cdot G)(x,i)| < (N(x) + H(x) + 1) \cdot 2^{-i}$$

pa iz leme 3.1.8 i propozicije 3.1.5 slijedi da je $f \cdot g$ rekurzivna.

Za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$|(-f)(x) - (-F)(x,i)| = |-f(x) + F(x,i)| = |f(x) - F(x,i)| < 2^{-i}.$$

Iz ovoga se vidi da je $-F$ rekurzivna aproksimacija od $-f$.

Općenito, ako su $a, b \in \mathbb{R}$, onda je

$$|a| - |b| \leq |a-b| \quad \text{i} \quad |b| - |a| \leq |a-b|$$

pa je

$$||a| - |b|| \leq |a - b|.$$

Stoga za sve $x \in \mathbb{N}^k, i \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$||f|(x) - |F|(x, i)| \leq |f(x) - F(x, i)| < 2^{-i}.$$

Prema tome $|F|$ je rekurzivna aproksimacija od $|f|$ □

Propozicija 3.1.12. *Neka je* $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ *rekurzivna funkcija. Tada su skupovi*

$$S = \{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) > 0\}$$
$$T = \{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) = 0\}$$
$$V = \{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) \geq 0\}$$

rekurzivni.

Dokaz. Neka su $a, b, c : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije takve da je $b(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{N}^k$ i

$$f(x) = (-1)^{c(x)} \frac{a(x)}{b(x)}, \quad \forall x \in \mathbb{N}^k.$$

Imamo:

$$x \in S \quad \Leftrightarrow \quad (-1)^{c(x)} \frac{a(x)}{b(x)} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad c(x) \text{ paran i } a(x) \neq 0.$$

Skupovi: $\{x \in \mathbb{N}^k \mid c(x) \text{ paran }\}$ i $\{x \in \mathbb{N}^k \mid a(x) \neq 0\}$ su rekurzivni, a S je presjek ta dva skupa. Stoga je rekurzivan.

Imamo:

$$x \in T \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (-1)^{c(x)} \frac{a(x)}{b(x)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a(x) = 0$$

pa je očito T rekurzivan.

Iz

$$V = S \cup T$$

slijedi da je V rekurzivan. □

Korolar 3.1.13. *Neka su* $f, g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ *rekurzivne funkcije. Tada su skupovi*

$$\{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) < g(x)\}$$
$$\{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) = g(x)\}$$
$$\{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) \leq g(x)\}$$

rekurzivni.

Dokaz. Vrijedi:

$$f(x) < g(x) \quad \Leftrightarrow \quad (g - f)(x) > 0$$
$$f(x) = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad (g - f)(x) = 0$$
$$f(x) \leq g(x) \quad \Leftrightarrow \quad (g - f)(x) \geq 0$$

pa tvrdnja slijedi iz prethodne propozicije. □

Lema 3.1.14. *Neka je $S \subset \mathbb{N}^{k+1}$ rekurzivan skup takav da za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $(x, i) \in S$. Tada postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takva da je $(x, f(x)) \in S, \forall x \in \mathbb{N}^k$.*

Dokaz. Neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa:

$$f(x) = \mu i((x, i) \in S).$$

Tada je f tražena funkcija. □

Propozicija 3.1.15. *Neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ rekurzivna funkcija takva da je $f(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{N}^k$. Tada je $\frac{1}{f} : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ rekurzivna funkcija.*

Dokaz. Neka je F rekurzivna aproksimacija od f.
Općenito, ako su $a, b, \epsilon, r \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$|a - b| < \epsilon \quad \text{i} \quad |a| > r,$$

onda je

$$|b| > r - \epsilon.$$

U suprotnom bi vrijedilo $|b| \leq r - \epsilon$ pa bi slijedilo $-|b| \geq \epsilon - r$ što bi zajedno sa $|a| > r$ dalo $|a| - |b| > \epsilon$. No $|a| - |b| \leq |a - b| < \epsilon$.

Neka je $x \in \mathbb{N}^k$. Tada je $|f(x)| > 0$ pa postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je

$$|f(x)| > 4 \cdot 2^{-i}.$$

Znamo da je

$$||f(x)| - |F(x, i)|| < 2^{-i}$$

pa slijedi da je

$$|F(x, i)| > 3 \cdot 2^{-i}. \tag{3.5}$$

Dakle, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da (3.5) vrijedi. Neka je $S \subset \mathbb{N}^{k+1}$ skup svih $(x, i), x \in \mathbb{N}^k, i \in \mathbb{N}$ takvih da vrijedi (3.5). Prema korolaru 3.1.13 S je rekurzivan skup te za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $(x, i) \in S$. Prema lemi 3.1.14 postoji rekurzivna funkcija $\varphi : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takva da je

$$(x, \varphi(x)) \in S, \forall x \in \mathbb{N}^k.$$

Dakle,

$$|F(x, \varphi(x))| > 3 \cdot 2^{-\varphi(x)}. \tag{3.6}$$

Neka je $x \in \mathbb{N}^k$. Iz

$$|F(x, \varphi(x))| - |f(x)| < 2^{-\varphi(x)}$$

i 3.6 slijedi da je

$$|f(x)| > 2 \cdot 2^{-\varphi(x)}. \tag{3.7}$$

Neka je $j \in \mathbb{N}$, $j \geq \varphi(x)$. Tada je

$$||f(x)| - |F(x, j)|| < 2^{-j} \leq 2^{-\varphi(x)}.$$

Stoga je

$$|F(x, j)| > 2^{-\varphi(x)}.$$

Definiramo funkciju $F' : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ sa:

$$F'(x, i) = F(x, \varphi(x) + i).$$

Tada je F' rekurzivna funkcija te je

$$|F'(x, i)| > 2^{-\varphi(x)}.$$

Slijedi da za sve $x \in \mathbb{N}^k, i \in \mathbb{N}$ vrijedi $F'(x, i) \neq 0$ i

$$\frac{1}{|F'(x, i)|} < 2^{\varphi(x)}.$$

Uočimo da je prema (3.7)

$$\frac{1}{|f(x)|} < \frac{1}{2} \cdot 2^{\varphi(x)}.$$

Imamo:

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{F'(x, i)}\right| = \frac{|f(x) - F'(x, i)|}{|f(x)F'(x, i)|} = |f(x) - F'(x, i)| \cdot \frac{1}{|f(x)|} \cdot \frac{1}{F'(x, i)} <$$
$$< 2^{-i} \cdot 2^{-\varphi(x)} \cdot 2^{\varphi(x)} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2^{\varphi(x)} \leq 2^{-i} \cdot 2^{\varphi(x)}.$$

Dakle,

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{F'(x, i)}\right| < 2^{\varphi(x)} \cdot 2^{-i}, \quad \forall x \in \mathbb{N}^k, \forall i \in \mathbb{N}.$$

Iz ovoga zaključujemo da je funkcija $\frac{1}{f}$ rekurzivna (lema 3.1.8). $\square$

Ako je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ rekurzivna funkcija, mora li $\{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) = 0\}$ biti rekurzivan skup?

Primjer 3.1.16. *Neka je $S \subset \mathbb{N}$ rekurzivno prebrojiv skup koji nije rekurzivan. Budući da je S rekurzivno prebrojiv, postoji primitivno rekurzivan podskup $T \subset \mathbb{N}^2$ takav da je*

$$x \in S \quad \Leftrightarrow \quad \exists y \in \mathbb{N} \text{ takav da je } (x, y) \in T.$$

Definiramo funkciju $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sa:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \nexists i \in \mathbb{N}, (x, i) \in T \\ 2^{-i_0} & , \text{inače, pri čemu je } i_0 \text{ najmanji element od } \mathbb{N} \text{ takav da je } (x, i_0) \in T. \end{cases}$$

Neka je $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa:

$$g(x, i) = \mu y_{y \le i}((x, y) \in T).$$

Tada je g primitivno rekurzivna funkcija (primjena ograničenog μ operatora na funkciju $\overline{\text{sg}} \circ \chi_T$).
Definiramo funkciju $F : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{Q}$ sa:

$$F(x, i) = \frac{1}{2^{g(x,i)}}.$$

Tada je očito F rekurzivna funkcija. Uočimo da je

$$F(x, i) = \begin{cases} 2^{-(i+1)} & , \nexists y \in \{0, \dots, i\}, (x, y) \in T \\ 2^{-y_0} & , \text{inače, pri čemu je } y_0 \text{ najmanji takav broj.} \end{cases}$$

Neka su $x, i \in \mathbb{N}$. Tvrdimo:

$$|f(x) - F(x, i)| < 2 \cdot 2^{-i}. \tag{3.8}$$

<u>1. SLUČAJ</u> ne postoji $y \in \mathbb{N}$ takav da je $(x, y) \in T$
Tada je $f(x) = 0$ i $F(x, i) = 2^{-(i+1)}$ pa (3.8) vrijedi.
<u>2.SLUČAJ</u> postoji $y \in \mathbb{N}$ takav da je $(x, y) \in T$
Neka je y_0 najmanji takav. Tada je $f(x) = 2^{-y_0}$.
Ako je $i < y_0$, tada je $i + 1 \le y_0$ pa je $2^{-(i+1)} \ge 2^{-y_0}$. Vrijedi $F(x, i) = 2^{-(i+1)}$. Imamo:

$$\begin{aligned} |f(x) - F(x, i)| &\le |f(x)| + |F(x, i)| = 2^{-y_0} + 2^{-(i+1)} \le \\ &\le 2^{-(i+1)} + 2^{-(i+1)} = 2 \cdot 2^{-(i+1)} = 2^{-i} < 2 \cdot 2^{-i}. \end{aligned}$$

Ako je $i \ge y_0$, tada je $F(x, i) = 2^{y_0}$ pa je $|f(x) - F(x, i)| = 0$.
Time je (3.8) dokazano, iz čega zaključujemo da je f rekurzivna funkcija (lema 3.1.8). Iz definicije od f je jasno da je

$$\{x \in \mathbb{N} \mid f(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{N} \mid \nexists y \in \mathbb{N} \text{ takav da je } (x, y) \in T\} = S^c.$$

No S^c nije rekurzivan jer S nije rekurzivan. Dakle, $\{x \in \mathbb{N} \mid f(x) = 0\}$ nije rekurzivan skup. Čak štoviše, ovaj skup nije ni rekurzivno prebrojiv (S^c nije rekurzivno prebrojiv jer bi u suprotnom prema propoziciji 3.0.32 S bio rekurzivan skup).
Nadalje, uočimo da je

$$\{x \in \mathbb{N} \mid f(x) > 0\} = S.$$

Dakle, ni taj skup nije rekurzivan.

Propozicija 3.1.17. *Neka je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ rekurzivna funkcija. Tada je skup*

$$S = \{x \in \mathbb{N} \mid f(x) > 0\}$$

rekurzivno prebrojiv.

Dokaz. Neka je F rekurzivna aproksimacija od f. Neka je $x \in \mathbb{N}$. Pretpostavimo da je $f(x) > 0$. Tada postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $f(x) > 2 \cdot 2^{-i}$. Iz toga slijedi da je $F(x,i) > 2^{-i}$.
Obratno, pretpostavimo da postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $F(x,i) > 2^{-i}$. Iz ovoga slijedi da je $f(x) > 0$.
Dakle, $f(x) > 0$ akko postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $F(x,i) > 2^{-i}$.
Neka je

$$T = \{(x,i) \in \mathbb{N}^2 \mid F(x,i) > 2^{-i}\}.$$

Iz korolara 3.1.13 slijedi da je T rekurzivan skup. Imamo:

$$x \in S \quad \Leftrightarrow \quad \exists i \in \mathbb{N} \text{ takav da je } (x,i) \in T.$$

Iz teorema 3.0.28 slijedi da je S rekurzivno prebrojiv. □

Primjer 3.1.18. *Neka je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ funkcija iz primjera 3.1.16. Funkcija f je rekurzivna. Uočimo da je $f(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Q}$. No f nije rekurzivna kao funkcija $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$. Naime, kada bi bila, onda bi skup $\{x \in \mathbb{N} \mid f(x) = 0\}$ bio rekurzivan po propoziciji 3.1.12, a vidjeli smo da taj skup nije rekurzivan.*

Bibliografija

[1] H. Rogers, *Theory of recursive functions and effective coputability*, McGraw-Hill, 1967.

[2] M. Vuković, *Izračunljivost*, (2009).

Sažetak

U ovom radu smo se bavili RAM izračunljivim funkcijama, primitivno i parcijalno rekurzivnim te rekurzivnim funkcijama. Pokazali smo da je skup RAM izračunljivih funkcija zatvoren na kompoziciju funkcija, primitivnu rekurziju i μ operator. Također smo pokazali da je svaka primitivno rekurzivna ujedno i parcijalno rekurzivna funkcija pa i rekurzivna (jer je totalna). Zanimljivo je da se svaka parcijalno rekurzivna funkcija zapravo može u konačno mnogo koraka dobiti od inicijalnih funkcija primjenom kompozicije, primitivne rekurzije i točno jednom primjenom μ operatora (što slijedi iz Kleenijevog teorema o normalnoj formi). Vidjeli smo da su skup RAM izračunljivih i skup parcijalno rekurzivnih funkcija zapravo jednaki.

Pokušali smo proširiti parcijalno rekurzivnu funkciju do rekurzivne i vidjeli da je to moguće ukoliko je domena funkcije rekurzivan skup. Pokazali smo da je svaki rekurzivan skup rekurzivno prebrojiv i da postoji rekurzivno prebrojiv skup koji nije rekurzivan (domena parcijalno rekurzivne funkcije koja se ne može proširiti do rekurzivne).

Koristeći činjenice da se svaki $x \in \mathbb{Z}$ i $y \in \mathbb{Q}$ mogu zapisati kao

$$x = (-1)^{c_1} \cdot a_1, \quad y = (-1)^{c_2} \cdot \frac{a_2}{b_2}, \quad a_1, a_2, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{N}$$

i da je $\mathbb{Q}$ gust u $\mathbb{R}$, proširili smo pojam rekurzivne funkcije i na funkcije čije su kodomene $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R}$ te pokazali da i te funkcije imaju lijepa svojstva (npr. zbroj, umnožak i apsolutna vrijednost rekurzivnih su također rekurzivne funkcije).

Summary

In this thesis, we have studied the RAM computable functions, primitive and partial recursive and recursive functions. We have shown that the set of RAM computable functions is closed on the composition of functions, primitive recursion and μ operator. We have also shown that every primitive recursive function is also partial recursive function and recursive (because it is total). What is interesting is that every partial recursive function can actually be, in a finite number of steps, obtained from the initial functions by using composition, primitive recursion and exactly one usage of μ operator. We have seen that the set of RAM computable functions and a set of partial recursive functions are equal.

We tried to extend a partial recursive function to recursive and saw that it is possible if the domain of the function is a recursive set. We have shown that every recursive set is also recursively enumerable set and that exists recursively enumerable set that is not recursive (domain of the partial recursive function that can not be extended to a recursive).

Using the fact that every $x \in \mathbb{Z}$ and $y \in \mathbb{Q}$ can be shown as

$$x = (-1)^{c_1} \cdot a_1, \quad y = (-1)^{c_2} \cdot \frac{a_2}{b_2}, \quad a_1, a_2, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{N}$$

and that $\mathbb{Q}$ is dense in $\mathbb{R}$, we have extended the term of recursive functions to functions whose codomains are $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ and $\mathbb{R}$, and shown that these functions have good characteristics (eg. the sum, the product and the absolute value of recursive functions are also recursive functions).

Životopis

Rođena sam 7. listopada 1990. godine u Zagrebu. Završila sam Osnovnu školu Vrbani te sam potom upisala opću X. gimnaziju "Ivan Supek" u Zagrebu. Maturirala sam 2009. godine te odlučila upisati Preddiplomski sveučilišni studij Matematike na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu. Godine 2012., nakon završenog preddiplomskog studija, upisala sam Diplomski sveučilišni studij Matematička statistika. Tijekom godine sam radila za poduzeće Mpg kao hostesa te davala instrukcije iz matematike, a preko ljeta za putničku agenciju Vladimir Nazor kao voditeljica grupa.