# Kvocijentni prostori

**Švenda, Lovro**

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Lovro Švenda

# KVOCIJENTNI PROSTORI

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc.dr.sc. Zvonko Iljazović

Zagreb, rujan 2015.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

# Sadržaj

# Uvod

Željeli smo proučiti svojstva različitih struktura matematičkih objekata kao što su kružnica, vrpca, Möbiusova vrpca, Kleinova boca i slično. Takvi objekti se uobičajeno demonstriraju rezanjem i lijepljenjem konopca i papira. Međutim, u svrhu opisivanja nastanka takvih objekata na matematički način, moramo definirati odgovarajući topološki prostor.

Zato ćemo u ovom radu prvo definirati metričke i topološke prostore i dati nekoliko primjera. Nakon toga ćemo u topološkim prostorima inducirati kvocijentnu topologiju kvocijentnim preslikavanjem i tako definirati kvocijentne prostore. Definirat ćemo i produkt dvaju topoloških prostora.

Nadalje ćemo razmatrati kompaktnost skupova i konvergenciju nizova u topološkim prostorima.

# Poglavlje 1

# Metrički i topološki prostori

Za početak definirajmo metričke, a zatim i topološke prostore.

## 1.1 Metrički prostori

**Definicija 1.1.1.** *Neka je $X$ neprazan skup te $d : X \times X \to \mathbb{R}$ funkcija takva da je*

(1) $d(x, y) \geq 0, \forall x, y \in X$ te $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(2) $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X$

(3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \forall x, y, z \in X$ (nejednakost trokuta)

*Tada za $d$ kažemo da je* ***metrika*** *na skupu $X$, a za uređen par $(X, d)$ da je* ***metrički prostor****.*

**Primjer 1.1.2.**
*Neka je $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa $d(x, y) = |x - y|$. Tada je $d$ metrika na $\mathbb{R}$. Dokažimo to.*

Uvjeti (1) i (2) iz definicije metrike očito vrijede.
Provjerimo uvjet (3).
Neka su $x, y, z \in \mathbb{R}$. Tada je

$$d(x, y) = |x - y| = |x - z + z - y| \leq |x - z| + |z - y| = d(x, z) + d(z, y),$$

dakle $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.
(Ovdje smo koristili da za sve $u, v \in \mathbb{R}$ vrijedi $|u + v| \leq |u| + |v|$.)
Dakle, $d$ je metrika na $\mathbb{R}$.

Za funkciju $d$ kažemo da je **euklidska metrika** na $\mathbb{R}$.

**Primjer 1.1.3.**

*Neka je $n \in \mathbb{N}$, te neka je $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa*

$$d\left((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\right) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

*Za funkciju $d$ kažemo da je euklidska metrika na $\mathbb{R}^n$. Uočimo da je za $n = 1$ ova funkcija upravo euklidska metrika na $\mathbb{R}$.*

$$\left(d(x_1, \ldots, x_n) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2} = |x_1 - y_1|\right)$$

Dokažimo da je $d$ zaista metrika na $\mathbb{R}^n$.

Jedino netrivijalno svojstvo koje treba provjeriti je nejednakost trokuta.
Neka su $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n), z = (z_1, \ldots, z_n)$.
Tada je nejednakost

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \tag{1.1}$$

ekvivalentna sa

$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} \leq \sqrt{(x_1 - z_1)^2 + \cdots + (x_n - z_n)^2} + \sqrt{(z_1 - y_1)^2 + \cdots + (z_n - y_n)^2} \tag{1.2}$$

Za $i \in \{1, \ldots, n\}$ definiramo

$$\begin{aligned} u_i &= x_i - z_i \\ v_i &= z_i - y_i \ . \end{aligned}$$

Uočimo da je

$$u_i + v_i = x_i - y_i$$

za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Imamo da je (1.2) ekvivalentno sa

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (u_i + v_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2} \ .$$

Vrijede sljedeće ekvivalencije:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(u_i+v_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}u_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}v_i^2}$$

$$\Updownarrow$$

$$\sum(u_i+v_i)^2 \leq \sum u_i^2 + 2\sqrt{\sum u_i^2}\sqrt{\sum v_i^2} + \sum v_i^2$$

$$\Updownarrow$$

$$\sum(u_i^2+2u_iu_i+v_i^2) \leq \sum u_i^2 + 2\sqrt{\sum u_i^2}\sqrt{\sum v_i^2} + \sum v_i^2$$

$$\Updownarrow$$

$$\cancel{\sum u_i^2} + 2\sum u_iu_i + \cancel{\sum v_i^2} \leq \cancel{\sum u_i^2} + 2\sqrt{\sum u_i^2}\sqrt{\sum v_i^2} + \cancel{\sum v_i^2}$$

$$\Updownarrow$$

$$\sum u_iu_i \leq \sqrt{\sum u_i^2 \cdot \sum v_i^2}$$

Za posljednju nejednakost dovoljno je dokazati da je

$$\left(\sum u_iu_i\right)^2 \leq \sum u_i^2 \cdot \sum v_i^2 \tag{1.3}$$

U tu svrhu definirajmo $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sa

$$f(t) = (u_1t+v_1)^2 + \cdots + (u_nt+v_n)^2\,.$$

Očito je $f(t) \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$.
Imamo

$$\begin{aligned} f(t) &= (u_1t^2+2u_1v_1t+v_1^2) + \cdots + (u_nt^2+2u_nv_nt+v_n^2) = \\ &= (u_1^2+\cdots+u_n^2)t^2 + 2(u_1v_1+\cdots+u_nv_n)t + (v_1^2+\cdots+v_n^2) \end{aligned}$$

Dakle, f je nenegativna kvadratna funkcija pa joj je je diskriminanta manja ili jednaka od 0. Prema tome

$$4\left(\sum u_iu_i\right)^2 - 4\sum u_i^2 \cdot \sum v_i^2 \leq 0,$$

pa slijedi (1.3), a iz toga i (1.2).

Time je nejednakost (1.1) dokazana.

**Primjer 1.1.4.**
*Neka je $X$ neprazan skup. Neka je $d : X \times X \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa*

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

*Tada za $d$ kažemo da je diskretna metrika na skupu $X$. Funkcija $d$ je zaista metrika na skupu $X$.*

**Definicija 1.1.5.** *Neka je $(X, d)$ metrički prostor, neka je $x_0 \in X$ te $r > 0$. Definiramo*

$$K(x_0, r) = \{x \in X : d(x_0, x) < r\}.$$

*Za $K(x_0, r)$ kažemo da je (otvorena) kugla oko $x_0$ radijusa $r$ u metričkom prostoru $(X, d)$.*

Pišemo umjesto $K(x_0, r)$ i $K(x_0, r; d)$, ako želimo naglasiti o kojoj se metrici radi.

**Definicija 1.1.6.** *Neka je $(X, d)$ metrički prostor te neka je $U \subseteq X$. Za $U$ kažemo da je otvoren skup u metričkom prostoru $(X, d)$ ako vrijedi sljedeće:*

$$\forall x \in U \; \exists r > 0 \text{ takav da } K(x, r) \subseteq U.$$

**Primjer 1.1.7.** *Neka je $d$ euklidska metrika na $\mathbb{R}$. Neka je $x \in \mathbb{R}$, te $r > 0$.*
*Tada je $K(x, r; d) = \langle x - r, x + r\rangle$*

Naime, imamo

$$\begin{aligned} y \in K(x, r) &\Leftrightarrow d(x, y) < r \Leftrightarrow |y - x| < r \Leftrightarrow -r < y - x < r \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x - r < y < x + r \Leftrightarrow y \in \langle x - r, x + r\rangle \end{aligned}$$

Svaka otvorena kugla u $(\mathbb{R}, d)$ je otvoreni interval. S druge strane, svaki otvoreni (omeđeni) interval je otvorena kugla, naime, ako su $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, onda je

$$\langle a, b\rangle = \left\langle \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2}, \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \right\rangle,$$

to jest

$$\langle a, b\rangle = K\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}\right).$$

Skup $[0, \infty\rangle$ nije otvoren u $(\mathbb{R}, d)$ jer ne postoji $r > 0$ takav da je $K(0, r) \subseteq [0, \infty\rangle$.

**Propozicija 1.1.8.**
*Neka je $(X, d)$ metrički prostor, neka je $x \in X$ te $r > 0$.*
*Tada je $K(x, r)$ otvoren skup u $(X, d)$.*
(*Dakle, svaka otvorena kugla u $(X, d)$ je otvoren skup.*)

*Dokaz.* Neka je $y \in K(x,r)$. Tada je $d(x,y) < r$, pa postoji $s > 0$ takav da $d(x,y) + s < r$. Tvrdimo da je $K(y,s) \subseteq K(x,r)$.

Neka je $z \in K(y,s)$. Tada je $d(y,z) < s$, pa imamo

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) < d(x,y) + s < r.$$

Dakle, $d(x,z) < r$, pa je $z \in K(x,r)$. Prema tome $K(y,s) \subseteq K(x,r)$.
Zaključak: $K(x,r)$ je otvoren skup. □

**Propozicija 1.1.9.** *Neka je* $(X,d)$ *metrički prostor.*

(1) $\emptyset$ i $X$ su otvoreni skupovi u $(X,d)$.

(2) Ako je $(U_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ indeksirana familija otvorenih skupova, onda je $\bigcup\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} U_\alpha$ otvoren skup.

(3) Ako su $U$ i $V$ otvoreni skupovi, onda je $U \cap V$ otvoreni skup.

*Dokaz.*

(1) Tvrdnja je jasna.

(2) Neka je $(U_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ indeksirana familija otvorenih skupova.

Neka je $x \in \bigcup\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} U_\alpha$. Tada je $x \in U_{\alpha_0}$, gdje je $\alpha_0 \in \mathcal{A}$. Budući da je $U_{\alpha_0}$ otvoren skup, postoji $r > 0$ takav da

$$K(x,r) \subseteq U_{\alpha_0}.$$

No, tada je

$$K(x,r) \subseteq \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} U_\alpha.$$

Prema tome, $\bigcup\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} U_\alpha$ je otvoren skup.

(3) Neka su $U$ i $V$ otvoreni skupovi. Uzmimo da je $x \in U \cap V$. Tada je $x \in U$ i $x \in V$.

Budući da su $U$ i $V$ otvoreni postoje $r, s > 0$ takvi da je

$$K(x,r) \subseteq U \text{ i } K(x,s) \subseteq V.$$

Neka je $t = min\{r,s\}$. Tada je $t > 0$ i $t \leq s, t \leq r$, pa je

$$K(x,t) \subseteq K(x,s) \text{ i } K(x,t) \subseteq K(x,r).$$

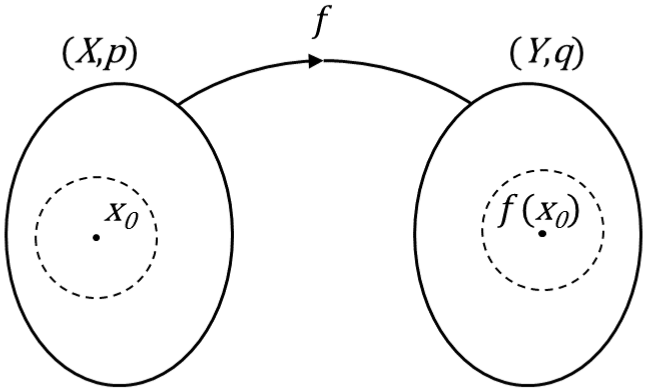
Stoga je $K(x,t) \subseteq U$ i $K(x,t) \subseteq V$, pa je $K(x,t) \subseteq U \cap V$.
Dakle, $U \cap V$ je otvoren skup. □

**Definicija 1.1.10.**

*Neka su $(X, p)$ i $(Y, q)$ metrički prostori te neka je $f : X \to Y$ funkcija. Neka je $x_0 \in X$. Kažemo da je funkcija $f$ **neprekidna u točki** $x_0$ **s obzirom na metrike** $p$ i $q$ ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da*

$$\forall x \in X \; p(x_0, x) < \delta \Rightarrow q\,(f(x_0), f(x)) < \epsilon.$$

*Za funkciju $f$ kažemo da je **neprekidna s obzirom na metrike** $p$ i $q$ ako je $f$ neprekidna u $x_0 \forall x_0 \in X$.*




Uočimo sljedeće:
$f$ je neprekidna u točki $x_0$ s obzirom na $p$ i $q$ ako i samo ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da je

$$f(K(x_0, \delta; p)) \subseteq K(f(x_0), \epsilon; q)\;. \tag{1.4}$$

Naime, pretpostavimo prvo da je $f$ neprekidna u $X$. Neka je $\epsilon > 0$. Tada postoji $\delta > 0$ takav da je $q(f(x), f(x_0)) < \epsilon$ za svaki $x \in X$ takav da je $p(x, x_0) < \delta$. Tvrdimo da tada vrijedi (1.4).

Neka je $y \in f(K(x_0, \delta; p))$. Tada postoji $x \in K(x_0, \delta; p)$ takav da $f(x) = y$.
Slijedi da je $p(x, x_0) < \delta$, pa iz toga slijedi

$$q(f(x), f(x_0)) < \epsilon.$$

Dakle, $y \in K(f(x_0), \epsilon; q)$.
Time je dokazano (1.4).

Pretpostavimo sada da $\forall \epsilon > 0 \; \exists \, \delta > 0$ takav da vrijedi (1.4). Želimo dokazati da je $f$ neprekidna u točki $x_0$.

Neka je $\epsilon > 0$. Tada postoji $\delta > 0$ takav da vrijedi (1.4). Neka je $x \in X$ takav da $p(x, x_0) < \delta$.

Tada je $x \in K(x_0, \delta; p)$ pa je

$$f(x) \in f(K(x_0, \delta; p)).$$

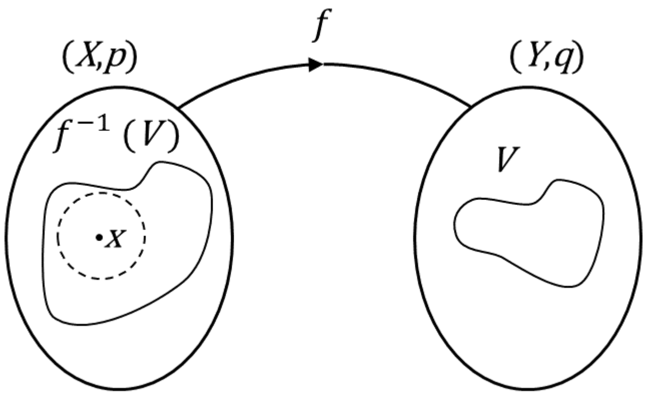
Iz (1.4) slijedi $f(x) \in K(f(x_0), \epsilon; q)$, što povlači $q(f(x), f(x_0)) < \epsilon$.

Zaključak: $f$ je neprekidna u $x_0$.

**Propozicija 1.1.11.**

*Neka su $(X, p)$ i $(Y, q)$ metrički prostori, te neka je $f : X \to Y$.*

*Tada je $f$ neprekidna s obzirom na metrike $p$ i $q$ ako i samo ako je za svaki otvoreni skup $V$ u $(Y, q)$ skup $f^{-1}(V)$ otvoren u $(X, p)$.*




*Dokaz.* Pretpostavimo da je $f$ neprekidna s obzirom na $p, q$. Neka je $V$ otvoreni skup u $(Y, q)$. Želimo dokazati da je $f^{-1}(V)$ otvoreni skup u $(X, p)$.

Neka je $x \in f^{-1}(V)$. Tada je $f(x) \in V$. Budući da je $V$ otvoren skup u $(Y, q)$, postoji $r > 0$ takav da

$$K(f(x), r; q) \subseteq V.$$

Budući da je f neprekidna u $x$, postoji $\delta > 0$ takav da

$$f(K(x, \delta; p)) \subseteq K(f(x), r; q).$$

Slijedi $f(K(x, \delta; p)) \subseteq V$, dakle $K(x, \delta; p) \subseteq f^{-1}(V)$.

Zaključak, $f^{-1}(V)$ je otvoreni skup u $(X, p)$.

Pretpostavimo sada da je za svaki otvoreni skup $V$ u $(Y, q)$ skup $f^{-1}(V)$ otvoren u $(X, p)$. Pokažimo da je $f$ neprekidna s obzirom na $p$ i $q$.

Neka je $x_0 \in X$ i neka je $\epsilon > 0$. Želimo naći $\delta > 0$ takav da je

$$f(K(x_0, \delta; p)) \subseteq K(f(x_0), \epsilon; q) \tag{1.4}$$

Skup $K(f(x_0), \epsilon; q)$ je otvoren u $(Y, q)$, pa je stoga praslika $f^{-1}(K(f(x_0), \epsilon; q))$ otvoren skup u $(X, p)$. Imamo

$$x_0 \in K(f(x_0), \epsilon; q),$$

pa stoga postoji $\delta > 0$ takav da

$$K(x_0, \delta; p) \subseteq f^{-1}(K(f(x_0), \epsilon; q))$$

Iz ovoga slijedi (1.4).

Zaključak: $f$ je neprekidna u točki $x_0$. Prema tome, $f$ je neprekidna. □

## 1.2 Topološki prostori

**Definicija 1.2.1.** *Neka je $X$ neprazan skup, te neka je $\mathcal{T}$ familija podskupova od $X$ takva da vrijede sljedeća svojstva:*

(1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.

(2) Ako je $(U_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ indeksirana familija elemenata od $\mathcal{T}$, onda je $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha \in \mathcal{T}$ .

(3) Ako su $U, V \in \mathcal{T}$, onda je $U \cap V \in \mathcal{T}$.

*Tada za $\mathcal{T}$ kažemo da je **topologija na skupu** $X$, a za uređeni par $(X, \mathcal{T})$ kažemo da je **topološki prostor**.*

**Primjer 1.2.2.** *Neka je $(X, d)$ metrički prostor. Neka je $\mathcal{T}_d$ familija svih skupova koji su otvoreni u $(X, d)$. Tada je $\mathcal{T}_d$ topologija na skupu $X$. Naime, to slijedi iz propozicije 1.1.9.*

*Za $\mathcal{T}_d$ kažemo da je **topologija inducirana metrikom** $d$.*

**Primjer 1.2.3.** *Neka je $X$ neprazan skup. Tada je $\mathcal{P}(X)$ očito topologija na $X$. Za $\mathcal{P}(X)$ kažemo da je **diskretna topologija** na $X$.*

*S druge strane, $\{\emptyset, X\}$ je također topologija na $X$.*

*Za $\{\emptyset, X\}$ kažemo da je **indiskretna topologija** na $X$*

**Napomena 1.2.4.** *Ako je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, $n \in \mathbb{N}$ te $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{T}$, onda je $U_1 \cap \cdots \cap U_n \in \mathcal{T}$.*

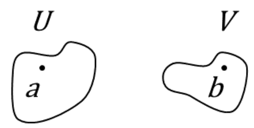
*Ovo se lako dobiva indukcijom po $n$.*

**Definicija 1.2.5.** *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. Za $(X, \mathcal{T})$ kažemo da je* ***metrizabilan topološki prostor*** *ako postoji metrika $d$ na $X$ takva da je $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$.*

**Propozicija 1.2.6.**

*Neka je $(X, d)$ metrički prostor, te neka su $a, b \in X$ takvi da je $a \neq b$.*

*Tada postoje skupovi $U$ i $V$ otvoreni u $(X, d)$ takvi da je $a \in U, b \in V$, te $U \cap V = \emptyset$.*

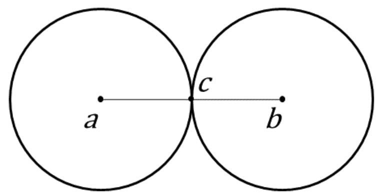



*Dokaz.*

Neka je $r = \dfrac{d(a,b)}{2}$. Tada je $r > 0$ jer je $a \neq b$. Neka je $U = K(a, r)$ te $V = K(b, r)$. Tada su $U$ i $V$ otvoreni skupovi u $(X, d)$, te je očito $a \in U$ i $b \in V$.

Dokažimo još da je $U \cap V = \emptyset$.

Pretpostavimo suprotno. Tada postoji $c \in U \cap V$.




Tada je $c \in U$ i $c \in V$, pa je $d(a, c) < r$ i $d(b, c) < r$.

Imamo

$$2r = d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b) < r + r = 2r,$$

dakle $2r < 2r$. Kontradikcija.

Dakle, $U \cap V = \emptyset$. □

**Definicija 1.2.7.** *Za topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ kažemo da je* ***Hausdorffov*** *ako za sve $a, b \in X$ takve da je $a \neq b$ postoje $U, V \in \mathcal{T}$ takvi da je $a \in U$, $b \in V$ i $U \cap U = \emptyset$.*

**Korolar 1.2.8.** *Svaki metrizabilan topološki prostor je Hausdorffov.*

*Dokaz.*

Neka je $(X, \mathcal{T})$ metrizabilan topološki prostor. Tada postoji metrika $d$ na $X$ koja inducira topologiju $\mathcal{T}$. Neka su $a, b \in X, a \neq b$. Prema propoziciji 1.2.6 postoje skupovi $U$ i $V$ otvoreni u $(X, d)$ takvi da je $a \in U, b \in V$ i $U \cap V = \emptyset$.

Jasno je da su $U, V \in \mathcal{T}$. □

**Primjer 1.2.9.** *Neka je X skup koji ima bar dva elementa. Neka je $\mathcal{T}$ indiskretna topologija na X, to jest $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$.*
*Tada očito topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ nije Hausdorffov.*
*Iz ovoga slijedi da $(X, \mathcal{T})$ nije metrizabilan.*

**Definicija 1.2.10.** *Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori te neka je $f : X \to Y$. Za funkciju f kažemo da je **neprekidna** s obzirom na topologije $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$ ako za svaki $V \in \mathcal{S}$ vrijedi da je $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}$.*

Uočimo da prema propoziciji 1.2.6 vrijedi sljedeće:
Ako su $(X, p)$ i $(Y, q)$ metrički prostori te $f : X \to Y$, onda je $f$ neprekidna s obzirom na metrike $p$ i $q$ ako i samo ako je $f$ neprekidna s obzirom na topologije $\mathcal{T}_p$ i $\mathcal{T}_q$.

**Definicija 1.2.11.** *Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori te neka je $f : X \to Y$.*
*Za funkciju f kažemo da je **homeomorfizam** topoloških prostora $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ ako je f bijekcija, f neprekidna s obzirom na $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$, te $f^{-1}$ neprekidna s obzirom na $\mathcal{S}$ i $\mathcal{T}$.*

*Za topološke prostore $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ kažemo da su **homeomorfni** ako postoji homeomorfizam topoloških prostora $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$.*
*U tom slučaju pišemo: $(X, \mathcal{T}) \cong (Y, \mathcal{S})$.*

**Primjer 1.2.12.**

(1) Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. Tada je funkcija $id : X \to X$ neprekidna s obzirom na topologije $\mathcal{T}$ i $\mathcal{T}$.

(2) Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori, neka je $y_0 \in Y$, te neka je $f : X \to Y$ funkcija definirana sa $f(x) = y_0, \forall x \in X$. Tada je $f$ neprekidna funkcija s obzirom na topologije $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$.

Uočimo da iz prethodnog primjera možemo zaključiti sljedeće:

(1) Ako je $(X, p)$ metrički prostor onda je $id : X \to X$ neprekidna s obzirom na $p$ i $p$.

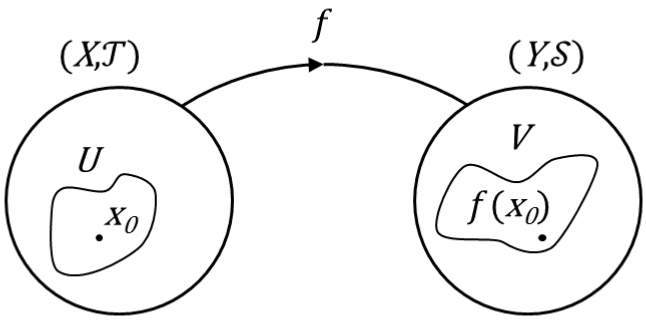
(2) Ako su $(X, p)$ i $(Y, q)$ metrički prostori, $y_0 \in Y$, te $f : X \to Y$ funkcija definirana sa $f(x) = y_0, \forall x \in X$, onda je $f$ neprekidna s obzirom na metrike $p$ i $q$.

**Definicija 1.2.13.**
*Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. Za skup $U \subseteq X$ kažemo da je **otvoren u topološkom prostoru** $(X, \mathcal{T})$ ako je $U \in \mathcal{T}$.*
*Neka je $x \in X$ te $U \subseteq X$. Za U kažemo da je **otvorena okolina točke** x (u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T})$ ) ako je $x \in U$ i $U \in \mathcal{T}$.*

**Definicija 1.2.14.**

*Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori, neka je $f : X \to Y$, te neka je $x_0 \in X$.*

*Za funkciju $f$ kažemo da je* ***neprekidna u točki*** *$x_0$* ***s obzirom na topologije*** *$\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$ ako za svaku otvorenu okolinu $V$ točke $f(x_0)$ u $(Y, \mathcal{S})$ postoji otvorena okolina $U$ točke $x_0$ u $(X, \mathcal{T})$ takva da $f(U) \subseteq V$.*




**Propozicija 1.2.15.**

*Neka su $(X, p)$ i $(Y, q)$ metrički prostori, neka je $f : X \to Y$, te neka je $x_0 \in X$.*

*Tada je funkcija $f$ neprekidna u $x_0$ s obzirom na metrike $p$ i $q$ ako i samo ako je $f$ neprekidna u $x_0$ s obzirom na topologije $\mathcal{T}_p$ i $\mathcal{T}_q$.*

*Dokaz.*

$\boxed{\Rightarrow}$

Pretpostavimo da je $f$ neprekidna u $x_0$ s obzirom na $p$ i $q$. Neka je $V$ otvorena okolina točke $f(x_0)$ u $(Y, \mathcal{T}_q)$, tada je $V$ otvoren skup u metričkom prostoru $(Y, q)$ koji sadrži $f(x_0)$.

Stoga postoji $\epsilon > 0$ takav da je $K(f(x_0), \epsilon) \subseteq V$.

Budući da je $f$ neprekidna u $x_0$ s obzirom na $p$ i $q$, postoji $\delta > 0$ takav da je

$$f(K(x_0, \delta)) \subseteq K(f(x_0), \epsilon).$$

Slijedi da je

$$f(K(x_0, \delta)) \subseteq V.$$

No, $K(x_0, \delta)$ je otvorena okolina točke $x_0$ u $(X, \mathcal{T}_p)$.

Zaključak, $f$ je neprekidna u $x_0$ s obzirom na topologije $\mathcal{T}_p$ i $\mathcal{T}_q$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Pretpostavimo sada da je $f$ neprekidna u $x_0$ s obzirom na topologije $\mathcal{T}_p$ i $\mathcal{T}_q$. Neka je $\epsilon > 0$. Tada je $K(f(x_0), \epsilon)$ otvorena okolina točke $f(x_0)$ u $(Y, \mathcal{T}_q)$.

Budući da je $f$ neprekidna u $x_0$ s obzirom na topologije $\mathcal{T}_p$ i $\mathcal{T}_q$, postoji otvorena okolina $U$ točke $x_0$ u $(X, \mathcal{T}_p)$ takva da je

$$f(U) \subseteq K(f(x_0), \epsilon).$$

Tada je $U$ otvoreni skup u $(X, p)$ koji sadrži $x_0$, pa postoji $\delta > 0$ takav da vrijedi $K(x_0, \delta) \subseteq U$.

Tada je

$$f(K(x_0, \delta)) \subseteq f(U),$$

pa slijedi da je $f(K(x_0, \delta)) \subseteq K(f(x_0), \epsilon)$.

Iz ovoga zaključujemo da je $f$ neprekidna s obzirom na metrike $p$ i $q$. □

**Lema 1.2.16.**

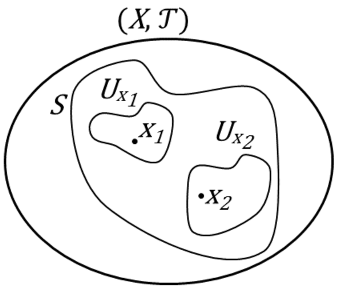
*Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te neka je $S \subseteq X$ skup koji ima sljedeće svojstvo:*

$$\forall x \in S \ \exists U \in \mathcal{T} \text{ takav da je } x \in U \subseteq S.$$

*Tada je $S \in \mathcal{T}$.*

*Dokaz.*

Za $x \in S$ neka je $U_x \in \mathcal{T}$ takav da je $x \in U_x \subseteq S$. Tada je $S = \bigcup_{x \in S} U_x$.




Naime, $\bigcup_{x \in S} U_x \subseteq S$ jer je $U_x \subseteq S, \forall x \in S$.

S druge strane, $S \subseteq \bigcup_{x \in S} U_x$ jer za svaki $x \in S$ vrijedi da je $x \in U_x$.

Budući da je $\bigcup_{x \in S} U_x \in \mathcal{T}$ imamo i da je $S \in \mathcal{T}$. □

**Propozicija 1.2.17.**

*Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori te $f : X \to Y$ funkcija.*

*Tada je funkcija $f$ neprekidna s obzirom na topologije $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$ ako i samo ako je $f$ neprekidna u $x_0$ s obzirom na topologije $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$ za svaki $x_0 \in X$.*

*Dokaz.*

$\boxed{\Rightarrow}$

Pretpostavimo da je $f$ neprekidna s obzirom na $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$.

Neka je $x_0 \in X$. Neka je $V$ otvorena okolina od $f(x_0)$ u $(Y, \mathcal{S})$. Neka je $U = f^{-1}(V)$. Iz $V \in \mathcal{S}$ slijedi da $U \in \mathcal{T}$, a iz $f(x_0) \in V$ slijedi $x_0 \in U$.

Dakle, $U$ je otvorena okolina točke $x_0$ u $(X, \mathcal{T})$, pa vrijedi

$$f(U) = f\left(f^{-1}(V)\right) \subseteq V.$$

Zaključak: $f$ je neprekidna u točki $x_0$ s obzirom na $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Pretpostavimo sada da je $f$ neprekidna u $x_0$ s obzirom na $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$ za svaki $x_0 \in X$. Neka je $V \in \mathcal{S}$. Dokažimo da je $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}$.

Neka je $x \in f^{-1}(V)$. Tada je $f(x) \in V$, što znači da je $V$ otvorena okolina točke $f(x)$ u $(Y, \mathcal{S})$. Budući da je $f$ neprekidna u točki $x$ s obzirom na $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$, tada postoji otvorena okolina $U$ točke $x$ u $(X, \mathcal{T})$ takva da je

$$f(U) \subseteq V.$$

Iz ovoga slijedi da je $U \subseteq f^{-1}(V)$.

Zaključak: Za svaki $x \in f^{-1}(V)$ postoji $U \in \mathcal{T}$ takav da je

$$x \in U \subseteq f^{-1}(V).$$

Iz leme 1.2.16 slijedi da je $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}$.
Dakle, $f$ je neprekidna s obzirom na $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$. $\square$

# Poglavlje 2

# Kvocijentni prostori

Da bismo precizno definirali kvocijentne prostore, krenimo od kvocijentnog preslikavanja.

## 2.1 Kvocijentno preslikavanje

**Definicija 2.1.1.**

*Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. Neka je $\mathcal{F}$ particija skupa $X$. Tada očito za svaki $x \in X$ postoji jedinstveni element od $\mathcal{F}$ koji sadrži $x$.*

*Neka je $q : X \to \mathcal{F}$ funkcija koja svakom $x \in X$ pridružuje upravo onaj element od $\mathcal{F}$ koji sadrži $x$.*

*Za $q$ kažemo da je **kvocijentno preslikavanje** (pridruženo particiji $\mathcal{F}$).*

Uočimo da je $q$ surjekcija.

Neka je $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ familija svih $U \subseteq \mathcal{F}$ takvih sa je $q^{-1}(U) \in \mathcal{T}$. Tada je $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ topologija na $\mathcal{F}$. Dokažimo to.

Imamo $q^{-1}(\emptyset) = \emptyset, q^{-1}(\mathcal{F}) = X$, pa su $\emptyset, \mathcal{F}$ elementi od $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$. Neka je $(U_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ indeksirana familija elemenata od $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$.

Želimo dokazati da je

$$\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha \in \mathcal{T}_{\mathcal{F}}.$$

Jasno je da je

$$\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha \subseteq \mathcal{F}.$$

Imamo

$$q^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} q^{-1}(U_\alpha),$$

a $q^{-1}(U_\alpha) \in \mathcal{T}$ $\forall \alpha \in A$, pa je stoga

$$\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} q^{-1}(U_\alpha) \in \mathcal{T},$$

dakle $q^{-1}(\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha) \in \mathcal{T}$. Prema tome $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha \in \mathcal{T}_{\mathcal{F}}$.

Neka su $U, V \in \mathcal{T}_{\mathcal{F}}$. Jasno je da je $U \cap V \subseteq \mathcal{F}$.

Vrijedi

$$q^{-1}(U \cap V) = q^{-1}(U) \cap q^{-1}(V),$$

a $q^{-1}(U) \cap q^{-1}(V) \in \mathcal{T}$ jer su $q^{-1}(U)$ i $q^{-1}(V)$ elementi od $\mathcal{T}$.
Dakle, $q^{-1}(U \cap V) \in \mathcal{T}$. Prema tome $U \cap V \in \mathcal{T}_{\mathcal{F}}$.

Zaključak, $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ je topologija na skupu $\mathcal{F}$.

*Za $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ kažemo da je **kvocijentna topologija na $\mathcal{F}$ određena s $\mathcal{T}$**.*
*Za $(\mathcal{F}, \mathcal{T}_{\mathcal{F}})$ kažemo da je **kvocijentni prostor od prostora $(X, \mathcal{T})$ određen particijom $\mathcal{F}$**.*

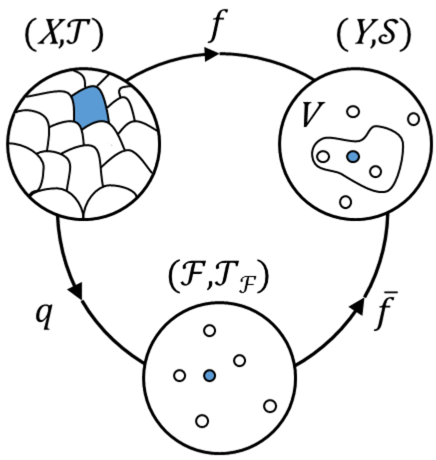
Uočimo da je funkcija $q : X \to \mathcal{F}$ neprekidna s obzirom na topologije $\mathcal{T}$ i $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$.

**Propozicija 2.1.2.**

*Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, $\mathcal{F}$ particija od $X$, $q : X \to \mathcal{F}$ kvocijentno preslikavanje te neka je $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ kvocijentna topologija na $\mathcal{F}$. Nadalje, neka je $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostor te $f : X \to Y$ funkcija neprekidna s obzirom na topologije $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$ koja je konstantna na svakom članu od $\mathcal{F}$ (to jest, za svaki $A \in \mathcal{F}$ i sve $x, y \in A$ vrijedi $f(x) = f(y)$).*

*Definirajmo $\overline{f} : \mathcal{F} \to Y$ sa $\overline{f}(A) = f(x)$, gdje je $x \in A, A \in \mathcal{F}$.*

*Tada je $\overline{f}$ neprekidna s obzirom na $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ i $\mathcal{S}$.*



*Dokaz.*

Iz definicije $\overline{f}$ slijedi da je $\overline{f} \circ q = f$.

Neka je $V \in \mathcal{S}$. Tada je

$$f^{-1}(V) = \left(\overline{f} \circ q\right)^{-1}(V) = q^{-1}\left(\overline{f}^{-1}(V)\right),$$

no budući da je $f$ neprekidna s obzirom na topologije $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$, imamo da je $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}$. To znači da je $q^{-1}\left(\overline{f}^{-1}(V)\right) \in \mathcal{T}$.

Iz definicije topologije $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ slijedi da je $\overline{f}^{-1}(V) \in \mathcal{T}_{\mathcal{F}}$.
Dakle, za svaki $V \in \mathcal{S}$ vrijedi da je $\overline{f}^{-1}(V) \in \mathcal{T}_{\mathcal{F}}$.

Prema tome, $\overline{f}$ je neprekidna s obzirom na $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ i $\mathcal{S}$. □

**Napomena 2.1.3.** *Ako je $X$ skup i $\sim$ relacija ekvivalencije na $X$, onda je skup $X/_{\sim} = \{[x] \mid x \in X\}$ particija od $X$. Stoga, ako je $\mathcal{T}$ topologija na $X$, na $X/_{\sim}$ imamo kvocijentnu topologiju određenu sa $\mathcal{T}$.*

**Definicija 2.1.4.** *Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori te neka je $f : X \to Y$ neprekidna funkcija. Neka je $X/f = \left\{f^{-1}(\{y\}) \mid y \in Y\right\} \setminus \{\emptyset\}$. Tada je $X/f$ particija od $X$.*

Naime, jasno je da je svaki element od $X/f$ neprazan skup te da je svaki $x \in X$ u nekom članu od $X/f$ ($x \in f^{-1}\{f(x)\}$). Nadalje, ako su $y_1, y_2 \in Y$ te ako je $f^{-1}\{y_1\} \cap f^{-1}\{y_2\} \neq \emptyset$ onda

$$\exists x \in f^{-1}\{y_1\} \cap f^{-1}\{y_2\},$$

pa je $x \in f^{-1}\{y_1\}$ i $x \in f^{-1}\{y_2\}$, što povlači $f(x) = y_1$ i $f(x) = y_2$, dakle $y_1 = y_2$, to jest

$$f^{-1}\{y_1\} = f^{-1}\{y_2\}.$$

Označimo sa $\mathcal{T}_f$ kvocijentnu topologiju na $X/f$ određenu topologijom $\mathcal{T}$.

Uočimo da je funkcija $f$ konstantna na svakom članu od $X/f$.

Neka je $\overline{f} : X/f \to Y$ definirana sa $\overline{f}(A) = f(x)$, gdje je $x \in A, A \in X/f$. Tada je prema propoziciji 2.1.2, $\overline{f}$ neprekidna funkcija s obzirom na topologije $\mathcal{T}_f$ i $\mathcal{S}$.
Tvrdimo da je $\overline{f}$ injekcija.

Neka su $A, B \in X/f$ takvi da je $A \neq B$. Imamo

$$A = f^{-1}\{y_1\}, B = f^{-1}\{y_2\},$$

gdje su $y_1, y_2 \in Y$ takvi da je $y_1 \neq y_2$.

Tada je $\overline{f}(A) = y_1, \overline{f}(B) = y_2$.

Dakle, $\overline{f}(A) \neq \overline{f}(B)$.

Ovime smo pokazali da je $\overline{f}$ injekcija.
Nadalje, uočimo da je $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(\overline{f})$. Stoga imamo sljedeći zaključak:

Ako je $f$ surjekcija, $\overline{f} : X/f \to Y$ je neprekidna bijekcija.

Općenito, neprekidna bijekcija između dva topološka prostora ne mora biti homeomorfizam, to jest njena inverzna funkcija ne mora biti neprekidna.

**Primjer 2.1.5.**
*Neka je $X$ neprazan skup, neka je $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ te neka je $\mathcal{S} = \{\emptyset, X\}$. Neka je $f : X \to X$ identiteta, to jest funkcija definirana sa $f(x) = x, \forall x \in X$.*

*Tada je $f$ neprekidna s obzirom na topologije $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$, to jest $f$ je neprekidna funkcija iz topološkog prostora $(X, \mathcal{T})$ u $(X, \mathcal{S})$.*

Jasno je da je $f$ bijekcija te da je $f^{-1} = f$, no $f$ nije neprekidna s obzirom na topologije $\mathcal{S}$ i $\mathcal{T}$ (to jest, $f^{-1}$ nije neprekidna funkcija iz topološkog prostora $(X, \mathcal{S})$ u $(X, \mathcal{T})$ ) ako $X$ ima barem 2 elementa.

**Definicija 2.1.6.** *Neka su $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori te neka je $f : X \to Y$ funkcija. Za $f$ kažemo da je **otvoreno preslikavanje** (s obzirom na $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$) ako za svaki $U \in \mathcal{T}$ vrijedi $f(U) \in \mathcal{S}$.*

**Primjer 2.1.7.**
*Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa $f(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.*

*Tada je $f$ neprekidna funkcija (na $\mathbb{R}$ promatramo euklidsku topologiju $\mathcal{E}$). No, $f$ nije otvoreno preslikavanje. Naime, $\mathbb{R} \in \mathcal{E}$, no $f(\mathbb{R}) \notin \mathcal{E}$ jer je $f(\mathbb{R}) = \{0\}$.*

**Propozicija 2.1.8.** *Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori te neka je $f : X \to Y$ bijekcija neprekidna s obzirom na topologije $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$.*

*Tada je $f$ homeomorfizam ako i samo ako je $f$ otvoreno preslikavanje.*

*Dokaz.* Neka je $S \subseteq X$.

Tada je praslika od $S$ pri funkciji $f^{-1} : Y \to X$, to jest $\left(f^{-1}\right)^{-1}(S)$, jednaka slici skupa $S$ pri funkciji $f$, to jest $f(S)$.
Posebno, za svaki $U \in \mathcal{T}$ vrijedi

$$\left(f^{-1}\right)^{-1}(U) = f(U) \tag{2.1}$$

Pretpostavimo da je $f$ homeomorfizam. Tada je $f^{-1} : Y \to X$ neprekidna funkcija s obzirom na $\mathcal{S}$ i $\mathcal{T}$, pa za svaki $U \in \mathcal{T}$ vrijedi

$$\left(f^{-1}\right)^{-1}(U) \in \mathcal{S}.$$

Iz (2.1) zaključujemo da je $f$ otvoreno preslikavanje.

Obratno, ako je $f$ otvoreno preslikavanje, onda iz (2.1) zaključujemo da je $f^{-1}$ neprekidna s obzirom na $\mathcal{S}, \mathcal{T}$, dakle $f$ je homeomorfizam. □

**Lema 2.1.9.** *Neka su $S$, $T$ i $V$ skupovi te neka su $g : S \to T$ i $h : T \to V$ funkcije pri čemu je $g$ surjekcija. Neka je $f = h \circ g$.*

*Neka je $W \subseteq T$. Tada je $h(W) = f(g^{-1}(W))$.*

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & V \\
& T \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

*Dokaz.*

Neka je $y \in h(W)$. Tada postoji $z \in W$ takav da je $h(z) = y$. Budući da je $g$ surjekcija, postoji $x \in S$ takav da $g(x) = z$. Imamo $g(x) \in W$, pa je $x \in g^{-1}(W)$.
Imamo
$$y = h(z) = h(g(x)) = (h \circ g)(x) = f(x).$$
Dakle, $y = f(x)$ i $x \in g^{-1}(W)$. Prema tome
$$y \in f(g^{-1}(W)).$$

Obratno, pretpostavimo da je $y \in f(g^{-1}(W))$. Tada postoji $x \in g^{-1}(W)$ takav da $f(x) = y$.
Imamo
$$y = f(x) = (h \circ g)(x) = h(g(x)).$$
Budući da je $x \in g^{-1}(W)$, imamo $g(x) \in W$ . Sada je $y = h(g(x))$.

Zaključujemo $y \in h(W)$. □

**Propozicija 2.1.10.** *Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori te neka je $f : X \to Y$ neprekidna funkcija s obzirom na $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$, te ujedno otvoreno preslikavanje s obzirom na $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$.*

*Tada je $\overline{f} : X/f \to Y$ otvoreno preslikavanje s obzirom na topologije $\mathcal{T}_f$ i $\mathcal{S}$.*

*Dokaz.* Neka je $q : X \to X/f$ kvocijentno preslikavanje.
Tada je $f = \overline{f} \circ q$.

Želimo pokazati da je $\overline{f}$ otvoreno preslikavanje s obzirom na $\mathcal{T}_f$ i $\mathcal{S}$.

Neka je $U \in \mathcal{T}_f$. Budući da je $q$ surjekcija, prema lemi 2.1.9 imamo
$$\overline{f}(U) = f\left(q^{-1}(U)\right).$$

Iz $U \in \mathcal{T}_f$ slijedi

$$q^{-1}(U) \in \mathcal{T},$$

pa je

$$f\left(q^{-1}(U)\right) \in \mathcal{S}$$

jer je $f$ otvoreno preslikavanje. Dakle, $\overline{f}(U) \in \mathcal{S}$.

Zaključak, $\overline{f}$ je otvoreno preslikavanje s obzirom na $\mathcal{T}_f$ i $\mathcal{S}$. □

**Korolar 2.1.11.**

*Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori te neka je $f : X \to Y$ neprekidna surjekcija koja je otvoreno preslikavanje.*

*Tada je $\overline{f} : X/f \to Y$ homeomorfizam (s obzirom na $\mathcal{T}_f$ i $\mathcal{S}$).*

*Dokaz.* Znamo da je $\overline{f}$ neprekidna bijekcija. Iz prethodne propozicije slijedi da je $\overline{f}$ otvoreno preslikavanje.

Iz propozicije 2.1.8 slijedi da je $\overline{f}$ homeomorfizam. □

## 2.2 Kvocijentna topologija

**Definicija 2.2.1.** *Neka je $X$ skup te neka je $\mathcal{T}$ topologija na $X$. Neka je $\mathcal{B}$ familija podskupova od $X$ takva da vrijedi sljedeće:*

(1) $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$

(2) Svaki neprazan element od $\mathcal{T}$ se može napisati kao unija nekih elemenata od $\mathcal{B}$, to jest ako je $U \in \mathcal{T}$, $U \neq \emptyset$, onda postoji indeksirana familija $(B_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ elemenata od $\mathcal{B}$ takva da je $U = \bigcup\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} B_\alpha$.

*Tada za $\mathcal{B}$ kažemo da je **baza topologije** $\mathcal{T}$.*

**Propozicija 2.2.2.**

*Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te neka je $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$.*

*Tada je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{T}$ ako i samo ako za svaki $U \in \mathcal{T}$ i svaki $x \in U$ postoji $B \in \mathcal{B}$ takav da je $x \in B \subseteq U$.*

*Dokaz.*

Pretpostavimo da je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{T}$. Neka je $U \in \mathcal{T}$ te $x \in U$.

Tada je $U$ neprazan skup, pa postoji indeksirana familija $(B_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ elemenata od $\mathcal{B}$ takva da je

$$U = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} B_\alpha.$$

Iz $x \in U$ slijedi da postoji $\alpha \in \mathcal{A}$ takav da $x \in B_\alpha$.
Očito vrijedi da je $B_\alpha \subseteq U$. Dakle, $x \in B_\alpha \subseteq U$ i $B_\alpha \in \mathcal{B}$.

Obratno, pretpostavimo da za svaki $U \in \mathcal{T}$ i svaki $x \in U$ postoji $B \in \mathcal{B}$ takav da je

$$x \in B \subseteq U.$$

Dokažimo da je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{T}$.

Prema pretpostavci propozicije, imamo $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$. Neka je $U \in \mathcal{T}$, $U \neq \emptyset$.
Za svaki $x \in U$ postoji $B_x \in \mathcal{B}$ takav da je

$$x \in B_x \subseteq U.$$

Imamo indeksiranu familiju $(B_x)_{x \in U}$ elemenata od $\mathcal{B}$ i vrijedi

$$U = \bigcup_{x \in U} B_x.$$

Zaključak: $\mathcal{B}$ je baza topologije $\mathcal{T}$. □

**Primjer 2.2.3.** *Neka je $(X, d)$ metrički prostor. Neka je $\mathcal{B} = \{K(x, r) \mid x \in X, r > 0\}$. Tada je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{T}_d$.*

Naime, iz propozicije 1.1.8 slijedi da je $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}_d$.

S druge strane, ako je $U \in \mathcal{T}_d$, onda je $U$ otvoren skup u $(X, d)$, pa ako je $x \in U$ onda postoji $r > 0$ takav da je

$$K(x, r) \subseteq U.$$

Jasno, $x \in K(x, r)$.
Dakle, postoji $B \in \mathcal{B}$ takav da je $x \in B \subseteq U$.

Iz propozicije 2.2.2 slijedi da je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{T}_d$.

**Napomena 2.2.4.** *Neka je $(X, d)$ metrički prostor te neka je $U \subseteq X$, $U \neq \emptyset$.*

*Tada iz prethodnog primjera slijedi da je $U$ otvoren skup u $(X, d)$ ako i samo ako je $U$ unija nekih otvorenih kugli.*

**Primjer 2.2.5.** *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. Tada je $\mathcal{T}$ baza topologije $\mathcal{T}$.*

**Propozicija 2.2.6.**

*Neka je $X$ neprazan skup te neka je $\mathcal{B}$ familija podskupova od $X$ takva da vrijedi sljedeće:*

*(1)* $\bigcup\limits_{B\in\mathcal{B}} B = X$

*(2) Ako su $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ te ako je $x \in B_1 \cap B_2$ onda postoji $B_3 \in \mathcal{B}$ takav da je $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.*

*Tada postoji jedinstvena topologija $\mathcal{T}$ na $X$ takva da je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{T}$.*

*Dokaz.*

Dokažimo prvo da takva topologija mora biti jedinstvena.

Pretpostavimo da su $\mathcal{T}_1$ i $\mathcal{T}_2$ topologije na $X$ kojima je $\mathcal{B}$ baza. Neka je $U \in \mathcal{T}_1$. Ako je $U = \emptyset$ onda je $U \in \mathcal{T}_2$.

Pretpostavimo da je $U \neq \emptyset$. Tada postoji indeksirana familija $(B_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ elemenata iz $\mathcal{B}$ takva da je $U = \bigcup\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} B_\alpha$. No, budući da je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{T}_2$, vrijedi $B_\alpha \in \mathcal{T}_2$ za svaki $\alpha \in \mathcal{A}$, pa je stoga $\bigcup\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} B_\alpha \in \mathcal{T}_2$. Dakle, $U \in \mathcal{T}_2$.

Prema tome, $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$. Analogno, $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1$, dakle $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.

Dokažimo sada da postoji topologija na $X$ kojoj je $\mathcal{B}$ baza.

Neka je $\mathcal{T}$ familija svih podskupova $U$ od $X$ koji imaju sljedeće svojstvo:

$$\forall x \in U\ \exists B \in \mathcal{B} \text{ takav da je } x \in B \subseteq U$$

Dokažimo sada da je $\mathcal{T}$ topologija na $X$ te da je $\mathcal{B}$ njena baza.

Očito $\emptyset \in \mathcal{T}$. Neka je $x \in X$. Iz svojstva (1) slijedi da postoji $B \in \mathcal{B}$ takav da je $x \in B \subseteq X$. Stoga je $X \in \mathcal{T}$. Neka je $(U_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ indeksirana familija elemenata od $\mathcal{T}$. Želimo dokazati da je unija $\bigcup\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} U_\alpha \in \mathcal{T}$. Neka je $x \in \bigcup\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} U_\alpha$. Tada postoji $\alpha_0 \in \mathcal{A}$ takav da je $x \in U_{\alpha_0}$.

Budući da je $U_{\alpha_0} \in \mathcal{T}$, postoji $B \in \mathcal{B}$ takav da $x \in B \subseteq U_{\alpha_0}$.
Stoga je $x \in B \subseteq \bigcup\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} U_\alpha$.
Zaključak: $\bigcup\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} U_\alpha \in \mathcal{T}$

Neka je $U, V \in \mathcal{T}$. Dokažimo da je $U \cap V \in \mathcal{T}$.
Neka je $x \in U \cap V$. Tada je $x \in U$ i $x \in V$. Stoga postoje $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ takvi da je $x \in B_1 \subseteq U$ i $x \in B_2 \subseteq V$. Iz ovoga slijedi $x \in B_1 \cap B_2 \subseteq U \cap V$.

Prema svojstvu (2) postoji $B_3 \in \mathcal{B}$ takav da je $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$, iz čega slijedi da je $x \in B_3 \subseteq U \cap V$.
Zaključak: $U \cap V \in \mathcal{T}$.

Ovim smo dokazali da je $\mathcal{T}$ topologija $X$.

Iz definicije od $\mathcal{T}$ je očito da je $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$. Nadalje, ako je $U \in \mathcal{T}$ i $x \in U$ onda postoji $B \in \mathcal{B}$ takav da je $x \in B \subseteq U$.

Iz propozicije 2.2.2 slijedi da je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{T}$. □

**Definicija 2.2.7.**
*Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori. Neka je*

$$\mathcal{B} = \{U \times V \mid U \in \mathcal{T}, V \in \mathcal{S}\}$$

Tada je, očito, $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X \times Y$, naime $X \times Y \in \mathcal{B}$.
Neka su $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ te neka je $a \in B_1 \cap B_2$.
Tada je $B_1 = U_1 \times V_1, B_2 = U_2 \times V_2$, gdje su $U_1, U_2 \in \mathcal{T}, V_1, V_2 \in \mathcal{S}$.

Stoga je $B_1 \cap B_2 = (U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2)$.

Jasno je da je

$$U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}, V_1 \cap V_2 \in \mathcal{S},$$

pa slijedi da je $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$.

Neka je $B_3 = B_1 \cap B_2$. Imamo, dakle, $B_3 \in \mathcal{B}$ i $a \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

*Iz propozicije 2.2.6 slijedi da postoji jedinstvena topologija $\mathcal{R}$ na $X \times Y$ takva da je $\mathcal{B}$ baza od $\mathcal{R}$.*

*Za $\mathcal{R}$ kažemo da je* ***produktna topologija*** *na $X \times Y$ određena topologijama $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$, a za topološki prostor $(X \times Y, \mathcal{R})$ da je* ***produkt prostora*** *$(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$.*

**Propozicija 2.2.8.**

*Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori te neka je $(X \times Y, \mathcal{R})$ njihov produkt. Neka je $W \subseteq X \times Y$.*

*Tada je $W \in \mathcal{R}$ ako i samo ako za sve $x \in X$ i $y \in Y$ takve da je $(x, y) \in W$ postoje $U \in \mathcal{T}$ i $V \in \mathcal{S}$ takvi da je $(x, y) \in U \times V \subseteq W$.*

*Dokaz.* Neka je $W \in \mathcal{R}$. Neka su $x \in X, y \in Y$ takvi da je $(x, y) \in W$.

Iz propozicije 2.2.2 slijedi da postoje $U \in \mathcal{T}$ i $V \in \mathcal{S}$ takvi da vrijedi
$(x, y) \in U \times V \subseteq W$.

Obratno, pretpostavimo da je $W \subseteq X \times Y$ te da za sve $x \in X, y \in Y$ takve da je $(x, y) \in W$ postoje $U \in \mathcal{T}$ i $V \in \mathcal{S}$ sa svojstvom $(x, y) \in U \times V \subseteq W$.

Uočimo da za sve $U \in \mathcal{T}$ i $V \in \mathcal{S}$ vrijedi $U \times V \in \mathcal{R}$. Iz ovoga zaključujemo da za svaki $z \in W$ postoji $Q \in \mathcal{R}$ takav da je $z \in Q \subseteq W$. Iz leme 1.2.16 slijedi $W \in \mathcal{R}$. □

**Propozicija 2.2.9.**

*Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori te neka je $(X \times Y, \mathcal{R})$ njihov produkt. Neka je $p : X \times Y \to X$ projekcija na prvu koordinatu, a $q : X \times Y \to Y$ projekcija na drugu koordinatu, to jest*

$$p(x, y) = x, \ q(x, y) = y \quad \forall (x, y) \in X \times Y \ .$$

*Tada je $p$ neprekidna s obzirom na topologije $\mathcal{R}$ i $\mathcal{T}$, a $q$ je neprekidna s obzirom na topologije $\mathcal{R}$ i $\mathcal{S}$.*

*Dokaz.* Neka je $U \in \mathcal{T}$. Tada je $p^{-1}(U) = U \times Y$, pa slijedi (budući da je $Y \in \mathcal{S}$) da je $p^{-1}(U) \in \mathcal{R}$. Dakle, $p$ je neprekidna s obzirom na $\mathcal{R}$ i $\mathcal{T}$. Analogno dokazujemo da je $q$ neprekidna s obzirom na $\mathcal{R}$ i $\mathcal{S}$. □

**Propozicija 2.2.10.**

*Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori te neka je $(X \times Y, \mathcal{R})$ njihov produkt. Neka su $p : X \times Y \to X$ i $q : X \times Y \to Y$ projekcije.*

*Tada je $p$ otvoreno preslikavanje s obzirom na topologije $\mathcal{R}$ i $\mathcal{T}$, a $q$ otvoreno preslikavanje s obzirom na topologije $\mathcal{R}$ i $\mathcal{S}$.*

*Dokaz.* Neka je $W \in \mathcal{R}$. Želimo dokazati da je $p(W) \in \mathcal{T}$.

Ako je $W = \emptyset$ onda je tvrdnja jasna.

Pretpostavimo sada da je $W \neq \emptyset$.

Neka je $\mathcal{B} = \{U \times V \mid U \in \mathcal{T}, V \in \mathcal{S}\}$. Tada postoji indeksirana familija $(B_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ elemenata iz $\mathcal{B}$ takva da je $W = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} B_\alpha$. Za svaki $\alpha \in \mathcal{A}$ postoje $U_\alpha \in \mathcal{T}$ i $V_\alpha \in \mathcal{S}$ takvi da je $B_\alpha = U_\alpha \times V_\alpha$ i pri tome uzimamo $U_\alpha = V_\alpha = \emptyset$ ako je $B_\alpha = \emptyset$.

Tada je $p(B_\alpha) = p(U_\alpha \times V_\alpha) = U_\alpha$, pa slijedi

$$p(W) = p\left(\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} B_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} p(B_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha \ .$$

Dakle, $p(W) = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha$ iz čega slijedi $p(W) \in \mathcal{T}$.

Zaključak: $p$ je otvoreno preslikavanje s obzirom na $\mathcal{R}$ i $\mathcal{T}$.

Analogno dobivamo da je $q$ otvoreno preslikavanje s obzirom na $\mathcal{R}$ i $\mathcal{S}$. □

Uočimo sljedeće:

Ako su $X$ i $Y$ neprazni skupovi, onda je $\{\{x\} \times Y \mid x \in X\}$ particija skupa $X \times Y$.

**Teorem 2.2.11.**

*Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori te neka je $(X \times Y, \mathcal{R})$ njihov produkt. Neka je $\mathcal{F} = \{\{x\} \times Y \mid x \in X\}$ te neka je $\mathcal{R}_\mathcal{F}$ kvocijentna topologija na $\mathcal{F}$ određena s $\mathcal{R}$.*

*Tada su topološki prostori $(\mathcal{F}, \mathcal{R}_\mathcal{F})$ i $(X, \mathcal{T})$ homeomorfni. Pri tome je homeomorfizam $f : \mathcal{F} \to X$ dan sa $f(\{x\} \times Y) = x$.*

*Dokaz.* Neka je $p : X \to Y$ projekcija na prvu koordinatu. Tada je $p$ očito surjekcija.

Nadalje, $p$ je neprekidna funkcija s obzirom na $\mathcal{R}$ i $\mathcal{T}$ (propozicija 2.2.9), a prema propoziciji 2.2.10 imamo da je $p$ otvoreno preslikavanje s obzirom na $\mathcal{R}$ i $\mathcal{T}$. Iz korolara 2.1.11 slijedi da je $\overline{p} : (X \times Y)/_p \to X$ homeomorfizam s obzirom na $\mathcal{R}_p$ i $\mathcal{T}$.

Prema definiciji skupa $(X \times Y)/_p$ imamo

$$(X \times Y)/_p = \left\{p^{-1}(\{x\}) \mid x \in X\right\} \setminus \{\emptyset\} = \{\{x\} \times Y \mid x \in X\} = \mathcal{F}$$

Po definiciji, $\mathcal{R}_p$ je kvocijentna topologija na $(X \times Y)/_p$ određena s $\mathcal{R}$, dakle to je kvocijentna topologija na $\mathcal{F}$ određena s $\mathcal{R}$, to jest $\mathcal{R}_\mathcal{F}$.

Zaključak: $\quad \overline{p} : \mathcal{F} \to X$ je homeomorfizam s obzirom na $\mathcal{R}_\mathcal{F}$ i $\mathcal{T}$.

Uočimo da za svaki $x \in X$ vrijedi

$$\overline{p}(\{x\} \times Y) = p(x, y),$$

gdje je $y$ proizvoljni element od $Y$. Stoga je $\overline{p}(\{x\} \times Y) = x, \forall x \in X$. □

Analogno dokazujemo sljedeći teorem.

**Teorem 2.2.12.**
*Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori te neka je $(X \times Y, \mathcal{R})$ njihov produkt. Neka je $\mathcal{G} = \{X \times \{y\} \mid y \in Y\}$ te neka je $\mathcal{R}_\mathcal{G}$ kvocijentna topologija na $\mathcal{G}$ određena s $\mathcal{R}$.*

*Tada su topološki prostori $(\mathcal{G}, \mathcal{R}_\mathcal{G})$ i $(Y, \mathcal{S})$ homeomorfni. Pri tome je homeomorfizam $g : \mathcal{G} \to Y$ dan sa $g(X \times \{y\}) = y$.*

□

**Definicija 2.2.13.** *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te neka je $F \subseteq X$. Kažemo da je $F$* ***zatvoren skup*** *u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T})$ ako je $F^C$ otvoren skup u $(X, \mathcal{T})$, to jest ako je $F^C \in \mathcal{T}$.*

**Propozicija 2.2.14.**
*Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori te neka je $f : X \to Y$.*

*Tada je $f$ neprekidna funkcija s obzirom na topologije $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$ ako i samo ako je $f^{-1}(F)$ zatvoren skup u $(X, \mathcal{T})$ za svaki zatvoren skup $F$ u $(Y, \mathcal{S})$.*

*Dokaz.* Neka je $F \subseteq Y$. Tvrdimo da je

$$\left(f^{-1}(F)\right)^C = f^{-1}\left(F^C\right) \tag{2.2}$$

Ako je $x \in \left(f^{-1}(F)\right)^C$, onda je $x \in X$ i $x \notin f^{-1}(F)$, pa $f(x) \notin F$ to jest $f(x) \in F^C$ iz čega slijedi $x \in f^{-1}\left(F^C\right)$.

Obratno, ako je $x \in f^{-1}\left(F^C\right)$, onda je $x \in X$ i $f(x) \in F^C$, pa $f(x) \notin F$, to jest $x \notin f^{-1}(F)$, dakle $x \in \left(f^{-1}(F)\right)^C$.

Dakle, (2.2) vrijedi.

Pretpostavimo da je $f$ neprekidna s obzirom na $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$.

Neka je $F$ zatvoren skup u $(Y, \mathcal{S})$ . Tada je $F^C$ otvoren u $(Y, \mathcal{S})$, pa je $f^{-1}\left(F^C\right)$ otvoren u $(X, \mathcal{T})$. Dakle, prema (2.2) skup $\left(f^{-1}(F)\right)^C$ je otvoren u $(X, \mathcal{T})$. To znači da je $f^{-1}(F)$ zatvoren skup u $(X, \mathcal{T})$.

Pretpostavimo sada da je $f^{-1}(F)$ zatvoren skup u $(X, \mathcal{T})$ za svaki zatvoren skup $F$ u $(Y, \mathcal{S})$. Dokažimo da je $f$ neprekidna s obzirom na $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$.

Neka je $V \in \mathcal{S}$. Tada je (prema (2.2)) $\left(f^{-1}(V)\right)^C = f^{-1}\left(V^C\right)$.

Budući da je $V \in \mathcal{S}$, skup $V^C$ je zatvoren u $(Y, \mathcal{S})$, stoga je $f^{-1}\left(V^C\right)$ zatvoren skup u $(X, \mathcal{T})$. Dakle, $\left(f^{-1}(V)\right)^C$ je zatvoren skup u $(X, \mathcal{T})$, pa je $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}$.

Dakle, $f$ je neprekidna s obzirom na $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$. □

**Definicija 2.2.15.** *Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori te neka je $f : X \to Y$. Kažemo da je $f$* ***zatvoreno preslikavanje*** *s obzirom na $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$ ako je $f(A)$ zatvoren skup u $(Y, \mathcal{S})$ za svaki zatvoren skup $A$ u $(X, \mathcal{T})$.*

**Primjer 2.2.16.** *Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa $f(x) = 0\ \forall x \in \mathbb{R}$.*
*U primjeru 2.1.7 smo vidjeli da $f$ nije otvoreno preslikavanje. No, $f$ je zatvoreno preslikavanje.* Naime, ako je $A \subseteq \mathbb{R}$ onda je $f(A) = \{0\}$ ili $f(A) = \emptyset$, a $\{0\}$ i $\emptyset$ su zatvoreni skupovi u $\mathbb{R}$.

*Dakle, zatvoreno preslikavanje ne mora biti otvoreno.*

**Definicija 2.2.17.** *Neka su $(X, d)$ i $(Y, p)$ metrički prostori takvi da je*
*$Y \subseteq X$ te $p(a, b) = d(a, b)$ za sve $a, b \in Y$.*
*Tada za $(Y, p)$ kažemo da je* ***potprostor metričkog prostora*** *$(X, d)$.*

Uočimo sljedeće:

Ako je $(X, d)$ metrički prostor te $Y \subseteq Y, Y \neq \emptyset$ onda postoji jedinstvena metrika $p$ na $Y$ takva da je $(Y, p)$ potprostor metričkog prostora $(X, d)$.

**Propozicija 2.2.18.**

*Neka je $(Y, p)$ potprostor metričkog prostora $(X, d)$.*

*Ako je $U$ otvoreni skup u $(X, d)$, onda je $U \cap Y$ otvoren skup u $(Y, p)$.*
*Obratno, ako je $V$ otvoren skup u $(Y, p)$, onda postoji otvoreni skup $U$ u $(X, d)$ takav da je $V = U \cap Y$.*

*Dokaz.*
Uočimo, prije svega, sljedeće: ako su $y \in Y$ i $r > 0$ onda je

$$K(y, r; p) = K(y, r; d) \cap Y \tag{2.3}$$

Naime,

$$\begin{aligned} K(y, r; p) =& \{x \in Y \mid p(y, x) < r\} = \{x \in Y \mid d(y, x) < r\} = \\ =& \{x \in X \mid d(y, x) < r\} \cap Y = \\ =& K(y, r; d) \cap Y \end{aligned}$$

Neka je $U$ otvoren skup u $(X, d)$. Dokažimo da je $U \cap Y$ otvoren skup u $(Y, p)$. Neka je $y \in U \cap Y$. Tada je $y \in U$, pa budući da je $U$ otvoren u $(X, d)$ postoji $r > 0$ takav da je $K(y, r; d) \subseteq U$. Iz ovoga slijedi da je $K(y, r; d) \cap Y \subseteq U \cap Y$. Iz (2.3) slijedi da je

$$K(y, r; p) \subseteq U \cap Y\ .$$

Iz ovoga zaključujemo da je $U \cap Y$ otvoren skup u metričkom prostoru $(Y, p)$.

Pretpostavimo da je V otvoren skup u $(Y, p)$. Tada za svaki $y \in V$ postoji $r_y > 0$ takav da je $K(y, r_y; p) \subseteq V$. Iz ovoga slijedi da je $V = \bigcup\limits_{y \in V} K(y, r_y; p)$.

Neka je $U = \bigcup\limits_{y \in V} K(y, r_y; d)$. Tada je $U$ otvoren skup u $(X, d)$ (jer je $U$ unija otvorenih skupova u $(X, d)$ ).
Imamo

$$\begin{aligned} U \cap Y =& \left[\bigcup_{y \in V} K(y, r_y; d)\right] \cap Y = \\ =& \bigcup_{y \in V} \Big(K(y, r_y; d) \cap Y\Big) = \\ =& \bigcup_{y \in V} K(y, r_y; p) = V\ . \end{aligned}$$

Dakle, $U \cap Y = V$. □

**Napomena 2.2.19.** *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}, S \neq \emptyset$. Neka je $p : S \times S \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa $p(x, y) = |x - y|,\ x, y \in S$. Tada je $p$ metrika na $S$ i $(S, p)$ je potprostor metričkog prostora $(\mathbb{R}, d)$, gdje je $d$ euklidska metrika na $\mathbb{R}$.*

*Za $p$ kažemo da je* ***euklidska metrika*** *na $S$.*

**Primjer 2.2.20.**

*Neka je $p$ euklidska metrika na $\langle 0,1\rangle$ te neka je $d$ euklidska metrika na $\mathbb{R}$. Neka je $\mathcal{T}$ topologija na $\langle 0,1\rangle$ inducirana metrikom $p$ te neka je $\mathcal{E}$ euklidska topologija na $\mathbb{R}$, to jest topologija inducirana metrikom $d$.*

*Neka je $f : \langle 0,1\rangle \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa $f(x) = x, \forall x \in \langle 0,1\rangle$. Tada je $f$ neprekidno i otvoreno preslikavanje s obzirom na topologije $\mathcal{T}$ i $\mathcal{E}$, no $f$ nije zatvoreno s obzirom na $\mathcal{T}$ i $\mathcal{E}$. Dokažimo to.*

Neka je $V \in \mathcal{E}$. Tada je $V$ otvoren skup u $(\mathbb{R}, d)$. Imamo

$$\begin{aligned} f^{-1}(V) &= \{x \in \langle 0,1\rangle : f(x) \in V\} = \\ &= \{x \in \langle 0,1\rangle : x \in V\} = \\ &= \langle 0,1\rangle \cap V \,. \end{aligned}$$

Prema propoziciji 2.2.18, skup $\langle 0,1\rangle \cap V$ je otvoren u $(\langle 0,1\rangle, p)$, to jest $\langle 0,1\rangle \cap V \in \mathcal{T}$. Dakle, $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}$ za svaki $V \in \mathcal{E}$.
Prema tome, $f$ je neprekidna s obzirom na topologije $\mathcal{T}$ i $\mathcal{E}$.

Dokažimo da je $f$ otvoreno preslikavanje. Neka je $V \in \mathcal{T}$. Tada je $V$ otvoreni skup u $(\langle 0,1\rangle, p)$, pa prema propoziciji 2.2.14, postoji otvoren skup $U$ u $(\mathbb{R}, d)$ takav da je

$$V = U \cap \langle 0,1\rangle.$$

No, $\langle 0,1\rangle$ je također otvoren skup u $(\mathbb{R}, d)$, pa je stoga $V$ otvoren u $(\mathbb{R}, d)$. Prema tome $V \in \mathcal{E}$. Uočimo da je $f(V) = V$. Dakle, za svaki $V \in \mathcal{T}$ vrijedi $f(V) \in \mathcal{E}$.

Zaključujemo da je $f$ otvoreno preslikavanje s obzirom na topologije $\mathcal{T}$ i $\mathcal{E}$.

Skup $\langle 0,1\rangle$ je zatvoren u $(\langle 0,1\rangle, \mathcal{T})$, no $f(\langle 0,1\rangle)$ nije zatvoren u $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$.
Naime, $f(\langle 0,1\rangle) = \langle 0,1\rangle$, a skup $\mathbb{R} \setminus \langle 0,1\rangle$ nije otvoren u $(\mathbb{R}, d)$.

**Propozicija 2.2.21.**

*Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori te neka je $f : X \to Y$ bijekcija neprekidna s obzirom na $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$.*

*Tada je $F$ homeomorfizam ako i samo ako je $f$ zatvoreno preslikavanje.*

*Dokaz.* Kao u dokazu propozicije 2.1.8 imamo da je

$$\left(f^{-1}\right)^{-1}(S) = f(S) \quad \text{za svaki } S \subseteq X. \tag{2.1}$$

Pretpostavimo da je $f$ homeomorfizam. Tada je $f^{-1} : Y \to X$ neprekidna funkcija s obzirom na $\mathcal{S}, \mathcal{T}$. Neka je $F$ zatvoren skup u $(X, \mathcal{T})$. Prema propoziciji 2.2.14 skup $\left(f^{-1}\right)^{-1}(F)$ je zatvoren u $(Y, \mathcal{S})$. Dakle, $f(F)$ je zatvoren u $(Y, \mathcal{S})$.

Zaključak: $f$ je zatvoreno preslikavanje.

Pretpostavimo da je $f$ zatvoreno preslikavanje. Želimo dokazati da je $f$ homeomorfizam. U tu svrhu, dovoljno je dokazati da je $f^{-1}$ neprekidna funkcija s obzirom na $\mathcal{T}, \mathcal{S}$. Prema propoziciji 2.2.14 dovoljno je dokazati da je $\left(f^{-1}\right)^{-1}(F)$ zatvoren skup u $(Y, \mathcal{S})$ za svaki $F$ koji je zatvoren u $(X, \mathcal{T})$. No, to slijedi iz (2.1) i činjenice da je $f$ zatvoreno preslikavanje. □

**Propozicija 2.2.22.**

*Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori te neka je $f : X \to Y$ neprekidna funkcija s obzirom na $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$, te ujedno otvoreno preslikavanje s obzirom na $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$.*

*Tada je $\overline{f} : X/f \to Y$ zatvoreno preslikavanje s obzirom na $\mathcal{T}_f$ i $\mathcal{S}$.*

*Dokaz.*

Neka je $q : X \to X/f$ kvocijentno preslikavanje. Tada je $f = \overline{f} \circ q$.

Neka je $F$ zatvoren skup u topološkom prostoru $(X/f, \mathcal{T}_f)$. Budući da je $q$ surjekcija, iz leme 2.1.9 slijedi $\overline{f}(F) = f\left(q^{-1}(F)\right)$.

Funkcija $q$ je neprekidna s obzirom na $\mathcal{T}, \mathcal{S}$, pa je prema propoziciji 2.2.14, $q^{-1}(F)$ zatvoren skup u $(X, \mathcal{T})$. Sada iz činjenice da je $f$ zatvoreno preslikavanje, slijedi da je $f\left(q^{-1}(F)\right)$ zatvoren skup u $(Y, \mathcal{S})$. Dakle, $\overline{f}(F)$ je zatvoren u $(Y, \mathcal{S})$.

Zaključak: $\overline{f}$ je zatvoreno preslikavanje s obzirom na $\mathcal{T}_f$ i $\mathcal{S}$. □

**Korolar 2.2.23.**

*Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori te neka je $f : X \to Y$ neprekidna surjekcija koja je zatvoreno preslikavanje.*

*Tada je $\overline{f} : X/f \to Y$ homeomorfizam (s obzirom na $\mathcal{T}_f$ i $\mathcal{S}$).*

*Dokaz.* Funkcija $\overline{f}$ je bijekcija te je neprekidna s obzirom na $\mathcal{T}_f, \mathcal{S}$. Prema prethodnoj propoziciji 2.2.22, $\overline{f}$ je zatvoreno preslikavanje. Propozicija 2.2.21 sada povlači da je $\overline{f}$ homeomorfizam. □

## 2.3 Kompaktnost

Definirajmo sada kompaktan topološki prostor i kompaktan skup u topološkom prostoru.

**Definicija 2.3.1.** *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, te neka je $\mathcal{U}$ familija otvorenih skupova u $(X, \mathcal{T})$ (to jest $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$) čija je unija jednaka $X$, to jest $\bigcup \mathcal{U} = X$. Tada za $\mathcal{U}$ kažemo da je **otvoreni pokrivač topološkog prostora** $(X, \mathcal{T})$.*

**Definicija 2.3.2.** *Za **topološki prostor** $(X, \mathcal{T})$ kažemo da je **kompaktan** ako za svaki otvoreni pokrivač $\mathcal{U}$ od $(X, \mathcal{T})$ postoje $n \in \mathbb{N}$ i $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$ takvi da je $X = U_1 \cup \ldots \cup U_n$.*

**Primjer 2.3.3.**

*Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, pri čemu je $\mathcal{T}$ konačan skup. Tada je $(X, \mathcal{T})$ kompaktan topološki prostor.*

*Naime, ako je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač od $(X, \mathcal{T})$ onda je $\mathcal{U}$ konačan skup.*
*Posebno, ako je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor takav da je $X$ konačan skup, onda je $(X, \mathcal{T})$ kompaktan.*

**Primjer 2.3.4.**

*Neka je $X$ beskonačan skup. Tada topološki prostor $(X, \mathcal{P}(X))$ nije kompaktan.*

*Naime, neka je $\mathcal{U} = \{\{x\} \mid x \in X\}$. Tada je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač od $(X, \mathcal{P}(X))$, no jasno je da ne postoje $n \in \mathbb{N}$ i $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$ takvi da je $X = U_1 \cup \ldots \cup U_n$.*

**Definicija 2.3.5.** *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, $K \subseteq X$ te $\mathcal{U}$ neprazan podskup od $\mathcal{T}$. Za $\mathcal{U}$ kažemo da je* ***otvoreni pokrivač skupa*** *$K$ u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T})$ ako je $K \subseteq \bigcup \mathcal{U}$.*

Uočimo da je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač topološkog prostora $(X, \mathcal{T})$ ako i samo ako je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač skupa $X$ u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T})$.

**Definicija 2.3.6.** *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te $K \subseteq X$. Za $K$ kažemo da je* ***kompaktan skup*** *u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T})$ ako za svaki otvoreni pokrivač $\mathcal{U}$ od $K$ u $(X, \mathcal{T})$ postoje $n \in \mathbb{N}$ i $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$ takvi da je $K \subseteq U_1 \cup \ldots \cup U_n$.*

Uočimo sljedeće: Topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ je kompaktan ako i samo ako je $X$ kompaktan skup u $(X, \mathcal{T})$.

**Propozicija 2.3.7.**

*Neka je $(X, \mathcal{T})$ kompaktan topološki prostor te neka je $F$ zatvoren skup u $(X, \mathcal{T})$.*
*Tada je $F$ kompaktan skup u $(X, \mathcal{T})$.*

*Dokaz.* Neka je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač od $F$. Neka je $\mathcal{U}' = \mathcal{U} \cap \{X \setminus F\}$.

Jasno je da je $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{T}$. Nadalje, ako je $x \in X$ onda je $x \in F$ ili $x \in X \setminus F$.

Ako je $x \in F$, onda postoji $U \in \mathcal{U}$ takav da je $x \in U$, dakle $x$ je sadržan u nekom članu od $\mathcal{U}'$, a isto vrijedi u slučaju $x \in X \setminus F$ jer je $X \setminus F \in \mathcal{U}'$.
Zaključak: $X \subseteq \bigcup \mathcal{U}'$.

Prema tome $\mathcal{U}'$ je otvoreni pokrivač od $(X, \mathcal{T})$. Stoga postoje $n \in \mathbb{N}$ i $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$ takvi da je

$$X = U_1 \cup \ldots \cup U_n \cup (X \setminus F).$$

Iz ovoga slijedi da je $F \subseteq U_1 \cup \ldots \cup U_n$.
Zaključak: $F$ je kompaktan skup u $(X, \mathcal{T})$. □

Obrat prethodne propozicije općenito ne vrijedi, što pokazuje sljedeći primjer.

**Primjer 2.3.8.** *Neka je $X$ skup koji ima bar 2 elementa. Neka je $K \subseteq X$ takav da je $K \neq \emptyset$ i $K \neq X$. (Takav skup $K$ sigurno postoji.)*

*Tada je $K$ kompaktan skup u $(X, \{\emptyset, X\})$ koji nije zatvoren u tom topološkom prostoru.*

Naime, topologija $\{\emptyset, X\}$ je konačan skup, pa je svaki podskup od $X$ kompaktan u ovom topološkom prostoru, a $K$ nije zatvoren jer je $K^C \neq \emptyset$ i $K^C \neq X$, to jest $K^C$ nije otvoren.

**Teorem 2.3.9.**

*Neka je $(X, \mathcal{T})$ Hausdorffov topološki prostor te neka je $K$ kompaktan skup u ovom prostoru.*

*Tada je $K$ zatvoren skup u $(X, \mathcal{T})$.*

*Dokaz.* Ako je $K = \emptyset$, tvrdnja je jasna.

Pretpostavimo sada da je $K \neq \emptyset$. Dokažimo da je $K^C$ otvoren u $(X, \mathcal{T})$.

Neka je $x \in K^C$. Tada za svaki $y \in K$ imamo $x \neq y$, pa postoje disjunktni otvoreni skupovi $U_y$ i $V_y$ takvi da je $x \in U_y$ i $y \in V_y$. Neka je

$$\mathcal{V} = \left\{ V_y \mid y \in K \right\}.$$

Tada je $\mathcal{V}$ otvoreni pokrivač od $K$ u $(X, \mathcal{T})$. Budući da je $K$ kompaktan skup, postoje $n \in \mathbb{N}$ i $y_1, \ldots, y_n \in K$ takvi da je

$$K \subseteq V_{y_1} \cup \ldots \cup V_{y_n}. \tag{2.4}$$

Neka je $W = U_{y_1} \cap \ldots \cap U_{y_n}$. Tada je $W \in \mathcal{T}$, te je očito $x \in W$.

Dokažimo sada da je $W \subseteq K^C$.

Neka je $z \in W$. Pretpostavimo da je $z \in K$.

Iz (2.4) slijedi da je $z \in V_{y_i}$, gdje je $i \in \{1, \ldots, n\}$. No $z \in W$ povlači da je $z \in U_{y_i}$. Ovo je u kontradikciji s činjenicom da su skupovi $U_{y_i}$ i $V_{y_i}$ disjunktni. Dakle, $z \notin K$, to jest $z \in K^C$. Ovime smo dokazali da je $W \subseteq K^C$.

Zaključak: Za svaki $x \in K^C$ postoji $W \in \mathcal{T}$ takav da je $x \in W \subseteq K^C$.

Iz leme 1.2.16 slijedi da je $K^C$ otvoren skup. Prema tome $K$ je zatvoren skup. □

**Propozicija 2.3.10.**

*Neka su $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori te neka je $f : X \to Y$ neprekidna funkcija s obzirom na topologije $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$.*

*Neka je $K$ kompaktan skup u $(X, \mathcal{T})$. Tada je $f(K)$ kompaktan skup u $(Y, \mathcal{S})$.*

*Dokaz.* Neka je $\mathcal{V}$ otvoren pokrivač od $f(K)$ u topološkom prostoru $(Y, \mathcal{S})$. Neka je

$$\mathcal{U} = \left\{ f^{-1}(V) \mid V \in \mathcal{V} \right\}.$$

Dokažimo da je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač od $K$ u $(X, \mathcal{T})$. Jasno je da je svaki element od $\mathcal{U}$ otvoren u $(X, \mathcal{T})$. Dokažimo još da je $K \subseteq \bigcup \mathcal{U}$.

Neka je $x \in K$. Tada je $f(x) \in f(K)$, pa postoji $V \in \mathcal{V}$ takav da je $f(x) \in V$, pa je $x \in f^{-1}(V)$. Dakle, $\mathcal{U}$ je pokrivač od $K$ u $(X, \mathcal{T})$.
Budući da je $K$ kompaktan u $(X, \mathcal{T})$, postoje $n \in \mathbb{N}$ i $V_1, \ldots, V_n \in \mathcal{V}$ takvi da je

$$K \subseteq f^{-1}(V_1) \cup \ldots \cup f^{-1}(V_n) .$$

Iz ovoga slijedi da je $f(K) \subseteq V_1 \cup \cdots \cup V_n$.

Zaključak: $f(K)$ je kompaktan u $(Y, \mathcal{S})$. □

**Propozicija 2.3.11.** *Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori pri čemu je $(X, \mathcal{T})$ kompaktan, a $(Y, \mathcal{S})$ Hausdorffov.*

*Neka je $f : X \to Y$ funkcija neprekidna s obzirom na $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$. Tada je $f$ zatvoreno preslikavanje.*

*Dokaz.* Neka je $F$ zatvoren skup u $(X, \mathcal{T})$. Po propoziciji 2.3.7, skup $F$ je kompaktan u $(X, \mathcal{T})$. Prema propoziciji 2.3.10 skup $f(F)$ je kompaktan u $(Y, \mathcal{S})$. Stoga je $f(F)$ zatvoren u $(Y, \mathcal{S})$ (Teorem 2.3.9).

Prema tome $f$ je zatvoreno preslikavanje. □

**Definicija 2.3.12.** *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, neka je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz u $X$, te neka je $a \in X$.*

*Kažemo da niz $(x_n)$ **teži prema (konvergira k)** $a$ ako za svaku otvorenu okolinu $U$ točke $a$ u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T})$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $x_n \in U$ $\forall n \geq n_0$.*
*Ako $(x_n)$ teži prema $a$, pišemo $x_n \to a$.*

**Definicija 2.3.13.** *Neka je $(X, d)$ metrički prostor, $a \in X$, te $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz u $X$.*

*Kažemo da niz $(x_n)$ **teži prema (konvergira k)** $a$ u metričkom prostoru $(X, d)$ ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $d(a, x_n) < \epsilon$ za svaki $n \geq n_0$*

**Propozicija 2.3.14.** *Neka je $(X, d)$ metrički prostor, $a \in X$ te $(x_n)_n$ niz u $X$.*

*Tada niz $(x_n)_n$ teži prema $a$ u metričkom prostoru $(X, d)$ ako i samo ako $(x_n)_n$ teži prema $a$ u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T}_d)$.*

*Dokaz.*

Pretpostavimo da $x_n \to a$ u metričkom prostoru $(X, d)$.

Neka je $U$ okolina točke $a$ u $(X, \mathcal{T}_d)$. To znači da je $a \in U$ i $U \in \mathcal{T}_d$. $U$ je otvoren skup u $(X, d)$, pa postoji $r > 0$ takav da $K(a, r) \subseteq U$. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da $x_n \in K(a, r)$, za svaki $n \geq n_0$.
Zaključujemo da je $x_n \in U$ $\forall n \geq n_0$.

Dakle, $x_n \to a$ u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T}_d)$.

Obratno, pretpostavimo da $x_n \to a$ u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T}_d)$.

Neka je $\epsilon > 0$. Tada je $K(a, \epsilon) \in \mathcal{T}_d$, pa je $K(a, \epsilon)$ otvorena okolina točke $a$ u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T}_d)$. Stoga postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $x_n \in K(a, \epsilon)$ za svaki $n \geq n_0$. Ovo znači da je $d(a, x_n) < \epsilon$ za svaki $n \geq n_0$.

Dakle, $x_n \to a$ u metričkom prostoru $(X, d)$. □

Ako $x_n \to a$ u nekom topološkom ili metričkom prostoru, onda za $a$ kažemo da je **limes niza** $(x_n)$ (u tom topološkom ili metričkom prostoru).

**Primjer 2.3.15.**

*Neka je $X$ neprazan skup, $a \in X$ te $(x_p)$ niz u $X$. Tada niz $x_n \to a$ u topološkom prostoru $(X, \{\emptyset, X\})$.*

Naime, jedina otvorena okolina točke $a$ u ovom topološkom prostoru je $X$. Dakle, svaki niz u ovom topološkom prostoru konvergira prema svakoj točki.

Prethodni primjer pokazuje da limes niza u topološkom prostoru ne mora biti jedinstven.

**Propozicija 2.3.16.**

*Neka je $(X, \mathcal{T})$ Hausdorffov topološki prostor, neka je $(x_n)$ niz u $X$ te neka su $a, b \in X$ takvi da $x_n \to a$ i $x_n \to b$.*

*Tada je $a = b$.*

*Dokaz.* Pretpostavimo suprotno, to jest da $a \neq b$.

Tada postoje otvoreni disjunktni skupovi $U$ i $V$ takvi da je $a \in U, b \in V$. Skupovi $U$ i $V$ su očito otvorene okoline točaka $a$ odnosno $b$.

Budući da $x_n \to a$, postoji $n_1 \in \mathbb{N}$ takav da $x_n \in U$ za svaki $n \geq n_1$.

Budući da $x_n \to b$, postoji $n_2 \in \mathbb{N}$ takav da $x_n \in V$ za svaki $n \geq n_2$.

Neka je $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Slijedi da je $x_{n_0} \in U$ i $x_{n_0} \in V$, no to je u kontradikciji sa činjenicom da su $U$ i $V$ disjunktni.

Zaključujemo da je $a = b$. □

Prethodna propozicija kaže da je u Hausdorffovom prostoru limes niza, ako postoji, jedinstven.

**Definicija 2.3.17.**

*Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, $(x_n)$ niz u $X$ te $a \in X$. Kažemo da je $a$* ***gomilište niza $(x_n)$ u topološkom prostoru*** *$(X, \mathcal{T})$ ako za svaku otvorenu okolinu $U$ točke $a$ i za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $m \in \mathbb{N}, m \geq n$ takav da je $x_m \in U$.*

*Ako je $(X, d)$ metrički prostor, $(x_n)$ niz u $X$ te $a \in X$, onda za $a$ kažemo da je* ***gomilište niza $(x_n)$ u metričkom prostoru*** *$(X, d)$ ako je $a$ gomilište niza $(x_n)$ u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T}_d)$.*

Uočimo sljedeće:
Ako je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, $(x_n)$ niz u $X$ te $a \in X$ takav da $x_n \to a$ onda je $a$ gomilište niza $(x_n)$.

**Teorem 2.3.18.** *Neka je $(X, \mathcal{T})$ kompaktan topološki prostor te neka je $(x_n)$ niz u $X$.*
*Tada je $(x_n)$ ima gomilište u $(X, \mathcal{T})$, to jest postoji $a \in X$ takav da je $a$ gomilište od $(x_n)$.*

*Dokaz.*
Pretpostavimo suprotno. Neka je $a \in X$.
Tada $a$ nije gomilište niza $(x_n)$, pa postoji otvorena okolina $U_a$ točke $a$ u $(X, \mathcal{T})$ i $n_a \in \mathbb{N}$ takvi da ne postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je

$$m \geq n_a \text{ i } x_m \in U_a.$$

To znači da za svaki $m \in \mathbb{N}$ takav da je $m \geq n_a$ vrijedi $x_m \notin U_a$.

Neka je $\mathcal{U} = \{U_a \mid a \in X\}$.
Tada je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač od $(X, \mathcal{T})$. Budući da je $(X, \mathcal{T})$ kompaktan, postoje $k \in \mathbb{N}$ i $a_1, \ldots, a_k \in X$ takvi da

$$X = U_{a_1} \cup \ldots \cup U_{a_k}. \tag{2.5}$$

Neka je $n = \max\{n_{a_1}, \ldots, n_{a_k}\}$. Tada je $n \geq n_{a_1}, \ldots, n \geq n_{a_k}$, pa imamo da $x_n \notin U_{a_1}, \ldots, x_n \notin U_{a_k}$.
Dakle, $x_n \notin U_{a_1} \cup \ldots \cup U_{a_k}$, što je u kontradikciji sa (2.5) jer je $x_n \in X$.

Zaključak: Niz $(x_n)$ ima gomilište u $(X, \mathcal{T})$. □

**Definicija 2.3.19.** *Neka je $(X, d)$ metrički prostor te $S \subseteq X$.*
*Za skup $S$ kažemo da je* ***omeđen u metričkom prostoru*** *$(X, d)$ ako postoje $x_0 \in X$ i $r > 0$ takvi da je $S \subseteq K(x_0, r)$.*

**Propozicija 2.3.20.** *Neka je $(X, d)$ metrički prostor te neka je $S$ omeđen skup u $(X, d)$. Neka je $x \in X$.*
*Tada postoji $r > 0$ takav da je $S \subseteq K(x, r)$.*

*Dokaz.*
Budući da je $S$ omeđen, postoje $x_0 \in X$ i $r_0 > 0$ takvi da je $S \subseteq K(x_0, r)$. Neka je $r = r_0 + d(x, x_0)$. Tvrdimo da je $K(x_0, r_0) \subseteq K(x, r)$.
Neka je $y \in K(x_0, r_0)$. Tada je $d(x_0, y) < r_0$. Imamo

$$d(x, y) \leq d(x, x_0) + d(x_0, y) < d(x, x_0) + r_0 = r\ .$$

Dakle, $d(x, y) < r$, to jest, $y \in K(x, r)$.
Prema tome, $K(x_0, r_0) \subseteq K(x, r)$, pa je $S \subseteq K(x, r)$. □

**Korolar 2.3.21.**

*Neka su* $(X, \mathcal{T})$ *i* $(Y, \mathcal{S})$ *topološki prostori te neka je* $f : X \to Y$ *surjekcija neprekidna s obzirom na topologije* $\mathcal{T}$ *i* $\mathcal{S}$. *Pretpostavimo da je* $(X, \mathcal{T})$ *kompaktan, a* $(Y, \mathcal{S})$ *Hausdorffov.*

*Tada je* $\overline{f} : X/f \to Y$ *homeomorfizam (s obzirom na* $\mathcal{T}_f$ *i* $\mathcal{S}$*).*

*Dokaz.* Ovo slijedi iz propozicije 2.3.11 i korolara 2.2.23. □

**Definicija 2.3.22.**

*Neka je* $n \in \mathbb{N}$ *te neka je* $d$ *euklidska metrika na* $\mathbb{R}^n$. *Neka je* $S \subseteq \mathbb{R}^n, S \neq \emptyset$. *Očito je* $d|_{S\times S} : S \times S \to \mathbb{R}$ *metrika na S.*

*Za* $d|_{S\times S}$ *kažemo da je* ***euklidska metrika*** *na* $S$.

*Za topologiju induciranu euklidskom metrikom na* $S$ *kažemo da je* ***euklidska topologija*** *na S.*

**Propozicija 2.3.23.** *Neka je* $n \in \mathbb{N}$ *te neka je* $d$ *euklidska metrika na* $\mathbb{R}^n$. *Neka je* $(X, p)$ *metrički prostor,* $x_0 \in X$ *te* $f : X \to \mathbb{R}^n$ *funkcija.*

*Neka su* $f_1, \ldots, f_n : X \to \mathbb{R}^n$ *komponentne funkcije od* $f$, *to jest funkcije takve da je* $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$.

*Tada je* $f$ *neprekidna ako i samo ako su funkcije* $f_1, \ldots, f_n$ *neprekidne u* $x_0$.

*Dokaz.*

Pretpostavimo da je $f$ neprekidna u $x_0$.
Neka je $i \in \{1, \ldots, n\}$. Neka je $x \in X$.

Tada je

$$|f_i(x) - f_i(x_0)| \leq \sqrt{(f_1(x) - f_1(x_0))^2 + \cdots + (f_n(x) - f_n(x_0))^2},$$

to jest

$$|f_i(x) - f_i(x_0)| \leq d(f(x), f(x_0)). \tag{2.6}$$

Neka je $\epsilon > 0$. Budući da je $f$ neprekidna u $x_0$, postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $x \in X$ vrijedi

$$p(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x_0)) < \epsilon.$$

Iz (2.6) zaključujemo da za svaki $x \in X$ vrijedi

$$p(x, x_0) < \delta \Rightarrow |f_i(x) - f_i(x_0)| < \epsilon.$$

Zaključak: funkcija $f_i$ je neprekidna u $x_0$.

Obratno, pretpostavimo da su $f_1, \dots, f_n$ neprekidne u $x_0$.
Neka je $\epsilon > 0$.

Tada za svaki $i \in \{1, \dots, n\}$ postoji $\delta_i > 0$ takav da za svaki $x \in X$ vrijedi

$$p(x, x_0) < \delta_i \Rightarrow | f_i(x) - f_i(x_0) | < \frac{\epsilon}{\sqrt{n}}.$$

Neka je $\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_n\}$. Tada za svaki $x \in X$ takav da je $p(x, x_0) < \delta$ vrijedi

$$d(f(x), f(x_0)) = \sqrt{(f_1(x) - f_1(x_0))^2 + \cdots + (f_n(x) - f_n(x_0))^2} <$$
$$< \sqrt{\frac{\epsilon^2}{n} + \cdots + \frac{\epsilon^2}{n}} = \epsilon.$$

Dakle, za svaki $x \in X$ vrijedi

$$p(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x_0)) < \epsilon.$$

Prema tome, $f$ je neprekidna u $x_0$. □

## 2.4 Primjeri

Uvodimo oznaku za jediničnu kružnicu $S^1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\right\}$.

Uzmemo li konopac i spojimo krajeve, dobit ćemo objekt sličan kružnici.

U sljedećem primjeru dajemo precizan smisao izjavi da *identificiranjem krajnjih točaka segmenta dobivamo kružnicu.*

**Primjer 2.4.1.**

*Neka je $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ funkcija definirana sa $h(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$.*

*Iz prethodne propozicije slijedi da je $h$ neprekidna funkcija s obzirom na pripadne euklidske metrike. Stoga je funkcija $g : \mathbb{R} \to S^1$ definirana sa $g(x) = h(x)$ neprekidna s obzirom na euklidske metrike na $\mathbb{R}$ i $d$, gdje je $d$ euklidska metrika na $S^1$.*

*Iz ovoga slijedi da je funkcija $f : [0, 1] \to S^1$ definirana sa $f(x) = g(x)$ neprekidna s obzirom na metrike $p$ i $d$, gdje je $p$ euklidska metrika na* $[0, 1]$.
*Za svaki $x \in [0, 1]$ vrijedi $f(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$.*

Uočimo da je $f$ surjekcija. Imamo da je $f$ neprekidna s obzirom na topologije $\mathcal{T}_p$ i $\mathcal{T}_d$.

Sada koristimo činjenicu da je topološki prostor $([0, 1], \mathcal{T}_p)$ kompaktan. (Dokaz se može naći u knjizi Sutherland, Introduction to metric and topological spaces [3].)
Očito je da je $(S^1, \mathcal{T}_d)$ Hausdorffov.

Iz korolara 2.3.21 slijedi da je $\overline{f} : [0,1]/f \to S^1$ homeomorfizam (s obzirom na $(\mathcal{T}_p)_f$ i $\mathcal{T}_d$). Neka je $\mathcal{E} = \mathcal{T}_p$ i $\mathcal{E}' = \mathcal{T}_d$. Dakle, $\mathcal{E}$ je euklidska topologija na $[0,1]$, a $\mathcal{E}'$ je euklidska topologija na $S^1$.

Imamo sljedeći zaključak: $\Big([0,1]/f, \mathcal{E}_f\Big) \cong \Big(S^1, \mathcal{E}'\Big)$.

Neka je $\mathcal{F} = \{ \{t\} \mid t \in \langle 0,1 \rangle \} \cup \{ \{0,1\} \}$.
Uočimo da je $[0,1]/f = \mathcal{F}$. Stoga je $\mathcal{E}_f = \mathcal{E}_{\mathcal{F}}$.

Prema tome, $(\mathcal{F}, \mathcal{E}_{\mathcal{F}}) \cong \Big(S^1, \mathcal{E}'\Big)$.

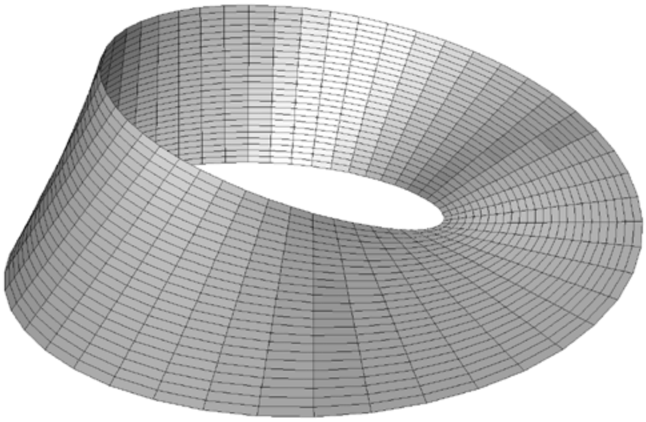
U sljedećim primjerima istražujemo neke matematičke objekte koji se mogu zorno prikazati (ili čiji model možemo konstruirati) lijepljenjem rubova pravokutnog komada papira.

**Primjer 2.4.2.**
*Neka je* $X = [0,1] \times [0,1]$ *te neka je* $\mathcal{E}$ *euklidska topologija na* $X$.
*Neka je*

$$\mathcal{F} = \{ \{(t,s)\} \mid t \in \langle 0,1 \rangle, s \in [0,1] \} \cup \{ \{(0,s),(1,1-s)\} \mid s \in [0,1] \}.$$

*Tada je* $\mathcal{F}$ *particija od* $X$.
*Za topološki prostor* $(\mathcal{F}, \mathcal{E}_{\mathcal{F}})$ *kažemo da je* ***Möbiusova vrpca***.

Rezultat je moguće prikazati u trodimenzionalnom euklidskom prostoru.



Slika 2.1: Preuzeto sa `http://paulbourke.net` [1]

**Primjer 2.4.3.**

*Neka je* $X = [0, 1] \times [0, 1]$ *te neka je* $\mathcal{E}$ *euklidska topologija na* $X$.

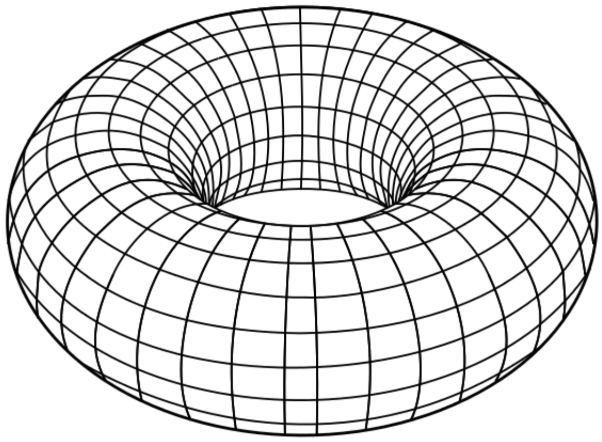
*Neka je*

$$\begin{aligned} \mathcal{F} = &\{\, \{(t, s)\} \mid t \in \langle 0, 1\rangle, s \in \langle 0, 1\rangle \,\} \cup \\ &\cup \{\, \{(0, s), (1, s)\} \mid s \in \{0, 1\} \,\} \cup \{\, \{(t, 0), (t, 1)\} \mid t \in \{0, 1\} \,\} \cup \\ &\cup \{\, \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\} \,\}\,. \end{aligned}$$

*Tada je* $\mathcal{F}$ *particija od* $X$.

*Za topološki prostor* $(\mathcal{F}, \mathcal{E}_{\mathcal{F}})$ *kažemo da je* ***torus***.

Parametrizacija torusa u trodimenzionalnom prostoru izgleda ovako:



Slika 2.2: Preuzeto sa `http://commons.wikimedia.org/`

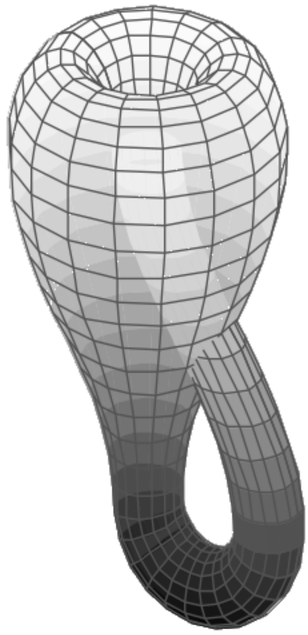
Pokušajmo sada papir zalijepiti malo drugačije. Okrenimo smjer identificiranja dvije nasuprotne stranice.

**Primjer 2.4.4.**
*Neka je* $X = [0,1] \times [0,1]$ *te neka je* $\mathcal{E}$ *euklidska topologija na* $X$.
*Neka je*

$$\begin{aligned}\mathcal{F} = &\{ \{(t,s)\} \mid t \in \langle 0,1\rangle, s \in \langle 0,1\rangle \} \cup \\ &\cup \{ \{(0,s),(1,1-s)\} \mid s \in \{0,1\} \} \cup \{ \{(t,0),(t,1)\} \mid t \in \{0,1\} \} \cup \\ &\cup \{ \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\} \} .\end{aligned}$$

*Tada je* $\mathcal{F}$ *particija od* $X$.
*Za topološki prostor* $(\mathcal{F}, \mathcal{E}_{\mathcal{F}})$ *kažemo da je* ***Kleinova boca***.

Pokušaj parametrizacije Kleinove boce u tri dimenzije izgleda ovako.



Slika 2.3: Preuzeto sa `http://en.wikipedia.org/wiki/Klein_bottle` [4]

Uočimo da u slučaju torusa i Kleinove boce identificiramo dva para paralelnih stranica kvadrata $[0,1] \times [0,1]$. Kod torusa, oba para stranica identificiramo u istom smjeru, dok kod Kleinove boce jedan par stranica identificiramo u suprotnim smjerovima. Također, točke u kutu pravokutnika smo ostavili za kraj i sve ih želimo slijepiti zajedno.

# Bibliografija

[1] Paul Bourke, *Möbius (Moebius) strip*, `http://paulbourke.net/geometry/mobius/`, (kolovoz 2015.).

[2] C. O. Christenson i W. L. Voxman, *Aspects of Topology*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1977.

[3] W. A. Sutherland, *Introduction to metric and topological spaces*, Oxford University Press, 1975.

[4] Wikipedia, *Klein bottle — Wikipedia, The Free Encyclopedia*, `http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Klein_bottle&oldid=678207335`, (kolovoz 2015.).

# Sažetak

U radu su istražena svojstva topoloških prostora kojima je topologija inducirana kvocijentnim preslikavanjem.

Ispitani su dovoljni uvjeti (korolar 2.3.21) na prostore $X$ i $Y$ te funkciju $f : X \to Y$ da inducirano preslikavanje $\overline{f}$ bude homeomorfizam.

Na primjeru kružnice uočeno je da kvocijentna topologija $\mathcal{F}$ ukazuje na izbor točaka koje se identificiraju ili ”spajaju”. Ostali primjeri (Möbiusova vrpca, torus i Kleinova boca) su konstruirani direktno, zadavanjem kvocijentne topologije.

# Summary

This paper investigates the properties of topological spaces where the topology is induced by a quotient map.

Sufficient conditions on spaces $X$ and $Y$ and a map $f : X \to Y$ so that the induced map $\overline{f}$ is a homeomorphism are found. (Corollary 2.3.21) .

The example with a circle shows that quotient topology $\mathcal{F}$ indicates the choice of the points to be identified or ”glued” together. Other examples (Möbius strip, torus and Klein bottle) are constructed directly, by giving the quotient topology.

# Životopis

Rođen sam 29.1.1985. u Zagrebu. Osnovnu školu Jordanovac završio sam 1999. godine i upisao prirodoslovno-matematički smjer III gimnazije u Zagrebu. Nakon mature 2003. godine upisujem studij matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. Nastavnički smjer preddiplomskog studija matematike upisujem 2008. godine, a 2011. diplomski sveučilišni studij Matematika i informatika smjer: nastavnički.

Završio sam nižu glazbenu školu Elly Bašić glavni predmet violina. Pjevao sam u nekoliko pjevačkih zborova i svirao u gudačem ansamblu.