SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Lovro Švenda

KVOCIJENTNI PROSTORI

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc.dr.sc. Zvonko Iljazović

Zagreb, rujan 2015.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Sadržaj iii

Uvod 1

1 Metrički i topološki prostori 2
1.1 Metrički prostori 2
1.2 Topološki prostori 9

2 Kvocijentni prostori 15
2.1 Kvocijentno preslikavanje 15
2.2 Kvocijentna topologija 20
2.3 Kompaktnost 29
2.4 Primjeri 36

Bibliografija 40

Uvod

Željeli smo proučiti svojstva različitih struktura matematičkih objekata kao što su kružnica, vrpca, Möbiusova vrpca, Kleinova boca i slično. Takvi objekti se uobičajeno demonstriraju rezanjem i lijepljenjem konopca i papira. Međutim, u svrhu opisivanja nastanka takvih objekata na matematički način, moramo definirati odgovarajući topološki prostor.

Zato ćemo u ovom radu prvo definirati metričke i topološke prostore i dati nekoliko primjera. Nakon toga ćemo u topološkim prostorima inducirati kvocijentnu topologiju kvocijentnim preslikavanjem i tako definirati kvocijentne prostore. Definirat ćemo i produkt dvaju topoloških prostora.

Nadalje ćemo razmatrati kompaktnost skupova i konvergenciju nizova u topološkim prostorima.

Poglavlje 1

Metrički i topološki prostori

Za početak definirajmo metričke, a zatim i topološke prostore.

1.1 Metrički prostori

Definicija 1.1.1. *Neka je X neprazan skup te $d : X \times X \to \mathbb{R}$ funkcija takva da je*

(1) $d(x, y) \geq 0, \forall x, y \in X$ te $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(2) $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X$

(3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \forall x, y, z \in X$ (nejednakost trokuta)

Tada za d kažemo da je ***metrika*** *na skupu X, a za uređen par (X, d) da je* ***metrički prostor****.*

Primjer 1.1.2.
Neka je $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa $d(x, y) = |x - y|$. Tada je d metrika na $\mathbb{R}$. Dokažimo to.

Uvjeti (1) i (2) iz definicije metrike očito vrijede.
Provjerimo uvjet (3).
Neka su $x, y, z \in \mathbb{R}$. Tada je

$$d(x, y) = |x - y| = |x - z + z - y| \leq |x - z| + |z - y| = d(x, z) + d(z, y),$$

dakle $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.
(Ovdje smo koristili da za sve $u, v \in \mathbb{R}$ vrijedi $|u + v| \leq |u| + |v|$.)
Dakle, d je metrika na $\mathbb{R}$.

Za funkciju d kažemo da je **euklidska metrika** na $\mathbb{R}$.

Primjer 1.1.3.

Neka je $n \in \mathbb{N}$, te neka je $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa

$$d\left((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\right) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

Za funkciju d kažemo da je euklidska metrika na $\mathbb{R}^n$. Uočimo da je za $n = 1$ ova funkcija upravo euklidska metrika na $\mathbb{R}$.

$$\left(d(x_1, \ldots, x_n) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2} = |x_1 - y_1|\right)$$

Dokažimo da je d zaista metrika na $\mathbb{R}^n$.

Jedino netrivijalno svojstvo koje treba provjeriti je nejednakost trokuta.
Neka su $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n), z = (z_1, \ldots, z_n)$.
Tada je nejednakost

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \tag{1.1}$$

ekvivalentna sa

$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} \leq \sqrt{(x_1 - z_1)^2 + \cdots + (x_n - z_n)^2} + \sqrt{(z_1 - y_1)^2 + \cdots + (z_n - y_n)^2} \tag{1.2}$$

Za $i \in \{1, \ldots, n\}$ definiramo

$$u_i = x_i - z_i$$
$$v_i = z_i - y_i \; .$$

Uočimo da je

$$u_i + v_i = x_i - y_i$$

za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Imamo da je (1.2) ekvivalentno sa

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (u_i + v_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2} \; .$$

Vrijede sljedeće ekvivalencije:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(u_i+v_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}u_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}v_i^2}$$
$$\Updownarrow$$
$$\sum(u_i+v_i)^2 \leq \sum u_i^2 + 2\sqrt{\sum u_i^2}\sqrt{\sum v_i^2} + \sum v_i^2$$
$$\Updownarrow$$
$$\sum(u_i^2+2u_iu_i+v_i^2) \leq \sum u_i^2 + 2\sqrt{\sum u_i^2}\sqrt{\sum v_i^2} + \sum v_i^2$$
$$\Updownarrow$$
$$\cancel{\sum u_i^2} + 2\sum u_iu_i + \cancel{\sum v_i^2} \leq \cancel{\sum u_i^2} + 2\sqrt{\sum u_i^2}\sqrt{\sum v_i^2} + \cancel{\sum v_i^2}$$
$$\Updownarrow$$
$$\sum u_iu_i \leq \sqrt{\sum u_i^2 \cdot \sum v_i^2}$$

Za posljednju nejednakost dovoljno je dokazati da je

$$\left(\sum u_iu_i\right)^2 \leq \sum u_i^2 \cdot \sum v_i^2 \tag{1.3}$$

U tu svrhu definirajmo $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sa

$$f(t) = (u_1t+v_1)^2 + \cdots + (u_nt+v_n)^2 .$$

Očito je $f(t) \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$.
Imamo

$$\begin{aligned} f(t) &= (u_1t^2 + 2u_1v_1t + v_1^2) + \cdots + (u_nt^2 + 2u_nv_nt + v_n^2) = \\ &= (u_1^2 + \cdots + u_n^2)t^2 + 2(u_1v_1 + \cdots + u_nv_n)t + (v_1^2 + \cdots + v_n^2) \end{aligned}$$

Dakle, f je nenegativna kvadratna funkcija pa joj je je diskriminanta manja ili jednaka od 0. Prema tome

$$4\left(\sum u_iu_i\right)^2 - 4\sum u_i^2 \cdot \sum v_i^2 \leq 0,$$

pa slijedi (1.3), a iz toga i (1.2).

Time je nejednakost (1.1) dokazana.

Primjer 1.1.4.
Neka je X neprazan skup. Neka je $d : X \times X \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Tada za d kažemo da je diskretna metrika na skupu X. Funkcija d je zaista metrika na skupu X.

Definicija 1.1.5. *Neka je (X, d) metrički prostor, neka je $x_0 \in X$ te $r > 0$. Definiramo*

$$K(x_0, r) = \{x \in X : d(x_0, x) < r\}.$$

Za $K(x_0, r)$ kažemo da je (otvorena) kugla oko x_0 radijusa r u metričkom prostoru (X, d).

Pišemo umjesto $K(x_0, r)$ i $K(x_0, r; d)$, ako želimo naglasiti o kojoj se metrici radi.

Definicija 1.1.6. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je $U \subseteq X$. Za U kažemo da je otvoren skup u metričkom prostoru (X, d) ako vrijedi sljedeće:*

$$\forall x \in U \ \exists r > 0 \text{ takav da } K(x, r) \subseteq U.$$

Primjer 1.1.7. *Neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}$. Neka je $x \in \mathbb{R}$, te $r > 0$.*
Tada je $K(x, r; d) = \langle x - r, x + r\rangle$

Naime, imamo

$$\begin{aligned} y \in K(x, r) &\Leftrightarrow d(x, y) < r \Leftrightarrow |y - x| < r \Leftrightarrow -r < y - x < r \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x - r < y < x + r \Leftrightarrow y \in \langle x - r, x + r\rangle \end{aligned}$$

Svaka otvorena kugla u $(\mathbb{R}, d)$ je otvoreni interval. S druge strane, svaki otvoreni (omeđeni) interval je otvorena kugla, naime, ako su $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, onda je

$$\langle a, b\rangle = \left\langle \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2}, \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \right\rangle,$$

to jest

$$\langle a, b\rangle = K\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}\right).$$

Skup $[0, \infty\rangle$ nije otvoren u $(\mathbb{R}, d)$ jer ne postoji $r > 0$ takav da je $K(0, r) \subseteq [0, \infty\rangle$.

Propozicija 1.1.8.
Neka je (X, d) metrički prostor, neka je $x \in X$ te $r > 0$.
Tada je $K(x, r)$ otvoren skup u (X, d).
(Dakle, svaka otvorena kugla u (X, d) je otvoren skup.)

Dokaz. Neka je $y \in K(x,r)$. Tada je $d(x,y) < r$, pa postoji $s > 0$ takav da $d(x,y) + s < r$. Tvrdimo da je $K(y,s) \subseteq K(x,r)$.

Neka je $z \in K(y,s)$. Tada je $d(y,z) < s$, pa imamo

$$d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z) < d(x,y) + s < r.$$

Dakle, $d(x,z) < r$, pa je $z \in K(x,r)$. Prema tome $K(y,s) \subseteq K(x,r)$.
Zaključak: $K(x,r)$ je otvoren skup. □

Propozicija 1.1.9. *Neka je* (X,d) *metrički prostor.*

(1) $\emptyset$ i X su otvoreni skupovi u (X,d).

(2) Ako je $(U_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ indeksirana familija otvorenih skupova, onda je $\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} U_\alpha$ otvoren skup.

(3) Ako su U i V otvoreni skupovi, onda je $U \cap V$ otvoreni skup.

Dokaz.

(1) Tvrdnja je jasna.

(2) Neka je $(U_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ indeksirana familija otvorenih skupova.

Neka je $x \in \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} U_\alpha$. Tada je $x \in U_{\alpha_0}$, gdje je $\alpha_0 \in \mathcal{A}$. Budući da je U_{α_0} otvoren skup, postoji $r > 0$ takav da

$$K(x,r) \subseteq U_{\alpha_0}.$$

No, tada je

$$K(x,r) \subseteq \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} U_\alpha.$$

Prema tome, $\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} U_\alpha$ je otvoren skup.

(3) Neka su U i V otvoreni skupovi. Uzmimo da je $x \in U \cap V$. Tada je $x \in U$ i $x \in V$.

Budući da su U i V otvoreni postoje $r, s > 0$ takvi da je

$$K(x,r) \subseteq U \text{ i } K(x,s) \subseteq V.$$

Neka je $t = min\{r,s\}$. Tada je $t > 0$ i $t \le s, t \le r$, pa je

$$K(x,t) \subseteq K(x,s) \text{ i } K(x,t) \subseteq K(x,r).$$

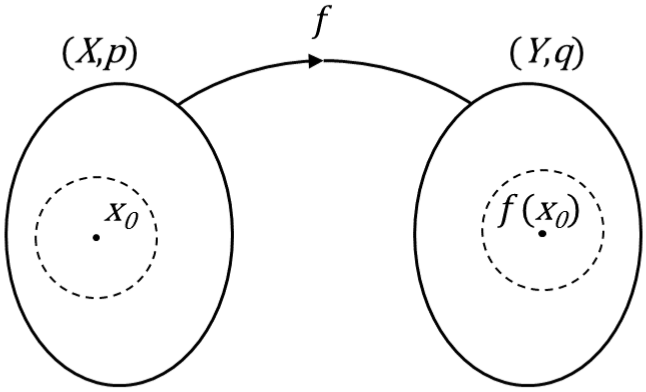
Stoga je $K(x,t) \subseteq U$ i $K(x,t) \subseteq V$, pa je $K(x,t) \subseteq U \cap V$.
Dakle, $U \cap V$ je otvoren skup. □

Definicija 1.1.10.

*Neka su (X, p) i (Y, q) metrički prostori te neka je $f : X \to Y$ funkcija. Neka je $x_0 \in X$. Kažemo da je funkcija f **neprekidna u točki** x_0 **s obzirom na metrike** p i q ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da*

$$\forall x \in X \ p(x_0, x) < \delta \Rightarrow q\,(f(x_0), f(x)) < \epsilon.$$

*Za funkciju f kažemo da je **neprekidna s obzirom na metrike** p i q ako je f neprekidna u $x_0 \forall x_0 \in X$.*



Uočimo sljedeće:
f je neprekidna u točki x_0 s obzirom na p i q ako i samo ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da je

$$f(K(x_0, \delta; p)) \subseteq K(f(x_0), \epsilon; q)\ . \tag{1.4}$$

Naime, pretpostavimo prvo da je f neprekidna u X. Neka je $\epsilon > 0$. Tada postoji $\delta > 0$ takav da je $q(f(x), f(x_0)) < \epsilon$ za svaki $x \in X$ takav da je $p(x, x_0) < \delta$. Tvrdimo da tada vrijedi (1.4).

Neka je $y \in f(K(x_0, \delta; p))$. Tada postoji $x \in K(x_0, \delta; p)$ takav da $f(x) = y$.
Slijedi da je $p(x, x_0) < \delta$, pa iz toga slijedi

$$q(f(x), f(x_0)) < \epsilon.$$

Dakle, $y \in K(f(x_0), \epsilon; q)$.
Time je dokazano (1.4).

Pretpostavimo sada da $\forall \epsilon > 0 \ \exists\, \delta > 0$ takav da vrijedi (1.4). Želimo dokazati da je f neprekidna u točki x_0.

Neka je $\epsilon > 0$. Tada postoji $\delta > 0$ takav da vrijedi (1.4). Neka je $x \in X$ takav da $p(x, x_0) < \delta$.

Tada je $x \in K(x_0, \delta; p)$ pa je

$$f(x) \in f(K(x_0, \delta; p)).$$

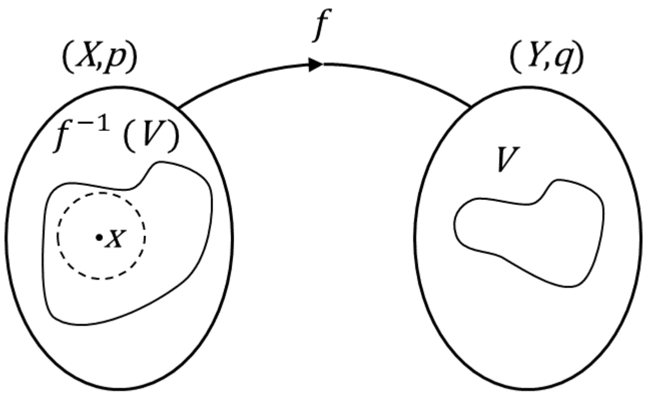
Iz (1.4) slijedi $f(x) \in K(f(x_0), \epsilon; q)$, što povlači $q(f(x), f(x_0)) < \epsilon$.

Zaključak: f je neprekidna u x_0.

Propozicija 1.1.11.

Neka su (X, p) i (Y, q) metrički prostori, te neka je $f : X \to Y$.

Tada je f neprekidna s obzirom na metrike p i q ako i samo ako je za svaki otvoreni skup V u (Y, q) skup $f^{-1}(V)$ otvoren u (X, p).



Dokaz. Pretpostavimo da je f neprekidna s obzirom na p, q. Neka je V otvoreni skup u (Y, q). Želimo dokazati da je $f^{-1}(V)$ otvoreni skup u (X, p).

Neka je $x \in f^{-1}(V)$. Tada je $f(x) \in V$. Budući da je V otvoren skup u (Y, q), postoji $r > 0$ takav da

$$K(f(x), r; q) \subseteq V.$$

Budući da je f neprekidna u x, postoji $\delta > 0$ takav da

$$f(K(x, \delta; p)) \subseteq K(f(x), r; q).$$

Slijedi $f(K(x, \delta; p)) \subseteq V$, dakle $K(x, \delta; p) \subseteq f^{-1}(V)$.

Zaključak, $f^{-1}(V)$ je otvoreni skup u (X, p).

Pretpostavimo sada da je za svaki otvoreni skup V u (Y, q) skup $f^{-1}(V)$ otvoren u (X, p). Pokažimo da je f neprekidna s obzirom na p i q.

Neka je $x_0 \in X$ i neka je $\epsilon > 0$. Želimo naći $\delta > 0$ takav da je

$$f(K(x_0, \delta; p)) \subseteq K(f(x_0), \epsilon; q) \tag{1.4}$$

Skup $K(f(x_0), \epsilon; q)$ je otvoren u (Y, q), pa je stoga praslika $f^{-1}(K(f(x_0), \epsilon; q))$ otvoren skup u (X, p). Imamo

$$x_0 \in K(f(x_0), \epsilon; q),$$

pa stoga postoji $\delta > 0$ takav da

$$K(x_0, \delta; p) \subseteq f^{-1}(K(f(x_0), \epsilon; q))$$

Iz ovoga slijedi (1.4).

Zaključak: f je neprekidna u točki x_0. Prema tome, f je neprekidna. □

1.2 Topološki prostori

Definicija 1.2.1. *Neka je X neprazan skup, te neka je $\mathcal{T}$ familija podskupova od X takva da vrijede sljedeća svojstva:*

(1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.

(2) Ako je $(U_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ indeksirana familija elemenata od $\mathcal{T}$, onda je $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha \in \mathcal{T}$.

(3) Ako su $U, V \in \mathcal{T}$, onda je $U \cap V \in \mathcal{T}$.

Tada za $\mathcal{T}$ kažemo da je ***topologija na skupu*** *X, a za uređeni par $(X, \mathcal{T})$ kažemo da je* ***topološki prostor****.*

Primjer 1.2.2. *Neka je (X, d) metrički prostor. Neka je $\mathcal{T}_d$ familija svih skupova koji su otvoreni u (X, d). Tada je $\mathcal{T}_d$ topologija na skupu X. Naime, to slijedi iz propozicije 1.1.9.*

Za $\mathcal{T}_d$ kažemo da je ***topologija inducirana metrikom*** *d.*

Primjer 1.2.3. *Neka je X neprazan skup. Tada je $\mathcal{P}(X)$ očito topologija na X. Za $\mathcal{P}(X)$ kažemo da je* ***diskretna topologija*** *na X.*

S druge strane, $\{\emptyset, X\}$ je također topologija na X.

Za $\{\emptyset, X\}$ kažemo da je ***indiskretna topologija*** *na X*

Napomena 1.2.4. *Ako je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, $n \in \mathbb{N}$ te $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{T}$, onda je $U_1 \cap \cdots \cap U_n \in \mathcal{T}$.*

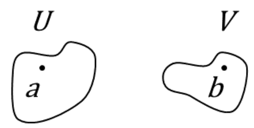
Ovo se lako dobiva indukcijom po n.

Definicija 1.2.5. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. Za $(X, \mathcal{T})$ kažemo da je* ***metrizabilan topološki prostor*** *ako postoji metrika d na X takva da je $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$.*

Propozicija 1.2.6.

Neka je (X, d) metrički prostor, te neka su $a, b \in X$ takvi da je $a \neq b$.

Tada postoje skupovi U i V otvoreni u (X, d) takvi da je $a \in U, b \in V$, te $U \cap V = \emptyset$.

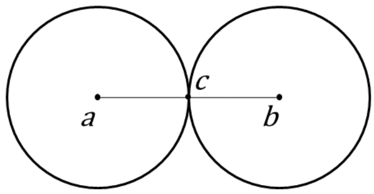


Dokaz.

Neka je $r = \dfrac{d(a,b)}{2}$. Tada je $r > 0$ jer je $a \neq b$. Neka je $U = K(a, r)$ te $V = K(b, r)$. Tada su U i V otvoreni skupovi u (X, d), te je očito $a \in U$ i $b \in V$.

Dokažimo još da je $U \cap V = \emptyset$.

Pretpostavimo suprotno. Tada postoji $c \in U \cap V$.



Tada je $c \in U$ i $c \in V$, pa je $d(a, c) < r$ i $d(b, c) < r$.

Imamo

$$2r = d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b) < r + r = 2r,$$

dakle $2r < 2r$. Kontradikcija.

Dakle, $U \cap V = \emptyset$. □

Definicija 1.2.7. *Za topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ kažemo da je* ***Hausdorffov*** *ako za sve $a, b \in X$ takve da je $a \neq b$ postoje $U, V \in \mathcal{T}$ takvi da je $a \in U$, $b \in V$ i $U \cap U = \emptyset$.*

Korolar 1.2.8. *Svaki metrizabilan topološki prostor je Hausdorffov.*

Dokaz.

Neka je $(X, \mathcal{T})$ metrizabilan topološki prostor. Tada postoji metrika d na X koja inducira topologiju $\mathcal{T}$. Neka su $a, b \in X, a \neq b$. Prema propoziciji 1.2.6 postoje skupovi U i V otvoreni u (X, d) takvi da je $a \in U, b \in V$ i $U \cap V = \emptyset$.

Jasno je da su $U, V \in \mathcal{T}$. $\square$

Primjer 1.2.9. *Neka je X skup koji ima bar dva elementa. Neka je $\mathcal{T}$ indiskretna topologija na X, to jest $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$.*
Tada očito topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ nije Hausdorffov.
Iz ovoga slijedi da $(X, \mathcal{T})$ nije metrizabilan.

Definicija 1.2.10. *Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori te neka je $f : X \to Y$. Za funkciju f kažemo da je* ***neprekidna*** *s obzirom na topologije $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$ ako za svaki $V \in \mathcal{S}$ vrijedi da je $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}$.*

Uočimo da prema propoziciji 1.2.6 vrijedi sljedeće:
Ako su (X, p) i (Y, q) metrički prostori te $f : X \to Y$, onda je f neprekidna s obzirom na metrike p i q ako i samo ako je f neprekidna s obzirom na topologije $\mathcal{T}_p$ i $\mathcal{T}_q$.

Definicija 1.2.11. *Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori te neka je $f : X \to Y$.*
Za funkciju f kažemo da je ***homeomorfizam*** *topoloških prostora $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ ako je f bijekcija, f neprekidna s obzirom na $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$, te f^{-1} neprekidna s obzirom na $\mathcal{S}$ i $\mathcal{T}$.*

Za topološke prostore $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ kažemo da su ***homeomorfni*** *ako postoji homeomorfizam topoloških prostora $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$.*
U tom slučaju pišemo: $(X, \mathcal{T}) \cong (Y, \mathcal{S})$.

Primjer 1.2.12.

(1) Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. Tada je funkcija $id : X \to X$ neprekidna s obzirom na topologije $\mathcal{T}$ i $\mathcal{T}$.

(2) Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori, neka je $y_0 \in Y$, te neka je $f : X \to Y$ funkcija definirana sa $f(x) = y_0, \forall x \in X$. Tada je f neprekidna funkcija s obzirom na topologije $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$.

Uočimo da iz prethodnog primjera možemo zaključiti sljedeće:

(1) Ako je (X, p) metrički prostor onda je $id : X \to X$ neprekidna s obzirom na p i p.

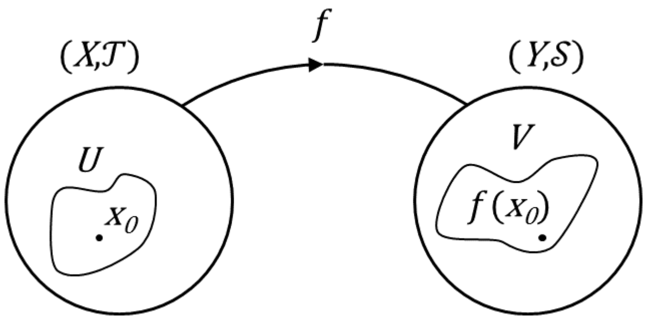
(2) Ako su (X, p) i (Y, q) metrički prostori, $y_0 \in Y$, te $f : X \to Y$ funkcija definirana sa $f(x) = y_0, \forall x \in X$, onda je f neprekidna s obzirom na metrike p i q.

Definicija 1.2.13.
Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. Za skup $U \subseteq X$ kažemo da je ***otvoren u topološkom prostoru*** *$(X, \mathcal{T})$ ako je $U \in \mathcal{T}$.*
Neka je $x \in X$ te $U \subseteq X$. Za U kažemo da je ***otvorena okolina točke*** *x (u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T})$) ako je $x \in U$ i $U \in \mathcal{T}$.*

Definicija 1.2.14.

Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori, neka je $f : X \to Y$, te neka je $x_0 \in X$.

Za funkciju f kažemo da je ***neprekidna u točki*** *x_0* ***s obzirom na topologije*** *$\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$ ako za svaku otvorenu okolinu V točke $f(x_0)$ u $(Y, \mathcal{S})$ postoji otvorena okolina U točke x_0 u $(X, \mathcal{T})$ takva da $f(U) \subseteq V$.*



Propozicija 1.2.15.

Neka su (X, p) i (Y, q) metrički prostori, neka je $f : X \to Y$, te neka je $x_0 \in X$.

Tada je funkcija f neprekidna u x_0 s obzirom na metrike p i q ako i samo ako je f neprekidna u x_0 s obzirom na topologije $\mathcal{T}_p$ i $\mathcal{T}_q$.

Dokaz.

$\boxed{\Rightarrow}$

Pretpostavimo da je f neprekidna u x_0 s obzirom na p i q. Neka je V otvorena okolina točke $f(x_0)$ u $(Y, \mathcal{T}_q)$, tada je V otvoren skup u metričkom prostoru (Y, q) koji sadrži $f(x_0)$.

Stoga postoji $\epsilon > 0$ takav da je $K(f(x_0), \epsilon) \subseteq V$.

Budući da je f neprekidna u x_0 s obzirom na p i q, postoji $\delta > 0$ takav da je

$$f(K(x_0, \delta)) \subseteq K(f(x_0), \epsilon).$$

Slijedi da je

$$f(K(x_0, \delta)) \subseteq V.$$

No, $K(x_0, \delta)$ je otvorena okolina točke x_0 u $(X, \mathcal{T}_p)$.

Zaključak, f je neprekidna u x_0 s obzirom na topologije $\mathcal{T}_p$ i $\mathcal{T}_q$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Pretpostavimo sada da je f neprekidna u x_0 s obzirom na topologije $\mathcal{T}_p$ i $\mathcal{T}_q$. Neka je $\epsilon > 0$. Tada je $K(f(x_0), \epsilon)$ otvorena okolina točke $f(x_0)$ u $(Y, \mathcal{T}_q)$.

Budući da je f neprekidna u x_0 s obzirom na topologije $\mathcal{T}_p$ i $\mathcal{T}_q$, postoji otvorena okolina U točke x_0 u $(X, \mathcal{T}_p)$ takva da je

$$f(U) \subseteq K(f(x_0), \epsilon).$$

Tada je U otvoreni skup u (X, p) koji sadrži x_0, pa postoji $\delta > 0$ takav da vrijedi $K(x_0, \delta) \subseteq U$.

Tada je

$$f(K(x_0, \delta)) \subseteq f(U),$$

pa slijedi da je $f(K(x_0, \delta)) \subseteq K(f(x_0), \epsilon)$.

Iz ovoga zaključujemo da je f neprekidna s obzirom na metrike p i q. □

Lema 1.2.16.

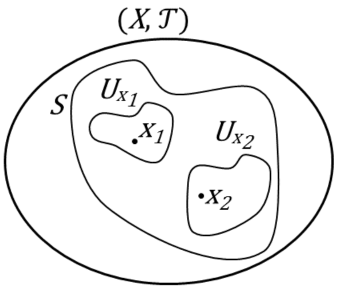
Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te neka je $S \subseteq X$ skup koji ima sljedeće svojstvo:

$$\forall x \in S \ \exists U \in \mathcal{T} \text{ takav da je } x \in U \subseteq S.$$

Tada je $S \in \mathcal{T}$.

Dokaz.

Za $x \in S$ neka je $U_x \in \mathcal{T}$ takav da je $x \in U_x \subseteq S$. Tada je $S = \bigcup_{x \in S} U_x$.



Naime, $\bigcup_{x \in S} U_x \subseteq S$ jer je $U_x \subseteq S, \forall x \in S$.

S druge strane, $S \subseteq \bigcup_{x \in S} U_x$ jer za svaki $x \in S$ vrijedi da je $x \in U_x$.

Budući da je $\bigcup_{x \in S} U_x \in \mathcal{T}$ imamo i da je $S \in \mathcal{T}$. □

Propozicija 1.2.17.

Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori te $f : X \to Y$ funkcija.

Tada je funkcija f neprekidna s obzirom na topologije $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$ ako i samo ako je f neprekidna u x_0 s obzirom na topologije $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$ za svaki $x_0 \in X$.

Dokaz.

$\boxed{\Rightarrow}$

Pretpostavimo da je f neprekidna s obzirom na $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$.

Neka je $x_0 \in X$. Neka je V otvorena okolina od $f(x_0)$ u $(Y, \mathcal{S})$. Neka je $U = f^{-1}(V)$. Iz $V \in \mathcal{S}$ slijedi da $U \in \mathcal{T}$, a iz $f(x_0) \in V$ slijedi $x_0 \in U$.

Dakle, U je otvorena okolina točke x_0 u $(X, \mathcal{T})$, pa vrijedi

$$f(U) = f\left(f^{-1}(V)\right) \subseteq V.$$

Zaključak: f je neprekidna u točki x_0 s obzirom na $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Pretpostavimo sada da je f neprekidna u x_0 s obzirom na $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$ za svaki $x_0 \in X$.
Neka je $V \in \mathcal{S}$. Dokažimo da je $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}$.

Neka je $x \in f^{-1}(V)$. Tada je $f(x) \in V$, što znači da je V otvorena okolina točke $f(x)$ u $(Y, \mathcal{S})$. Budući da je f neprekidna u točki x s obzirom na $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$, tada postoji otvorena okolina U točke x u $(X, \mathcal{T})$ takva da je

$$f(U) \subseteq V.$$

Iz ovoga slijedi da je $U \subseteq f^{-1}(V)$.

Zaključak: Za svaki $x \in f^{-1}(V)$ postoji $U \in \mathcal{T}$ takav da je

$$x \in U \subseteq f^{-1}(V).$$

Iz leme 1.2.16 slijedi da je $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}$.
Dakle, f je neprekidna s obzirom na $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$. $\square$

Poglavlje 2

Kvocijentni prostori

Da bismo precizno definirali kvocijentne prostore, krenimo od kvocijentnog preslikavanja.

2.1 Kvocijentno preslikavanje

Definicija 2.1.1.

Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. Neka je $\mathcal{F}$ particija skupa X. Tada očito za svaki $x \in X$ postoji jedinstveni element od $\mathcal{F}$ koji sadrži x.

Neka je $q : X \to \mathcal{F}$ funkcija koja svakom $x \in X$ pridružuje upravo onaj element od $\mathcal{F}$ koji sadrži x.

*Za q kažemo da je **kvocijentno preslikavanje** (pridruženo particiji $\mathcal{F}$).*

Uočimo da je q surjekcija.

Neka je $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ familija svih $U \subseteq \mathcal{F}$ takvih sa je $q^{-1}(U) \in \mathcal{T}$. Tada je $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ topologija na $\mathcal{F}$. Dokažimo to.

Imamo $q^{-1}(\emptyset) = \emptyset, q^{-1}(\mathcal{F}) = X$, pa su $\emptyset, \mathcal{F}$ elementi od $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$. Neka je $(U_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ indeksirana familija elemenata od $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$.

Želimo dokazati da je

$$\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha \in \mathcal{T}_{\mathcal{F}}.$$

Jasno je da je

$$\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha \subseteq \mathcal{F}.$$

Imamo

$$q^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} q^{-1}(U_\alpha),$$

a $q^{-1}(U_\alpha) \in \mathcal{T}$ $\forall \alpha \in A$, pa je stoga

$$\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} q^{-1}(U_\alpha) \in \mathcal{T},$$

dakle $q^{-1}(\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha) \in \mathcal{T}$. Prema tome $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha \in \mathcal{T}_\mathcal{F}$.

Neka su $U, V \in \mathcal{T}_\mathcal{F}$. Jasno je da je $U \cap V \subseteq \mathcal{F}$.

Vrijedi

$$q^{-1}(U \cap V) = q^{-1}(U) \cap q^{-1}(V),$$

a $q^{-1}(U) \cap q^{-1}(V) \in \mathcal{T}$ jer su $q^{-1}(U)$ i $q^{-1}(V)$ elementi od $\mathcal{T}$.
Dakle, $q^{-1}(U \cap V) \in \mathcal{T}$. Prema tome $U \cap V \in \mathcal{T}_\mathcal{F}$.

Zaključak, $\mathcal{T}_\mathcal{F}$ je topologija na skupu $\mathcal{F}$.

Za $\mathcal{T}_\mathcal{F}$ kažemo da je ***kvocijentna topologija na*** $\mathcal{F}$ ***određena s*** $\mathcal{T}$.
Za $(\mathcal{F}, \mathcal{T}_\mathcal{F})$ kažemo da je ***kvocijentni prostor od prostora*** $(X, \mathcal{T})$ ***određen particijom*** $\mathcal{F}$.

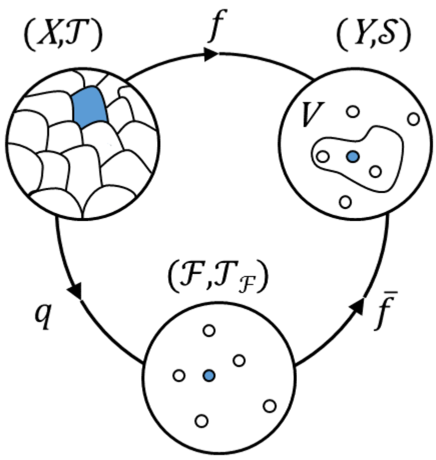
Uočimo da je funkcija $q : X \to \mathcal{F}$ neprekidna s obzirom na topologije $\mathcal{T}$ i $\mathcal{T}_\mathcal{F}$.

Propozicija 2.1.2.

Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, $\mathcal{F}$ particija od X, $q : X \to \mathcal{F}$ kvocijentno preslikavanje te neka je $\mathcal{T}_\mathcal{F}$ kvocijentna topologija na $\mathcal{F}$. Nadalje, neka je $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostor te $f : X \to Y$ funkcija neprekidna s obzirom na topologije $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$ koja je konstantna na svakom članu od $\mathcal{F}$ (to jest, za svaki $A \in \mathcal{F}$ i sve $x, y \in A$ vrijedi $f(x) = f(y)$).

Definirajmo $\overline{f} : \mathcal{F} \to Y$ sa $\overline{f}(A) = f(x)$, gdje je $x \in A, A \in \mathcal{F}$.

Tada je $\overline{f}$ neprekidna s obzirom na $\mathcal{T}_\mathcal{F}$ i $\mathcal{S}$.



Dokaz.

Iz definicije $\overline{f}$ slijedi da je $\overline{f} \circ q = f$.

Neka je $V \in \mathcal{S}$. Tada je

$$f^{-1}(V) = \left(\overline{f} \circ q\right)^{-1}(V) = q^{-1}\left(\overline{f}^{-1}(V)\right),$$

no budući da je f neprekidna s obzirom na topologije $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$, imamo da je $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}$. To znači da je $q^{-1}\left(\overline{f}^{-1}(V)\right) \in \mathcal{T}$.

Iz definicije topologije $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ slijedi da je $\overline{f}^{-1}(V) \in \mathcal{T}_{\mathcal{F}}$.
Dakle, za svaki $V \in \mathcal{S}$ vrijedi da je $\overline{f}^{-1}(V) \in \mathcal{T}_{\mathcal{F}}$.

Prema tome, $\overline{f}$ je neprekidna s obzirom na $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ i $\mathcal{S}$. □

Napomena 2.1.3. *Ako je X skup i* $\sim$ *relacija ekvivalencije na X, onda je skup* $X/\!\sim\, = \{[x] \mid x \in X\}$ *particija od X. Stoga, ako je* $\mathcal{T}$ *topologija na X, na* $X/\!\sim$ *imamo kvocijentnu topologiju određenu sa* $\mathcal{T}$.

Definicija 2.1.4. *Neka su* $(X, \mathcal{T})$ *i* $(Y, \mathcal{S})$ *topološki prostori te neka je* $f : X \to Y$ *neprekidna funkcija. Neka je* $X/f = \left\{f^{-1}(\{y\}) \mid y \in Y\right\} \setminus \{\emptyset\}$. *Tada je* X/f *particija od X.*

Naime, jasno je da je svaki element od X/f neprazan skup te da je svaki $x \in X$ u nekom članu od X/f ($x \in f^{-1}\{f(x)\}$). Nadalje, ako su $y_1, y_2 \in Y$ te ako je $f^{-1}\{y_1\} \cap f^{-1}\{y_2\} \neq \emptyset$ onda

$$\exists x \in f^{-1}\{y_1\} \cap f^{-1}\{y_2\},$$

pa je $x \in f^{-1}\{y_1\}$ i $x \in f^{-1}\{y_2\}$, što povlači $f(x) = y_1$ i $f(x) = y_2$, dakle $y_1 = y_2$, to jest

$$f^{-1}\{y_1\} = f^{-1}\{y_2\}.$$

Označimo sa $\mathcal{T}_f$ kvocijentnu topologiju na X/f određenu topologijom $\mathcal{T}$.

Uočimo da je funkcija f konstantna na svakom članu od X/f.

Neka je $\overline{f} : X/f \to Y$ definirana sa $\overline{f}(A) = f(x)$, gdje je $x \in A, A \in X/f$. Tada je prema propoziciji 2.1.2, $\overline{f}$ neprekidna funkcija s obzirom na topologije $\mathcal{T}_f$ i $\mathcal{S}$.
Tvrdimo da je $\overline{f}$ injekcija.

Neka su $A, B \in X/f$ takvi da je $A \neq B$. Imamo

$$A = f^{-1}\{y_1\}, B = f^{-1}\{y_2\},$$

gdje su $y_1, y_2 \in Y$ takvi da je $y_1 \neq y_2$.

Tada je $\overline{f}(A) = y_1, \overline{f}(B) = y_2$.

Dakle, $\overline{f}(A) \neq \overline{f}(B)$.

Ovime smo pokazali da je $\overline{f}$ injekcija.
Nadalje, uočimo da je $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(\overline{f})$. Stoga imamo sljedeći zaključak:

Ako je f surjekcija, $\overline{f} : X/f \to Y$ je neprekidna bijekcija.

Općenito, neprekidna bijekcija između dva topološka prostora ne mora biti homeomorfizam, to jest njena inverzna funkcija ne mora biti neprekidna.

Primjer 2.1.5.
Neka je X neprazan skup, neka je $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ te neka je $\mathcal{S} = \{\emptyset, X\}$. Neka je $f : X \to X$ identiteta, to jest funkcija definirana sa $f(x) = x, \forall x \in X$.

Tada je f neprekidna s obzirom na topologije $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$, to jest f je neprekidna funkcija iz topološkog prostora $(X, \mathcal{T})$ u $(X, \mathcal{S})$.

Jasno je da je f bijekcija te da je $f^{-1} = f$, no f nije neprekidna s obzirom na topologije $\mathcal{S}$ i $\mathcal{T}$ (to jest, f^{-1} nije neprekidna funkcija iz topološkog prostora $(X, \mathcal{S})$ u $(X, \mathcal{T})$) ako X ima barem 2 elementa.

Definicija 2.1.6. *Neka su $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori te neka je $f : X \to Y$ funkcija. Za f kažemo da je **otvoreno preslikavanje** (s obzirom na $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$) ako za svaki $U \in \mathcal{T}$ vrijedi $f(U) \in \mathcal{S}$.*

Primjer 2.1.7.
Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa $f(x) = 0\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Tada je f neprekidna funkcija (na $\mathbb{R}$ promatramo euklidsku topologiju $\mathcal{E}$). No, f nije otvoreno preslikavanje. Naime, $\mathbb{R} \in \mathcal{E}$, no $f(\mathbb{R}) \notin \mathcal{E}$ jer je $f(\mathbb{R}) = \{0\}$.

Propozicija 2.1.8. *Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori te neka je $f : X \to Y$ bijekcija neprekidna s obzirom na topologije $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$.*

Tada je f homeomorfizam ako i samo ako je f otvoreno preslikavanje.

Dokaz. Neka je $S \subseteq X$.

Tada je praslika od S pri funkciji $f^{-1} : Y \to X$, to jest $\left(f^{-1}\right)^{-1}(S)$, jednaka slici skupa S pri funkciji f, to jest $f(S)$.
Posebno, za svaki $U \in \mathcal{T}$ vrijedi

$$\left(f^{-1}\right)^{-1}(U) = f(U) \tag{2.1}$$

Pretpostavimo da je f homeomorfizam. Tada je $f^{-1} : Y \to X$ neprekidna funkcija s obzirom na $\mathcal{S}$ i $\mathcal{T}$, pa za svaki $U \in \mathcal{T}$ vrijedi

$$\left(f^{-1}\right)^{-1}(U) \in \mathcal{S}.$$

Iz (2.1) zaključujemo da je f otvoreno preslikavanje.

Obratno, ako je f otvoreno preslikavanje, onda iz (2.1) zaključujemo da je f^{-1} neprekidna s obzirom na $\mathcal{S}, \mathcal{T}$, dakle f je homeomorfizam. □

Lema 2.1.9. *Neka su S, T i V skupovi te neka su $g : S \to T$ i $h : T \to V$ funkcije pri čemu je g surjekcija. Neka je $f = h \circ g$.*

Neka je $W \subseteq T$. Tada je $h(W) = f(g^{-1}(W))$.

$$\begin{tikzcd} S \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & V \\ & T \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

Dokaz.

Neka je $y \in h(W)$. Tada postoji $z \in W$ takav da je $h(z) = y$. Budući da je g surjekcija, postoji $x \in S$ takav da $g(x) = z$. Imamo $g(x) \in W$, pa je $x \in g^{-1}(W)$.
Imamo
$$y = h(z) = h(g(x)) = (h \circ g)(x) = f(x).$$
Dakle, $y = f(x)$ i $x \in g^{-1}(W)$. Prema tome
$$y \in f(g^{-1}(W)).$$

Obratno, pretpostavimo da je $y \in f(g^{-1}(W))$. Tada postoji $x \in g^{-1}(W)$ takav da $f(x) = y$.
Imamo
$$y = f(x) = (h \circ g)(x) = h(g(x)).$$
Budući da je $x \in g^{-1}(W)$, imamo $g(x) \in W$. Sada je $y = h(g(x))$.

Zaključujemo $y \in h(W)$. □

Propozicija 2.1.10. *Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori te neka je $f : X \to Y$ neprekidna funkcija s obzirom na $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$, te ujedno otvoreno preslikavanje s obzirom na $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$.*

Tada je $\overline{f} : X/f \to Y$ otvoreno preslikavanje s obzirom na topologije $\mathcal{T}_f$ i $\mathcal{S}$.

Dokaz. Neka je $q : X \to X/f$ kvocijentno preslikavanje.
Tada je $f = \overline{f} \circ q$.

Želimo pokazati da je $\overline{f}$ otvoreno preslikavanje s obzirom na $\mathcal{T}_f$ i $\mathcal{S}$.

Neka je $U \in \mathcal{T}_f$. Budući da je q surjekcija, prema lemi 2.1.9 imamo
$$\overline{f}(U) = f\left(q^{-1}(U)\right).$$

Iz $U \in \mathcal{T}_f$ slijedi
$$q^{-1}(U) \in \mathcal{T},$$
pa je
$$f\left(q^{-1}(U)\right) \in \mathcal{S}$$
jer je f otvoreno preslikavanje. Dakle, $\overline{f}(U) \in \mathcal{S}$.

Zaključak, $\overline{f}$ je otvoreno preslikavanje s obzirom na $\mathcal{T}_f$ i $\mathcal{S}$. □

Korolar 2.1.11.

Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori te neka je $f : X \to Y$ neprekidna surjekcija koja je otvoreno preslikavanje.

Tada je $\overline{f} : X/f \to Y$ homeomorfizam (s obzirom na $\mathcal{T}_f$ i $\mathcal{S}$).

Dokaz. Znamo da je $\overline{f}$ neprekidna bijekcija. Iz prethodne propozicije slijedi da je $\overline{f}$ otvoreno preslikavanje.

Iz propozicije 2.1.8 slijedi da je $\overline{f}$ homeomorfizam. □

2.2 Kvocijentna topologija

Definicija 2.2.1. *Neka je X skup te neka je $\mathcal{T}$ topologija na X. Neka je $\mathcal{B}$ familija podskupova od X takva da vrijedi sljedeće:*

(1) $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$

(2) Svaki neprazan element od $\mathcal{T}$ se može napisati kao unija nekih elemenata od $\mathcal{B}$, to jest ako je $U \in \mathcal{T}$, $U \neq \emptyset$, onda postoji indeksirana familija $(B_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ elemenata od $\mathcal{B}$ takva da je $U = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} B_\alpha$.

Tada za $\mathcal{B}$ kažemo da je ***baza topologije*** *$\mathcal{T}$.*

Propozicija 2.2.2.

Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te neka je $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$.

Tada je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{T}$ ako i samo ako za svaki $U \in \mathcal{T}$ i svaki $x \in U$ postoji $B \in \mathcal{B}$ takav da je $x \in B \subseteq U$.

Dokaz.

Pretpostavimo da je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{T}$. Neka je $U \in \mathcal{T}$ te $x \in U$.

Tada je U neprazan skup, pa postoji indeksirana familija $(B_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ elemenata od $\mathcal{B}$ takva da je
$$U = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} B_\alpha.$$

Iz $x \in U$ slijedi da postoji $\alpha \in \mathcal{A}$ takav da $x \in B_\alpha$.
Očito vrijedi da je $B_\alpha \subseteq U$. Dakle, $x \in B_\alpha \subseteq U$ i $B_\alpha \in \mathcal{B}$.

Obratno, pretpostavimo da za svaki $U \in \mathcal{T}$ i svaki $x \in U$ postoji $B \in \mathcal{B}$ takav da je

$$x \in B \subseteq U.$$

Dokažimo da je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{T}$.

Prema pretpostavci propozicije, imamo $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$. Neka je $U \in \mathcal{T}$, $U \neq \emptyset$.
Za svaki $x \in U$ postoji $B_x \in \mathcal{B}$ takav da je

$$x \in B_x \subseteq U.$$

Imamo indeksiranu familiju $(B_x)_{x \in U}$ elemenata od $\mathcal{B}$ i vrijedi

$$U = \bigcup_{x \in U} B_x.$$

Zaključak: $\mathcal{B}$ je baza topologije $\mathcal{T}$. □

Primjer 2.2.3. *Neka je (X, d) metrički prostor. Neka je $\mathcal{B} = \{K(x, r) \mid x \in X, r > 0\}$. Tada je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{T}_d$.*

Naime, iz propozicije 1.1.8 slijedi da je $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}_d$.

S druge strane, ako je $U \in \mathcal{T}_d$, onda je U otvoren skup u (X, d), pa ako je $x \in U$ onda postoji $r > 0$ takav da je

$$K(x, r) \subseteq U.$$

Jasno, $x \in K(x, r)$.
Dakle, postoji $B \in \mathcal{B}$ takav da je $x \in B \subseteq U$.

Iz propozicije 2.2.2 slijedi da je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{T}_d$.

Napomena 2.2.4. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je $U \subseteq X$, $U \neq \emptyset$.*

Tada iz prethodnog primjera slijedi da je U otvoren skup u (X, d) ako i samo ako je U unija nekih otvorenih kugli.

Primjer 2.2.5. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. Tada je $\mathcal{T}$ baza topologije $\mathcal{T}$.*

Propozicija 2.2.6.

Neka je X neprazan skup te neka je $\mathcal{B}$ familija podskupova od X takva da vrijedi sljedeće:

(1) $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X$

(2) Ako su $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ te ako je $x \in B_1 \cap B_2$ onda postoji $B_3 \in \mathcal{B}$ takav da je $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Tada postoji jedinstvena topologija $\mathcal{T}$ na X takva da je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{T}$.

Dokaz.

Dokažimo prvo da takva topologija mora biti jedinstvena.

Pretpostavimo da su $\mathcal{T}_1$ i $\mathcal{T}_2$ topologije na X kojima je $\mathcal{B}$ baza. Neka je $U \in \mathcal{T}_1$. Ako je $U = \emptyset$ onda je $U \in \mathcal{T}_2$.

Pretpostavimo da je $U \neq \emptyset$. Tada postoji indeksirana familija $(B_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ elemenata iz $\mathcal{B}$ takva da je $U = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} B_\alpha$. No, budući da je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{T}_2$, vrijedi $B_\alpha \in \mathcal{T}_2$ za svaki $\alpha \in \mathcal{A}$, pa je stoga $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} B_\alpha \in \mathcal{T}_2$. Dakle, $U \in \mathcal{T}_2$.

Prema tome, $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$. Analogno, $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1$, dakle $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.

Dokažimo sada da postoji topologija na X kojoj je $\mathcal{B}$ baza.

Neka je $\mathcal{T}$ familija svih podskupova U od X koji imaju sljedeće svojstvo:

$$\forall x \in U \ \exists B \in \mathcal{B} \text{ takav da je } x \in B \subseteq U$$

Dokažimo sada da je $\mathcal{T}$ topologija na X te da je $\mathcal{B}$ njena baza.

Očito $\emptyset \in \mathcal{T}$. Neka je $x \in X$. Iz svojstva (1) slijedi da postoji $B \in \mathcal{B}$ takav da je $x \in B \subseteq X$. Stoga je $X \in \mathcal{T}$. Neka je $(U_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ indeksirana familija elemenata od $\mathcal{T}$. Želimo dokazati da je unija $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha \in \mathcal{T}$. Neka je $x \in \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha$. Tada postoji $\alpha_0 \in \mathcal{A}$ takav da je $x \in U_{\alpha_0}$.

Budući da je $U_{\alpha_0} \in \mathcal{T}$, postoji $B \in \mathcal{B}$ takav da $x \in B \subseteq U_{\alpha_0}$.
Stoga je $x \in B \subseteq \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha$.
Zaključak: $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha \in \mathcal{T}$

Neka je $U, V \in \mathcal{T}$. Dokažimo da je $U \cap V \in \mathcal{T}$.
Neka je $x \in U \cap V$. Tada je $x \in U$ i $x \in V$. Stoga postoje $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ takvi da je $x \in B_1 \subseteq U$ i $x \in B_2 \subseteq V$. Iz ovoga slijedi $x \in B_1 \cap B_2 \subseteq U \cap V$.

Prema svojstvu (2) postoji $B_3 \in \mathcal{B}$ takav da je $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$, iz čega slijedi da je $x \in B_3 \subseteq U \cap V$.
Zaključak: $U \cap V \in \mathcal{T}$.

Ovim smo dokazali da je $\mathcal{T}$ topologija X.

Iz definicije od $\mathcal{T}$ je očito da je $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$. Nadalje, ako je $U \in \mathcal{T}$ i $x \in U$ onda postoji $B \in \mathcal{B}$ takav da je $x \in B \subseteq U$.

Iz propozicije 2.2.2 slijedi da je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{T}$. □

Definicija 2.2.7.
Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori. Neka je

$$\mathcal{B} = \{U \times V \mid U \in \mathcal{T}, V \in \mathcal{S}\}$$

Tada je, očito, $\bigcup\limits_{B \in \mathcal{B}} B = X \times Y$, naime $X \times Y \in \mathcal{B}$.
Neka su $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ te neka je $a \in B_1 \cap B_2$.
Tada je $B_1 = U_1 \times V_1, B_2 = U_2 \times V_2$, gdje su $U_1, U_2 \in \mathcal{T}, V_1, V_2 \in \mathcal{S}$.

Stoga je $B_1 \cap B_2 = (U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2)$.

Jasno je da je

$$U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}, V_1 \cap V_2 \in \mathcal{S},$$

pa slijedi da je $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$.

Neka je $B_3 = B_1 \cap B_2$. Imamo, dakle, $B_3 \in \mathcal{B}$ i $a \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Iz propozicije 2.2.6 slijedi da postoji jedinstvena topologija $\mathcal{R}$ na $X \times Y$ takva da je $\mathcal{B}$ baza od $\mathcal{R}$.

*Za $\mathcal{R}$ kažemo da je **produktna topologija** na $X \times Y$ određena topologijama $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$, a za topološki prostor $(X \times Y, \mathcal{R})$ da je **produkt prostora** $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$.*

Propozicija 2.2.8.
Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori te neka je $(X \times Y, \mathcal{R})$ njihov produkt. Neka je $W \subseteq X \times Y$.

Tada je $W \in \mathcal{R}$ ako i samo ako za sve $x \in X$ i $y \in Y$ takve da je $(x, y) \in W$ postoje $U \in \mathcal{T}$ i $V \in \mathcal{S}$ takvi da je $(x, y) \in U \times V \subseteq W$.

Dokaz. Neka je $W \in \mathcal{R}$. Neka su $x \in X, y \in Y$ takvi da je $(x, y) \in W$.

Iz propozicije 2.2.2 slijedi da postoje $U \in \mathcal{T}$ i $V \in \mathcal{S}$ takvi da vrijedi
$(x, y) \in U \times V \subseteq W$.

Obratno, pretpostavimo da je $W \subseteq X \times Y$ te da za sve $x \in X, y \in Y$ takve da je $(x, y) \in W$ postoje $U \in \mathcal{T}$ i $V \in \mathcal{S}$ sa svojstvom $(x, y) \in U \times V \subseteq W$.

Uočimo da za sve $U \in \mathcal{T}$ i $V \in \mathcal{S}$ vrijedi $U \times V \in \mathcal{R}$. Iz ovoga zaključujemo da za svaki $z \in W$ postoji $Q \in \mathcal{R}$ takav da je $z \in Q \subseteq W$. Iz leme 1.2.16 slijedi $W \in \mathcal{R}$. □

Propozicija 2.2.9.

Neka su $(X,\mathcal{T})$ i $(Y,\mathcal{S})$ topološki prostori te neka je $(X\times Y,\mathcal{R})$ njihov produkt. Neka je $p : X\times Y \to X$ projekcija na prvu koordinatu, a $q : X\times Y \to Y$ projekcija na drugu koordinatu, to jest

$$p(x,y) = x,\ \ q(x,y) = y \quad \forall (x,y) \in X\times Y\ .$$

Tada je p neprekidna s obzirom na topologije $\mathcal{R}$ i $\mathcal{T}$, a q je neprekidna s obzirom na topologije $\mathcal{R}$ i $\mathcal{S}$.

Dokaz. Neka je $U\in\mathcal{T}$. Tada je $p^{-1}(U) = U\times Y$, pa slijedi (budući da je $Y\in\mathcal{S}$) da je $p^{-1}(U)\in\mathcal{R}$. Dakle, p je neprekidna s obzirom na $\mathcal{R}$ i $\mathcal{T}$. Analogno dokazujemo da je q neprekidna s obzirom na $\mathcal{R}$ i $\mathcal{S}$. □

Propozicija 2.2.10.

Neka su $(X,\mathcal{T})$ i $(Y,\mathcal{S})$ topološki prostori te neka je $(X\times Y,\mathcal{R})$ njihov produkt. Neka su $p : X\times Y \to X$ i $q : X\times Y \to Y$ projekcije.

Tada je p otvoreno preslikavanje s obzirom na topologije $\mathcal{R}$ i $\mathcal{T}$, a q otvoreno preslikavanje s obzirom na topologije $\mathcal{R}$ i $\mathcal{S}$.

Dokaz. Neka je $W\in\mathcal{R}$. Želimo dokazati da je $p(W)\in\mathcal{T}$.

Ako je $W=\emptyset$ onda je tvrdnja jasna.

Pretpostavimo sada da je $W\neq\emptyset$.

Neka je $\mathcal{B} = \{U\times V \mid U\in\mathcal{T}, V\in\mathcal{S}\}$. Tada postoji indeksirana familija $(B_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ elemenata iz $\mathcal{B}$ takva da je $W = \bigcup\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} B_\alpha$. Za svaki $\alpha\in\mathcal{A}$ postoje $U_\alpha\in\mathcal{T}$ i $V_\alpha\in\mathcal{S}$ takvi da je $B_\alpha = U_\alpha\times V_\alpha$ i pri tome uzimamo $U_\alpha = V_\alpha = \emptyset$ ako je $B_\alpha=\emptyset$.

Tada je $p(B_\alpha) = p(U_\alpha\times V_\alpha) = U_\alpha$, pa slijedi

$$p(W) = p\left(\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} B_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} p(B_\alpha) = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} U_\alpha\ .$$

Dakle, $p(W) = \bigcup\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} U_\alpha$ iz čega slijedi $p(W)\in\mathcal{T}$.

Zaključak: p je otvoreno preslikavanje s obzirom na $\mathcal{R}$ i $\mathcal{T}$.

Analogno dobivamo da je q otvoreno preslikavanje s obzirom na $\mathcal{R}$ i $\mathcal{S}$. □

Uočimo sljedeće:

Ako su X i Y neprazni skupovi, onda je $\{\{x\}\times Y \mid x\in X\}$ particija skupa $X\times Y$.

Teorem 2.2.11.

Neka su $(X,\mathcal{T})$ i $(Y,\mathcal{S})$ topološki prostori te neka je $(X\times Y,\mathcal{R})$ njihov produkt. Neka je $\mathcal{F} = \{\{x\}\times Y \mid x\in X\}$ te neka je $\mathcal{R}_{\mathcal{F}}$ kvocijentna topologija na $\mathcal{F}$ određena s $\mathcal{R}$.

Tada su topološki prostori $(\mathcal{F},\mathcal{R}_{\mathcal{F}})$ i $(X,\mathcal{T})$ homeomorfni. Pri tome je homeomorfizam $f : \mathcal{F}\to X$ dan sa $f(\{x\}\times Y) = x$.

Dokaz. Neka je $p : X \to Y$ projekcija na prvu koordinatu. Tada je p očito surjekcija.

Nadalje, p je neprekidna funkcija s obzirom na $\mathcal{R}$ i $\mathcal{T}$ (propozicija 2.2.9), a prema propoziciji 2.2.10 imamo da je p otvoreno preslikavanje s obzirom na $\mathcal{R}$ i $\mathcal{T}$. Iz korolara 2.1.11 slijedi da je $\overline{p} : (X \times Y)/_p \to X$ homeomorfizam s obzirom na $\mathcal{R}_p$ i $\mathcal{T}$.

Prema definiciji skupa $(X \times Y)/_p$ imamo

$$(X \times Y)/_p = \left\{p^{-1}(\{x\}) \mid x \in X\right\} \setminus \{\emptyset\} = \{\{x\} \times Y \mid x \in X\} = \mathcal{F}$$

Po definiciji, $\mathcal{R}_p$ je kvocijentna topologija na $(X \times Y)/_p$ određena s $\mathcal{R}$, dakle to je kvocijentna topologija na $\mathcal{F}$ određena s $\mathcal{R}$, to jest $\mathcal{R}_{\mathcal{F}}$.

Zaključak: $\overline{p} : \mathcal{F} \to X$ je homeomorfizam s obzirom na $\mathcal{R}_{\mathcal{F}}$ i $\mathcal{T}$.

Uočimo da za svaki $x \in X$ vrijedi

$$\overline{p}(\{x\} \times Y) = p(x, y),$$

gdje je y proizvoljni element od Y. Stoga je $\overline{p}(\{x\} \times Y) = x, \forall x \in X$. □

Analogno dokazujemo sljedeći teorem.

Teorem 2.2.12.

Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori te neka je $(X \times Y, \mathcal{R})$ njihov produkt. Neka je $\mathcal{G} = \{X \times \{y\} \mid y \in Y\}$ te neka je $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}$ kvocijentna topologija na $\mathcal{G}$ određena s $\mathcal{R}$.

Tada su topološki prostori $(\mathcal{G}, \mathcal{R}_{\mathcal{G}})$ i $(Y, \mathcal{S})$ homeomorfni. Pri tome je homeomorfizam $g : \mathcal{G} \to Y$ dan sa $g(X \times \{y\}) = y$.

□

Definicija 2.2.13. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te neka je $F \subseteq X$. Kažemo da je F* ***zatvoren skup*** *u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T})$ ako je F^C otvoren skup u $(X, \mathcal{T})$, to jest ako je $F^C \in \mathcal{T}$.*

Propozicija 2.2.14.

Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori te neka je $f : X \to Y$.

Tada je f neprekidna funkcija s obzirom na topologije $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$ ako i samo ako je $f^{-1}(F)$ zatvoren skup u $(X, \mathcal{T})$ za svaki zatvoren skup F u $(Y, \mathcal{S})$.

Dokaz. Neka je $F \subseteq Y$. Tvrdimo da je

$$\left(f^{-1}(F)\right)^C = f^{-1}\left(F^C\right) \tag{2.2}$$

Ako je $x \in \left(f^{-1}(F)\right)^C$, onda je $x \in X$ i $x \notin f^{-1}(F)$, pa $f(x) \notin F$ to jest $f(x) \in F^C$ iz čega slijedi $x \in f^{-1}\left(F^C\right)$.

Obratno, ako je $x \in f^{-1}\left(F^C\right)$, onda je $x \in X$ i $f(x) \in F^C$, pa $f(x) \notin F$, to jest $x \notin f^{-1}(F)$, dakle $x \in \left(f^{-1}(F)\right)^C$.

Dakle, (2.2) vrijedi.

Pretpostavimo da je f neprekidna s obzirom na $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$.

Neka je F zatvoren skup u $(Y, \mathcal{S})$. Tada je F^C otvoren u $(Y, \mathcal{S})$, pa je $f^{-1}\left(F^C\right)$ otvoren u $(X, \mathcal{T})$. Dakle, prema (2.2) skup $\left(f^{-1}(F)\right)^C$ je otvoren u $(X, \mathcal{T})$. To znači da je $f^{-1}(F)$ zatvoren skup u $(X, \mathcal{T})$.

Pretpostavimo sada da je $f^{-1}(F)$ zatvoren skup u $(X, \mathcal{T})$ za svaki zatvoren skup F u $(Y, \mathcal{S})$. Dokažimo da je f neprekidna s obzirom na $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$.

Neka je $V \in \mathcal{S}$. Tada je (prema (2.2)) $\left(f^{-1}(V)\right)^C = f^{-1}\left(V^C\right)$.

Budući da je $V \in \mathcal{S}$, skup V^C je zatvoren u $(Y, \mathcal{S})$, stoga je $f^{-1}\left(V^C\right)$ zatvoren skup u $(X, \mathcal{T})$.

Dakle, $\left(f^{-1}(V)\right)^C$ je zatvoren skup u $(X, \mathcal{T})$, pa je $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}$.

Dakle, f je neprekidna s obzirom na $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$. □

Definicija 2.2.15. *Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori te neka je $f : X \to Y$. Kažemo da je f* ***zatvoreno preslikavanje*** *s obzirom na $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$ ako je $f(A)$ zatvoren skup u $(Y, \mathcal{S})$ za svaki zatvoren skup A u $(X, \mathcal{T})$.*

Primjer 2.2.16. *Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa $f(x) = 0\ \forall x \in \mathbb{R}$.*
U primjeru 2.1.7 smo vidjeli da f nije otvoreno preslikavanje. No, f je zatvoreno preslikavanje. Naime, ako je $A \subseteq \mathbb{R}$ onda je $f(A) = \{0\}$ ili $f(A) = \emptyset$, a $\{0\}$ i $\emptyset$ su zatvoreni skupovi u $\mathbb{R}$.

Dakle, zatvoreno preslikavanje ne mora biti otvoreno.

Definicija 2.2.17. *Neka su (X, d) i (Y, p) metrički prostori takvi da je*
$Y \subseteq X$ te $p(a, b) = d(a, b)$ za sve $a, b \in Y$.
Tada za (Y, p) kažemo da je ***potprostor metričkog prostora*** *(X, d).*

Uočimo sljedeće:

Ako je (X, d) metrički prostor te $Y \subseteq Y, Y \neq \emptyset$ onda postoji jedinstvena metrika p na Y takva da je (Y, p) potprostor metričkog prostora (X, d).

Propozicija 2.2.18.

Neka je (Y, p) potprostor metričkog prostora (X, d).

Ako je U otvoreni skup u (X, d), onda je $U \cap Y$ otvoren skup u (Y, p).
Obratno, ako je V otvoren skup u (Y, p), onda postoji otvoreni skup U u (X, d) takav da je $V = U \cap Y$.

Dokaz.
Uočimo, prije svega, sljedeće: ako su $y \in Y$ i $r > 0$ onda je

$$K(y, r; p) = K(y, r; d) \cap Y \tag{2.3}$$

Naime,

$$\begin{aligned} K(y, r; p) =& \{x \in Y \mid p(y, x) < r\} = \{x \in Y \mid d(y, x) < r\} = \\ =& \{x \in X \mid d(y, x) < r\} \cap Y = \\ =& K(y, r; d) \cap Y \end{aligned}$$

Neka je U otvoren skup u (X, d). Dokažimo da je $U \cap Y$ otvoren skup u (Y, p). Neka je $y \in U \cap Y$. Tada je $y \in U$, pa budući da je U otvoren u (X, d) postoji $r > 0$ takav da je $K(y, r; d) \subseteq U$. Iz ovoga slijedi da je $K(y, r; d) \cap Y \subseteq U \cap Y$. Iz (2.3) slijedi da je

$$K(y, r; p) \subseteq U \cap Y \; .$$

Iz ovoga zaključujemo da je $U \cap Y$ otvoren skup u metričkom prostoru (Y, p).

Pretpostavimo da je V otvoren skup u (Y, p). Tada za svaki $y \in V$ postoji $r_y > 0$ takav da je $K(y, r_y; p) \subseteq V$. Iz ovoga slijedi da je $V = \bigcup_{y \in V} K(y, r_y; p)$.

Neka je $U = \bigcup_{y \in V} K(y, r_y; d)$. Tada je U otvoren skup u (X, d) (jer je U unija otvorenih skupova u (X, d)).
Imamo

$$\begin{aligned} U \cap Y &= \left[\bigcup_{y \in V} K(y, r_y; d) \right] \cap Y = \\ &= \bigcup_{y \in V} \Big(K(y, r_y; d) \cap Y \Big) = \\ &= \bigcup_{y \in V} K(y, r_y; p) = V \; . \end{aligned}$$

Dakle, $U \cap Y = V$. □

Napomena 2.2.19. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}, S \neq \emptyset$. Neka je $p : S \times S \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa $p(x, y) = |x - y|,\ x, y \in S$. Tada je p metrika na S i (S, p) je potprostor metričkog prostora $(\mathbb{R}, d)$, gdje je d euklidska metrika na $\mathbb{R}$.*

*Za p kažemo da je **euklidska metrika** na S.*

Primjer 2.2.20.

Neka je p euklidska metrika na $\langle 0,1\rangle$ te neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}$. Neka je $\mathcal{T}$ topologija na $\langle 0,1\rangle$ inducirana metrikom p te neka je $\mathcal{E}$ euklidska topologija na $\mathbb{R}$, to jest topologija inducirana metrikom d.

Neka je $f : \langle 0,1\rangle \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa $f(x) = x, \forall x \in \langle 0,1\rangle$. Tada je f neprekidno i otvoreno preslikavanje s obzirom na topologije $\mathcal{T}$ i $\mathcal{E}$, no f nije zatvoreno s obzirom na $\mathcal{T}$ i $\mathcal{E}$. Dokažimo to.

Neka je $V \in \mathcal{E}$. Tada je V otvoren skup u $(\mathbb{R}, d)$. Imamo

$$\begin{aligned} f^{-1}(V) &= \{x \in \langle 0,1\rangle : f(x) \in V\} = \\ &= \{x \in \langle 0,1\rangle : x \in V\} = \\ &= \langle 0,1\rangle \cap V\,. \end{aligned}$$

Prema propoziciji 2.2.18, skup $\langle 0,1\rangle \cap V$ je otvoren u $(\langle 0,1\rangle, p)$, to jest $\langle 0,1\rangle \cap V \in \mathcal{T}$. Dakle, $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}$ za svaki $V \in \mathcal{E}$.
Prema tome, f je neprekidna s obzirom na topologije $\mathcal{T}$ i $\mathcal{E}$.

Dokažimo da je f otvoreno preslikavanje. Neka je $V \in \mathcal{T}$. Tada je V otvoreni skup u $(\langle 0,1\rangle, p)$, pa prema propoziciji 2.2.14, postoji otvoren skup U u $(\mathbb{R}, d)$ takav da je

$$V = U \cap \langle 0,1\rangle.$$

No, $\langle 0,1\rangle$ je također otvoren skup u $(\mathbb{R}, d)$, pa je stoga V otvoren u $(\mathbb{R}, d)$. Prema tome $V \in \mathcal{E}$. Uočimo da je $f(V) = V$. Dakle, za svaki $V \in \mathcal{T}$ vrijedi $f(V) \in \mathcal{E}$.

Zaključujemo da je f otvoreno preslikavanje s obzirom na topologije $\mathcal{T}$ i $\mathcal{E}$.

Skup $\langle 0,1\rangle$ je zatvoren u $(\langle 0,1\rangle, \mathcal{T})$, no $f(\langle 0,1\rangle)$ nije zatvoren u $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$.
Naime, $f(\langle 0,1\rangle) = \langle 0,1\rangle$, a skup $\mathbb{R} \setminus \langle 0,1\rangle$ nije otvoren u $(\mathbb{R}, d)$.

Propozicija 2.2.21.

Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori te neka je $f : X \to Y$ bijekcija neprekidna s obzirom na $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$.

Tada je F homeomorfizam ako i samo ako je f zatvoreno preslikavanje.

Dokaz. Kao u dokazu propozicije 2.1.8 imamo da je

$$\left(f^{-1}\right)^{-1}(S) = f(S) \quad \text{za svaki } S \subseteq X. \tag{2.1}$$

Pretpostavimo da je f homeomorfizam. Tada je $f^{-1} : Y \to X$ neprekidna funkcija s obzirom na $\mathcal{S}, \mathcal{T}$. Neka je F zatvoren skup u $(X, \mathcal{T})$. Prema propoziciji 2.2.14 skup $\left(f^{-1}\right)^{-1}(F)$ je zatvoren u $(Y, \mathcal{S})$. Dakle, $f(F)$ je zatvoren u $(Y, \mathcal{S})$.

Zaključak: f je zatvoreno preslikavanje.

Pretpostavimo da je f zatvoreno preslikavanje. Želimo dokazati da je f homeomorfizam. U tu svrhu, dovoljno je dokazati da je f^{-1} neprekidna funkcija s obzirom na $\mathcal{T}, \mathcal{S}$. Prema propoziciji 2.2.14 dovoljno je dokazati da je $\left(f^{-1}\right)^{-1}(F)$ zatvoren skup u $(Y, \mathcal{S})$ za svaki F koji je zatvoren u $(X, \mathcal{T})$. No, to slijedi iz (2.1) i činjenice da je f zatvoreno preslikavanje. □

Propozicija 2.2.22.

Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori te neka je $f : X \to Y$ neprekidna funkcija s obzirom na $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$, te ujedno otvoreno preslikavanje s obzirom na $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$.

Tada je $\overline{f} : X/f \to Y$ zatvoreno preslikavanje s obzirom na $\mathcal{T}_f$ i $\mathcal{S}$.

Dokaz.

Neka je $q : X \to X/f$ kvocijentno preslikavanje. Tada je $f = \overline{f} \circ q$.

Neka je F zatvoren skup u topološkom prostoru $(X/f, \mathcal{T}_f)$. Budući da je q surjekcija, iz leme 2.1.9 slijedi $\overline{f}(F) = f\left(q^{-1}(F)\right)$.

Funkcija q je neprekidna s obzirom na $\mathcal{T}, \mathcal{S}$, pa je prema propoziciji 2.2.14, $q^{-1}(F)$ zatvoren skup u $(X, \mathcal{T})$. Sada iz činjenice da je f zatvoreno preslikavanje, slijedi da je $f\left(q^{-1}(F)\right)$ zatvoren skup u $(Y, \mathcal{S})$. Dakle, $\overline{f}(F)$ je zatvoren u $(Y, \mathcal{S})$.

Zaključak: $\overline{f}$ je zatvoreno preslikavanje s obzirom na $\mathcal{T}_f$ i $\mathcal{S}$. □

Korolar 2.2.23.

Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori te neka je $f : X \to Y$ neprekidna surjekcija koja je zatvoreno preslikavanje.

Tada je $\overline{f} : X/f \to Y$ homeomorfizam (s obzirom na $\mathcal{T}_f$ i $\mathcal{S}$).

Dokaz. Funkcija $\overline{f}$ je bijekcija te je neprekidna s obzirom na $\mathcal{T}_f, \mathcal{S}$. Prema prethodnoj propoziciji 2.2.22, $\overline{f}$ je zatvoreno preslikavanje. Propozicija 2.2.21 sada povlači da je $\overline{f}$ homeomorfizam. □

2.3 Kompaktnost

Definirajmo sada kompaktan topološki prostor i kompaktan skup u topološkom prostoru.

Definicija 2.3.1. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, te neka je $\mathcal{U}$ familija otvorenih skupova u $(X, \mathcal{T})$ (to jest $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$) čija je unija jednaka X, to jest $\bigcup \mathcal{U} = X$. Tada za $\mathcal{U}$ kažemo da je **otvoreni pokrivač topološkog prostora** $(X, \mathcal{T})$.*

Definicija 2.3.2. *Za **topološki prostor** $(X, \mathcal{T})$ kažemo da je **kompaktan** ako za svaki otvoreni pokrivač $\mathcal{U}$ od $(X, \mathcal{T})$ postoje $n \in \mathbb{N}$ i $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$ takvi da je $X = U_1 \cup \ldots \cup U_n$.*

Primjer 2.3.3.

Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, pri čemu je $\mathcal{T}$ konačan skup. Tada je $(X, \mathcal{T})$ kompaktan topološki prostor.

Naime, ako je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač od $(X, \mathcal{T})$ onda je $\mathcal{U}$ konačan skup.
Posebno, ako je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor takav da je X konačan skup, onda je $(X, \mathcal{T})$ kompaktan.

Primjer 2.3.4.

Neka je X beskonačan skup. Tada topološki prostor $(X, \mathcal{P}(X))$ nije kompaktan.

Naime, neka je $\mathcal{U} = \{\{x\} \mid x \in X\}$. Tada je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač od $(X, \mathcal{P}(X))$, no jasno je da ne postoje $n \in \mathbb{N}$ i $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}$ takvi da je $X = U_1 \cup \ldots \cup U_n$.

Definicija 2.3.5. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, $K \subseteq X$ te $\mathcal{U}$ neprazan podskup od $\mathcal{T}$. Za $\mathcal{U}$ kažemo da je* ***otvoreni pokrivač skupa*** *K u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T})$ ako je $K \subseteq \bigcup \mathcal{U}$.*

Uočimo da je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač topološkog prostora $(X, \mathcal{T})$ ako i samo ako je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač skupa X u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T})$.

Definicija 2.3.6. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te $K \subseteq X$. Za K kažemo da je* ***kompaktan skup*** *u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T})$ ako za svaki otvoreni pokrivač $\mathcal{U}$ od K u $(X, \mathcal{T})$ postoje $n \in \mathbb{N}$ i $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}$ takvi da je $K \subseteq U_1 \cup \ldots \cup U_n$.*

Uočimo sljedeće: Topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ je kompaktan ako i samo ako je X kompaktan skup u $(X, \mathcal{T})$.

Propozicija 2.3.7.

Neka je $(X, \mathcal{T})$ kompaktan topološki prostor te neka je F zatvoren skup u $(X, \mathcal{T})$.
Tada je F kompaktan skup u $(X, \mathcal{T})$.

Dokaz. Neka je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač od F. Neka je $\mathcal{U}' = \mathcal{U} \cap \{X \setminus F\}$.

Jasno je da je $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{T}$. Nadalje, ako je $x \in X$ onda je $x \in F$ ili $x \in X \setminus F$.

Ako je $x \in F$, onda postoji $U \in \mathcal{U}$ takav da je $x \in U$, dakle x je sadržan u nekom članu od $\mathcal{U}'$, a isto vrijedi u slučaju $x \in X \setminus F$ jer je $X \setminus F \in \mathcal{U}'$.
Zaključak: $X \subseteq \bigcup \mathcal{U}'$.

Prema tome $\mathcal{U}'$ je otvoreni pokrivač od $(X, \mathcal{T})$. Stoga postoje $n \in \mathbb{N}$ i $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}$ takvi da je

$$X = U_1 \cup \ldots \cup U_n \cup (X \setminus F).$$

Iz ovoga slijedi da je $F \subseteq U_1 \cup \ldots \cup U_n$.
Zaključak: F je kompaktan skup u $(X, \mathcal{T})$. □

Obrat prethodne propozicije općenito ne vrijedi, što pokazuje sljedeći primjer.

Primjer 2.3.8. *Neka je X skup koji ima bar 2 elementa. Neka je $K \subseteq X$ takav da je $K \neq \emptyset$ i $K \neq X$. (Takav skup K sigurno postoji.)*

Tada je K kompaktan skup u $(X, \{\emptyset, X\})$ koji nije zatvoren u tom topološkom prostoru.

Naime, topologija $\{\emptyset, X\}$ je konačan skup, pa je svaki podskup od X kompaktan u ovom topološkom prostoru, a K nije zatvoren jer je $K^C \neq \emptyset$ i $K^C \neq X$, to jest K^C nije otvoren.

Teorem 2.3.9.

Neka je $(X, \mathcal{T})$ Hausdorffov topološki prostor te neka je K kompaktan skup u ovom prostoru.

Tada je K zatvoren skup u $(X, \mathcal{T})$.

Dokaz. Ako je $K = \emptyset$, tvrdnja je jasna.

Pretpostavimo sada da je $K \neq \emptyset$. Dokažimo da je K^C otvoren u $(X, \mathcal{T})$.

Neka je $x \in K^C$. Tada za svaki $y \in K$ imamo $x \neq y$, pa postoje disjunktni otvoreni skupovi U_y i V_y takvi da je $x \in U_y$ i $y \in V_y$. Neka je

$$\mathcal{V} = \left\{ V_y \mid y \in K \right\}.$$

Tada je $\mathcal{V}$ otvoreni pokrivač od K u $(X, \mathcal{T})$. Budući da je K kompaktan skup, postoje $n \in \mathbb{N}$ i $y_1, \dots, y_n \in K$ takvi da je

$$K \subseteq V_{y_1} \cup \ldots \cup V_{y_n}. \tag{2.4}$$

Neka je $W = U_{y_1} \cap \ldots \cap U_{y_n}$. Tada je $W \in \mathcal{T}$, te je očito $x \in W$.

Dokažimo sada da je $W \subseteq K^C$.

Neka je $z \in W$. Pretpostavimo da je $z \in K$.

Iz (2.4) slijedi da je $z \in V_{y_i}$, gdje je $i \in \{1, \dots, n\}$. No $z \in W$ povlači da je $z \in U_{y_i}$. Ovo je u kontradikciji s činjenicom da su skupovi U_{y_i} i V_{y_i} disjunktni. Dakle, $z \notin K$, to jest $z \in K^C$. Ovime smo dokazali da je $W \subseteq K^C$.

Zaključak: Za svaki $x \in K^C$ postoji $W \in \mathcal{T}$ takav da je $x \in W \subseteq K^C$.
Iz leme 1.2.16 slijedi da je K^C otvoren skup. Prema tome K je zatvoren skup. □

Propozicija 2.3.10.

Neka su $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori te neka je $f : X \to Y$ neprekidna funkcija s obzirom na topologije $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$.

Neka je K kompaktan skup u $(X, \mathcal{T})$. Tada je $f(K)$ kompaktan skup u $(Y, \mathcal{S})$.

Dokaz. Neka je $\mathcal{V}$ otvoren pokrivač od $f(K)$ u topološkom prostoru $(Y, \mathcal{S})$. Neka je

$$\mathcal{U} = \left\{ f^{-1}(V) \mid V \in \mathcal{V} \right\}.$$

Dokažimo da je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač od K u $(X, \mathcal{T})$. Jasno je da je svaki element od $\mathcal{U}$ otvoren u $(X, \mathcal{T})$. Dokažimo još da je $K \subseteq \bigcup \mathcal{U}$.

Neka je $x \in K$. Tada je $f(x) \in f(K)$, pa postoji $V \in \mathcal{V}$ takav da je $f(x) \in V$, pa je $x \in f^{-1}(V)$. Dakle, $\mathcal{U}$ je pokrivač od K u $(X, \mathcal{T})$.
Budući da je K kompaktan u $(X, \mathcal{T})$, postoje $n \in \mathbb{N}$ i $V_1, \ldots, V_n \in \mathcal{V}$ takvi da je

$$K \subseteq f^{-1}(V_1) \cup \ldots \cup f^{-1}(V_n) .$$

Iz ovoga slijedi da je $f(K) \subseteq V_1 \cup \cdots \cup V_n$.

Zaključak: $f(K)$ je kompaktan u $(Y, \mathcal{S})$. □

Propozicija 2.3.11. *Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori pri čemu je $(X, \mathcal{T})$ kompaktan, a $(Y, \mathcal{S})$ Hausdorffov.*

Neka je $f : X \to Y$ funkcija neprekidna s obzirom na $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$. Tada je f zatvoreno preslikavanje.

Dokaz. Neka je F zatvoren skup u $(X, \mathcal{T})$. Po propoziciji 2.3.7, skup F je kompaktan u $(X, \mathcal{T})$. Prema propoziciji 2.3.10 skup $f(F)$ je kompaktan u $(Y, \mathcal{S})$. Stoga je $f(F)$ zatvoren u $(Y, \mathcal{S})$ (Teorem 2.3.9).

Prema tome f je zatvoreno preslikavanje. □

Definicija 2.3.12. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, neka je $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ niz u X, te neka je $a \in X$.*

*Kažemo da niz (x_n) **teži prema (konvergira k)** a ako za svaku otvorenu okolinu U točke a u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T})$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $x_n \in U$ $\forall n \geq n_0$.*
Ako (x_n) teži prema a, pišemo $x_n \to a$.

Definicija 2.3.13. *Neka je (X, d) metrički prostor, $a \in X$, te $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ niz u X.*

*Kažemo da niz (x_n) **teži prema (konvergira k)** a u metričkom prostoru (X, d) ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $d(a, x_n) < \epsilon$ za svaki $n \geq n_0$*

Propozicija 2.3.14. *Neka je (X, d) metrički prostor, $a \in X$ te $(x_n)_n$ niz u X.*

Tada niz $(x_n)_n$ teži prema a u metričkom prostoru (X, d) ako i samo ako $(x_n)_n$ teži prema a u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T}_d)$.

Dokaz.

Pretpostavimo da $x_n \to a$ u metričkom prostoru (X, d).

Neka je U okolina točke a u $(X, \mathcal{T}_d)$. To znači da je $a \in U$ i $U \in \mathcal{T}_d$. U je otvoren skup u (X, d), pa postoji $r > 0$ takav da $K(a, r) \subseteq U$. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da $x_n \in K(a, r)$, za svaki $n \geq n_0$.
Zaključujemo da je $x_n \in U$ $\forall n \geq n_0$.

Dakle, $x_n \to a$ u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T}_d)$.

Obratno, pretpostavimo da $x_n \to a$ u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T}_d)$.

Neka je $\epsilon > 0$. Tada je $K(a, \epsilon) \in \mathcal{T}_d$, pa je $K(a, \epsilon)$ otvorena okolina točke a u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T}_d)$. Stoga postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $x_n \in K(a, \epsilon)$ za svaki $n \geq n_0$. Ovo znači da je $d(a, x_n) < \epsilon$ za svaki $n \geq n_0$.

Dakle, $x_n \to a$ u metričkom prostoru (X, d). □

Ako $x_n \to a$ u nekom topološkom ili metričkom prostoru, onda za a kažemo da je **limes niza** (x_n) (u tom topološkom ili metričkom prostoru).

Primjer 2.3.15.

Neka je X neprazan skup, $a \in X$ te (x_p) niz u X. Tada niz $x_n \to a$ u topološkom prostoru $(X, \{\emptyset, X\})$.

Naime, jedina otvorena okolina točke a u ovom topološkom prostoru je X. Dakle, svaki niz u ovom topološkom prostoru konvergira prema svakoj točki.

Prethodni primjer pokazuje da limes niza u topološkom prostoru ne mora biti jedinstven.

Propozicija 2.3.16.

Neka je $(X, \mathcal{T})$ Hausdorffov topološki prostor, neka je (x_n) niz u X te neka su $a, b \in X$ takvi da $x_n \to a$ i $x_n \to b$.

Tada je $a = b$.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, to jest da $a \neq b$.

Tada postoje otvoreni disjunktni skupovi U i V takvi da je $a \in U, b \in V$. Skupovi U i V su očito otvorene okoline točaka a odnosno b.

Budući da $x_n \to a$, postoji $n_1 \in \mathbb{N}$ takav da $x_n \in U$ za svaki $n \geq n_1$.

Budući da $x_n \to b$, postoji $n_2 \in \mathbb{N}$ takav da $x_n \in V$ za svaki $n \geq n_2$.

Neka je $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Slijedi da je $x_{n_0} \in U$ i $x_{n_0} \in V$, no to je u kontradikciji sa činjenicom da su U i V disjunktni.

Zaključujemo da je $a = b$. □

Prethodna propozicija kaže da je u Hausdorffovom prostoru limes niza, ako postoji, jedinstven.

Definicija 2.3.17.

*Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, (x_n) niz u X te $a \in X$. Kažemo da je a **gomilište niza** (x_n) **u topološkom prostoru** $(X, \mathcal{T})$ ako za svaku otvorenu okolinu U točke a i za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $m \in \mathbb{N}, m \geq n$ takav da je $x_m \in U$.*

*Ako je (X, d) metrički prostor, (x_n) niz u X te $a \in X$, onda za a kažemo da je **gomilište niza** (x_n) **u metričkom prostoru** (X, d) ako je a gomilište niza (x_n) u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T}_d)$.*

Uočimo sljedeće:
Ako je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, (x_n) niz u X te $a \in X$ takav da $x_n \to a$ onda je a gomilište niza (x_n).

Teorem 2.3.18. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ kompaktan topološki prostor te neka je (x_n) niz u X.*
Tada je (x_n) ima gomilište u $(X, \mathcal{T})$, to jest postoji $a \in X$ takav da je a gomilište od (x_n).

Dokaz.
Pretpostavimo suprotno. Neka je $a \in X$.
Tada a nije gomilište niza (x_n), pa postoji otvorena okolina U_a točke a u $(X, \mathcal{T})$ i $n_a \in \mathbb{N}$ takvi da ne postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je

$$m \geq n_a \text{ i } x_m \in U_a.$$

To znači da za svaki $m \in \mathbb{N}$ takav da je $m \geq n_a$ vrijedi $x_m \notin U_a$.

Neka je $\mathcal{U} = \{U_a \mid a \in X\}$.
Tada je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač od $(X, \mathcal{T})$. Budući da je $(X, \mathcal{T})$ kompaktan, postoje $k \in \mathbb{N}$ i $a_1, \ldots, a_k \in X$ takvi da

$$X = U_{a_1} \cup \ldots \cup U_{a_k}. \tag{2.5}$$

Neka je $n = \max\{n_{a_1}, \ldots, n_{a_k}\}$. Tada je $n \geq n_{a_1}, \ldots, n \geq n_{a_k}$, pa imamo da $x_n \notin U_{a_1}, \ldots, x_n \notin U_{a_k}$.
Dakle, $x_n \notin U_{a_1} \cup \ldots \cup U_{a_k}$, što je u kontradikciji sa (2.5) jer je $x_n \in X$.

Zaključak: Niz (x_n) ima gomilište u $(X, \mathcal{T})$. □

Definicija 2.3.19. *Neka je (X, d) metrički prostor te $S \subseteq X$.*
Za skup S kažemo da je ***omeđen u metričkom prostoru*** *(X, d) ako postoje $x_0 \in X$ i $r > 0$ takvi da je $S \subseteq K(x_0, r)$.*

Propozicija 2.3.20. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je S omeđen skup u (X, d). Neka je $x \in X$.*
Tada postoji $r > 0$ takav da je $S \subseteq K(x, r)$.

Dokaz.
Budući da je S omeđen, postoje $x_0 \in X$ i $r_0 > 0$ takvi da je $S \subseteq K(x_0, r)$. Neka je $r = r_0 + d(x, x_0)$. Tvrdimo da je $K(x_0, r_0) \subseteq K(x, r)$.
Neka je $y \in K(x_0, r_0)$. Tada je $d(x_0, y) < r_0$. Imamo

$$d(x, y) \leq d(x, x_0) + d(x_0, y) < d(x, x_0) + r_0 = r\ .$$

Dakle, $d(x, y) < r$, to jest, $y \in K(x, r)$.
Prema tome, $K(x_0, r_0) \subseteq K(x, r)$, pa je $S \subseteq K(x, r)$. □

Korolar 2.3.21.

Neka su $(X,\mathcal{T})$ i $(Y,\mathcal{S})$ topološki prostori te neka je $f : X \to Y$ surjekcija neprekidna s obzirom na topologije $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$. Pretpostavimo da je $(X,\mathcal{T})$ kompaktan, a $(Y,\mathcal{S})$ Hausdorffov.

Tada je $\overline{f} : X/f \to Y$ homeomorfizam (s obzirom na $\mathcal{T}_f$ i $\mathcal{S}$).

Dokaz. Ovo slijedi iz propozicije 2.3.11 i korolara 2.2.23. □

Definicija 2.3.22.

Neka je $n \in \mathbb{N}$ te neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}^n$. Neka je $S \subseteq \mathbb{R}^n, S \neq \emptyset$. Očito je $d|_{S\times S} : S \times S \to \mathbb{R}$ metrika na S.

*Za $d|_{S\times S}$ kažemo da je **euklidska metrika** na S.*

*Za topologiju induciranu euklidskom metrikom na S kažemo da je **euklidska topologija** na S.*

Propozicija 2.3.23. *Neka je $n \in \mathbb{N}$ te neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}^n$. Neka je (X,p) metrički prostor, $x_0 \in X$ te $f : X \to \mathbb{R}^n$ funkcija.*

Neka su $f_1,\dots,f_n : X \to \mathbb{R}^n$ komponentne funkcije od f, to jest funkcije takve da je $f(x) = (f_1(x),\dots,f_n(x))$.

Tada je f neprekidna ako i samo ako su funkcije $f_1,\dots,f_n$ neprekidne u x_0.

Dokaz.

Pretpostavimo da je f neprekidna u x_0.
Neka je $i \in \{1,\dots,n\}$. Neka je $x \in X$.

Tada je

$$|f_i(x) - f_i(x_0)| \leq \sqrt{(f_1(x) - f_1(x_0))^2 + \cdots + (f_n(x) - f_n(x_0))^2},$$

to jest

$$|f_i(x) - f_i(x_0)| \leq d(f(x), f(x_0)). \tag{2.6}$$

Neka je $\epsilon > 0$. Budući da je f neprekidna u x_0, postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $x \in X$ vrijedi

$$p(x,x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x_0)) < \epsilon.$$

Iz (2.6) zaključujemo da za svaki $x \in X$ vrijedi

$$p(x,x_0) < \delta \Rightarrow |f_i(x) - f_i(x_0)| < \epsilon.$$

Zaključak: funkcija f_i je neprekidna u x_0.

Obratno, pretpostavimo da su $f_1, \dots, f_n$ neprekidne u x_0.
Neka je $\epsilon > 0$.

Tada za svaki $i \in \{1, \dots, n\}$ postoji $\delta_i > 0$ takav da za svaki $x \in X$ vrijedi

$$p(x, x_0) < \delta_i \Rightarrow \mid f_i(x) - f_i(x_0) \mid < \frac{\epsilon}{\sqrt{n}}.$$

Neka je $\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_n\}$. Tada za svaki $x \in X$ takav da je $p(x, x_0) < \delta$ vrijedi

$$d(f(x), f(x_0)) = \sqrt{(f_1(x) - f_1(x_0))^2 + \cdots + (f_n(x) - f_n(x_0))^2} <$$
$$< \sqrt{\frac{\epsilon^2}{n} + \cdots + \frac{\epsilon^2}{n}} = \epsilon.$$

Dakle, za svaki $x \in X$ vrijedi

$$p(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x_0)) < \epsilon.$$

Prema tome, f je neprekidna u x_0. □

2.4 Primjeri

Uvodimo oznaku za jediničnu kružnicu $S^1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\right\}$.

Uzmemo li konopac i spojimo krajeve, dobit ćemo objekt sličan kružnici.
U sljedećem primjeru dajemo precizan smisao izjavi da *identificiranjem krajnjih točaka segmenta dobivamo kružnicu.*

Primjer 2.4.1.
Neka je $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *funkcija definirana sa* $h(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$.

Iz prethodne propozicije slijedi da je h neprekidna funkcija s obzirom na pripadne euklidske metrike. Stoga je funkcija $g : \mathbb{R} \to S^1$ *definirana sa* $g(x) = h(x)$ *neprekidna s obzirom na euklidske metrike na* $\mathbb{R}$ *i d, gdje je d euklidska metrika na* S^1.

Iz ovoga slijedi da je funkcija $f : [0, 1] \to S^1$ *definirana sa* $f(x) = g(x)$ *neprekidna s obzirom na metrike p i d, gdje je p euklidska metrika na* $[0, 1]$.
Za svaki $x \in [0, 1]$ *vrijedi* $f(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$.

Uočimo da je f surjekcija. Imamo da je f neprekidna s obzirom na topologije $\mathcal{T}_p$ i $\mathcal{T}_d$.

Sada koristimo činjenicu da je topološki prostor $([0, 1], \mathcal{T}_p)$ kompaktan. (Dokaz se može naći u knjizi Sutherland, Introduction to metric and topological spaces [3].)
Očito je da je $(S^1, \mathcal{T}_d)$ Hausdorffov.

Iz korolara 2.3.21 slijedi da je $\overline{f} : [0, 1]/f \to S^1$ homeomorfizam (s obzirom na $(\mathcal{T}_p)_f$ i $\mathcal{T}_d$). Neka je $\mathcal{E} = \mathcal{T}_p$ i $\mathcal{E}' = \mathcal{T}_d$. Dakle, $\mathcal{E}$ je euklidska topologija na $[0, 1]$, a $\mathcal{E}'$ je euklidska topologija na S^1.

Imamo sljedeći zaključak: $\Big([0, 1]/f, \mathcal{E}_f\Big) \cong \Big(S^1, \mathcal{E}'\Big)$.

Neka je $\mathcal{F} = \{ \{t\} \mid t \in \langle 0, 1\rangle \} \cup \{ \{0, 1\} \}$.
Uočimo da je $[0, 1]/f = \mathcal{F}$. Stoga je $\mathcal{E}_f = \mathcal{E}_{\mathcal{F}}$.

Prema tome, $(\mathcal{F}, \mathcal{E}_{\mathcal{F}}) \cong \Big(S^1, \mathcal{E}'\Big)$.

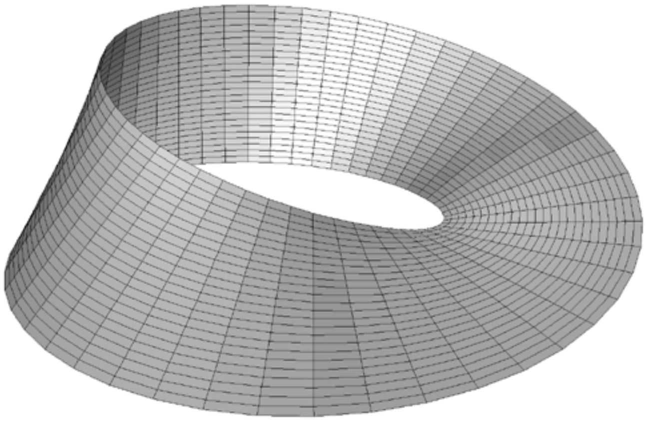
U sljedećim primjerima istražujemo neke matematičke objekte koji se mogu zorno prikazati (ili čiji model možemo konstruirati) lijepljenjem rubova pravokutnog komada papira.

Primjer 2.4.2.
Neka je $X = [0, 1] \times [0, 1]$ *te neka je* $\mathcal{E}$ *euklidska topologija na* X.
Neka je

$$\mathcal{F} = \{ \{(t, s)\} \mid t \in \langle 0, 1\rangle, s \in [0, 1] \} \cup \{ \{(0, s), (1, 1 - s)\} \mid s \in [0, 1] \} .$$

Tada je $\mathcal{F}$ *particija od* X.
Za topološki prostor $(\mathcal{F}, \mathcal{E}_{\mathcal{F}})$ *kažemo da je* ***Möbiusova vrpca***.

Rezultat je moguće prikazati u trodimenzionalnom euklidskom prostoru.



Slika 2.1: Preuzeto sa `http://paulbourke.net` [1]

Primjer 2.4.3.

Neka je $X = [0,1] \times [0,1]$ *te neka je* $\mathcal{E}$ *euklidska topologija na* X.

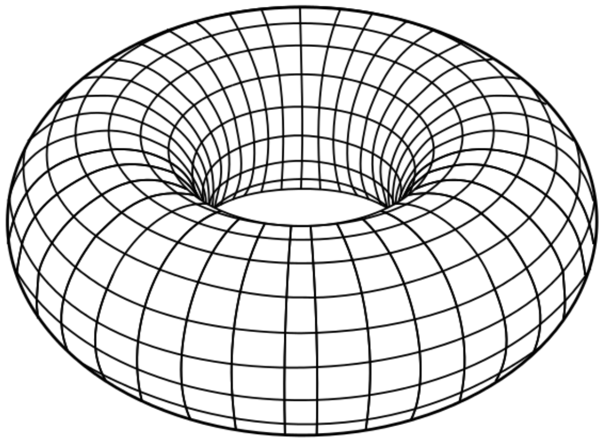
Neka je

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &= \{\, \{(t,s)\} \mid t \in \langle 0,1\rangle, s \in \langle 0,1\rangle \,\} \cup \\ &\cup \{\, \{(0,s),(1,s)\} \mid s \in \{0,1\} \,\} \cup \{\, \{(t,0),(t,1)\} \mid t \in \{0,1\} \,\} \cup \\ &\cup \{\, \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\} \,\}\,.\end{aligned}$$

Tada je $\mathcal{F}$ *particija od* X.

Za topološki prostor $(\mathcal{F}, \mathcal{E}_{\mathcal{F}})$ *kažemo da je* ***torus***.

Parametrizacija torusa u trodimenzionalnom prostoru izgleda ovako:



Slika 2.2: Preuzeto sa `http://commons.wikimedia.org/`

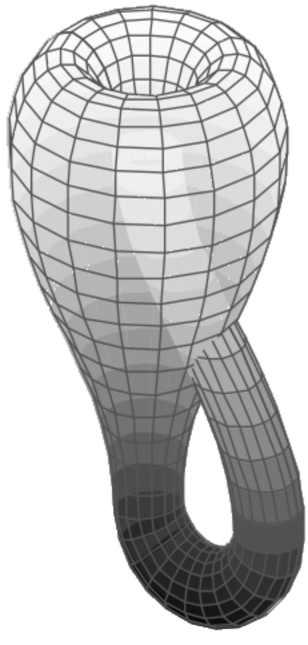
Pokušajmo sada papir zalijepiti malo drugačije. Okrenimo smjer identificiranja dvije nasuprotne stranice.

Primjer 2.4.4.
Neka je $X = [0,1] \times [0,1]$ *te neka je* $\mathcal{E}$ *euklidska topologija na* X.
Neka je

$$\begin{aligned}\mathcal{F} = &\{\, \{(t,s)\} \mid t \in \langle 0,1\rangle, s \in \langle 0,1\rangle \,\} \cup \\ &\cup \{\, \{(0,s),(1,1-s)\} \mid s \in \{0,1\} \,\} \cup \{\, \{(t,0),(t,1)\} \mid t \in \{0,1\} \,\} \cup \\ &\cup \{\, \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\} \,\}.\end{aligned}$$

Tada je $\mathcal{F}$ *particija od* X.
Za topološki prostor $(\mathcal{F}, \mathcal{E}_{\mathcal{F}})$ *kažemo da je* ***Kleinova boca***.

Pokušaj parametrizacije Kleinove boce u tri dimenzije izgleda ovako.



Slika 2.3: Preuzeto sa `http://en.wikipedia.org/wiki/Klein_bottle` [4]

Uočimo da u slučaju torusa i Kleinove boce identificiramo dva para paralelnih stranica kvadrata $[0,1] \times [0,1]$. Kod torusa, oba para stranica identificiramo u istom smjeru, dok kod Kleinove boce jedan par stranica identificiramo u suprotnim smjerovima. Također, točke u kutu pravokutnika smo ostavili za kraj i sve ih želimo slijepiti zajedno.

Bibliografija

[1] Paul Bourke, *Möbius (Moebius) strip*, http://paulbourke.net/geometry/mobius/, (kolovoz 2015.).

[2] C. O. Christenson i W. L. Voxman, *Aspects of Topology*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1977.

[3] W. A. Sutherland, *Introduction to metric and topological spaces*, Oxford University Press, 1975.

[4] Wikipedia, *Klein bottle — Wikipedia, The Free Encyclopedia*, http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Klein_bottle&oldid=678207335, (kolovoz 2015.).

Sažetak

U radu su istražena svojstva topoloških prostora kojima je topologija inducirana kvocijentnim preslikavanjem.

Ispitani su dovoljni uvjeti (korolar 2.3.21) na prostore X i Y te funkciju $f : X \to Y$ da inducirano preslikavanje $\overline{f}$ bude homeomorfizam.

Na primjeru kružnice uočeno je da kvocijentna topologija $\mathcal{F}$ ukazuje na izbor točaka koje se identificiraju ili "spajaju". Ostali primjeri (Möbiusova vrpca, torus i Kleinova boca) su konstruirani direktno, zadavanjem kvocijentne topologije.

Summary

This paper investigates the properties of topological spaces where the topology is induced by a quotient map.

Sufficient conditions on spaces X and Y and a map $f : X \to Y$ so that the induced map $\overline{f}$ is a homeomorphism are found. (Corollary 2.3.21) .

The example with a circle shows that quotient topology $\mathcal{F}$ indicates the choice of the points to be identified or ”glued” together. Other examples (Möbius strip, torus and Klein bottle) are constructed directly, by giving the quotient topology.

Životopis

Rođen sam 29.1.1985. u Zagrebu. Osnovnu školu Jordanovac završio sam 1999. godine i upisao prirodoslovno-matematički smjer III gimnazije u Zagrebu. Nakon mature 2003. godine upisujem studij matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. Nastavnički smjer preddiplomskog studija matematike upisujem 2008. godine, a 2011. diplomski sveučilišni studij Matematika i informatika smjer: nastavnički.

Završio sam nižu glazbenu školu Elly Bašić glavni predmet violina. Pjevao sam u nekoliko pjevačkih zborova i svirao u gudačem ansamblu.