SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Marija Tomić Kruljac

METRIČKA RAVNINA

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Zvonko Iljazović

Zagreb, lipanj 2015.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Metrička ravnina je jedna apstraktna struktura u kojoj su propisana osnovna svojstva njenim aksiomima. Pri tome su ključni pojmovi točka, pravac te metrika, tj. funkcija udaljenosti između točaka.

U prvom poglavlju definiramo neke osnovne pojmove zatim pojmove pravca, ravnine, Paschove ravnine i poluravnine te proučavamo neka njihova svojstva.

U drugom poglavlju pojam ravnine nadograđujemo na pojam metričke ravnine. Bavimo se nekim svojstvima metričke ravnine te posebno proučavamo izometrije metričke ravnine.

U trećem poglavlju bavimo se općenitim pojmom metričkog prostora te proučavamo otvorenost i zatvorenost skupova u metričkom prostoru te posebno u metričkoj ravnini. Na kraju proučavamo veze između udaljenosti točaka i aproksimacije dužine.

Poglavlje 1

Ravnina

1.1 Binarne relacije

Neka je S skup. Neka je ρ podskup od $S \times S$. Tada za ρ kažemo da je **binarna relacija** na skupu S. Dakle, binarna relacija na skupu S je skup čiji su elementi uređeni parovi oblika (x, y), gdje su $x, y \in S$.

Neka je ρ binarna relacija na skupu S.

Za ρ kažemo da je **refleksivna** relacija na S ako je $(x, x) \in \rho$, za svaki $x \in S$.

Za ρ kažemo da je **simetrična** relacija na S ako za sve $x, y \in S$ takve da je $(x, y) \in \rho$ vrijedi da je $(y, x) \in \rho$.

Za ρ kažemo da je **tranzitivna** relacija na S ako za sve $x, y, z \in S$ takve da je $(x, y) \in \rho$ i $(y, z) \in \rho$ vrijedi da je $(x, z) \in \rho$.

Za ρ kažemo da je **antisimetrična** relacija na S ako za sve $x, y \in S$ takve da je $(x, y) \in \rho$ i $(y, x) \in \rho$ vrijedi da je $x = y$.

Uočimo: relacija ρ je antisimetrična na S ako i samo ako ne postoje $x, y \in S$ takvi da je $x \neq y$, $(x, y) \in \rho$ i $(y, x) \in \rho$.

Ako je ρ refleksivna, simetrična i tranzitivna relacija na S onda kažemo da je S **relacija ekvivalencije** na S.

Ako je ρ refleksivna, antisimetrična i tranzitivna relacija na S onda kažemo da je S **relacija parcijalnog uređaja** ili **parcijalni uređaj** na S.

Ako je ρ relacija parcijalnog uređaja na S koja ima svojstvo da za sve $x, y \in S$ vrijedi $(x, y) \in \rho$ ili $(y, x) \in \rho$, onda za ρ kažemo da je **relacija uređaja** ili **uređaj** na S.

Neka je ρ binarna relacija na skupu S. Definiramo

$$\overline{\rho} = \{(x, y) \in S \times S \mid (y, x) \in \rho\}.$$

Očito je $\overline{\rho}$ binarna relacija na S.
Za $\overline{\rho}$ kažemo da je binarna relacija suprotna relaciji ρ.
Uočimo: ako je ρ refleksivna relacija na S onda je i $\overline{\rho}$ refleksivna relacija na S.

Pretpostavimo da je ρ antisimetrična relacija na S. Neka su $x, y \in S$ takvi da je $(x, y) \in \overline{\rho}$ i $(y, x) \in \overline{\rho}$. Tada je $(y, x) \in \rho$ i $(x, y) \in \rho$ pa je $x = y$ jer je ρ antisimetrična relacija. Time smo dokazali da je i $\overline{\rho}$ antisimetrična relacija na S.
Pretpostavimo sada da je ρ tranzitivna relacija na S. Neka su $x, y, z \in S$ takvi da je $(x, y) \in \overline{\rho}$ i $(y, z) \in \overline{\rho}$. Tada je $(y, x) \in \rho$ i $(z, y) \in \rho$. Dakle, $(z, y) \in \rho$ i $(y, x) \in \rho$ pa je $(z, x) \in \rho$. Stoga je $(x, z) \in \overline{\rho}$. Ovime smo dokazali da je $\overline{\rho}$ tranzitivna relacija na S.

Imamo sljedeći zaključak: ako je ρ parcijalni uređaj na S, onda je i $\overline{\rho}$ parcijalni uređaj na S. Ako za sve $x, y \in S$ vrijedi $(x, y) \in \rho$ ili $(y, x) \in \rho$ onda za sve $x, y \in S$ vrijedi $(y, x) \in \overline{\rho}$ ili $(x, y) \in \overline{\rho}$. Prema tome, ako je ρ uređaj na S, onda je i $\overline{\rho}$ uređaj na S.

Neka su ρ i ρ' uređaji na S takvi da je $\rho' = \overline{\rho}$. Tada kažemo da su ρ i ρ' međusobno **suprotni uređaji** na S.

Propozicija 1.1.1. *Neka su ρ i ρ' međusobno suprotni uređaji na nekom skupu S. Neka su x i $y \in S$, $x \neq y$. Tada vrijedi $((x, y) \in \rho$ i $(x, y) \notin \rho')$ ili $((x, y) \in \rho'$ i $(x, y) \notin \rho)$.*

Dokaz. Znamo da je $(x, y) \in \rho$ ili $(y, x) \in \rho$ (jer je ρ uređaj).

1. slučaj: $(x, y) \in \rho$. Tvrdimo $(x, y) \notin \rho'$. Pretpostavimo suprotno, tj. $(x, y) \in \rho'$. Dakle, $(x, y) \in \overline{\rho}$ pa je $(y, x) \in \rho$. Ovo zajedno sa $(x, y) \in \rho$ povlači da je $x = y$. Ovo je u kontradikciji s pretpostavkom propozicije da je $x \neq y$. Dakle, $(x, y) \notin \rho'$. Prema tome, u 1. slučaju vrijedi tvrdnja propozicije.

2. slučaj: $(y, x) \in \rho$. Tada je $(x, y) \in \overline{\rho}$, tj. $(x, y) \in \rho'$. Tvrdimo da $(x, y) \notin \rho$. Pretpostavimo suprotno, tj. $(x, y) \in \rho$. Budući da je relacija ρ antisimetrična imamo $x = y$. Kontradikcija. Prema tome, $(x, y) \notin \rho$. Time je tvrdnja propozicije dokazana i u drugom slučaju.

$\square$

1.2 Pravac

Neka je S skup te neka su ρ i ρ' međusobno suprotni uređaji na S. Tada za uređeni par $(S, \{\rho, \rho'\})$ kažemo da je **pravac**. Za S kažemo da je **nosač pravca** $(S, \{\rho, \rho'\})$. Neka je

$(S, \{\rho, \rho'\})$ pravac. Neka su $x, y \in S$. Definirajmo podskup $\overline{xy}$ od S na sljedeći način. Ako je $x = y$, neka je $\overline{xy} = \{x\}$. Ako je $x \neq y$, onda postoji jedinstveni element $\leq$ od $\{\rho, \rho'\}$ takav da je $x \leq y$ (propozicija 1.1.1).
Definiramo $\overline{xy} = \{z \in S \mid x \leq z \leq y\}$. Za skup $\overline{xy}$ kažemo da je **dužina** (ili **segment**) određena točkama x, y u pravcu $(S, \{\rho, \rho'\})$. Uočimo da su $x, y \in \overline{xy}$.

Propozicija 1.2.1. *Neka je $(S, \{\rho, \rho'\})$ pravac te neka su $x, y \in S$. Tada je $\overline{xy} = \overline{yx}$.*

Dokaz. Ako je $x = y$, tvrdnja je jasna.
Pretpostavimo da je $x \neq y$. Neka je $\leq\, \in \{\rho, \rho'\}$ takav da je $x \leq y$. Tada je $\overline{xy} = \{z \in S \mid x \leq z \leq y\}$. Iz $x \leq y$ slijedi da je $y \mathrel{\overline{\leq}} x$. Očito je $\overline{\leq}\, \in \{\rho, \rho'\}$ pa po definiciji skupa $\overline{yx}$ vrijedi $\overline{yx} = \{z \in S \mid y \mathrel{\overline{\leq}} z \mathrel{\overline{\leq}} x\}$. Neka je $z \in \overline{xy}$. Tada je $x \leq z \leq y$ pa je $y \mathrel{\overline{\leq}} z \mathrel{\overline{\leq}} x$ pa je $z \in \overline{yx}$. Dakle, $\overline{xy} \subseteq \overline{yx}$.
Analogno dobivamo $\overline{yx} \subseteq \overline{xy}$. Prema tome $\overline{xy} = \overline{yx}$. □

Napomena 1.2.2. *Neka je (S, l) pravac. Neka su $x, y \in S$ te neka je $\leq\, \in l$ takav da je $x \leq y$. Tada je $\overline{xy} = \{z \in S \mid x \leq z \leq y\}$. Ovo je očito ako je $x \neq y$.*

Ako je $x = y$ onda je $\overline{xy} = \{x\}$, a jedina točka $z \in S$ takva da je $x \leq z \leq x$ je upravo $z = x$.
Neka je $\leq$ uređaj na skupu S. Tada ćemo sa $<$ označavati binarnu relaciju na S definiranu sa $x < y$ ako je $x \leq y$ i $x \neq y$.
Uočimo sljedeće: ako su $x, y, z \in S$ takvi da je $x \leq y$ i $y < z$, onda je $x < z$. Naime, iz $x \leq y$ i $y \leq z$ slijedi $x \leq z$.
Pretpostavimo da je $x = z$. Tada imamo $x \leq y$ i $y < x$ pa iz antisemitričnosti relacije $\leq$ slijedi $x = y$ što je u kontradikciji sa $y < x$. Dakle, $x \neq z$. Stoga je $x < z$.

Posve analogno dobivamo $x < y$ i $y \leq z$ povlači $x < z$.

Propozicija 1.2.3. *Neka je (S, l) pravac te neka su $x, y, z \in S$. Tada je $x \in \overline{yz}$ ili $y \in \overline{xz}$ ili $z \in \overline{xy}$.*

Dokaz. Neka je $\leq\, \in l$ takav da je $x \leq y$. Budući da je $\leq$ uređaj na S, vrijedi $z \leq x$ ili $x \leq z$.

1. slučaj: $z \leq x$.
   Tada je $z \leq x \leq y$, posebno $z \leq y$ pa iz napomene 1.2.2 slijedi da je $x \in \overline{zy}$.

2. slučaj $x \leq z$.
   Vrijedi $z \leq y$ ili $y \leq z$.

   a) $z \leq y$.
      Tada je $x \leq z \leq y$ pa je prema napomeni 1.2.2 $z \in \overline{xy}$.

b) $y \leq z$.
Tada je $x \leq y \leq z$ pa je prema napomeni 1.2.2 $y \in \overline{xz}$.

□

Definicija 1.2.4. *Neka je (S, l) pravac. Neka su $x, y \in S$. Definiramo*

$$\langle x, y \rangle = \overline{xy} \setminus \{x, y\}.$$

Kažemo da je $\langle x, y \rangle$ ***otvorena dužina*** *(ili* ***otvoreni segment****) određena točkama x, y u pravcu (S, l).*

Lema 1.2.5. *Neka je (S, l) pravac, te neka je $z \in \overline{xy}$ takav da je $z \neq x$. Tada $x \notin \overline{zy}$.*

Dokaz. Neka je $\leq \in l$ takav da je $x \leq y$. Iz $z \in \overline{xy}$ i napomene 1.2.2 slijedi $x \leq z \leq y$. Pretpostavimo da je $x \in \overline{zy}$. Iz $z \leq y$ i napomene 1.2.2 slijedi $z \leq x \leq y$. Sada iz $z \leq x$ i $x \leq z$ slijedi $z = x$ što je u kontradikciji s pretpostavkom da je $z \neq x$.
Prema tome $x \notin \overline{zy}$. □

Lema 1.2.6. *Neka je (S, l) pravac, te neka su $x, y, z \in S$ takvi da je $z \in \overline{xy}$. Neka je $u \in \overline{zy}$. Tada je $z \in \overline{xu}$.*

Dokaz. Neka je $\leq \in l$ takav da je $x \leq y$. Iz $z \in \overline{xy}$ slijedi $x \leq z \leq y$. Iz $u \in \overline{zy}$ slijedi $z \leq u \leq y$. Stoga je $x \leq z \leq u$ pa je $z \in \overline{xu}$. □

Propozicija 1.2.7. *Neka je (S, l) pravac te neka su $x, y, x', y' \in S$ takvi da je $\overline{xy} = \overline{x'y'}$. Tada je $x = x'$ i $y = y'$ ili $x = y'$ i $y = x'$.*

Dokaz. Neka je $\leq \in l$ takav da je $x \leq y$. Imamo $x', y' \in \overline{x'y'} = \overline{xy}$, dakle $x', y' \in \overline{xy}$ pa prema napomeni 1.2.2, vrijedi $x \leq x' \leq y$ i $x \leq y' \leq y$. Vrijedi $x' \leq y'$ ili $y' \leq x'$.

1. slučaj: $x' \leq y'$.
   Iz $x, y \in \overline{x'y'}$ i napomene 1.2.2 slijedi $x' \leq x$ i $y \leq y'$. Iz anitisimetričnosti relacije $\leq$ slijedi $x = x'$ i $y = y'$.

2. slučaj $y' \leq x'$.
   Iz $x, y \in \overline{x'y'} = \overline{y'x'}$ slijedi $y' \leq x$ i $y \leq x'$ pa iz antisimetričnosti relacije $\leq$ slijedi $x = y'$ i $y = x'$.

□

Neka je p pravac. Dakle $p = (S, l)$, gdje je S skup, a l skup koji se sastoji od dva međusobno suprotna uređaja na S. Tada ćemo sa $\overline{p}$ označavati skup S, tj. nosač od p, a s $\hat{p}$ skup l. Dakle, ako je $p = (S, l)$ pravac onda je $\overline{p} = S$, $\hat{p} = l$.

1.3 Ravnina

Definicija 1.3.1. *Neka je M skup te neka je $\mathcal{L}$ neprazan skup pravaca sa sljedećim svojstvima:*

(i) Ako je $p \in \mathcal{L}$ onda je $\overline{p} \subseteq M$ i skup $\overline{p}$ ima barem dva elementa.

(ii) Za sve $A, B \in M, A \neq B$ postoji jedinstveni $p \in \mathcal{L}$ takav da su $A, B \in \overline{p}$.

(iii) Postoje $A, B, C \in M$ za koje ne postoji $p \in \mathcal{L}$ takav da su $A, B, C \in \overline{p}$.
Tada za uređeni par $(M, \mathcal{L})$ kažemo da je ***ravnina****.*

Napomena 1.3.2. *Neka je $(M, \mathcal{L})$ ravnina te neka su $p, q \in \mathcal{L}$ takvi da je $\overline{p} = \overline{q}$. Tada je $p = q$. Naime, prema svojstvu (i) iz definicije ravnine postoje $A, B \in M$ takvi da je $A \neq B$ i $A, B \in \overline{q}$ pa iz definicije ravnine slijedi da je $p = q$.*

Propozicija 1.3.3. *Neka je $(M, \mathcal{L})$ ravnina te neka je $A \in M$. Tada postoji $p \in \mathcal{L}$ takav da je $A \in \overline{p}$.*

Dokaz. Ako postoji $B \in M$ takav da je $B \neq A$ onda prema svojstvu (ii) iz definicije ravnine 1.3.1 slijedi da postoji $p \in \mathcal{L}$ takav da su

$$A, B \in \overline{p}.$$

Stoga je dovoljno dokazati da postoji takva točka B. U tu svrhu dovoljno je dokazati da skup M ima barem dva različita elementa. Prema definiciji ravnine 1.3.1 postoji $p \in \mathcal{L}$ te također vrijedi da $\overline{p}$ ima barem dva elementa i $\overline{p} \subseteq M$. Dakle, M ima bar dva elementa. □

Definicija 1.3.4. *Neka je $(M, \mathcal{L})$ ravnina. Neka su $A, B \in M$. Definiramo skup $\overline{AB}$ na sljedeći način. Ako je $A = B$, neka je $\overline{AB} = \{A\}$. Ako je $A \neq B$, neka je $p \in \mathcal{L}$ takav da su $A, B \in \overline{p}$. Definiramo $\overline{AB}$ kao dužinu $\overline{AB}$ u pravcu p.*

Za ovako definiran skup $\overline{AB}$ kažemo da je ***dužina (segment)*** *određena točkama A i B u ravnini $(M, \mathcal{L})$.*

Uočimo sljedeće: ako je $(M, \mathcal{L})$ ravnina, $p \in \mathcal{L}$ te $A, B \in \overline{p}$, onda je dužina $\overline{AB}$ u ravnini $(M, \mathcal{L})$ jednaka dužini $\overline{AB}$ u pravcu p. Posebno,

$$\overline{AB} \subseteq \overline{p}.$$

Neka je $(M, \mathcal{L})$ ravnina. Tada za elemente od $\mathcal{L}$ kažemo da su pravci u ravnini $(M, \mathcal{L})$.

Neka je $(M, \mathcal{L})$ ravnina, $p \in \mathcal{L}$ te $S \subseteq M$. Kažemo da **pravac** p **siječe** S ako $\overline{p}$ siječe S, tj. ako je $\overline{p} \cap S \neq \emptyset$.

Definicija 1.3.5. *Neka je $(M, \mathcal{L})$ ravnina, neka je $p \in \mathcal{L}$ te $A \in M$. Za p kažemo da* ***prolazi točkom*** *A ili da* ***točka A leži na*** *p ako je $A \in \overline{p}$.*

Definicija 1.3.6. *Neka je $(M, \mathcal{L})$ ravnina te neka su $A, B, C \in M$. Kažemo da su A, B i C* ***kolinearne točke*** *u $(M, \mathcal{L})$ ako postoji pravac u toj ravnini na kojem te točke leže. Za točke A, B, C kažemo da su nekolinearne ako nisu kolinearne.*

Uočimo da iz definicije ravnine 1.3.1 slijedi da u svakoj ravnini postoje tri nekolinearne točke.

Neka je $(M, \mathcal{L})$ ravnina te neka su $A, B \in M, A \neq B$. Tada postoji jedinstveni pravac p u toj ravnini takav da su $A, B \in \overline{p}$. Pravac p ćemo označavati sa $\widetilde{AB}$, a skup $\overline{p}$ ćemo označavati AB. Dakle, $\overline{\widetilde{AB}} = AB$.

Uočimo sljedeće: ako je $(M, \mathcal{L})$ ravnina te ako su A, B i C nekolinearne točke u toj ravnini, onda je $A \neq B, A \neq C$ i $B \neq C$.

Propozicija 1.3.7. *Neka je $(M, \mathcal{L})$ ravnina te neka su A, B i C nekolinearne točke u toj ravnini. Tada je $AB \cap AC = \{A\}$*

Dokaz. Očito je $\{A\} \subseteq AB \cap AC$.
Obratno, neka je $D \in AB \cap AC$. Pretpostavimo da je $D \neq A$. Imamo $A, D \in AB$ i $A, D \in AC$. Slijedi da je $\widetilde{AB} = \widetilde{AC}$ pa je $AB = AC$. Slijedi $A, B, C \in AB$. Ovo znači da su točke A, B, C kolinearne. Kontradikcija. Dakle $D = A$, tj. $D \in \{A\}$. □

1.4 Paschova ravnina

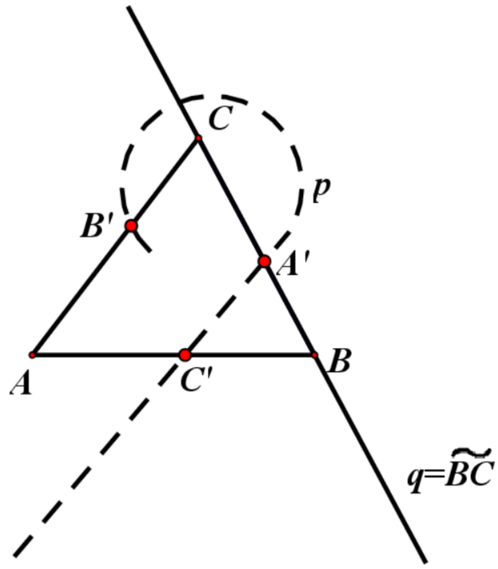
Definicija 1.4.1. *Neka je $(M, \mathcal{L})$ ravnina koja ima sljedeće svojstvo (**Paschov aksiom**): kad god su $A, B, C \in M$ i $p \in \mathcal{L}$ takvi da p siječe $\overline{AB}$, onda p siječe $\overline{AC}$ ili $\overline{BC}$. Tada za $(M, \mathcal{L})$ kažemo da je **Paschova ravnina**.*

Propozicija 1.4.2. *Neka je $(M, \mathcal{L})$ Paschova ravnina te neka su $A, B, C \in M$ te $p \in \mathcal{L}$ takvi da p ne prolazi niti jednom od točaka A, B i C. Tada p ne siječe sve tri dužine $\overline{AB}, \overline{AC}$ i $\overline{BC}$.*

Dokaz. Promotrimo prvo slučaj kada su točke A, B i C nekolinearne.
Pretpostavimo suprotno, tj. da p siječe sve tri navedene dužine.

Neka su A', B', C' točke takve da je $A' \in \overline{BC} \cap \overline{p}, B' \in \overline{AC} \cap \overline{p}, C' \in \overline{AB} \cap \overline{p}$.

Imamo $A', B', C' \in \overline{p}$. Prema propoziciji 1.2.3 slijedi $A' \in \overline{B'C'}$ ili $B' \in \overline{A'C'}$ ili $C' \in \overline{A'B'}$.



Slika 1.1: presjek pravca p i dužina $\overline{AB}, \overline{BC}$ i $\overline{AC}$

Bez smanjenja općenitosti uzmimo da je $A' \in \overline{B'C'}$. Iz $A' \in \overline{BC}$ slijedi $A' \in BC$. Dakle, $BC \cap \overline{B'C'} \neq \emptyset$, tj. pravac $\widetilde{BC}$ siječe dužinu $\overline{B'C'}$.

Prema Paschovom aksiomu $\widetilde{BC}$ siječe $\overline{AC'}$ ili $\overline{AB'}$. Pretpostavimo da $\widetilde{BC}$ siječe dužinu $\overline{AC'}$. Tada postoji $T \in \overline{AC'} \cap BC$. Zbog $C' \in AB$ vrijedi $\overline{AC'} \subseteq AB$ pa je $T \in AB$. Dakle, $T \in AB \cap BC$. Prema propoziciji 1.3.7 slijedi da je $AB \cap BC = \{B\}$. Stoga je $T = B$. Prema tome, imamo $B \in \overline{AC'}, C' \in \overline{AB}$ i $C' \neq B$ (jer p prolazi kroz C', a ne prolazi kroz B). Ovo je u kontradikciji s lemom 1.2.5.

Analogno dobivamo da pretpostavka da $\widetilde{BC}$ siječe $\overline{AB'}$ vodi na kontradikciju.
Dakle, p ne siječe sve tri dužine $\overline{AB}, \overline{BC}$ i $\overline{AC}$.

Drugi slučaj, točke A, B i C su kolinearne. Neka je q pravac koji prolazi točkama A, B i C. Pretpostavimo da p siječe sve tri dužine $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{AC}$. Prema propoziciji 1.2.3 vrijedi

$$B \in \overline{AC} \text{ ili } A \in \overline{BC} \text{ ili } C \in \overline{AB}.$$

Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $B \in \overline{AC}$.

Neka je

$$C' \in \overline{AB} \cap \overline{p}, \quad A' \in \overline{BC} \cap \overline{p}.$$

Imamo $B \in \overline{AC}$ i $A' \in \overline{BC}$ pa iz leme 1.2.5 i leme 1.2.6 slijedi $A' \notin \overline{AB}$. Međutim imamo da je $C' \in \overline{AB}$ pa slijedi $A' \neq C'$. Stoga su A' i C' dvije različite točke koje leže na pravcima p i q iz čega slijedi da je $p = q$. No ovo je nemoguće jer q prolazi kroz točke A, B, C, a p ne prolazi tim točkama. Time smo došli do kontradikcije pa je propozicija dokazana. □

1.5 Poluravnina

Napomena 1.5.1. *Neka je S skup te neka je $\sim$ relacija ekvivalencije na S. Neka je $x \in S$. Definiramo*

$$[x] = \{y \in S \mid x \sim y\}.$$

*Tada za skup $[x]$ kažemo da je **klasa ekvivalencije** od x s obzirom na relaciju $\sim$. Uočimo da je $x \in [x]$.*

Neka su $x, y \in S$. Tada vrijedi:

$$x \sim y \Rightarrow [x] = [y] \tag{1.1}$$

$$x \nsim y \Rightarrow [x] \cap [y] = \emptyset \tag{1.2}$$

Dokažimo ove tvrdnje. Pretpostavimo da je $x \sim y$. Neka je $z \in [x]$. Tada je $z \in S$ te je $x \sim z$. Znamo da je $x \sim y$ pa je $y \sim x$. Iz činjenice da je $\sim$ tranzitivna relacija slijedi da je $y \sim z$. Prema tome $z \in [y]$. Time smo dokazali da je $[x] \subseteq [y]$. Analogno dobivamo $[y] \subseteq [x]$. Prema tome

$$[x] = [y].$$

Time smo dokazali tvrdnju 1.1.
Pretpostavimo da $x \nsim y$. Tvrdimo da je $[x] \cap [y] = \emptyset$. Pretpostavimo suprotno. Tada postoji $z \in [x]$ takav da je $z \in [y]$. Slijedi $x \sim z$ i $y \sim z$ pa je $z \sim y$. Iz $z \sim y$ i $x \sim z$ slijedi $x \sim y$ (tranzitivnost). Kontradikcija. Prema tome

$$[x] \cap [y] = \emptyset,$$

tj. tvrdnja 1.2 vrijedi.

Iz (1.1) i (1.2) zaključujemo i sljedeće:

(i) $x \sim y \Leftrightarrow [x] = [y]$

(ii) $[x] \neq [y] \Rightarrow [x] \cap [y] = \emptyset$

Naime, ako je $[x] = [y]$, onda je $x \sim y$ jer bi u suprotnom $x \nsim y$ povlačilo

$$[x] \cap [y] = \emptyset,$$

posebno $[x] \neq [y]$, a to ne vrijedi. Dakle, (i) vrijedi.
Pretpostavimo da je $[x] \neq [y]$. Tada ne može vrijediti $x \sim y$ zbog 1.1. Dakle $x \nsim y$ pa iz 1.2 slijedi da je

$$[x] \cap [y] = \emptyset.$$

Prema tome, (ii) vrijedi.

Propozicija 1.5.2. *Neka je $(M, \mathcal{L})$ Paschova ravnina te neka je $p \in \mathcal{L}$. Na skupu $M \setminus \overline{p}$ definiramo relaciju $\sim$ sa*

$$A \sim B \text{ ako } p \text{ ne siječe } \overline{AB}.$$

Tada je $\sim$ relacija ekvivalencije na skupu $M \setminus \overline{p}$ te $\sim$ rastavlja $M \setminus \overline{p}$ na najviše dvije klase ekvivalencije.

Dokaz. Neka je $A \in M \setminus \overline{p}$. Tada $A \notin \overline{p}$ pa $\overline{p}$ ne siječe $\{A\}$, tj. ne siječe skup $\overline{AA}$. Stoga je $A \sim A$. Dakle $\sim$ je refleksivna relacija na $M \setminus \overline{p}$.
Ako su $A, B \in M \setminus \overline{p}$ takvi da je $A \sim B$ onda je očito $B \sim A$ (jer je $\overline{AB} = \overline{BA}$). Relacija $\sim$ je simetrična.
Pretpostavimo da su $A, B, C \in M \setminus \overline{p}$ takvi da je

$$A \sim B \text{ i } B \sim C.$$

Tvrdimo da je $A \sim C$. Pretpostavimo suprotno. Tada p siječe $\overline{AC}$. Iz Paschovog aksioma slijedi da p siječe $\overline{AB}$ ili $\overline{BC}$ iz čega slijedi da $A \nsim B$ ili $B \nsim C$. Kontradikcija. Prema tome $A \sim C$. Time smo dokazali da je relacija $\sim$ tranzitivna, dakle $\sim$ je relacija ekvivalencije na $M \setminus \overline{p}$.

Dokažimo sada da $\sim$ rastavlja $M \setminus \overline{p}$ na najviše dvije klase ekvivalencije. Pretpostavimo suprotno. Tada $\sim$ rastavlja $M \setminus \overline{p}$ na barem tri klase ekvivalencije. Stoga postoje $A, B, C \in M \setminus \overline{p}$ takvi da je

$$[A] \neq [B], \ [A] \neq [C] \text{ i } [B] \neq [C].$$

Iz ovoga slijedi $A \nsim B$, $A \nsim C$ i $B \nsim C$. Ovo znači da pravac p siječe $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$.
Uočimo da p ne prolazi niti jednom od točaka A, B i C. Prema propoziciji 1.4.2 p ne može sjeći sve tri dužine $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$. Kontradikcija.

Dakle $\sim$ rastavlja $M \setminus \overline{p}$ na najviše dvije klase ekvivalencije. $\square$

Definicija 1.5.3. *Neka je* $(M, \mathcal{L})$ *Paschova ravnina, te neka je* $p \in \mathcal{L}$*. Neka je* $\sim$ *relacija na* $M \setminus \overline{p}$ *definirana kao u propoziciji 1.5.2. Tada klase ekvivalencije s obzirom na relaciju* $\sim$*, tj. skupove* $[A]$ *gdje je* $A \in M \setminus \overline{p}$*, nazivamo* ***poluravnine*** *u* $(M, \mathcal{L})$ *određene pravcem* p*.*

Uočimo da postoje najviše dvije poluravnine u $(M, \mathcal{L})$ *određene pravcem* p *(propozicija 1.5.2).*

Definicija 1.5.4. *Neka je* (S, l) *pravac te neka su* $x \in S$ *i* $\leq \in l$*. Tada za skupove*

$$\{y \in S \mid x \leq y\} \quad i \quad \{y \in S \mid y \leq x\}$$

kažemo da su ***polupravci*** *od* (S, l) *s vrhom* x*.*

Napomena 1.5.5. *Neka je* (S, l) *pravac,* $x \in S$ *te neka je* t *polupravac od* (S, l) *s vrhom* x*. Tada postoji* $\leq \in l$ *takav da je*

$$T = \{y \in S \mid x \leq y\}.$$

Naime, znamo da je

$$T = \{y \in S \mid x \leq y\} \quad ili \quad T = \{y \in S \mid y \leq x\},$$

gdje je $\leq \in l$*. U prvom slučaju smo gotovi, a u drugom slučaju neka je* $\leq'$ *suprotni linearni uređaj od* $\leq$*. Tada je* $\leq' \in l$ *te za* $y \in S$ *vrijedi* $y \leq x$ *ako i samo ako* $x \leq' y$*. Stoga je*

$$T = \{y \in S \mid x \leq' y\}.$$

Definicija 1.5.6. *Neka je* $(M, \mathcal{L})$ *ravnina,* $p \in \mathcal{L}$ *te* $A \in \overline{p}$*. Neka je* r *polupravac od* p *s vrhom* A*. Tada za* r *kažemo da je* ***polupravac u ravnini*** $(M, \mathcal{L})$ ***s vrhom*** A*.*

Poglavlje 2

Metrička ravnina

2.1 Metrička ravnina

Definicija 2.1.1. *Neka je $(M, \mathcal{L})$ Paschova ravnina te neka je $d : M \times M \to \mathbb{R}$ funkcija koja ima sljedeća svojstva:*

(i) $d(A, B) \geq 0$ *za sve* $A, B \in M$
$d(A, B) = 0 \Longleftrightarrow A = B$

(ii) $d(A, B) = d(B, A)$ *za sve* $A, B \in M$

(iii) $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$ *za sve* $A, B, C \in M$ *(nejednakost trokuta)*
$d(A, B) = d(A, C) + d(C, B) \Longleftrightarrow C \in \overline{AB}$.

(iv) Za svaki polupravac r u $(M, \mathcal{L})$ s vrhom O i za svaki pozitivan realan broj x postoji točka $T \in r$ takva da je $d(O, T) = x$.

Tada za uređenu trojku $(M, \mathcal{L}, d)$ kažemo da je ***metrička ravnina****.*

Napomena 2.1.2. *Neka je (S, l) pravac, $O \in S$ te neka su r_1, r_2 polupravci od (S, l) s vrhom O takvi da je $r_1 \neq r_2$. Tada je $r_1 \cap r_2 = \{O\}$.*

Naime, iz napomene 1.5.5 slijedi da postoji $\leq_1 \in l$ takav da je

$$r_1 = \{y \in S \mid x \leq_1 y\}.$$

Isto tako postoji $\leq_2 \in l$ takav da je

$$r_2 = \{y \in S \mid x \leq_2 y\}.$$

Iz $r_1 \neq r_2$ slijedi $\leq_1 \neq \leq_2$. Stoga su $\leq_1$ i $\leq_2$ međusobno suprotni uređaji pa vrijedi

$$r_2 = \{y \in S \mid y \leq_1 x\}.$$

Stoga ako je $y \in r_1 \cap r_2$, tj. $y \in r_1$ i $y \in r_2$, imamo

$$x \leq_1 y \text{ i } y \leq_1 x$$

pa iz antisimetričnosti relacije $\leq_1$ slijedi $x = y$. Time smo dokazali da je

$$r_1 \cap r_2 \subseteq \{x\}.$$

Obratno, očito je $\{x\} \subseteq r_1 \cap r_2$. Prema tome

$$r_1 \cap r_2 = \{x\}.$$

Nadalje, ako je $a \in r_1$ te $b \in r_2$, onda je $x \in \overline{ab}$. Naime, imamo da je

$$b \leq_1 x \leq_1 a,$$

što slijedi iz $b \in r_2$ i $a \in r_1$, a ovo povlači $x \in \overline{ba}$ (napomena 1.2.2). Stoga je $x \in \overline{ab}$ (jer je $\overline{ab} = \overline{ba}$).

Napomena 2.1.3. *Neka je (S, l) pravac, $x \in S$ te r polupravac od (S, l) s vrhom x. Neka su $a, b \in r \setminus \{x\}$. Tada $x \notin \overline{ab}$. Dokažimo to.*

Neka je $\leq \in l$ takav da je

$$r = \{y \in S \mid x \leq y\}.$$

Iz $a, b \in r$ slijedi $x \leq a$ i $x \leq b$. Pretpostavimo da je $x \in \overline{ab}$.

1. *slučaj: $a \leq b$.*
   Prema napomeni 1.2.2 tada je $a \leq x \leq b$. Iz $a \leq x$ i $x \leq a$ slijedi $a = x$. Ovo je u kontradikciji s pretpostavkom da je $a \in r \setminus \{x\}$.

2. *slučaj : $b \leq a$*
   Tada je $b \leq x \leq a$ pa slijedi $x = b$ te smo opet dobili kontradikciju.

Zaključak: $x \notin \overline{ab}$.

Propozicija 2.1.4. *Neka je $(M, \mathcal{L}, d)$ metrička ravnina, neka je r polupravac u $(M, \mathcal{L})$ s vrhom O te neka je x pozitivan realan broj. Tada postoji jednistvena točka $T \in r$ takva da je $d(O, T) = x$.*

Dokaz. Egzistencija takve točke T slijedi iz definicije metričke ravnine. Dokažimo sada da je točka T s tim svojstvom jedinstvena.

Pretpostavimo da su $T_1, T_2 \in r$ točke takve da je

$$d(O, T_1) = x \quad \text{i} \quad d(O, T_2) = x.$$

Neka je $p \in \mathcal{L}$ takav da je r polupravac od p s vrhom O. Tada postoji $\leq \in \widehat{p}$ takav da je

$$r = \{y \in \overline{p} \mid O \leq y\}.$$

Slijedi da je $O \leq T_1$ i $O \leq T_2$.

1. $T_1 \leq T_2$
   Tada imamo $O \leq T_1 \leq T_2$ pa je $T_1 \in \overline{OT_2}$. Iz definicije metričke ravnine (svojstvo (iii)) slijedi
   $$d(O, T_2) = d(O, T_1) + d(T_1, T_2),$$
   tj. $x = x + d(T_1, T_2)$ pa je $d(T_1, T_2) = 0$.
   Iz svojstva (i) definicije metričke ravnine slijedi $T_1 = T_2$.

2. $T_2 \leq T_1$
   Tada imamo $O \leq T_2 \leq T_1$ pa je $T_2 \in \overline{OT_1}$. Slijedi
   $$d(O, T_1) = d(O, T_2) + d(T_2, T_1)$$
   pa je $d(T_2, T_1) = 0$. Stoga je $T_1 = T_2$.

Time je propozicija dokazana. □

Propozicija 2.1.5. *Neka je $(M, \mathcal{L}, d)$ metrička ravnina te neka je $p \in \mathcal{L}$. Tada postoje dvije poluravnine u $(M, \mathcal{L})$ određene pravcem p.*

Dokaz. Neka je $\sim$ relacija na $M \setminus \overline{p}$ definirana sa

$$A \sim B \ \text{ ako je } \ \overline{AB} \cap \overline{p} = \emptyset.$$

Znamo da je $\sim$ relacija ekvivalencije na $M \setminus \overline{p}$ te da je svaka poluravnina određena pravcem p oblika $[A]$, gdje je $A \in M \setminus \overline{p}$.

Nadalje, znamo da postoje najviše dvije poluravnine određene pravcem p (propozicija 1.5.2). Stoga je dovoljno pokazati da postoje $A, B \in M \setminus \overline{p}$ takvi da je $[A] \neq [B]$, tj. takvi da $A \nsim B$. Dakle, dovoljno je dokazati da postoje točke $A, B \in M \setminus \overline{p}$ takve da pravac p siječe $\overline{AB}$.

Odaberimo točku $O \in \overline{p}$. Nadalje, odaberimo $A \in M \setminus \overline{p}$ (takvu točku možemo naći jer bi u suprotnom vrijedilo $M \subseteq \overline{p}$ što je nemoguće jer u M postoje tri nekolinearne točke).

Očito je $O \neq A$. Neka je $q \in \mathcal{L}$ pravac koji prolazi točkama O i A. Dakle, imamo $O, A \in \overline{q}$ pa stoga postoji $\leq \in \widehat{q}$ takav da je $O \leq A$. Neka je

$$r = \{T \in \overline{q} \mid T \leq O\}.$$

Tada je r očito polupravac od q s vrhom O. Prema svojstvu (iv) iz definicije metričke ravnine postoji $T \in r$ takav da je

$$d(O, T) = 1.$$

Posebno, $O \neq T$, a iz ovoga slijedi da $T \notin \overline{p}$ (u suprotnom kada bi vrijedilo $T \in \overline{p}$, imali bismo da pravci q i p prolaze točkama O i T iz čega bi slijedilo $p = q$, no ovo je nemoguće jer $A \in \overline{q}$, a $A \notin \overline{p}$). Stoga je

$$T \in M \setminus \overline{p}.$$

Imamo $T \leq O \leq A$ pa je $O \in \overline{TA}$, tj.

$$\overline{TA} \cap \overline{p} \neq \emptyset.$$

Dakle, $A, T \in M \setminus \overline{p}$ i pravac p siječe $\overline{AT}$. Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Lema 2.1.6. *Neka je $(M, \mathcal{L}, d)$ metrička ravnina, $O \in \overline{p}$ i $\preccurlyeq \in \widehat{p}$. Neka je*

$$r = \{T \in \overline{p} \mid O \preccurlyeq T\}.$$

Neka su $T_1, T_2 \in r$. Tada je

$$T_1 \preccurlyeq T_2 \iff d(O, T_1) \leq d(O, T_2).$$

Dokaz. Pretpostavimo da je $T_1 \preccurlyeq T_2$. Tada imamo $O \preccurlyeq T_1 \preccurlyeq T_2$ pa je $T_1 \in \overline{OT_2}$. Prema svojstvu (iii) iz definicije metrike vrijedi

$$d(O, T_2) = d(O, T_1) + d(T_1, T_2).$$

Budući da je $d(T_1, T_2) \geqslant 0$ imamo da je $d(O, T_1) \leq d(O, T_2)$.
Uzmimo sada da je $d(O, T_1) \leq d(O, T_2)$. Budući da je $\preccurlyeq$ uređaj na $\widehat{p}$ vrijedi $T_1 \preccurlyeq T_2$ ili $T_2 \preccurlyeq T_1$.

1. slučaj: $T_1 \preccurlyeq T_2$. To je ono što i želimo dobiti.

2. slučaj: $T_2 \preccurlyeq T_1$. Tada prema dokazanom vrijedi $d(O, T_2) \leq d(O, T_1)$. Iz ovoga i pretpostavke slijedi da je $d(O, T_1) = d(O, T_2)$. Označimo

   $$x = d(O, T_1).$$

   Ako je $x = 0$, onda je $O = T_1$ i $O = T_2$ pa je $T_1 = T_2$, a ako je $x > 0$ onda prema propoziciji 2.1.4 postoji jedinstvena točka $T \in r$ takva da je $d(O, T) = x$ iz čega slijedi $T_1 = T_2$. Stoga je $T_1 \preccurlyeq T_2$.

U oba slučaja smo dobili da je $T_1 \preccurlyeq T_2$. Time je tvrdnja leme dokazana. □

Teorem 2.1.7. *Neka je $(M, \mathcal{L}, d)$ metrička ravnina te neka su $A, B \in M$, $A \neq B$. Tada postoji jedinstvena točka $C \in AB$ takva da je*

$$d(A, C) = d(B, C).$$

Za tu točku vrijedi $C \in \overline{AB}$.

Dokaz. Neka je $p = \widetilde{AB}$. Neka je $\preccurlyeq \in \widehat{p}$ takav da je $A \preccurlyeq B$. Neka je

$$r = \{T \in \overline{p} \mid A \preccurlyeq T\}.$$

Tada je r polupravac u $(M, \mathcal{L}, d)$ s vrhom A. Neka je

$$x = \frac{d(A, B)}{2}.$$

Tada je $x > 0$. Prema svojstvu (iv) iz definicije metrike postoji $C \in r$ takav da je $d(A, C) = x$. Imamo $C, B \in r$ i

$$d(A, C) \leq d(A, B)$$

jer je $d(A, B) = 2x$. Iz ovoga i leme 2.1.6 slijedi da je $C \preccurlyeq B$. Stoga imamo $A \preccurlyeq C \preccurlyeq B$ pa je $C \in \overline{AB}$.
Ovo povlači da je $d(A, B) = d(A, C) + d(C, B)$, tj.

$$2x = x + d(C, B)$$

pa je $d(C, B) = x$. Prema tome $d(A, C) = d(C, B)$, a očito je $C \in AB$.

Pretpostavimo da je $D \in AB$ točka takva da je

$$d(A, D) = d(D, B).$$

Pretpostavimo da je $D \preccurlyeq A$. Imamo $D \preccurlyeq A \preccurlyeq B$ pa je $A \in \overline{DB}$ što povlači da je

$$d(D, B) = d(D, A) + d(A, B)$$

iz čega slijedi $0 = d(A, B)$. Ovo je nemoguće jer je $A \neq B$. Prema tome, ne vrijedi $D \preccurlyeq A$, stoga je $A \preccurlyeq D$.

Pretpostavimo da je $B \preccurlyeq D$. Imamo $A \preccurlyeq B \preccurlyeq D$ pa je $B \in \overline{AD}$, dakle

$$d(A, D) = d(A, B) + d(B, D).$$

Slijedi $0 = d(A, B)$. Kontradikcija. Zaključujemo $D \preccurlyeq B$.

Imamo
$$A \preccurlyeq D \preccurlyeq B,$$
tj. $D \in \overline{AB}$, stoga je $d(A, B) = d(A, D) + d(D, B)$. Ovo povlači da je
$$2x = d(A, D) + d(A, D)$$
pa imamo
$$2x = 2d(A, D),$$
tj.
$$x = d(A, D).$$
Dakle
$$C, D \in r, \quad d(A, C) = x \text{ i } d(A, D) = x$$
pa iz propozicije 2.1.4 slijedi da je $C = D$. Time je tvrdnja teorema dokazana. □

2.2 Izometrija metričke ravnine

Definicija 2.2.1. *Neka je $(M, \mathcal{L}, d)$ metrička ravnina te neka je $f : M \longrightarrow M$ funkcija. Za f kažemo da je* ***izometrija metričke ravnine*** *$(M, \mathcal{L}, d)$ ako za sve $A, B \in M$ vrijedi*
$$d(A, B) = d(f(A), f(B)).$$

Uočimo sljedeće: ako je $f : M \longrightarrow M$ izometrija metričke ravnine $(M, \mathcal{L}, d)$ onda je f injekcija. Naime, ako su $A, B \in M$ takvi da je $A \neq B$, onda je $d(A, B) > 0$ pa je $d(f(A), f(B)) > 0$ što povlači da je $f(A) \neq f(B)$.

Lema 2.2.2. *Neka je $(M, \mathcal{L}, d)$ metrička ravnina te neka su $A, B \in M$, $A \neq B$. Tada za svaki $x \in [0, d(A, B)]$ postoji jedinstveni $T \in \overline{AB}$ takav da je $d(A, T) = x$.*

Dokaz. Neka je $p = \widetilde{AB}$. Odaberimo $\preccurlyeq \in \widehat{p}$ takav da je $A \preccurlyeq B$. Neka je
$$r = \{T \in \overline{p} \mid A \preccurlyeq T\}.$$

Neka je $x \in [0, d(A, B)]$. Ako je $x = 0$ onda je jasno da postoji jedinstvena točka $T \in \overline{AB}$ takva da je $d(A, T) = x$. Pretpostavimo da je $x > 0$. Tada postoji točka $T \in r$ takva da je
$$d(A, T) = x$$

(svojstvo (iv) iz definicije metrike). Imamo $T, B \in r$ i

$$d(A,T) = x \leq d(A,B)$$

pa lema 2.1.6 povlači da je $T \preccurlyeq B$. Dakle,

$$A \preccurlyeq T \preccurlyeq B$$

pa je $T \in \overline{AB}$.

Pretpostavimo da je točka $T' \in \overline{AB}$ takva da je

$$d(A,T') = x.$$

Iz $T' \in \overline{AB}$ i $A \preccurlyeq B$ slijedi $A \preccurlyeq T' \preccurlyeq B$. Stoga je $T' \in r$. Dakle,

$$T, T' \in r, \quad d(A,T) = x \;\text{ i }\; d(A,T') = x$$

pa zaključujemo prema propoziciji 2.1.4 da je $T = T'$. Time je lema dokazana. $\square$

Propozicija 2.2.3. *Neka je $(M, \mathcal{L}, d)$ metrička ravnina te neka je $f : M \longrightarrow M$ izometrija ove ravnine. Neka su $A, B \in M$. Tada je*

$$f(\overline{AB}) = \overline{f(A)f(B)}.$$

Dokaz. Neka je $Q \in f(\overline{AB})$. Želimo dokazati da je $Q \in \overline{f(A)f(B)}$. Imamo $Q = f(T)$ za neki $T \in \overline{AB}$. Vrijedi

$$d(A,B) = d(A,T) + d(T,B)$$

pa je

$$d(f(A), f(B)) = d(f(A), f(T)) + d(f(T), f(B)).$$

Iz svojstva (iii) definicije metrike slijedi da je

$$f(T) \in \overline{f(A)f(B)}.$$

Dakle,

$$Q \in \overline{f(A)f(B)}.$$

Time smo dokazali da je

$$f(\overline{AB}) \subseteq \overline{f(A)f(B)}.$$

Neka je $Q \in \overline{f(A)f(B)}$. Dokažimo da je $Q \in f(\overline{AB})$. Neka je

$$x = d(f(A), Q).$$

Iz
$$d(f(A), f(B)) = d(f(A), Q) + d(Q, f(B))$$
slijedi da je
$$x \leq d(f(A), f(B)),$$
tj.
$$x \leq d(A, B).$$
Prema tome,
$$x \in [0, d(A, B)].$$
Prema lemi 2.2.2 postoji $T \in \overline{AB}$ takav da je $d(A, T) = x$. Iz ovoga slijedi da je
$$d(f(A), f(T)) = x,$$
a prema dokazanom vrijedi
$$f(T) \in \overline{f(A)f(B)}.$$

Dakle, $f(T)$ i Q su dvije točke na dužini $\overline{f(A)f(B)}$ udaljene za x do $f(A)$. Prema lemi 2.2.2 vrijedi $Q = f(T)$. Stoga je
$$Q \in f(\overline{AB}).$$
Dakle
$$\overline{f(A)f(B)} \subseteq f(\overline{AB}).$$
Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Propozicija 2.2.4. *Neka je $(M, \mathcal{L}, d)$ metrička ravnina te neka je r polupravac u ovoj ravnini s vrhom A. Neka je $f : M \longrightarrow M$ izometrija ravnine $(M, \mathcal{L}, d)$. Tada je $f(r)$ polupravac s vrhom $f(A)$.*

Dokaz. Budući da je r polupravac s vrhom A u $(M, \mathcal{L}, d)$ postoji $p \in \mathcal{L}$ takav da je r polupravac od p s vrhom A. Prema napomeni 1.5.5 postoji $\preccurlyeq_p \in \widehat{p}$ takav da je
$$r = \{T \in \overline{p} \mid A \preccurlyeq_p T\}.$$
Odaberimo $B \in r$ takav da je $B \neq A$ (takva točka sigurno postoji prema svojstvu (iv) iz definicije metrike).
Iz $A \neq B$ slijedi $f(A) \neq f(B)$. Neka je $q \in \mathcal{L}$ takav da su $f(A), f(B) \in \overline{q}$. Odaberimo $\preccurlyeq_q \in \widehat{q}$ takav da je $f(A) \preccurlyeq_q f(B)$. Neka je
$$s = \{Q \in \overline{q} \mid f(A) \preccurlyeq_q Q\}.$$
Očito je s polupravac u $(M, \mathcal{L}, d)$. Tvrdimo da je $f(r) = s$.
Neka je $T \in r$. Tada je $A \preccurlyeq_p T$. Imamo $T \preccurlyeq_p B$ ili $B \preccurlyeq_p T$.

1. slučaj: $T \preccurlyeq_p B$. Tada je $A \preccurlyeq_p T \preccurlyeq_p B$ pa je $T \in \overline{AB}$. Tada je $f(T) \in \overline{f(AB)}$ pa je prema propoziciji 2.2.3
$$f(T) \in \overline{f(A)f(B)}.$$
Stoga je
$$f(A) \preccurlyeq_q f(T) \preccurlyeq_q f(B)$$
pa je
$$f(T) \in s.$$

2. slučaj:$B \preccurlyeq_p T$. Tada je $A \preccurlyeq_p B \preccurlyeq_p T$ pa je $B \in \overline{AT}$. Tada je $f(B) \in f(\overline{AT})$, tj.
$$f(B) \in \overline{f(A)f(T)}.$$
Ovo znači da postoji pravac $q' \in \mathcal{L}$ koji prolazi točkama $f(A), f(B)$ i $f(T)$. No već znamo da pravac q prolazi točkama $f(A), f(B)$ i $f(T)$ pa slijedi da je
$$q = q'.$$
Stoga je
$$f(T) \in \overline{q}.$$
Vrijedi $f(T) \preccurlyeq_q f(A)$ ili $f(A) \preccurlyeq_q f(T)$. Pretpostavimo da je $f(T) \preccurlyeq_q f(A)$. Iz ovoga i $f(B) \in \overline{f(T)f(A)}$ slijedi da je
$$f(T) \preccurlyeq_q f(B) \preccurlyeq_q f(A).$$
Imamo $f(B) \preccurlyeq_q f(A)$ i $f(A) \preccurlyeq_q f(B)$ pa je $f(A) = f(B)$ (antisimetričnost relacije $\preccurlyeq_q$). Kontradikcija. Stoga je $f(A) \preccurlyeq_q f(T)$ pa je $f(T) \in s$.

Dokazali smo da za svaki $T \in r$ vrijedi $f(T) \in s$. Prema tome
$$f(r) \subseteq s.$$

Dokažimo sada da je $s \subseteq f(r)$. Neka je $Q \in s$. Ako je $Q = f(A)$ onda je očito $Q \in f(r)$ (jer je $A \in r$). Pretpostavimo da je $Q \neq f(A)$. Neka je $x = d(f(A), Q)$. Tada je $x > 0$. Prema propoziciji 2.1.4 postoji točka $T \in r$ takva da je
$$d(A, T) = x.$$
Budući da je f izometrija vrijedi
$$d(f(A), f(T)) = x.$$

Prema dokazanom je $f(T) \in s$. Iz propozicije 2.1.4 slijedi $f(T) = Q$. Prema tome $Q \in f(r)$. Time smo dokazali da je $s \subseteq f(r)$ pa slijedi da je

$$f(r) = s.$$

$\square$

Napomena 2.2.5. *Neka je $(M, \mathcal{L})$ ravnina te neka su $A, B \in M$, $A \neq B$. Tada postoji jedinstveni polupravac r u $(M, \mathcal{L})$ s vrhom A takav da je $B \in r$.*
Naime, postoji pravac p u $(M, \mathcal{L})$ takav da su $A, B \in \overline{p}$. Odaberimo $\preccurlyeq \in \widehat{p}$ takav da je $A \preccurlyeq B$. Neka je

$$r = \{T \in \overline{p} \mid A \preccurlyeq T\}.$$

Tada je r očito polupravac u $(M, \mathcal{L})$ s vrhom A koji sadrži točku B.
Pretpostavimo da je je r' polupravac u $(M, \mathcal{L})$ s vrhom A takav da je $B \in r'$. Tada postoji $p' \in \mathcal{L}$ takav da je r' polupravac od p' s vrhom A. Slijedi $A, B \in \overline{p'}$. Slijedi

$$p = p'.$$

Dakle, r' je polupravac od p s vrhom A. Prema napomeni 1.5.5 postoji $\preccurlyeq' \in \widehat{p}$ takav da je

$$r' = \{T \in \overline{p} \mid A \preccurlyeq' T\}.$$

Iz $B \in r'$ slijedi $A \preccurlyeq' B$. Pretpostavimo da je $\preccurlyeq' \neq \preccurlyeq$. Tada je $\preccurlyeq'$ suprotni uređaj od $\preccurlyeq$ pa $A \preccurlyeq' B$ povlači $B \preccurlyeq A$. Ovo, zajedno s $A \preccurlyeq B$ povlači da je $A = B$. Kontradikcija.
Prema tome $\preccurlyeq' = \preccurlyeq$, a to znači da je $r = r'$.

Napomena 2.2.6. *Neka su S i T skupovi te $f : S \longrightarrow T$ funkcija. Neka su A_1 i A_2 podskupovi od S. Tada je*

$$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2).$$

Neka je $y \in f(A_1 \cup A_2)$. Tada postoji $x \in A_1 \cup A_2$ takav da je $f(x) = y$. Slijedi da je $x \in A_1$ ili $x \in A_2$. Ako je $x \in A_1$ onda je $f(x) \in f(A_1)$, tj. $y \in f(A_1)$. Ako je $x \in A_2$, onda je $y \in f(A_2)$. Stoga je $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$.

Neka je $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$. Tada je $y \in f(A_1)$ ili $y \in f(A_2)$. Ako je $y \in f(A_1)$, onda postoji $x \in A_1$ takav da je $f(x) = y$. Slijedi $x \in A_1 \cup A_2$ pa je $y \in f(A_1 \cup A_2)$.
Do istog zaključka dolazimo ako je $y \in f(A_2)$.
Time smo dokazali da vrijedi $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$

Propozicija 2.2.7. *Neka je $(M, \mathcal{L}, d)$ metrička ravnina te neka je $f : M \longrightarrow M$ izometrija ove ravnine. Neka je p pravac u $(M, \mathcal{L}, d)$. Tada je $f(\overline{p})$ nosač nekog pravca iz $(M, \mathcal{L}, d)$.*

Dokaz. Odaberimo $A \in \overline{p}$ i $\leqslant_p \in \widehat{p}$. Neka je

$$r_1 = \{T \in \overline{p} \mid A \leqslant_p T\} \quad \text{i} \quad r_2 = \{T \in \overline{p} \mid T \leqslant_p A\}.$$

Odaberimo $B \in r_1$ i $C \in r_2$ takve da je $B \neq A$ i $C \neq A$. Uočimo da je $C \leqslant_p A \leqslant_p B$, dakle $A \in \overline{CB}$. Tada je $f(A) \in f(\overline{CB})$ pa je prema propoziciji 2.2.3

$$f(A) \in \overline{f(C)f(B)}.$$

Ovo znači da su točke $f(A), f(B)$ i $f(C)$ kolinearne, tj. postoji pravac q takav da su $f(A), f(B), f(C) \in \overline{q}$. Odaberimo $\leqslant_q \in \widehat{q}$ takav da je $f(C) \leqslant_q f(B)$. Iz $f(A) \in \overline{f(C)f(B)}$ slijedi

$$f(C) \leqslant_q f(A) \leqslant_q f(B).$$

Neka je

$$s_1 = \{Q \in \overline{q} \mid f(A) \leqslant_q Q\} \quad \text{te} \quad s_2 = \{Q \in \overline{q} \mid Q \leqslant_q f(A)\}.$$

Prema propoziciji 2.2.4 $f(r_1)$ je polupravac s vrhom $f(A)$, a očito je $f(B) \in f(r_1)$. S druge strane s_1 je očito polupravac s vrhom $f(A)$ koji sadrži točku $f(B)$. Iz napomene 2.2.5 slijedi da je

$$f(r_1) = s_1.$$

Isto tako prema propoziciji 2.2.4 $f(r_2)$ je polupravac s vrhom $f(A)$, a $f(C) \in f(r_2)$. Iz definicije od s_2 je jasno da je to polupravac s vrhom $f(A)$ koji sadrži točku $f(C)$. Slijedi

$$f(r_2) = s_2.$$

Vrijedi

$$\overline{p} = r_1 \cup r_2 \quad \text{i} \quad \overline{q} = s_1 \cup s_2.$$

Koristeći napomenu 2.2.6 dobivamo

$$f(\overline{p}) = f(r_1 \cup r_2) = f(r_1) \cup f(r_2) = s_1 \cup s_2 = \overline{q}.$$

Dakle, $f(\overline{p}) = \overline{q}$ i time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Napomena 2.2.8. *Neka su S i T skupovi te $f : S \longrightarrow T$ funkcija. Neka su A_1 i A_2 podskupovi od S. Tada općenito ne vrijedi da je*

$$f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2).$$

Na primjer, neka je $A_1 = \{1, 2, 3\}$, $A_2 = \{4, 5\}$, $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $T = S$ *i* $f : S \longrightarrow T$ *funkcija definirana sa* $f(x) = 1$ *za svaki* $x \in S$. *Tada je* $f(A_1) \cap f(A_2) = \{1\}$, *a* $f(A_1 \cap A_2) = f(\emptyset) = \emptyset$.

Općenito, mora vrijediti $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$. *Naime, ako je* $y \in f(A_1 \cap A_2)$ *onda postoji* $x \in A_1 \cap A_2$ *takav da je* $f(x) = y$. *Imamo* $x \in A_1$ *i* $x \in A_2$ *pa je* $y \in f(A_1)$ *i* $y \in f(A_2)$, *tj.* $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$.

Napomena 2.2.9. *Neka su* S *i* T *skupovi te* $f : S \longrightarrow T$ *funkcija. Neka su* A_1 *i* A_2 *podskupovi od* S. *Pretpostavimo da je* f *injekcija. Tada je*

$$f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2).$$

Prema prethodnoj napomeni dovoljno je dokazati da je $f(A_1) \cap f(A_2) \subseteq f(A_1 \cap A_2)$.
Neka je

$$y \in f(A_1) \cap f(A_2).$$

Tada je

$$y \in f(A_1) \quad i \quad y \in f(A_2).$$

Tada postoji $x_1 \in A_1$ *takav da je* $f(x_1) = y$ *i postoji* $x_2 \in A_2$ *takav da je* $f(x_2) = y$. *Imamo*

$$f(x_1) = f(x_2)$$

pa je $x_1 = x_2$ *jer je* f *injekcija. Stoga je* $x_1 \in A_1 \cap A_2$ *pa je onda* $f(x_1) \in f(A_1 \cap A_2)$, *tj.* $y \in f(A_1 \cap A_2)$.
Time smo dokazali da je $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$.

Korolar 2.2.10. *Neka je* $(M, \mathcal{L}, d)$ *metrička ravnina te neka je* $f : M \longrightarrow M$ *izometrija ove ravnine. Neka su* $A, B \in M, A \neq B$. *Tada je*

$$f(AB) = f(A)f(B).$$

Dokaz. Prema propoziciji 2.2.7, $f(AB)$ je nosač nekog pravca iz $\mathcal{L}$. Iz $A, B \in AB$ slijedi $f(A), f(B) \in f(AB)$. Stoga je $f(A)f(B) = f(AB)$. □

Lema 2.2.11. *Neka je* $(M, \mathcal{L}, d)$ *metrička ravnina,* $A, B \in M, A \neq B$ *te* $C, D \in AB$. *Pretpostavimo da je* $d(A, C) = d(A, D)$ *i* $d(B, C) = d(B, D)$. *Tada je*

$$C = D.$$

Dokaz. Neka je $p = \widetilde{AB}$. Odaberimo $\preccurlyeq \in \widehat{p}$ takav da je $A \preccurlyeq B$. Neka je

$$r = \{T \in AB \mid A \preccurlyeq T\},$$

$$s = \{T \in AB \mid T \preccurlyeq A\}.$$

Vrijedi $A \preccurlyeq C$ ili $C \preccurlyeq A$.

1. slučaj: $A \preccurlyeq C$. Vrijedi $C \preccurlyeq B$ ili $B \preccurlyeq C$.

   (i) $C \preccurlyeq B$. Tada je $A \preccurlyeq C \preccurlyeq B$ pa je $C \in \overline{AB}$. Iz ovoga slijedi da je

   $$d(A, B) = d(A, C) + d(C, B).$$

   Dakle, $d(A, B) = d(A, D) + d(D, B)$ pa je

   $$D \in \overline{AB}.$$

   Stoga je $A \preccurlyeq D \preccurlyeq B$, posebno $A \preccurlyeq D$. Prema tome,

   $$C,\ D \in r \quad \text{i} \quad d(A, C) = d(A, D).$$

   Iz ovoga zaključujemo $C = D$.

   (ii) $B \preccurlyeq C$ Tada je $B \in \overline{AC}$ pa je

   $$d(A, C) = d(A, B) + d(B, C).$$

   Dakle $d(A, D) = d(A, B) + d(B, D)$ pa je

   $$B \in \overline{AD}.$$

   Pretpostavimo da je $D \preccurlyeq A$. Tada je

   $$D \preccurlyeq B \preccurlyeq A$$

   pa iz $A \preccurlyeq B$ slijedi $A = B$, kontradikcija. Dakle, $D \preccurlyeq A$ ne vrijedi pa je $A \preccurlyeq D$. Imamo

   $$C, D \in r \quad \text{i} \quad d(A, C) = d(A, D)$$

   pa je $C = D$.

2. slučaj: $C \preccurlyeq A$. Tada je $A \in \overline{CB}$ pa je $d(C, B) = d(C, A) + d(A, B)$, tj.

$$d(D, B) = d(D, A) + d(A, B)$$

iz čega zaključujemo da je $A \in \overline{DB}$. Pretpostavimo da je $B \preccurlyeq D$. Tada je

$$B \preccurlyeq A \preccurlyeq D$$

pa iz $A \preccurlyeq B$ slijedi $A = B$, kontradikcija. Stoga je $D \preccurlyeq B$ pa iz $A \in \overline{DB}$ slijedi $D \preccurlyeq A$. Imamo $C \preccurlyeq A$ i $D \preccurlyeq A$ pa su $C, D \in s$. Dakle $C = D$.

Time je lema dokazana. □

Propozicija 2.2.12. *Neka je $(M, \mathcal{L}, d)$ metrička ravnina, neka je $f : M \longrightarrow M$ izometrija ove ravnine te neka su $A, B \in M, A \neq B$. Pretpostavimo da su A i B fiksne točke of f. Tada je svaka točka od AB fiksna točka od f.*

Dokaz. Neka je $T \in AB$. Prema korolaru 2.2.10 vrijedi $f(AB) = f(A)f(B)$, tj.

$$f(AB) = AB$$

jer su A i B fiksne točke od f. Iz $T \in AB$ slijedi $f(T) \in f(AB)$ pa je $f(T) \in AB$.
Nadalje,

$$d(f(T), A) = d(f(T), f(A)) = d(T, A), \quad d(f(T), B) = d(f(T), f(B)) = d(T, B).$$

Prema tome,

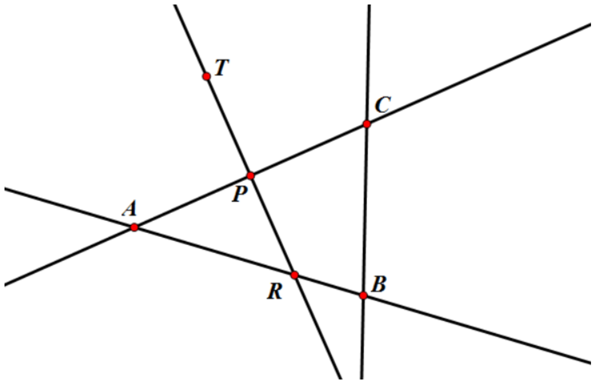
$$T, f(T) \in AB \quad \text{i} \quad d(T, A) = d(f(T), A), \quad d(T, B) = d(f(T), B).$$

Iz leme 2.2.11 slijedi

$$T = f(T).$$

Prema tome, T je fiksna točka od f. □

Korolar 2.2.13. *Neka je $(M, \mathcal{L}, d)$ metrička ravnina te neka je $f : M \longrightarrow M$ izometrija ove ravnine. Pretpostavimo da su A, B i C tri nekolinearne točke u ovoj ravnini takve da je svaka od njih fiksna točka od f. Tada je f identiteta na M.*



Slika 2.1: A, B, C nekolinearne fiksne točke od f

Dokaz. Ako je $T \in AC$ onda je T fiksna točka od f prema propoziciji 2.2.12. Pretpostavimo sada da $T \notin AC$. Neka je $P \in \overline{AC}$ točka takva da je

$$d(A, P) = d(P, C)$$

(takva točka postoji prema teoremu 2.1.7). Uočimo da je $P \neq A$ i $P \neq C$. Budući da je $P \in AC$, vrijedi

$$P \neq T.$$

Promotrimo pravac $q = \widetilde{TP}$. Pravac q siječe $\overline{AC}$ pa prema Paschovom aksiomu q siječe $\overline{AB}$ ili $\overline{BC}$.
Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da q siječe $\overline{AB}$.
Neka je $R \in \overline{AB}$ točka takva da je $R \in \overline{q}$, tj.

$$R \in TP.$$

Uočimo da je $P \neq R$, naime $P \in AC, R \in AB$, a jedina točka u presjeku $AC \cap AB$ je točka A koja je različita od P.
Iz $R \in PT$ slijedi $RP = PT$ pa je $T \in RP$. Točke R i P su fiksne točke od f što slijedi iz propozicije 2.2.12 i činjenice da je $P \in AC$ i $R \in AB$. Stoga je prema istoj propoziciji i T fiksna točka od f. Time smo dokazali da je

$$f(T) = T$$

za svaki $T \in M$, dakle f je identiteta na M. □

Lema 2.2.14. *Neka je $(M, \mathcal{L}, d)$ metrička ravnina. Neka je $f : M \longrightarrow M$ izometrija ove ravnine te neka su A, B, C tri nekolinearne točke u ovoj ravnini. Tada su i točke $f(A), f(B)$ i $f(C)$ nekolinearne.*

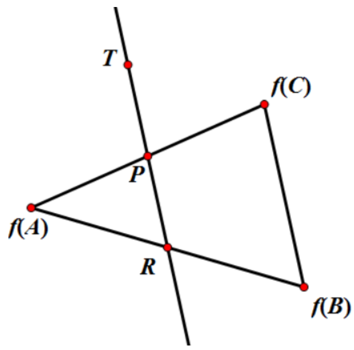
Dokaz. Pretpostavimo suprotno. Tada je

$$f(B) \in f(A)f(C), \quad \text{tj.} \quad f(B) \in f(AC).$$

Iz toga slijedi da postoji $T \in AC$ takav da je $f(B) = f(T)$. Budući da je f injekcija dobivamo da je $B = T$, tj. $B \in AC$. Ovo je u kontradikciji s pretpostavkom da su točke A, B, C nekolinearne.
Prema tome, $f(A), f(B), f(C)$ su nekolinearne točke. □

Teorem 2.2.15. *Neka je $(M, \mathcal{L}, d)$ metrička ravnina te neka je $f : M \longrightarrow M$ izometrija ove ravnine. Tada je f bijekcija.*

Dokaz. Znamo od prije da je f injekcija. Stoga je dovoljno pokazati da je f surjekcija. Odaberimo tri nekolinearne točke A, B i C. Tada su prema lemi 2.2.14 $f(A), f(B)$ i $f(C)$ tri nekolinearne točke. Neka je $T \in M$.



Slika 2.2: bijektivnost izometrije f

Dokažimo da je $T = f(T')$ za neku točku $T' \in M$. Ovo je jasno ako je $T \in f(A)f(C)$ jer je $f(A)f(C) = f(AC)$.
Pretpostavimo da $T \notin f(A)f(C)$. Odaberimo točku $P \in \overline{f(A)f(C)}$ takvu da je

$$d(P, f(A)) = d(P, f(C))$$

(teorem 2.1.7). Uočimo da je tada

$$P \neq f(A) \quad \text{i} \quad P \neq f(C).$$

Imamo $T \neq P$ jer je $P \in f(A)f(C)$. Neka je $q = \widetilde{TP}$. Pravac q siječe dužinu $\overline{f(A)f(C)}$ pa prema Paschovom aksiomu siječe

$$\overline{f(A)f(B)} \quad \text{ili} \quad \overline{f(B)f(C)}.$$

Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da siječe $\overline{f(A)f(B)}$. Označimo sa R točku u kojoj q siječe dužinu

$$\overline{f(A)f(B)},$$

tj.

$$R \in \overline{f(A)f(B)} \quad \text{i} \quad R \in PT.$$

Na isti način kao u dokazu korolara 2.2.13 zaključujemo da je $P \neq R$. Iz $R \in PT$ slijedi $T \in RP$. Iz $P \in \overline{f(A)f(C)} = f(\overline{AC})$ (propozicija 2.2.3) slijedi da je $P = f(P')$ za neki $P' \in \overline{AC}$. Isto tako iz $R \in \overline{f(A)f(B)} = f(\overline{AB})$ slijedi da je $R = f(R')$ za neki $R' \in \overline{AB}$.
Sada imamo

$$T \in RP = f(R')f(P'),$$

tj. $T \in f(R'P')$ pa slijedi da je

$$T = f(T') \quad \text{za neki} \quad T' \in R'P'.$$

Time smo dokazali da je f surjekcija. $\square$

Poglavlje 3

Topološka svojstva metričke ravnine

3.1 Metrički prostor

Definicija 3.1.1. *Neka je X neprazan skup te neka je $d : X \times X \to \mathbb{R}$ funkcija koja ima sljedeća svojstva:*

(i) $d(x, y) \geq 0, \forall x, y \in X$
$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(ii) $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X$

(iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \forall x, y, z \in X$ *(nejednakost trokuta).*

Tada za d kažemo da je metrika na X, a za uređeni par (X, d) da je metrički prostor.

Uočimo sljedeće: ako je $(M, \mathcal{L}, d)$ metrička ravnina, onda je (M, d) metrički prostor.

Propozicija 3.1.2. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka su $x, y, z \in X$.*
Tada je $|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y)$.

Dokaz. Dovoljno je dokazati da vrijedi:

(i) $d(x, z) - d(y, z) \leq d(x, y)$

(ii) $d(y, z) - d(x, z) \leq d(x, y)$.

Nejednakost (*i*) je ekvivalentna sa $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, a ovo očito vrijedi (nejednakost trokuta). Prema tome (*i*) vrijedi. Isto tako, nejednakost (*ii*) je ekvivalentna nejednakosti $d(y, z) \leq d(y, x) + d(x, z)$, dakle (*ii*) vrijedi. $\square$

Definicija 3.1.3. *Neka je (X, d) metrički prostor, $x_0 \in X$ i $r \in \mathbb{R}, r > 0$.*
Definiramo $K(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) < r\}$. Za $K(x_0, r)$ kažemo da je otvorena kugla oko x_0 radijusa r.

Teorem 3.1.4. *Neka je $(M, \mathcal{L}, d)$ metrička ravnina te neka su $A, B \in M, A \neq B$.*
Neka je $C \in M$ točka takva da $C \notin AB$. Neka je:

$$\lambda_C = d(A, C) + d(C, B) - d(A, B),$$

$$\lambda_B = d(A, B) + d(B, C) - d(A, C),$$

$$\lambda_A = d(B, A) + d(A, C) - d(B, C).$$

Neka je $\lambda = \frac{1}{2} \min\{\lambda_A, \lambda_B, \lambda_C\}$.
Tada je $\lambda > 0$ te je kugla $K(C, \lambda)$ čitava sadržana u jednoj poluvranini određenoj pravcem $\widetilde{AB}$.

Dokaz. Iz nejednakosti trokuta slijedi da je $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$. Stoga je $\lambda_C \geq 0$. Pretpostavimo da je $\lambda_C = 0$. Tada je

$$d(A, B) = d(A, C) + d(C, B)$$

pa slijedi da je

$$C \in \overline{AB}.$$

Ovo povlači da je $C \in AB$, kontradikcija. Stoga je $\lambda_C > 0$.
Analogno zaključujemo da je $\lambda_B \geq 0$ te da pretpostavka $\lambda_B = 0$ povlači $B \in \overline{AC}$, tj. $B \in AC$ pa je $AC = AB$, tj. $C \in AB$, kontradikcija. Stoga je $\lambda_B > 0$.
Analogno dobivamo da je $\lambda_A > 0$. Iz ovoga zaključujemo da je $\lambda > 0$.
Neka je K poluravnina određena pravcem AB tako da je $C \in K$. Tvrdimo da je

$$K(C, \lambda) \subseteq K.$$

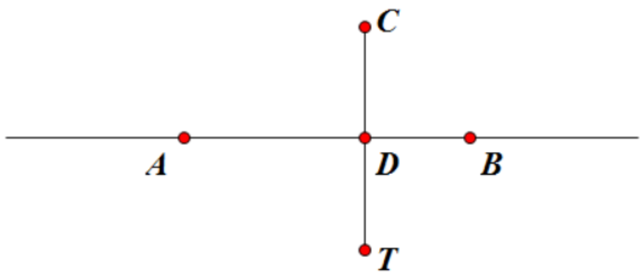
Neka je $T \in K(C, \lambda)$. Pretpostavimo da $T \notin K$. Ako je $T \in AB$, onda dužina $\overline{CT}$ očito siječe AB. Ako $T \notin AB$ onda se T nalazi u poluravnini određenoj s AB koja je različita od K pa slijedi da $\overline{CT}$ siječe AB. Dakle, u oba slučaja imamo

$$\overline{CT} \cap AB \neq \emptyset.$$

Neka je $D \in \overline{CT} \cap AB$.

Iz $D \in \overline{CT}$ slijedi da je $d(C, D) + d(D, T) = d(C, T)$ pa je

$$d(C, D) \leq d(C, T).$$



Slika 3.1: $D \in \overline{AB}$

No $d(C, T) < \lambda$ jer je $T \in K(C, \lambda)$. Stoga je $d(C, D) < \lambda$. Iz $D \in AB$ slijedi, prema propoziciji 1.2.3 da je

$$D \in \overline{AB} \quad \text{ili} \quad A \in \overline{DB} \quad \text{ili} \quad B \in \overline{AD}.$$

1. slučaj $D \in \overline{AB}$. Tada je

$$d(A, B) = d(A, D) + d(D, B).$$

Imamo

$$\lambda \leq \frac{1}{2}\lambda_C, \quad \text{pa je} \quad 2\lambda \leq \lambda_C,$$

dakle

$$2\lambda \leq d(A, C) + d(C, B) - d(A, B).$$

Imamo

$$\begin{aligned} 2\lambda &\leq d(A, C) + d(C, B) - d(A, B) \\ &= d(A, C) + d(C, B) - (d(A, D) + d(D, B)) \\ &= d(A, C) + d(C, B) - d(A, D) - d(D, B) \\ &= (d(A, C) - d(A, D) + (d(C, B) - d(D, B)) \\ &\leq |d(A, C) - d(A, D)| + |d(C, B) - d(D, B)|. \end{aligned}$$

Dakle,

$$2\lambda \leq |d(A, C) - d(A, D)| + |d(C, B) - d(D, B)|.$$

Prema propoziciji 3.1.2 vrijedi

$$|d(A,C) - d(A,D)| \leq d(C,D) < \lambda,$$

$$|d(C,B) - d(D,B)| \leq d(C,D) < \lambda.$$

Slijedi $2\lambda < 2\lambda$, kontradikcija.

2. slučaj $A \in \overline{DB}$. Tada je

$$d(D,B) = d(D,A) + d(A,B),$$

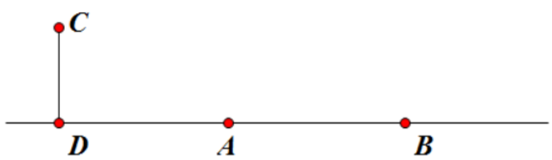
pa je

$$d(A,B) = d(D,B) - d(D,A).$$

Imamo:

$$\begin{aligned}
\lambda \leq \lambda_A &= d(C,A) + d(A,B) - d(C,B) \\
&= d(C,A) + d(D,B) - d(D,A) - d(C,B) \\
&= (d(C,A) - d(D,A)) + (d(D,B) - d(C,B)) \\
&\leq |d(C,A) - d(D,A)| + |d(D,B) - d(C,B)| \\
&\leq d(C,D) + d(C,D) \\
&< \lambda + \lambda = 2\lambda.
\end{aligned}$$

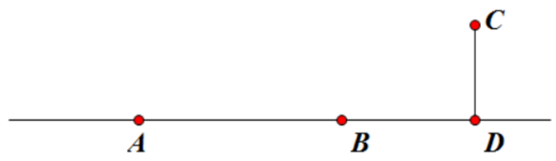
Dakle, $2\lambda < 2\lambda$, kontradikcija.



Slika 3.2: $A \in \overline{DB}$

3. slučaj $B \in \overline{AD}$.
Tada je

$$d(A,D) = d(A,B) + d(B,D),$$



Slika 3.3: $B \in \overline{AD}$

pa je

$$d(A, B) = d(A, D) - d(B, D).$$

Slijedi

$$\begin{aligned} 2\lambda \leq \lambda_B &= d(A, B) + d(B, C) - d(A, C) \\ &= d(A, D) - d(B, D) + d(B, C) - d(A, C) \\ &= (d(A, D) - d(A, C)) + (d(B, C) - d(B, D)) \\ &\leq d(C, D) + d(C, D) \\ &< \lambda + \lambda = 2\lambda. \end{aligned}$$

Dakle, $2\lambda < 2\lambda$, kontradikcija.
Zaključak: $T \in K$. Time smo dokazali da je $K(C, \lambda) \subseteq K$.

□

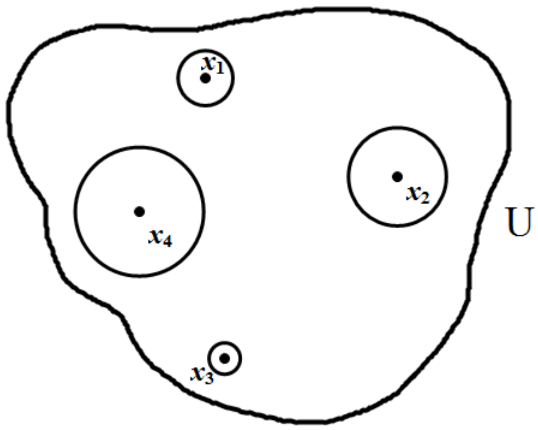
3.2 Otvoreni i zatvoreni skupovi

Definicija 3.2.1. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je $U \subseteq X$. Za U kažemo da je* ***otvoren skup*** *u metričkom prostoru (X, d) ako za svaki $x \in U$ postoji $r > 0$ tako da je:*

$$K(x, r) \subseteq U.$$

(Vidi sliku 3.4)

Propozicija 3.2.2. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka su $x_0 \in X$ i $r > 0$. Tada je $K(x_0, r)$ otvoren skup u (X, d).*



Slika 3.4: otvorenost skupa

Dokaz. Neka je $x_1 \in K(x_0, r)$. Tada je $d(x_1, x_0) < r$ pa je $r - d(x_1, x_0) > 0$.
Neka je $r_1 = r - d(x_1, x_0)$. Tvrdimo da je:

$$K(x_1, r_1) \subseteq K(x_0, r). \tag{3.1}$$

Neka je $x \in K(x_1, r_1)$. Tada je $d(x, x_1) < r_1$. Vrijedi:

$$d(x_0, x) \leq d(x_0, x_1) + d(x_1, x) < d(x_0, x_1) + r_1 = d(x_0, x_1) + r - d(x_1, x_0) = r$$

Dakle,

$$d(x_0, x) < r$$

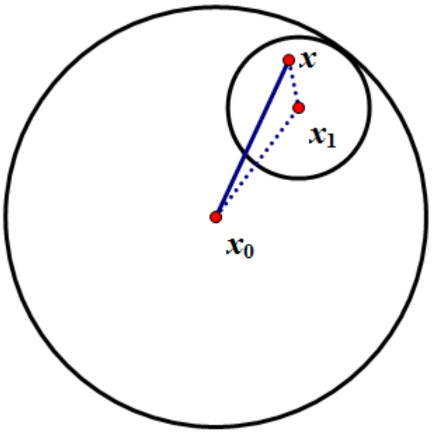
pa je $x \in K(x_0, r)$. Prema tome, dokazali smo (3.1).
Zaključak: $K(x_0, r)$ je otvoren skup.

□

Propozicija 3.2.3. *Neka je $(M, \mathcal{L}, d)$ metrička ravnina, neka je $p \in \mathcal{L}$ te neka je K poluravnina određena pravcem p. Tada je K otvoren skup u $(M, \mathcal{L}, d)$ (tj. u metričkom prostoru (M, d)).*

Dokaz. Odaberimo $A, B \in \overline{p}$ takve da je $A \neq B$. Neka je $C \in K$. Tada $C \notin \overline{p}$, tj. $C \notin AB$.
Definiramo:

$$\lambda_C = d(A, C) + d(C, B) - d(A, B)$$
$$\lambda_B = d(A, B) + d(B, C) - d(A, C)$$
$$\lambda_A = d(B, A) + d(A, C) - d(B, C)$$



Slika 3.5: otvorena kugla je otvoren skup

te

$$\lambda = \frac{1}{2}\min\{\lambda_A, \lambda_B, \lambda_C\}.$$

Prema teoremu 3.1.4 vrijedi da je $\lambda > 0$ te da je $K(C, \lambda)$ čitava sadržana u jednoj poluravnini određenoj pravcem p. No, $C \in K(C, \lambda)$ i $C \in K$ pa slijedi da je $K(C, \lambda) \subseteq K$.

Time smo dokazali da je K otvoren skup u $(M, \mathcal{L}, d)$. □

Definicija 3.2.4. *Neka je X skup. Za $\mathcal{F}$ kažemo da je **familija podskupova** od X ako je $\mathcal{F}$ skup čiji elementi su podskupovi od X.*

Primjer 3.2.5. *(i) Neka je $\mathcal{F} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}\}$. Tada je $\mathcal{F}$ familija podskupova od $\{1, 2, 3\}$. Nadalje, $\mathcal{F}$ je familija podskupova i od $\mathbb{N}$.*

(ii) Neka je $\mathcal{F} = \{\langle 0, n\rangle \mid n \in \mathbb{N}\}$. Tada je $\mathcal{F}$ familija podskupova od $\mathbb{R}$. Uočimo da je $\bigcup_{V\in\mathcal{F}} V = \langle 0, \infty\rangle$.

Propozicija 3.2.6. *Neka je (X, d) metrički prostor.*

(i) $\emptyset$ i X su otvoreni skupovi u (X, d).

(ii) Ako je $\mathcal{F}$ familija otvorenih skupova u (X, d) (tj. $\mathcal{F}$ je skup čiji elementi su otvoreni podskupovi od (X, d)), onda je $\bigcup_{V\in\mathcal{F}} V$ otvoren skup u (X, d).

(iii) Ako su U i V otvoreni skupovi u (X, d), onda je $U \cap V$ otvoren skup u (X, d).

Dokaz. Tvrdnja (i) je očita.
Dokažimo (ii). Neka je $\mathcal{F}$ familija otvorenih skupova u (X, d). Želimo dokazati da je $\bigcup_{V \in \mathcal{F}} V$ otvoren skup u (X, d). Neka je $x \in \bigcup_{V \in \mathcal{F}} V$. Tada je $x \in V_1$ za neki $V_1 \in \mathcal{F}$. Budući da je V_1 otvoren skup postoji $r > 0$ tako da je $K(x, r) \subseteq V_1$. Imamo $V_1 \subseteq \bigcup_{V \in \mathcal{F}} V$ pa je

$$K(x, r) \subseteq \bigcup_{V \in \mathcal{F}} V.$$

Time je tvrdnja (ii) dokazana.
Dokažimo (iii). Neka su U i V otvoreni skupovi u (X, d). Neka je $x \in U \cap V$. Tada je $x \in U$ i $x \in V$. Budući da je U otvoren, postoji $r_1 > 0$ tako da je $K(x, r_1) \subseteq U$. Isto tako budući da je V otvoren, postoji $r_2 > 0$ tako da je $(x, r_2) \subseteq V$.
Vrijedi $r_1 \leq r_2$ ili $r_2 \leq r_1$.
Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $r_1 \leq r_2$. Tada je

$$K(x, r_1) \subseteq K(x, r_2)$$

pa je $K(x, r_1) \subseteq V$. Ovo zajedno s $K(x, r_1) \subseteq U$ povlači da je

$$K(x, r_1) \subseteq U \cap V.$$

Prema tome $U \cap V$ je otvoren skup. □

Napomena 3.2.7. *Neka je (X, d) metriči prostor te neka su U_1 i U_2 otvoreni skupovi u (X, d). Tada je $U_1 \cup U_2$ otvoren skup u (X, d). Naime, neka je $\mathcal{F} = \{U_1, U_2\}$. Tada je $\mathcal{F}$ familija otvorenih skupova u (X, d) pa je prema propoziciji 3.2.6 $\bigcup_{V \in \mathcal{F}} V$ otvoren skup u (X, d). No $\bigcup_{V \in \mathcal{F}} V = U_1 \cup U_2$.*

Definicija 3.2.8. *Neka je (X, d) metrički prostor, te $F \subseteq X$. Za F kažemo da je **zatvoren skup** u (X, d) ako je F^c, tj. $X \setminus F$ otvoren skup u (X, d).*

Propozicija 3.2.9. *Neka je (X, d) metrički prostor, te neka je $x_0 \in X$. Tada je jednočlan skup $\{x_0\}$ zatvoren u (X, d).*

Dokaz. Neka je $x \in \{x_0\}^c$. Tada $x \notin \{x_0\}$ pa je $x \neq x_0$. Neka je $r = d(x, x_0)$. Očito je $r > 0$. Tvrdimo da je

$$K(x, r) \subseteq \{x_0\}^c \tag{3.2}$$

Neka je $y \in K(x, r)$. Tada je $d(y, x) < r$, tj. $d(y, x) < d(x_0, x)$. Stoga je $y \neq x_0$ pa je $y \in \{x_0\}^c$.
Prema tome, (3.2) vrijedi.
Zaključujemo da je $\{x_0\}^c$ otvoren skup pa je $\{x_0\}$ zatvoren skup. □

Propozicija 3.2.10. *Neka je $(M, \mathcal{L}, d)$ metrička ravnina te neka je $p \in \mathcal{L}$. Tada je $\overline{p}$ zatvoren skup u toj ravnini, tj. zatvoren skup u metričkom prostoru (M, d).*

Dokaz. Neka su K i L poluravnine u $(M, \mathcal{L}, d)$ određene pravcem p. Tada je

$$M \setminus \overline{p} = K \cup L.$$

Prema propoziciji 3.2.3 skupovi K i L su otvoreni u $(M, \mathcal{L}, d)$ pa je prema napomeni 3.2.7 $K \cup L$ otvoren skup u $(M, \mathcal{L}, d)$. Dakle, $M \setminus \overline{p}$ je otvoren skup pa je $\overline{p}$ zatvoren skup. □

Primjer 3.2.11. *Neka je X neprazan skup te neka je $d : X \times X \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa*

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

za sve $x, y \in X$.
Tvrdimo da je d metrika na X.
Očito je da vrijede svojstva (i) i (ii) iz definicije metričkog prostora (definicija 3.1.1).

Neka su $x, y, z \in X$.
Prvi slučaj $x \neq z$ ili $y \neq z$. Onda je $d(x, z) = 1$ ili $d(z, y) = 1$ pa je $1 \leq d(x, z) + d(z, y)$ iz čega slijedi da je $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Drugi slučaj $x = z$ i $y = z$.
Tada je $x = y$ pa je $d(x, y) = d(x, z) = d(z, y) = 0$ te očito vrijedi $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.
Dakle, d je zaista metrika na X.
Za d kažemo da je ***diskretna metrika*** *na X.*

Neka je $x_0 \in X$. Tada je $K(x_0, 1) = \{x_0\}$.
Štoviše, za svaki $r \in \langle 0, 1]$ vrijedi

$$K(x_0, r) = \{x_0\}.$$

Uočimo također da je za svaki $r > 1$

$$K(x_0, r) = X.$$

Jednočlan skup $\{x_0\}$ je otvoren skup jer za svaki $r \in \langle 0, 1]$ vrijedi $K(x_0, r) \subseteq \{x_0\}$.

Uočimo sljedeće: ako je (X, d) metrički prostor, onda su $\emptyset$ i X zatvoreni skupovi u (X, d). Dakle, $\emptyset$ i X su i otvoreni i zatvoreni skupovi u (X, d). No to ne moraju biti jedini skupovi koji su i otvoreni i zatvoreni u (X, d). Prethodni primjer pokazuje da jednočlani skupovi mogu biti otvoreni, a znamo (propozicija 3.2.9) da su jednočlani skupovi uvijek zatvoreni.

Primjer 3.2.12. *Neka je $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa*

$$d(x, y) = |x - y|$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Dokažimo da je d metrika na $\mathbb{R}$.
Jasno je da svojstva (i) i (ii) iz definicije metričkog prostora (definicija 3.1.1) vrijede.
Neka su $x, y, z \in \mathbb{R}$. Imamo:

$$d(x, y) = |x - y| = |x - z + z - y|,$$

a

$$|x - z + z - y| \leq |x - z| + |z - y| = d(x, z) + d(z, y).$$

Prema tome

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

Dakle, d je zaista metrika na $\mathbb{R}$. Za d kažemo da je ***euklidska metrika*** *na $\mathbb{R}$.*

Primjer 3.2.13. *Neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}$. Neka su $x \in \mathbb{R}$ i $r > 0$.*
Tada je:

$$\begin{aligned} K(x, r) &= \{y \in \mathbb{R} \mid d(x, y) < r\} = \{y \in \mathbb{R} \mid |x - y| < r\} = \\ &= \{y \in \mathbb{R} \mid x - y < r \ \ i \ \ y - x < r\} = \{y \in \mathbb{R} \mid x - r < y \ \ i \ \ y < x + r\} = \\ &= \langle x - r, x + r\rangle. \end{aligned}$$

Dakle,

$$K(x, r) = \langle x - r, x + r\rangle.$$

Nadalje, ako su $a, b, \in \mathbb{R}$, $a < b$. Tada je

$$\langle a, b\rangle = \left\langle \frac{a + b}{2} - \frac{b - a}{2}, \frac{a + b}{2} + \frac{b - a}{2} \right\rangle$$

pa je

$$\langle a, b\rangle = K\left(\frac{a + b}{2}, \frac{b - a}{2}\right).$$

Iz ovoga i propozicije 3.2.2 slijedi da je $\langle a, b\rangle$ otvoren skup u $(\mathbb{R}, d)$ za sve $a, b \in \mathbb{R}, a < b$.

Primjer 3.2.14. *Neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}$. Tada niti jedan jednočlan podskup od $\mathbb{R}$ nije otvoren u metričkom prostoru $(\mathbb{R}, d)$.*

Pretpostavimo suprotno, da postoji $x \in \mathbb{R}$ takav da je $\{x\}$ otvoren skup u $(\mathbb{R}, d)$. Imamo $x \in \{x\}$ pa postoji $r > 0$ takav da je

$$K(x, r) \subseteq \{x\}.$$

Prema primjeru 3.2.13 vrijedi $K(x, r) = \langle x - r, x + r\rangle$ *pa je*

$$\langle x - r, x + r\rangle \subseteq \{x\}.$$

No ovo je očito nemoguće: sigurno postoji realan broj z *takav da je* $x - r < z < x$ *pa za takav* z *vrijedi* $z \in \langle x - r, x + r\rangle$*, ali* $z \notin \{x\}$.

Dakle, niti jedan jednočlan podskup od $\mathbb{R}$ *nije otvoren u* $(\mathbb{R}, d)$.

Primjer 3.2.15. *Neka je* d *euklidska metrika na* $\mathbb{R}$. *Neka je* $a \in \mathbb{R}$. *Tada je* $\langle a, \infty\rangle$ *otvoren skup u* $(\mathbb{R}, d)$. *Dokažimo to.*

Neka je

$$\mathcal{F} = \{\langle a, b\rangle \mid b > a\}.$$

Tada je $\mathcal{F}$ *familija otvorenih skupova u* $(\mathbb{R}, d)$ *prema primjeru 3.2.13. Stoga je prema propoziciji 3.2.6* $\bigcup_{V\in\mathcal{F}} V$ *otvoren skup u* $(\mathbb{R}, d)$. *No*

$$\bigcup_{V\in\mathcal{F}} V = \langle a, \infty\rangle,$$

dakle $\langle a, \infty\rangle$ *je otvoren skup u* $(\mathbb{R}, d)$.

Posve analogno dobivamo da je $\langle -\infty, a\rangle$ *otvoren skup u* $(\mathbb{R}, d)$.

Iz ovog odmah slijedi da su $\langle -\infty, a]$ *i* $[a, \infty\rangle$ *zatvoreni skupovi u* $(\mathbb{R}, d)$.

Skup $[a, \infty\rangle$ *nije otvoren u* $(\mathbb{R}, d)$. *Pretpostavimo suprotno.*
Imamo $a \in [a, \infty\rangle$ *pa postoji* $r > 0$ *takav da je* $K(a, r) \subseteq [a, \infty\rangle$*, tj.*

$$\langle a - r, a + r\rangle \subseteq [a, \infty\rangle.$$

Slično kao u primjeru 3.2.14 vidimo da je ovo nemoguće. Prema tome $[a, \infty\rangle$ *nije otvoren skup u* $(\mathbb{R}, d)$.

Analogno dobivamo da $\langle -\infty, a]$ *nije otvoren skup u* $(\mathbb{R}, d)$.

Propozicija 3.2.16. *Neka je* $(M, \mathcal{L}, d)$ *metrička ravnina.*

(i) Neka je $A \in M$. *Tada jednočlan skup* $\{A\}$ *nije otvoren u* $(M, \mathcal{L}, d)$.

(ii) Neka je $p \in \mathcal{L}$. *Tada* $\overline{p}$ *nije otvoren skup u* $(M, \mathcal{L}, d)$.

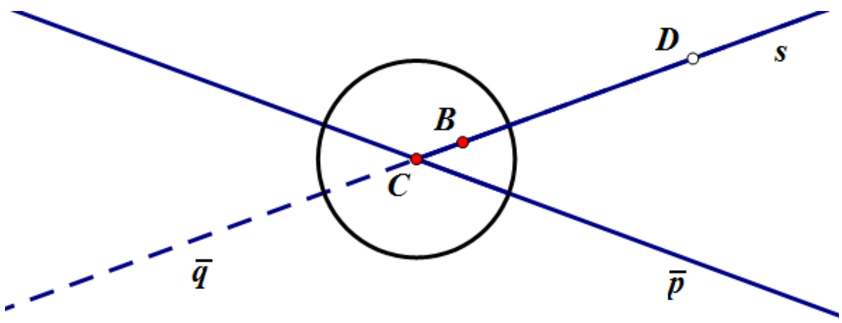
Dokaz. (i) Pretpostavimo da je $\{A\}$ otvoren skup u $(M, \mathcal{L}, d)$. Tada postoji $r > 0$ takav da je

$$K(A, r) \subseteq \{A\}. \tag{3.3}$$

Odaberimo pravac $p \in \mathcal{L}$ takav da je $A \in \overline{p}$ (propozicija 1.3.3).
Neka je s polupravac od p s vrhom A. Prema svojstvu (iv) iz definicije metričke ravnine (definicija 2.1.1) postoji $B \in s$ takav da je $d(A, B) = \frac{r}{2}$.
Tada je $d(A, B) < r$ pa je $B \in K(A, r)$.
Iz (3.3) slijedi da je $B \in \{A\}$, tj. $B = A$ pa je $d(A, B) = 0$. Ovo je nemoguće jer je $d(A, B) = \frac{r}{2} > 0$.
Zaključak: jednočlan skup $\{A\}$ nije otvoren u $(M, \mathcal{L}, d)$.

(ii) Pretpostavimo da je $\overline{p}$ otvoren skup u $(M, \mathcal{L}, d)$.
Odaberemo $C \in \overline{p}$. Tada postoji $r > 0$ takav da je

$$K(C, r) \subseteq \overline{p}. \tag{3.4}$$



Slika 3.6: $\overline{p}$ nije otvoren skup

Odaberimo $D \in M$ takav da $D \notin \overline{p}$. Neka je $q \in \mathcal{L}$ takav da su $C, D \in \overline{q}$. Očito je $p \neq q$ pa zaključujemo da je

$$\overline{p} \cap \overline{q} = \{C\}. \tag{3.5}$$

Neka je s polupravac od q s vrhom C. Tada postoji $B \in s$ tako da je

$$d(C, B) = \frac{r}{2}. \tag{3.6}$$

Tada je $d(C, B) < r$ pa je $B \in K(C, r)$. Iz (3.4) slijedi da je $B \in \overline{p}$. Jasno je da je $B \in \overline{q}$. Stoga je $B \in \overline{p} \cap \overline{q}$, tj. prema (3.5) $B \in \{C\}$. Dakle, $B = C$, a to je u kontradikciji s (3.6) Time smo dokazali da $\overline{p}$ nije otvoren skup u $(M, \mathcal{L}, d)$. □

3.3 Udaljenost točaka i aproksimacija dužine

Definicija 3.3.1. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka su S i T neprazni podskupovi od X. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada pišemo*

$$S <_\varepsilon T$$

ako za svaki $x \in S$ postoji $y \in T$ takav da je $d(x, y) < \varepsilon$.

Uočimo sljedeće: ako je (X, d) metrički prostor te S i T neprazni podskupovi od X takvi da je $S \subseteq T$, onda je $S <_\varepsilon T$ za svaki $\varepsilon > 0$. Naime, za svaki $x \in S$ vrijedi $x \in T$ i $d(x, x) = 0 < \varepsilon$, za svaki $\varepsilon > 0$.

Definicija 3.3.2. *Neka je (X, d) metrički prosto, $S \subseteq X$, $x \in X$ i $\varepsilon > 0$. Pišemo*

$$x <_\varepsilon S$$

ako postoji $y \in S$ takav da je $d(x, y) < \varepsilon$.

Uočimo sljedeće: ako je (X, d) metrički prostor, S i T neprazni podskupovi od X te $\varepsilon > 0$, onda vrijedi $S <_\varepsilon T$ ako i samo ako $x <_\varepsilon T$ za svaki $x \in S$.

Teorem 3.3.3. *Neka je $(M, \mathcal{L}, d)$ metrička ravnina, neka su $A, B \in M$ te neka su $n \in \mathbb{N}$ i $T_0, ..., T_n \in M$ točke takve da je $d(A, T_0) < \varepsilon$, $d(B, T_n) < \varepsilon$ i $d(T_i, T_{i+1}) < \varepsilon$ za svaki $i \in \{0, ..., n-1\}$ te*

$$T_i <_\varepsilon \overline{AB}$$

za svaki $i \in \{0, ..., n\}$. Tada je

$$\overline{AB} \prec_{4\varepsilon} \{T_0, ..., T_n\}.$$

Dokaz. Neka je $i \in \{0, ..., n\}$. Tada postoji točka $D_i \in \overline{AB}$ takva da je

$$d(T_i, D_i) < \varepsilon.$$

Imamo

$$d(A, D_0) \leq d(A, T_0) + d(T_0, D_0) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

dakle

$$d(A, D_0) < 2\varepsilon. \tag{3.7}$$

Analogno dobivamo

$$d(B, D_n) < 2\varepsilon.$$

Neka je $i \in \{0, ..., n-1\}$. Tada je

$$\begin{aligned} d(D_i, D_{i+1}) &\leq d(D_i, T_i) + d(T_i, D_{i+1}) \\ &\leq d(D_i, T_i) + d(T_i, T_{i+1}) + d(T_{i+1}, D_{i+1}) \\ &< \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon, \end{aligned}$$

dakle

$$d(D_i, D_{i+1}) < 3\varepsilon.$$

Neka je $C \in \overline{AB}$. Neka je p pravac takav da su $A, B \in \overline{p}$. Odaberimo $\preceq \in \widehat{p}$ takav da je $A \preceq B$. Tada je $A \preceq C \preceq B$.

1. slučaj: $C \preceq D_0$. Tada je $A \preceq C \preceq D_0$ pa je $C \in \overline{AD_0}$ iz čega slijedi da je

$$d(A, C) + d(C, D_0) = d(A, D_0)$$

pa je $D(C, D_0) \leq d(A, D_0)$. Stoga je prema (3.7)

$$d(C, D_0) < 2\varepsilon.$$

2. slučaj: $D_0 \preceq C$. Tada je $\{i \in \{0, ..., n\} \mid D_i \preceq C\}$ neprazan podskup od $\{0, ..., n\}$ pa neka je

$$k = \max \{i \in \{0, ..., n\} \mid D_i \preceq C\}.$$

Tada je $D_k \preceq C$.

(i) $k = n$.
Tada je $D_n \preceq C \preceq B$ pa je $C \in \overline{D_n B}$ iz čega slijedi da je $d(C, D_n) \leq d(D_n, B)$. Stoga je

$$d(C, D_n) < 2\varepsilon.$$

(ii) $k < n$.
Tada je $k + 1 \in \{0, ..., n\}$ pa iz definicije broja k slijedi da ne vrijedi $D_{k+1} \preceq C$. Stoga je $C \preceq D_{k+1}$ pa imamo:

$$D_k \preceq C \preceq D_{k+1}.$$

Dakle, $C \in \overline{D_k D_{k+1}}$ pa je $d(C, D_k) \leq d(D_k, D_{k+1})$. Stoga je

$$d(C, D_k) < 3\varepsilon.$$

U svakom slučaju postoji $i \in \{0, ..., n\}$ takav da je $d(C, D_i) < 3\varepsilon$. Imamo

$$d(C, T_i) \leq d(C, D_i) + d(D_i, T_i) < 3\varepsilon + \varepsilon = 4\varepsilon.$$

Dakle,

$$d(C, T_i) < 4\varepsilon.$$

Prema tome, $\overline{AB} <_{4\varepsilon} \{T_0, ..., T_n\}$. □

Teorem 3.3.4. *Neka je $(M, \mathcal{L}, d)$ metrička ravnina te neka su $A, B, C \in M, A \neq B$. Neka je*

$$\varepsilon = \min\left\{\frac{d(A,C)}{4}, \frac{d(C,B)}{4}\right\}.$$

Pretpostavimo da je

$$d(A,C) + d(C,B) - d(A,B) < \varepsilon \tag{3.8}$$

te da je $C' \in AB$ točka takva da je $d(C,C') < \varepsilon$. Tada je

$$C' \in \overline{AB}.$$

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. $C' \notin \overline{AB}$. Iz propozicije 1.2.3 slijedi da je tada $A \in \overline{C'B}$ ili $B \in \overline{AC'}$.

1. slučaj: $A \in \overline{C'B}$.
   Tada je $d(C',B) = d(C',A) + d(A,B)$ pa je

   $$\begin{aligned} d(A,C') + d(C',B) - d(A,B) &= d(A,C') + d(C',A) + d(A,B) - d(A,B) \\ &= 2d(A,C'), \end{aligned}$$

   dakle

   $$d(A,C') + d(C',B) - d(A,B) = 2d(A,C'). \tag{3.9}$$

   Iz propozicije 3.1.2 slijedi $|d(A,C) - d(A,C')| \leq d(C,C') < \varepsilon$ pa je

   $$|d(A,C) - d(A,C')| < \varepsilon. \tag{3.10}$$

   Također

   $$|d(B,C) - d(B,C')| < \varepsilon.$$

   Neka je $\delta = d(A,C') - d(A,C)$. Iz (3.10) slijedi $|\delta| < \varepsilon$. Tvrdimo da je

   $$\frac{3d(A,C)}{2} < 2d(A,C) + 2\delta. \tag{3.11}$$

   Naime, imamo

   $$-\delta \leq |\delta| < \varepsilon \leq \frac{d(A,C)}{4},$$

   dakle $-\delta < \frac{d(A,C)}{4}$ pa je $0 < \frac{d(A,C)}{4} + \delta$. Množenjem s 2 te pribrajanjem lijevoj i desnoj strani $\frac{3}{2}d(A,C)$ dobivamo (3.11). Iz (3.8) slijedi

   $$d(A,C) + d(C,B) - d(A,B) < \frac{d(A,C)}{4}. \tag{3.12}$$

S druge strane, iz (3.9) i definicije broja δ slijedi

$$d(A,C') + d(C',B) - d(A,B) = 2d(A,C) + 2\delta. \tag{3.13}$$

Neka je

$$\begin{aligned} x &= d(A,C) + d(C',B) - d(A,B) \\ y &= d(A,C') + d(C',B) - d(A,B). \end{aligned}$$

Prema (3.12) i (3.13) i (3.11) vrijedi

$$x < \frac{d(A,C)}{4} < 2d(A,C) + 2\delta = y.$$

Dakle,

$$x < \frac{d(A,C)}{4} < y. \tag{3.14}$$

Slijedi $\frac{-d(A,C)}{4} < -x$ pa je $y - \frac{d(A,C)}{4} < y - x$. No prema (3.14) ovi brojevi su pozitivni pa je

$$\left| y - \frac{d(A,C)}{4} \right| < |y - x| \tag{3.15}$$

Imamo

$$\begin{aligned} |y - x| &= |d(A,C') + d(C',B) - d(A,B) - d(A,C) - d(C,B) + d(A,B)| \\ &= |d(A,C') - d(A,C) + d(C',B) - d(C,B)| \\ &\leq |d(A,C') - d(A,C)| + |d(C',B) - d(C,B)| \\ &< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \end{aligned}$$

Dakle,

$$|y - x| < 2\varepsilon.$$

pa iz (3.15) slijedi

$$\left| y - \frac{d(A,C)}{4} \right| < 2\varepsilon.$$

S druge strane, koristeći (3.11) dobivamo:

$$\left| y - \frac{d(A,C)}{4} \right| = y - \frac{d(A,C)}{4} = 2d(A,C) + 2\delta - \frac{d(A,C)}{4} > \frac{3}{2}d(A,C) - \frac{1}{4}d(A,C) = 5\frac{d(A,C)}{4} \geq 5\varepsilon.$$

Dakle,

$$5\varepsilon \leq \left| y - \frac{d(A,C)}{4} \right| < 2\varepsilon,$$

kontradikcija.

2. slučaj: $B \in \overline{AC'}$.
   Na isti način kao u prethodnom slučaju dobivamo kontradikciju.

Zaključak: $C' \in \overline{AB}$. □

Lema 3.3.5. *Neka su x, y, x', y', μ realni brojevi takvi da je $|x - x'| < \mu$ i $|y - y'| < \mu$. Tada je*

$$|\min\{x, y\} - \min\{x', y'\}| < \mu. \tag{3.16}$$

Dokaz.

1. slučaj: $x \leq y$.

   (i) $x' \leq y'$.
   Tada je

   $$|\min\{x, y\} - \min\{x', y'\}| = |x - x'| < \mu.$$

   Dakle, vrijedi (3.16)

   (ii) $y' \leq x'$.
   Tada je

   $$|\min\{x, y\} - \min\{x', y'\}| = |x - y'|.$$

   Ako je $x \leq y'$, onda je $x \leq y' \leq x'$ pa je $0 \leq y' - x \leq x' - x < \mu$, tj.

   $$|x - y'| < \mu. \tag{3.17}$$

   Ako je $y' \leq x$, onda je $y' \leq x \leq y$ pa je $0 \leq x - y' \leq y - y' < \mu$ pa opet zaključujemo da vrijedi (3.17). Stoga u slučaju (ii) vrijedi (3.16).

2. slučaj: $y \leq x$.

   (i) $y' \leq x'$.
   Tada je $\min\{x, y\} = y$, $\min\{x', y'\} = y'$ pa (3.16) vrijedi.

   (ii) $x' \leq y'$.
   Tada je $\min\{x, y\} = y$, $\min\{x', y'\} = x'$. Ako je $y \leq x'$, onda je $y \leq x' \leq y'$ pa je

   $$|x' - y| \leq |y - y'| < \mu,$$

   a ako je $x' \leq y$, onda je $x' \leq y \leq x$ pa je

   $$|y - x'| \leq |x - x'| < \mu.$$

   Prema tome (3.16) vrijedi i u slučaju (ii).

Time je lema dokazana. □

Lema 3.3.6. *Neka je $(M, \mathcal{L}, d)$ metrička ravnina, neka je $p \in \mathcal{L}$ te neka je K poluravnina određena pravcem p. Tada za svaki $O \in \overline{p}$ i svaki $\varepsilon > 0$ postoji $T \in K$ takav da je*

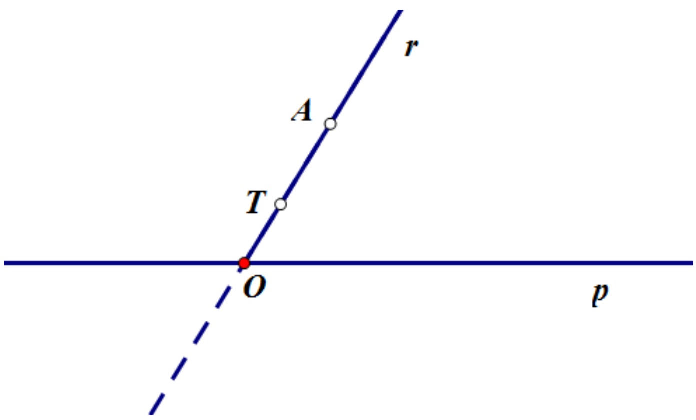
$$d(O, T) < \varepsilon.$$

Dokaz. Neka su $O \in \overline{p}$ i $\varepsilon > 0$. Odaberimo točku $A \in K$. Tada $A \notin \overline{p}$ pa je $A \neq O$. Neka je $q \in \mathcal{L}$ takav da su $O, A \in \overline{q}$. Odaberimo $\preceq \in \widehat{q}$ takav da $O \preceq A$. Neka je

$$r = \{T \in \overline{q} \mid O \preceq T\}.$$

Tada je r polupravac s vrhom O. Prema svojstvu (iv) iz definicije 2.1.1 postoji $T \in r$ takav da je

$$d(O, T) = \frac{\varepsilon}{2} \tag{3.18}$$



Slika 3.7: pravac p i polupravac r

Tvrdimo da je $T \in K$. Uočimo prije svega da je $O \neq T$. Nadalje $q \neq p$ (jer je $A \in \overline{q}$, ali $A \notin \overline{p}$), stoga je

$$\overline{p} \cap \overline{q} = \{O\}. \tag{3.19}$$

Pretpostavimo da $T \notin K$. Zbog (3.19) imamo $T \notin \overline{p}$ pa je stoga $T \in M \setminus \overline{p}$. Slijedi da je

$$\overline{TA} \cap \overline{p} \neq \emptyset.$$

Odaberimo točku $P \in \overline{TA}$ takvu da je $P \in \overline{p}$. Iz $P \in \overline{TA}$ slijedi $P \in \overline{q}$ pa iz (3.19) zaključujemo da je $P = O$. Stoga je

$$O \in \overline{TA}. \tag{3.20}$$

Iz $T \in r$ slijedi $O \preceq T$.

1. slučaj: $T \preceq A$.
   Tada iz (3.20) slijedi $T \preceq O \preceq A$. Stoga imamo $T \preceq O$ i $O \preceq T$ pa je $O = T$ što je u kontradikciji s (3.18).

2. slučaj:$A \preceq T$.
   Tada je $A \preceq O \preceq T$ pa zbog $O \preceq A$ imamo $O = A$, kontradikcija.

Prema tome $T \in K$ i time je tvrdnja leme dokazana (iz (3.18) očito slijedi $d(O,T) < \varepsilon$). □

Teorem 3.3.7. *Neka je $(M, \mathcal{L}, d)$ metrička ravnina, neka su $A, B \in M$, $A \neq B$, te $C' \in \overline{AB}$ točka takva da je $C' \neq A$ i $C' \neq B$. Tada postoji $r > 0$ takav da za svaki $C \in K(C', r)$ vrijedi sljedeće: ako je*

$$\varepsilon = \min\left\{\frac{d(A,C}{4}, \frac{d(B,C)}{4}\right\} \tag{3.21}$$

onda vrijedi

$$d(A,C) + d(C,B) - d(A,B) < \varepsilon \tag{3.22}$$

i

$$d(C,C') < \varepsilon. \tag{3.23}$$

Dokaz. Neka je

$$\varepsilon' = \min\left\{\frac{d(A,C')}{4}, \frac{d(C',B)}{4}\right\}.$$

Očito je $\varepsilon' > 0$. Neka je $r = \frac{\varepsilon'}{4}$. Pretpostavimo da je $C \in K(C', r)$. Tada je

$$d(C,C') < \frac{\varepsilon'}{4}. \tag{3.24}$$

Neka je ε broj definiran s (3.21). Iz propozicije 3.1.2 slijedi

$$|d(A,C) - d(A,C')| \leq d(C.C') < \frac{\varepsilon'}{4}$$

pa je

$$|d(A,C) - d(A,C')| < \frac{\varepsilon'}{4} \tag{3.25}$$

te analogno

$$|d(B,C) - d(B,C')| < \frac{\varepsilon'}{4}. \tag{3.26}$$

Iz ovoga slijedi

$$\left|\frac{d(A,C)}{4} - \frac{d(A,C')}{4}\right| < \frac{\varepsilon'}{16} \quad \text{i} \quad \left|\frac{d(B,C)}{4} - \frac{d(B,C')}{4}\right| < \frac{\varepsilon'}{16}.$$

Sada lema 3.3.5 povlači da je

$$|\varepsilon - \varepsilon'| < \frac{\varepsilon'}{16}.$$

Stoga je $\varepsilon' - \varepsilon < \frac{\varepsilon'}{16}$ pa je $\frac{15}{16}\varepsilon' < \varepsilon$, posebno

$$\frac{\varepsilon'}{2} < \varepsilon. \tag{3.27}$$

Iz $C' \in \overline{AB}$ slijedi $d(A, C') + d(C', B) = d(A, B)$, tj.

$$d(A, C') + d(C', B) - d(A, B) = 0.$$

Koristeći ovo, (3.25), (3.26) i (3.27) dobivamo:

$$\begin{aligned}
|d(A,C) + d(C,B) - d(A,B)| &= |d(A,C) + d(C,B) - d(A,B) - 0| \\
&= |d(A,C) + d(C,B) - d(A,B) - (d(A,C') + d(C',B) - d(A,B))| \\
&= |d(A,C) - d(A,C') + d(C,B) - d(C',B)| \\
&\leq |d(A,C) - d(A,C')| + |d(C,B) - d(C',B)| \\
&< \frac{\varepsilon'}{4} + \frac{\varepsilon'}{4} = \frac{\varepsilon'}{2} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Dakle,

$$|d(A,C) + d(C,B) - d(A,B)| < \varepsilon$$

pa posebno vrijedi (3.22). Iz (3.24) i (3.27) slijedi

$$d(C', C) < \frac{\varepsilon'}{4} < \frac{\varepsilon'}{2} < \varepsilon$$

pa vrijedi (3.23). Time je teorem dokazan. □

Definicija 3.3.8. *Neka je (X, d) metrički prostor, te neka je $S \subseteq X$.*
Za S kažemo da je ***gust skup*** *u metričkom prostoru (X, d) ako za svaki $x \in X$ i svaki $\varepsilon > 0$ postoji $s \in S$ takav da je $d(x, s) < \varepsilon$.*

Uočimo: ako je (X, d) metrički prostor, onda je X gust skup u (X, d)

Primjer 3.3.9. *Neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}$. Tada skup $[0, 1]$ nije gust u $(\mathbb{R}, d)$.*
Naime, uzmimo $x = 3$, $\varepsilon = 1$ i pretpostavimo da postoji $s \in [0, 1]$ takav da je $d(x, s) < \varepsilon$.
No, iz $s \leq 1$ slijedi $-1 \leq -s$ pa je $3 - 1 \leq 3 - s$, tj. $2 \leq 3 - s$. Dakle,

$$2 \leq 3 - s \leq |3 - s| = d(3, s) < \varepsilon = 1.$$

Kontradikcija. Prema tome skup $[0, 1]$ nije gust u $(\mathbb{R}, d)$.

Primjer 3.3.10. *Neka je d euklidska metrika na* $\mathbb{R}$*. Tada je skup* $\mathbb{Q}$ *gust u* $(\mathbb{R}, d)$*. Dokažimo to.*
Neka su $x \in \mathbb{R}$ *i* $\varepsilon > 0$*. Tada vrijedi* $x < x + \varepsilon$*.*
Budući da između svaka dva realna broja postoji racionalni broj, postoji $s \in \mathbb{Q}$ *takav da vrijedi*

$$x < s < x + \varepsilon.$$

Oduzimanjem broja x dobivamo

$$0 < s - x < \varepsilon$$

Stoga je

$$d(s, x) = |s - x| = s - x < \varepsilon.$$

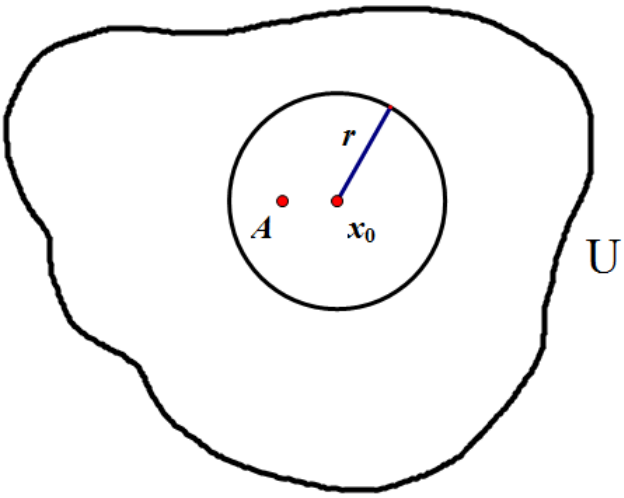
Dakle, $\mathbb{Q}$ *je gust u* $(\mathbb{R}, d)$*.*

Propozicija 3.3.11. *Neka je* (X, d) *metrički prostor, te* $S \subseteq X$*. Tada je S gust skup u* (X, d) *ako i samo ako za svaki neprazan otvoren skup U u* (X, d) *vrijedi*

$$U \cap S \neq \emptyset.$$

Dokaz. Pretpostavimo da je S gust u (X, d). Neka je U neprazan otvoren skup u (X, d). Odaberimo $x_0 \in U$ (to možemo jer je U neprazan). Budući da je U otvoren postoji $r > 0$ takav da je

$$K(x_0, r) \subseteq U. \tag{3.28}$$



Slika 3.8: otvoren skup U siječe S

Skup S je gust pa postoji $s \in S$ tako da je $d(x_0, s) < r$. Stoga je

$$s \in K(x_0, r). \tag{3.29}$$

Iz (3.29) i (3.28) slijedi $s \in U$ pa zaključujemo da je $U \cap S \neq \emptyset$.

Obratno. Pretpostavimo da za svaki neprazan otvoren skup U u (X, d) vrijedi $U \cap S \neq \emptyset$. Želimo dokazati da je S gust skup u (X, d).
Neka su $x_0 \in X$ i $r > 0$. Tada je $K(x_0, r)$ neprazan otvoren skup u (X, d) (propozicija 3.2.2) pa stoga vrijedi

$$K(x_0, r) \cap S \neq \emptyset.$$

To znači da postoji $s \in S$ tako da je $s \in K(x_0, r)$.
Iz ovoga slijedi

$$d(x_0, s) < r.$$

Dakle, skup S je gust. □

Korolar 3.3.12. *Neka je $(M, \mathcal{L}, d)$ metrička ravnina te neka je S skup gust u toj ravnini (tj. u metričkom prostoru (M, d)).*
Neka su $A, B \in M, A \neq B$ te $C' \in \overline{AB}$ točka takva da je $C' \neq A$ i $C' \neq B$. Neka je $\lambda > 0$ te neka je K poluravnina određena pravcem $\widetilde{AB}$. Tada postoji točka $C \in S$ takva da je $C \in K, d(C, C') < \lambda$ te takva da vrijedi implikacija

$$\begin{aligned} \varepsilon = \min\left\{\frac{d(A,C)}{4}, \frac{d(B,C)}{4}\right\} &\Rightarrow \\ d(A,C) + d(C,B) - d(A,B) < \varepsilon \qquad &i \\ d(C,C') < \varepsilon \end{aligned} \tag{3.30}$$

Dokaz. Prema teoremu 3.3.7 postoji $r > 0$ takav da za svaki $C \in K(C', r)$ vrijedi implikacija (3.30). Dovoljno je stoga pokazati da postoji $C \in K(C', r)$ takav da je $C \in S$, $C \in K$ i $d(C, C') < \lambda$. Neka je

$$r' = \min\{r, \lambda\}.$$

Prema lemi 3.3.6 postoji $T \in K$ takav da je $d(C', T) < r'$. Stoga je $T \in K(C', r')$. Iz ovoga zaključujemo da je

$$K(C', r') \cap K \neq \emptyset.$$

Prema propoziciji 3.2.2 $K(C', r')$ je otvoren skup. Prema propoziciji 3.2.3 K je otvoren skup. Stoga je prema propoziciji 3.2.6 $K(C', r') \cap K$ otvoren skup. Dakle, $K(C', r') \cap K$ je neprazan otvoren skup pa iz propozicije 3.3.11 slijedi da je

$$(K(C', r') \cap K) \cap S \neq \emptyset.$$

Prema tome postoji $C \in S$ takav da je $C \in K$ i $C \in K(C', r')$. Slijedi $d(C, C') < r'$ pa je $d(C, C') < \lambda$ i $d(C, C') < r$. Stoga je $C \in K(C', r)$ pa za C vrijedi implikacija (3.30).
Time je tvrdnja korolara dokazana. $\square$

Bibliografija

[1] B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika 1*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992.

[2] H.S.M. Coxeter, *Introduction to Geometry*, J. Wiley, New York, 1969.

Sažetak

U ovom diplomskom radu proučava se pojam metričke ravnine.

U prvom poglavlju definiraju se samo neki osnovni pojmovi te zatim pojmovi pravca, ravnine, Paschove ravnine te se proučavaju neka njihova svojstva.

U drugom poglavlju uvodi se pojam metričke ravnine te se proučavaju neka njena svojstva, a posebno se proučavaju izometrije metričke ravnine.

Treće poglavlje bavi se pojmom metričkog prostora te otvorenošću i zatvorenošću skupova u metričkom prostoru, a posebno u metričkoj ravnini. Pročava se i veza između udaljenosti točaka i aproksimacije dužine.

Summary

This thesis examines the concept of a metric plane.

The first chapter defines some basic concepts and concepts of line, plane, Pasch's plane and studies their properties.

The second chapter introduces the concept of a metric plane and studies some properties, especially the isometrics of the metric plane.

The third chapter deals with the concept of metric space and openness and closedness of sets in the metric space, and especially in a metric plane. It also examines the connection between the approximation of a line segment and the distance between points.

Životopis

Rođena sam 16.8.1988. godine u Ivanić Gradu. Svoje osnovnoškolsko obrazovanje završila sam u Osnovnoj školi Josipa Badalića u Graberju Ivanićkom nakon čega 2003. godine upisujem Srednju školu Ivana Šveara, smjer opća gimnazija u Ivanić Gradu. Po završetku srednje škole 2007. godine upisala sam Preddiplomski sveučilišni studij Matematika na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Nakon dvije godine prebacujem se na Preddiplomski sveučilišni studij Matematika, smjer nastavnički kojeg sam završila 2012. godine. Iste godine upisala sam Diplomski sveučilišni studij Matematika, smjer nastavnički.