Itôv integral i primjene

Kovačević, Ana

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Ana Kovačević

ITÔV INTEGRAL I PRIMJENE

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Ante Mimica

Zagreb, srpanj, 2015.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

U 20. stoljeću matematičar Kiyoshi Itô proučavao je slučajne procese i dostupnu teoriju tog vremena te je, u nedostatku potrebnih alata, razvio teoriju stohastičkih integrala. Cilj ovog rada je konstruirati stohastički integral te pokazati zanimljive posljedice njegovih svojstava.

Proučavat ćemo Brownovo gibanje

$$B = \{B(t) \,|\, t \geq 0\},$$

slučajni proces gotovo sigurno neprekidnih trajektorija te neomeđene varijacije. Upravo u posljednjem svojstvu leži motivacija za uvođenje stohastičke integracije. Naime, funkcije neomeđene varijacije ne ulaze u domenu Lebesgue - Stieltjesovog integrala te u tom kontekstu ne možemo definirati integral oblika

$$\int f(t) dB(t).$$

Konstrukciju stohastičkog integrala počet ćemo progresivno izmjerivim jednostavnim procesima oblika

$$H(t) = \sum_{j=1}^{n} \Phi_j \mathbb{1}_{\langle t_j, t_{j+1}]}$$

te postupno razvijati definiciju prema složenijim podintegralnim funkcijama. Stohastički integral definirat ćemo u obliku limesa. Budući da je takva definicija neoperativna, veći dio rada koncentrirat će se na dokazivanje Itôve formule za različite oblike podintegralne funkcije.

Također ćemo pokazati da Brownovo gibanje ima svojstvo konformne invarijantnosti. Dokazat ćemo da je reprezentacija polarnog Brownovog gibanja dana s

$$B(t) = e^{W_1(H(t)) + iW_2(H(t))}, \text{ gdje je } H(t) = \int_0^t \frac{ds}{|B(s)|^2} = \inf \left\{ u \geq 0 \,\Big|\, \int_0^u e^{2W_1(s)} ds > t \right\}.$$

Na poslijetku, dokazat ćemo Feynman - Kacovu formulu kojom ćemo dati eksplicitno rješenje jednadžbe provođenja.

Poglavlje 1

Osnovni pojmovi

1.1 Početne definicije

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor.

Definicija 1.1.1. *Familiju σ-algebri $\{\mathcal{F}(t) \mid t \geq 0\}$ na izmjerivom prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$ koja zadovoljava*

$$\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t) \subset \mathcal{F}, \quad \text{za sve } s < t$$

zovemo filtracija.

Prilikom proučavanja Brownovog gibanja promatrat ćemo filtraciju gdje će σ-algebre biti generirane slučajnim varijablama $\{B(t) \mid t \geq 0\}$ do određenog trenutka. U takvom slučaju, o filtraciji možemo razmišljati kao o σ-algebri koja sadrži sve dostupne informacije o slučajnim varijablama koje je generiraju.

Definicija 1.1.2. *Neka je $\mathcal{G}$ σ-algebra na Ω. Kažemo da je preslikavanje $X : \Omega \to \mathbb{R}$ $\mathcal{G}$-izmjerivo ako za svaki skup $B \in \mathcal{B}$ vrijedi $X^{-1}(B) \in \mathcal{G}$, gdje je s $\mathcal{B}$ označena Borelova σ-algebra na $\mathbb{R}$. Tada pišemo $X \in \mathcal{G}$.*
Slučajna varijabla je preslikavanje $X : \Omega \to \mathbb{R}$ za koje vrijedi $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$, za sve $B \in \mathcal{B}$.

U proučavanju izmjerivosti slučajne varijable u odnosu na σ-algebru koja je sastavni dio filtracije, od posebnog značaja će nam biti pojam adaptiranosti.

Definicija 1.1.3. *Kažemo da je slučajni proces $\{X(t) \mid t \geq 0\}$, definiran na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, adaptiran u odnosu na filtraciju $\{\mathcal{F}(t) \mid t \geq 0\}$ ako za sve $t \geq 0$ vrijedi $X(t) \in \mathcal{F}(t)$.*

1.2 Brownovo gibanje

Početkom 19. stoljeća botaničar Robert Brown, proučavajući peludna zrnca, uočio je nasumično gibanje mikroskopskih čestica u vodenoj otopini. Budući da uzrok uočenog gibanja nije bio očit, ovo otkriće potaknulo je znanstvenu raspravu te se počela razvijati teorija slučajnog procesa koji danas nosi njegovo ime.

U matematici Brownovo gibanje označava slučajni proces gotovo sigurno neprekidnih trajektorija čiji prirasti se ponašaju kao nezavisne, normalno distribuirane slučajne varijable. Promotrimo li trajektoriju Brownova gibanja, možemo uočiti fraktalnu strukturu. Svojstvo koje opisuje takvo ponašanje je invarijantnost obzirom na skaliranje Brownovog gibanja te ćemo u nastavku pokazati tu korisnu karakteristiku.

Definicija 1.2.1. *Slučajni proces s realnim vrijednostima $B = \{B(t) \,|\, t \geq 0\}$ zovemo (linearno) Brownovo gibanje s početkom u $x \in \mathbb{R}$ ako vrijedi*

(i) $B(0) = x$,

(ii) prirasti procesa B su nezavisni, tj. za sva vremena $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_n$ prirasti

$$B(t_n) - B(t_{n-1}), B(t_{n-1}) - B(t_{n-2}), ..., B(t_2) - B(t_1), B(t_1) - B(0)$$

su nezavisne slučajne varijable,

(iii) za sve $0 \leq s < t$ prirasti $B(t) - B(s)$ su normalno distribuirane slučajne varijable s očekivanjem nula i varijancom $t - s$, tj. $B(t) - B(s) \sim N(0, t - s)$,

(iv) funkcija $t \mapsto B(t)$ je gotovo sigurno neprekidna.

Ako je $B(0) = x = 0$, onda kažemo da je $B = \{B(t) \,|\, t \geq 0\}$ standardno Brownovo gibanje.

Napomena 1.2.2. *(a) Alternativna definicija Brownovog gibanja uključuje svojstvo stacionarnosti. Kažemo da slučajni proces $\{X(t) \,|\, t \geq 0\}$ ima stacionarne priraste ako za sve $0 \leq s \leq t$ distribucija prirasta $X(t) - X(s)$ ovisi samo o $t - s$.*
Neka je $X = \{X(t) \,|\, t \geq 0\}$ slučajni proces s gotovo sigurno neprekidnim trajektorijama te stacionarnim i nezavisnim prirastima takvim da je $X(t + s) - X(s) \sim N(0, t)$. Tada kažemo da je X standardno Brownovo gibanje.

(b) Prirodnu filtraciju Brownovog gibanja definiramo s $\mathcal{F}(t) = \sigma(\{B(s) \,|\, s \leq t\})$.

Lema 1.2.3. *Neka je $\sigma > 0$ i Y slučajna varijabla za koju vrijedi $Y \sim N(0, \sigma^2)$. Tada je funkcija izvodnica momenta za Y dana s*

$$\varphi_Y(\lambda) := \mathbb{E}\left[e^{\lambda Y}\right] = e^{\frac{\lambda^2 \sigma^2}{2}}, \text{ za } \lambda > 0. \tag{1.1}$$

Dokaz. Neka su $\sigma, \lambda > 0$. Tada vrijedi

$$\varphi_Y(\lambda) = \mathbb{E}\left[e^{\lambda Y}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda y} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\right) dy = \begin{bmatrix} -y^2 - 2\lambda\sigma^2 y = \\ -(y+\lambda\sigma^2)^2 + \lambda^2\sigma^4 \end{bmatrix} =$$

$$= e^{\frac{\lambda^2\sigma^4}{2\sigma^2}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(y+\lambda\sigma^2\right)^2}{2\sigma^2}} dy}_{=[\text{integral gustoće za } N\left(\lambda\sigma^2, \sigma^2\right)]=1} = e^{\frac{\lambda^2\sigma^2}{2}},$$

čime smo pokazali tvrdnju. □

Napomena 1.2.4. *Neka je $Y \sim N(0, \sigma^2)$ za neki $\sigma > 0$. Tada iz (1.1) dobivamo sljedeće:*

$$\mathbb{E}\left[e^{\lambda Y}\right] = \varphi_Y(\lambda) \quad \Big/ \frac{d}{d\lambda}$$

$$\mathbb{E}\left[Y e^{\lambda Y}\right] = \varphi_Y'(\lambda) \quad \Big/ \lim_{\lambda \to 0}$$

$$\mathbb{E}Y = \varphi_Y'(0) = \lambda\sigma^2 e^{\frac{\lambda^2\sigma^2}{2}}.$$

Analogno za $k \in \mathbb{N}$ dobivamo

$$\mathbb{E}Y^k = \varphi_Y^{(k)}(0).$$

Lema 1.2.5 (Invarijantnost na skaliranje)**.** *Neka je $\{B(t) \mid t \geq 0\}$ standardno Brownovo gibanje te $a > 0$. Tada je slučajni proces $\{X(t) \mid t \geq 0\}$ definiran s*

$$X(t) = \frac{1}{a} B(a^2 t)$$

standardno Brownovo gibanje.

Dokaz. Uočimo da je $X(0) = \frac{1}{a}B(0) = 0$ te da g.s. neprekidnost trajektorija slijedi direktno iz svojstava Brownovog gibanja B. Nadalje, za $0 \leq s \leq t$ vrijedi

$$X(t) - X(s) = \frac{1}{a}\left(\underbrace{B(a^2 t)}_{\sim N(0, a^2 t)} - \underbrace{B(a^2 s)}_{\sim N(0, a^2 s)}\right) \sim N\left(0, \frac{1}{a^2}\left(a^2 t - a^2 s\right)\right) = N(0, t - s)$$

pa su prirasti normalno distribuirani s očekivanjem 0 i varijancom $t - s$. Preostalo je još pokazati nezavisnost prirasta. Neka je $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_n$ za neki $n \in \mathbb{N}$. Tada je za $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{n-1}$

$$\prod_{i=1}^{n-1} \mathbb{E}\left[e^{\overbrace{\lambda_i(X(t_{i+1}) - X(t_i))}^{N(0, t_{i+1} - t_i)}}\right] = (1.1) = \prod_{i=1}^{n-1} e^{\frac{\lambda_i^2(t_{i+1}-t_i)}{2}} = e^{\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i^2(t_{i+1}-t_i)}{2}} = (1.1) = \mathbb{E}\left[e^{\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i(X(t_{i+1}) - X(t_i))}\right].$$

Koristeći činjenicu da funkcija izvodnica momenata jedinstveno određuje distribuciju, slijedi da su slučajne varijable $X(t_2) - X(t_1), X(t_3) - X(t_2), ..., X(t_n) - X(t_{n-1})$ nezavisne. □

Napomena 1.2.6 (Vremenska inverzija). *Neka je* $B = \{B(t) \,|\, t \geq 0\}$ *standardno Brownovo gibanje. Tada je slučajni proces* $X = \{X(t) \,|\, t \geq 0\}$ *definiran s*

$$X(t) = \begin{cases} 0, & t = 0 \\ tB\left(\frac{1}{t}\right), & t > 0 \end{cases}$$

standardno Brownovo gibanje.

Sljedeća dva teorema daju uvid u svojstva Brownovog gibanja koja će biti motivacija za daljnja poglavlja.

Teorem 1.2.7. *Gotovo sigurno za sve* $0 < a < b < +\infty$ *Brownovo gibanje nije monotono na intervalu* $[a, b]$.

Dokaz. Neka je $a < b$ i fiksirajmo interval $[a, b]$ na kojem je Brownovo gibanje monotono. Odaberimo particiju segmenta $\Pi_n = \{a = a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_{n+1} = b\}$ i podijelimo $[a, b]$ na n podintervala $[a_i, a_{i+1}], i = 1, 2, ..., n$. Uočimo da tada svaki prirast $B(a_{i+1}) - B(a_i)$ mora imati isti predznak za $i = 1, 2, ..., n$. Stoga, uz nezavisnost prirasta Brownovog gibanja, dobivamo sljedeću vjerojatnost

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\{B(a_{i+1}) - B(a_i) \text{ istog predznaka za } i = 1, 2, ..., n\}) = \\
&\quad = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{B(a_{i+1}) - B(a_i) \geq 0\}\right) + \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{B(a_{i+1}) - B(a_i) \leq 0\}\right) \qquad (1.2) \\
&\quad = [\text{nezavisnost}] = \prod_{i=1}^{n} \underbrace{\mathbb{P}\left(\underbrace{B(a_{i+1}) - B(a_i)}_{\sim N(0, a_{i+1} - a_i)} \geq 0\right)}_{=\frac{1}{2}} + \prod_{i=1}^{n} \underbrace{\mathbb{P}\left(\underbrace{B(a_{i+1}) - B(a_i)}_{\sim N(0, a_{i+1} - a_i)} \leq 0\right)}_{=\frac{1}{2}} = \frac{2}{2^n}.
\end{aligned}$$

Iz posljednjeg izvoda slijedi

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B \text{ je monotono na } [a, b]) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \{B \text{ je monotono za particiju } \Pi_n\}\right) \\
&= \begin{bmatrix} \text{neprekidnost vjerojatnosti} \\ \text{u odnosu na padajuće događaje} \end{bmatrix} = \\
&= \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\left(\{B \text{ je monotono za particiju } \Pi_n\}\right) \\
&= (1.2) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0
\end{aligned}$$

pa vrijedi

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{\substack{a,b\in\mathbb{Q}\\ a<b}}\{B \text{ monotono na } [a,b]\}\right) = 0.$$

Dakle, postoji Ω_0 takav da je $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$ te za sve $\omega \in \Omega_0$ i $p, q \in \mathbb{Q}$ preslikavanje $t \mapsto B(t, \omega)$ nije monotono na $[p, q]$. Stoga, za $\omega \in \Omega_0$, ako je $a < b$, onda postoje $p_0, q_0 \in \mathbb{Q}$ takvi da je $p_0 < q_0$ i $[p_0, q_0] \subset [a, b]$. Budući da iz gornjeg rezultata znamo da B nije monotono na $[p_0, q_0]$, onda neće biti monotono niti na $[a, b]$. □

Definicija 1.2.8. *Zdesna neprekidna funkcija $f : [0, t] \to \mathbb{R}$ je funkcija omeđene varijacije ako vrijedi*

$$V_f^{(1)}(t) := \sup_{\Pi} \sum_{j=1}^{k} |f(t_j) - f(t_{j-1})| < +\infty,$$

gdje za $k \in \mathbb{N}$ $\Pi = \{0 = t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_k = t\}$ čini particiju segmenta $[0, t]$. Ako je supremum u $V_f^{(1)}$ beskonačan, onda kažemo da je f neomeđene varijacije.

Definicija 1.2.9. *Neka je $\Pi_k = \{0 = t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_k = t\}$ particija segmenta $[0, t]$ te označimo s $\delta(\Pi_k) = \max_{i=1,2,...,k} |t_i - t_{i-1}|$ očicu particije. Kažemo da je slučajni proces $X = \{X(t) \,|\, t \geq 0\}$ konačne kvadratne varijacije ako postoji slučajni proces $\langle X \rangle = \{\langle X \rangle_t \,|\, t \geq 0\}$ takav da vrijedi*

$$(\mathbb{P}) \lim_{\delta(\Pi_k)\to 0} \sum_{j=1}^{k} |X(t_j) - X(t_{j-1})|^2 = \langle X \rangle_t, \quad \textit{za sve } t > 0.$$

Slučajni proces $\langle X \rangle$ tada zovemo kvadratna varijacija procesa X.

Odredimo kvadratnu varijaciju Brownovog gibanja te pokažimo da je Brownovo gibanje neomeđene varijacije.

Teorem 1.2.10. *Neka je $B = \{B(t) \,|\, t \geq 0\}$ Brownovo gibanje. Označimo s $(\Pi_n)_{n\in\mathbb{N}}, \Pi_n = \left\{0 = t_0^{(n)} \leq t_1^{(n)} \leq ... \leq t_n^{(n)} = t\right\}$ niz particija segmenta $[0, t]$. Tada vrijedi*

$$(L^2) \lim_{\delta(\Pi_n)\to 0} \sum_{j=1}^{n} \left|B\left(t_j^{(n)}\right) - B\left(t_{j-1}^{(n)}\right)\right|^2 = t, \quad \textit{za sve } t > 0.$$

Specijalno, $\langle B\rangle_t = t$.

Dokaz. Zaista,

$$\mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=1}^{n} \left|B\left(t_j^{(n)}\right) - B\left(t_{j-1}^{(n)}\right)\right|^2 - t\right)^2\right] = \begin{bmatrix} \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^n \left|B\left(t_j^{(n)}\right) - B\left(t_{j-1}^{(n)}\right)\right|^2\right] \\ = \sum_{j=1}^n \mathbb{E}\left[\left(B\left(t_j^{(n)}\right) - B\left(t_{j-1}^{(n)}\right)\right)^2\right] \\ = \sum_{j=1}^n \left(t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)}\right) = t - 0 = t \end{bmatrix} =$$

$$= \mathrm{Var}\left(\sum_{j=1}^{n} \left|B\left(t_j^{(n)}\right) - B\left(t_{j-1}^{(n)}\right)\right|^2\right) = [\text{nezavisnost prirasta}] =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\mathbb{E}\left[\left(B\left(t_j^{(n)}\right) - B\left(t_{j-1}^{(n)}\right)\right)^4\right] - \left(\mathbb{E}\left[\left(B\left(t_j^{(n)}\right) - B\left(t_{j-1}^{(n)}\right)\right)^2\right]\right)^2\right)$$

$$= [\text{Napomena 1.2.4}] = \sum_{j=1}^{n} \left(3\left(t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)}\right)^2 - \left(t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)}\right)^2\right)$$

$$\leq 2\delta(\Pi_n) \sum_{j=1}^{n} \left(t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)}\right) = 2\delta(\Pi_n)t.$$

Dakle, za svaki član niza particija vrijedi $\mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=1}^n |B\left(t_j^{(n)}\right) - B\left(t_{j-1}^{(n)}\right)|^2 - t\right)^2\right] \leq 2\delta(\Pi_n)t$ pa puštanjem $\delta(\Pi_n) \to 0$ dobivamo prvu tvrdnju.
Neka je sada $\varepsilon > 0$. Tada vrijedi

$$\lim_{\delta(\Pi_n)\to 0} \mathbb{P}\left(\left|\sum_{j=1}^{n} \left|B\left(t_j^{(n)}\right) - B\left(t_{j-1}^{(n)}\right)\right|^2 - t\right| \geq \varepsilon\right) \leq [\text{Markovljeva nejednakost}] \leq$$

$$\leq \lim_{\delta(\Pi_n)\to 0} \frac{\mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=1}^n \left|B\left(t_j^{(n)}\right) - B\left(t_{j-1}^{(n)}\right)\right|^2 - t\right)^2\right]}{\varepsilon^2} = 0.$$

Dakle, dobili smo i $\langle B\rangle_t = t$. □

Teorem 1.2.11. *Brownovo gibanje je neomeđene varijacije.*

Dokaz. Neka je $B = \{B(t) \,|\, t \geq 0\}$ Brownovo gibanje. Pretpostavimo da je ono omeđene varijacije. Tada za particiju $0 = t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_k = t$ vrijedi

$$\sum_{j=1}^{k} (B(t_j) - B(t_{j-1}))^2 \leq \max_{1 \leq j \leq k} \left| B(t_j) - B(t_{j-1}) \right| \sum_{j=1}^{k} \left| B(t_j) - B(t_{j-1}) \right|.$$

Ako uzmemo niz particija takav da im očica teži u 0, onda lijeva strana teži u t, a desna zbog g.s. neprekidnosti trajektorija Brownovog gibanja teži u 0. Ovime smo došli do kontradikcije s pretpostavkom da je Brownovo gibanje B omeđene varijacije. □

Definicija 1.2.12. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor, $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}(t) \,|\, t \geq 0\}$ filtracija te $X = \{X(t) \,|\, t \geq 0\}$ slučajni proces. Dodatno, neka je X adaptiran obzirom na $\mathcal{F}$ te neka je $\mathbb{E}|X(t)| < \infty$ za sve $t \geq 0$.*
Kažemo da je X martingal ako vrijedi

$$\mathbb{E}[X(t) \,|\, \mathcal{F}(s)] = X(s), \ \textit{za sve } 0 \leq s \leq t.$$

Kažemo da je X supermartingal ako vrijedi

$$\mathbb{E}[X(t) \,|\, \mathcal{F}(s)] \leq X(s), \ \textit{za sve } 0 \leq s \leq t.$$

Kažemo da je X submartingal ako vrijedi

$$\mathbb{E}[X(t) \,|\, \mathcal{F}(s)] \geq X(s), \ \textit{za sve } 0 \leq s \leq t.$$

Teorem 1.2.13. *Neka je $B = \{B(t) \,|\, t \geq 0\}$ Brownovo gibanje. Tada su sljedeći slučajni procesi martingali:*

(a) $B(t), t \geq 0$,

(b) $B(t)^2 - t, t \geq 0$

Dokaz.
$\boxed{\text{(a)}}$ Uočimo da je $\mathbb{E}|B(t)| < \infty$ jer je $B(t) \sim N(0, t)$. Neka je $0 \leq s \leq t$. Tada

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[B(t) \,|\, \mathcal{F}(s)] &= \mathbb{E}[(B(t) - B(s)) + B(s) \,|\, \mathcal{F}(s)] = [\text{linearnost}] = \\ &= \mathbb{E}\left[\underbrace{B(t) - B(s)}_{\text{nezavisna od } \mathcal{F}(s)} \,\Big|\, \mathcal{F}(s) \right] + \mathbb{E}\left[\underbrace{B(s)}_{\in \mathcal{F}(s)} \,\Big|\, \mathcal{F}(s) \right] = \underbrace{\mathbb{E}[B(t) - B(s)]}_{=0} + B(s) = B(s) \end{aligned}$$

pa je B martingal.
$\boxed{\text{(b)}}$ Budući da je $\mathbb{E}|B(t)^2 - t| \leq \underbrace{\mathbb{E}B(t)^2}_{=t} + t = 2t < \infty$, preostalo je pokazati martingalnu jednakost. Neka je $0 \leq s \leq t$. Tada

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[B(t)^2 - t \mid \mathcal{F}(s)] &= \mathbb{E}\left[((B(t) - B(s)) + B(s))^2 \mid \mathcal{F}(s)\right] - t = [\text{linearnost}] = \\
&= \mathbb{E}\left[\underbrace{(B(t) - B(s))^2}_{\text{nezavisna od } \mathcal{F}(s)} \mid \mathcal{F}(s)\right] + 2\mathbb{E}\left[\underbrace{(B(t) - B(s))}_{\text{nezavisna od } \mathcal{F}(s)} \underbrace{B(s)}_{\in \mathcal{F}(s)} \mid \mathcal{F}(s)\right] + \\
&\quad + \mathbb{E}\left[\underbrace{B(s)^2}_{\in \mathcal{F}(s)} \mid \mathcal{F}(s)\right] - t \\
&= \mathbb{E}\left[(\underbrace{B(t) - B(s)}_{\sim N(0, t-s)})^2\right] + 2B(s)\underbrace{\mathbb{E}\left[\underbrace{B(t) - B(s)}_{\sim N(0, t-s)}\right]}_{=0} + B(s)^2 - t \\
&= t - s + B(s)^2 - t = B(s)^2 - s
\end{aligned}$$

□

Propozicija 1.2.14. *Neka je $S(t) = \sup_{0 \leq s \leq t} B(s)$. Tada za sve $t \geq 0$, $S(t)$ ima istu distribuciju kao $|B(t)|$.*

Dokaz. Neka je $t \geq 0$ te $a \geq 0$. Tada vrijedi

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S(t) \geq a) &= \mathbb{P}(S(t) \geq a, B(t) \leq a) + \mathbb{P}(S(t) \geq a, \underbrace{B(t) > a}_{\subset \{S(t) \geq a\}}) \\
&= \left[\begin{array}{c} \text{Princip refleksije: za } a, b \in \mathbb{R} \\ \mathbb{P}(S(t) \geq a, B(t) \leq b) = \mathbb{P}(B(t) \geq 2a - b) \end{array}\right] \\
&= \mathbb{P}(B(t) \geq a) + \mathbb{P}(B(t) > a) \\
&= 2\mathbb{P}(B(t) \geq a) = \mathbb{P}(|B(t)| \geq a)
\end{aligned}$$

□

Poglavlje 2

Itôv integral

2.1 Konstrukcija stohastičkog integrala

U ovom poglavlju želimo definirati integral oblika

$$\int_0^t f(s)dB(s)$$

gdje je $\{B(t) \,|\, t \geq 0\}$ Brownovo gibanje. Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor na kojem je definirano Brownovo gibanje $B = \{B(t) \,|\, t \geq 0\}$ koje je adaptirano u odnosu na filtraciju $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t \,|\, t \geq 0\}$. Dodatno, pretpostavimo da je filtracija $\mathbb{F}$ potpuna. Tada će integral do vremena t biti adaptiran u odnosu na danu filtraciju.

Definicija 2.1.1. *Kažemo da je slučajni proces $X = \{X(t, \omega) \,|\, t \geq 0,\ \omega \in \Omega\}$ progresivno izmjeriv ako je za svaki $t \geq 0$ preslikavanje $X : [0, t] \times \Omega \to \mathbb{R}$ izmjerivo u odnosu na σ-algebru $\mathfrak{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}(t)$.*

Napomena 2.1.2. *Uočimo da je progresivno izmjeriv slučajni proces ujedno i adaptiran u odnosu na filtraciju $\mathbb{F}$.*
Zaista, definiramo li izmjerivo preliskavanje $g : \Omega \to [0, t] \times \Omega$ s $g(\omega) = (t, \omega)$, onda je $X(t, \omega) = (X \circ g)(\omega)$. Stoga je i kompozicija $X(t, \cdot) : \Omega \to \mathbb{R}$ $\mathcal{F}_t$ - izmjeriva.

Lema 2.1.3. *Slučajni proces $X = \{X(t) \,|\, t \geq 0\}$ koji je adaptiran i neprekidan slijeva ili neprekidan zdesna je progresivno izmjeriv.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $X = \{X(t) \,|\, t \geq 0\}$ adaptiran i neprekidan slijeva. Fiksirajmo $\omega \in \Omega$, $t > 0$ i $0 \leq s \leq t$. Sada za $n \geq 1$ definirajmo

$$\begin{aligned} X_n(0, \omega) &= X(0, \omega) \\ X_n(s, \omega) &= X\left(\frac{k_n t}{2^n}, \omega\right), \quad \text{za} \quad \frac{k_n t}{2^n} \leq s < \frac{(k_n + 1)t}{2^n}, \quad k_n = 0, 1, ..., 2^n - 1. \end{aligned}$$

Uočimo da je preslikavanje $(s,\omega) \mapsto X_n(s,\omega)$ $\mathfrak{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}(t)$ - izmjerivo: neka je $\alpha \in \mathbb{R}, n \geq 1$, tada je

$$\begin{aligned}\{X_n > \alpha\} &= \{(s,\omega) \in [0,t] \times \Omega \,|\, X_n(s,\omega) > \alpha\} \\ &= \bigcup_{k=0}^{2^n-1} \left\{ \left\{ \omega \in \Omega \,\middle|\, X\left(\frac{k_n t}{2^n}, \omega\right) > \alpha \right\} \times \left[\frac{k_n t}{2^n}, \frac{k_n+1}{2^n}\right\rangle \right\} \\ &= \bigcup_{k=0}^{2^n-1} \left\{ \underbrace{\left\{ X^{-1}_{\frac{k_n t}{2^n}} \left(\langle \alpha, +\infty\rangle\right)\right\}}_{\in \mathcal{F}\left(\frac{k_n t}{2^n}\right) \subset \mathcal{F}(t)} \times \underbrace{\left[\frac{k_n t}{2^n}, \frac{k_n+1}{2^n}\right\rangle}_{\in \mathcal{B}([0,t])} \right\}.\end{aligned}$$

Sada zbog izmjerivosti produkta i prebrojive unije slijedi tvrdnja.

Nadalje, zbog

$$0 \leq s - \frac{k_n t}{2^n} < \frac{(k_n+1)t}{2^n} - \frac{k_n t}{2^n} = \frac{t}{2^n},$$

puštanjem limesa $\lim_{n\nearrow\infty}$, po teoremu o sendviču dobivamo da $\frac{k_n t}{2^n} \to s$. Stoga neprekidnost slijeva procesa X povlači

$$\lim_{n\nearrow\infty} X_n(s,\omega) = \lim_{n\nearrow\infty} X\left(\frac{k_n t}{2^n}\right) = X(s,\omega).$$

Dakle, preslikavanje $(s,\omega) \mapsto X(s,\omega)$ je također $\mathfrak{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}(t)$ - izmjerivo pa je X progresivno izmjeriv. Za neprekidnost zdesna dokaz je sličan. □

Definicija 2.1.4. *Kažemo da je slučajni proces $H = \{H(t,\omega) \,|\, t \geq 0, \omega \in \Omega\}$ jednostavan ako je oblika*

$$H_t(\omega) := H(t,\omega) = \sum_{j=1}^{n} \Phi_j(\omega) \mathbb{1}_{\langle t_j, t_{j+1}]}(t)$$

gdje je $n \geq 1$, $0 \leq t_1 \leq ... \leq t_{n+1}$ te $\Phi_j \in \mathcal{F}(t_j)$, $j = 1, ..., n+1$.

Konstrukciju Itôvog integrala provest ćemo kroz nekoliko koraka. Definirajmo prvo integral progresivno izmjerivog jednostavnog procesa H:

$$\int_0^{+\infty} H(s) dB(s) := \sum_{j=1}^{n} \Phi_j \left(B(t_{j+1}) - B(t_j)\right).$$

Napomena 2.1.5. *Uočimo da za $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ te $H^{(i)}(t,\omega) = \sum_{j=1}^n \Phi_j^{(i)}(\omega) \mathbb{1}_{\langle t_j, t_{j+1}]}(t), i = 1,2$ progresivno izmjerive jednostavne procese vrijedi*

$$\int_0^{+\infty} \left(\alpha H^{(1)}(s) + \beta H^{(2)}(s)\right) dB(s) = \alpha \int_0^{+\infty} H^{(1)}(s) dB(s) + \beta \int_0^{+\infty} H^{(2)}(s) dB(s)$$

jer je linearna kombinacija jednostavnih procesa ponovno jednostavan proces.

Nadalje, neka je H progresivno izmjeriv proces takav da vrijedi

$$\mathbb{E}\int_0^\infty H(s)^2 ds < +\infty. \tag{2.1}$$

Pretpostavimo da se H može aproksimirati nizom progresivno izmjerivih jednostavnih procesa H_n, $n \geq 1$. Definirajmo u tom slučaju Itôv integral kao

$$\int_0^\infty H(s)dB(s) := L^2 - \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty H_n(s)dB(s). \tag{2.2}$$

Kako bi posljednja definicija bila dobra, potrebno je pokazati da uz $L^2\left([0, +\infty\rangle \times \Omega, \lambda \otimes \mathbb{P}\right)$ normu

$$\|H\|_2^2 := \mathbb{E}\int_0^\infty H(s)^2 ds$$

vrijedi sljedeće:

- Za svaki progresivno izmjeriv proces H koji zadovoljava (2.1) postoji aproksimirajući niz jednostavnih progresivno izmjerivih procesa H_n obzirom na $\|\cdot\|_2$ normu.
- Za svaki aproksimirajući niz, limes u (2.2) postoji.
- Limes u (2.2) ne ovisi o izboru aproksimirajućeg niza H_n.

Krenimo od prve tvrdnje.

Lema 2.1.6. *Za svaki progresivno izmjeriv proces* $H = \{H(s,\omega) \mid s \geq 0, \omega \in \Omega\}$ *takav da je* $\mathbb{E}\int_0^\infty H(s)^2 ds < +\infty$ *postoji niz* $(H_n)_{n\geq 1}$ *progresivno izmjerivih jednostavnih procesa takav da vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} \|H_n - H\|_2 = 0.$$

Dokaz.
Neka je $H = \{H(s,\omega) \mid s \geq 0, \omega \in \Omega\}$ progresivno izmjeriv proces takav da je $\|H\|_2 < +\infty$.

$\boxed{\text{1. korak}}$ Definirajmo niz $(H_n^{(1)})_{n\geq 1}$ s

$$\begin{cases} H_n^{(1)}(s,\omega) = H(s,\omega), & s \leq n \\ H_n^{(1)}(s,\omega) = 0, & \textit{inače} \end{cases}.$$

Tada vrijedi

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \left|H_n^{(1)}(s,\omega) - H(s,\omega)\right|^2 ds &= \int_0^n \underbrace{\left|H_n^{(1)}(s,\omega) - H(s,\omega)\right|^2}_{=0} ds \\
&+ \int_n^\infty \left|\underbrace{H_n^{(1)}(s,\omega)}_{=0} - H(s,\omega)\right|^2 ds \qquad (2.3)\\
&= \int_n^\infty |H(s,\omega)|^2 ds.
\end{aligned}$$

Budući da je $\mathbb{E}\int_0^\infty H(s)^2 ds < +\infty$, primjenom Lebesgueovog teorema o dominiranoj konvergenciji i puštanjem $n \to \infty$ dobivamo da je

$$\lim_{n\nearrow\infty} \left\|H_n^{(1)}(s,\omega) - H(s,\omega)\right\|_2 = 0. \tag{2.4}$$

$\boxed{\text{2. korak}}$ Neka je H progresivno izmjeriv proces za kojeg postoji $T \geq 0$ takav da je $H(t,\omega) = 0$ za sve $t \geq T, \omega \in \Omega$. Aproksimirajmo takav proces H nizom $(H_n^{(2)})_{n\geq 1}$ oblika

$$H_n^{(2)}(s,\omega) = H(s,\omega) \wedge n.$$

Uočimo da je tada $H_n^{(2)}(s,\omega) \leq H(s,\omega)$ za sve $s \geq 0$, $\omega \in \Omega$ te je progresivno izmjeriv pa kao u prethodnom koraku možemo primijeniti Lebesgueov teorem o dominiranoj konvergenciji.
Također, za $n_0 = \lfloor H(s,\omega) \rfloor + 1$ slično dobivamo da vrijedi $H_n^{(2)}(s,\omega) = H(s,\omega)$ za $n \geq n_0$, što u konačnici daje

$$\lim_{n\nearrow\infty} \left\|H_n^{(2)}(s,\omega) - H(s,\omega)\right\|_2 = 0. \tag{2.5}$$

$\boxed{\text{3. korak}}$ Neka je sada H uniformno ograničen progresivno izmjeriv proces za kojeg postoji $T \geq 0$ takav da je $H(t,\omega) = 0$ za sve $t \geq T, \omega \in \Omega$. U ovom koraku takav H aproksimiramo ograničenim, g.s. neprekidnim, progresivno izmjerivim procesom $\{H_n^{(3)}(s,\omega) \mid s \geq 0, \omega \in \Omega\}$, gdje je

$$\begin{aligned}
H_n^{(3)}(s,\omega) &= H(0,\omega), && s < 0\\
H_n^{(3)}(s,\omega) &= n\int_{s-\frac{1}{n}}^s H(t,\omega)dt, && s \geq 0^{\cdot}
\end{aligned}$$

Budući da promatramo integral samo do trenutka s, $H_n^{(3)}$ je progresivno izmjeriv, a primjenom Lebesgueovog teorema o dominiranoj konvergenciji dobivamo da je i g.s. neprekidan.

Iz Lebesgueovog teorema o diferenciranju (u odnosu na Lebesgueovu mjeru) znamo da za svaki $\omega \in \Omega$ i gotovo svaki $s \in [0, t]$ vrijedi

$$\lim_{\frac{1}{n} \searrow 0} \underbrace{n \int_{s-\frac{1}{n}}^{s} H(t, \omega) dt}_{H_n^{(3)}(s,\omega)} = H(s, \omega).$$

S druge strane iz ograničenosti slučajnog procesa H konstantom $M > 0$ dobivamo

$$|H_n^{(3)}(s, \omega) - H(s, \omega)| \leq n \int_{s-\frac{1}{2}}^{s} \underbrace{|H(t, \omega) - H(s, \omega)|}_{\leq 2M} dt \leq 2M$$

pa primjenom Lebesgueovog teorema o dominiranoj konvergenciji uz funkciju

$$g(s, \omega) = \begin{cases} 2M, & s \in [0, T + 1] \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

dobivamo

$$\lim_{n \nearrow \infty} \left\| H_n^{(3)}(s, \omega) - H(s, \omega) \right\|_2 = \lim_{n \nearrow \infty} \mathbb{E} \int_0^{T+1} |H_n^{(3)}(s, \omega) - H(s, \omega)|^2 ds = 0. \tag{2.6}$$

$\boxed{\text{4. korak}}$ Gotovo sigurno neprekidan, progresivno izmjeriv proces H za kojeg postoji $T > 0$ takav da je $H(t, \omega) = 0$ za sve $t \geq T$ aproksimirajmo jednostavnim procesom H_n

$$H_n(s, \omega) = H\left(\frac{jT}{n}, \omega\right), \quad \frac{jT}{n} \leq s < \frac{(j + 1)T}{n}, \; j = 0, 1, ..., n - 1.$$

Kao u dokazu Leme 2.1.3 se pokaže da $\frac{jT}{n} \xrightarrow{n \to \infty} s$ pa uz neprekidnost od H dobivamo

$$\lim_{n \nearrow \infty} H_n(s, \omega) = \lim_{n \nearrow \infty} H\left(\frac{jT}{n}, \omega\right) = H(s, \omega).$$

Primjenom Lebesgueovog teorema o dominiranoj konvergenciji i u ovom slučaju dobivamo

$$\lim_{n \nearrow \infty} ||H_n(s, \omega) - H(s, \omega)||_2 = 0. \tag{2.7}$$

Konačno, iz prethodnih koraka dobivamo tvrdnju primjenom nejednakosti trokuta:

$$\begin{aligned} ||H(s, \omega) - H_n(s, \omega)|| &= ||H(s, \omega) - H_n^{(1)}(s, \omega) + H_n^{(1)}(s, \omega) - H_n^{(2)}(s, \omega) + H_n^{(2)}(s, \omega) \\ &\quad - H_n^{(3)}(s, \omega) + H_n^{(3)}(s, \omega) - H_n(s, \omega)|| \\ &= \underbrace{||H(s, \omega) - H_n^{(1)}(s, \omega)||}_{\text{po (2.4) teži u 0}} + \underbrace{||H_n^{(1)}(s, \omega) - H_n^{(2)}(s, \omega)||}_{\text{po (2.5) teži u 0}} \\ &\quad + \underbrace{||H_n^{(2)}(s, \omega) - H_n^{(3)}(s, \omega)||}_{\text{po (2.6) teži u 0}} + \underbrace{||H_n^{(3)}(s, \omega) - H_n(s, \omega)||}_{\text{po (2.4) teži u 0}} \end{aligned}$$

. □

Lema 2.1.7 (Itôva izometrija)**.** *Neka je $H = H(s) \mid s \geq 0$ progresivno izmjeriv jednostavan proces takav da je $\mathbb{E}\int_0^\infty H(s)^2 ds < +\infty$. Tada vrijedi*

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^\infty H(s)dB(s)\right)^2\right] = \mathbb{E}\int_0^\infty H(s)^2 ds.$$

Dokaz. Neka je $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_{n+1}$ te

$$H = \sum_{i=1}^n \Phi_i \mathbb{1}_{\langle t_i, t_{i+1}]}.$$

Budući da za Brownovo gibanje vrijedi

$$B(t) - B(s) \sim N(0, t-s), \quad 0 \leq s < t, \tag{2.8}$$

uz adaptiranost, dobivamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(\int_0^\infty H(s)dB(s)\right)^2\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i,j=1}^n \Phi_i\Phi_j\left(B(t_{i+1}) - B(t_i)\right)\left(B(t_{j+1}) - B(t_j)\right)\right] \\
&= \begin{bmatrix} \Phi_i,\ \Phi_j \text{ su } \mathcal{F}(t_j) - \text{izmjerive} \\ B(t_{i+1}) - B(t_i) \text{ je } \mathcal{F}(t_j) - \text{izmjeriva} \end{bmatrix} = \\
&= 2\sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \mathbb{E}\left[\Phi_i\Phi_j\left(B(t_{i+1}) - B(t_i)\right) \underbrace{\mathbb{E}\left[B(t_{j+1}) - B(t_j) \mid \mathcal{F}(t_j)\right]}_{=\,[\text{nezavisnost}]\,=\mathbb{E}\left[B(t_{j+1})-B(t_j)\right]=(2.8)=0}\right] \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left[\Phi_i^2\left(B(t_{i+1}) - B(t_i)\right)^2\right] \\
&= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\Phi_i^2\left(B(t_{i+1}) - B(t_i)\right)^2 \mid \mathcal{F}(t_i)\right]\right] \\
&= \begin{bmatrix} \Phi_i \text{ je } \mathcal{F}(t_i) - \text{izmjeriva} \\ B(t_{i+1}) - B(t_i) \text{ je nezavisna od } \mathcal{F}(t_i) \end{bmatrix} = \\
&= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left[\Phi_i^2 \cdot \mathbb{E}\left[\left(\underbrace{B(t_{i+1}) - B(t_i)}_{\underset{(2.8)}{\sim} N(0,\, t_{i+1}-t_i)}\right)^2\right]\right] \\
&= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[\Phi_i^2(t_{i+1} - t_i)] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \underbrace{\sum_{i=1}^n \Phi_i^2 \mathbb{1}_{\langle t_i, t_{i+1}]}(s)}_{=H_s^2}\, ds\right] = \mathbb{E}\int_0^\infty H(s)^2 ds
\end{aligned}$$

. □

Korolar 2.1.8. *Neka je $(H_n)_{n\geq 1}$ niz progresivno izmjerivih jednostavnih procesa takvih da*

$$\mathbb{E}\int_0^\infty (H_n(s) - H_m(s))^2 ds \to 0, \quad za\ n, m \to +\infty.$$

Tada vrijedi

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^\infty (H_n(s) - H_m(s))dB(s)\right)^2\right] \to 0, \quad za\ n, m \to +\infty.$$

Dokaz. Neka su $H^{(1)}(t,\omega) = \sum_{i=1}^{n_1} A_i(\omega)\mathbb{1}_{\langle t_i^1, t_{i+1}^1]}(t)$ i $H^{(2)}(t,\omega) = \sum_{j=1}^{n_2} B_j(\omega)\mathbb{1}_{\langle t_j^2, t_{j+1}^2]}(t)$ dva progresivno izmjeriva jednostavna procesa takva da su A_k, B_k $\mathcal{F}_k$-izmjerive te $0 \leq t_1^1 \leq ... \leq t_{k_1+1}^1$, $0 \leq t_1^2 \leq ... \leq t_{k_2+1}^2$. Definirajmo $\{t_j \,|\, 0 \leq j \leq n+1\} = \{t_j^1 \,|\, 0 \leq j \leq n_1 + 1\} \cup \{t_j^2 \,|\, 0 \leq j \leq n_2 + 1\}$ i pretpostavimo da je $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_{n+1}$. Sada za točke t_j koje pripadaju particiji procesa $H^{(1)}$, a ne pripadaju particiji procesa $H^{(2)}$ definiramo $C_j = B_i - A_j$ gdje je i odabran kao $\max\{i \,|\, t_i^2 \leq t_j\}$. Slično postupimo za točke koje pripadaju particiji od $H^{(2)}$, a ne pripadaju particiji procesa $H^{(1)}$. Inače definiramo $C_j = B_j - A_j$. Dakle, dobili smo proces oblika

$$H^{(2)}(t,\omega) - H^{(1)}(t,\omega) = \sum_{j=1}^{n} C_j \mathbb{1}_{\langle t_j, t_{j+1}]}(t).$$

Očito je tada $C_j \in \mathcal{F}_j$ pa smo upravo pokazali da je razlika progresivno izmjerivih jednostavnih procesa ponovno jednostavan proces. Stoga primjenom Leme 2.1.7 na $H_n - H_m$ dobivamo tvrdnju. □

Teorem 2.1.9. *Neka je $(H_n)_{n\geq 1}$ niz progresivno izmjerivih jednostavnih procesa i H progresivno izmjeriv proces takav da H_n aproksimira H, tj.*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\int_0^{+\infty} (H_n(s) - H(s))^2\, ds = 0. \tag{2.9}$$

Tada

$$L^2 - \lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} H_n(s)dB(s) =: \int_0^\infty H(s)dB(s)$$

postoji i neovisan je o izboru aproksimirajućeg niza $(H_n)_{n\geq 1}$. Dodatno, vrijedi Itôva izometrija:

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^{+\infty} H(s)dB(s)\right)^2\right] = \mathbb{E}\int_0^{+\infty} H(s)^2 ds.$$

Dokaz. Sjetimo se, za progresivno izmjeriv jednostavan proces H_n smo definirali integral oblika

$$\int_0^{+\infty} H_k(s)dB(s) = \sum_{j=1}^{m} \phi_j \left(B(t_{j+1}) - B(t_j)\right),$$

za $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_{m+1}$ i $\phi_j \in \mathcal{F}_j$. Koristeći particiju unije kao u dokazu Korolara 2.1.8 pokaže se da je Itôv integral za jednostavne procese linearan. Koristeći uvjet aproksimacije iz iskaza uz

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(\int_0^{+\infty} H_m(s)dB(s) - \int_0^{+\infty} H_n(s)dB(s)\right)^2\right] &= [\text{linearnost}] = \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\int_0^{+\infty} (H_m(s) - H_n(s))\, dB(s)\right)^2\right] \\
&= [\text{izometrija}] = \mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} (H_m(s) - H_n(s))^2\, ds\right] \\
&\leq 2 \cdot \underbrace{\mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} (H(s) - H_m(s))^2\, ds\right]}_{\text{teži u 0 po (2.9)}} + 2 \cdot \underbrace{\mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} (H(s) - H_n(s))^2\, ds\right]}_{\text{teži u 0 po (2.9)}}
\end{aligned}$$

dobivamo da je $\int_0^{+\infty} H_n(s)dB(s)$ Cauchyjev niz u Hilbertovom prostoru $\mathcal{L}^2(\Omega)$. Budući da je svaki Hilbertov prostor potpun, onda limes $L^2 - \lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} H_n(s)dB(s)$ postoji. Pretpostavimo sada da su $H^{(1)}$ i $H^{(2)}$ dva progresivno izmjeriva jednostavna procesa koja aproksimiraju H kao u iskazu. Tada vrijedi

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left|\int_0^{+\infty} H^{(1)}(s)dB(s) - \int_0^{+\infty} H^{(2)}(s)dB(s)\right|^2\right] &= [\text{linearnost, izometrija}] = \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} \left|H^{(1)}(s) - H^{(2)}(s)\right|^2 ds\right] \\
&\leq 2 \cdot \underbrace{\mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} \left|H^{(1)}(s) - H(s)\right|^2 ds\right]}_{\text{teži u 0 po (2.9)}} + 2 \cdot \underbrace{\mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} \left|H(s) - H^{(2)}(s)\right|^2 ds\right]}_{\text{teži u 0 po (2.9)}}.
\end{aligned}$$

Budući da desna strana teži u 0 kada $n \to +\infty$, definicija ne ovisi o izboru niza $(H_n)_{n\geq 1}$. Primijenimo li sada Lemu 2.1.7 na H_n i pustimo li limes $\lim_{n\to\infty}$, dobivamo i posljednju tvrdnju. □

Ovime smo pokazali da je definicija Itôvog integrala kao L^2-limesa dobra. Kako bismo upotpunili definiciju obzirom na Brownovo gibanje, definirajmo još integral do nekog trenutka $0 < t < +\infty$.

Definicija 2.1.10. *Neka je* $\{H(s,\omega)\,|\,s \geq 0, \omega \in \Omega\}$ *progresivno izmjeriv slučajni proces takav da je* $\mathbb{E}\int_0^t H(s,\omega)^2 ds < +\infty$ *te* $0 \leq s \leq t, t \in \langle 0, +\infty\rangle$.
Za progresivno izmjerivi proces $\{H^t(s,\omega)\,|\,s \geq 0, \omega \in \Omega\}$ *zadan relacijom*

$$H^t(s,\omega) = H(s,\omega)\mathbb{1}_{\{s\leq t\}}$$

stohastički integral do trenutka t definiramo s

$$\int_0^t H(s)dB(s) := \int_0^{+\infty} H^t(s)dB(s).$$

Za progresivno izmjeriv proces $\{H^{s,t}(s,\omega)\,|\,s \geq 0, \omega \in \Omega\}$ *definiran relacijom*

$$H^{s,t}(u,\omega) = H(u,\omega)\mathbb{1}_{\{s<u\leq t\}}$$

stohastički integral od trenutka s do trenutka t definiramo s

$$\int_s^t H(u)dB(u) := \int_0^{+\infty} H^{s,t}(u)dB(u).$$

Definicija 2.1.11. *Kažemo da je slučajni proces* $\{X(t)\,|\,t \geq 0\}$ *modifikacija slučajnog procesa* $\{Y(t)\,|\,t \geq 0\}$ *ako za svaki* $t \geq 0$ *vrijedi* $\mathbb{P}(X(t) = Y(t)) = 1$.

Propozicija 2.1.12 (Doobova maksimalna nejednakost)**.** *Neka je* $\{X(t)\,|\,t \geq 0\}$ *neprekidni martingal te* $p > 1$. *Tada za svaki* $t \geq 0$ *vrijedi*

$$\mathbb{E}\left[\left(\sup_{0\leq s\leq t}|X(s)|\right)^p\right] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}\left[|X(t)|^p\right]. \tag{2.10}$$

Dokaz. Neka je $N \in \mathbb{N}$ fiksan. Definirajmo diskretni martingal relacijom

$$X_n = X\left(\frac{tn}{2^N}\right),$$

obzirom na filtraciju $\{\mathcal{G}(n)\,|\,n \in \mathbb{N}\}$ danu s $\mathcal{G}(n) = \mathcal{F}\left(\frac{tn}{2^N}\right)$.
Iz diskretne verzije Doobove maksimalne nejednakosti tada imamo

$$\mathbb{E}\left[\left(\sup_{1\leq k\leq 2^N}|X_k|\right)^p\right] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}\left[|X_{2^N}|^p\right] = \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}\left[|X(t)|^p\right].$$

Puštanjem limesa kada $N \to \infty$, uz Lebesgueov teorem o monotonoj konvergenciji, dobivamo tvrdnju. $\square$

Lema 2.1.13. *Neka je* $H = \{H(t,\omega) \,|\, t \geq 0, \omega \in \Omega\}$ *jednostavan proces takav da je*

$$H_t(\omega) = H(t,\omega) = \sum_{j=1}^{n} \Phi_j(\omega) \mathbb{1}_{\langle t_j, t_{j+1}]}$$

za $n \geq 1, 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_{n+1}$ *te* $\Phi_j \in \mathcal{F}(t_j)$. *Tada je* $I = \{I(t,\omega) \,|\, t \geq 0, \omega \in \Omega\}$

$$I_t = \int_0^t H(s) dB(s) = \sum_{j=1}^{n} \Phi_j \left(B(t_{j+1}) - B(t_j) \right)$$

martingal.

Dokaz. Da bi I bio martingal, potrebno je pokazati

$$\mathbb{E}\left[I_t \,|\, \mathcal{F}(s)\right] = I_s, \quad 0 \leq s \leq t \quad g.s.$$

Uočimo da je

$$I_t = \int_0^t H(u) dB(u) = \underbrace{\int_0^s H(u) dB(u)}_{=I_s \in \mathcal{F}(s)} + \int_s^t H(u) dB(u) \quad \Big/ \quad \mathbb{E}[\,\cdot\,|\mathcal{F}(s)]$$

pa je zapravo dovoljno pokazati da je

$$\mathbb{E}\left[\int_s^t H(u) dB(u) \middle| \mathcal{F}(s)\right] = 0 \quad g.s.$$

Definirajmo $\tilde{H} = H\mathbb{1}_{\langle s,t]}$. Tada je $\tilde{H}$ jednostavan proces pa postoji particija $s = u_1 < u_2 < ... < u_{m+1} = t$ i $\mathcal{F}(u_j)$-izmjerive $\tilde{\Phi}_j$ takve da je

$$\tilde{H} = \sum_{j}^{m} \tilde{\Phi}_j \mathbb{1}_{\langle u_j, u_{j+1}]}.$$

Budući da za $i \in \{1, 2, ..., n\}$ imamo

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\Phi_i \left(B(u_{i+1}) - B(u_i)\right) \,|\, \mathcal{F}(s)\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\underbrace{\Phi_i}_{\in \mathcal{F}(u_i)} \left(B(u_{i+1}) - B(u_i)\right) \middle| \mathcal{F}(u_i)\right] \middle| \mathcal{F}(s)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\Phi_i \, \mathbb{E}\left[B(u_{i+1}) - B(u_i) \,|\, \mathcal{F}(u_i)\right] \,|\, \mathcal{F}(s)\right] = 0, \end{aligned} \tag{2.11}$$

zaista vrijedi

$$\mathbb{E}[I_t \,|\, \mathcal{F}(s)] = \begin{bmatrix} \text{linearnost i} \\ \text{izmjerivost} \end{bmatrix} = I_s + \underbrace{\mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} \tilde{H}(u) dB(u) \middle| \mathcal{F}(s)\right]}_{=(2.11)=0} = I_s.$$

$\square$

Teorem 2.1.14. *Neka je proces* $\{H(s, \omega) \,|\, s \geq 0, \omega \in \Omega\}$ *progresivno izmjeriv i pretpostavimo da vrijedi*

$$\mathbb{E} \int_0^t H(s, \omega)^2 ds < +\infty, \text{ za sve } t \geq 0.$$

Tada postoji g.s. neprekidna modifikacija od $\left\{\int_0^t H(s) dB(s) \,|\, t \geq 0\right\}$. *Dodatno, dobiveni proces je martingal pa vrijedi*

$$\mathbb{E} \int_0^t H(s) dB(s) = 0, \text{ za sve } t \geq 0.$$

Dokaz. Fiksirajmo dovoljno veliki $t_0 > 0$. Neka je $(H_n)_{n \geq 1}$ aproksimirajući niz jednostavnih procesa takvih da je $\|H_n - H^{t_0}\|_2 \to 0$. Uočimo da je tada

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^{+\infty} (H_n(s) - H^{t_0}(s))\, dB(s)\right)^2\right] = [\text{Lema2.1.7}] = \mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} (H_n(s) - H_0^t(s))^2\, ds\right] \to 0. \tag{2.12}$$

Budući da je za $s \leq t$ slučajna varijabla $\int_0^s H_n(u) dB(u)$ $\mathcal{F}(s)$-izmjeriva te je $\int_s^t H_n(u) dB(u)$ nezavisna od $\mathcal{F}(s)$, po Lemi 2.1.13 znamo da je proces

$$\left\{\int_0^t H_n(u) dB(u) \,|\, 0 \leq t \leq t_0\right\}$$

martingal za svaki $n \geq 1$. Za $0 \leq t \leq t_0$ definirajmo proces $X = \{X(t) \,|\, 0 \leq t \leq t_0\}$ s

$$X(t) = \mathbb{E}\left[\int_0^{t_0} H(s) dB(s) \,|\, \mathcal{F}(t)\right].$$

Tada je X također martingal te

$$X(t_0) = \mathbb{E}\left[\underbrace{\int_0^{t_0} H(s) dB(s)}_{\in \mathcal{F}(t_0)} \,\Big|\, \mathcal{F}(t_0)\right] = \int_0^{t_0} H(s) dB(s).$$

Stoga po Propoziciji 2.1.12 za $p = 2$ dobivamo

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0 \leq t \leq t_0} \left(\int_0^t H_n(s) dB(s) - X(t)\right)^2\right] \leq 4 \cdot \mathbb{E}\left[\left(\int_0^{t_0} (H_n(s) - H(s))\, dB(s)\right)^2\right] \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Budući da L^2 konvergencija povlači gotovo sigurno konvergenciju na podnizu, zaključujemo da je X g.s. uniformni limes neprekidnih procesa pa je neprekidan. Sada je za fiksan $0 \leq t \leq t_0$ slučajna varijabla $\int_0^t H(s) dB(s)$ $\mathcal{F}(t)$-izmjeriva te je $\int_t^{t_0} H(s) dB(s)$ nezavisna od

$\mathcal{F}(t)$ s očekivanjem 0 kao L^2-limes aproksimirajućeg niza. Dakle, $\left\{\int_0^t H(s)dB(s) \,|\, t \geq 0\right\}$ je martingal.
Na poslijetku,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X(t_0) \,|\, \mathcal{F}(t)\right] &= \mathbb{E}\left[\int_0^{t_0} H(s)dB(s) \,\middle|\, \mathcal{F}(t)\right] = \begin{bmatrix}\text{linearnost uvjetnog} \\ \text{očekivanja}\end{bmatrix} = \\
&= \mathbb{E}\left[\underbrace{\int_0^{t} H(s)dB(s)}_{\in \mathcal{F}(t)} \,\middle|\, \mathcal{F}(t)\right] + \mathbb{E}\left[\underbrace{\int_t^{t_0} H(s)dB(s)}_{\text{nezavisno od } \mathcal{F}(t)} \,\middle|\, \mathcal{F}(t)\right] = \\
&= \int_0^t H(s)dB(s) + \underbrace{\mathbb{E}\left[\int_t^{t_0} H(s)dB(s)\right]}_{=0} = \int_0^t H(s)dB(s)
\end{aligned}$$

pa se $\int_0^t H(s)dB(s)$ i $X(t)$ podudaraju g.s., tj. X je g.s. neprekidna modifikacija procesa $\left\{\int_0^t H(s)dB(s) \,|\, 0 \leq t \leq t_0\right\}$. Puštanjem limesa kada $t_0 \to \infty$, dobivamo tvrdnju. □

2.2 Itôva formula

Imamo li neprekidnu funkciju $x : [0, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ ograničene varijacije, znamo da vrijedi

$$\int_0^t f'(x(s))dx(s) = f(x(t)) - f(x(0)).$$

Međutim, u Teoremu 1.2.11 smo pokazali da Brownovo gibanje nije ograničene varijacije pa se ista formula ne može primijeniti na stohastičke integrale u odnosu na Brownovo gibanje.
Umjesto toga, u ovom dijelu ćemo pokazati da vrijedi analogon gornje formule koji ćemo zvati *Itôva formula*.

Teorem 2.2.1 (Jako Markovljevo svojstvo)**.** *Neka je T vrijeme zaustavljanja takvo da je $T < +\infty$ $\mathbb{P}$-g.s. Tada je proces*

$$\{B(T+t) - B(T) \,|\, t \geq 0\}$$

standardno Brownovo gibanje nezavisno od

$$\mathcal{F}_T := \{A \in \mathcal{F} \,|\, A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}(t),\ za\ sve\ t \geq 0\}.$$

Dokaz. Za dokaz vidjeti [6, Teorem 2.16.]. □

Teorem 2.2.2. *Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neprekidna, $t > 0$ te $\Pi_n = \left\{0 = t_1^{(n)} < t_2^{(n)} < ... < t_n^{(n)} = t\right\}$ particija intervala $[0, t]$ takva da očica $\delta(\Pi_n) = \max_{2\le i\le n} |t_i^{(n)} - t_{i-1}^{(n)}|$ teži u nulu. Tada vrijedi*

$$(\mathbb{P}) \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n-1} f\left(B\left(t_j^{(n)}\right)\right) \cdot \left(B\left(t_{j+1}^{(n)}\right) - B\left(t_j^{(n)}\right)\right)^2 = \int_0^t f\left(B(s)\right) ds.$$

Dokaz. Neka je $T := T_{a,b} = \inf\{t > 0 \,|\, B(t, \omega) \notin [a, b]\}$ prvo vrijeme izlaska iz segmenta $[a, b], a < b$. Pokazat ćemo da je

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=1}^{n-1} f(B(t_j^{(n)} \wedge T)) \cdot \left(\left(B(t_{j+1}^{(n)} \wedge T) - B(t_j^{(n)} \wedge T)\right)^2 - \left(t_{j+1}^{(n)} \wedge T - t_j^{(n)} \wedge T\right)\right)\right)^2\right] = 0. \tag{2.13}$$

Tada za $\varepsilon > 0$ vrijedi

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\sum_{j=1}^{n-1} f\left(B\left(t_j^{(n)}\right)\right) \cdot \left(B\left(t_{j+1}^{(n)}\right) - B\left(t_j^{(n)}\right)\right)^2 - \int_0^t f(B(s))ds\right| \ge \varepsilon\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\mathbb{P}\left(\left|\sum_{j=1}^{n-1} f\left(B\left(t_j^{(n)} \wedge T\right)\right) \cdot \left(B\left(t_{j+1}^{(n)} \wedge T\right) - B\left(t_j^{(n)} \wedge T\right)\right)^2 - \int_0^{t\wedge T} f(B(s))ds\right| \ge \varepsilon, T \ge t\right)\right. \\
&\quad \left. + \mathbb{P}\left(\left|\sum_{j=1}^{n-1} f\left(B\left(t_j^{(n)}\right)\right) \cdot \left(B\left(t_{j+1}^{(n)}\right) - B\left(t_j^{(n)}\right)\right)^2 - \int_0^t f(B(s))ds\right| \ge \varepsilon, T < t\right)\right] \\
&\le \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\sum_{j=1}^{n-1} f\left(B\left(t_j^{(n)} \wedge T\right)\right) \cdot \left(B\left(t_{j+1}^{(n)} \wedge T\right) - B\left(t_j^{(n)} \wedge T\right)\right)^2 - \int_0^{t\wedge T} f(B(s))ds\right| \ge \varepsilon\right) \\
&\quad + \mathbb{P}(T < t).
\end{aligned}$$

Stoga, odabirom segmenta $[a, b]$ možemo postići da vjerojatnost $\mathbb{P}(T < t)$ bude proizvoljno mala pa i gornji limes postaje proizvoljno malen.
Budući da je po Teoremu 1.2.13 $\{B(t)^2 - t \,|\, t \ge 0\}$ martingal, za $r \le s$ imamo

$$\mathbb{E}\left[(B(s) - B(r))^2 - (s - r) \,|\, \mathcal{F}(r)\right] = 0$$

pa uzimajući u (2.13) uvjetno očekivanje obzirom na manju σ-algebru u mješovitom članu, zbog adaptiranosti, dobivamo da mješoviti članovi iščezavaju te pojednostavljenje uvjeta (2.13) glasi

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n-1} \mathbb{E}\left[f(B(t_j^{(n)} \wedge T))^2 \cdot \left(\left(B(t_{j+1}^{(n)} \wedge T) - B(t_j^{(n)} \wedge T)\right)^2 - (t_{j+1}^{(n)} \wedge T - t_j^{(n)} \wedge T)\right)^2\right] = 0.$$

Neprekidna funkcija f je ograničena na segmentu $[a, b]$ pa neka je M takav da je $f(x) \leq M$ za sve $x \in [a, b]$.

Primijetimo da je

$$\mathbb{E}\left[\underbrace{(B(t_j^{(n)} \wedge T + (t_{j+1}^{(n)} \wedge T - t_j^{(n)} \wedge T)) - B(t_j^{(n)} \wedge T))^4}_{=:W(t_{j+1}^{(n)} \wedge T - t_j^{(n)} \wedge T)^4}\right] = \begin{bmatrix}\text{Po Teoremu 2.2.1 su} \\ W \text{ i } \mathcal{F}_T \text{ nezavisni}\end{bmatrix} \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{[0,\infty\rangle} \mathbb{E}\left[W(t_{j+1}^{(n)} \wedge s - t_j^{(n)} \wedge s)^4\right] \mathbb{P}(T \in ds) \\
&\leq [\text{Napomena 1.2.4}] \leq \int_{[0,\infty\rangle} 3(t_{j+1}^{(n)} \wedge s - t_j^{(n)} \wedge s)^2 \mathbb{P}(T \in ds) \\
&\leq 3 \int_{[0,\infty\rangle} (t_{j+1}^{(n)} - t_j^{(n)})^2 \mathbb{P}(T \in ds) = 3(t_{j+1}^{(n)} - t_j^{(n)})^2.
\end{aligned}$$

Konačno dobivamo

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n-1} \mathbb{E}\left[f(B(t_j^{(n)} \wedge T))^2 \cdot \left(\left(B(t_{j+1}^{(n)} \wedge T) - B(t_j^{(n)} \wedge T)\right)^2 - (t_{j+1}^{(n)} \wedge T - t_j^{(n)} \wedge T)\right)^2\right] \\
&\leq 2 \cdot M^2 \sum_{j=1}^{n-1} \underbrace{\mathbb{E}\left[(B(t_{j+1}^{(n)} \wedge T) - B(t_j^{(n)} \wedge T))^4\right]}_{\leq(2.14)\leq 3\cdot(t_{j+1}^{(n)} - t_j^{(n)})^2} + 2 \cdot M^2 \sum_{j=1}^{n-1} \mathbb{E}\left[\underbrace{(t_{j+1}^{(n)} \wedge T - t_j^{(n)} \wedge T)^2}_{\leq (t_{j+1}^{(n)} - t_j^{(n)})^2}\right] \\
&\leq 2 \cdot M^2 \sum_{j=1}^{n-1} \mathbb{E}\left[3 \cdot (t_{j+1}^{(n)} - t_j^{(n)})^2\right] + 2 \cdot M^2 \sum_{j=1}^{n-1} \mathbb{E}\left[(t_{j+1}^{(n)} - t_j^{(n)})^2\right] \\
&\leq 8 \cdot M^2 \, \Pi_n \, t \xrightarrow{n \to \infty} 0.
\end{aligned}$$

□

Formulirajmo sada Itôvu formulu za pojedine oblike podintegralne funkcije f.

Korolar 2.2.3. *Neka je $f \in C^2(\mathbb{R})$ takva da je $\mathbb{E} \int_0^t f'(B(s))^2 ds < +\infty$ za neki $t > 0$. Tada g.s. za svaki $0 \leq s \leq t$ vrijedi*

$$f(B(s)) - f(B(0)) = \int_0^s f'(B(u)) dB(u) + \frac{1}{2} \int_0^s f''(B(u)) du.$$

Dokaz. Promotrimo prvo segment $[-M, M]$ te označimo modul neprekidnosti od f'' s

$$\omega(\delta, M) := \sup\{f''(x) - f''(y) \,|\, x, y \in [-M, M],\ |x - y| < \delta\}.$$

Sada za svaki par $x, y \in [-M, M]$ takav da je $|x-y| < \delta$ iz Taylorove formule dobivamo

$$\left| f(y) - f(x) - f'(x)(y-x) - \frac{1}{2} f''(x)(y-x)^2 \right| \leq \omega(\delta, M)(y-x)^2. \tag{2.15}$$

Stoga, označimo li particiju segmenta $[0, t]$ s $0 = t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_n = t$ te $\delta_B := \max_{1 \leq n \leq n-1} |B(t_{i+1}) - B(t_i)|$, $M_B := \max_{0 \leq s \leq t} |B(s)|$, primjenom (2.15) imamo

$$\begin{aligned} \Big| \sum_{i=1}^{n-1} (f(B(t_{i+1})) - f(B(t_i))) - \sum_{i=1}^{n-1} f'(B(t_i)) \cdot (B(t_{i+1}) - B(t_i)) \\ - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2} f''(B(t_i)) \cdot (B(t_{i+1}) - B(t_i))^2 \Big| \\ \leq \omega(\delta_B, M_B) \sum_{i=1}^{n-1} (B(t_{i+1}) - B(t_i))^2 \end{aligned}$$

- prvi član s lijeve strane je teleskopska suma te od cijele sume ostaje $f(B(t)) - f(B(0))$
- po definiciji stohastičkog integrala, možemo odabrati niz particija takav da im očica Π_n teži u nulu i da drugi član s lijeve strane nejednakosti g.s. teži u $\int_0^t f'(B(s))dB(s)$
- treći član po Teoremu 2.2.2 g.s. teži u $-\frac{1}{2} \int_0^t f''(B(s))ds$ kada očica Π_n teži u nulu
- primjenom Teorema 2.2.2 na $f(x) = 1$, dobivamo da suma na desnoj strani g.s. teži u t
- $\omega(\delta_B, M_b)$ teži u nulu g.s. zbog neprekidnosti trajektorije Brownovog gibanja.

Dakle, za fiksan t smo pokazali da Itôva formula vrijedi. Međutim, pokazali smo i da g.s. vrijedi za sve racionalne $0 \leq s \leq t$ pa zbog g.s. neprekidnosti svih članova u gornjem raspisu, dobivamo da onda vrijedi i za se $0 \leq s \leq t$. □

Teorem 2.2.4. *Neka je $X = \{X(s) \,|\, s \geq 0\}$ rastući, neprekidan, adaptiran slučajni proces i $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dva puta neprekidno diferencijabilna u prvoj koordinati te jednom neprekidno diferencijabilna u drugoj koordinati takva da vrijedi*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial x}(B(s), X(s)) \right)^2 ds \right] < +\infty$$

za neki $t > 0$. Tada g.s. za svaki $0 \leq s \leq t$ vrijedi Itôva formula

$$\begin{aligned} f(B(s), X(s)) - f(B(0), X(0)) = \int_0^s \frac{\partial f}{\partial x}(B(u), X(u)) dB(u) \\ + \int_0^s \frac{\partial f}{\partial y}(B(u), X(u)) dX(u) + \frac{1}{2} \int_0^s \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(B(u), X(u)) du \end{aligned} \tag{2.16}$$

Dokaz. Teorem 2.2.2 se može poopćiti na specijalni slučaj funkcije dvije varijable. Neka je f funkcija dvije varijable gdje je druga varijabla adaptiran slučajni proces $X = \{X(s) \mid s \geq 0\}$. Tada za particiju $0 = t_1 < t_2 < ... < t_n = t$, čija očica teži u nulu, po vjerojatnosti vrijedi

$$\sum_{j=1}^{n-1} f(B(t_j), X(t_j)) \cdot \Big(B(t_{j+1}) - B(t_j)\Big)^2 \to \int_0^t f(B(s), X(s))ds \tag{2.17}$$

Koristimo oznake

$$\omega_1(\delta, M) = \sup\left\{\frac{\partial f}{\partial y}(x_1, y_1) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_2, y_2) \;\middle|\; x_1, x_2, y_1, y_2 \in [-M, M], |x_1 - x_2| \wedge |y_1 - y_2| < \delta\right\}$$
$$\omega_2(\delta, M) = \sup\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_1, y_1) - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_2, y_2) \;\middle|\; x_1, x_2, y_1, y_2 \in [-M, M], |x_1 - x_2| \wedge |y_1 - y_2| < \delta\right\}.$$

Sada za $x, x_0, y, y_0 \in [-M, M]$ takve da je $|x - x_0| \wedge |y - y_0| < \delta$ postoji $\tilde{y} \in [-M, M]$, $|\tilde{y} - y| \wedge |\tilde{y} - y_0| < \delta$ za koji vrijedi

$$f(x, y) - f(x, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, \tilde{y})(y - y_0)$$

pa uz gornje oznake i Taylorovu formulu dobivamo

$$\left|f(x, y) - f(x, y_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)\right| \leq \omega_1(\delta, M)(y - y_0)$$
$$\left|f(x, y_0) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) - \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x^2}(x_0, y_0)(x - x_0)^2\right| \leq \omega_2(\delta, M)(x - x_0)^2$$

pa zbrajanjem uz nejednakost trokuta dobivamo željenu nejednakost:

$$\begin{aligned} \Big|f(x, y) - f(x_0, y_0) &- \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) \\ &- \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)(x - x_0)^2\Big| \leq \omega_1(\delta, M)(y - y_0) + \omega_2(\delta, M)(x - x_0)^2 \end{aligned}. \tag{2.18}$$

Definirajmo sada za particiju $0 = t_1 < t_2 < ... < t_n = t$

$$\begin{aligned} \delta &:= \max_{1 \leq i \leq n-1} |B(t_{i+1}) - B(t_i)| \wedge \max_{1 \leq i \leq n-1} |X(t_{i+1}) - X(t_i)| \\ M &:= \max_{0 \leq s \leq t} |B(s)| \wedge \max_{0 \leq s \leq t} |X(s)| \end{aligned}$$

. Iz (2.18) potom dobijemo

$$\Big|\sum_{i=1}^{n-1}(f(B(t_{i+1}),X(t_{i+1}))-f(B(t_i),X(t_i)))-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial f}{\partial y}(B(t_i),X(t_i))(X(t_{i+1})-X(t_i))$$
$$-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial f}{\partial x}(B(t_i),X(t_i))(B(t_{i+1}-B(t_i))-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(B(t_i),X(t_i))(B(t_{i+1}-B(t_i))^2\Big|.$$
$$\leq \omega_1(\delta,M)\sum_{i=1}^{n-1}(X(t_{i+1})-X(t_i))+\omega_2(\delta,M)\sum_{i=1}^{n-1}(B(t_{i+1})-B(t_i))^2$$

Sada možemo odabrati particiju čija očica teži k nuli, a za koju g.s. vrijede sljedeće tvrdnje

- prva suma je teleskopska pa preostaje samo $f(B(t),X(t))-f(B(0),X(0))$
- druga suma teži u $\int_0^t \frac{\partial f}{\partial y}(B(s),X(s))ds$ po definiciji Stieltjesovog integrala
- treća suma teži u $\int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(B(s),X(s))dB(s)$ po definiciji stohastičkog integrala
- po (2.17) idući član teži u $\frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(B(s),X(s))ds$
- te suma na desnoj strani po Teoremu 2.2.2 teži u t
- zbog neprekidnosti trejektorija Brownovog gibanja, $\omega_1(\delta,M)$ i $\omega_2(\delta,M)$ teže g.s. u nulu.

Dakle, pokazali smo tvrdnju za racionalne $0\leq s\leq t$ pa uz neprekidnost dobivamo tvrdnju za sve $0\leq s\leq t$. □

Napomena 2.2.5. *Za funkciju više varijabli $f:\mathbb{R}^{d+m}\to\mathbb{R}$, gdje je $x\in\mathbb{R}^d$, $y\in\mathbb{R}^m$ uvodimo oznake*

$$\nabla_x f := (\partial_1 f,\partial_2 f,...,\partial_d f)$$
$$\nabla_y f := (\partial_{d+1} f,\partial_{d+2} f,...,\partial_{d+m} f)$$
$$\int_0^t \nabla_x f(B(u),X(u))dB(u) := \sum_{i=1}^{d}\int_0^t \partial_i f(B(u),X(u))dB_i(u)$$
$$\int_0^t \nabla_y f(B(u),X(u))dX(u) := \sum_{i=d+1}^{m}\int_0^t \partial_i f(B(u),X(u))dX_i(u)$$
$$\Delta_x f := \sum_{j=1}^{d}\partial_{jj} f.$$

Teorem 2.2.6 (Višedimenzionalna Itôva formula)**.** *Neka je* $\{B(t) \,|\, t \geq 0\}$ *d-dimenzionalno Brownovo gibanje te* $\{X(s) \,|\, s \geq 0\}$ *neprekidan, adaptiran slučajni proces s vrijednostima u* $\mathbb{R}^m$ *i s rastućim komponentama.*
Neka je $f : \mathbb{R}^{d+m} \to \mathbb{R}$ *takva da parcijalne derivacije* $\partial_i f$ *te* $\partial_{jk} f$ *postoje za sve* $1 \leq j, k \leq d$, $1 \leq i \leq d + m$ *i neprekidne su.*
Ako za neki $t > 0$ *vrijedi*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t |\nabla_x f(B(s), X(s))|^2 ds\right] < +\infty$$

onda g.s. za svaki $0 \leq s \leq t$ *vrijedi*

$$\begin{aligned} f(B(s), X(s)) - f(B(0), X(0)) = &\int_0^s \nabla_x f(B(u), X(u)) dB(u) + \int_0^s \nabla_y f(B(u), X(u)) dX(u) \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^s \Delta_x f(B(u), X(u)) du \end{aligned} . \tag{2.19}$$

Napomena 2.2.7. *Itôva formula vrijedi g.s. simultano za sva vremena* $s \in [0, t]$ *pa vrijedi i za vremena zaustavljanja koja su ograničena s t. Pretpostavimo da* $f : U \to \mathbb{R}$ *zadovoljava uvjete diferencijabilnosti na otvorenom skupu U te neka je* $K \subset U$ *kompaktan. Tada postoji* $f^* : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *koja se podudara s f na skupu K te zadovoljava uvjete Teorema 2.2.6. Stoga primjenom Teorema 2.2.6 na* f^* *dobivamo da g.s.* (2.19) *vrijedi za f za sva vremena* $s \wedge T$, $s \leq t$.

Definicija 2.2.8. *Kažemo da je adaptirani slučajni proces* $\{X(t) \,|\, 0 \leq t \leq T\}$ *lokalni martingal ako postoje vremena zaustavljanja* T_n*, koja su g.s. rastuća prema T, takva da je proces* $\{X(t \wedge T_n) \,|\, t \geq 0\}$ *martingal za svaki* $n \in \mathbb{N}$.

Definicija 2.2.9. *Neka je* $U \subset \mathbb{R}^d$ *domena. Kažemo da je funkcija* $f : U \to \mathbb{R}$ *harmonijska ako je dva puta neprekidno diferencijabilna i, za sve* $x \in U$ *zadovoljava Laplaceovu jednadžbu*

$$\Delta f(x) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) = 0.$$

Ako umjesto jednakosti vrijedi $\Delta f(x) \geq 0$*, onda kažemo da je funkcija f subharmonijska.*

Teorem 2.2.10. *Neka je* $f : D \to \mathbb{R}$ *harmonijska na* $D \subset \mathbb{R}^d$*. Pretpostavimo da je Brownovo gibanje* $\{B(t) \,|\, 0 \leq t \leq T\}$ *s početkom unutar skupa D te da je T prvo vrijeme kada iziđe iz domene D.*

(a) Proces $\{f(B(t)) \,|\, 0 \leq t \leq T\}$ *je lokalni martingal.*

(b) Ako je za svaki $t > 0$ $\mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge T} |\nabla f(B(s))|^2 ds\right] < +\infty$, onda je $\{f(B(t \wedge T)) \,|\, t \geq 0\}$ martingal.

Dokaz. Neka je $U = \cup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ gdje je $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rastući niz kompaktnih skupova te T_n pripadno prvo vrijeme izlaska iz skupa K_n. Iz Teorema 2.2.6 i gornjeg osvrta, dobivamo

$$f(B(t \wedge T_n)) = \int_0^{t\wedge T_n} \nabla f(B(s)) dB(s) \tag{2.20}$$

pa je $\{f(B(t \wedge T_n)) \,|\, t \geq 0\}$ martingal. Očito je, gotovo sigurno,

$$f(B(t \wedge T)) = \lim_{n\nearrow\infty} f(B(t \wedge T_n)).$$

Stoga je za svaki $t \geq 0$ proces $\{f(B(t \wedge T_n)) \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ martingal u diskretnom vremenu po teoremu o opcionalnom zaustavljanju. Sada po pretpostavci o integrabilnosti vrijedi

$$\mathbb{E}\left[(f(B(t \wedge T_n)))^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge T_n} |\nabla f(B(s))|^2 \, ds\right] \leq \mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge T} |\nabla f(B(s))|^2 \, ds\right] < +\infty$$

pa je dani martingal L^2-ograničen te konvergencija u (2.20) vrijedi u L^1-smislu.
Pustimo li limes na jednakost

$$\mathbb{E}\left[f(B(t \wedge T_m)) \,\middle|\, \mathcal{F}(s \wedge T_n)\right] = f(B(s \wedge T_n)), \quad m \geq n, \; t \geq s$$

po $m \nearrow \infty$ pa po $n \nearrow \infty$, dobivamo

$$\mathbb{E}\left[f(B(t \wedge T)) \,|\, \mathcal{F}(s \wedge T)\right] = f(B(s \wedge T)), \quad t \geq s.$$

Ovime smo pokazali da je i proces $\{f(B(t \wedge T)) \,|\, t \geq 0\}$ također martingal. □

Primjer 2.2.11. *Uočimo da lokalni martingal nije nužno i martingal, tj. uvjet integrabilnosti iz Teorema 2.2.10 se ne može izostaviti. Zaista,*

$$f(x) = \begin{cases} \log|x|, & \textit{za } d = 2 \\ |x|^{2-d}, & \textit{za } d \geq 3 \end{cases}$$

je harmonijska funkcija na domeni $\mathbb{R}^d \backslash \{0\}$. Međutim, za d-dimenzionalno Brownovo gibanje $\{B(t) \,|\, t \geq 0\}$, $B(0) \neq 0$, proces $\{f(B(t)) \,|\, t \geq 0\}$ ne zadovoljava martingalno svojstvo jer je

$$\begin{aligned} &\lim_{t\nearrow\infty} \mathbb{E} \log|B(t)| = +\infty, && \textit{za } d = 2 \\ &\lim_{t\nearrow\infty} \mathbb{E}|B(t)|^{2-d} = 0, && \textit{za } d \geq 3. \end{aligned}$$

Poglavlje 3

Konformna preslikavanja i namotajni brojevi

3.1 Kompleksna funkcija

Kompleksni brojevi su brojevi oblika $z = \Re(z) + i\Im(z) = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$ te se mogu zapisati kao

$$\begin{aligned} z &= r(\cos\theta + i\sin\theta) & r &= \sqrt{x^2+y^2}, \theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) \\ &= re^{i\theta} = |z|e^{i\theta} & \theta &= \arg(z) \in \langle -\pi, \pi] \,. \end{aligned}$$

Slično, kompleksne funkcije $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ možemo rastaviti na realni i imaginarni dio $f = f_1 + if_2$, gdje su $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ovakav rastav nam olakšava daljnju analizu takvih funkcija.

Definicija 3.1.1. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup. Kažemo da je $f : \Omega \to \mathbb{C}$ derivabilna u točki $z_0 \in \Omega$ ako postoji limes*

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

Teorem 3.1.2 (Cauchy - Riemmanovi uvjeti diferencijabilnosti)**.** *Kompleksna funkcija $f = f_1 + if_2 : \Omega \to \mathbb{C}$, gdje je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup, je derivabilna u točki $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$ ako i samo ako su funkcije f_1 i f_2 kao realne funkcije dvije (realne) varijable diferencijabilne u točki (x_0, y_0) i zadovoljavaju Cauchy - Riemannove uvjete:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0, y_0) &= \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0, y_0) &= -\frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0, y_0). \end{aligned}$$

U tom slučaju vrijedi

$$f'(z_0) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Definicija 3.1.3. *Za funkciju $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ kažemo da je analitička u okolini U točke $z_0 = x_0 + iy_0$ ako je diferencijabilna u svakoj točki od U. Dodatno, kažemo da je f cijela ako je analitička na cijeloj kompleksnoj ravnini.*

Korolar 3.1.4. *Neka je $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analitička funkcija takva da je $f = f_1 + if_2$. Tada su realni i imaginarni dio f_1 i f_2 harmonijske funkcije.*

Dokaz. Neka je $f = f_1 + if_2$ analitička na nekom otvorenom skupu $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Tada vrijedi

$$\begin{aligned}\Delta f_1 = \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f_1}{\partial y} \qquad (3.1)\\ &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f_2}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f_2}{\partial x}\\ &= \frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f_2}{\partial y \partial x} = [\text{Schwarzov teorem}] = 0.\end{aligned}$$

Slično dobijemo da je i f_2 harmonijska. □

3.2 Konformna preslikavanja i namotajni broj

U ovom poglavlju ćemo se baviti planarnim Brownovim gibanjem. Pokazat ćemo konformnu invarijantnost te asimptotski zakon koji vrijedi za namotajni broj (eng. winding number).

Definicija 3.2.1. *Kažemo da je skup U domena ako je $U \subset \mathbb{C}$ i U je povezan.*

Neka je $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ nekonstantna analitička funkcija takva da je $f = f_1 + if_2$. Primjenom Itôve formule uz (3.1) dobivamo da g.s. za svaki $t \geq 0$ vrijedi

$$f(B(t)) = \int_0^t f'(B(s))dB(s) \qquad (3.2)$$

gdje je $dB(s) := dB_1(s) + idB_2(s)$ te $B(s) = B_1(s) + iB_2(s)$.

Desna strana u (3.2) definira neprekidni proces s nezavisnim i normalnim prirastima te vrijedi

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t f'(B(s))dB(s)\right)^2\right] = \int_0^t |f'(B(s))|^2 ds$$

što bi moglo sugerirati da je $\{f(B(t)) \,|\, t \geq 0\}$ Brownovo gibanje koje putuje brzinom

$$t \mapsto \int_0^t |f'(B(s))|^2 ds.$$

Zaista, promotrimo li razvoj funkcije f oko točke z_0, dobivamo

$$f(z) = z_0 + f'(z_0)(z - z_0) + O(|z - z_0|^2)$$

te uočavamo da f transformira sve točke u okolini z_0 tako da $(z - z_0)$ množi faktorom $|f'(z_0)|$ i rotira ih za $\arg f'(z_0)$. U Lemi 1.2.5 smo vidjeli da je Brownovo gibanje invarijantno obzirom na skaliranje uz vremenski pomak, a invarijantno je i obzirom na rotaciju. Stoga očekujemo da će $f(B(t))$ biti Brownovo gibanje uz neki vremenski pomak.

Definicija 3.2.2. *Neka su $U, V \subseteq \mathbb{C}$. Preslikavanje $f : U \to V$ zovemo konformnim ako je f analitička funkcija koja je bijekcija.*

Teorem 3.2.3 (Invarijantnost Brownovog gibanja)**.** *Neka je $U \subseteq \mathbb{C}, x \in U$ i $f : U \to V$ nekonstantna analitička funkcija. Nadalje, neka je $B = \{B(t) \,|\, t \geq 0\}$ Brownovo gibanje koje kreće iz točke $x \in \mathbb{C}$ te $\tau_U = \inf\{t \geq 0 \,|\, B(t) \notin U\}$ prvo vrijeme izlaska iz domene U. Tada je proces $f(B) = \{f(B(t)) \,|\, 0 \leq t \leq \tau_U\}$ vremenski izmijenjeno Brownovo gibanje, tj. postoji Brownovo gibanje $\tilde{B} = \{\tilde{B}(t) \,|\, t \geq 0\}$ takvo da za sve $0 \leq t < \tau_U$ vrijedi*

$$f(B(t)) = \tilde{B}(\xi(t)), \quad \xi(t) = \int_0^t |f'(B(s))|^2 ds.$$

Ako je f dodatno i konformno, onda je $\xi(\tau_U)$ prvo vrijeme izlaska iz V za $\{\tilde{B}(t) \,|\, t \geq 0\}$.

Dokaz. Uočimo da je skup nultočaka derivacije od f najviše prebrojiv i nema gomilište u domeni U. U suprotnom bi f bila konstanta. Stoga takve točke možemo ukloniti iz U, a da U i dalje bude otvoren skup. Dakle, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da f ima derivaciju koja ne iščezava na U.

Također, možemo pretpostaviti da je f preslikavanje među omeđenim domenama. U suprotnom definiramo

$$K_n := \left\{z \in U \,\middle|\, d(z, U^c) \geq \frac{1}{n}\right\} \bigcap \left\{z \in U \,\middle|\, |z| \leq n\right\}.$$

Očito je K_n kompaktan te $K_n \subset U$. Sada za

$$U_n := \left\{z \in U \,\middle|\, d(z, U^c) > \frac{1}{n}\right\} \bigcap \left\{z \in U \,\middle|\, |z| < n\right\} \tag{3.3}$$

dobivamo niz otvorenih skupova $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ koji u uniji daju čitav U te vrijedi $U_n \subset K_n \subset U$. Stoga je $V_n = f(U_n) \subset f(K_n)$ ograničen po Bolzano - Weierstrassovom teoremu. Dodatno, $\{f(B(t))\,|\,t \leq \tau_{U_n}\}$ je vremenski izmijenjeno Brownovo gibanje za svaki n pa je takav i proces $\{f(B(t))\,|\,t \leq \tau_U\}$.

Neka je za svaki $t \geq 0$

$$\sigma(t) = \inf\{s \geq 0\,|\,\xi(s) \geq t\} = \inf\left\{s \geq 0 \,\middle|\, \int_0^s |f'(B(u))|^2 du \geq t\right\}$$

vrijeme zaustavljanja koje prestavlja inverz vremenskog pomaka. Tada je

$$\xi(\sigma(t)) = \int_0^{\sigma(t)} |f'(B(u))|^2\, du = t.$$

Za $\tilde{B} = \{\tilde{B}(t)\,|\,t \geq 0\}$ Brownovo gibanje nezavisno od $B = \{B(t)\,|\,t \geq 0\}$ definiramo proces $W = \{W(t)\,|\,t \geq 0\}$ s

$$W(t) = f(B(\sigma(t) \wedge \tau_U)) + \tilde{B}(t) - \tilde{B}(t \wedge \xi(\tau_U)), \quad t \geq 0.$$

Proces W definirali smo na način da se u trenutku $\xi(\tau_U)$ Brownovo gibanje $\tilde{B}$ spoji na zadnju vrijednost procesa $\{f(B(\sigma(t)))\,|\,0 \leq t \leq \xi(\tau_U)\}$. Zaista,

$$\begin{aligned} W(\xi(\tau_U)) &= f(B(\underbrace{\sigma(\xi(\tau_U))}_{=\tau_U} \wedge \tau_U)) + \tilde{B}(\xi(\tau_U)) - \tilde{B}(\xi(\tau_U) \wedge \xi(\tau_U)) \\ &= f(B(\tau_U)). \end{aligned}$$

Označimo $\mathcal{G} = \sigma\{W(s)\,|\,s \leq t\}$. Preostalo je pokazati da je W Brownovo gibanje. Neka je $W = \{X(t) + iY(t)\,|\,t \geq 0\}$ dvodimenzionalni (planarni) proces takav da za sve $\lambda = \lambda_2 + i\lambda_2 \in \mathbb{C}$ i $0 \leq s \leq t$ vrijedi

$$\mathbb{E}\left[e^{\lambda_1 X(t)+\lambda_2 Y(t)} \mid \mathcal{G}(s)\right] = e^{\frac{1}{2}|\lambda|^2(t-s)+\lambda_1 X(s)+\lambda_2 Y(s)}.$$

Tada za $s = 0$ dobijemo

$$\mathbb{E}\left[e^{\lambda_1 X(t)+\lambda_2 Y(t)}\right] = e^{\frac{1}{2}|\lambda|^2 t} = e^{\frac{1}{2}\lambda_1^2 t+\frac{1}{2}\lambda_2^2 t}.$$

Također,

$$\mathbb{E}\left[e^{\lambda_1(X(t)-X(s))+\lambda_2(Y(t)-Y(s))} \mid \mathcal{G}(s)\right] = e^{\frac{1}{2}|\lambda|^2(t-s)}$$

pa iz jedinstvenosti (dvodimenzionalne) funkcije izvodnice momenta slijedi stacionarnost prirasta.

Znamo da za planarno Brownovo gibanje $B(t) = B_1(t) + iB_2(t)$ vrijedi

$$\mathbb{E}\left[e^{\lambda_1 B_1(t)+\lambda_2 B_2(t)}\right] = \mathbb{E}\left[e^{\lambda_1 B_1(t)}\right]\mathbb{E}\left[e^{\lambda_2 B_2(t)}\right] = e^{\frac{1}{2}\lambda_1^2 t}e^{\frac{1}{2}\lambda_2^2 t} = e^{\frac{1}{2}|\lambda|^2 t}$$

pa opet iz jedinstvenosti (dvodimenzionalne) funkcije izvodnice momenta slijedi da $W(t)$ ima istu distribuciju kao i $B(t)$. Još je preostalo provjeriti nezavisnost prirasta. Međutim, to također slijedi iz jedinstvenosti funkcije izvodnice momenta jer je

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[e^{\lambda_1(X(t)-X(s))+\lambda_2(Y(t)-Y(s))+\mu_1 X(s)+\mu_2 Y(s)}\right] = \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[e^{\lambda_1(X(t)-X(s))+\lambda_2(Y(t)-Y(s))+\mu_1 X(s)+\mu_2 Y(s)} \mid \mathcal{F}(s)\right]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[e^{(-\lambda_1+\mu_1)X(s)+(-\lambda_2+\mu_2)Y(s)} e^{\lambda_1^2(t-s)+\lambda_2^2(t-s)+\lambda_1 X(s)+\lambda_2 Y(s)}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[e^{\mu_1 X(s)+\mu_2 Y(s)}\right] e^{\lambda_1^2(t-s)+\lambda_2^2(t-s)} \\
&= \mathbb{E}\left[e^{\mu_1 X(s)+\mu_2 Y(s)}\right] \mathbb{E}\left[e^{\lambda_1(X(t)-X(s))+\lambda_2(Y(t)-Y(s))}\right].
\end{aligned}$$

Općeniti slučaj, za $n \geq 2$, se slično pokaže.

Stoga je dovoljno pokazati da za $0 \leq s \leq t$, $\lambda \in \mathbb{C}$ vrijedi

$$\mathbb{E}[e^{\langle \lambda, W(t)\rangle} \mid \mathcal{G}(s)] = e^{\frac{1}{2}|\lambda|^2(t-s)+\langle \lambda, W(s)\rangle}$$

gdje je $\langle \cdot, \cdot \rangle$ skalarni produkt. Zapravo je dovoljno pokazati da je za $x \in U$

$$\mathbb{E}\left[e^{\langle \lambda, W(t)\rangle} \mid W(s) = f(x)\right] = e^{\frac{1}{2}|\lambda|^2(t-s)+\langle \lambda, f(x)\rangle}.$$

Bez smanjenja općenitosti, pretpostavimo da je $s = 0$ te promotrimo očekivanje u odnosu na nezavisno Brownovo gibanje $\{\tilde{B}(t) \mid t \geq 0\}$ uz uvjet $\tilde{B}(0) = x$. Dobivamo

$$\mathbb{E}\left[e^{\langle \lambda, W(t)\rangle} \mid W(0) = f(x)\right] = \mathbb{E}_x\left[e^{\frac{1}{2}|\lambda|^2(t-\xi(\sigma(t)\wedge\tau_U))+\langle \lambda, f(B(\sigma(t)\wedge\tau_U))\rangle}\right].$$

Budući da po Napomeni 2.2.7 možemo primijeniti višedimenzionalnu Itôvu formulu, definirajmo $F : U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s

$$F(x,u) = e^{\frac{1}{2}|\lambda|^2(t-u)+\langle \lambda, f(x)\rangle}. \tag{3.4}$$

Zaista, promotrimo li particiju (3.3), vidimo da je $|f'(x)|$ ograničena na većim udaljenostima od nule na U_n pa je vrijeme zaustavljanja $T = \sigma(t)\wedge\tau_{U_n}$ ograničeno. Višedimenzionalna Itôva formula sada daje

$$\begin{aligned}
F(B(T),\xi(T)) - F(B(0),\xi(0)) = &\int_0^T \nabla_x F(B(s),\xi(s))\, dB(s) + \\
&+ \int_0^T \partial_u F(B(s),\xi(s))\, d\xi(s) + \frac{1}{2}\int_0^T \Delta_x F(B(s),\xi(s))\, ds.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Za $g = \langle \lambda, f\rangle$ vrijedi $\nabla g = \sum_{i=1}^2 \lambda_i \nabla f_i$ pa je $|\nabla g|^2 = |\lambda|^2|f'|^2$ te $\Delta g = 0$ po (3.1). Stoga

$$\Delta e^g = e^g\left(\Delta g + |\nabla g|^2\right) \implies \Delta e^{\langle \lambda, f(x)\rangle} = |\lambda|^2|f'(x)|^2 e^{\langle \lambda, f(x)\rangle}.$$

Također,

$$\partial_u e^{\frac{1}{2}|\lambda|^2(t-u)} = -\frac{1}{2}|\lambda|^2 e^{\frac{1}{2}|\lambda|^2(t-u)}$$
$$d\xi(s) = |f'(B(s))|^2 ds.$$

Stoga se u (3.5) poništavaju zadnja dva člana te dobivamo

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[e^{\langle\lambda,W(t)\rangle} \,|\, W(0) = f(x)\right] &= \mathbb{E}_x\left[F\left(B(\sigma(t) \wedge \tau_U), \xi(\sigma(t) \wedge \tau_U)\right)\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_x\left[F(B(T), \xi(T))\right] = F(x,0) = e^{\frac{1}{2}|\lambda|^2 t + \langle\lambda, f(x)\rangle}.\end{aligned}$$

Kako bi dokaz bio gotov, potrebno je uočiti da za konformno preslikavanje f vrijedi $f(B(t)) \to \partial V$ kada $t \nearrow \tau_U$ pa je $\xi(\tau_U)$ prvo vrijeme izlaska iz V za proces $\{\tilde{B}(t) \,|\, t \geq 0\}$. □

Promotrimo harmonijsku mjeru i iskoristimo konformnu invarijantnost kako bismo dobili eksplicitnu formulu u posebnim slučajevima.

Definicija 3.2.4. *Neka je $\{B(t) \,|\, t \geq 0\}$ d-dimenzionalno Brownovo gibanje, $d \geq 2$, koje kreće iz točke x te fiksirajmo zatvoreni skup $A \subset \mathbb{R}^d$. Definirajmo mjeru $\mu_A(x,\cdot)$ s*

$$\mu_A(x,B) = \mathbb{P}\left(B(\tau) \in B, \tau < +\infty\right) \text{ uz } \tau(A) = \inf\{t \geq 0 \,|\, B(t) \in A\},\ B \subset A \text{ Borelov}.$$

Drugim riječima, $\mu_A(x,\cdot)$ je distribucija prvog vremena pogađanja skupa A te je ukupna masa mjere vjerojatnost da Brownovo gibanje koje kreće iz točke x pogodi skup A. Ako $x \notin A$, onda je ∂A nosač mjere.

Definicija 3.2.5. *Kompaktni skup A zovemo nepolarnim (za Brownovo gibanje) ako je $\mu_A(x,A) > 0$ za sve $x \in A^c$. U suprotnom, skup A zovemo polarnim (za Brownovo gibanje).*

Teorem 3.2.6. *Neka je $A \subset \mathbb{R}^d$ kompaktan, nepolaran skup. Tada postoji vjerojatnosna mjera μ_A na A*

$$\mu_A(B) = \lim_{x\to\infty} \mathbb{P}_x\left\{B(\tau(A)) \in B \,|\, \tau(A) < +\infty\right\}, \quad \text{za } B \subset A \text{ Borelov skup}.$$

Mjeru μ_A zovemo harmonijska mjera (iz beskonačnosti).

Dokaz. Vidjeti [6, Teorem 3.46.]. □

Teorem 3.2.7. *Neka su $U, V \subset \mathbb{R}^2$ domene te $f : \bar{U} \to \bar{V}$ neprekidna funkcija koja U preslikava konformno u V.*

(i) Ako je $x \in U$, onda je $\mu_{\partial U}(x, \cdot) \circ f^{-1} = \mu_{\partial V}(f(x), \cdot)$

(ii) Dodatno, neka su $U = K^c$ i $V = L^c$ komplementi kompaktnih skupova K i L te $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$. Tada je $\mu_K \circ f^{-1} = \mu_L$.

Dokaz. Neprekidnost funkcije f na $\bar{U}$ osigurava da se za prvo vrijeme pogađanja ∂U

$$\tau_U = \inf\{t \geq 0 \,|\, B(t) \in \partial U\}$$

te prvo vrijeme pogađanja skupa ∂V po konformnom preslikavanju f

$$T_V = \inf\{t \geq 0 \,|\, f(B(t)) \in \partial V\},$$

$B(\tau_U)$ preslika u $f(B(T_V))$. Sada tvrdnja slijedi iz Teorema 3.2.3.
Druga tvrdnja slijedi uz Teorem 3.2.6 nakon što pustimo $x \to \infty$. □

Primjer 3.2.8. *Odredimo harmonijsku mjeru iz beskonačnosti na jediničnom intervalu*

$$[0, 1] = \{x + iy \,|\, x \in [0, 1], y = 0\} \subset \mathbb{C}.$$

Neka je $K = \overline{B(0, 1)}$ i $L = [-1, 1]$. Definirajmo

$$f : K^c \to L^c \quad f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

Budući da je

$$f'(z) = \frac{z^2 - 1}{2z^2} \neq 0 \quad \text{za } z \in K^c,$$

slijedi da je f konformno preslikavanje. Specijalno, f preslikava rubove na rubove, tj.

$$f(\partial B(0, 1)) = [-1, 1].$$

Nadalje, za $z = x + iy = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \in \partial B(0, 1)$ je

$$\begin{aligned}
|f'(z)|^2 &= \frac{|\cos^2\theta - \sin^2\theta - 1 + i2\sin\theta\cos\theta|^2}{4|\cos\theta + i\sin\theta|^4} \\
&= \frac{(\cos^2\theta - \sin^2\theta - 1)^2 + 4\sin^2\theta\cos^2\theta}{4} \\
&= \frac{(1 - \cos 2\theta)^2 + \sin^2 2\theta}{4} = \frac{1 - \cos 2\theta}{2} = \sin^2\theta = y^2.
\end{aligned}$$

Odredimo prasliku funkcije f *na* $\partial B(0,1)$. *Neka je* $x \in [-1,1]$. *Tražimo* $z = \cos\theta + i\sin\theta \in \partial B(0,1)$ *takav da je* $f(z) = x$, *tj.*

$$z^2 - 2xz + 1 = 0.$$

Rješavanjem kvadratne jednadžbe dobijemo

$$z = x \pm i\sqrt{1-x^2} = \cos\theta \pm i\sin\theta$$

za $\theta \in [0, 2\pi]$ *takav da je* $x = \cos\theta$. *Iz Teorema 3.2.7(ii) znamo da za harmonijske mjere (u beskonačnosti) vrijedi*

$$\mu_K(f^{-1}(A)) = \mu_L(A), \quad \text{za } A \subset [-1,1] \text{ Borelov.}$$

Za Brownovo gibanje je harmonijska mjera kugle $B(0,1)$ *uniformna distribucija na* $\partial B(0,1)$, *tj.*

$$\mu_K(A) = \int_A \frac{1}{2\pi}\mathbb{1}_{\partial B(0,1)}(x)dx.$$

Odredimo gustoću mjere $\mu_L = \mu_K \circ f^{-1}$.

Koristeći teorem o zamjeni varijable, slijedi da za $A \subset [-1,1]$ *vrijedi*

$$\begin{aligned}(\mu_K \circ f^{-1})(A) = \mu_K(f^{-1}(A)) &= \int_{f^{-1}(A)} \frac{dy}{2\pi} = 2\int_{f^{-1}(A)\cap\{z\in\mathbb{C} \mid \Im z>0\}} \frac{dz}{2\pi} \\ &= \begin{bmatrix} z = f^{-1}(z) = x + i\sqrt{1-x^2} \\ dz = |(f^{-1})'(x)|dx = \frac{dx}{|f'(f^{-1}(x))|}\end{bmatrix} \\ &= 2\int_A \frac{dx}{2\pi\sqrt{1-x^2}},\end{aligned}$$

odakle slijedi da je gustoća mjere μ_L

$$\frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}\mathbb{1}_{\langle -1,1\rangle}(x).$$

Označimo li $M = [0,1]$ *i definiramo* $g(z) = z^2$, *dobijemo da je* $g : L^c \to M^c$ *konformno preslikavanje, koje preslikava* $[-1,1]$ *na* $[0,1]$. *Tada je* $\mu_M = \mu_L \circ g^{-1}$ *pa za* $A \subset [0,1]$ *dobijemo*

$$\begin{aligned}(\mu_L \circ g^{-1})(A) = \mu_L(g^{-1}(A)) &= \int_{g^{-1}(A)} \frac{dx}{\pi\sqrt{1-x^2}} \\ &= \int_{g^{-1}(A)\cap\langle -1,0]} \frac{dx}{\pi\sqrt{1-x^2}} + \int_{g^{-1}(A)\cap[0,1\rangle} \frac{dx}{\pi\sqrt{1-x^2}}.\end{aligned}$$

Drugi integral računamo koristeći zamjenu varijable $y = g(x) = x^2$ i inverz $x = \sqrt{y}$:

$$\int_{g^{-1}(A)\cap[0,1\rangle} \frac{dx}{\pi\sqrt{1-x^2}} = \int_A \frac{1}{\pi\sqrt{1-y}}\frac{dy}{2\sqrt{y}} = \int_A \frac{dx}{\pi\sqrt{x(1-x)}},$$

a prvi pomoću zamjene $y = x^2$ i inverza $x = -\sqrt{y}$, odakle je (koristeći zapis sa skupom A) $dx = \left|\frac{1}{2\sqrt{y}}\right| dy$ pa dobijemo isti rezultat.

Dakle,

$$(\mu_L \circ g^{-1})(A) = \int_A \frac{dx}{\pi\sqrt{x(1-x)}}$$

pa je gustoća mjere μ_L zapravo gustoća beta distribucije s parametrima $p = q = \frac{1}{2}$, tj.

$$\frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}\mathbb{1}_{\langle 0,1\rangle}(x).$$

Konformnu invarijantnost možemo primijeniti i za računanje vjerojatnosti da planarno Brownovo gibanje napusti konus s vrhom unutar kugle prije nego što napusti kuglu.

Definicija 3.2.9. *Kažemo da je $W(\varphi)$ konus s vrhom u ishodištu čiji kut iznosi φ ako vrijedi*

$$W(\varphi) = \left\{ re^{i\theta} \,\middle|\, |\theta| \le \frac{\varphi}{2}, r \ge 0 \right\}.$$

Lema 3.2.10. *Neka je $a \in \mathbb{C}$ takav da je $|a| < 1$ i $\theta \in R$. Konformno preslikavanje*

$$f(z) = \frac{e^{i\theta}(z-a)}{1-\overline{a}z}$$

preslikava jediničnu kružnicu na jediničnu kružnicu.

Dokaz. Neka je $|z| = 1 = |\overline{z}|$. Tada je $1 = |z|^2 = z\overline{z} = 1$ pa je

$$|f(z)| = \left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right| = \frac{|z-a||\overline{z}|}{|1-\overline{a}z|} = \frac{|1-a\overline{z}|}{|1-\overline{a}z|} = 1.$$

□

Teorem 3.2.11. *Neka je $\varphi \in \langle 0, 2\pi]$. Označimo s $W(\varphi)$ otvoreni konus s vrhom u ishodištu, koji je simetričan obzirom na x-os te čiji kut iznosi φ.*
Neka je $B = \{B(t) \,|\, t \ge 0\}$ planarno Brownovo gibanje s početkom u $x = (1,0)$ te

$$T(r) = \inf\{t \ge 0 \,|\, |B(t)| = r\}$$

Tada za $r > 1$ vrijedi

$$\mathbb{P}\left(B([0,T(r)]) \subset W(\varphi)\right) = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{2r^{\frac{\pi}{\varphi}}}{r^{\frac{2\pi}{\varphi}}-1}\right).$$

Dokaz. Poistovijetimo $\mathbb{R}^2$ s kompleksnom ravninom.
Uočimo da je dovoljno pokazati tvrdnju za $\varphi = \pi$. Zaista,

$$f : W(\varphi) \to W(\pi), \quad f(x) = x^{\frac{\pi}{\varphi}}$$

preslika konus u poluravninu. Tada je $B^* := f \circ B$ vremenski izmijenjeno Brownovo gibanje s početkom u $B^*(0) = 1$ po Teoremu 3.2.3 pa vrijedi

$$\{B([0, T(r)]) \subset W(\varphi)\} = \left\{B^*\left(\left[0, T\left(r^{\frac{\pi}{\varphi}}\right)\right]\right) \subset W(\pi)\right\}.$$

Neka je $B = \{B(t) \,|\, t \geq 0\}$ Brownovo gibanje s početkom u $B(0) = 1$. Za vrijeme zaustavljanja

$$S = \min\{t \geq 0 \,|\, \Re(B(t)) \leq 0\},$$

koristeći refleksiju preko imaginarne osi $f(x, y) := (-x, y)$, definirajmo

$$\tilde{B}(t) = \begin{cases} B(t), & t \leq S \\ f(B(t)), & t \geq S \end{cases}.$$

Uočimo da je $\tilde{B}$ Brownovo gibanje s početom u $\tilde{B}(0) = 1$ te za

$$\tilde{T}(r) = \inf\{t \geq 0 \,|\, |\tilde{B}(t)| = r\}$$

vrijedi

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\Re(B(T(r))) > 0\right) &= \mathbb{P}(\Re(B(T(r))) > 0, \underbrace{T(r) < S}_{\subset\{\Re(B(T(r)))>0\}}) + \mathbb{P}(\Re(B(T(r))) > 0, T(r) > S) \\ &= \mathbb{P}(T(r) < S) + \mathbb{P}(\Re(\tilde{B}(\tilde{T}(r))) < 0) \\ &= \mathbb{P}(T(r) < S) + \mathbb{P}(\Re(B(T(r))) > 0).\end{aligned} \tag{3.6}$$

Nas zanima

$$\mathbb{P}(T(r) < S) = \mathbb{P}\left(\Re(B(T(r))) > 0\right) - \mathbb{P}(\Re(B(T(r))) > 0) = 1 - 2\mathbb{P}(\Re(B(T(r))) < 0),$$

što je vjerojatnost da Brownovo gibanje napusti kuglu radijusa r prije nego što iziđe iz konusa. Kako bismo to doznali, iskoristimo Lemu 1.2.5 te pretpostavimo da je Brownovo gibanje počelo u $B(0) = \frac{1}{r}$.

Definiramo li sada $T = \min\{t \geq 0 \,|\, |B(t)| = 1\}$ te $f : \mathcal{B}(0, 1) \to \mathcal{B}(0, 1)$

$$f(z) = \frac{z - \frac{1}{r}}{1 - \frac{z}{r}},$$

onda je $f\left(\frac{1}{r}\right) = 0$ te $f(1) = 1$ pa možemo primijeniti Lemu 3.2.10 s $a = \frac{1}{r}$ i $\theta = 0$.

Iz Teorema 3.2.3 slijedi da je $f(B)$ vremenski izmijenjeno Brownovo gibanje $\tilde{B} = \{\tilde{B}(t) \,|\, 0 \leq t \leq \tau_U\}$, gdje je domena $U = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1, \Re z > 0\} = B(0,1) \cap \{z \in \mathbb{C} \,|\, \Re z > 0\}$ te vrijedi

$$\mathbb{P}(\Re(B(T(r))) < 0) = \mathbb{P}(\tilde{B}(\tau_U) \in f(\partial U)).$$

Primijetimo da Brownovo gibanje kreće iz ishodišta. Da bismo izračunali traženu vjerojatnost, trebamo samo izračunati duljinu luka $f(\partial U)$ (jer se po Lemi 3.2.10 jedinična kružnica preslika opet na jediničnu kružnicu). Zbog simetrije je dovoljno pogledati kamo se preslikava točka $i = (0, 1)$:

$$f(i) = \frac{i - \frac{1}{r}}{1 - \frac{i}{r}} \cdot \frac{1 + \frac{i}{r}}{1 + \frac{i}{r}} = \frac{-\frac{2}{r} + i\left(1 - \frac{1}{r^2}\right)}{1 + \frac{1}{r^2}}.$$

Dakle, dobivamo da se polukružnica preslika u luk duljine

$$2 \operatorname{arctg} \frac{1 - \frac{1}{r^2}}{-\frac{2}{r}} = 2 \operatorname{arctg} \frac{r^2 - 1}{2r}.$$

Zato je

$$\mathbb{P}(\tilde{B}(\tau_U) \in f(\partial U)) = \frac{\mathbb{P}(\tilde{B}(\tau_U) \in f(\partial U))}{2\pi} = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{r^2 - 1}{2r}.$$

Koristeći svojstva funkcije arctg slijedi

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T(r) < S) &= 1 - \frac{r}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{r^2 - 1}{2r} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{r^2 - 1}{2r}\right) \\ &= \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{2r}{r^2 - 1}. \end{aligned}$$

Zamijenimo li r s $r^{\frac{\pi}{\varphi}}$, dobivamo traženu vjerojatnost. □

Sljedeći rezultat omogućava reprezentaciju planarnog Brownovog gibanja u polarnim koordinatama. Identificirajmo $\mathbb{R}^2$ s kompleksnom ravninom.

Teorem 3.2.12. *Neka je $B = \{B(t) \,|\, t \geq 0\}$ planarno Brownovo gibanje s početkom u $B(0) = 1$. Tada postoje dva nezavisna linearna Brownova gibanja $\{W_i(t) \,|\, t \geq 0\}, i = 1, 2$ za koja vrijedi*

$$B(t) = e^{W_1(H(t)) + iW_2(H(t))}, \quad t \geq 0$$

gdje je

$$H(t) = \int_0^t \frac{ds}{|B(s)|^2} = \inf \left\{ u \geq 0 \,\Big|\, \int_0^u e^{2W_1(s)} ds > t \right\}.$$

Dokaz. Može se pokazati da je $\mathbb{P}(B(t) = 0$ za neki $t \in \langle 0, 1])= 0$ (v. [6, Korolar 2.26.]), od kud slijedi da je $H(t)$ dobro definirano. Označimo $f(t) = \int_0^t e^{2W_1(u)} du$. Tada je $g(t) = \inf\{u > 0 \,|\, f(u) > t\} = f^{-1}(t)$. Vrijedi $H(0) = 0 = g(0)$ te

$$H'(t) = \frac{1}{|B(t)|^2} = \frac{1}{e^{2W_1(H(t))}} = e^{-2W_1(H(t))}$$

$$g'(t) = \frac{1}{f'(g(t))} = e^{-2W_1(g(t))}.$$

Dakle, H i g zadovoljavaju istu običnu diferencijalnu jednadžbu i imaju isti početni uvjet pa se podudaraju kao funkcije. Neka je $\{W(t) \,|\, t \geq 0\}$ planarno Brownovo gibanje takvo da je $W(t) = W_1(t) + iW_2(t)$.
Tada je po Teoremu 3.2.3

$$B(\xi(t)) = e^{W(t)}, \tag{3.7}$$

gdje je $B = \{B(t) \,|\, t \geq 0\}$ Brownovo gibanje te $\xi(t) = \int_0^t e^{2W_1(s)} ds$.
Po definiciji vrijedi $H = \xi^{-1}$ pa dobivamo traženi rezultat

$$B(s) = (3.7) = e^{W(H(s))} = e^{W_1(H(s)) + iW_2(H(s))}$$

□

Primjer 3.2.13. *Primjenom Teorema 3.2.12 na Brownovo gibanje $B = \{B(t) \,|\, t \geq 0\}$ dobivamo*

$$\log |B(t)| = W_1(H(t))$$

pa je proces $\{\log |B(t)| \,|\, t \geq 0\}$ vremenski izmijenjeno Brownovo gibanje. Sjetimo se, u Primjeru 2.2.11 smo pokazali da takav proces nije martingal.

Definicija 3.2.14. *Kažemo da je krivulja $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ zatvorena ako je $\gamma(a) = \gamma(b)$.*

Promotrimo li neprekidnu krivulju $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ koja ne prolazi kroz $0 \in \mathbb{C}$, neprekidni izbor argumenta za γ je neprekidno preslikavanje $\theta : [a, b] \to \mathbb{R}$ za koje vrijedi

$$\gamma(t) = |\gamma(t)| e^{i\theta(t)}.$$

Definicija 3.2.15. *Kažemo da je*

$$\Gamma(\gamma, 0) := \frac{\theta(b) - \theta(a)}{2\pi} \tag{3.8}$$

namotajni broj ili indeks krivulje γ oko nule. Slično definiramo $\Gamma(\gamma, w), w \in \mathbb{C}$.

Napomena 3.2.16.

(1) $\theta(b) - \theta(a)$ je cjelobrojni višekratnik broja 2π koji je jednak broju obilazaka krivulje γ oko točke $w \in \mathbb{C}$.

(2) Neka su Φ i θ neprekidni izbori argumenta za γ. Tada je $\frac{\theta-\Phi}{2\pi}$ cjelobrojna funkcija. Budući da je $[a, b]$ povezan, onda mora biti i konstantna. Dakle, $\theta(b) - \theta(a) = \Phi(b) - \Phi(a)$. Stoga je Definicija 3.2.15 dobra.

(3) Ako je γ zatvorena krivulja, onda je $\Gamma(\gamma, 0)$ cjelobrojna funkcija te

$$\Gamma(\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\theta(a)}^{\theta(b)} \frac{ie^{it}}{e^{it}} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\theta(a)}^{\theta(b)} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z}.$$

Kažemo da je zatvorena krivulja $\gamma : [a, b] \to D \subset \mathbb{C}$ jednostavna ako za $s < t$ vrijedi

$$\gamma(s) = \gamma(t) \Longleftrightarrow s = a, t = b.$$

Teorem 3.2.17. *Neka je $B = \{B(t) \,|\, t \geq 0\}$ planarno Brownovo gibanje s početkom u $(\varepsilon, 0) = \varepsilon$ te neka θ_ε označava namotajni broj za B oko ishodišta prije nego $B(t)$ prvi put pogodi jedinični krug s centrom u ishodištu. Tada za svaki $0 < \varepsilon < 1$, $\frac{2\pi\theta_\varepsilon}{\log \varepsilon}$ ima Cauchyjevu distribuciju.*

Dokaz. Neka je $X = \{X(t) \,|\, t \geq 0\}$ Brownovo gibanje s početkom u $(\log \varepsilon, 0)$. Definirajmo vrijeme zaustavljanja

$$\tau = \inf\{t \geq 0 \,|\, \Re(X(t)) \geq 0\}.$$

Tada za inverz vremenskog pomaka $\sigma(t)$, po Teoremu 3.2.3, vrijedi $B(t) \stackrel{D}{=} e^{X(\sigma(t))}$. Štoviše, $\Im X(t) \stackrel{D}{=} 2\pi\theta_\varepsilon$ jer je $\Im X(t)$ neprekidna realizacija funkcije $\arg e^{X(t)}$ s početkom u 0.
Definirajmo

$$x = -\log \varepsilon$$
$$S_t = \sup_{0 \leq s \leq t} (\Re X(s) + x).$$

Tada $\{\tau < t\} = \{S_t < x\}$. Stoga uz skaliranje Brownovog gibanja 1.2.5 i Propozicije 1.2.14 dobivamo $\tau \overset{D}{=} \frac{x^2}{Z^2}$, gdje je $Z \sim N(0,1)$. Dodatno, jer su τ i $\Im X$ nezavisne slučajne varijable, primjenom skaliranja Brownovog gibanja 1.2.5 znamo da vrijedi $\Im X(\tau) \overset{D}{=} \tau^{\frac{1}{2}}$. Odnosno

$$\Im X(\tau) \overset{D}{=} \left(\frac{x}{Z}\right) \Im X(1) = x\left(\frac{\Im X(1)}{Z}\right).$$

Budući da kvocijent dvije nezavisne jedinične normalne varijable ima Cauchyjevu distribuciju, dobivamo da je $\Im X(\tau) \overset{D}{=} xC$, gdje je C Cauchyjeva slučajna varijabla. Dakle,

$$2\pi\theta_\varepsilon \overset{D}{=} xC \Longrightarrow \frac{2\pi\theta_\varepsilon}{\log \varepsilon} \overset{D}{=} C.$$

□

3.3 Feynman - Kacova formula i primjene

Rješenje jednadžbe provođenja $u(t,x)$ opisuje temperaturu toplinskog toka u trenutku t u točki x. Na skupu $\{x \in U \mid V(x) < 0\}$ ćemo promatrati stopu hlađenja $-V(x)$ dok će na skupu $\{x \in U \mid V(x) > 0\}$ vrijednost $V(x)$ opisivati stopu zagrijavanja. Distribuciju početne temperature u točki x opisujemo s $f(x)$, dok rub skupa U zadržavamo na nultoj temperaturi. Slijedi definicija rješenja jednadžbe provođenja uz opisane varijable.

Definicija 3.3.1. *Neka je $U \subset \mathbb{R}^d$ otvoren, ograničen ili $U = \mathbb{R}^d$.*
Kažemo da dva puta diferencijabilna funkcija $u : \langle 0, +\infty\rangle \times U \to [0, +\infty\rangle$ rješava jednadžbe provođenja sa stopom širenja topline $V : U \to \mathbb{R}$ i početnim uvjetom $f : U \to [0, +\infty\rangle$ na U ako vrijedi

$$\begin{aligned}
&\lim_{\substack{x\to x_0\\ t\searrow 0}} u(t,x) = f(x_0), \qquad \text{za } x_0 \in U\\
&\lim_{\substack{x\to x_0\\ t\to t_0}} u(t,x) = 0, \qquad \text{za } x_0 \in \partial U\\
&\partial_t u(t,x) = \frac{1}{2}\Delta_x u(t,x) + V(x)u(t,x), \qquad \text{na } \langle 0,+\infty\rangle \times U
\end{aligned} \tag{3.9}$$

gdje je $\Delta_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$.

Teorem 3.3.2 (Feynman - Kac)**.** *Neka je $V(x)$ nenegativna i neprekidna, a $f(x)$ neprekidna i ograničena funkcija. Pretpostavimo da je $u(t,x)$ ograničena funkcija koja je rješenje jednadžbe provođenja. Tada je $u(t,x)$ dana s*

$$u(t,x) = \mathbb{E}_x\left[e^{\int_0^t V(B(s))ds} f(B(t))\right], \tag{3.10}$$

gdje je $\mathbb{P}_x$ vjerojatnosna mjera za Brownovo gibanje $(B(t))_{t\geq 0}$ s početkom u točki x.

Napomena 3.3.3. *Funkcije V i f mogu imati izolirane diskontinuitete. Feynman - Kacova formula vrijedi i za takve funkcije, ali je tada početni uvjet $u(0,x_0) = \lim_{(t,x)\to(0,x_0)} u(t,x) = f(x_0)$ zadovoljen samo u onim točkama u kojima je f neprekidna.*

Dokaz. Neka je $t > 0$. Promotrimo proces

$$X_s = e^{R(s)}u(t-s, B(s)), \quad \text{gdje } R(s) = \int_0^s V(B(r))dr.$$

Budući da je funkcija u rješenje jednadžbe provođenja, onda je jednom neprekidno diferencijabilna u prvoj te dva puta u drugoj varijabli. Štoviše, jer je u ograničena, onda je i X_s ograničen. Iz Itôve formule stoga dobivamo

$$\begin{aligned}
dX_s &= d\left(e^{R(\cdot)}u(t-\cdot, B(\cdot))\right)_s \\
&= V(B(s))e^{R(s)}u(t-s,B(s))ds + \\
&\quad + e^{R(s)}\left(-\frac{\partial u}{\partial t}(t-s,B(s))ds + \frac{\partial u}{\partial x}(t-s,B(s))dB_s + \frac{1}{2}\Delta_x u(t-s,B(s))ds\right) \\
&= e^{R(s)}\frac{\partial u}{\partial x}(t-s,B(s))dB_s + \\
&\quad + \underbrace{-e^{R(s)}\frac{\partial u}{\partial t}(t-s,B(s))ds + \frac{1}{2}e^{R(s)}\Delta_x u(t-s,B(s))ds + V(B(s))e^{R(s)}u(t-s,B(s))ds}_{=(3.9)=0} \\
&= \frac{\partial u}{\partial x}(t-s,B(s))e^{R(s)}dB_s.
\end{aligned}$$

Stoga je X_s martingal do trenutka t pa dobivamo

$$u(t,x) = X_0 = \mathbb{E}_x[X_t \mid \mathcal{F}_0] = \mathbb{E}_x[X_t] = \mathbb{E}_x\left[e^{R(t)}u(0,B(t))\right] = \mathbb{E}_x\left[e^{R(t)}f(B(t))\right].$$

□

Napomena 3.3.4. *Vrijedi i obrat.*
Za $V : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ ograničenu, funkcija $u : [0,+\infty\rangle \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ dana s

$$u(t,x) = \mathbb{E}_x\left[e^{\int_0^t V(B(s))ds}\right]$$

rješava jednadžbe provođenja na $\mathbb{R}^d$ uz stopu širenja V i početni uvjet jednak jedan.
Za dokaz pogledati [6, Teorem 7.43.].

Teorem 3.3.5. *Neka je u ograničeno, dva puta neprekidno diferencijabilno rješenje jednadžbe provođenja na domeni U, uz nultu stopu širenja $V(x) = 0$ te neprekidni početni uvjet f. Tada je*

$$u(t,x) = \mathbb{E}_x\left[f(B(t))\mathbb{1}_{\{t<\tau\}}\right]$$

za $\tau = \inf\{t \geq 0 \mid B(t) \notin U\}$ prvo vrijeme izlaska iz domene U.

Dokaz. Neka je $K \subset U$ kompaktan skup. Označimo prvo vrijeme napuštanja skupa K sa $\sigma = \inf\{t \geq 0 \,|\, B(t) \notin K\}$. Sada uz Napomenu 2.2.7 možemo primijeniti višedimenzionalnu Itôvu formulu iz Teorema2.2.6. Fiksirajmo $t > 0$ te neka je $s < t$. Za $f(x, y) = u(t - y, x), \xi(s) = s$ dobivamo

$$
\begin{aligned}
u(t - s \wedge \sigma, B(s \wedge \sigma)) - u(0, B(0)) = \int_0^{s\wedge\sigma} \nabla_x u(t - v, B(v)) dB(v) - \\
\underbrace{- \int_0^{s\wedge\sigma} \partial_t u(t - v, B(v)) dv + \frac{1}{2} \int_0^{s\wedge\sigma} \Delta_x u(t - v, B(v)) dv}_{=(3.9)=0} \\
= \int_0^{s\wedge\sigma} \nabla_x u(t - v, B(v)) dB(v).
\end{aligned}
$$

Budući da je Itôv integral martingal, primjenom očekivanja, dobivamo

$$\mathbb{E}_x \left[u(t - s \wedge \sigma, B(s \wedge \sigma)) \right] = \mathbb{E}_x [u(t, B(0))] = u(t, x).$$

Uzmimo stoga niz kompaktnih skupova $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ takvih da $K_n \nearrow U$. Tada $\sigma_{K_n} \nearrow \tau$ pa iz

$$\mathbb{E}_x \left[u(t - s \wedge \sigma_{K_n}, B(s \wedge \sigma_{K_n})) \mathbb{1}_{\{s < \sigma_{K_n}\}} \right] = u(t, x)$$

uz Lebesgueov teorem o dominiranoj konvergenciji (jer je u omeđena) slijedi, za $n \to \infty$,

$$\mathbb{E}_x \left[u(t - s \wedge \tau, B(s \wedge \tau)) \mathbb{1}_{\{s < \tau\}} \right] = u(t, x).$$

Također, uz Lebesgueov teorem o dominirajnoj konvergenciji za $s \to t$ dobijemo

$$u(t, x) = \mathbb{E} \left[f(B(f)) \right]$$

□

Izračunajmo sada vjerojatnost da linearno Brownovo gibanje do nekog trenutka t ne napusti interval $[a, b]$, gdje je $a < 0 < b$.

Teorem 3.3.6. *Neka je* $0 < x < a$. *Tada je*

$$\mathbb{P}(\{B(s) \in \langle 0, a\rangle, \forall 0 \leq s \leq t\}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\Phi\left(\frac{2ka + a - x}{\sqrt{t}}\right) - \right. \tag{3.11}$$
$$\left. - \Phi\left(\frac{2ka - x}{\sqrt{t}}\right) - \Phi\left(\frac{2ka + a + x}{\sqrt{t}}\right) + \Phi\left(\frac{2ka + x}{\sqrt{t}}\right)\right),$$

gdje je $\Phi(x)$ *distribucija jedinične normalne varijable.*

Dokaz. Uočimo da za $U = \langle 0, a\rangle$ i $f(x) = x$ identitetu, lijeva strana u iskazu teorema odgovara desnoj strani u Teoremu 3.3.5. Budući da red na desnoj strani u (3.11) apsolutno konvergira, onda zadovoljava rubne uvjete u $x = 0$ i $x = a$. Također, taj red je i ograničen. Nadalje, uz prijelaznu funkciju gustoće p dobivamo

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}\left(\frac{2ka + a - x}{\sqrt{t}}\right) = -\frac{2ka + a - x}{2t^{\frac{3}{2}}} p(t, x, 2ka + a) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\left(\frac{2ka + a - x}{\sqrt{t}}\right)$$

Slično dobijemo i za preostale članove pa desna strana u 3.11 zadovoljava jednadžbu provođenja. Kako bismo provjerili da zadovoljava i početne uvjete, uočimo:

- suma po svim $k > 0$ konvergira prema 0 (kada $t \searrow 0$),
- suma po svim $k < 0$ konvergira također prema 0,
- za $k = 0$, članovi s pozitivnim predznakom zajedno s jednim članom s negativnim predznakom, konvergiraju u jedan, dok jedan član konvergira u nulu.

□

Bibliografija

[1] *Time - changed Brownian motion*, travanj 2010, https://almostsure.wordpress.com/2010/04/20/time-changed-brownian-motion/, (lipanj, 2015.).

[2] *Massachusetts institute of technology - lectures*, 2013., http://ocw.mit.edu/courses/sloan-school-of-management/15-070j-advanced-stochastic-processes-fall-2013/lecture-notes/, (lipanj, 2015.).

[3] *Lecture 21. The multivariate normal distribution*, http://www.math.uiuc.edu/~r-ash/Stat/StatLec21-25.pdf, (lipanj, 2015.).

[4] H.H. Kuo, *Introduction to stochastic integration*, Springer Science & Business Media, New York, 2006.

[5] S.P. Lalley, *Lecture 12: Stochastic differential equations, diffusion processes, and the Feynman-Kac formula*, siječanj 2001., http://www.stat.uchicago.edu/~lalley/Courses/391/Lecture12.pdf, (lipanj, 2015.).

[6] P. Mörters i Y. Peres, *Brownian motion*, Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

[7] G. Muić, *Kompleksne funkcije (1. predavanje)*, http://web.math.pmf.unizg.hr/~gmuic/skenirana_predavanja/ka/kaTeX.pdf, (lipanj, 2015.).

[8] J.F. O'Farrill, *Chapter 2: Complex analysis*, http://www.maths.ed.ac.uk/~jmf/Teaching/MT3/ComplexAnalysis.pdf, (lipanj, 2015.).

[9] S. Roch, *Lecture on probability theory*, 2012., http://www.math.wisc.edu/~roch/275b.1.12w/, (lipanj, 2015.).

[10] R. L. Schilling i L. Partzsch, *Brownian motion: an introduction to stochastic processes*, Walter de Gruyter, Berlin, 2014.

[11] Z. Vondraček, *Financijsko modeliranje 2*, 2013., http://web.math.pmf.unizg.hr/~vondra/2fm13-predavanja.html, (lipanj, 2015.).

[12] ———, *Slučajni procesi*, 2014., http://web.math.pmf.unizg.hr/~vondra/sp14.html, (lipanj, 2015.).

[13] Š. Ungar, *Matematička analiza 4*, http://web.math.pmf.unizg.hr/~ungar/NASTAVA/MA/Analiza4.pdf, (lipanj, 2015.).

[14] S. Watson, *Brownian motion, complex analysis, and the dimension of the Brownian frontier*, travanj 2010., http://math.mit.edu/~sswatson/pdfs/partiiiessay.pdf, (lipanj, 2015.).

Sažetak

U ovom radu smo konstruirali Itôv integral koji defiramo kao limes niza slučajnih varijabli. Dokazali smo analogon Newton - Leibnizove formule, tzv. Itôvu formulu. Također, dokazali smo martingalnost Itôvog integrala čime smo, uz spomenutu formulu, dobili alat za konstrukciju martingala te ispitivanje martingalnosti slučajnih varijabli.

U nastavku rada, pokazali smo konformnu invarijantnost Brownovog gibanja. Odnosno, pokazali smo da preslikavanjem Brownovog gibanja po konformnoj funkciji dobivamo vremenski izmijenjeno Brownovo gibanje. Dodatno, u prvom poglavlju smo pokazali i invarijantnost Brownovog gibanja u odnosu na skaliranje (uz vremenski pomak).

U zadnjem poglavlju smo dokazali Feynman - Kacovu formulu kojom smo eksplicitno izrazili rješenje rjednadžbe provođenja.

Summary

In this paper we have constructed Itô integral that is defined as a limit of certain sequence of random variables. We have proved Itô formula which is analogous to Newton – Leibniz formula. Also, we have proved that Itô integral has martingale property. Combining the last two observations, we get a powerful tool for constructing martingales and inspecting whether a random variable is a martingale.

Later in the thesis we have observed conformal invariance of Brownian motion. It states that, under conformal mapping, Brownian motion is mapped to another time changed Brownian motion. However, conformal invariance is not the only invariance property of Brownian motion. In the first chapter we have shown that Brownian motion is also invariant under scaling (with a time change).

In the final chapter we have proved Feynman – Kac formula which gives the explicit formula of the solution to the heat equation.

Životopis

Rođena sam 27. rujna 1991. godine u Zagrebu. 2010. godine sam završila XI. gimnaziju te položila Državnu maturu s izvrsnim uspjehom. Odabir fakulteta bio je jednostavan. Kao visoko rangirana na upisnoj listi, upisala sam Prirodoslovno - matematički fakultet. Na diplomskom studiju odabrala sam smjer Financijska i poslovna matematika tijekom kojeg sam primila priznanje za najbolje studente završnih godina. Na drugoj godini diplomskog studija primila sam stipendiju Nacionalnog centra za vanjsko vrednovanje obrazovanja. Ovim radom završavam diplomski studij te počinjem raditi u Erste&Steiermarkische banci. Studiranje na Matematici ostat će mi u lijepom sjećanju.