Martellijev kaos u dinamičkim sustavima na inverznim limesima i hiperprostorima

Trpčić, Maja

Master's thesis / Diplomski rad

2014

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:965740

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Maja Trpčić

MARTELLIJEV KAOS U DINAMIČKIM SUSTAVIMA NA INVERZNIM LIMESIMA I NA HIPERPROSTORIMA

Diplomski rad

Voditelj rada:
Izv.prof.dr.sc. Sonja Štimac

Zagreb, 2014.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

U posljednjih pedeset godina fenomen kaosa i nelinearne dinamike prerastao je u pravu znanstvenu disciplinu. Teorija kaosa opisuje ponašanje nekih nelinearnih dinamičkih sustava u matematici i fizici koji se pod određenim uvjetima ponašaju na prividno nepredvidljiv način. Povezana je s razvojem brojnih matematičkih metoda i sofisticiranih kompjutorskih programa za analizu nelinearnih pojava.

U ovom ćemo se radu posebno baviti proučavanjem kaosa na inverznim limesima i na hiperprostorima. Definirat ćemo neke osnovne pojmove kao što su orbita, periodične točke, topološka konjugacija, dokazati osnovne tvrdnje te dobiveno primjeniti na nekim poznatim primjerima preslikavanja.

Danas postoje različite definicije kaosa kao što su Devaneyev, Auslander-Yorkov, Wigginsov te Martellijev kaos. Od navedenih definicija, najviše ćemo se baviti Martellijevim kaosom.

Promatrat ćemo odnos između Martellijevog kaosa na inverznim limesima s preslikavanjem pomaka i na originalnom sustavu s veznim preslikavanjem, odnosno pokazat ćemo da je pomak na inverznom limesu Martellijev kaos ako i samo ako je originalan sustav s veznim preslikavanjem Martellijev kaos. S druge strane, promatrat ćemo odnos između Martellijevog kaosa na hiperprostoru i originalnom sustavu, te pokazati da ako je hiperprostor Martellijev kaos i orbita svake točke originalnog sustava je nestabilna u hiperprostoru tada je originalni sustav Martellijev kaos.

Poglavlje 1

Uvodni pojmovi i definicije

1.1 Osnovne definicije

Definicija 1.1.1. ***Topološki dinamički sustav*** *je uređen par* (X, f) *gdje je* X *topološki prostor i* $f : X \to X$ *preslikavanje. Ako je* X *kompaktan topološki prostor, tada uređen par* (X, f) *zovemo* ***kompaktan topološki dinamički sustav****. Uređenu trojku* (X, d, f) *zovemo* ***dinamički sustav*** *ako je* X *metrički prostor s metrikom* d*.*

Definicija 1.1.2. *Neka je* n *pozitivan cijeli broj i* $f : X \to X$ *preslikavanje.* ***n-ta iteracija*** *funkcije* f*, oznaka* f^n*, definirana je sa* $f^n = f \circ f^{n-1}$*.*

Definicija 1.1.3. *Neka je* $f : X \to X$ *preslikavanje.* ***Prednja orbita*** *točke* $x \in X$ *je* $orb^+(x) = \{x, f(x), f^2(x), \dots, f^n(x), \dots\}$ *pri čemu je* $f^n(x)$ *oznaka za* n*-tu iteraciju funkcije* f *u točki* x*. Ako je* f *homeomorfizam tada definiramo* ***(punu) orbitu*** *od* x *sa* $orb(x) = \{f^i(x),\ i \in \mathbb{Z}\}$ *pri čemu je* $f^{-i}(x)$*,* $i \in \mathbb{N}$*, oznaka za* i*-tu iteraciju inverzne funkcije od* f *u točki* x*.*

Definicija 1.1.4. *Neka je* $f : X \to X$ *preslikavanje. Točka* x *je* ***fiksna*** *točka za preslikavanje* f *ako je* $f(x) = x$*. Točka* x *je* ***periodična*** *točka za preslikavanje* f *ako je* $f^n(x) = x$ *za neki* $n \in \mathbb{N}$*. Najmanji* $n \in \mathbb{N}$ *za koji je* $f^n(x) = x$ *naziva se* ***osnovni period*** *točke* x*.*

Definicija 1.1.5. *Za podskup* D *topološkog prostora* X *kažemo da je* ***gust*** *u prostoru* X *ako je njegov zatvarač* $\overline{D}$ *jednak čitavom prostoru* X*.*

Definicija 1.1.6. *Kažemo da je prostor* X ***separabilan*** *ako sadrži prebrojiv gust podskup.*

Definicija 1.1.7. *Za podskup A prostora X kažemo da je* ***prve kategorije*** *u X ako je sadržan u uniji $\cup A_n$ prebrojive familije zatvorenih skupova u X, od kojih svaki A_n ima praznu nutrinu u X. Inače, kažemo da je A* ***druge kategorije*** *u X.*

Definicija 1.1.8. *Funkcija $f : X \to X$ je* ***topološki tranzitivna*** *ako za svaki par nepraznih otvorenih skupova U i V postoji pozitivan cijeli broj n tako da je $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$. Funkcija f je* ***točkovno tranzitivna*** *ako postoji $x_0 \in X$ tako da je orbita od x_0 gusta u X, tj. $\overline{orb(x_0)} = X$, x_0 je tranzitivna točka od X.*

Prethodna dva pojma su općenito neovisna. Neka je

$$X = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

sa standardnom metrikom i preslikavanje $f : X \to X$ definirano sa

$$f(0) = 0 \text{ i } f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1}, n = 1, 2, \ldots,$$

f je neprekidna. Točka $x_0 = 1$ je jedina tranzitivna točka za (X, f), ali sustav nije topološki tranzitivan. Iz toga slijedi da točkovna tranzitivnost ne povlači topološku tranzitivnost. Pokazat ćemo da ne vrijedi niti obrat, odnosno topološka tranzitivnost ne povlači točkovnu tranzitivnost. Neka je $I = [0, 1]$ interval i neka je

$$g(x) = 1 - |2x - 1|$$

šatorska funkcija. Neka je X skup svih periodičnih točaka funkcije g, X gust skup u I, te neka je $f = g|_X$. Sustav (X, f) ne zadovoljava uvjete točkovne tranzitivnosti, ali uvjeti za topološku tranzitivnost su zadovoljeni. To slijedi iz činjenice da za svaki nedegenerirani podinterval J od I postoji pozitivan cijeli broj k takav da je $g^k(J) = I$. Stoga, za neka dva neprazna otvorena podintervala J_1 i J_2 od I, postoji periodična točka od g čija orbita siječe i J_1 i J_2. Iz toga slijedi da sustav (X, f) zadovoljava uvjete topološke tranzitivnosti.

No pod nekim dodatnim uvjetima, ta dva pojma su ekvivalentna. Štoviše vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 1.1.9. *Neka je (X, f) dinamički sustav. Pretpostavimo da X nema izoliranih točaka. Ako je f točkovno tranzitivna tada je f topološki tranzitivna. Ako je X separabilan te druge kategorije i f je topološki tranzitivna tada je f točkovno tranzitivna.*

Dokaz. Ako X nema izoliranih točkaka i $\{x_n\}$ je gusta orbita, tada postoji $x_k \in U$ i $x_m \in V \setminus \{x_0, x_1, \ldots, x_k\}$ koji je otvoren i neprazan. No $m > k$ i $f^{m-k}(U) \cap V \neq \emptyset$.
S druge strane, prepostavimo da f nema gustu orbitu i $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ je prebrojiva baza. Za svaki $x \in X$ postoji $V_{n(x)}$ takav da je $f^k(x) \notin V_{n(x)}$ za svaki $k \geq 0$. Ali

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} f^{-k}(V_{n(x)})$$

je otvoren i siječe svaki otvoren skup budući je f topološki tranzitivna. Ako stavimo da je $A_{n(x)}$ komplement ove unije, tada $A_{n(x)}$ sadrži x te je zatvoren i nigdje gust skup. Međutim,

$$X = \bigcup_{x \in X} A_{n(x)}$$

je prebrojiva unija što je kontradikcija da je X druge kategorije. □

Definicija 1.1.10. *Funkcija $f : X \to X$ je **osjetljiva na početne uvjete** ako postoji $\delta > 0$ tako da za svaki neprazan otvoren skup U od X postoje točke $x, y \in U$ tako da $d(f^n(x), f^n(y)) > \delta$, za pozitivan cijeli broj n, gdje δ zovemo **konstanta osjetljivosti funkcije** f.*

Definicija 1.1.11. *Neka je (X, d) metrički prostor, $f : X \to X$ preslikavanje. Orbita točke $x \in X$ je **nestabilna** ako postoji $r > 0$ tako da za svaku okolinu U od x postoji $y \in U$ i nenegativan broj n takav da vrijedi $d(f^n(x), f^n(y)) > r$. Funkciju f zovemo **nestabilna** ako je za svaki $x \in X$ orbita od x nestabilna.*

Napomena 1.1.12. *U gornjoj definiciji, odabir r-a ovisi o x. Odnosno, iz definicije nestabilnosti slijedi da osjetljivost na početne uvjete povlači nestabilnost. Obrat općenito ne vrijedi.*

Definicija 1.1.13. *Neka su (X, f) i (Y, g) dva dinamička sustava. Kažemo da su f i g **topološki konjugirani** ako postoji homeomorfizam $h : X \to Y$ tako da je $h \circ f = g \circ h$. Homeomorfizam h se zove **topološka konjugacija**. Nadalje, f i g su **topološki semi-konjugirane** ako je $h : X \to Y$ neprekidna surjekcija tako da vrijedi $h \circ f = g \circ h$.*

1.2 Različite definicije kaosa

U nastavku dajemo različite definicije kaosa, te odnos između njih. Prvo navodimo definiciju Devaneyevog kaosa.

Definicija 1.2.1. *Kažemo da je funkcija f* **kaotična po Devaneyu** *ako f zadovoljava sljedeće uvjete:*

i) f je topološki tranzitivna

ii) skup periodičnih točaka od f je gust skup u X.

iii) f je osjetljiva na početne uvjete.

U nastavku ćemo pod pojmom *kaos* misliti na *Devaneyev kaos*.

Banks i suradnici su u [2] dokazali da *i)* i *ii)* povlače *iii)* za bilo koji metrički prostor X, tj. vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 1.2.2. *Neka je X metrički prostor i $f : X \to X$ neprekidna funkcija. Ako je f topološki tranzitivna i skup periodičnih točaka je gust skup u X, tada je f osjetljiva na početne uvjete.*

Dokaz. Pretpostavimo da je f topološki tranzitivna i da je skup periodičnih točaka gust skup. Funkcija f je osjetljiva na početne uvjete ako vrijedi:

$$(\exists \delta > 0)(\forall x, \forall N \in x, \exists y \in N, n \in \mathbb{N}) \text{ tako da vrijedi } |f^n(x) - f^n(y)| > \delta.$$

Pokažimo prvo da postoji $\delta_0 > 0$ tako da za svaki $x \in X$ postoji periodična točka $q \in X$ čija je orbita $O(q)$ udaljena najmanje $\frac{\delta_0}{2}$ od x. Izaberimo dvije proizvoljne periodične točke q_1 i q_2 s disjunktnim orbitama $O(q_1)$ i $O(q_2)$. Označimo s δ_0 udaljenost između orbite $O(q_1)$ i $O(q_2)$. Tada je po nejednakosti trokuta svaka točka $x \in X$ udaljena najmanje $\frac{\delta_0}{2}$ od jedne od dvije izabrane orbite. Pokazat ćemo da je f osjetljiva na početne uvjete s konstantom osjetljivosti $\delta = \frac{\delta_0}{8}$.

Neka je $x \in X$ proizvoljna točka i neka je N neka okolina od x. Budući da su periodične točke od f guste, postoji periodična točka $p \in U = N \cap B_\delta(x)$, gdje je $B_\delta(x)$ kugla radijusa δ oko točke x. Označimo s n period od p. Kao što smo gore pokazali, postoji periodična točka $q \in X$ čija je orbita $O(q)$ udaljena od x najmanje 4δ. Neka je

$$V = \bigcap_{i=0}^{n} f^{-i}(B_\delta(f^i(q)))$$

neprazan i otvoren skup. Zbog toga i jer je f topološki tranzitivna, postoji $y \in U$ i $k \in \mathbb{N}$ takvi da je $f^k(y) \in V$.

Neka je $j = \lfloor \frac{k}{n} + 1 \rfloor$. Dakle, $1 \leq nj - k \leq n$. Po konstrukciji vrijedi:

$$f^{nj}(y) = f^{nj-k}(f^k(y)) \in f^{nj-k}(V) \subseteq B_\delta(f^{nj-k}(q)).$$

Primjetimo da je $f^{nj}(p) = p$. Po nejednakosti trokuta slijedi:

$$d(f^{nj}(p), f^{nj}(y)) = d(p, f^{nj}(y)) \geq d(x, f^{nj-k}(q)) - d(f^{nj-k}(q), f^{nj}(y)) - d(p, x),$$

gdje je d funkcija udaljenosti na prostoru X. Zbog toga i jer je $p \in B_\delta(x)$ i $f^{nj}(y) \in B_\delta(f^{nj-k}(q))$ vrijedi sljedeće:

$$d(f^{nj}(p), f^{nj}(y)) > 4\delta - \delta - \delta = 2\delta.$$

U svakom slučaju pronašli smo točku u N čija je nj-a iteracija udaljena od $f^{nj}(x)$ za više od δ, pa slijedi da je funkcija f osjetljiva na početne uvjete. □

U nastavku promatramo odnos između Martellijevog kaosa (M-kaosa) i ostalih definicija kaosa.

Definicija 1.2.3. *Neka je (X, d) metrički prostor, $f : X \to X$ preslikavanje. Funkcija f je **M-kaotična** (ili kaotična po Martelliju, Martelli kaotična) ako postoji $x_0 \in X$ tako da vrijedi:*

i) Orbita od x_0 je gusta u X, tj. $\overline{orb(x_0)} = X$.

ii) Orbita od x_0 je nestabilna.

Teorem 1.2.4. *Neka su (X, f) i (Y, g) topološki konjugirani i h je njihova konjugacija. Tada je orbita od $x_0 \in X$ gusta u X ako i samo ako je orbita od $y = h(x_0)$ gusta u Y.*

Dokaz. Pretpostavimo da je orbita od $x_0 \in X$ gusta u X, odnosno $\overline{orb(x_0)} = X$. Tada vrijedi:

$$\overline{orb(y_0)} = \overline{orb(h(x_0))} = \overline{h(orb(x_0))} = h(X) = Y.$$

Iz ovog slijedi da je orbita od $y = h(x_0)$ gusta u Y.
S druge strane, pretpostavimo da je orbita od $y = h(x_0)$ gusta u Y, odnosno $\overline{orb(y_0)} = Y$. Tada vrijedi:

$$\overline{orb(x_0)} = \overline{h^{-1}(orb(x_0))} = h^{-1}(\overline{orb(x_0)}) = h^{-1}(Y) = X.$$

Iz ovog slijedi da je orbita od $x_0 \in X$ gusta u X. □

Ako su (X, f) i (Y, g) topološki semi-konjugirani, tada vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 1.2.5. *Neka su (X, f) i (Y, g) topološki semi-konjugirani i h je njihova semi-konjugacija. Ako je orbita od $x_0 \in X$ gusta u X tada je orbita od $y = h(x_0)$ gusta u Y.*

Dokaz. Pretpostavimo da je orbita od x_0 gusta, tj. $\overline{orb(x_0)} = X$. Neka je $w_0 \in Y$, $z_0 \in h^{-1}(w_0)$. Budući je z_0 gomilište od $orb(x_0)$, postoji podniz od $orb(x_0)$ koji konvergira prema z_0, označimo taj niz sa $\{z_i : i = 1, 2, \dots\}$. Neka je $z_i = f^{n_i}(x_0)$, $i = 1, 2, \dots$. Kako je h semikonjugacija, vrijedi $h \circ f = g \circ h$ i niz $\{h(z_i) : i = 1, 2, \dots\}$ konvergira prema w_0. Štoviše, $h(z_i) = h(f^{n_i}(x_0)) = g^{n_i}(h(x_0))) = g^{n_i}(y)$, gdje je $y = h(x_0)$. Stoga slijedi da je niz $\{h(z_i) : i = 1, 2, \dots\}$ podniz orbite $orb(y)$, što povlači da je $w_0 \in \overline{orb(y)}$. Stoga je orbita od y gusta u Y. □

U [6] je dokazan sljedeći teorem.

Teorem 1.2.6. *Neka su (X, d, f) i $(Y, \tilde{d}, g)$ dva topološki konjugirana dinamička sustava i neka je h njihova topološka konjugacija. Tada je orbita točke $x_0 \in X$ nestabilna u X ako i samo je orbita od $y = h(x_0)$ nestabilna u Y.*

Teorem 1.2.7. *Neka su (X, d, f) i $(Y, \tilde{d}, g)$ dva topološki konjugirana dinamička sustava i neka je h njihova topološka konjugacija. Tada je f M-kaotična u X ako i samo ako je g M-kaotična u Y.*

Dokaz. Pretpostavimo da je f M-kaotična u X. Tada postoji $x_0 \in X$ tako da je orbita od x_0 gusta u X i orbita od x_0 je nestabilna. Tada je po teoremu 1.2.4 orbita od $y = h(x_0)$ gusta u Y. Iz teorema 1.2.6 slijedi da je orbita od $y = h(x_0)$ u Y. Stoga, g je M-kaotična u Y. Analogno se pokaže da vrijedi i obrat. □

Definicija 1.2.8. *Neka je (X, d, f) dinamički sustav. Funkcija $f : X \to X$ je* ***W-kaotična*** *(ili kaotična po Wigginsu) ako je f topološki tranzitivna i ako je osjetljiva na početne uvjete.*

Definicija 1.2.9. *Neka je (X, d, f) dinamički sustav. Funkcija $f : X \to X$ je* ***AY-kaotična*** *(ili kaotična po Auslander-Yorku) ako f ima gustu orbitu u X i ako je f osjetljiva na početne uvjete.*

Iz definicije kaosa slijedi da kaos povlači W-kaos. Budući da su topološka tranzitivnost i točkovna tranzitivnost općenito neovisne, slijedi da kaos ne povlači AY-kaos i M-kaos. Također, W-kaos ne povlači AY-kaos i M-kaos. Kako osjetljivost na početne uvjete povlači nestabilnost, slijedi da AY-kaos povlači M-kaos.

Teorem 1.2.10. *Neka je (X, d) kompaktan metrički prostor i neka je $f : X \to X$ neprekidno preslikavanje. Ako je f kaotična tada je f M-kaotična, odnosno kaos povlači M-kaos. Posebno, W-kaos povlači M-kaos.*

Dokaz. Pretpostavimo da je f kaotična. Budući da je X kompaktan metrički prostor, po teoremu 1.1.9 slijedi da ako je f topološki tranzitivna da je tada f točkovno tranzitivna. Štoviše, osjetljivost na početne uvjete povlači nestabilnost. Stoga, f je kaotična povlači da je f M-kaotična. Također slijedi da W-kaos povlači M-kaos. □

Postoji velika razlika između W-kaosa i M-kaosa. Wiggins zahtjeva osjetljivost s obzirom na X, dok Martelli zahtjeva nestabinost s obzirom na X. Ali pod nekim uvjetima, ove se dvije različite definicije kaosa mogu smatrati ekvivalentnima.

U [6] je dokazan sljedeći teorem.

Teorem 1.2.11. *Neka je (X, d) kompaktan metrički prostor bez izoliranih točaka i neka je $f : X \to X$ neprekidna funkcija. Tada je f W-kaotična ako i samo ako je f M-kaotična.*

1.3 Kaos na intervalu

Obratimo sada pozornost samo na funkcije definirane na intervalu. Prvo navodimo sljedeću propoziciju.

Propozicija 1.3.1. *Neka je I interval (ne nužno konačan) i neka je $f : I \to I$ neprekidna i topološki tranzitivna funkcija. Tada vrijedi sljedeće:*

i) Periodične točke od f su guste u I

ii) f je osjetljiva na početne uvjete.

Kako bi dokazali ovu propoziciju, trebat će nam prvo sljedeća lema.

Lema 1.3.2. *Neka je I interval (ne nužno konačan) i neka je $f : I \to I$ neprekidna funkcija. Ako je $J \subset I$ interval koji ne sadrži niti jednu periodičnu točku od f, i ako su z, $f^m(z)$, $f^n(z)$ $\in J$ i $0 < m < n$, tada je ili $z < f^m(z) < f^n(z)$ ili $z > f^m(z) > f^n(z)$.*

Dokaz. Pretpostavimo da postoji $z \in J$ tako da je $z < f^m(z)$ i $f^m(z) > f^n(z)$. Definiramo funkciju

$$g(x) = f^m(x).$$

Tada znamo da vrijedi $z < g(z)$ te pokažimo da to po indukciji povlači da je

$$z < g(z) < g^{k+1}(z), \forall k \in \mathbb{N}.$$

Pretpostavimo da je $g^{k+1}(z) < g(z)$ za određeni k. Tada funkcija $g^k(x) - x$ ima pozitivnu vrijednost u z i negativnu vrijednost u $g(z)$ pa postoji $c \in [z, g(z)]$ tako da vrijedi

$$g^k(c) - c = 0.$$

No to znači da je c periodična točka od f s periodom km i $c \in J$, pa dolazimo do kontradikcije. Zato je $z < g^k(z)$, $\forall k \in \mathbb{N}$ pa tako i za $k = n - m > 0$, stoga je $z < f^{(n-m)m}(z)$. Budući da smo pretpostavili da je $f^{n-m}(f^m(z)) < f^m(z)$, analogno možemo dokazati da je

$$f^{(n-m)m}(f^m(z)) < f^m(z).$$

Stavimo da je $g = f^{n-m}$. Tada funckija $f^{(n-m)m}(x) - x$ ima pozitivnu vrijednost u z i negativnu vrijednost u $f^m(z)$, što nam daje periodičnu točku od f sa periodom $(n - m)m$ u J. □

Dokaz propozicije. Pretpostavimo da je funkcija f neprekidna i topološki tranzitivna. Po rezultatu iz [2] slijedi da trebamo pokazati da je skup periodičnih točaka od f gust u I. Pretpostavimo suprotno. Tada postoji interval $J \subset I$ koji ne sadrži niti jednu periodičnu točku od f. Neka je $x \in J$, ali x nije rubna točka od J, te neka je $N \subsetneq J$ otvorena okolina od x i neka je $E \subset J \backslash N$ (otvoren) interval. Budući da je f topološki tranzitivna na I postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je $f^m(N) \cap E \neq \emptyset$. Zato postoji $y \in N \subseteq J$ takav da je $f^m(y) \in E \subset J$. Budući je f neprekidna, postoji okolina U od y takva da je $f^m(U) \cap U = \emptyset$. Kako je U otvoren skup, možemo ponovno koristiti topološku tranzitivnost i pronaći $n > m$ i $z \in U$ takav da je $f^n(z) \in U$. No tada imamo $0 < m < n$ i z, $f^n(z) \in U$, što je u kontradikciji s rezultatom leme. □

Vellekoop i Berglund su pokazali da tranzitivnost povlači kaos na intervalu. Funkcije koje su definirane na intervalu moraju zadovoljavati samo uvjet *i*) iz definicije kaosa, odnosno moraju biti samo topološki tranzitivne da bi bile kaotične. Ako je interval nedegeneriran i zatvoren, tada vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 1.3.3. *Neka je I nedegeneriran segment i neka je $f : I \to I$ neprekidna funkcija. Ako je f točkovno tranzitivna, tada je f M-kaotična.*

Dokaz. Budući da je f točkovno tranzitivna i I je nedegeneriran zatvoren interval iz teorema 1.1.9 slijedi da je f topološki tranzitivna. Iz [11] znamo da za funkcije definirane na intervalu jedini uvjet koji mora vrijediti da bi f bila kaotična je taj da mora biti topološki tranzitivna, pa iz toga slijedi je f kaotična. Iz teorema 1.2.10 slijedi da je f M-kaotična. □

1.4 Primjer

Neka je $\Sigma_2 = \{x = (x_n)_{n=0}^{\infty} : x_n \in \{0, 1\}$ za svaki n$\}$ prostor nizova dva simbola 0 i 1. Sada bismo željeli prostor Σ_2 opskrbiti metrikom, te ga na taj način učiniti metričkim prostorom. Za dva niza $x = x_0x_1x_2\ldots$ i $y = y_0y_1y_2\ldots$ njihova udaljenost definirana je formulom

$$d(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^i}$$

Pokažimo da je d uistinu metrika na Σ_2.

Propozicija 1.4.1. *d je metrika na Σ_2.*

Dokaz. Da bismo pokazali da je d metrika na Σ_2, moramo provjeriti da je to simetrična nenegativna funkcija koja zadovoljava nejednakost trokuta i svojstvo strogosti. Očito je

$$d(x, y) \geq 0, \forall x, y \in \Sigma_2 \text{ i } d(x, y) = 0 \text{ ako i samo ako je } x_i = y_i, \forall i \in \mathbb{N}.$$

Time je nenegativnost, odnosno strogost funkcije d provjerena. Budući je $|x_i - y_i| = |y_i - x_i|$ slijedi da je $d(x, y) = d(y, x)$, to jest d zadovoljava i svojstvo simetričnosti. Pokažimo na kraju da je ona i subaditivna, to jest da zadovoljava relaciju trokuta. Neka su x, y, $z \in \Sigma_2$, budući je $|x_i - y_i| + |y_i - z_i| \geq |x_i - z_i|$ slijedi da je

$$d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$$

čime je dokazana nejednakost trokuta. □

Propozicija 1.4.2. *Neka su $x, y \in \Sigma_2$ i pretpostavimo da je $x_i = y_i$ za svaki $i = 0, 1, \dots, n$. Tada je $d(x, y) < \frac{1}{2^n}$. Obratno, ako je $d(x, y) < \frac{1}{2^n}$, tada je $x_i = y_i$ za svaki $i \le n$.*

Dokaz. Ako je $x_i = y_i$ za svaki $i \le n$, tada je

$$d(x, y) = \sum_{i=0}^{n} \frac{|x_i - y_i|}{2^i} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^i} \le \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^{n+1}} 2 = \frac{1}{2^n}.$$

S druge strane, ako je $x_j \neq y_j$ za neki $j \le n$, onda imamo

$$d(x, y) \ge \frac{1}{2^j} \ge \frac{1}{2^n}.$$

Pretpostavimo li sada da je $d(x, y) < \frac{1}{2^n}$, tada vrijedi $x_i = y_i$ za $i \le n$, a to smo i željeli pokazati. □

Preslikavanje $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ definirano sa $\sigma(x_0, x_1, x_2, ...) = (x_1, x_2, ...)$ zovemo **pomak**. Preslikavanje pomaka naprosto „zaboravlja" prvi element niza, a sve ostale elemente translatira ulijevo za jedno mjesto. Očito je σ dva-u-jedan preslikavanje na Σ_2 jer x_0 može biti ili 0 ili 1.

Propozicija 1.4.3. *$\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ je neprekidno preslikavanje.*

Dokaz. Pokazat ćemo da za svaki $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da za svake dvije točke $x, y \in \Sigma_2$ za koje je $d(x, y) < \delta$ slijedi $d(\sigma(x), \sigma(y)) < \epsilon$. Neka je $\epsilon > 0$ i $x = x_0x_1x_2 \dots$ proizvoljna točka iz Σ_2. Izaberimo n takav da je $\frac{1}{2^n} < \epsilon$, te neka je $\delta = \frac{1}{2^{n+1}}$. Ako je $y = y_0y_1y_2 \dots$ takav da je $d(x, y) < \delta$ tada je $x_i = y_i$, onda je prema 1.4.2 $\forall i \le n + 1$. No, tada se i-te koordinate od $\sigma(x)$ i $\sigma(y)$ poklapaju u $i \le n$ pa je $d(\sigma(x), \sigma(y)) < \frac{1}{2^n} < \epsilon$. □

Pokazat ćemo da je (Σ_2, σ) kaos:

i) skup periodičnih točaka funkcije σ je gust skup u Σ_2
   Označimo s $Per(\sigma)$ skup svih periodičnih točaka funkcije σ, a s $Per_n(\sigma)$ skup svih periodičnih točaka perioda n. Tada vrijedi da je $Per(\sigma) = \cup_{n \in \mathbb{N}} Per_n(\sigma)$. Točka $x \in \Sigma_2$ je periodična s periodom n ako i samo ako je $x = (x_0 \dots x_{n-1})^\infty = x_0 \dots x_{n-1} x_0 \dots x_{n-1} \dots$ za $x_i \in \{0, 1\}, i = 0, \dots, n - 1$.
   Neka je $x = x_0x_1x_2 \dots \in \Sigma_2$ proizvoljna točka. Neka je $\epsilon > 0$ proizvoljan. Tada postoji $N \in \mathbb{N}$ takav da je $\frac{1}{2^N} < \epsilon$. Također vrijedi da je $y = (x_0 \dots x_{N-1})^\infty \in Per(\sigma)$ i $d(x, y) \ge \frac{1}{2^N} < \epsilon$.

ii) σ je topološki tranzitivna
Da bismo to pokazali, dokazat ćemo da postoji točka x čija je orbita gusta u Σ_2. Neka je $x = (0\ 1\ 00\ 01\ 10\ 11\ 000\ 001\ldots)$. x smo konstruirali tako da smo redom nizali sve moguće konačne nizove sastavljene od 0 i 1 prvo duljine 1, zatim duljine 2 i tako dalje. Evidentno postoji iteracija od σ koja se slaže s nekim danim nizom na proizvoljno mnogo mjesta, pa su te točke prema 1.4.2 po volji blizu. Preslikavanja koja imaju gustu orbitu su topološki tranzitivna, pa slijedi da je σ topološki tranzitivna.

iii) σ je osjetljiva na početne uvjete
Budući da je Σ_2 metrički prostor i $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ neprekidno preslikavanje iz teorema 1.2.2 slijedi da je σ osjetljiva na početne uvjete.

Budući je Σ_2 kompaktan metrički prostor, iz teorema 1.2.10 slijedi da je (Σ_2, σ) M-kaos.

Neka je $F_\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$ **kvadratna familija**. Posebno, promatramo $\mu > 4$. Neka je $I = [0, 1]$, te označimo sa

$$A_0 = \{x \in [0,1] : F_\mu(x) > 1\}.$$

A_0 je otvoreni interval, te ako je $x \in A_0$ tada je $F_\mu(x) > 1$, pa je $F_\mu^2(x) < 0$ i $F_\mu^n(x) \to -\infty$. A_0 je skup točaka koje odmah napuste interval I. Sve ostale točke iz I ostaju u I nakon jedne iteracije. Neka je

$$A_1 = \{x \in I : F_\mu(x) \in A_0\}.$$

Ako je $x \in A_1$ tada je $F_\mu^2(x) > 1$, pa je $F_\mu^3(x) < 0$ i $F_\mu^n(x) \to -\infty$. Induktivno neka je

$$A_n = \{x \in I : F_\mu^n(x) \in A_0\} = \{x \in I : F_\mu^i(x) \in \mathrm{I \text{ za } i} \leq \mathrm{n \text{ ali }} F_\mu^{n+1}(x) \notin I\}$$

skup koji sadrži sve točke koje napuste I nakon $n+1$ iteracije. Kao i prije, ako je $x \in A_n$, slijedi da orbita od x teži prema -∞.
Označimo sada sa

$$\Lambda = I \backslash (\cup_{n=0}^{\infty} A_n)$$

skup svih točaka iz I takvih da sve njihove iteracije ostaju u I.

Definicija 1.4.4. *Skup A je* ***Cantorov skup*** *ako je zatvoren, potpuno nepovezan i perfektan podskup segmenta. Skup je potpuno nepovezan ako ne sadrži niti jedan interval; skup je perfektan ako je svaka točka gomilište drugih točaka skupa.*

U našem dokazu da je Λ Cantorov skup, trebamo pretpostavku da je $|F'_\mu(x)| > 1$, za sve $x \in I_0 \cup I_1$. Lako se vidi da to vrijedi za $\mu > 2 + \sqrt{5}$.

Teorem 1.4.5. *Ako je $\mu > 2 + \sqrt{5}$, tada je Λ Cantorov skup.*

Dokaz. Budući je $\mu > 2 + \sqrt{5}$, vrijedi $|F'_\mu(x)| > 1$, za sve $x \in I_0 \cup I_1$, pa postoji $\lambda > 1$ takav da je $|F'_\mu(x)| > \lambda$ za sve $x \in \Lambda$. Po pravilu ulančavanja vrijedi $|(F^n_\mu)'(x)| > \lambda^n$.
Prvo ćemo dokazati da je Λ potpuno povezan. Pretpostavimo suprotno, odnosno da Λ sadrži interval. Tada postoje točke $x, y \in \Lambda$, $x \neq y$ takve da je $[x, y] \subseteq \Lambda$. No tada je za svaki

$$\alpha \in [x, y]\ |(F^n_\mu)'(\alpha)| > \lambda^n.$$

Neka je n takav da je $\lambda^n|y - x| > 1$. Po teoremu srednje vrijednosti je

$$|F^n(y) - F^n(x)| \geq \lambda^n|y - x| > 1$$

što znači da je barem jedna od točaka $F^n(y)$ ili $F^n(x)$ izvan segmenta I što je u kontradikciji s definicijom od Λ. Dakle, Λ je potpuno povezan.
Budući da je Λ ugnježdeni presjek segmenata, slijedi da je Λ zatvoren.
Još je preostalo za dokazati da je Λ perfektan. Prvo primjetimo da su sve rubne točke od A_k, za svaki k sadržane u Λ. Pretpostavimo sada da Λ nije perfektan, odnosno da postoji $p \in \Lambda$ takav da je p izolirana. Tada sve okolne točke od p moraju napustiti I pod iteracijama od F_μ. Dakle, svaka od tih točaka pripada nekom A_k pa ili postoji niz rubnih točaka od A_k koje konvergiraju prema p ili se sve točke u toj okolini od p preslikaju izvan I u istoj iteraciji od F_μ.
U prvom slučaju dobivamo kontradikciju s pretpostavkom da je p izolirana, jer su rubne točke od A_k sadržane u Λ.
U drugom slučaju, postoji n takav da F^n_μ preslika p u 0, a skup točaka iz okoline od p u negativni dio x-osi. No tada F^n_μ ima maksimum u p pa je $(F^n_\mu)'(p) = 0$. Po pravilu ulančavanja vrijedi $F'_\mu(F^i_\mu(p)) = 0$ za neki $i < n$. Dakle, $F^i_\mu(p) = \frac{1}{2}$ pa vrijedi $F^{i+1}_\mu(p) \notin I$, i $F^n_\mu(p) \to -\infty$ što je suprotno pretpostavci da je $F^n_\mu(p) = 0$. Dakle, Λ je perfektan. □

Napomena 1.4.6. *Teorem zapravo vrijedi za $\mu > 4$ ali je dokaz teži.*

Definicija 1.4.7. ***Itinerer*** *od x je niz*

$$S(x) = s_0 s_1 s_2 \ldots,$$

gdje je

$$s_j = 0 \textit{ ako je } F_\mu^j(x) \in I_0, \ s_j = 1 \textit{ ako je } F_\mu^j(x) \in I_1.$$

Itinerer od x je zapravo niz 0 i 1. S promatramo kao funkciju $S : \Lambda \to \Sigma_2$.

Teorem 1.4.8. *Ako je $\mu > 2 + \sqrt{5}$, S je homeomorfizam.*

Dokaz. Prvo ćemo pokazati da je S injekcija. Neka su $x, y \in \Lambda$ i prepostavimo da je $S(x) = S(y)$. Treba dokazati da je tada $x = y$. Tada, za svaki n $F_\mu^n(x)$ i $F_\mu^n(y)$ leže na istoj strani od $\frac{1}{2}$. To znači da je F_μ monotona na intervalu između $F_\mu^n(x)$ i $F_\mu^n(y)$. Zato i sve točke tog intervala zauvijek ostaju u $I_0 \cup I_1$ (odnosno u Λ) što je u suprotnosti s činjenicom da je Λ potpuno povezan. Slijedi da je S injekcija.
Pokažimo da je S surjekcija. Neka je $J \subseteq I$ segment. Neka je

$$F_\mu^{-n}(J) = \{x \in I : F_\mu^n(x) \in J\}.$$

Primjetimo da se $F_\mu^{-1}(J)$ sastoji od dva segmenta od kojih je jedan sadržan u I_0 a drugi u I_1. Neka je sada $s = s_0 s_1 s_2 \ldots$. Želimo naći $x \in \Lambda$ takav da je $S(x) = s$. Definiramo

$$I_{s_0 s_1 s_2 \ldots s_n} = \{x \in I : x \in I_{s_0}, F_\mu(x) \in I_{s_1}, \ldots, F_\mu^n(x) \in I_{s_n}\} = I_{s_0} \cap F_\mu^{-1}(I_{s_1}) \cap \ldots F_\mu^{-n}(I_{s_n}).$$

Tvrdimo da kada $n \to \infty$, tada $I_{s_0 s_1 s_2 \ldots s_n}$ čine ugnježdeni niz nepraznih segmenata. Primjetimo da je

$$I_{s_0 s_1 s_2 \ldots s_n} = I_{s_0} \cap F_\mu^{-1}(I_{s_1 s_2 \ldots s_n}).$$

Po indukciji pretpostavimo da je $I_{s_1 s_2 \ldots s_n}$ neprazan segment. Tada se $F_\mu^{-1}(I_{s_1 s_2 \ldots s_n})$ sastoji od dva segmenta od kojih je jedan u I_0 a drugi u I_1. Zato je $I_{s_0} \cap F_\mu^{-1}(I_{s_1 s_2 \ldots s_n})$ segment.

$$I_{s_0 s_1 s_2 \ldots s_n} = I_{s_0 s_1 s_2 \ldots s_{n-1}} \cap F_\mu^{-n}(I_{s_n}) \subset I_{s_0 s_1 s_2 \ldots s_{n-1}}.$$

Tada je

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} I_{s_0 s_1 s_2 \ldots s_n}$$

neprazan. Primjetimo da za

$$x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} I_{s_0 s_1 s_2 \ldots s_n}$$

vrijedi da je $x \in I_{s_0}$, $F_\mu(x) \in I_{s_1}$, ... Zato je $S(x) = s_0 s_1 s_2...$, to jest S je surjekcija.
Na kraju pokažimo da je S neprekidno. Neka je $x \in \Lambda$ i pretpostavimo $S(x) = s_0 s_1 s_2 \dots$. Neka je $\epsilon > 0$ i neka je n takav da je $\frac{1}{2^n} < \epsilon$. Razmotrimo segmente $I_{t_0 t_1 \dots t_n}$ za sve moguće kombinacije $t_0 t_1 \dots t_n$. Svi ti segmenti su disjunktni i Λ je sadržan u njihovoj uniji. Zato postoji $\delta > 0$ takav da za $x \in \Lambda$, $|x - y| < \delta$ povlači da je $y \in I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_n}$. Zbog toga se $S(y)$ i $S(x)$ slažu u prvih $n + 1$ koordinata pa je po propoziciji 1.4.2

$$d(S(x), S(y)) < \frac{1}{2^n} < \epsilon.$$

To dokazuje da je S neprekidno. Slično se vidi i da je S^{-1} također neprekidno pa slijedi da je S homeomorfizam. □

Teorem 1.4.9. *Neka je $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ i $F_\mu : \Lambda \to \Lambda$. Tada je $S \circ F_\mu = \sigma \circ S$.*

Dokaz. Točka $x \in \Lambda$ dana je jedinstveno s ugnježdenim nizom segmenata kao

$$x = \bigcap_{n=0}^{\infty} I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_n}$$

određena itinererom $S(x)$. Tada je

$$I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_n} = I_{s_0} \cap F_\mu^{-1}(I_{s_1}) \cap ... F_\mu^{-n}(I_{s_n})$$

pa se $F_\mu(I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_n})$ može zapisati kao

$$F_\mu(I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_n}) = I_{s_1} \cap ... \cap F_\mu^{-n+1}(I_{s_n}) = I_{s_1 s_2 \dots s_n}, F_\mu(I_{s_0}) = I.$$

Stoga vrijedi

$$S F_\mu(x) = S F_\mu(\bigcap_{n=0}^{\infty} I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_n}) = S(\bigcap_{n=1}^{\infty} I_{s_1 s_2 \dots s_n}) = s_1 s_2 \cdots = \sigma S(x)$$

. □

Pokazali smo da je σ M-kaotična, te da je S topološka konjugacija od σ i F_μ. Tada po teoremu 1.2.7 slijedi da je i F_μ M-kaotična.

Poglavlje 2

Martellijev kaos na inverznim limesima

2.1 Definicije

Definicija 2.1.1. *Neka je (X, d) kompaktan metrički prostor i neka je $f : X \to X$ neprekidno preslikavanje.* ***Inverzni limes*** $\varprojlim(X, f)$ *definiramo kao*

$$\varprojlim(X, f) = \{\underline{x} = (x_0, x_1, x_2, ...) \in \prod_{i=0}^{\infty} X : f(x_{i+1}) = x_i, \forall i \in \mathbb{N}\}$$

s metrikom definiranom na sljedeći način:

$$\underline{d}(\underline{x}, \underline{y}) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{d(x_i, y_i)}{2^i}$$

.

Inverzni limes je kompaktan podprostor produktnog prostora $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$, gdje prostore X_i zovemo **faktori**, a preslikavanje f **vezno preslikavnje**.

Preslikavanje pomak $\sigma_f : \varprojlim(X, f) \to \varprojlim(X, f)$ definirano je sa

$$\sigma_f(x_0, x_1, ...) = (f(x_0), f(x_1), f(x_2), ...) = (f(x_0), x_0, x_1, ...).$$

Štoviše vrijedi

$$\sigma_f^k(x_0, x_1, \dots) = (f^k(x_0), f^k(x_1), \dots, f^k(x_{k-1}), x_0, x_1, \dots) = (f^k(x_0), f^k(x_1), \dots),$$

gdje je k nenegativan cijeli broj. Preslikavanje σ_f je homeomorfizam i vrijedi

$$\sigma_f^{-1}(x_0, x_1, \dots) = (x_1, x_2, \dots).$$

Uređeni par $(\varprojlim(X, f), \sigma_f)$ čini dinamički sustav.

Preslikavanje $\pi_i : \varprojlim(X, f) \to X$ definirano sa $\pi_i(x_0, x_1, \dots, x_i, \dots) = x_i$ za svaki $i = 0, 1, \dots$ je projekcija na i-tu koordinatu. Preslikavanje π_i je neprekidno i vrijedi da je $f \circ \pi_i = \pi_i \circ \sigma_f$ za svaki $i = 0, 1, \dots$ Ako je f surjekcija, tada je π_i otvoreno surjektivno preslikavanje za svaki $i = 0, 1, \dots$ Metrika $\underline{d}$ definira topologiju sa bazom

$$\mathcal{B} = \{V \subseteq \varprojlim(X, f) : V = \pi_i^{-1}(U) \text{ za svaki i} \geq 0 \text{ i neki otvoreni skup U u X }\}$$

.

2.2 Veza Martellijevog kaosa na $(\varprojlim(X, f), \sigma_f)$ i na (X, f)

U ovom odjeljku, neka je $f : X \to X$ neprekidna surjekcija. Promatramo vezu između M-kaosa na $(\varprojlim(X, f), \sigma_f)$ i na (X, f).

Teorem 2.2.1. *Ako je $x_0 \in X$ i ako je orbita od x_0 gusta u X, tada je za svaki $\underline{x} \in \pi_i^{-1}(x_0)$, orbita od $\underline{x}$ gusta u $\varprojlim(X, f)$. Obrnuto, ako je $\underline{x} \in \varprojlim(X, f)$ i ako je orbita od $\underline{x}$ gusta u $\varprojlim(X, f)$, tada je orbita od $\pi_0(\underline{x})$ gusta u X.*

Dokaz. Pretpostavimo da je orbita od x_0 gusta u X, tj. $\overline{orb(x_0)} = X$. Neka je $V \in \mathcal{B}$. Tada postoji $i \geq 0$ i neprazan otvoren skup U u X tako da je $V = \pi_i^{-1}(U)$. Budući da je orbita od x_0 gusta u X, postoji cijeli broj $k \geq 0$ tako da je $f^k(x_0) \in U$. Štoviše, $f \circ \pi_j = \pi_j \circ \sigma_f$, što povlači $f^m \circ \pi_i = \pi_i \circ \sigma_f^m$, za svaki $m \geq 0$ i $j = 0, 1, \dots.$ Za bilo koju točku $\underline{x} \in \pi_0^{-1}(x_0)$, vrijedi

$$\sigma_f^{k+i}(\underline{x}) \in \pi_i^{-1} \circ f^{k+i} \circ \pi_i(\underline{x}).$$

Neka je $\underline{x} = (x_0, x_1, \dots)$. Tada je $\pi_i(\underline{x}) = x_i$. Budući je $f^i(x_i) = x_0$, slijedi da je $f^{k+i}(x_i) = f^k(x_0)$. Štoviše, vrijedi

$$\sigma_f^{k+i}(\underline{x}) \in \pi_i^{-1}(f^k(x_0)) \subseteq \pi_i^{-1}(U), \text{ odnosno } \sigma_f^{k+i}(\underline{x}) \in V.$$

Iz ovog slijedi da je orbita od $\underline{x}$ gusta u $\varprojlim(X,f)$, odnosno $\overline{orb(\underline{x})} = \varprojlim(X,f)$.
Obrat. Pretpostavimo da je orbita od $\underline{x}$ gusta u $\varprojlim(X,f)$. Neka je $\underline{x} = (x_0, x_1, \dots)$. Tada je $\pi_0(\underline{x}) = x_0$. Neka je U neprazan otvoren skup u X. Budući da je $f : X \to X$ neprekidna surjekcija, slijedi da je π_0 neprekidna surjekcija. Štoviše, $\pi_0^{-1}(U)$ je otvoren skup u $\varprojlim(X,f)$. Stoga, postoji cijeli broj $k \geq 0$ takav da je $\sigma_f^k(\underline{x}) \in \pi_0^{-1}(U)$. Budući da vrijedi $f^m \circ \pi_j = \pi_j \circ \sigma_f^m$ za svaki $m \geq 0$ i $j = 0, 1, \dots$, slijedi

$$f^k \circ \pi_0(\underline{x}) = \pi_0 \circ \sigma_f^k(\underline{x}) \in U \text{ , odnosno } f^k(x_0) \in U.$$

Iz ovog slijedi da je orbita od x_0 gusta u X, odnosno $\overline{orb(\underline{x})} = X$. □

Teorem 2.2.2. *Ako je $x_0 \in X$ i ako je orbita od x_0 nestabilna u X, tada je za svaku točku $\underline{x} \in \pi_0^{-1}(x_0)$ orbita od $\underline{x}$ nestabilna u $\varprojlim(X,f)$. Obratno, ako je orbita od $\underline{x}$ nestabilna u $\varprojlim(X,f)$, tada je orbita od $\pi_0(\underline{x})$ nestabilna u X.*

Dokaz. Pretpostavimo da je orbita od x_0 nestabilna u X, odnosno postoji $r > 0$ tako da za svaku okolinu U od x_0, postoji točka $y_0 \in U$ i cijeli broj $m > 0$ takvi da vrijedi $d(f^m(x_0), f^m(y_0)) > r$. Neka je $\overline{U} \in \varprojlim(X,f)$ neki otvoren skup od $\underline{x}$, $\underline{x} = (x_0, x_1, \dots)$, $x_i = f(x_{i+1})$, za $i = 0, 1, \dots$. Budući je π_0 otvoreno preslikavanje, tada je $\pi_0(\overline{U})$ otvoren skup u X i $x_0 \in \pi_0(\overline{U})$. Štoviše, $orb(x_0)$ je nestabilna u X, postoji $y_0 \in \pi_0(\overline{U})$ i cijeli broj $k > 0$ tako da vrijedi $d(f^k(x_0), f^k(y_0)) > r$. Uzmimo $\underline{y} \in \pi_0^{-1}(y_0) \cap \overline{U}$ i neka je $\underline{y} = (y_0, y_1, \dots)$. Tada je

$$\underline{d}(\sigma_f^k(\underline{x}), \sigma_f^k(\underline{y})) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{d(f^k(x_i), f^k(y_i))}{2^i} \geq d(f^k(x_0), f^k(y_0)) > r.$$

Iz ovog slijedi da je orbita od $\underline{x}$ nestabilna u $\varprojlim(X,f)$.

Obratno, neka je orbita od $\underline{x} = (x_0, x_1, \dots)$ nestabilna u $\varprojlim(X,f)$, odnosno postoji $r > 0$ tako da za neku okolinu $\overline{U}$ od $\underline{x}$ postoji točka $\underline{y} \in \overline{U}$ i cijeli broj $m > 0$ takvi da vrijedi $\underline{d}(\sigma_f^m(\underline{x}), \sigma_f^m(\underline{y})) > r$. Uzmimo otvoren skup U od $x_0 = \pi_0(\underline{x})$. Tada je $\pi_0^{-1}(U)$ otvoren skup u $\varprojlim(X,f)$ i $\underline{x} \in \pi_0^{-1}(U)$. Budući da je orbita od $\underline{x}$ nestabilna, postoji $y \in \pi_0^{-1}(U)$ i cijeli broj $m > 0$ takvi da vrijedi $\underline{d}(\sigma_f^m(\underline{x}), \sigma_f^m(\underline{y})) > r$. Uzmimo najmanji cijeli broj $k > 0$ takav da je

$\underline{d}(\sigma_f^k(\underline{x}), \sigma_f^k(\underline{y})) > r$. Stoga je $\underline{d}(\sigma_f^{k-1}(\underline{x}), \sigma_f^{k-1}(\underline{y})) \leq r$. Neka je $y_0 = \pi_0(\underline{y}) \in U$. Tada vrijedi

$$\begin{aligned}
\underline{d}(\sigma_f^k(\underline{x}), \sigma_f^k(\underline{y})) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{d(f^k(x_i), f^k(y_i))}{2^i} \\
&= d(f^k(x_0), f^k(y_0)) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d(f^k(x_i), f^k(y_i))}{2^i} \\
&= d(f^k(x_0), f^k(y_0)) + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{d(f^{k-1}(x_i), f^{k-1}(y_i))}{2^i} \\
&= d(f^k(x_0), f^k(y_0)) + \frac{1}{2} \underline{d}(\sigma_f^{k-1}(\underline{x}), \sigma_f^{k-1}(\underline{y})) \\
&\leq d(f^k(x_0), f^k(y_0)) + \frac{1}{2} r.
\end{aligned}$$

Stoga je $d(f^k(x_0), f^k(y_0)) > \frac{1}{2}r$. Iz ovog slijedi da je orbita od x_0 nestabilna, odnosno orbita od $\pi_0(\underline{x})$ je nestabilna u X. □

Teorem 2.2.3. *Neka je X metrički prostor i $f : X \to X$ neprekidno preslikavanje. Preslikavanje f je M-kaotično ako i samo ako je $\sigma_f : \varprojlim(X, f) \to \varprojlim(X, f)$ M-kaotično.*

Dokaz. Nužnost. Pretpostavimo da je funkcija f M-kaotična, odnosno postoji $x_0 \in X$ tako da je (1) orbita od x_0 gusta u X; (2) orbita od x_0 je nestabilna. Po teoremu 2.2.1, za svaki $\underline{x} \in \pi_0^{-1}(x_0)$, orbita od $\underline{x}$ je gusta u $\varprojlim(X, f)$, i po teoremu 2.2.2, orbita od $\underline{x}$ je nestabilna u $\varprojlim(X, f)$. Stoga, σ_f je M-kaotična.

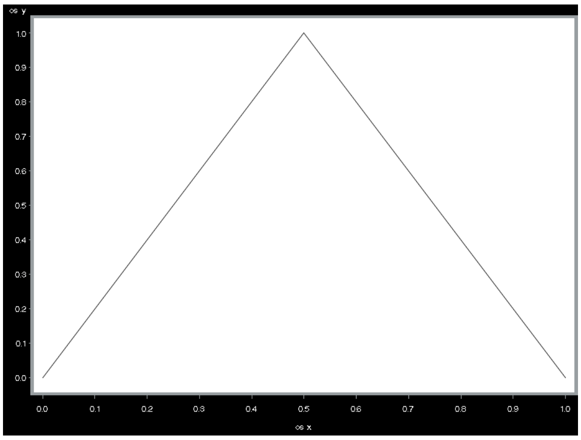
Dovoljnost. Pretpostavimo da je σ_f M-kaotična, tj. postoji $\underline{x} \in \varprojlim(X, f)$ tako da je (1) orbita od $\underline{x}$ gusta u $\varprojlim(X, f)$; (2) orbita od $\underline{x}$ je nestabilna. Po teoremu 2.2.1 $\pi_0(\underline{x})$ je gusta u X, i po teoremu 2.2.2 $\pi_0(\underline{x})$ je nestabilna. Stoga, f je M-kaotična. □

2.3 Primjeri

Primjer 2.3.1. *Neka je $I = [0, 1]$ jedinični interval. Funkciju $f : I \to I$ definiranu na sljedeći način:*

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2(1-x), & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

zovemo ***šatorska funkcija*** *s nagibom 2.*



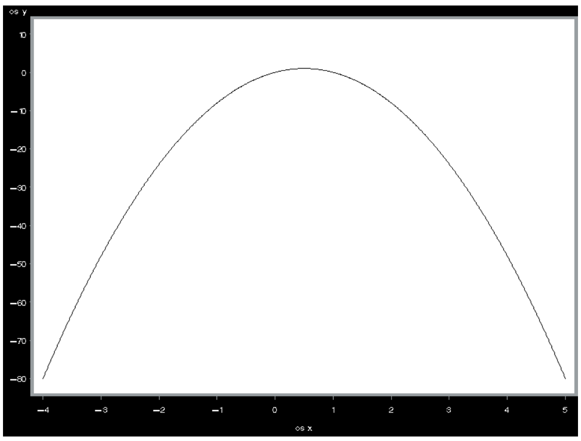
Slika 2.1: Šatorska funkcija

Budući da je f definirana na intervalu, da bi pokazali da je f kaotična treba samo pokazati da je f topološki tranzitivna, što smo već pokazali u odjeljku 1.1.
Budući je $I = [0, 1]$ kompaktan metrički prostor, iz teorema 1.2.10 *slijedi da je f M-kaotična. Štoviše, iz teorema 2.2.3 slijedi da je $\sigma_f : \underset{\leftarrow}{\lim}(X, f) \to \underset{\leftarrow}{\lim}(X, f)$ M-kaotična.*

Primjer 2.3.2. *Neka je $I = [0, 1]$ jedinični interval. Funkciju $F_4 : I \to I$ definiranu sa:*

$$F_4(x) = 4x(1 - x),\ x \in I\,.$$

*zovemo **logistička funkcija**.*



Slika 2.2: Logistička funkcija

Pokazat ćemo da je funkcija F_4 kaotična na cijelom intervalu I.

Dokaz. Definiramo funkcije na sljedeći način:

$$g : S^1 \to S^1 \text{ sa } g(\theta) = 2\theta,$$

$$h_1 : S^1 \to [-1, 1] \text{ sa } h_1(\theta) = \cos\theta,$$

$$h_2 : [-1, 1] \to [0, 1] \text{ sa } h_2(x) = \frac{1}{2}(1 - x)$$

$$q(x) = 2x^2 - 1.$$

Tada vrijedi:

$$h_1 \circ g(\theta) = \cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1 = q \circ h_1(\theta).$$

Funkcija h_1 nije homeomorfizam jer nije injekcija pa nije ni topološka konjugacija funkcija g i q.
Također vrijedi:

$$h_2 \circ q(x) = \frac{1}{2}(1 - 2x^2 + 1) = 1 - x^2 = 2(1 - x)(1 - \frac{1}{2}(1 - x)) = F_4 \circ h_2(x)$$

pa slijedi da je q topološki konjugirana s F_4.
Sada možemo pokazati da je F_4 topološki tranzitivna. Neka su U i V bilo koja dva podintervala od I. Tada postoje otvoreni lukovi U' i V' od S^1 takvi da je $h_2 \circ h_1(U') = U$ i $h_2 \circ h_1(V') = V$. Budući da je g topološki tranzitivna postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $g^k(U') \cap V' \neq \emptyset$. Zato vrijedi $F_4^k(U) \cap V \neq \emptyset$ pa je F_4 topološki tranzitivna, pa je po propoziciji 1.3.1 kaotična. □

Po [9]*, šatorska funkcija f iz prethodnog primjera i funkcija F_4 su topološki konjugirane. Iz prethodnog primjera i teorema* 1.2.7 *slijedi da je F_4 M-kaotična. Po teoremu* 2.2.3 $(\varprojlim(I, F_4), \sigma_{F_4})$ *je M-kaos.*

Poglavlje 3

Martellijev kaos na hiperprostorima

3.1 Definicije

Neka je (X, d) metrički prostor. **Udaljenost točke** x od nepraznog skupa A definira se na sljedeći način:

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a).$$

Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. Označimo s

$$CL(X) = \{A \subseteq X : \text{A je neprazan i zatvoren u X}\}$$

$CL(X)$ ćemo snabdjeti topologijom, tzv. Vietorisovom topologijom.
Mi ćemo posebno promatrati potprostor prostora $CL(X)$ koji se definira na sljedeći način:

$$2^X = \{A \in CL(X) : \text{A je kompaktan}\}$$

Definicija 3.1.1. *Neka je 2^X familija nepraznih kompaktnih podskupova od X.* ***Vietorisova topologija*** *τ_v na 2^X generirana je bazom*

$$v(U_1, U_2, ..., U_n) = \{F \in 2^X : F \subseteq \cup_{i=1}^n U_i \text{ i } F \cap U_i \neq \emptyset \text{ za svaki } i \leq n\}$$

gdje su $U_1, U_2, ..., U_n$ otvoreni podskupovi od X.

Uređeni par $(2^X, \tau_v)$ zovemo **hiperprostor** prostora X.

Definicija 3.1.2. *Neka je 2^X familija nepraznih kompaktnih podskupova od X.* ***Hausdorffova metrika*** *na 2^X definirana je sa*

$$d_H(A, B) = \max\{\sup_{a \in A} d(a, B), \sup_{b \in B} d(b, A)\} \text{ za svaki } A, B \in 2^X.$$

Uočimo da je $2^X = CL(X)$ kada je X kompaktan, jer je tada svaki zatvoreni podskup od X kompaktan. Nadalje, ako je X Hausdorffov prostor, vrijedi $2^X = \{A \subseteq X :$ A je neprazan i kompaktan $\}$ jer je svaki kompaktni podskup Hausdorffovog prostora zatvoren.

Neka je $f : X \to X$ preslikavanje. Funkcija 2^f na hiperprostoru 2^X definirana je sa

$$2^f : 2^X \to 2^X, 2^f(F) = f(F), F \in 2^X .$$

3.2 Veza Martellijevog kaosa na $(2^X, 2^f)$ i na (X, f)

U ovom odjeljku promatramo vezu između M-kaosa na $(2^X, 2^f)$ i M-kaosa na (X, f).

Teorem 3.2.1. *Neka je X kompaktan metrički prostor, $f : X \to X$ neprekidno preslikavanje i neka je $2^f : 2^X \to 2^X$. Neka je $A \in 2^X$ tranzitivna točka za 2^f. Tada je svaki $x \in A \subset X$ tranzitivna točka od X za f.*

Dokaz. Pretpostavimo da je A tranzitivna točka na $(2^X, 2^f)$. Tada za svaki otvoreni skup $v(U_1, U_2, \dots, U_m)$ u 2^X, postoji nenegativan cijeli broj n tako da vrijedi

$$(2^f)^n(A) = f^n(A) \in v(U_1, U_2, ..., U_m).$$

Posebno, uzmimo $U_1 = U_2 = ... = U_m = U$, tada postoji nenegativan cijeli broj m koji zadovoljava $(2^f)^m(A) = f^m(A) \in v(U)$. Stoga je $f^m(A) \subseteq U$. Štoviše, za svaki $x \in A$, vrijedi $f^m(x) \in U$. Dakle, x je tranzitivna točka na (X, f). □

Teorem 3.2.2. *Neka je $(2^X, 2^f)$ dinamički sustav na hiperprostoru. Ako je orbita od $\{x\}$ nestabilna u $(2^X, 2^f)$ za svaki $x \in X$, tada je orbita od x nestabilna u (X, f) za svaki $x \in X$.*

Dokaz. Neka je $x \in X$. Dokazat ćemo da postoji $r > 0$ takav da za svaki $\varepsilon > 0$, postoji $y \in X$ i $n > 0$ koji zadovoljavaju

$$d(x, y) < \varepsilon \text{ i } d(f^n(x), f^n(y)) > r .$$

Budući je $\{x\} \in 2^X$ i orbita od $\{x\}$ je nestabilna u $(2^X, 2^f)$ za svaki $x \in X$, postoji $r > 0$ takav da za svaki $\varepsilon > 0$, postoji $B \in 2^X$ i $n > 0$ koji zadovoljavaju

$$d_H(\{x\}, B) < \varepsilon \text{ i } d_H((2^f)^n(\{x\}), (2^f)^n(B)) = d_H(f^n(\{x\}), f^n(B)) > r .$$

Kako je

$$d_H(\{x\}, B) = \max\{\sup_{a\in\{x\}} d(a, B), \sup_{b\in B} d(b, \{x\})\} = \sup_{b\in B} d(b, \{x\}) ,$$

slijedi da je $\sup_{b\in B} d(b, \{x\}) < \epsilon$. Štoviše, za svaki $b \in B$ je $d(b, x) < \epsilon$ i vrijedi

$$d_H((2^f)^n(\{x\}), (2^f)^n(B)) = \max\{\sup_{a\in\{x\}} d(f^n(a), f^n(B)), \sup_{b\in B} d(f^n(b), f^n(\{x\}))\} > r.$$

Stoga

$$d_H((2^f)^n(\{x\}), (2^f)^n(B)) = \sup_{b\in B} d(f^n(b), f^n(\{x\})) > r.$$

Kako je B kompaktan podprostor od X i f neprekidna funkcija, postoji $b \in B$ tako da je $d(f^n(b), f^n(\{x\})) = d(f^n(x), f^n(b)) > r$. Stoga slijedi da je orbita od x nestabilna u (X, f). □

Teorem 3.2.3. *Ako je $2^f : 2^X \to 2^X$ M-kaotična i orbita od $\{x\}$ nestabilna u $(2^X, 2^f)$ za svaki $x \in X$, tada je $f : X \to X$ M-kaotična.*

Dokaz. Ako je $2^f : 2^X \to 2^X$ M-kaotična, tada postoji tranzitivna točka $A \in 2^X$ takva da je orbita od A nestabilna u $(2^X, 2^f)$. Iz teorema 3.2.1 slijedi da je x tranzitivna točka u X za svaki $x \in A$, odnosno orbita od x je gusta u X. Kako je orbita od $\{x\}$ nestabilna u $(2^X, 2^f)$ za svaki $x \in X$, po teoremu 3.2.2 slijedi da je za svaki $x \in A$ orbita od x nestabilna u (X, f). Uzmimo $x \in A$. Tada je x tranzitivna točka u (X, f) i orbita od x je nestabilna u (X, f). Iz ovog slijedi da je f M-kaotična. □

Definicija 3.2.4. *Funkcija $f : X \to X$ je **(topološko) miješanje** ako za svaka dva otvorena skupa $U_1, U_2 \neq \emptyset$, $\exists N > 0$ takav da $\forall n > N$ vrijedi $f^n(U_1) \cap U_2 \neq \emptyset$.*

Definicija 3.2.5. *Funkcija $f : X \to X$ je **(topološko) slabo miješanje** ako za svaka dva otvorena skupa $U_1, U_2 \neq \emptyset$, $\exists n > 0$ takav da vrijedi $f^n(U_1) \cap U_2 \neq \emptyset$.*

Definicija 3.2.6. *Funkcija $f : X \to X$ je **potpuno tranzitivna** ako je za svaki m funkcija f^m tranzitivna.*

Za dane definicije miješanja i tranzitivnosti, vrijedi sljedeće:

miješanje ⇒ slabo miješanje ⇒ potpuna tranzitivnost ⇒ tranzitivnost

Teorem 3.2.7. *Neka je $f : X \to X$ preslikavanje. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

i) *f je slabo miješanje*

ii) *2^f je slabo miješanje*

iii) *2^f je tranzitivna*

Slabo miješani dinamički sustavi osjetljivi su na početne uvjete pa iz toga slijedi da osjetljivost na početne uvjete povlači nestabilnost. Stoga, slabo miješani dinamički sustavi imaju nestabilnu orbitu. Po teoremu 1.1.9, ako je X kompaktan perfektan (nema izoliranih točaka) metrički prostor, tada su topološka tranzitivnost i točkovna tranzitivnost ekvivalentne. S obzirom na ekvivalencije iz teorema 3.2.7, vrijedi sljedeći korolar:

Korolar 3.2.8. *Neka je (X, d) kompaktan metrički prostor bez izoliranih točaka i neka je $f : X \to X$ neprekidna funkcija. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

i) *f je slabo miješanje*

ii) *2^f je slabo miješanje*

iii) *2^f je M-kaotična*

Bibliografija

[1] Banks, J.: *Chaos for induced hyperspace maps.* Chaos Solitons Fractals **25**, 681–685 (2005)

[2] Banks, J., Brooks, J., Cairs, G., Stacey, P.: *On the Devaney's definition of chaos.* Am. Math. Monthly **99**, 332–334 (1992)

[3] Devaney, R.L.: *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems.* Addison–wesley, Redwood City (1989)

[4] Engelking, R.: *General Topology.* PWN, Warszawa (1977)

[5] Kolyada, S., Snoha, L.: *Some aspects of topological transitivity—a survey.* Grazer Math. Ber, Bericht Nr. **334**, 3–35 (1997)

[6] Martelli, M.: *Introduction to Discrete Dynamical Systems and Chaos.* Wiley–Interscience series in Discrete mathematics and Optimization, Wiley-Interscience, New York (1999)

[7] Michael, E.: *Topologies on spaces of subset.* Trans. Am. Math. Soc. **71**, 152–182 (1951)

[8] Peris, A.: *Set-valued discrete chaos.* Chaos Solitons Fractals **26**, 19–23 (2005)

[9] Robinson, C.: *Dynamical Systems: Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos,* 2nd edn. CRC Press Inc, Boca Raton (1999)

[10] Roman-Flores, H.: *Robinson's chaos in set-valued discrete systems.* Chaos Solitons Fractals **25**, 33–42 (2005)

[11] Vellekoop, M., Berglund, R.: *On interval, transitivity=chaos.* Am. Math. Monthly **101**, 353–355 (1994)

Sažetak

Na početku rada navodimo neke osnovne definicije i pojmove, koji će nam biti potrebni u nastavku rada. Upoznajemo se s različitim definicijama kaosa, te promatramo odnos između njih. Definiramo neka poznata preslikavanja te pokazujemo da su kaotična.

U drugom poglavlju promatramo Martellijev kaos na inverznim limesima. Navodimo definicije, te kroz nekoliko teorema dokazujemo da je inverzni limes s preslikavanjem pomaka Martellijev kaos ako i samo ako je originalni sustav s veznim preslikavanjem Martelijev kaos. Navodimo i dva primjera kroz koja prikazujemo navedene tvrdnje.

Na kraju promatramo Martellijev kaos na hiperprostorima. Kao i u prethodnom poglavlju navodimo definiciju, te nakon toga kroz nekoliko teorema dokazujemo da ako je hiperprostor Martellijev kaos i ako je svaka točka originalnog sustava nestabilna u hiperprostoru, tada je i originalni sustav Martellijev kaos.

Summary

At the very beginning of this paper we introduce some basic definitions and concepts, which we will need in sequel. We define different definitions of chaos, and observe the relationship between them. We define some familiar mappings and show that they are chaotic.

In the second chapter we investigate Martelli's chaos of inverse limit dynamical systems. We give definitions, and through a few theorems we prove that inverse limit dynamical system is Martelli's chaos if and only if so is original system. Here are two examples that illustrate listed properties.

Finally, we investigate Martelli's chaos of hyperspace dynamical systems. As in the previous chapter we give some definitions, and through a few theorems we prove that hyperspace dynamical system is Martelli's chaos implies original system is Martelli's chaos if the orbit of every single point set of original system is unstable in hyperspace.

Životopis

Rođena sam 13.kolovoza 1989. godine u Karlovcu gdje sam 2004. godine završila osnovnu te 2008. godine srednju školu. Nakon završene opće gimnazije u Karlovcu, upisala sam Preddiplomski sveučilišni studij matematike na Matematičkom odjelu na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Nakon završenog preddiplomskog studija, 2012. godine upisala sam Diplomski sveučilični studij Matematičke statistike, također na Matematičkom odjelu Prirodoslovno-matematičkog fakulteta.