SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Siniša Urošev

PROCESI OBNAVLJANJA U TEORIJI RIZIKA

Diplomski rad

Voditelj rada:
Prof. dr. sc. Zoran Vondraček

Zagreb, srpanj 2014.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Teorija rizika je drugi izraz za matematiku neživotnog osiguranja. Ona se bavi modeliranjem i izračunom šteta koje osiguravajuće društvo isplaćuje osiguranim klijentima, kao i procjenom rizika od gubitka u portfelju. Cilj ovog rada je uvesti osnovne pojmove i koncepte u teoriji rizika pomoću kojih je moguće modelirati situacije prisutne u stvarnom svijetu. Kako bismo u tome uspjeli, potrebno je:

1. Predložiti realan, no dovoljno jednostavan model pomoću kojeg je moguće modelirati tok novca u portfelju kroz vrijeme.

2. Uvesti pojmove od glavnog interesa.

3. Proučiti teorijska svojstva modela i uvedenih pojmova.

4. Predložiti algoritam za simulaciju modela u slučajevima kada je teorijska pozadina nepoznata ili prezahtjevna.

Pod frazom "realan, no dovoljno jednostavan model" misli se na pretpostavke modela koje olakšavaju teorijska razmatranja, no nisu pretjerano ograničavajuće i imaju intuitivno opravdanje. Pretpostavke su sljedeće:

- vremena između dviju isplaćenih šteta (koje u nastavku nazivamo međudolazna vremena šteta) su nezavisna i jednako distribuirana,

- iznosi isplaćenih šteta su nezavisni i jednako distribuirani,

- međudolazna vremena šteta i isplate su međusobna nezavisni,

- zarada osiguravajućeg društva raste linearno u vremenu.

Prve tri pretpostavke odnose se na trošak osiguravajućeg društva i uvode komponentu slučajnosti u model. Posljednja komponenta odnosi se na zaradu osiguravajućeg društva i ta komponenta je u potpunosti deterministički određena. Ovakav model, uz dodatnu pretpostavku da međudolazna vremena šteta imaju eksponencijalnu distribuciju, predložio je švedski matematičar Filip Lundberg 1903. godine, a posebni iskorak napravio je njegov sunarodnjak Harald Cramér oko 1930. godine. Njima u čast, model je poznat pod imenom Cramér-Lundbergov model. Godine 1957. Sparre Andersen proširio je model dopustivši da međudolazna vremena imaju proizvoljnu distribuciju i taj model je od glavnog interesa u ovom radu.

Kada govorimo o teorijskim svojstvima modela, najčešće mislimo na asimptotska svojstva. Neki od najvažnijih rezultata su jaki zakoni velikih brojeva i centralni granični teoremi. Pomoću tih rezultata možemo opisati/aproksimirati ponašanje modela.

U današnje vrijeme kada modeli postaju sve zahtjevniji, računala imaju sve veći utjecaj u svim granama primijenjene matematike, pa tako i u teoriji rizika. Ispostavilo se da pomoću Monte Carlo simulacija možemo jednostavno i precizno aproksimirati vrijednosti od interesa za koje teorijska pozadina nije poznata ili je prezahtjevna. Iz tog razloga Monte Carlo simulacije se sve više primjenjuju te ćemo im posvetiti pažnju u ovom radu.

Rad je strukturiran na sljedeći način. U Poglavlju 1 promatramo međudolazna vremena isplaćenih šteta. Najvažniji pojam u tom poglavlju je pojam brojećeg procesa koji nam govori koliko je šteta osiguravajuće isplatilo do nekog vremenskog trenutka. Navest ćemo neka osnovna asimptotska svojstva brojećeg procesa te ćemo detaljnije proučiti brojeći proces koji je polazište za modeliranje mnogih procesa u teoriji rizika - Poissonov proces.

U Poglavlju 2 ćemo promatrati procese koji osim vremenskih trenutaka isplaćenih šteta uzimaju u obzir i iznos isplaćenih šteta. Takav proces nazivamo proces ukupnih šteta. Kao i u prethodnom poglavlju, ispitat ćemo neka osnovna asimptotska svojstva tih procesa te ćemo detaljnije proučiti složeni Poisssonov proces.

U Poglavlju 3 napravit ćemo kratki izlet u posebnu klasu procesa koje nazivamo Lévyjevi procesi. Njihova svojstva će nam biti bitna u idućem poglavlju.

U Poglavlju 4 uvodimo Sparre Andersenov model sa spomenutim pretpostavkama. Ključni pojam je vrijeme propasti koje predstavlja prvi trenutak kada isplaćene štete premašuju uplaćene premije. Izvodimo formulu za funkciju gustoće vremena propasti u posebnom slučaju kada isplate prate eksponencijalnu distribuciju, a za opći slučaj ponudit ćemo algoritam za procjenu distribucije vremena propasti koji se zasniva na Monte Carlo simulacijama.

U posljednjem poglavlju, Dodaci, navodimo neke rezultate iz teorije vjerojatnosti koje koristimo u prethodnim poglavljima.

Poglavlje 1

Procesi obnavljanja

U ovom poglavlju definirat ćemo procese obnavljanja pomoću kojih možemo modelirati vremenske trenutke u kojima osiguravajuće društve isplaćuje štete klijentima. Najvažniji pojam u poglavlju je pojam brojećeg procesa koji nam govori koliko je šteta osiguravajuće isplatilo do nekog vremenskog trenutka. Proučit ćemo neka osnovna asimptotska svojstva kao što su jaki zakon velikih brojeva i centralni granični teorem te ćemo detaljnije proučiti Poissonov proces kao jedan od najvažnijih brojećih procesa u teoriji rizika.

1.1 Definicija i osnovna svojstva

Definicija 1.1.1. *Neka je* $(W_n : n \geq 0)$ *niz nezavisnih i nenegativnih slučajnih varijabli takvih da su* $(W_n : n \geq 1)$ *jednako distribuirane. Proces obnavljanja (niz obnavljanja) je slučajni proces* $T = (T_0 : n \geq 0)$ *definiran sa*

$$T_0 = 0 \,, \quad T_n = W_0 + W_1 + \cdots + W_{n-1} \,, \ n \geq 1.$$

Procese obnavljanja možemo vrlo jednostavno interpretirati. Niz $(W_n : n \geq 0)$ možemo shvatiti kao međudolazna vremena šteta, dok slučajna varijabla T_n predstavlja vrijeme dolaska $n-$te štete.

Sljedeći pojam koji uvodimo je pojam konvolucije funkcija. Prije same definicije, navodimo par napomena o integraciji u donosu na neopadajuću, zdesna neprekidnu funkciju.

Neka je $F : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ neopadajuća i zdesna neprekidna funkcija. Takvu funkciju nazivamo *poopćenom funkcijom distribucije* (na $\mathbb{R}$). Pretpostavimo dodatno da je $F(0) = 0$. Zbog monotonosti od F, vrijedi $F(x) = 0$, za svaki $x < 0$. Vrlo često ćemo funkciju zadavati na intervalu $[0, \infty)$. U tom slučaju, promatramo njezino proširenje na $(-\infty, 0)$ tako da na tom intervalu funkcija bude identički jednaka nuli.

Neka je μ Lebesgue-Stieltjesova mjera generirana funkcijom F, tj. μ je mjera na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

takva da za sve $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$ vrijedi

$$\mu((a, b]) = F(b) - F(a).$$

Neka je $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ Borelova funkcija. Uvodimo oznaku

$$\int_0^\infty g(t) dF(t) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(t) g(t) \mu(dt).$$

Za nas će posebno biti važan slučaj kada je F apsolutno neprekidna u odnosu na Lebesgueovu mjeru λ, tj. kada postoji Borelova funkcija $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ takva da vrijedi

$$F(t) = \int_0^t f(x) \lambda(dx).$$

Tada je

$$\int_0^\infty g(t) dF(t) = \int_0^\infty g(t) f(t) \lambda(dt). \tag{1.1}$$

Definicija 1.1.2. *Neka je $F : [0, \infty) \to [0, \infty)$ neopadajuća, zdesna neprekidna funkcija te neka je $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ lokalno ograničena funkcija (ograničena na svakom ograničenom intervalu). Konvolucija funkcija F i g definira se s*

$$(F * g)(t) = \int_0^t g(t - x) dF(x) \ , \quad t \geq 0. \tag{1.2}$$

Budući da je g ograničena na svakom intervalu $[0, t]$, funkcija $x \mapsto g(t - x)$ je integrabilna u odnosu na mjeru μ pa je integral u (1.2) dobro definiran. Uočimo da je zbog svojstva monotonog rasta i neprekidnosti zdesna funkcija F također lokalno ograničena.

Lema 1.1.3. *Funkcija $F * g$ je lokalno ograničena. Ako je g neprekidna zdesna, tada je i $F * g$ također neprekidna zdesna.*

Dokaz. Označimo s $\| g \|_t = \sup_{0 \leq s \leq t} |g(s)|$.

$$\begin{aligned} |(F * g)(t)| &= |\int_0^t g(t - x) dF(x)| \leq \int_0^t |g(t - x)| dF(x) \\ &\leq \| g \|_t \int_0^t dF(x) = \| g \|_t \ \mu([0, t]) \\ &= \| g \|_t \ (F(t) - F(0-)) = \| g \|_t \ F(t). \end{aligned}$$

Dakle, $\| F * g \|_t \leq \| g \|_t \ \| F \|_t$, što pokazuje lokalnu ograničenost od $F * g$.

Neka je $t \geq 0$. Tada postoji padajući niz pozitivnih realnih brojeva takav da vrijedi $t_n \searrow t$. Vrijedi

$$g(F * g)(t_n) = \int_0^{t_n} g(t_n - x)dF(x) = \int_0^{t_1} g(t_n - x)\mathbb{1}_{[0,t_n]}(x)dF(x).$$

Uočimo da zbog $\lim_{n\to\infty} t_n = t$ vrijedi $\lim_{n\to\infty} \mathbb{1}_{[0,t_n]}(x) = \mathbb{1}_{[0,t]}(x)$, za sve $x \in [0, t_1]$, a zbog neprekidnosti zdesna funkcije g je $\lim_{n\to\infty} g(t_n - x) = g(t - x)$, za sve $x \in [0, t_1]$. Budući da je $|g(t_n - x)\mathbb{1}_{[0,t_n]}(x)| \leq\| g \|_{t_1}$, za sve $x \in [0, t_1]$, po Lebesgueovom teoremu o dominiranoj konvergenciji je

$$\lim_{n\to\infty}(F * g)(t_n) = \int_0^{t_1} g(t - x)\mathbb{1}_{[0,t]}(x)dF(x) = \int_0^{t} g(t - x)dF(x) = (F * g)(t),$$

što pokazuje neprekidnost zdesna od $F * g$. □

Budući da je po prethodnoj lemi funkcija $F*F$ lokalno ograničena i neprekidna zdesna, možemo induktivno definirati $n-$ struku konvoluciju sa

$$F^{*0} = \mathbb{1}_{[0,\infty)}(t)\,, \quad F^{*n} = F^{*(n-1)} * F,\ n \geq 1.$$

Za nenegativne, Riemann-integrabilne funkcije f i g definiramo njihovu konvoluciju sa

$$(f * g)(t) = \int_0^t g(t - x)f(x)dx\,, \quad t \geq 0.$$

Koristeći se definicijom konvolucije funkcija, možemo izraziti funkciju distribucije dolaznih vremena T_n u terminima funkcije distribucije međudolaznih vremena W_n. Tvrdnja je jednostavna posljedica Teorema 2.1.10., [3], str. 42.

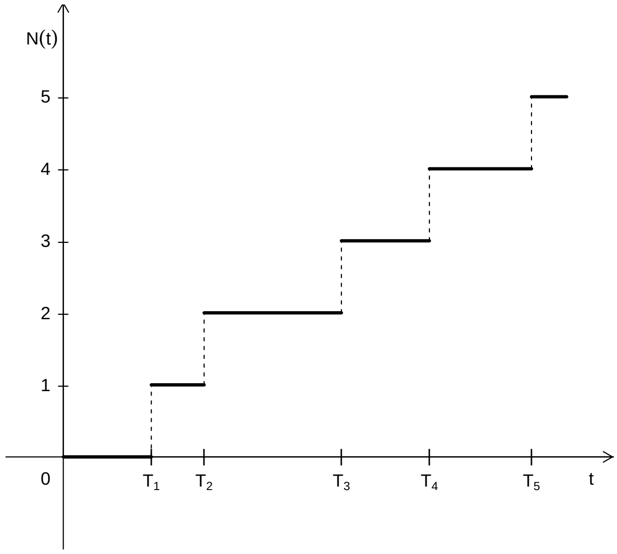
Propozicija 1.1.4. *Neka je* $(T_n : n \geq 0)$ *proces obnavljanja zadan nizom* $(W_n : n \geq 0)$ *te neka su G i F funkcije distribucije slučajnih varijabli* W_0 *i* W_1*. Tada je za svaki* $n \geq 2$

$$F_{T_n}(x) = \mathbb{P}(T_n \leq x) = \left(G * F^{*(n-1)}\right)(x), \quad x \geq 0.$$

Dodatno, ako W_0 *i* W_1 *imaju gustoću g i f, tada* T_n *ima gustoću* f_{T_n} *i vrijedi*

$$f_{T_n}(x) = \left(g * f^{*(n-1)}\right)(x), \quad x \geq 0.$$

Jedno od osnovnih pitanja u teoriji obnavljanja je koliko se obnavljanja dogodilo do nekog trenutka. U teoriji rizika, taj broj možemo interpretirati kao broj isplaćenih šteta do nekog trenutka.



Slika 1.1: Grafički prikaz puta procesa N. Uočimo da je trajektorija procesa step-funkcija s početnom pozicijom u točki $(0,0)$ i sa skokovima u trenucima dolaznih vremena šteta $T_1, T_2, T_3, \ldots$ Proces uvijek skače za vrijednost 1.

Definicija 1.1.5. *Neka je $T = (T_n : n \geq 0)$ proces obnavljanja. Brojeći proces (pridružen procesu obnavljanja T) je slučajni proces $(N(t) : t \geq 0)$ definiran sa*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{T_n \leq t\}}, \quad t \geq 0.$$

Ponekad nam je od interesa znati koliko se obnavljanja dogodilo unutar nekog vremenskog intervala $(s,t]$, $0 \leq s < t$. U skladu s gornjom definicijom, uvodimo oznaku $N(s,t] := N(t) - N(s)$, pri čemu je $N(0,t] := N(t)$.

Iz definicije brojećeg procesa slijede sljedeće relacije:

$$\{N(t) \leq n\} = \{T_{n+1} > t\}, \ n \geq 0, \tag{1.3}$$

$$\{N(t) = n\} = \{T_n \leq t < T_{n+1}\}, \ n \geq 0, \tag{1.4}$$

$$T_{N(t)} \leq t < T_{N(t)+1}. \tag{1.5}$$

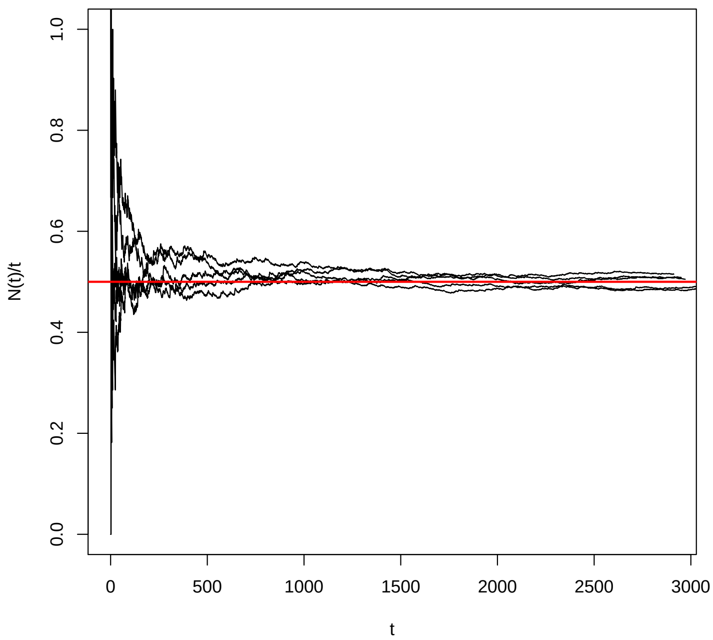
U nastavku ove točke iznosimo neke najvažnije rezultate u teoriji obnavljanja. Najprije navodimo jednu tehničku lemu koja je jednostavna posljedica relacije (1.3) i činjenica da je $T_n < \infty$ (g.s.).

Lema 1.1.6. *Vrijedi* $\lim_{t\to\infty} N(t) = \infty$ *(g.s.).*

Prvi važan rezultat je jaki zakon velikih brojeva za brojeći proces. Dokaz se može pronaći u [5, Teorem 2.2.5, str. 56]

Teorem 1.1.7. *(Jaki zakon velikih brojeva za brojeći proces) Pretpostavimo da je* $\mu := \mathbb{E}W_1 < \infty$. *Tada vrijedi*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{\mu} \quad (g.s.).$$



Slika 1.2: Ilustracija jakog zakona velikih brojeva za brojeći proces u slučaju kada međudolazna vremena imaju eksponencijalnu distribuciju s parametrom $\lambda = 1/2$. Prikazane su trajektorije 5 simuliranih procesa.

Jaki zakon velikih brojeva nam kaže da se prosječni broj obnavljanja asimptotski ponaša kao $1/\mu$, tj. da je $N(t) \approx t/\mu$, za dovoljno velike t. Analogni rezultat vrijedi i za asimptotski prosječan očekivani broj obnavljanja. Taj rezultat u literaturi je poznat pod imenom elementarni teorem obnavljanja. Tvrdnja teorema dokazana je u [5, Teorem 2.2.7, str. 57].

Teorem 1.1.8. *(Elementarni teorem obnavljanja) Neka je* $\mu := \mathbb{E}W_1 \leq \infty$. *Tada vrijedi*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}N(t)}{t} = \frac{1}{\mu},$$

uz konvenciju $1/\infty = 0$.

Pomoću elementarnog teorema obnavljanja možemo dobiti jednostavnu, no dosta grubu aproksimaciju očekivanog broja obnavljanja. Znatno preciznija aproksimacija dana je Blackwellovim teoremom obnovljanja. Prije no što iskažemo tvrdnju teorema, definiramo pojam aritmetičke funkcije distribucije: za funkciju distribucije F nenegativne slučajne varijable X kažemo da je aritmetička ako postoji $a > 0$ takav da je $\mathbb{P}(X \in \{a, 2a, 3a, \ldots\}) = 1$. Dokaz se može naći u [3, Teorem 4.4.3., str. 179].

Teorem 1.1.9. *(Blackwellov teorem obnavljanja) Neka je* F *nearitmetička funkcija distribucije i* $\mu := \mathbb{E}W_1 \leq \infty$. *Tada za sve* $h > 0$ *vrijedi*

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}N(t, t+h] = \frac{h}{\mu}.$$

Zabilježimo i sljedeću korisnu informaciju o asimptotski prosječnoj varijanci brojećeg procesa (vidi [4, Teorem 5.2., str. 59]).

Propozicija 1.1.10. *Ako je* $\mu := \mathbb{E}W_1$, $\sigma^2 := \operatorname{Var} W_1 < \infty$, *tada vrijedi*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\operatorname{Var} N(t)}{t} = \frac{\sigma^2}{\mu^3},$$

Na kraju ove točke iskazujemo i dokazujemo centralni granični teorem za brojeći proces.

Teorem 1.1.11. *(centralni granični teorem za brojeći proces) Neka je* $\mu := \mathbb{E}W_1$, $\sigma^2 := \operatorname{Var} W_1 < \infty$. *Tada*

$$Z(t) := \frac{N(t) - \frac{t}{\mu}}{\sigma\sqrt{\frac{t}{\mu^3}}} \xrightarrow{D} N(0,1), \quad t \to \infty.$$

Dokaz. Iz relacije $T_{N(t)} \leq t < T_{N(t)+1}$ slijedi

$$A(t) := \frac{T_{N(t)} - \mu N(t)}{\sigma\sqrt{\frac{t}{\mu}}} \leq \frac{\frac{t}{\mu} - N(t)}{\sigma\sqrt{\frac{t}{\mu^3}}} \leq \frac{T_{N(t)+1} - \mu\,(N(t)+1)}{\sigma\sqrt{\frac{t}{\mu}}} + \frac{\mu}{\sigma\sqrt{\frac{t}{\mu}}} =: B(t). \qquad (1.6)$$

Po jakom zakonu velikih brojeva za brojeći proces $\frac{N(t)}{t} \to \frac{1}{\mu}$ (g.s.), za $t \to \infty$. Budući da konvergencija (g.s.) povlači konvergenciju po vjerojatnosti, slijedi da $\frac{N(t)}{t} \xrightarrow{\mathbb{P}} \frac{1}{\mu}$, za $t \to \infty$. Uočimo da ista tvrdnja vrijedi i za proces $N(t) + 1$, $t \geq 0$.
Po Anscombeov centralnom graničnom teoremu 5.1.5 tada vrijedi

$$A(t) = \frac{T_{N(t)} - \mu N(t)}{\sigma\sqrt{\frac{t}{\mu}}} \xrightarrow{D} N(0,1)\ , \quad t \to \infty,$$

a zbog $\lim_{t\to\infty} \frac{\mu}{\sigma\sqrt{\frac{t}{\mu}}} = 0$ Slutskyjev teorem 5.1.3 nam daje

$$B(t) = \frac{T_{N(t)+1} - \mu\,(N(t)+1)}{\sigma\sqrt{\frac{t}{\mu}}} + \frac{\mu}{\sigma\sqrt{\frac{t}{\mu}}} \xrightarrow{D} N(0,1)\ , \quad t \to \infty.$$

Iz (1.6) slijedi da je za svaki $t > 0$

$$\mathbb{P}(B(t) \leq x) \leq \mathbb{P}(-Z(t) \leq x) \leq \mathbb{P}(A(t) \leq x)\ , \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Pustimo li $t \to \infty$ u gornju relaciju, prema upravo dokazanim tvrdnjama za procese A i B i po teoremu o sendviču vrijedi

$$-Z(t) \xrightarrow{D} N(0,1)\ , \quad t \to \infty.$$

Zbog simetričnosti normalne distribucije slijedi tvrdnja teorema. □

1.2 Homogeni Poissonov proces

U ovoj točki navodimo primjer brojećeg procesa koji je polazište za modeliranje mnogih procesa u teoriji rizika - Poissonov proces. Preciznije, u ovoj točki ćemo detaljno proučiti posebnu klasu Poissonovog procesa, tzv. homogeni Poissonov proces. Posebno su važna svojstva tog procesa koja uvelike olakšavaju neka teorijska razmatranja.

Neka je $(W_n : n \geq 0)$ niz nezavisnih slučajnih varijabli s eksponencijalnom distribucijom s parametrom $\lambda > 0$ i neka je $T = (T_n : n \geq 0)$ proces obnavljanja zadanim tim nizom. Brojeći proces $(N(t) : t \geq 0)$ pridružen procesu obnavljanja T nazivamo *homogeni Poissonov proces s intenzitetom* λ. Pišemo: $(N(t)) \sim \mathrm{PP}(\lambda)$.

Odredimo distribuciju slučajne varijable $N(t)$. Koristeći se činjenicom da zbroj n nezavisnih slučajnih varijabli s $\mathrm{Exp}(\lambda)$ distribucijom ima $\Gamma(n, \lambda)$ distribuciju, slijedi da $T_n \sim \Gamma(n, \lambda)$. Odredimo funkciju distribucije slučajne varijable T_n. Računamo

$$F_{T_n}(x) = \mathbb{P}(T_n \leq x) = \int_0^x \frac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\lambda t} dt =: I_n.$$

Parcijalnom integracijom dobivamo

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^x \frac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\lambda t} dt = \int_0^x \frac{\lambda^{n-1}}{(n-2)!} t^{n-2} e^{-\lambda t} dt - \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x} \\ &= I_{n-1} - \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x}. \end{aligned}$$

Iteriranjem gornje jednakosti dobivamo

$$\begin{aligned} I_n &= I_{n-1} - \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x} = I_{n-2} - \frac{\lambda^{n-2}}{(n-2)!} x^{n-2} e^{-\lambda x} - \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x} \\ &= \cdots = I_1 - e^{-\lambda x} \sum_{k=2}^{n} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} x^{k-1} = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt - e^{-\lambda x} \sum_{k=2}^{n-1} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} x^{k-1} \\ &= 1 - e^{-\lambda x} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^k}{k!}. \end{aligned}$$

Funkcija distribucije slučajne varijable T_n je dana sa

$$F_{T_n}(x) = 1 - e^{-\lambda x} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^k}{k!}. \tag{1.7}$$

Za $n \in \mathbb{N}_0$ imamo

$$\mathbb{P}(N(t) = n) = \mathbb{P}(T_n \leq t < T_{n+1}) = \mathbb{P}(T_n \leq t) - \mathbb{P}(T_{n+1} \leq t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}.$$

Dakle, $N(t)$ ima Poissonovu distribuciju s parametrom λt. Odredimo sada distribuciju slučajne varijable $N(s, t]$, $0 < s < t$. Za $n \in \mathbb{N}_0$ računamo

$$\mathbb{P}(N(s, t] = n) = \mathbb{P}(N(t) - N(s) = n) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(N(s) = k, N(t) = n + k)$$

Posebno računamo

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(N(s) = k,\ N(t) = n + k) \\
&\quad = \mathbb{P}\left(T_k \leq s < T_{k+1}, T_{n+k} \leq t < T_{n+k+1}\right) \\
&\quad = \mathbb{P}\left(T_k \leq s < T_k + W_k, T_k + W_k + \sum_{i=k+1}^{n+k-1} W_i \leq t < T_k + W_k + \sum_{i=k+1}^{n+k-1} W_i + W_{n+k}\right) \\
&\quad = \iiiint\limits_{\substack{x \leq s < x+y \\ x+y+z \leq t < x+y+z+w}} f_{\left(T_k, W_k, \sum_{i=k+1}^{n+k-1} W_i, W_{n+k}\right)}(x, y, z, w) dxdydzdw,
\end{aligned}$$

pri čemu je s $f_{\left(T_k, W_k, \sum_{i=k+1}^{n+k-1} W_i, W_{n+k}\right)}$ označena funkcija gustoće slučajnog vektora $\left(T_k, W_k, \sum_{i=k+1}^{n+k-1} W_i, W_{n+k}\right)$. Zbog nezavisnosti niza (W_n), slučajne varijable T_k, W_k, $\sum_{i=k+1}^{n+k-1} W_i$, W_{n+k} su nezavisne. Zato je

$$f_{\left(T_k, W_k, \sum_{i=k+1}^{n+k-1} W_i, W_{n+k}\right)}(x, y, z, w) = f_{T_k}(x) f_{W_k}(y) f_{\sum_{i=k+1}^{n+k-1} W_i}(z) f_{W_{n+k}}(w).$$

Nastavljamo s računom

$$\begin{aligned}
&\iiiint\limits_{\substack{x \leq s < x+y \\ x+y+z \leq t < x+y+z+w}} f_{\left(T_k, W_k, \sum_{i=k+1}^{n+k-1} W_i, W_{n+k}\right)}(x, y, z, w) dxdydzdw \\
&\quad = \iiiint\limits_{\substack{x \leq s < x+y \\ x+y+z \leq t < x+y+z+w}} f_{T_k}(x) f_{W_k}(y) f_{\sum_{i=k+1}^{n+k-1} W_i}(z) f_{W_{n+k}}(w) dxdydzdw \\
&\quad = \int_0^s f_{T_k}(x) \int_{s-x}^{t-x} f_{W_k}(y) \int_0^{t-x-y} f_{\sum_{i=k+1}^{n+k-1} W_i}(z) \int_{t-x-y-z}^{+\infty} f_{W_{n+k}}(w) dwdzdydx \\
&\quad = \int_0^s \frac{\lambda^k}{(k-1)!} x^{k-1} e^{-\lambda x} \int_{s-x}^{t-x} \lambda e^{-\lambda y} \int_0^{t-x-y} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-2)!} z^{n-2} e^{-\lambda z} \int_{t-x-y-z}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda w} dwdzdydx \\
&\quad = \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \frac{\lambda^n}{(n-2)!} e^{-\lambda t} \int_0^s x^{k-1} \int_{s-x}^{t-x} \int_0^{t-x-y} z^{n-2} dzdydx \\
&\quad = \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} e^{-\lambda t} \int_0^s x^{k-1} \int_{s-x}^{t-x} (t - x - y)^{n-1} dydx \\
&\quad = \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \frac{\lambda^n}{n!} (t-s)^n e^{-\lambda t} \int_0^s x^{k-1} dx \\
&\quad = \frac{\lambda^k}{k!} \frac{\lambda^n}{n!} s^k (t-s)^n e^{-\lambda t} \\
&\quad = \frac{(\lambda s)^k}{k!} \frac{(\lambda(t-s))^n}{n!} e^{-\lambda t}.
\end{aligned}$$

Vratimo li se u početnu jednakost, dobivamo

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N(s,t]=n) &= \sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}(N(s)=k, N(t)=n+k)\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda s)^k}{k!}\frac{(\lambda(t-s))^n}{n!}e^{-\lambda t} = \frac{(\lambda(t-s))^n}{n!}e^{-\lambda(t-s)}.\end{aligned} \tag{1.8}$$

Time smo pokazali da $N(s,t]$ također ima Poissonovu distribuciju s parametrom $\lambda(t-s)$.

Poissonov proces ima nekoliko važnih svojstva:

1) nezavisnost prirasta: za svaki $n \in \mathbb{N}$ i svaki izbor $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ slučajne varijable $N(t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, su nezavisne.

   Dokaz. Radi jednostavnosti zapisa, tvrdnju ćemo dokazati uz slučaju kada je $n = 2$. Analogno dokazujemo u slučaju kada je n proizvoljan. Neka su $0 < s < t$ i $k, n \in \mathbb{N}_0$ proizvoljni. Moramo pokazati da je

   $$\mathbb{P}(N(s)=k,\ N(s,t]=n) = \mathbb{P}(N(s)=k)\mathbb{P}\left(N(s,t]=n\right)$$

   Uočimo da je

   $$\mathbb{P}(N(s)=k,\ N(s,t]=n) = \mathbb{P}(N(s)=k,\ N(t)=n+k).$$

   Iskoristimo li račun koji smo proveli prilikom određivanja distribucije od $N(s,t]$, dobivamo

   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(N(s)=k,\ N(s,t]=n) = \mathbb{P}(N(s)=k,\ N(t)=n+k) &= \frac{(\lambda s)^k}{k!}e^{-\lambda s}\frac{(\lambda(t-s))^n}{n!}e^{-\lambda(t-s)}\\ &= \mathbb{P}(N(s)=k,\ N(t)=n+k)\end{aligned}$$

   što dokazuje tvrdnju. □

2) stacionarnost prirasta: za sve $0 \le s < t$ i svaki $h > 0$ vrijedi $N(s,t] \stackrel{D}{=} N(s+h, t+h]$.

   Dokaz. Tvrdnja slijedi direktno primjenom relacije (1.8). □

3) stohastička neprekidnost: za svaki $\epsilon > 0$ vrijedi

   $$\lim_{h\downarrow 0}\mathbb{P}\left(|N(h)| > \epsilon\right) = 0.$$

Dokaz. Po Markovljevoj nejednakosti vrijedi

$$\mathbb{P}\left(|N(h)| > \epsilon\right) \leq \frac{\mathbb{E}N(t)}{\epsilon} = \frac{\lambda h}{\epsilon}, \quad \forall \epsilon > 0.$$

Tvrdnja slijedi po teoremu o sendviču. □

U Poglavlju 3 upoznat ćemo se s klasom procesa koji zadovoljavaju svojstva 1) – 3). Te procese nazivamo Lévyjevi procesi i Poissonov proces je jedan od osnovih primjera tih procesa.

Poglavlje 2

Proces ukupnih šteta

U prethodnom poglavlju upoznali smo se s procesima obnavljanja, brojećim procesima i njihovim osnovnim svojstvima te smo detaljnije proučili homogeni Poissonov proces. Interpretacija brojećeg procesa bila je vrlo jednostavna - broj šteta koje je osiguravajuće društvo isplatilo do nekog (fiksnog) trenutka. Osim informacije o broju isplaćenih šteta, informacija koju bi osiguravajuće društvo svakako željelo znati je koliki je iznos isplaćenih šteta. U ovom poglavlju definirat ćemo proces ukupnih šteta te iznijeti njegova osnovna svojstva, s posebnim naglaskom na složeni Poissonov proces.

2.1 Definicija i osnovna svojstva

Neka je $T = (T_n : n \geq 0)$ proces obnavljanja zadan nizom $(W_n : n \geq 0)$ te neka je $N = (N(t) : t \geq 0)$ pripadni brojeći proces. Proces T shvaćamo kao niz dolaznih vremena šteta. Pretpostavimo da se u trenucima $T_1, T_2, T_3, \ldots$ isplaćuju štete u iznosu $X_1, X_2, X_3, \ldots$. Za niz $X = (X_n : n \geq 1)$ pretpostavljamo da je niz nenegativnih, nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli te da je nezavisan od niza međudolaznih vremena.

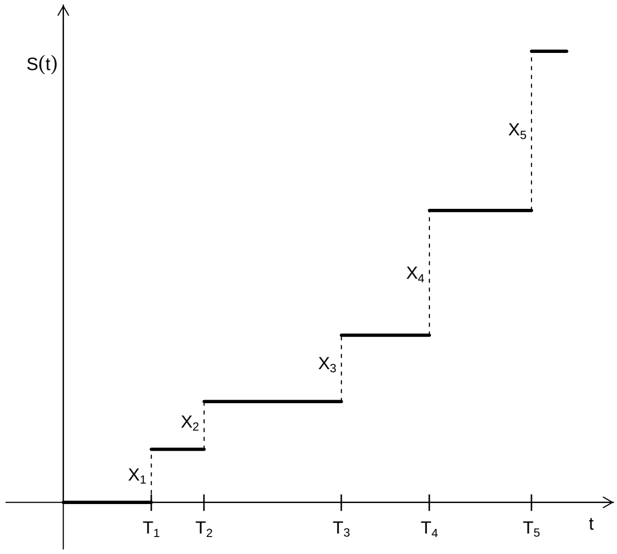
Definicija 2.1.1. *Proces ukupnih šteta je slučajni proces $S = (S(t) : t \geq 0)$ definiran sa*

$$S(t) := \sum_{i=1}^{N(t)} X_i \ , \ t \geq 0.$$

Kao i u prethodnom poglavlju, želimo ispitati svojstva procesa ukupnih šteta.

Odredimo najprije očekivanje i varijancu od $S(t)$. Pretpostavimo da je $\mathbb{E}X_1 < \infty$. Zbog nezavisnosti niza isplata i međudolaznih vremena, vrijedi

$$\mathbb{E}[S(t) \,|\, N(t) = n] = n\,\mathbb{E}X_1 \ , \ \forall n \in \mathbb{N}_0,$$



Slika 2.1: Grafički prikaz puta procesa S. Uočimo da je trajektorija procesa step-funkcija s početnom pozicijom u točki $(0, 0)$ i sa skokovima u trenucima dolaznih vremena šteta $T_1, T_2, T_3, \ldots$ Veličine tih skokova odgovaraju iznosu isplaćenih šteta $X_1, X_2, X_3, \ldots$

iz čega slijedi da je

$$\mathbb{E}[S(t) \,|\, N(t)] = N(t)\, \mathbb{E}X_1.$$

Koristeći se svojstvom uvjetnog očekivanja, dobivamo

$$\mathbb{E}S(t) = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[S(t) \,|\, N(t)]\right] = \mathbb{E}[N(t)\, \mathbb{E}X_1] = \mathbb{E}X_1 \mathbb{E}N(t). \tag{2.1}$$

Pretpostavimo dodatno da je $\operatorname{Var} W_1 < \infty$ i $\operatorname{Var} X_1 < \infty$. Da bismo izračunali $\operatorname{Var} S(t)$, koristimo poznatu formulu za varijancu:

$$\operatorname{Var} S(t) = \mathbb{E}[\operatorname{Var}[S(t) \,|\, N(t)]] + \operatorname{Var}[\mathbb{E}[S(t) \,|\, N(t)]] \tag{2.2}$$

Zbog nezavisnosti niza isplata i međudolaznih vremena, vrijedi

$$\operatorname{Var}[S(t) \,|\, N(t) = n] = n \operatorname{Var} X_1 \ , \ \forall n \in \mathbb{N}_0,$$

iz čega slijedi da je
$$\operatorname{Var}[S(t) \mid N(t)] = N(t) \operatorname{Var} X_1.$$
Primjenom formule (2.2) dobivamo
$$\operatorname{Var} S(t) = \mathbb{E}N(t) \operatorname{Var} X_1 + \operatorname{Var} N(t)(\mathbb{E}X_1)^2. \tag{2.3}$$

Sljedeća propozicija govori o asimptotskom ponašanju očekivanja i varijance procesa ukupnih šteta. Obje tvrdnje slijede direktno iz relacija (2.1) i (2.3) te odgovarajućih asimptotskih rezultata za brojeći proces (Teorem 1.1.8. i Propozicija 1.1.10).

Propozicija 2.1.2. *(1) Ako je* $\mathbb{E}W_1 < \infty$ *i* $\mathbb{E}X_1 < \infty$, *tada je*
$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}S(t)}{t} = \frac{\mathbb{E}X_1}{\mathbb{E}W_1}.$$
(2) Ako je $\operatorname{Var} W_1 < \infty$ *i* $\operatorname{Var} X_1 < \infty$, *tada je*
$$\lim_{t\to\infty} \frac{\operatorname{Var} S(t)}{t} = \frac{\operatorname{Var} X_1}{\mathbb{E}W_1} + \frac{\operatorname{Var} W_1}{(\mathbb{E}W_1)^3}(\mathbb{E}X_1)^2.$$

Teorem 2.1.3. *(jaki zakon velikih brojeva za proces ukupnih šteta) Ako je* $\mathbb{E}W_1 < \infty$ *i* $\mathbb{E}X_1 < \infty$, *tada vrijedi*
$$\lim_{t\to\infty} \frac{S(t)}{t} = \frac{\mathbb{E}X_1}{\mathbb{E}W_1} \quad \textit{(g.s.)}.$$

Dokaz. Po jakom zakonu velikih brojeva vrijedi
$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} = \mathbb{E}X_1 \quad \text{(g.s.)}.$$
Budući da je po Lemi 1.1.6 $\lim_{t\to\infty} N(t) = \infty$ (g.s.), slijedi
$$\lim_{t\to\infty} \frac{S(t)}{N(t)} = \mathbb{E}X_1 \quad \text{(g.s.)}.$$
Nadalje, po jakom zakonu velikih brojeva za brojeći proces 1.1.7 vrijedi
$$\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{\mathbb{E}W_1} \quad \text{(g.s.)}.$$
Konačno, uočimo da je
$$\frac{S(t)}{t} = \frac{S(t)}{N(t)} \frac{N(t)}{t}.$$
Tvrdnja teorema slijedi iz činjenice da je presjek konačno mnogo događaja vjerojatnosti 1 ponovno događaj vjerojatnosti 1.

∎

Ponekad nam je od interesa znati distribuciju isplaćenih šteta. Označimo li sa F funkciju distribucije od X_1, distribucija od $S(t)$ dana je sa

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S(t) \le x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S(t) \le x \,|\, N(t) = n)\mathbb{P}(N(t) = n)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k \le x\right)\mathbb{P}(N(t) = n) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}(x)\mathbb{P}(N(t) = n),\end{aligned}$$

gdje je F^{*n} funkcija distribucije od $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Iz navedene formule vidljivo je da distribucija od $S(t)$ ima vrlo kompliciranu strukturu. Kako bismo ju odredili, potrebno je odrediti distribuciju od $N(t)$ i distribuciju svih parcijalnih suma S_n, što općenito nije lagan zadatak. U primjenama se vrlo često koriste numeričke metode ili Monte Carlo simulacije pomoću kojih je moguće efikasno i jednostavno aproksimirati distribuciju isplaćenih šteta. Također, distribuciju je moguće aproksimirati pomoću centralnog graničnog teorema.

Teorem 2.1.4. *(centralni granični teorem za proces ukupnih šteta) Pretpostavimo da je* $\mu_W := \mathbb{E}W_1$, $\sigma_W^2 := \operatorname{Var} W_1 < \infty$, $\mu_X := \mathbb{E}X_1$, $\sigma_X^2 := \operatorname{Var} X_1 < \infty$. *Tada*

$$\frac{S(t) - \dfrac{\mu_X}{\mu_W}t}{\sqrt{\dfrac{t}{\mu_W}\left(\sigma_X^2 + \left(\dfrac{\mu_X \sigma_W}{\mu_W}\right)^2\right)}} \xrightarrow{D} N(0,1)\ , \quad t \to \infty. \tag{2.4}$$

Dokaz. Dokaz je vrlo sličan dokazu centralnog graničnog teorema za brojeći proces te ćemo iz tog razloga neke tehničke detalje izostaviti.
Zbog $t \le T_{N(t)}$ vrijedi

$$S(t) - \frac{\mu_X}{\mu_W}t \le S(t) - \frac{\mu_X}{\mu_W}T_{N(t)} = \sum_{i=1}^{N(t)}\left(X_i - \frac{\mu_X}{\mu_W}W_{i-i}\right) =: A(t).$$

Budući da su nizovi $(X_n : n \ge 1)$ i $(W_n : n \ge 0)$ nezavisni i jednako distribuirani te su oba niza nezavisna jedan od drugog, niz $(Z_n : n \ge 1)$ definiran sa

$$Z_n := X_n - \frac{\mu_X}{\mu_W}W_{n-1}\ , \quad n \ge 1$$

je također niz nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli. Nadalje,

$$\mathbb{E}Z_n = 0\ , \quad \sigma^2 := \operatorname{Var} Z_n = \sigma_X^2 + \left(\frac{\mu_X}{\mu_W}\sigma_W\right)^2\ , \quad \forall n \ge 1.$$

Budući da po jakom zakonu velikih brojeva za brojeći proces

$$\frac{N(t)}{t} \xrightarrow{\mathbb{P}} \frac{1}{\mu_W}\,, \quad t \to \infty,$$

po Anscombeovom centralnom graničnom teoremu 5.1.5 tada vrijedi

$$\frac{A(t)}{\sigma\sqrt{\frac{t}{\mu_W}}} \xrightarrow{D} N(0,1)\,, \quad t \to \infty.$$

S druge strane, zbog $t \leq T_{N(t)+1}$ vrijedi

$$S(t) - \frac{\mu_X}{\mu_W}t \geq S(t) - \frac{\mu_X}{\mu_W}T_{N(t)+1} = \sum_{i=1}^{N(t)}\left(X_i - \frac{\mu_X}{\mu_W}W_i\right) - \frac{\mu_X}{\mu_W}W_0 =: B(t).$$

Budući da

$$\frac{W_0}{\sigma\sqrt{\frac{t}{\mu_W}}} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0\,, \quad t \to \infty,$$

istim razmatranjem kao i gore te primjenom Slutskyjevog teorema 5.1.3 dobivamo

$$\frac{B(t)}{\sigma\sqrt{\frac{t}{\mu_W}}} \xrightarrow{D} N(0,1)\,, \quad t \to \infty.$$

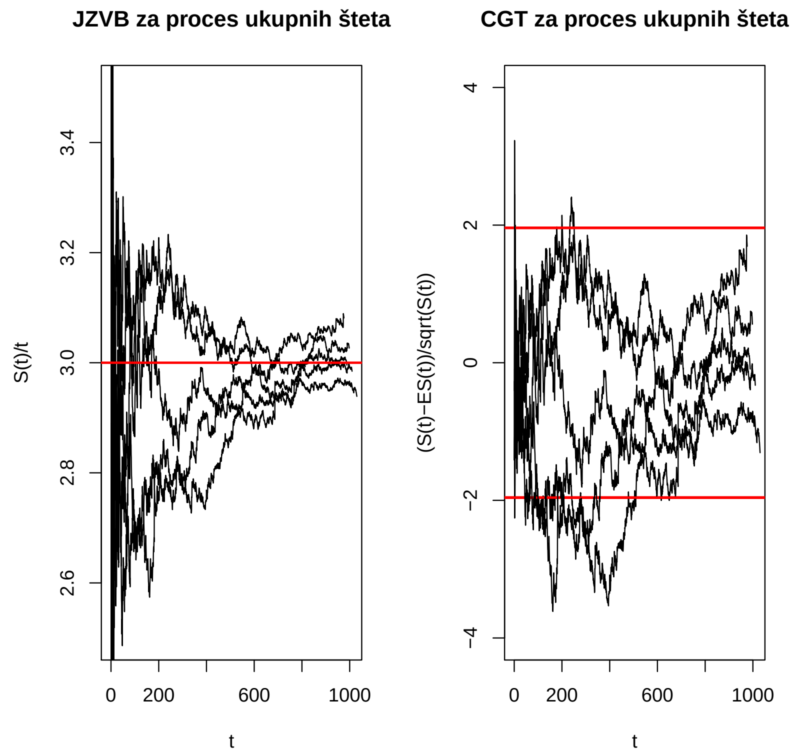
Tvrdnja teorema sada slijedi iz navedenih razmatranja i po teoremu o sendviču. □

2.2 Složeni Poissonov proces

Neka je $N = (N(t) : t \geq 0)$ homogeni Poissonov proces i neka je $(X_n : n \geq 1)$ niz nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli s funkcijom distribucije F, nezavisan od procesa N. Proces ukupnih šteta $(S(t) : t \geq 0)$, $S(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} X_k$ zovemo *složeni Poissonov proces*.

Odredimo funkciju distribucije slučajne varijable $S(t)$. Kao što je već ranije napomenuto, distribucija ima vrlo kompliciranu strukturu te će dobiveni rezultati više služiti u daljnjim teorijskim razmatranjima, nego u primjenama. Najprije računamo

$$F_{S(t)}(0) = \mathbb{P}(S(t) = 0) = \mathbb{P}(N(t) = 0) = e^{-\lambda t}.$$



Slika 2.2: Ilustracija jakog zakona velikih brojeva i centralnog graničnog teorema za proces ukupnih šteta u slučaju kada međudolazna vremena prate eksponencijalnu distribuciju s parametrom $\lambda = 1/2$, a isplate imaju Paretovu distribuciju s funkcijom gustoće $f(x) = 3x^{-4} \cdot \mathbb{1}_{[1,\infty)}(x)$. Prikazane su trajektorije 5 simuliranih procesa.

Iskoristimo li ista razmatranja kao i u prethodnom poglavlju, za $x > 0$ imamo

$$F_{S(t)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}(x)\mathbb{P}(N(t) = n) = e^{-\lambda t} + \sum_{n=1}^{\infty} F^{*n}(x)\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}.$$

Funkciju distribucije možemo zapisat u sljedećem obliku:

$$F_{S(t)}(x) = e^{-\lambda t}\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x) + e^{-\lambda t}\sum_{n=1}^{\infty} F^{*n}(x)\frac{(\lambda t)^n}{n!}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x).$$

Pretpostavimo da je svaka od slučajnih varijabli $(X_n : n \geq 1)$ neprekidna s gustoćom f.

Pokažimo da tada $S(t)$ ima gustoću na $(0, \infty)$ danu formulom

$$f_{S(t)}(x) = e^{-\lambda t} \sum_{n=1}^{\infty} f^{*n}(x) \frac{(\lambda t)^n}{n!}. \tag{2.5}$$

Budući da funkcija $x \mapsto f^{*n}(x)$ nenegativna, za svaki $n \in \mathbb{N}$, po Lebesgueovom teoremu o monotonoj konvergenciji vrijedi

$$\begin{aligned}\int_0^x e^{-\lambda t} \sum_{n=1}^{\infty} f^{*n}(y) \frac{(\lambda t)^n}{n!} dy = e^{-\lambda t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \int_0^x f^{*n}(y) dy = e^{-\lambda t} \sum_{n=1}^{\infty} F^{*n}(x) \frac{(\lambda t)^n}{n!} \\ \overset{(2.4)}{=} F_{S(t)}(x) - F_{S(t)}(0) = \mathbb{P}(0 < S(t) \leq x),\end{aligned}$$

što pokazuje tvrdnju.

Distribuciju složenog Poissonovog procesa možemo promatrati u terminima karakteristične funkcije. Za fiksni $t \geq 0$ računamo

$$\begin{aligned}\phi_{S(t)}(s) &= \mathbb{E}\left[e^{isS(t)}\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[e^{isS(t)} \mid N(t)\right]\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[\exp\left\{is \sum_{k=1}^{n} X_k\right\}\right] \mathbb{P}(N(t) = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\mathbb{E}\left[e^{isX_1}\right]\right)^n \mathbb{P}(N(t) = n) = \sum_{n=0}^{\infty} [\phi_X(s)]^n \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \\ &= \exp\{-\lambda t(1 - \phi_X(s))\}, \quad \forall s \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Time smo pokazali da je karakteristična funkcija od $S(t)$ dana sa

$$\phi_{S(t)}(s) = \exp\{-\lambda t(1 - \phi_X(s))\}, \quad \forall s \in \mathbb{R}. \tag{2.6}$$

Odredimo sada distribuciju od $S(s,t]$, $0 < s < t$.

$$\begin{aligned}\phi_{S(s,t]}(u) &= \mathbb{E}\left[e^{iuS(s,t]}\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\exp\left\{iu \sum_{i=N(s)+1}^{N(t)} X_i\right\} \mid N(s), N(t)\right]\right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}\left[\exp\left\{iu \sum_{i=k+1}^{n} X_i\right\} \mid N(s) = k, N(t) = n\right] \mathbb{P}(N(s) = k, N(t) = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}\left[\prod_{i=k+1}^{n} \exp\{iuX_i\}\right] \mathbb{P}(N(s) = k, N(s,t] = n - k) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} (\phi_{X_1}(u))^{n-k} \mathbb{P}(N(s) = k) \mathbb{P}(N(s,t] = n - k)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} (\phi_{X_1}(u))^{n-k} \frac{(\lambda s)^k}{k!} e^{-\lambda s} \frac{(\lambda(t-s))^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\lambda(t-s)} \\
&= e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\lambda s)^k \left(\lambda(t-s)\phi_{X_1}(u)\right)^{n-k} \\
&= e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\lambda s + \lambda(t-s)\phi_{X_1}(u)\right)^n \\
&= \exp\{-\lambda t\} \exp\{\lambda s + \lambda(t-s)\phi_{X_1}(u)\} \\
&= \exp\{-\lambda(t-s)\left(1 - \phi_{X_1}(u)\right)\} \overset{(2.6)}{=} \phi_{S(t-s)}(u)\ , \quad \forall u \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Budući da je

$$
\phi_{S(s,t]}(u) = \phi_{S(t-s)}(u)\ , \quad \forall u \in \mathbb{R}, \tag{2.7}
$$

po teoremu jedinstvenosti za karakteristične funkcije slijedi da je $S(s,t] \overset{D}{=} S(t-s)$.

Složeni Poissonov proces nasljeđuje svojstva homogenog Poissonovog procesa:

(1) stacionarnost prirasta

Dokaz. Tvrdnja slijedi direktno iz relacije (2.7). □

(2) nezavisnost prirasta

Dokaz. Kao i u slučaju homogenog Poissonovog procesa, radi jednostavnosti zapisa pokazat ćemo tvrdnju u slučaju kada je $n = 2$. Neka su $0 < s < t$ proizvoljni. Pokazat ćemo da vrijedi

$$
\phi_{S(s),S(s,t]}(u_1, u_2) = \phi_{S(s)}(u_1)\phi_{S(s,t]}(u_2) \quad \forall u_1, u_2 \in \mathbb{R}.
$$

Postupamo slično kao i prilikom određivanja distribucije od $S(s,t]$. Računamo

$$
\begin{aligned}
\phi_{S(s),S(s,t]}(u_1, u_2) &= \mathbb{E}\left[e^{iu_1 S(s) + iu_2 S(s,t]}\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[e^{iu_1 S(s) + iu_2 S(s,t]} \;\middle|\; N(s), N(t)\right]\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}\left[\exp\left\{iu_1 \sum_{i=1}^{k} X_i\right\} \exp\left\{iu_2 \sum_{i=k+1}^{n} X_i\right\}\right] \mathbb{P}(N(s) = k)\mathbb{P}(N(s,t] = n-k) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} (\phi_{X_1}(u_1))^k (\phi_{X_1}(u_2))^{n-k} \frac{(\lambda s)^k}{k!} \frac{(\lambda(t-s))^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\lambda t} \\
&= e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\lambda s \phi_{X_1}(u_1)\right)^k \left(\lambda(t-s)\phi_{X_1}(u_2)\right)^{n-k}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\lambda s \phi_{X_1}(u_1) + \lambda(t-s)\phi_{X_1}(u_2)\right)^n \\
&= \exp\{-\lambda t\} \exp\{\lambda s \phi_{X_1}(u_2) + \lambda(t-s)\phi_{X_1}(u_2)\} \\
&= \exp\{-\lambda s\,(1 - \phi_{X_1}(u_1))\} \exp\{-\lambda(t-s)\,(1 - \phi_{X_1}(u_2))\} \\
&= \phi_{S(s)}(u_1)\phi_{S(t-s)}(u_2) \overset{(2.7)}{=} \phi_{S(s)}(u_1)\phi_{S(s,t]}(u_2)\,, \quad \forall u_1, u_2 \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

□

(3) stohastička neprekidnost

Dokaz. Neka je $\epsilon > 0$ proizvoljan.

$$
\lim_{h \downarrow 0} \mathbb{P}(|S(h)| > \epsilon) = 1 - \lim_{h \downarrow 0} F_{S(h)}(\epsilon) \overset{(2.4)}{=} \lim_{h \downarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} F^{*n}(\epsilon) \frac{(\lambda h)^n}{n!} e^{-\lambda h} = 0,
$$

gdje je u posljednjoj jednakosti iskorišten Lebesgueov teorem o dominiranoj konvergenciji. □

Poglavlje 3

Lévyjevi procesi

U ovom poglavlju napravit ćemo kratki izlet u posebnu klasu procesa koje nazivamo Lévyjevi procesi. Iako nisu usko vezani uz temu kojom se bavimo, njihova svojstva će nam biti bitna u nastavku rada. Od posebne važnosti nam je Kendallova jednakost koja će biti ključna u sljedećem poglavlju.

Poglavlje započinjemo definicijom Lévyjevog procesa.

Definicija 3.0.1. *Lévyjev proces je slučajni proces $X = (X(t) : t \geq 0)$ koji zadovoljava sljedeća svojstva:*

(1) proces starta u nuli: $X(0) = 0$ (g.s.),

(2) proces ima nezavisne priraste: za svaki $n \geq 1$ i svaki izbor $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ slučajne varijable $X(t_{i-1}, t_i] := X(t_i) - X(t_{i-1})$, $i = 1, 2, \ldots, n$, su nezavisne,

(3) proces ima stacionarne priraste: za sve $0 \leq s < t$ i svaki $h > 0$ je $X(s, t] \overset{D}{=} X(s+h, t+h]$,

(4) proces je stohastički neprekidan: za svaki $\epsilon > 0$ vrijedi

$$\lim_{h \downarrow 0} \mathbb{P}(|S(h)| > \epsilon) = 0.$$

Najjednostavniji primjer Lévyjevog procesa je deterministička funkcija $f(t) = ct$, $t \geq 0$, za neku konstantu c. Homogeni Poissonov proces i složeni Poissonov proces također su Lévyjevi procesi te su njihova svojstva pokazana u Poglavljima 1.2 i 2.2.

Prilikom proučavanja Lévyjevih procesa ključnu ulogu imaju beskonačno djeljive slučajne varijable i Lévy-Hinčinova formula.

Definicija 3.0.2. *Za slučajnu varijablu X kažemo da je beskonačno djeljiva ako za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoje nezavisne i jednako distribuirane slučajne varijable X_{ni}, $i = 1, \ldots, n$ takve da je*

$$X \overset{D}{=} X_{n1} + \cdots + X_{nn}.$$

Lema 3.0.3. *Neka je $X = (X(t) : t \geq 0)$ Lévyjev proces. Za svaki $t \geq 0$ slučajna varijabla $X(t)$ je beskonačno djeljiva.*

Dokaz. Uočimo da za svaki $t \geq 0$ i svaki $n \geq \mathbb{N}$ vrijedi

$$X(t) = X(t/n) + X(t/n, t/n] + \cdots + X(t(n-1)/n, t].$$

Po definiciji Lévyjevog procesa slučajne varijable $X(t/n), X(t/n, 2t/n], \ldots, X(t(n-1)/n, t]$ nezavisne i jednako distribuirane. □

Lema 3.0.4. *Neka je $X = (X(t) : t \geq 0)$ Lévyjev proces. Za svaki $t \geq 0$ karakteristična funkcija od $X(t)$ je dana sa*

$$\mathbb{E}\left[e^{isX(t)}\right] = \left(\mathbb{E}\left[e^{isX(1)}\right]\right)^t, \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Dokaz. Tvrdnju leme najprije pokazujemo u slučaju kada je $t \geq 0$ racionalan broj. Neka su $m, n \in \mathbb{N}$ prozvoljni. Uočimo da je

$$X(m/n) = X(1/n) + X(1/n, 2/n] + \ldots + X((m-1)/n, m/n].$$

Budući da su po definiciji Lévyjevog procesa slučajne varijable $X(1/n), X(1/n, 2/n], \ldots, X((m-1)/n, m/n]$ nezavisne i jednako distribuirane, slijedi da je

$$\mathbb{E}\left[e^{isX(m/n)}\right] = \left(\mathbb{E}\left[e^{isX(1/n)}\right]\right)^m, \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Nadalje, $X(1) = X(1/n) + X(1/n, 2/n] + \ldots X((n-1)/n, 1]$ povlači

$$\mathbb{E}\left[e^{isX(1)}\right] = \left(\mathbb{E}\left[e^{isX(1/n)}\right]\right)^n, \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Stoga je

$$\mathbb{E}\left[e^{isX(m/n)}\right] = \left(\mathbb{E}\left[e^{isX(1)}\right]\right)^{m/n}, \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Neka je sada $t \geq 0$ iracionalan broj. Tada postoji padajući niz racionalnih brojeva (t_n) takav da $t_n \searrow t$. Zbog stacionarnosti prirasta i stohastičke neprekidnosti vrijedi

$$X(t_n) - X(t) = X(t, t_n] \stackrel{D}{=} X(t_n - t) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \quad n \to \infty,$$

a prema upravo pokazanoj tvrdnji i zbog nezavisnosti prirasti imamo

$$\left(\mathbb{E}\left[e^{isX(1)}\right]\right)^{t_n} = \mathbb{E}\left[e^{isX(t_n)}\right] = \mathbb{E}\left[e^{isX(t_n-t)}\right]\mathbb{E}\left[e^{isX(t)}\right], \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Pustimo li $n \to \infty$ u gornjoj jednakosti dobivamo

$$\mathbb{E}\left[e^{isX(t)}\right] = \left(\mathbb{E}\left[e^{isX(1)}\right]\right)^t, \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

□

Sada je na redu Lévy-Hinčinova formula za beskonačno djeljive slučajne varijable. Dokaz je poprilično složen i dugačak te ga iz tog razloga nećemo izložiti. Detalji se mogu pogledati u [7, Teorem 14.10, str.538].

Teorem 3.0.5. *(Lévy-Hinčinova reprezentacija karakteristične funkcije beskonačno djeljive slučajne varijable) Neka je X beskonačno djeljiva slučajna varijabla. Tada vrijedi*

$$\mathbb{E}\left[e^{isX}\right] = \exp\left\{isc - \sigma^2 \frac{s^2}{2} - \int_{\mathbb{R}} \left(1 - e^{isx} + isx\mathbb{1}_{\{|x|\leq 1\}}(x)\mu(dx)\right)\right\} \ , \quad \forall s \in \mathbb{R},$$

pri čemu su $c \in \mathbb{R}$ i $\sigma \geq 0$ konstante, a μ je mjera na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ koja zadovoljava uvjet

$$\mu(\{0\}) = 0 \ , \qquad \int_{\mathbb{R}} \min\{x^2, 1\}\mu(dx) < \infty. \tag{3.1}$$

Nadalje, trojka (c, σ, μ) je jedinstvena.

Definicija 3.0.6. *Mjeru μ na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ koja zadovoljava uvjet* (3.1) *zovemo Lévyjeva mjera.*

Za nas je posebno važna Lévy-Hinčinova formula za Lévyjeve procese koja je jednostavna posljedica gornjeg teorema i Lema 3.0.3. i 3.0.4.

Korolar 3.0.7. *(Lévy-Hinčinova reprezentacija karakteristične funkcije Lévyjevog procesa) Neka je $X = (X(t) : t \geq 0)$ Lévyjev proces. Tada postoje jedinstvene konstante $c \in \mathbb{R}$, $\sigma \geq 0$ i jedinstvena Lévyjeva mjera μ na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ tako da za svaki $t \geq 0$ vrijedi*

$$\mathbb{E}\left[e^{isX(t)}\right] = \exp\left\{t\left[isc - \sigma^2 \frac{s^2}{2} - \int_{\mathbb{R}} \left(1 - e^{isx} + isx\mathbb{1}_{\{|x|\leq 1\}}(x)\mu(dx)\right)\right]\right\} \ , \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Dokaz. Po Lemi 3.0.3. slučajna varijabla $X(1)$ je beskonačno djeljiva i primjenom Lévy - Hinčinove formule o reprezentaciji karkteristične funkcije beskonačne djeljive slučajne varijable dobivamo

$$\mathbb{E}\left[e^{isX(1)}\right] = \exp\left\{isc - \sigma^2 \frac{s^2}{2} - \int_{\mathbb{R}} \left(1 - e^{isx} + isx\mathbb{1}_{\{|x|\leq 1\}}(x)\mu(dx)\right)\right\} \ , \quad \forall s \in \mathbb{R},$$

Budući da po Lemi 3.0.4. za svaki $t \geq 0$ vrijedi

$$\mathbb{E}\left[e^{isX(t)}\right] = \left(\mathbb{E}\left[e^{isX(1)}\right]\right)^t \ , \quad \forall s \in \mathbb{R},$$

tvrdnja korolara slijedi iz navedenih jednakosti. □

Zbog važnosti navedenog korolara, uvodimo sljedeći pojam:

Definicija 3.0.8. *Trojku (c, σ, μ) iz Korolara 3.0.7. zovemo karakteristična trojka Lévyjevog procesa.*

Primjer 3.0.9. (karakteristična trojka složnog Poissonovog procesa)

U ovom primjeru odredit ćemo karakterističnu trojku iz Lévy-Hinčinove formule za složeni Poissonov proces. U Poglavlju 2.2 pokazano je da je karakteristične funkcija složenog Poissonovog procesa dana sa

$$\phi_{S(t)} = \exp\{-\lambda t (1 - \phi_X(s))\}, \quad \forall s \in \mathbb{R},$$

gdje je sa ϕ_X označena karakteristična funkcija slučajne varijable $X_1 (\stackrel{D}{=} X_n, \forall n \geq 2)$. Neka je $\mathbb{P}_X$ zakon razdiobe od X_1. Uočimo da karakterističnu funkciju složenog Poissonovog procesa možemo zapisati na sljedeći način

$$\begin{aligned}\phi_{S(t)} &= \exp\{-\lambda t (1 - \phi_X(s))\} = \exp\left\{-\lambda t\left(1 - \int_{\mathbb{R}} e^{isx}\, \mathbb{P}_X(dx)\right)\right\} \\ &= \exp\left\{t\left[is\lambda \int_{\{x:|x|\leq 1\}} x\, \mathbb{P}_X(dx) - \lambda \int_{\mathbb{R}} \left(1 - e^{isx} + isx\mathbb{1}_{\{|x|\leq 1\}}(x)\right) \mathbb{P}_X(dx)\right]\right\}, \quad \forall s \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Iz gornjeg zapisa lako čitamo da je $c = \lambda \int_{\{x:|x|\leq 1\}} x\, \mathbb{P}_X(dx)$, $\sigma = 0$, $\mu = \lambda \mathbb{P}_X$.

Definicija 3.0.10. *Neka je X Lévyjev proces i neka je μ Lévyjeva mjera pridružena tom procesu. Za Lévyjev proces kažemo da je:*

(i) spekralno pozitivan ako je $\mu((-\infty, 0)) = 0$,

(ii) spektralno negativan ako je $\mu((0, \infty)) = 0$.

Iz Primjera 3.0.9. zaključujemo da je složeni Poissonov proces sprektralno pozitivan Lévyjev proces. Prisjetimo li se da je trajektorija složenog Poissonovog procesa step-funkcija koja ima samo pozitivne skokove, možemo naslutiti da je spektralno pozitivan Lévyjev proces onaj proces koji ima samo pozitivne skokove. Analogno, spektralno negativan Lévyjev proces je onaj proces koji ima skokove samo u negativnom smjeru.

Na kraju navodimo Kendallovu jednakost za spektralno negativne Lévyjeve procesea. Slična tvrdnja vrijedi i za sprektralno pozitivne. Dokaz je moguće pronaći u [1].

Teorem 3.0.11. *(Kendallova jednakost) Neka je $X = (X(t) : t \geq 0)$ spektralno negativan Lévyjev proces. Za $x > 0$ neka je*

$$\tau(x) := \inf\{t > 0 : X(t) \geq x\}$$

prvo vrijeme kada proces X prijeđe donju ogradu x, uz konvenciju $\inf \emptyset = \infty$. *Tada za sve* $y, s > 0$ *vrijedi*

$$\int_y^\infty \mathbb{P}(\tau(x) \leq s)\frac{dx}{x} = \int_s^\infty \mathbb{P}(X(t) > y)\frac{dt}{t}.$$

Dodatno, ako $X(t)$ *ima gustoću* $f_{X(t)}$ *, onda* $\tau(x)$ *ima gustoću* $f_{\tau(x)}$ *danu formulom*

$$f_{\tau(x)}(t) = \frac{x}{t} f_{X(t)}(x).$$

Poglavlje 4

Teorija nesolventnosti

Nakon što smo u Poglavlju 2 detaljno proučili procese ukupnih šteta pomoću kojih možemo modelirati trošak osiguravajućeg društva, u ovom poglavlju ćemo promatrati proces koji uključuje još jednu vrlo važno komponentu, a to je zarada osiguravajućeg društva. Zaradu predstavljaju premije koje klijenti uplaćuju osiguravajućem društvu. Radi jednostavnosti, pretpostavljat ćemo da zarada raste linearno u vremenu. U točki 4.1 definirat ćemo proces rizika koji obuhvaća navedene komponente i pretpostavke te ćemo uvesti još neke pojmove koji igraju važnu ulogu u teoriji rizika. Najvažniji od njih svakako je vrijeme propasti koje predstavlja prvi trenutak kada uplaćene premije ne mogu pokriti iznos isplaćenih šteta. U točki 4.2 odredit ćemo distribuciju vremena propasti u slučaju kada isplate prate eksponencijalnu distribuciju, a u točki 4.3 objasnit ćemo kako u općem slučaju na jednostavan način distribuciju možemo aproksimirati primjenom Monte Carlo simulacija.

4.1 Vrijeme propasti

Tokom cijelog poglavlja promatramo proces ukupnih šteta

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i \ , \ t \geq 0,$$

pri čemu je $N(t)$ brojeći proces zadan nizom međudolaznih vremena $(W_n : n \geq 0)$ te je taj niz nezavisan od niza isplata $(X_n : n \geq 1)$. Kao i prije, označimo sa

$$T_0 = 0, \quad T_n = W_0 + W_1 + \cdots + W_{n-1}, \ n \geq 1.$$

niz dolaznih vremena. Radi jednostavnosti, u ovoj točki pretpostavljamo da je $W_0 \stackrel{D}{=} W_1$.

Dodatno, pretpostavljamo da se premije naplaćuju po konstantnoj stopi $c > 0$ tako da je iznos uplaćenih premija do trenutka t

$$p(t) = ct,$$

te neka je $u \geq 0$ početni kapital.

Definicija 4.1.1. *Slučajni proces proces $U = (U(t) : t \geq 0)$ definiran s*

$$U(t) := u + ct - S(t)\ ,\ t \geq 0.$$

zovemo proces rizika ili Sparre-Andersenov model.

Uočimo da proces U predstavlja tok novca u portfelju kroz vrijeme. Pitanje koje se prirodno postavlja je hoće li u nekom trenutku ostvarene štete biti veće od uplaćenih premija. Uvodimo sljedeće pojmove:

Definicija 4.1.2. *(propast, vrijeme propasti i vjerojatnost propasti)*
Događaj da proces U padne ispod vrijednosti 0 *nazivamo propast:*

$$\text{Propast} := \{U(t) < 0 \text{ za neki } t > 0\}.$$

Vrijeme propasti je prvi trenutak u kojem proces U padne ispod vrijednosti 0:

$$\tau := \inf\{t > 0 : U(t) < 0\}.$$

Vjerojatnost propasti definiramo sa

$$\psi(u) := \mathbb{P}(\text{Propast} \,|\, U(0) = u) = \mathbb{P}(\tau < \infty \,|\, U(0) = u), \quad u > 0.$$

Vjerojatnost da se propast dogodi do trenutka $t > 0$ definiramo sa

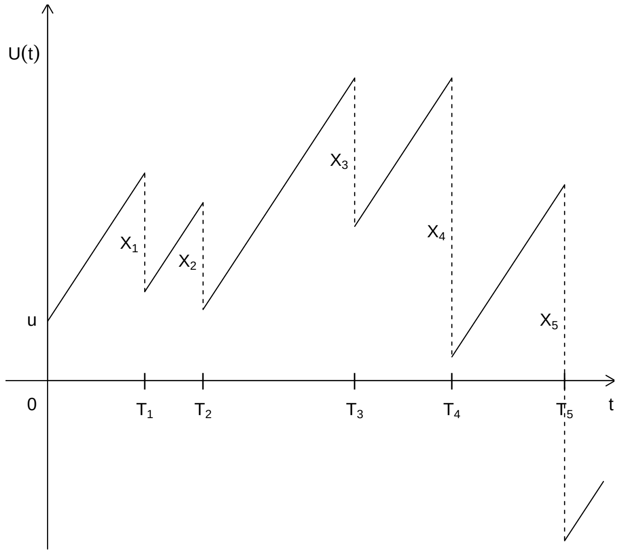
$$\psi(u, t) := \mathbb{P}(\tau \leq t \,|\, U(0) = u), \quad u > 0.$$

Uočimo da je

$$\text{Propast} = \{\tau < \infty\} = \left\{\inf_{t \geq 0} U(t) < 0\right\}.$$

Iz definicije je jasno da $\psi(u, t) \nearrow \psi(u)$, za $t \to \infty$. Uočimo da τ nije nužno realna slučajna varijabla. U ovisnosti o distribuciji međudolaznih vremena i isplata, τ može poprimiti vrijednost ∞ s pozitivnom vjerojatnosti. Stoga τ promatramo kao proširenu slučajnu varijablu.

Po konstrukciji procesa rizika U, propast se može dogoditi jedino u trenucima $t = T_n$, za neki $n \geq 1$, jer U linearno raste na intervalu $[T_n, T_{n+1})$. Stoga promatramo proces



Slika 4.1: Grafički prikaz puta procesa U. Propast se dogodila u trenutku pete isplate.

$\tilde{U} = (U(T_n) : n \geq 1)$ kojeg nazivamo kostur procesa U. Koristeći proces $\tilde{U}$, možemo izraziti propast u terminima međudolaznih vremena (W_n), iznosima isplate (X_n) i iznosu premije c:

$$\text{Propast} = \left\{\inf_{t>0} U(t) < 0\right\} = \left\{\inf_{n\geq 1} U(T_n) < 0\right\} = \left\{\inf_{n\geq 1}\left[u + cT_n - \sum_{i=1}^{n} X_i\right] < 0\right\},$$

pri čemu smo koristili da je $N(T_n) = n$. Stavimo

$$Z_n = X_n - cW_{n-1}, \quad n \geq 1,$$
$$S_0 = 0, \quad S_n = Z_1 + \cdots + Z_n, \quad n \geq 1.$$

Budući da su (W_n) i (X_n) nizovi nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli te su oba nezavisna jedan od drugog, proces (S_n) je slučajna šetnja. Stoga je

$$\text{Propast} = \left\{\inf_{n\geq 1}\left[u + c\sum_{i=1}^{n} W_i - \sum_{i=1}^{n} X_i\right] < 0\right\} = \left\{\inf_{n\geq 1}\left[u - \sum_{i=1}^{n}(X_i - cW_{i-1})\right] < 0\right\} =$$
$$= \left\{\inf_{n\geq 1}(u - S_n) < 0\right\} = \left\{\inf_{n\geq 1}(-S_n) < -u\right\} = \left\{\sup_{n\geq 1} S_n > u\right\}.$$

Vjerojatnost propasti možemo zapisati $\psi(u) = \mathbb{P}\left(\sup_{n\geq 1} S_n > u\right)$. Sljedeća propozicija nam govori uz koje uvjete će se propast sigurno dogoditi.

Propozicija 4.1.3. *Pretpostavimo da je* $\mathbb{E}W_1 < \infty$*,* $\mathbb{E}X_1 < \infty$*.*

(a) Ako je
$$EZ_1 = \mathbb{E}X_1 - c\mathbb{E}W_1 \geq 0, \tag{4.1}$$
tada je $\mathbb{P}(\tau < \infty \,|\, U(0) = u) = 1$*, za svaki* $u > 0$*.*

(b) Ako je
$$EZ_1 = \mathbb{E}X_1 - c\mathbb{E}W_1 < 0, \tag{4.2}$$
tada je $\mathbb{P}(\tau < \infty \,|\, U(0) = u) < 1$*, za svaki* $u > 0$*.*

Dokaz. (a) Ako je $\mathbb{E}Z_1 > 0$, po Propoziciji 5.2.9 je $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$ (g.s.). Stoga je $\sup_{n\geq 1} S_n = +\infty$ (g.s.) iz čega proizlazi $\mathbb{P}\left(\sup_{n\geq 1} S_n > u\right) = 1$, za svaki $u > 0$.

Ako je $\mathbb{E}Z_1 = 0$, po Propoziciji 5.2.9 je
$$-\infty = \liminf_{n\to\infty} S_n < \limsup_{n\to\infty} S_n = +\infty \quad \text{(g.s.)}.$$
Zbog toga za (gotovo) svaki ω postoji podniz $n_k(\omega)$ takav da $S_{n_k}(\omega) \to +\infty$, za $k \to +\infty$. Stoga je
$$+\infty = \sup_{k\geq 1} S_{n_k}(\omega) \leq \sup_{n\geq 1} S_n(\omega) \leq +\infty.$$
Dakle, $\sup_{n\geq 1} S_n = +\infty$ (g.s.), iz čega slijedi $\mathbb{P}\left(\sup_{n\geq 1} S_n > u\right) = 1$, za svaki $u > 0$.

(b) Pretpostavimo da je $\mathbb{E}Z_1 < 0$. Po Propoziciji 5.2.9 je $\lim_{n\to\infty} S_n = -\infty$ (g.s.). Pretpostavimo da za neki $u > 0$ vrijedi $\mathbb{P}\left(\sup_{n\geq 1} S_n > u\right) = 1$. Tada je i $\mathbb{P}\left(\sup_{n\geq 1} S_n > 0\right) = 1$. Označimo sa $N = \inf\{k \geq 1 : S_k > 0\}$. Zbog $\sup_{n\geq 1} S_n > 0$ (g.s.) je i $N < \infty$ (g.s.) i Propozicija 5.2.7 povlači da je $\limsup_{n\to\infty} S_n = +\infty$ (g.s.). Kontradikcija. Dakle, $\mathbb{P}\left(\sup_{n\geq 1} S_n > u\right) < 1$, za svaki $u > 0$. □

Tvrdnja gornje propozicije u skladu je s našom intuicijom da će osiguravajuće društvo propasti ako klijenti dolaze često i ukoliko su isplate velike. Zaista, ako je očekivani dobitak osiguravajućeg društva u periodu između dvije isplate ($c\mathbb{E}W_1$) manji ili jednak od očekivanog iznosa isplate ($\mathbb{E}X_1$), propast je neizbježna. Posebno je zanimljiva činjenica da u slučaju kada je ispunjen uvjet (4.1) vjerojatnost propasti ne ovisi o iznosu početnog kapitala u.

Iz Propozicije 4.1.3. jasno je koji uvjet treba biti zadovoljen kako bi se izbjegnula sigurna propast. U skladu s tim, uvodimo sljedeći pojam:

Definicija 4.1.4. *Kažemo da proces rizika zadovoljava uvjet čistog profita (engl. net profit condititon - NPC) ako je*

$$\mathbb{E}Z_1 = \mathbb{E}X_1 - c\mathbb{E}W_1 < 0\ .$$

Uz pretpostavku da je zadovoljen uvjet čistog profita, možemo pisati

$$c = (1+\rho)\frac{\mathbb{E}X_1}{\mathbb{E}W_1},$$

za neki $\rho > 0$ koji nazivamo *dodatak za sigurnost*. Istaknimo još da u slučaju kada je ispunjen uvjet (4.2) je $\mathbb{P}(\tau < \infty) < 1$, no to ne znači da je propast izbjegnuta. Uvjet (4.2) nam osigurava jedino da se s nekom (malom) vjerojatnošču možemo nadati da se propast neće dogoditi. Također, uočimo da nam uvjet (4.2) ne daje informaciju kada će se propast dogoditi što je zasigurno vrlo važno pitanje. O distribuciji vremena propasti u nekim posebnim slučajevima govorit ćemo u idućoj točki.

Primjer 4.1.5. (asimptotsko ponašanje procesa rizika)

U ovom primjeru objasnit ćemo važnost uvjeta čistog profita koristeći asimptotske rezultate navedene u prethodnim poglavljima. Najprije navodimo verziju jakog zakona velikih brojeva za proces rizika. Po jakom zakonu velikih brojeva za proces ukupnih šteta slijedi

$$\lim_{t\to\infty}\frac{U(t)}{t} = c - \lim_{t\to\infty}\frac{S(t)}{t} = c - \frac{\mathbb{E}X_1}{\mathbb{E}W_1} = \rho.$$

Isti rezultat vrijedi i za asimptotski prosječnu očekivanu vrijednost procesa rizika

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\mathbb{E}U(t)}{t} = c - \frac{\mathbb{E}X_1}{\mathbb{E}W_1} = \rho.$$

Dakle, ukoliko je zadovoljen uvjet čistog profita, očekivani iznos kojim raspolaže osiguravajuće društvo raste približno linearno, a zarada u jedinici vremena je približno jednaka ρ. Ukoliko nije zadovoljen uvjet čistog profita, očekivana vrijednost linearna pada što dovodi do propasti.

4.2 Distribucija vremena propasti s eksponencijalno distribuiranim isplatama

U ovoj točki izvodimo formulu za gustoću vremena propasti τ uz pretpostavku da isplate prate eksponencijalnu distribuciju. Preciznije, pretpostavljamo da isplate $(X_n : n \geq 1)$ imaju eksponencijalnu distribuciju s parametrom $\lambda > 0$, a međudolazna vremena W_0 i W_1 imaju gustoću f_0, odnosno f.

Teorem 4.2.1. *Vrijeme propasti* τ *ima (defektnu) gustoću* f_τ *na* $(0, \infty)$ *danu formulom*

$$f_\tau(t) = e^{-\lambda(u+ct)} \left\{ f_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n (u+ct)^{n-1} \left[u(f_0 * f^{*n})(t) + c(f_1 * f^{*n})(t) \right] \right\}, \tag{4.3}$$

pri čemu je $f_1(t) = t f_0(t)$*.*

Dokaz. (1) Formulu (4.3) najprije izvodimo uz pretpostavku $T_1 = W_0 = v \equiv \text{const}$. Definiramo proces $(U^0(t) : t > 0)$ s

$$U^0(t) := U(t) - ct = u - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, \quad t > 0.$$

Tada je

$$\tau = \inf\{t > 0 : U^0(t) < -ct\}.$$

Uočimo da je u koordinatama "vremena" i "prostora" (t, x) trajektorija procesa $(U^0(t))$ step-funkcija s početnom pozicijom u točki $(0, u)$ i sa skokovima u trenucima dolaznih vremena šteta $T_1 = v, T_2, T_3, \ldots$, a veličine tih skokova odgovaraju iznosu isplaćenih šteta $X_1, X_2, X_3 \ldots$ Vrijeme τ možemo shvatiti kao prvo vrijeme kada će proces $(U^0(t))$ prijeći donju linearnu granicu $x = -ct$. Na slici 4.2 prikazana je trajektorija procesa $(U(t))$ i procesa $(U^0(t))$ dobivenog navedenom transformacijom.

Uvodimo nove koordinate "vremena" i "prostora". Najprije ishodište $(0, 0)$ translatiramo u točku (v, u) te potom definiramo $s := u - x$, $y := t - v$. Uočimo da je takva transformacija zapravo translacija ishodišta $(0, 0)$ u točku (v, u) te potom rotacija koordinatnog sustava za 90° u smjeru kazaljke na satu. U sistemu novih koordinata proces starta iz pozicije $(0, 0)$, a trajektorija tog procesa je ponovno step-funkcija, pri čemu se skokovi događaju u trenucima X_1, $X_1 + X_2$, $X_1 + X_2 + X_3, \ldots$, a veličina tih skokova iznose W_1, W_2, W_3... Opisana zamjena varijabli prikazana je na slici 4.3.

Budući da je $(X_n : n \geq 1)$ niz nezvisnih slučajnih varijabli s eksponencijalnom distribucijom, proces

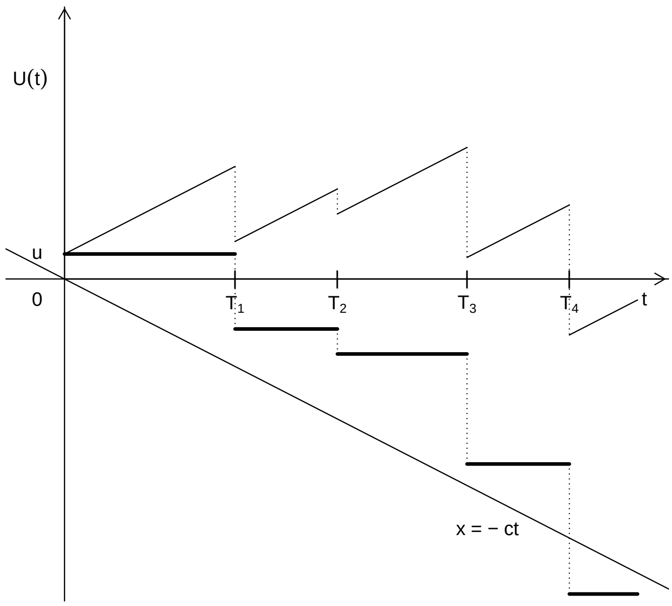
$$M(s) := \sup\{n \geq 1 : X_1 + \ldots + X_n \leq s\}, \; s > 0.$$

je homogeni Poissonov proces s intenzitetom λ. Promotrimo složeni Poissonov proces

$$Z^0(s) := \sum_{n=1}^{M(s)} W_i \;, \; s > 0$$

U Poglavlju 2.2 pokazano je da $Z^0(s)$ ima atom $e^{-\lambda s}$ u nuli i gustoću na $(0, \infty)$ danu formulom

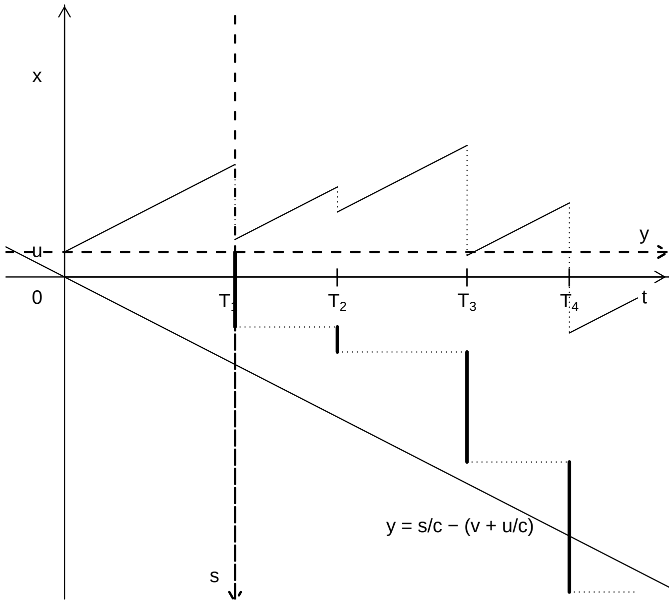
$$f_{Z^0(s)}(y) = e^{-\lambda s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda s)^n}{n!} f^{*n}(y), \quad y > 0.$$



Slika 4.2: Grafički prikaz puta procesa U (tanka linija) i procesa U^0. (debela linija). Propast se dogodila u trenutku četvrte isplate. Uočimo da je u tom trenutku proces U^0 prvi put prešao donju linearnu granicu $x = -ct$.

Po konstrukciji procesa $(U^0(t))$ i $(Z^0(s))$ slijedi da će proces $(U^0(t))$ prijeći donju linearnu ogradu $x = -ct$ u trenutku τ ako i samo ako će proces $(Z^0(s))$ prijeći donju linearnu ogradu $y = s/c - (v + u/c)$ u trenutku $\sigma = u + c\tau$. Zaista, ukoliko je proces $(U^0(t))$ prešao ogradu $x = -ct$ u trenutku τ, tada je, po definicije koordinata (s, y), proces $(Z^0(s))$ prešao granicu $s - u = -c(y + v)$, tj. $y = s/c - (v + u/c)$ u trenutku $\sigma - u = c\tau$, tj. $\sigma = u + c\tau$. Istim zaključivanjem dolazimo i do obratne tvrdnje.

Promotrimo sada proces $Z = (Z(s) : s > 0)$, $Z(s) := Z^0(s) - s/c$. Iskoristimo li gornja razmatranja, zaključujemo da je σ prvo vrijeme kada će proces Z prijeći donju granicu $y = -(v + u/c)$. Prema Primjeru 3.0.9. proces Z je skip-free Lévyjev proces u negativnom smjeru i primjenom Kendallove jednakosti 3.0.11 slijedi da σ ima gustoću f_σ



Slika 4.3: Grafički prikaz puta procesa U (tanka linija) i procesa Z^0 (debela linija) u sistemu novih koordinata. Uočimo da se u sistemu novih koordinata skokovi događaju u trenucima $X_1, X_1 + X_2, X_1 + X_2 + X_3, \ldots$, a veličina tih skokova iznose W_1, W_2, W_3...

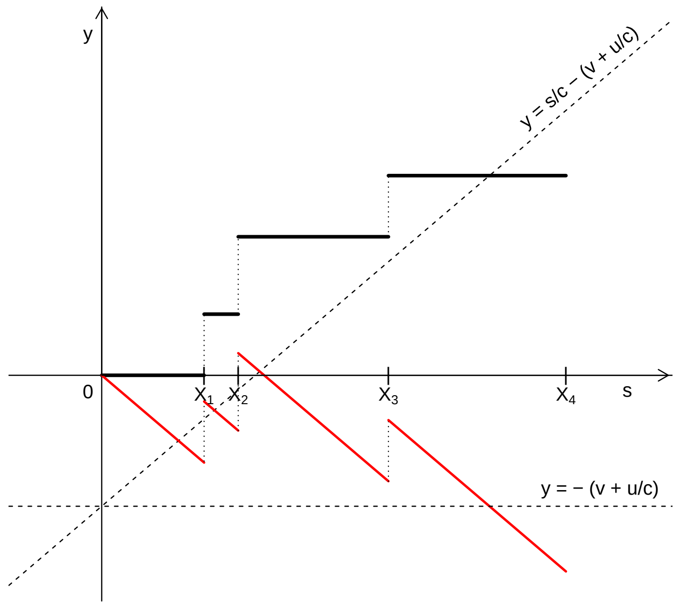
u točki $s > u + cv$ danu formulom

$$\begin{aligned} f_\sigma(s) &= \frac{v + u/c}{s} f_{Z(s)}\left(-v - \frac{u}{c}\right) = \frac{v + u/c}{s} f_{Z^0(s)}\left(\frac{s-u}{c} - v\right) \\ &= \frac{v + u/c}{s} e^{-\lambda s} \sum_{n=1}^{\infty} f^{*n}\left(-v + \frac{s-u}{c}\right) \frac{(\lambda s)^n}{n!}. \end{aligned}$$

Budući da je $\sigma = u + c\tau$, primjenom teorema o transformaciji gustoće slijedi da je uvjetna gustoća od τ uz dano $W_0 = v$ dana s

$$f_{\tau|W_0}(t|v) = c f_\sigma(u + ct) = \frac{u + cv}{u + ct} e^{-\lambda(u+ct)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda(u + ct))^n}{n!} f^{*n}(t - v), \quad t > v \tag{4.4}$$

(2) Primjenom formule potpune vjerojatnosti, pretpostavke da isplate prate eksponen-



Slika 4.4: Trajektorija procesa Z^0 (crna linija) i procesa Z (crvena linija). Uočimo da je prvi trenutak kada je proces Z^0 prešao donju linearnu granicu $y = s/c - (v + u/c)$ ujedno i prvi trenutak kada je proces Z prešao donju granicu $y = -(v + u/c)$.

cijalnu distribuciju i činjenice da je $\tau \geq W_0$ dobivamo

$$\begin{aligned} F_\tau(t) &= \mathbb{P}(\tau \leq t) = \mathbb{P}(W_0 = \tau \leq t) + \mathbb{P}(W_0 < \tau \leq t) \\ &= \mathbb{P}(u + cW_0 - X_1 < 0, W_0 \leq t) + \mathbb{P}(W_0 < \tau \leq t) \\ &= \int_0^t \mathbb{P}(u + cv < X_1 \,|\, W_0 = v) f_0(v)dv + \int_0^t \mathbb{P}(W_0 < \tau \leq t \,|\, W_0 = v) f_0(v)dv \\ &= \int_0^t e^{-\lambda(u+cv)} f_0(v)dv + \int_0^t \left(\int_v^t f_{\tau|W_0}(r|v)dr \right) f_0(v)dv. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Iskoristimo li formule (4.4) za uvjetnu gustoću $f_{\tau|W_0}$, slijedi da je funkcija distribucije od τ dana formulom

$$F_\tau(t) = \int_0^t e^{-\lambda(u+cv)} f_0(v)dv + \int_0^t \left(\int_v^t \frac{u + cr}{u + cr} e^{-\lambda(u+cr)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda(u + cr))^n}{n!} f^{*n}(r - v)dr \right) dv$$

Funkciju gustoće možemo dobiti deriviranjem izraza (4.5) po varijabli t. Iskoristimo li formulu za derivaciju funkcije definirane integralom dobivamo

$$\begin{aligned}
f_\tau(t) &= e^{-\lambda(u+ct)} f_0(t) + \int_0^t f_{\tau|W_0}(t|v) f_0(v)dv \\
&= e^{-\lambda(u+ct)} \left\{ f_0(t) + \frac{1}{u+ct} \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda(u+ct))^n}{n!} (u+cv) f^{*n}(t-v) f_0(v)dv \right\} \\
&= e^{-\lambda(u+ct)} \left\{ f_0(t) + \frac{1}{u+ct} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda(u+ct))^n}{n!} \int_0^t (u+cv) f^{*n}(t-v) f_0(v)dv \right\} \\
&= e^{-\lambda(u+ct)} \left\{ f_0(t) + \frac{1}{u+ct} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda(u+ct))^n}{n!} [u(f_0 * f^{*n})(t) + c(f_1 * f^{*n})(t)] \right\}, \qquad (4.6)
\end{aligned}$$

gdje je u trećoj jednakosti zamjena poretka suma i integrala opravdana jer integriramo nenegativnu funkciju. Konačno, uočimo da je dobiveni izraz (4.6) ekvivalentan izrazu (4.3) iz iskaza teorema i time je tvrdnja dokazana. □

Primjer 4.2.2. (međudolazna vremena imaju gamma distribuciju)
Pretpostavimo da $W_n \sim \Gamma(\alpha,\beta)$, $\alpha,\beta > 0$, za svaki $n \geq 0$, tj. W_n ima gustoću

$$f(t) = f_0(t) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\beta t} \cdot \mathbb{1}_{\langle 0,\infty\rangle}(t).$$

Tada je

$$f_1(t) = t f(t) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha} e^{-\beta t} \cdot \mathbb{1}_{\langle 0,\infty\rangle}(t).$$

Budući da slučajna varijabla $W_1 + \cdots + W_n$ ima $\Gamma(n\alpha,\beta)$ razdiobu s gustoćom f^{*n}, slijedi da je

$$f^{*n}(t) = \frac{\beta^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha)} t^{n\alpha-1} e^{-\beta t} \cdot \mathbb{1}_{\langle 0,\infty\rangle}(t).$$

Za $t > 0$ računanamo $f_1 * f^{*n}$:

$$\begin{aligned}
(f_1 * f^{*n})(t) &= \int_0^t f^{*n}(t-v) f_1(v)dv = \frac{\beta^{\alpha(n+1)}}{\Gamma(n\alpha)\Gamma(\alpha)} e^{-\beta t} \int_0^t (t-v)^{n\alpha-1} v^\alpha dv \\
&= \frac{\beta^{\alpha(n+1)}}{\Gamma(n\alpha)\Gamma(\alpha)} e^{-\beta t} t^{\alpha(n+1)-1} \int_0^t \left(1 - \frac{v}{t}\right)^{n\alpha-1} \left(\frac{v}{t}\right)^\alpha dv \\
&= \frac{\beta^{\alpha(n+1)}}{\Gamma(n\alpha)\Gamma(\alpha)} e^{-\beta t} t^{\alpha(n+1)} \int_0^1 (1-u)^{n\alpha-1} u^\alpha du
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\beta^{\alpha(n+1)}}{\Gamma(n\alpha)\Gamma(\alpha)} e^{-\beta t} t^{\alpha(n+1)} B(\alpha+1, n\alpha) \\
&= \frac{\beta^{\alpha(n+1)}}{\Gamma(n\alpha)\Gamma(\alpha)} e^{-\beta t} t^{\alpha(n+1)} \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n\alpha)}{\Gamma(\alpha(n+1)+1)} \\
&= \frac{\beta^{\alpha(n+1)}}{\Gamma(n\alpha)\Gamma(\alpha)} e^{-\beta t} t^{\alpha(n+1)} \frac{\alpha\Gamma(\alpha)\Gamma(n\alpha)}{\Gamma(\alpha(n+1)+1)} \\
&= \frac{\alpha}{\beta} \frac{\beta^{\alpha(n+1)+1}}{\Gamma(\alpha(n+1)+1)} t^{\alpha(n+1)} e^{-\beta t},
\end{aligned}
$$

pri čemu smo u petoj jednakosti iskoristili definiciju beta funkcije, u šestoj svojstvo beta funkcije $B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$ te u sedmoj svojstvo gamma funkcije $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$.

Primjenom formule (4.3) dobivamo

$$
\begin{aligned}
f_\tau(t) = e^{-\lambda(u+ct)-\beta t} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} &+ \frac{u}{u+ct} e^{-\lambda(u+ct)-\beta t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda(u+ct))^n}{n!} \frac{\beta^{(n+1)\alpha}}{\Gamma((n+1)\alpha)} t^{(n+1)\alpha-1} \\
&+ \frac{c}{u+ct} e^{-\lambda(u+ct)-\beta t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda(u+ct))^n}{n!} \frac{\alpha}{\beta} \frac{\beta^{\alpha(n+1)+1}}{\Gamma(\alpha(n+1)+1)} t^{\alpha(n+1)}.
\end{aligned}
$$

Gornji izraz je ekvivalentan s

$$
\begin{aligned}
f_\tau(t) = (\beta t)^{\alpha-1} &\frac{u\beta e^{-\lambda(u+ct)-\beta t}}{u+ct} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n (u+ct)^n}{n!} \frac{(\beta t)^{n\alpha}}{\Gamma(\alpha(n+1))} \\
&+ (\beta t)^\alpha \frac{c\alpha e^{-\lambda(u+ct)-\beta t}}{u+ct} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n (u+ct)^n}{n!} \frac{(\beta t)^{n\alpha}}{\Gamma(\alpha(n+1)+1)}.
\end{aligned} \tag{4.7}
$$

Dobivena formalna je nepraktična za računanje. U slučaju kada je $\alpha = m \in \mathbb{N}$, formulu (4.7) možemo zapisati u terminima generalizirane hipergeometrijske funkcije. Za $a > 0$ Pochhammerov simbol definira se s

$$
(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}.
$$

Za $p, q \in \mathbb{N}_0$ i pozitivne realne brojeve $B_1, \cdots B_p, C_1, \cdots, C_m$ generalizirana hipergeometrijska funkcija definira se sa

$$
{}_pF_q(B_1, \ldots, B_p, C_1, \ldots C_q; Z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(B_1)_m \cdots (B_p)_m}{(C_1)_m \cdots (C_q)_m} \frac{Z^n}{n!}.
$$

Ključna formula koju koristimo je Gaussova multiplikacijska formula

$$\Gamma(z)\prod_{k=1}^{n-1}\Gamma\left(z+\frac{k}{n}\right)=n^{\frac{1}{2}-nz}(2\pi)^{\frac{(n-1)}{2}}\;\Gamma(nz).$$

Primjenom Gaussove multiplikacijske formule na $\Gamma(m(n+1))$, dobivamo

$$\begin{aligned}
\Gamma(m(n+1)) &= m^{m(n+1)-\frac{1}{2}}\;(2\pi)^{-\frac{n-1}{2}}\prod_{k=0}^{n-1}\Gamma\left(m+1+\frac{k}{n}\right)\\
&= m^{m(n+1)-\frac{1}{2}}\;(2\pi)^{-\frac{m-1}{2}}\prod_{k=0}^{m-1}\frac{\Gamma\left(n+1+\frac{k}{m}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{k}{m}\right)}\Gamma\left(1+\frac{k}{m}\right)\\
&= m^{mn}\prod_{k=0}^{m-1}\left(1+\frac{k}{m}\right)_n\cdot m^{m-\frac{1}{2}}\;(2\pi)^{-\frac{m-1}{2}}\prod_{k=0}^{m-1}\Gamma\left(1+\frac{k}{m}\right)\\
&= m^{mn}\Gamma(m)\prod_{k=0}^{m-1}\left(1+\frac{k}{m}\right)_n .
\end{aligned}$$

Primjenom Gaussove multiplikacijske formule na $\Gamma(m(n+1)+1)$, istim računamo kao i gore dobivamo

$$\Gamma(m(n+1)+1)=m^{mn}\;\Gamma(m+1)\prod_{k=0}^{m-1}\left(1+\frac{k+1}{m}\right)_n .$$

Iskoristimo li izvedenu formulu za $\Gamma(m(n+1))$, dobivamo

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n(u+ct)^n}{n!}\frac{(\beta t)^{mn}}{\Gamma(m(n+1))} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(m(n+1))}\frac{(\lambda(u+ct)(\beta t)^m)^n}{n!}\\
&= \frac{1}{\Gamma(m)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1)_n\cdots\left(1+\frac{m-1}{m}\right)_n}\left(\frac{\lambda(u+ct)(\beta t)^m}{m^m}\right)^n\\
&= \frac{1}{\Gamma(m)}\;{}_0F_m\left(1,1+\frac{1}{m},\cdots,1+\frac{m-1}{m};\frac{\lambda(u+ct)(\beta t)^m}{m^m}\right).
\end{aligned}$$

Istim razmatranjem slijedi

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n(u+ct)^n}{n!}\frac{(\beta t)^{mn}}{\Gamma(m(n+1)+1)}\\
&\qquad= \frac{1}{m\Gamma(m)}\;{}_0F_m\left(1+\frac{1}{m},1+\frac{2}{m},\cdots,1+\frac{m}{m};\frac{\lambda(u+ct)(\beta t)^m}{m^m}\right).
\end{aligned}$$

Formula (4.7) se sada svodi na oblik

$$f_\tau(t) = \frac{\beta e^{-\lambda(u+ct)-\beta t}}{u+ct}\frac{(\beta t)^{m-1}}{\Gamma(m)}\Bigg[u\,{}_0F_m\left(1, 1+\frac{1}{m}, \cdots, 1+\frac{m-1}{m}; \frac{\lambda(u+ct)(\beta t)^m}{m^m}\right)$$
$$+ct\,{}_0F_m\left(1+\frac{1}{m}, 1+\frac{2}{m}, \cdots, 1+\frac{m}{m}; \frac{\lambda(u+ct)(\beta t)^m}{m^m}\right)\Bigg]. \quad (4.8)$$

Pretpostavimo da je $m = 2$. Prema (4.8) funkcija gustoće od τ je dana formulom

$$f_\tau(t) = \frac{\beta^2 t e^{-\lambda(u+ct)-\beta t}}{u+ct}\left[u\,{}_0F_2\left(1, \frac{3}{2}; \frac{\lambda(u+ct)(\beta t)^2}{4}\right) + ct\,{}_0F_2\left(\frac{3}{2}, 2; \frac{\lambda(u+ct)(\beta t)^2}{4}\right)\right]. \quad (4.9)$$

U sljedećoj tablici dane su vjerojatnosti propasti za različite vremenske trenutke t i različite vrijednosti početnog kapitala u u slučaju kada je $\lambda = 1$, $\beta = 2$, $c = 1.1$. Vrijednosti su dobivene numeričkom integracijom formule (4.9) u Matlabu.

t	$\psi(0,t)$	$\psi(10,t)$	$\psi(20,t)$
20	0.7973	0.0457	0.0009
40	0.8332	0.1008	0.0060
60	0.8481	0.1387	0.0138
80	0.8564	0.1651	0.0218
100	0.8618	0.1842	0.0292

4.3 Primjena Monte Carlo simulacija u procjeni distribucije vremena propasti

U ovoj točki objasnit ćemo kako na vrlo jednostavan i efikasan način možemo aproksimirati distribucija vremena propasti koristeći Monte Carlo simulacije.

Neka je F_W funkcija distribucije niza međudolaznih vremena šteta $(W_n : n \geq 0)$ te neka je F_X funkcija distribucije niza isplata $(X_n : n \geq 0)$. Najprije predlažemo algoritam za procjenu $\psi(u,t)$. Postupak je vrlo jednostavan. Proces U simuliramo do trenutka t. Rezultat simulacije je broj p koji poprima vrijednost 1 ako je $U(s) < 0$, za neki $s \leq t$ (tj. propast se dogodila do trenutka t), 0 inače. Opisani postupak ponovimo n puta. Na taj način dobivamo niz brojeva $p_1, \ldots, p_n$, pri čemu nam p_i govori je li se propast dogodila u i-toj simulaciji. Monte Carlo procjenitelj za $\psi(u,t)$ je

$$\hat{\psi}(u,t) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_i.$$

Kako bismo u i-toj simulaciji odredili p_i, možemo primijeniti sljedeći algoritam:

1. Simuliramo niz međudolaznih vremena $w_1, \cdots, w_n$ iz distibucije F_W.

2. Stavimo $t_k = w_1 + \cdots + w_k$, $k = 1, \ldots, n$.

3. Provjerimo je li $t_n > t$. U suprotnom, moramo produljiti niz međudolaznih vremena (jer u suprotnom nećemo moći odrediti je li se propast dogodila do trenutka t).

4. Simuliramo niz isplata $x_1, \cdots, x_n$ iz distibucije F_X.

5. Stavimo $u_k = u + ct_k - \sum_{j=1}^{k} x_j$, $k = 1, \ldots, n$.

6. Provjerimo je li $u_k < 0$, za neki $k = 1, \ldots, n$ takav da je $t_k < t$. Ako jest, propast se dogodila prije trenutka t i stavimo $p_i = 1$. U suprotnom, $p_i = 0$.

Ukoliko želimo procijeniti vjerojatnost propast $\psi(u)$, moramo simulirati dovoljno dugačak niz međudolaznih vremena, tj. t_n iz prethodnog algoritma mora biti dovoljno velik. Potom provjerimo je li $u_k < 0$, za neki $k = 1, \ldots, n$. Ako jest, stavimo $p_i = 1$, u suprotnom $p_i = 0$. Drugim riječima, $\hat{\psi}(u) = \hat{\psi}(u, t)$, za dovoljno veliki t. Ovakav postupak procjene opravda Primjer 4.1.5 prema kojem proces U raste približno linearno te možemo očekivati da će se propast dogoditi za relativno male vrijednosti od t.

Sljedeća tablica prikazuje vjerojatnost propasti za različite vremenske trenutke t u slučaju kada međudolazna vremena i islate prate eksponencijalnu s parametrom 1, vrijednost početnog kapitala je $u = 10$, a stopa premije je $c = 1.1$. Sa $\psi(10, t)$ označena je prava vjerojatnost propasti koja je dobivena numeričkom integracijom formule (4.8) ($\lambda = \beta = 1$, $m = 1$), a sa $\hat{\psi}(10, t)$ procijenjena vjerojatnost dobivena simulacijama. Broj replikacija je $n = 10\,000$. Uočimo da se stvarna i procijenjena vrijednost neznatno razlikuju, iako broj replikacija nije pretjerano velik.

t	$\psi(10, t)$	$\hat{\psi}(10, t)$
20	0.0822	0.0808
40	0.1573	0.1577
60	0.2050	0.2086
80	0.2373	0.2390
100	0.2605	0.2614
∞	0.3663	0.3702

Pomoću dobivenih vrijednosti također možemo konstruirati $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ pouzdani interval za $\psi(u, t)$. Po centralnom graničnom teoremu vrijedi

$$\frac{\hat{\psi}(u, t) - \psi(u, t)}{\sqrt{\hat{\psi}(u, t)(1 - \hat{\psi}(u, t))}} \sqrt{n} \xrightarrow{D} N(0, 1),$$

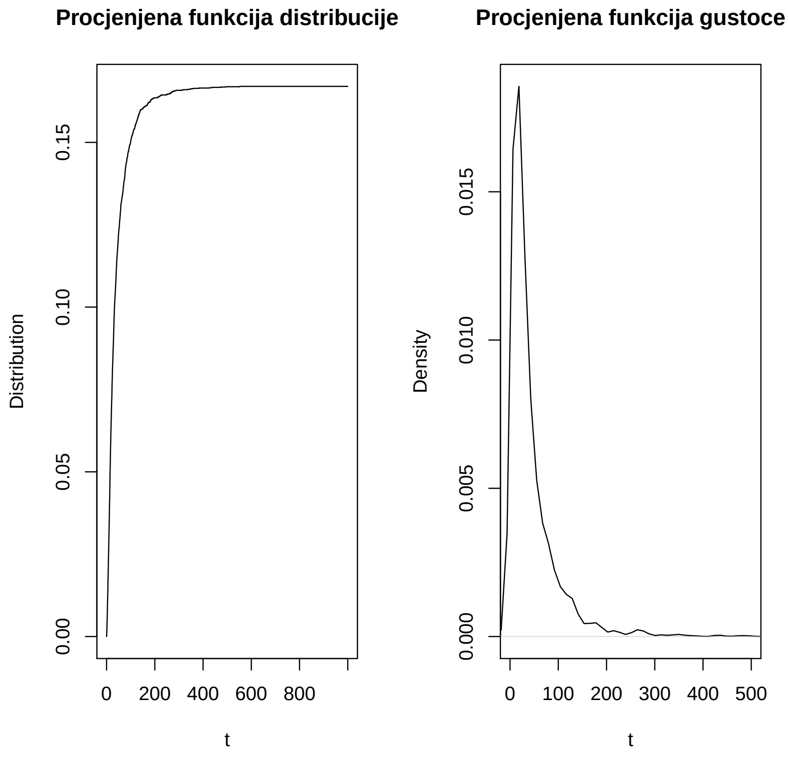
iz čega slijedi da je asimptotski $(1-\alpha)\cdot 100\%$ pouzdani interval za $\psi(u,t)$ dan formulom

$$\left[\hat{\psi}(u,t) - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{\psi}(u,t)(1-\hat{\psi}(u,t))}{n}}, \hat{\psi}(u,t) + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{\psi}(u,t)(1-\hat{\psi}(u,t))}{n}},\right],$$

pri čemu je $z_{\frac{\alpha}{2}}$ kvantil jedinične normalne razdiobe za koji vrijedi za koji vrijedi $\mathbb{P}\left(Z > z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = \frac{\alpha}{2}$.

U sljedećoj tablici dane su procjenjene vjerojatnosti propasti za različite vremenske trenutke t u slučaju kada međudolazna vremena imaju $\Gamma(2,3)$ distribuciju, a isplate prate Paretovu distribuciju s funkcijom gustoće $f(x) = 3x^{-4}\cdot \mathbb{1}_{[1,\infty\rangle}(x)$. Vrijednost početnog kapitala iznosi $u = 10$, a stopa premije iznosi $c = 2.5$. Na slici 4.5. prikazana je grafički procijenjena funkcija distribucije i funkcija gustoće.

t	$\hat{\psi}(10,t)$	95% p.i. za $\psi(10,t)$
20	0.0679	$\langle 0.0667, 0.0691\rangle$
40	0.1102	$\langle 0.1083, 0.1121\rangle$
60	0.1313	$\langle 0.1291, 0.1335\rangle$
80	0.1430	$\langle 0.1406, 0.1454\rangle$
100	0.1503	$\langle 0.1478, 0.1528\rangle$
∞	0.1671	$\langle 0.1644, 0.1698\rangle$



Slika 4.5: Grafični prikaz procijenjene funkcije distribucije i funkcije gustoće.

Poglavlje 5

Dodaci

5.1 Anscombeov centralni granični teorem

Naprije navodimo Lévyjev centralni granični teorem. Dokaz se može pronaći u [7, Teorem 14.1., str. 507].

Teorem 5.1.1. *(Lévyjev centralni granični teorem) Neka je* $(X_n : n \geq 1)$ *niz nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli s očekivanjem* μ *i varijancom* $0 < \sigma^2 < \infty$. *Tada vrijedi*

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{D} N(0,1), \quad n \to \infty.$$

Sljedeća tehnična propozicija važna nam je za Slutskyjev teorem. Detalji se mogu vidjeti u [7, Propozicija 10.21., str. 326].

Propozicija 5.1.2. *Neka je* $(X_n : n \geq 1)$ *niz slučajnih varijabli i* $c \in \mathbb{R}$. *Tada*

$$X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} c \iff X_n \xrightarrow{D} c.$$

Teorem 5.1.3. *(Slutskyjev teorem) Neka su* $(X_n : n \geq 1)$ *i* $(Y_n : n \geq 1)$ *nizovi slučajnih varijabli za koje vrijedi* $X_n \xrightarrow{D} X$ *i* $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} c \in \mathbb{R}$. *Tada vrijedi*

(i) $X_n + Y_n \xrightarrow{D} X + c$,

(ii) $X_n Y_n \xrightarrow{D} cX$.

Dokaz. (i) Pretpostavimo da je $c = 0$. U suprotnom, $X_n + Y_n = (X_n + c) + (Y_n - c)$, pa smo zbog $X_n + c \xrightarrow{D} X + c$ u slučaju koji dokazujemo. Neka je x točka neprekidnosti od F_X i

$\epsilon > 0$ takav da su $x \pm \epsilon$ točke neprekidnosti od F_X. Tada

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_n + Y_n \leq x) &= \mathbb{P}(X_n + Y_n \leq x, |Y_n| < \epsilon) + \mathbb{P}(X_n + Y_n \leq x, |Y_n| \geq \epsilon)\\ &\leq \mathbb{P}(X_n \leq x + \epsilon) + \mathbb{P}(|Y_n| \geq \epsilon).\end{aligned}$$

Također vrijedi

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_n \leq x - \epsilon) &= \mathbb{P}(X_n \leq x - \epsilon, |Y_n| < \epsilon) + \mathbb{P}(X_n \leq x - \epsilon, |Y_n| \geq \epsilon)\\ &\leq \mathbb{P}(X_n + Y_n \leq x) + \mathbb{P}(|Y_n| \geq \epsilon).\end{aligned}$$

Objedinimo li obje nejednakosti, dobivamo

$$\mathbb{P}(X_n \leq x - \epsilon) - \mathbb{P}(|Y_n| \geq \epsilon) \leq \mathbb{P}(X_n + Y_n \leq x) \leq \mathbb{P}(X_n \leq x + \epsilon) + \mathbb{P}(|Y_n| \geq \epsilon).$$

Budući da $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ i $X_n \xrightarrow{D} X$, vrijedi

$$F_X(x - \epsilon) = \mathbb{P}(X \leq x - \epsilon) \leq \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n + Y_n \leq x) \leq \mathbb{P}(X \leq x + \epsilon) = F_X(x + \epsilon).$$

Pustimo li $\epsilon \to 0$ u gornje nejednakosti, tvrdnja teorema slijedi iz pretpostavke da su $x \pm \epsilon$ točke neprekidnosti od F_X i po teoremu o sendviču.

(ii) Tvrdnju teorema ćemo ponovno dokazati u slučaju kada je $c = 0$. U suprotnom, $X_n Y_n = X_n(Y_n - c) + cX_n$ pa zbog $cX_n \xrightarrow{D} cX$ tvrdnja slijedi po tvrdnji koju dokazujemo i po (i). Da bismo pokazali da $X_n Y_n \xrightarrow{D} 0$, po Propoziciji 5.1.2. dovoljno je pokazati da $X_n Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$. Neka je $\epsilon > 0$ proizvoljan i $M > 0$ takav da su $\pm\epsilon M$ točke neprekidnosti od F_X. Tada

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|X_n Y_n| \geq \epsilon) &= \mathbb{P}(|X_n Y_n| \geq \epsilon, |Y_n| < 1/M) + \mathbb{P}(|X_n Y_n| \geq \epsilon, |Y_n| \geq 1/M)\\ &\leq \mathbb{P}(|X_n| \geq \epsilon M) + \mathbb{P}(|Y_n| \geq 1/M).\end{aligned}$$

Za $n \to \infty$ je

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n Y_n| \geq \epsilon) \leq \mathbb{P}(|X| \geq \epsilon M).$$

Pustimo li sada $M \to \infty$ u gornju nejednakost, zbog $\mathbb{P}(|X_n| \geq \epsilon M) \to 0$, tvrdnja teorema slijedi po teoremu o sendviču. □

Ključna tvrdnja za Anscombeov centralni granični teorem je Kolmogorovljeva nejednakost (vidi [7, Teorem 12.7, str. 402]).

Teorem 5.1.4. *(Kolmogorovljeva nejednakost) Neka su $X_1, \ldots, X_n$ nezavisne slučajne varijable takve da je $\operatorname{Var} X_i < \infty$, za svaki $i = 1, \ldots, n$. Stavimo $S_k = X_1 + \cdots + X_k$, $k = 1, \ldots, n$. Tada za svaki $\epsilon > 0$ vrijedi*

$$\mathbb{P}\left(\max_{1\leq k\leq n} |S_k - \mathbb{E}S_k| \geq \epsilon\right) \leq \frac{\operatorname{Var} S_n}{\epsilon^2}.$$

Teorem 5.1.5. *(Anscombeov centralni granični teorem) Neka je* $(X_n : n \geq 1)$ *niz nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli s očekivanjem* μ *i varijancom* $0 < \sigma^2 < \infty$ *te neka je* $(N(t) : t \geq 0)$ *proces s vrijednostima u* $\mathbb{N}$ *za koji vrijedi*

$$\frac{N(t)}{t} \xrightarrow{\mathbb{P}} \theta \quad (0 < \theta < \infty), \quad t \to \infty.$$

Tada vrijedi

(i)
$$\frac{S_{N(t)} - N(t)\mu}{\sigma\sqrt{N(t)}} \xrightarrow{D} N(0,1), \quad t \to \infty.$$

(ii)
$$\frac{S_{N(t)} - N(t)\mu}{\sigma\sqrt{t\theta}} \xrightarrow{D} N(0,1), \quad t \to \infty.$$

Dokaz. (i) Tvrdnju teorema najprije dokazujemo u slučaju kada je $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$. Moramo pokazati

$$\frac{S_{N(t)}}{\sqrt{N(t)}} \xrightarrow{D} N(0,1), \quad t \to \infty.$$

Za $t > 0$ stavimo $n_0 = \lfloor \theta t \rfloor$. Gornji izraz možemo zapisati na sljedeći način

$$\frac{S_{N(t)}}{\sqrt{N(t)}} = \left(\frac{S_{n_0}}{\sqrt{n_0}} + \frac{S_{N(t)} - S_{n_0}}{\sqrt{n_0}}\right) \cdot \sqrt{\frac{n_0}{N(t)}}.$$

Po centralnom graničnom teoremu vrijedi $\frac{S_{n_0}}{\sqrt{n_0}} \xrightarrow{D} N(0,1)$, za $n_0 \to \infty$ $(t \to \infty)$. Nadalje, po pretpostavci $\sqrt{\frac{n_0}{N(t)}} \xrightarrow{\mathbb{P}} 1$, za $t \to \infty$. Pokažemo li da

$$\frac{S_{N(t)} - S_{n_0}}{\sqrt{n_0}} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \quad t \to \infty, \tag{5.1}$$

tvrdnja teorema slijedi primjenom Slutskyjevog teorema. U nastavku pokazujemo da vrijedi (5.1). Neka je $0 < \epsilon < \frac{1}{3}$ proizvoljan. Stavimo $n_1 = \lfloor n_0(1 - \epsilon^3) \rfloor + 1$, $n_2 = \lfloor n_0(1 + \epsilon^3) \rfloor$. Uočimo da je $n_1 \leq n_0 \leq n_2$. Vrijedi

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(|S_{N(t)} - S_{n_0}| \geq \epsilon\sqrt{n_0}\right) &= \mathbb{P}\left(|S_{N(t)} - S_{n_0}| \geq \epsilon\sqrt{n_0}, N(t) \in [n_1, n_2]\right) \\ &\quad + \mathbb{P}\left(|S_{N(t)} - S_{n_0}| \geq \epsilon\sqrt{n_0}, N(t) \notin [n_1, n_2]\right)\end{aligned}$$

Ocjenjujemo prvi član

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(|S_{N(t)} - S_{n_0}| \geq \epsilon\sqrt{n_0}, N(t) \in [n_1, n_2]\right)\\
&\quad \leq \mathbb{P}\left(|S_{N(t)} - S_{n_0}| \geq \epsilon\sqrt{n_0}, N(t) \in [n_1, n_0]\right) + \mathbb{P}\left(|S_{N(t)} - S_{n_0}| \geq \epsilon\sqrt{n_0}, N(t) \in [n_0, n_2]\right)\\
&\quad \leq \mathbb{P}\left(\max_{n_1 \leq k \leq n_0} |S_k - S_{n_0}| \geq \epsilon\sqrt{n_0}, N(t) \in [n_1, n_0]\right) + \mathbb{P}\left(\max_{n_0 \leq k \leq n_2} |S_k - S_{n_0}| \geq \epsilon\sqrt{n_0}, N(t) \in [n_0, n_2]\right)\\
&\quad \leq \mathbb{P}\left(\max_{n_1 \leq k \leq n_0} |S_k - S_{n_0}| \geq \epsilon\sqrt{n_0}\right) + \mathbb{P}\left(\max_{n_0 \leq k \leq n_2} |S_k - S_{n_0}| \geq \epsilon\sqrt{n_0}\right).
\end{aligned}$$

Po Kolmogorovljevoj nejednakosti je

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\max_{n_1 \leq k \leq n_0} |S_k - S_{n_0}| \geq \epsilon\sqrt{n_0}\right) + \mathbb{P}\left(\max_{n_0 \leq k \leq n_2} |S_k - S_{n_0}| \geq \epsilon\sqrt{n_0}\right)\\
&\qquad\qquad \leq \frac{\mathrm{Var}(S_{n_0} - S_{n_1})}{n_0\epsilon^2} + \frac{\mathrm{Var}(S_{n_2} - S_{n_0})}{n_0\epsilon^2} = \frac{n_0 - n_1}{n_0\epsilon^2} + \frac{n_2 - n_0}{n_0\epsilon^2}.
\end{aligned}$$

Uočimo da je

$$\begin{aligned}
n_0 - n_1 &= n_0 - \lfloor n_0(1-\epsilon^3)\rfloor - 1 \leq n_0 - n_0(1-\epsilon^3) = n_0\epsilon^3,\\
n_2 - n_0 &= \lfloor n_0(1+\epsilon^3)\rfloor - n_0 \leq n_0(1+\epsilon^3) - n_0 = n_0\epsilon^3.
\end{aligned}$$

Stoga je

$$\mathbb{P}\left(|S_{N(t)} - S_{n_0}| \geq \epsilon\sqrt{n_0}, N(t) \in [n_1, n_2]\right) < 2\epsilon. \tag{5.2}$$

Ocjenjujemo drugi član

$$\mathbb{P}\left(|S_{N(t)} - S_{n_0}| \geq \epsilon\sqrt{n_0}, N(t) \notin [n_1, n_2]\right) \leq \mathbb{P}\left(N(t) \notin [n_1, n_2]\right).$$

Zbog $\frac{N(t)}{t} \xrightarrow{\mathbb{P}} \theta$, postoji $t_0 > 0$ takav da je

$$\mathbb{P}\left(N(t) \notin [n_1, n_2]\right) < \epsilon\,, \quad \forall t \geq t_0. \tag{5.3}$$

Tvrdnje (5.2) i (5.3) povlače

$$\mathbb{P}\left(|S_{N(t)} - S_{n_0}| \geq \epsilon\sqrt{n_0}\right) < 3\epsilon\,, \quad \forall t \geq t_0$$

i zbog proizvoljnosti od ϵ slijedi tvrdnja teorema.

Promotrimo sada opći slučaj $\mathbb{E}X_1 = \mu$, $\operatorname{Var} X_1 = \sigma^2$. Stavimo $X_n^* = \dfrac{X_n - \mu}{\sigma}$, $S_n^* = X_1^* + \cdots + X_n^*$, $n \geq 1$. Niz $(X_n^* : n \geq 1)$ je niz nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli i vrijedi $\mathbb{E}X_1^* = 0$, $\operatorname{Var} X_1^* = 1$. Primijenom upravo dokazane tvrdnje dobivamo

$$\frac{S^*_{N(t)}}{\sqrt{N(t)}} \xrightarrow{D} N(0,1).$$

iz čega slijedi

$$\frac{S_{N(t)} - N(t)\mu}{\sigma\sqrt{N(t)}} \xrightarrow{D} N(0,1),$$

(ii) Budući da je

$$\frac{S_{N(t)} - N(t)\mu}{\sigma\sqrt{t\theta}} = \frac{S_{N(t)} - N(t)\mu}{\sigma\sqrt{N(t)}}\sqrt{\frac{N(t)}{t\theta}},$$

tvrdnja slijedi iz tvrdnje (i), pretpostavke teorema i Slutskyjevog teorema. □

5.2 Hewitt-Savageov zakon 0-1 i posljedice

Na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ promatramo niz nezavisnih slučajnih varijabli $(X_n : n \in \mathbb{N})$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je

$$\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\ ,\ \mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})\ ,\ \mathbb{P} = \prod_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}_n$$

$$X_n(\omega) = \omega_n,\ \forall \omega = (\omega_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Omega$$

Konačna permutacija skupa $\mathbb{N}$ je permutacija $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $\pi(i) \neq i$, za konačno mnogo $i \in \mathbb{N}$. Ako je π konačna permutacija na $\mathbb{N}$, tada definiramo $(\pi\omega)_i := \omega_{\pi(i)}$. Za događaj $A \in \mathcal{F}$ kažemo da je *izmjenjiv* ako je $\pi^{-1}A = \{\omega \in \Omega : \pi\omega \in A\}$ jednak A za svaku konačnu permutaciju π. Označimo sa $\mathcal{E}$ skup svih izmjenjivih događaja u $\mathcal{F}$. Lako se vidi da je $\mathcal{E}$ $\sigma-$algebra i tu familiju nazivamo $\sigma-$ *algebrom izmjenjivih događaja.* Za slučajna varijablu kažemo da je izmjenjiva ako je izmjeriva u paru $\sigma-$ algebri $(\mathcal{E}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Primjer 5.2.1. Sljedeći događaji su izmjenjivi:

(1) $\{\limsup_n S_n = c\}$, $\{\liminf_n S_n = c\}$, za svaki $c \in [-\infty, \infty]$.
Tvrdnja slijedi iz činjenice da za svaku konačnu permutaciju π postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je $S_n(\omega) = S_n(\pi\omega)$, za svaki $n \geq m$.

(2) svaki repni događaj je izmjenjiv.
Kao i gore, iskoristimo da za svaku konačnu permutaciju π postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je $\pi(n) = n$, za svaki $n \geq m$. Budući da je $A \in \sigma(X_m, X_{m+1}, X_{m+2}, \ldots)$, ishodi od A ne ovise o prvih konačno mnogo slučajnih varijabli $X_1, X_2, \ldots X_{m-1}$ iz čega slijedi tvrdnja.

Sada smo spremni iskazati Hewitt-Savageov zakon 0-1. Teorem poopćuje Kolmogorovljev zakon 0-1 u posebnom slučaju kada, osim nezavisnosti, pretpostavljamo i jednakost distribucija slučajnih varijabli. Dokaz se može pronaći u [3, Teorem 4.1.1., str. 154].

Teorem 5.2.2. *(Hewitt-Savageov zakon 0-1) Neka je $(X_n : n \in \mathbb{N})$ niz nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli. Tada je vjerojatnost svakog izmjenjivog događaja* 0 *ili* 1*, a svaka izmjenjiva slučajna varijabla je (g.s.) konstanta.*

U nastavku poglavlja pretpostavljamo da je $(X_n : n \in \mathbb{N})$ niz nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli, $(S_n : n \in \mathbb{N})$ je slučajna šetnja, $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Teorem 5.2.3. *Za slučaju šetnju $(S_n : n \in \mathbb{N})$ moguće su jedino sljedeće četiri situacije od kojih točno jedna ima vjerojatnost* 1*:*

(i) $S_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$,

(ii) $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$,

(iii) $\lim_{n\to\infty} S_n = -\infty$,

(iv) $-\infty = \liminf_{n\to\infty} S_n < \limsup_{n\to\infty} S_n = +\infty$.

Dokaz. Po Primjeru 5.2.1. $\limsup_{n\to\infty} S_n$ je izmjenjiva slučajna varijabla pa po Hewitt-Savageovom zakonu 0-1 postoji $a \in [-\infty, \infty]$ takav da je $\limsup_{n\to\infty} S_n = a$ (g.s.). Definiramo $S'_n := S_{n+1} - X_1$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Budući da je $S'_n \stackrel{D}{=} S_n$, slijedi da je $\limsup_{n\to\infty} S'_n = \limsup_{n\to\infty} S_n = a$ (g.s.). Dakle, $a = a - X_1$ (g.s.). Ako je $a \in \mathbb{R}$, možemo oduzeti a s obje strane iz čega slijedi $X_1 = 0$ (g.s.). Zbog $X_n \stackrel{D}{=} X_1$ je $X_n = 0$ (g.s.) , za svaki $n \in \mathbb{N}$. Sada je jasno da je $S_n = 0$, za svaki $n \in \mathbb{N}$, pa smo u slučaju (i).
Ista tvrdnja vrijedi i za $\liminf_{n\to\infty} S_n$, t.j. $\liminf_{n\to\infty} S_n = b$ (g.s.), za neki $b \in [-\infty, \infty]$. Promatramo slučajeve kada je $a \in \{-\infty, \infty\}$ i $b \in \{-\infty, \infty\}$. Prema pokazanom, slučajevi $a \in \mathbb{R}$, $b \in \{-\infty, \infty\}$ i $b \in \mathbb{R}$, $a \in \{-\infty, \infty\}$ su nemogući.

1°) Ako je $a = b = +\infty$, tada je $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$ (g.s.) pa vrijedi (ii).

2°) Ako je $a = b = -\infty$, tada je $\lim_{n\to\infty} S_n = -\infty$ (g.s.) pa vrijedi (iii).

3°) Ako je $a = \infty$, $b = -\infty$, vrijedi (iii).

4°) Slučaj $a = -\infty$, $b = \infty$ je nemoguć jer uvijek vrijedi $\liminf_{n\to\infty} S_n \leq \limsup_{n\to\infty} S_n$.

□

Definicija 5.2.4. *Vrijeme zaustavljanja u odnosu na filtraciju $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n : n \geq 1)$ je (proširena) slučajna varijabla $T : \Omega \to \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$ za koju vrijedi*

$$\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n\,, \quad \text{za sve } n \geq 1.$$

Ukoliko je $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots X_n)$, $n \geq 1$, vrijeme zaustavljanja T u odnosu na filtraciju $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n : n \geq 0)$ zovemo vrijeme zaustavljanja za niz $(X_n : n \geq 1)$.

Propozicija 5.2.5. *(Waldova jednakost) Neka je $(X_n : n \geq 1)$ niz nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli s konačnim očekivanjem μ te neka je T vrijeme zaustavljanja za taj niz takvo da je $\mathbb{E}T < \infty$. Tada vrijedi*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{T} X_k\right] = \mu\,\mathbb{E}T.$$

Dokaz. Po Lebesguoevom teoremu o dominiranoj konvergenciji vrijedi

$$\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{T} X_k\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{\infty} X_k \mathbb{1}_{\{T\geq k\}}\right] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[X_k \mathbb{1}_{\{T\geq k\}}\right].$$

Budući da je $\{T \geq k\} = \{T < k\}^c = \{T \leq k-1\}^c \in \sigma(X_1, \dots, X_{k-1})$, zbog nezavisnosti niza (X_n) su slučajne varijable X_k i $\mathbb{1}_{\{T\geq k\}}$ nezavisne, za svaki $k \geq 1$. Sada imamo

$$\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{T} X_k\right] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[X_k \mathbb{1}_{\{T\geq k\}}\right] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}X_k \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{T\geq k\}}\right] = \mathbb{E}X_1 \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(T \geq k) = \mu\,\mathbb{E}T.$$

□

Neka je T konačno vrijeme zaustavljanja za niz $(X_n : n \geq 1)$. Stavimo $T(0) = 0$, $T(1) = T$. Definiramo $T(2)$ kao vrijeme zaustavljanja za niz $(X_{T(1)+n} : n \geq 1)$. Induktivno definiramo $T(k)$ kao vrijeme zaustavljanja za niz $(X_{T(k-1)+n} : n \geq 1)$, $k \geq 2$.
Stavimo $N(0) = 0$, $N(k) = T(1) + \cdots + T(k)$, $k \geq 1$. Istaknimo i sljedeću tvdnju čiji se dokaz može pronaći u [6, Propozicija 7.1.1., str. 560].

Propozicija 5.2.6. *Neka je T konačno vrijeme zaustavljanja za niz $(X_n : n \geq 1)$. Niz slučajnih varijabli*

$$(S_{N(k)} - S_{N(k-1)} : k \geq 1)$$

je niz nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli.

Definiramo

$$N := \inf\{n \geq 1 : S_n > 0\}\ , \quad \tilde{N} := \inf\{n \geq 1 : S_n \leq 0\}.$$

Uočimo da su N i $\tilde{N}$ vremena zaustavljanja za niz $(X_n : n \geq 1)$. Stavimo $N(0) = 0$, $N(1) = N$. Induktivno definiramo

$$N(k+1) = \inf\{n \geq N(k) + 1 : S_n > 0\}, \quad k \geq 1$$

Analogno definiramo niz $(\tilde{N(k)} : k \geq 0)$. Označimo sa $M_\infty := \sup_{n\geq 0} S_n$.

Propozicija 5.2.7. *Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

(a) $\mathbb{P}(N < \infty) = 1$,

(b) $\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} S_n = \infty) = 1$,

(c) $\mathbb{P}\left(\sup_{n\geq 1} S_n = \infty\right) = 1$.

Također, i sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:

(a') $\mathbb{P}(N = \infty) > 0$,

(b') $\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} S_n = \infty) = 0$,

(c') $\mathbb{P}\left(\sup_{n\geq 1} S_n = \infty\right) = 0$.

Napomena 5.2.8. *Iste tvrdnje vrijede i za* $\tilde{N}$, $\liminf_{n\to\infty} S_n$ *i* $\inf_{n\geq 0} S_n$.

Dokaz. (a) $\Rightarrow$ (b) Pretpostavimo da je $N < \infty$ (g.s.). Tada je $S_N > 0$ (g.s.) i vrijedi $\mathbb{E}S_N > 0$. Po Propoziciji 5.2.6. niz

$$(S_{N(k)} - S_{N(k-1)} : k \geq 1)$$

je niz nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli. Primjenom jakog zakona velikih brojeva dobivamo

$$\frac{S_{N(n)}}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(S_{N(i)} - S_{N(i-1)}\right)}{n} \to \mathbb{E}S_N > 0\ , \quad n \to \infty,$$

iz čega slijedi da $S_{N(n)} \to \infty$, za $n \to \infty$. Sada je jasno da $\limsup_{n\to\infty} S_n = \infty$ (g.s.).

(b) $\Rightarrow$ (c) Tvrdnja slijedi trivijalno iz činjenice da je $\limsup_{n\to\infty} S_n \leq M_\infty$.

(c) $\Rightarrow$ (a) Tvrdnja slijedi trivijalno iz činjenice da na događaju $\{M_\infty = \infty\}$ vrijedi $N < \infty$.

(a') $\Rightarrow$ (b') Ako vrijedi (a'), tada ne vrijedi (a) pa prema pokazanom ne vrijedi niti (b). Dakle, $\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} S_n = \infty\right) < 1$. Budući da je događaj $\{\limsup S_n = \infty\}$ izmjenjiv, po Hewitt-Savegovom zakonu 0-1 (Teorem 5.2.2) vrijedi $\mathbb{P}(\{\limsup_{n\to\infty} S_n = \infty\}) \in \{0, 1\}$. Iz toga zaključujemo da je $\mathbb{P}(\{\limsup S_n = \infty\}) = 0$

(b') $\Rightarrow$ (c') Ako je $\limsup_{n\to\infty} S_n < \infty$ (g.s.), tada za (gotovo) svaki $\omega \in \Omega$ postoji $K(\omega) \in \mathbb{R}$ takav da je

$$\limsup_{n\to\infty} S_n(\omega) \leq K(\omega).$$

Gornja tvrdnja povlači da je $(S_n(\omega))$ ograničen niz realnih brojeva, za svaki $\omega \in \Omega$. Dakle, $M_\infty(\omega) < \infty$, za svaki $\omega \in \Omega$.

(c') $\Rightarrow$ (a') Ako vrijedi (c'), tada ne vrijedi (c) pa prema pokazanom ne vrijedi niti (a). Sada je jasno da vrijedi (a'). $\square$

Propozicija 5.2.9. *Pretpostavimo da je* $\mathbb{E}|X_1| < \infty$ *i* $\mathbb{P}(X_1 \neq 0) > 0$.

(a) Ako je $\mathbb{E}X_1 > 0$*, tada* $S_n \to +\infty$ *(g.s.).*

(b) Ako je $\mathbb{E}X_1 < 0$*, tada* $S_n \to -\infty$ *(g.s.).*

(c) Ako je $\mathbb{E}X_1 = 0$*, tada je*

$$-\infty = \liminf_{n\to\infty} S_n < \limsup_{n\to\infty} S_n = +\infty \quad \textit{(g.s.)}.$$

Dokaz. Po jakom zakonu velikih brojeva vrijedi

$$\frac{S_n}{n} \to \mathbb{E}X_1 \text{ (g.s.)}, \quad n \to \infty.$$

Ako je $\mathbb{E}X_1 > 0$, tada $S_n \to +\infty$ (g.s.). Ako je $\mathbb{E}X_1 < 0$, tada $S_n \to -\infty$ (g.s.). Time su pokazane tvrdnje (a) i (b) iz iskaza teorema.
Pretpostavimo da je $\mathbb{E}X_1 = 0$. Moramo pokazati da je

$$\mathbb{P}\left(\liminf_{n\to\infty} S_n = -\infty\right) = 1 \quad \text{i} \quad \mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} S_n = +\infty\right) = 1.$$

Pokazat ćemo da je $\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} S_n = +\infty\right) = 1$, druga tvrdnja slijedi slično. Po Propoziciji 5.2.8. dovoljno je pokazati da je $\mathbb{P}(N = \infty) = 0$. Pretpostavimo suprotno, tj. pretpostavimo da je $\mathbb{P}(N = \infty) = q > 0$. Po Propoziciji 5.2.8. (b') je tada $M_\infty = \sup_{n\geq 1} < \infty$ (g.s.). Označimo s $\nu = \{j \geq 0 : S_j = M_\infty\}$, uz konvenciju $\inf \emptyset = \infty$. Tada imamo

$$
\begin{aligned}
1 &\geq \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(\nu = n) \\
&= \mathbb{P}(S_n \leq 0, n \geq 0) + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(S_j < S_n, 0 \leq j \leq n-1, S_k \leq S_n, k \geq n+1) \\
&= \mathbb{P}(N = \infty) + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{i=j+1}^{n} X_i < 0, 0 \leq j \leq n-1, \sum_{i=n+1}^{k} X_i \leq 0, k \geq n+1\right) \\
&\text{(nezavisnost niza } (X_n)) \\
&= \mathbb{P}(N = \infty) + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{i=j+1}^{n} X_i < 0, 0 \leq j \leq n-1\right)\mathbb{P}\left(\sum_{i=n+1}^{k} X_i \leq 0, k \geq n+1\right) \\
&= \mathbb{P}(N = \infty) + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n > 0, X_n + X_{n-1} > 0, \ldots S_n > 0)\mathbb{P}\left(\sum_{i=n+1}^{k} X_i \leq 0, k \geq n+1\right) \\
&\left(\text{zbog } (X_1, \ldots, X_n) \stackrel{D}{=} (X_n, \ldots, X_1) \text{ je } (X_n, X_n + X_{n-1} \ldots S_n) \stackrel{D}{=} (S_1, S_2, \ldots, S_n)\right) \\
&= \mathbb{P}(N = \infty) + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(S_1 > 0, S_2 > 0, \ldots, S_n > 0)\mathbb{P}(S_n \leq 0, n \geq 1) \\
&\text{(defnicija od } \tilde{N}) \\
&= \mathbb{P}(N = \infty) + \mathbb{P}(N = \infty) \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\tilde{N} > n) \\
&= \mathbb{P}(N = \infty) \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(\tilde{N} > n) \\
&= q\, \mathbb{E}\tilde{N}.
\end{aligned}
$$

Zbog pretpostavke da je $q > 0$, vrijedi $\mathbb{E}\tilde{N} \leq \frac{1}{q} < \infty$. Po Waldovoj jednakosti 5.2.5 je

$$\mathbb{E}S_{\tilde{N}} = \mathbb{E}\tilde{N}\mathbb{E}X_1 = 0.$$

Budući da je po definiciji $S_{\tilde{N}} \leq 0$, slijedi da je $S_{\tilde{N}} = 0$ (g.s.). S druge strane, zbog $\mathbb{E}X_1 = 0$ je nužno $\mathbb{P}(X_1 < 0) > 0$ i stoga vrijedi

$$\mathbb{P}(S_{\tilde{N}} < 0) \geq \mathbb{P}(X_1 < 0) > 0.$$

Kontradikcija. Dakle, $\mathbb{P}(N = \infty) = 0$ i po Propoziciji 5.2.8. slijedi da je $\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} S_n = +\infty) = 1$. $\square$

Bibliografija

[1] K. A. Borovkov and Z. Burq, *Kendall's identity for the first crossing time revisited*, Electron. Comm. Probab. **42** (2001), 91–94.

[2] K. A. Borovkov and D. C. M. Dickson, *On the ruin time distribution for a sparre andersen process with exponential claim sizes*, Insurance Math. Econom. **6** (2008), 1104–1108.

[3] R. Durrett, *Probability: Theory and examples*, 4 ed., Cambridge University Press, 2010.

[4] A. Gut, *Stopped random walks*, 2 ed., Springer, 1988.

[5] T. Mikosch, *Non-life insurance mathematics*, 2 ed., Springer, 2009.

[6] S. Resnick, *Adventures in stochastic processes*, Birkhäuser, 1992.

[7] N. Sarapa, *Teorija vjerojatnosti*, Školska Knjiga, 2002.

Sažetak

Teorija rizika je drugi izraz za matematiku neživotnog osiguranja. Ona se bavi modeliranjem i izračunom šteta koje osiguravajuće društvo isplaćuje osiguranim klijentima, kao i procjenom rizika od gubitka u portfelju. Cilj ovog rada je uvesti osnovne pojmove i koncepte u teoriji rizika pomoću kojih je moguće modelirati situacije prisutne u stvarnom svijetu.

Promatraju se procesi obnavljanja pomoću kojih se modeliraju vremena dolazaka šteta. Iznose se neki najvažniji rezultati u teoriji obnavljanja te se posebna pažnja posvećuje Poissonovom procesu. Potom se promatraju procesi ukupnih šteta koji, osim vremena dolazaka šteta, uzimaju u obzir iznos isplaćenih šteta. Navode se neki najvažniji rezultati, s posebnim naglaskom na složeni Poissonov proces. Najveći dio rada posvećen je teoriji nesolventnosti i Sparre Andersenovom modelu. Osnovno pitanje je hoće li u nekom trenutku isplaćene štete premašiti iznos uplaćenih premija. Prvi trenutak kada isplaćene štete premašuju uplaćene premije naziva se vrijeme propasti. Izvodi se formula za funkciju gustoće vremena propasti u posebnom slučaju kada isplate prate eksponencijalnu distribuciju. U općem slučaju predlaže se metoda za aproksimaciju distribucije vremena propasti koja se zasniva na Monte Carlo simulacijama. U radu se također mogu naći neki osnovni rezultati iz Lévyjevih procesa i teorije vjerojatnosti koji se koriste u ovom radu.

Summary

Risk theory is a synonym for non-life insurance mathematics. It deals with modeling of claims that arrive in an insurance business and risk valuation of loss in portifolio. The main goal of this paper is to introduce basic concepts in risk theory which could model a real-life situations.

We study renewal processes which could be used to model arrival of claims. Some importat results in renewal theory are listed and Poisson process is of special interest. Next we observe the total claim amount processes which could be used to model claims which insurance company discharges. Like in renewal theory, some important results are listed with special interest in compound Poisson process. The biggest part of this work is dedicated to ruin theory and Sparre Andersen model. The object of interest is time of ruin which is defined as the first time when accumulated claims surpass premium. We derive a closed-form representation for the distribution of the ruin time for the Sparre Andersen model with exponentially distributed claims. For general model, algorithm based on Monte Carlo simulation is proposed. In this work it could also be found some basic results on Lévy processes and probability theory which are used in this paper.

Životopis

Rođen sam 26. listopada 1990. godine u Zagrebu. Završio sam Osnovnu školu Prečko te sam potom upisao opću XI. gimnaziju u Zagrebu. Maturirao sam 2009. godine. Tokom srednje škole sudjelovao sam na državnim natjecanjima iz matematike te sam iz tog razloga po završetku srednje škole odlučio upisati Preddiplomski sveučilišni studij Matematike na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu. Godine 2010., nakon završenog preddiplomskog studija, upisao sam Diplomski sveučilišni studij Matematička statistika. Za izniman uspjeh na studiju, 2014. godine nagrađen sam od strane Vijeća Matematičkog odsjeka.