SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Lucija Validžić

TOPOLOŠKI ASPEKTI IZRAČUNLJIVOSTI

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc.dr.sc. Zvonko Iljazović

Zagreb, rujan 2016.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

za tatu

Sadržaj

Uvod

Fundamentalan pojam u teoriji izračunljivosti je pojam *izračunljive* ili *rekurzivne* funkcije $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, gdje je $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. Intuitivno, funkcija f je izračunljiva ako postoji *algoritam*, tj. *pravilo*, pomoću kojeg za svaki $i \in \mathbb{N}$ možemo izračunati $f(i)$. Na prvu nam se možda može učiniti da je bilo koja funkcija $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ koju možemo zamisliti izračunljiva, no pokazuje se da stvari ipak nisu tako jednostavne. Primjerice, je li funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ zadana s:

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{ako u decimalnom zapisu broja } \sqrt{n} \text{ postoji } n \text{ uzastopnih petica,} \\ 0, & \text{inače,} \end{cases}$$

izračunljiva? Kako bi preciznije odredili koje funkcije ćemo smatrati izračunljivim, uvodi se pojam *RAM-stroja* - idealiziranog računala koje može izvršavati programe koji se sastoje od konačno mnogo jednostavnih instrukcija (detaljan opis može se naći u [2]). Za funkciju kažemo da je *RAM-izračunljiva* ako ju RAM-stroj može *izračunati*, odnosno ako postoji program za RAM-stroj takav da za dani ulazni podatak iz domene funkcije RAM-stroj izvršavajući taj program staje i u određenom registru vraća odgovarajuću vrijednost funkcije, a za ulazni podatak koji nije iz domene funkcije RAM-stroj nikad ne staje. Iako pojam RAM-izračunljive funkcije odgovara prije spomenutom intuitivnom shvaćanju pojma izračunljive funkcije, proces pronalaženja odgovarajućeg programa i dokazivanja da program za određenu funkciju ne postoji vrlo je nezgodan, stoga se uvodi pojam *parcijalno rekurzivne funkcije*. Mogli bismo reći da je klasa parcijalno rekurzivnih funkcija najmanja klasa funkcija koja sadrži „najednostavnije" moguće funkcije - nul-funkciju, funkciju sljedbenika i projekcije na određenu koordinatu, te je zatvorena na kompoziciju i primitivnu rekurziju. Iako se definicije klase parcijalno rekurzivnih funkcija i klase RAM-izračunljivih funkcija potpuno razlikuju, pokazuje se da su te klase jednake, pa kako je s parcijalno rekurzivnim funkcijama mnogo jednostavnije raditi, oslanjamo se na definiciju parcijalno rekurzivne funkcije. Dakle, izračunljive ili rekurzivne funkcije će biti pacijalno rekurzivne funkcije koje su totalne, odnosno one kojima je domena $\mathbb{N}^k$. Kada jednom imamo definiran pojam rekurzivne funkcije $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, na prirodan ga način proširujemo do pojma rekurzivne funkcije $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$, $\mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$. Tako ćemo za funkciju $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ reći da je izračunljiva ako postoje tri rekurzivne funkcije $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ čije vrijednosti u proizvoljnom

$x \in \mathbb{N}^k$ određuju brojnik, nazivnik i predznak broja $f(x)$. Za funkciju $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ ćemo reći da je izračunljiva ako postoji rekurzivna funkcija $F : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ takva da je broj $F(x,i)$ udaljen od $f(x)$ za manje od 2^{-i}. Nadalje, osim rekurzivnih funkcija, od posebne važnosti su i *rekurzivno prebrojivi skupovi*, odnosno oni podskupovi od $\mathbb{N}^n$ koji su slika neke rekurzivne funkcije $\mathbb{N} \to \mathbb{N}^n$.

Dalje bismo se mogli zapitati kada bismo za realan broj rekli da je izračunljiv. Prirodno je očekivati da će racionalni brojevi biti izračunljivi, ali htjeli bismo da klasa izračunljivih brojeva obuhvaća i brojeve poput $\sqrt{n}$, za $n \in \mathbb{N}$ te primjerice broj $0.101001000100001\ldots$ Zapravo bismo htjeli da realan broj bude izračunljiv ako znamo *izračunati* njegove znamenke, odnosno ako postoji *algoritam* koji ih računa. U skladu s gore rečenim, sada ovo intuitivno shvaćanje rekurzivnog broja možemo precizno definirati: broj $x \in \mathbb{R}$ je izračunljiv ako postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $f(n)$ upravo n-ta decimala broja x. Iako je gornja definicija vrlo intuitivna, za dokazivanje svojstava rekurzivnih brojeva ključna je sljedeća karakterizacija izračunljivog broja: broj $x \in \mathbb{R}$ je izračunljiv ako i samo ako postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ takva da je

$$|x - f(k)| < 2^{-k},$$

za svaki $k \in \mathbb{N}$. Odnosno, broj je izračunljiv ako i samo ako je limes rekurzivnog niza u $\mathbb{Q}$, pri čemu je brzina konvergencije dana gornjom nejednakošću. Gornja karakterizacija će nam pomoći da bolje shvatimo mnogo općenitiji pojam *izračunljive točke* u izračunljivom metričkom prostoru.

U ovom radu prvenstveno želimo povezati dvije teorije - topologiju i teoriju izračunljivosti. Pri tome će nam pojmovi *izračunljivog metričkog prostora* i *izračunljivog topološkog prostora* biti od posebne važnosti.

Naime, izračunljiv metrički prostor je uređena trojka (X, d, α), pri čemu je (X, d) metrički prostor, a α niz gust u (X, d) takav da udaljenosti pojedinih članova tog niza možemo *efektivno* izračunati, odnosno takav da je funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$, $(i, j) \mapsto d(i, j)$ rekurzivna. [1] Uočimo da se na ovaj način ograničavamo samo na separabilne metričke prostore. U ovom radu koncentrirat ćemo se na pojam izračunljivog metričkog prostora, no općenitije, izračunljivost u metrički prostor možemo uvesti i pomoću tzv. *struktura izračunljivosti*. Više o tom pristupu može se pronaći u [7].

Za točku $x \in X$ kažemo da je izračunljiva ako postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je

$$d(x, \alpha_{f(k)}) < 2^{-k},$$

za svaki $k \in \mathbb{N}$. Važno je uočiti da je ova definicija zaista poopćenje definicije izračunljivog broja u $\mathbb{R}$. Naime, ukoliko gledamo euklidsku metriku na $\mathbb{R}$ i odaberemo proizvoljnu su-

[1] U teoriji izračunljivosti često se spominje pojam *efektivnosti*. Neformalno rečeno, određeni postupak ćemo smatrati efektivnim ako u njemu „glavnu ulogu” imaju rekurzivne funkcije.

rjektivnu rekurzivnu funkciju $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, tada $\mathbb{R}$ postaje izračunljiv metrički prostor. Odmah se vidi da su izračunljive točke u tom metričkom prostoru upravo izračunljivi brojevi.

Sada se prirodno nameće pitanje kako definirati izračunljiv skup u $\mathbb{R}$ ili općenitije, u izračunljivom metričkom prostoru (X, d, α). Precizna definicija je nešto kompliciranija od prethodnih, ali neformalno govoreći, kompaktan neprazan skup ćemo smatrati izračunljivim ako možemo efektivno odrediti konačan skup racionalnih točaka, tj. točaka iz $\operatorname{Im}\alpha$, koje aproksimiraju skup s točnošću 2^{-k}. Možemo zamišljati da je skup izračunljiv ako postoji *efektivna procedura* koja u svakom koraku daje sve oštriju i oštriju sliku skupa. U proučavanju izračunljivih metričkih prostora posebno je bitna efektivna enumeracija *racionalnih kugala* i *racionalnih otvorenih skupova*. Pod time smatramo odabir rekurzivnih funkcija kojima definiramo nizove skupova $(I_i)_{i\in\mathbb{N}}$ i $(J_j)_{j\in\mathbb{N}}$, takve da je $\{I_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ skup svih kugala oblika $K(\alpha_k, q)$, za $k \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{Q}$, $q > 0$ (odnosno racionalnih kugala), a $\left\{J_j \mid j \in \mathbb{N}\right\}$ skup svih konačnih unija racionalnih kugala (odnosno racionalnih otvorenih skupova).

Osim klase izračunljivih skupova, od posebnog interesa će nam biti veća klasa, klasa *poluizračunljivih* skupova. Kompaktan skup S u izračunljivom metričkom prostoru (X, d, α) je poluizračunljiv ako možemo efektivno izlistati sve racionalne otvorene skupove koji ga pokrivaju, odnosno ako je skup $\left\{j \in \mathbb{N} \mid S \subseteq J_j\right\}$ rekurzivno prebrojiv. Općenitije, za zatvoren skup $S \subseteq X$ kažemo da je poluizračunljiv ako:

- $S \cap K$ je kompaktan, za svaku zatvorenu kuglu K u (X, d);
- skup $\left\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid \hat{I}_i \cap S \subseteq J_j\right\}$ je rekurzivno prebrojiv.

Iako je definicija poluizračunljivog skupa pomalo neintuitivna, oni u izračunljivoj analizi igraju važnu ulogu. U ovom radu se njima nećemo baviti, ali u izračunljivoj analizi vrlo su bitne izračunljive funkcije $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Pokazuje se da je skup u $\mathbb{R}^n$ poluizračunljiv ako i samo ako je on skup nultočaka neke izračunljive funkcije $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Zbog toga je pitanje sadrži li poluizračunljiv skup u $\mathbb{R}^n$ izračunljivu točku ekvivalentno pitanju mora li svaka izračunljiva funkcija $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kojoj je skup nultočaka neprazan imati izračunljivu nultočku. Općenito je odgovor negativan (kontraprimjer se može naći u [1]). U radu se bavimo ovim pitanjem u općenitijem ambijentu, odnosno pitamo se uz koje uvjete poluizračunljiv skup u izračunljivom metričkom prostoru sadrži izračunljivu točku, ili još bolje, uz koje su uvjete izračunljive točke guste u poluizračunljivom skupu. Jedan od osnovnih značaja ovog rada je rezultat da su izračunljive točke guste u poluizračunljivim mnogostrukostima i poluizračunljivim topološkim poliedrima.

Nakon što smo se upoznali s pojmom izračunljivog metričkog prostora, htjeli bismo poopćiti taj pojam te izračunljivost uvesti i u topološke prostore. To je naizgled težak zadatak jer se definicija izračunljivog metričkog prostora i osnovnih pojmova s njim u vezi bazira na rekurzivnosti funkcije koja računa *udaljenosti* točaka fiksiranog gustog niza te na određenoj efektivnoj enumeraciji otvorenih *kugala*. Za shvaćanje definicije izračunljivog topološkog prostora, bitni su pojmovi *formalne disjunktnosti* i *formalne sadržanosti* u izračunljivom metričkom prostoru (X, d, α). Naime, ako je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor i $\{I_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ prije spomenuta efektivna enumeracija racionalnih otvorenih kugli, tada za kugle $I_i = K(\lambda_i, \varrho_i)$ i $I_j = K(\lambda_j, \varrho_j)$ kažemo da su formalno disjunktne ako je udaljenost njihovih središta strogo veća od zbroja njihovih radijusa, tj. ako je

$$d(\lambda_i, \lambda_j) > \varrho_i + \varrho_j.$$

Dalje, kažemo da je I_i formalno sadržana u I_j ako vrijedi

$$d(\lambda_i, \lambda_j) + \varrho_i < \varrho_j.$$

Uvođenje izračunljivosti u topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ temelji se na fiksiranju niza otvorenih skupova $(I_i)_{i\in\mathbb{N}}$ koji čine bazu topologije $\mathcal{T}$ te na neki način imitiraju racionalne otvorene kugle i njihovo ponašanje u odnosu na relacije formalne disjunktnosti i formalne sadržanosti. Primjerice, u izračunljivom metričkom prostoru očito je relacija formalne disjunktnosti simetrična, te je lako provjeriti da ako su dvije racionalne kugle formalno disjunktne, tada su one i disjunktne. Također, lako je vidjeti da je relacija formalne sadržanosti tranzitivna te da formalna sadržanost povlači sadržanost (u smislu podskupa). Ukoliko niz $(I_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ima maloprije navedena, ali i još neka slična svojstva (ukupno njih sedam), tada ćemo uređenu trojku $(X, \mathcal{T}, (I_i)_{i\in\mathbb{N}})$ smatrati izračunljivim topološkim prostorom. Analogno kao prije, možemo definirati racionalne otvorene skupove i njihovu efektivnu enumeraciju, pa pojam poluizračunljivog skupa jednostavno prenosimo u izračunljive topološke prostore. Pokazuje se da je u izračunljivom metričkom prostoru jedna od karakterizacija izračunljive točke dana s:

točka x je izračunljiva ako i samo ako je skup $\{i \in \mathbb{N} \mid x \in I_i\}$ rekurzivno prebrojiv

Na taj način, možemo definirati izračunljive točke i u izračunljivom topološkom prostoru. Isto tako, zanimljivo je da izračunljive skupove u metričkom prostoru možemo okarakterizirati koristeći samo racionalne kugle i racionalne otvorene skupove, što nam omogućava da uvedemo i pojam izračunljivog skupa u ovo novo okruženje. Motivirani vezom poluizračunljivih skupova i nultočaka rekurzivnih funkcija $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, možemo se zapitati kada vrijedi implikacija:

$$S \text{ poluizračunljiv } \Rightarrow S \text{ izračunljiv}$$

U ovom radu bavimo se i tim pitanjem. Glavni rezultati vezani uz izračunljive topološke prostore sastoje se u tome da smo pronašli dovoljne uvjete uz koje gornja implikacija vrijedi za lančaste kontinuume (skupovi koji „izgledaju kao luk”) i cirkularno lančaste kontinuume (skupovi koji „izgledaju kao kružnica”).

Za razumijevanje teksta potrebno je poznavanje osnovnih pojmova teorije metričkih prostora i opće topologije. Iako su svi osnovni pojmovi vezani uz teoriju izračunljivosti navedeni u prvom poglavlju, za lakše snalaženje dobro bi bilo poznavati barem rekurzivne funkcije $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ i njihova osnovna svojstva. Većina tvrdnji je detaljno dokazana, a onih nekoliko koje nisu su uglavnom klasični rezultati teorije izračunljivosti te je navedena literatura u kojoj se njihovi dokazi mogu pronaći.

Rad je podijeljen u tri poglavlja. U prvom poglavlju govorimo općenito o izračunljivosti i uvodimo pojmove koji će nam biti osnova za sva daljnja razmatranja. Na početku poglavlja uvedeni su osnovni pojmovi teorije izračunljivosti - pojam *parcijalno rekurzivne funkcije, rekurzivnog skupa* i *rekurzivno prebrojivog skupa*. Potom razrađujemo izračunljivost u $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R}$, a na kraju poglavlja bavimo se tzv. *r.r.o. funkcijama* koje nam daju tehniku dokazivanja koja će nam biti vrlo korisna u čitavom radu.

Drugo poglavlje bavi se izračunljivim metričkim prostorima. Počevši od same definicije izračunljivog metričkog prostora te osnovnih pojmova kao što su *izračunljiv niz* i *izračunljiva točka*, pokazujemo kako izračunljivost možemo uvesti i na mnogo općenitije metričke prostore od „standardnog" $\mathbb{R}^n$ s euklidskom metrikom. Potom pomoću Hausdorffove metrike uvodimo važan pojam *izračunljivog skupa*, a zatim proučavamo još dvije klase skupova - *izračunljivo prebrojive* i *poluizračunljive* skupove. Uspostavljamo veze između tih klasa i bavimo se njihovim najvažnijim svojstvima. Dalje uvodimo pojmove *izračunljivosti do na skup* i *izračunljivosti u točki* koji će nam biti bitni za razmatranje uvjeta uz koje je je poluizračunljiv skup *slabo izračunljivo prebrojiv*, odnosno uvjeta uz koje su izračunljive točke guste u poluizračunljivom skupu. U zadnja dva potpoglavlja koristimo dobiveno kako bismo poopćili rezultate iz [3] i [4] te dokazujemo da su izračunljive točke guste u poluizračunljivim mnogostrukostima i poluizračunljivim topološkim poliedrima.

U trećem poglavlju najprije uvodimo pojam izračunljivog topološkog prostora. Prvo dokazujemo da je taj naizgled kompliciran pojam zapravo prirodno poopćenje pojma izračunljivog metričkog prostora, a potom prenosimo pojmove iz prethodog poglavlja u novi, općenitiji, ambijent. Dalje dobivamo dovoljne uvjete uz koje su poluizračunljivi lančasti kontinuumi i poluizračunljivi cirkularno lančasti kontinuumi u izračunljivom topološkom prostoru izračunljivi i time poopćavamo rezultate iz [5] i [10].

Sve u svemu, zbog kompleksnosti određenih dokaza, ovaj diplomski mi je poslužio kao izvrstan uvod u daljnji znanstveni rad, a i pridonio je teoriji izračunljivosti nekim originalnim rezultatima koje sadržava. Posebno bih htjela zahvaliti mentoru doc.dr.sc. Zvonku Iljazoviću što me upoznao s teorijom izračunljive topologije te na mnogim korisnim savjetima, beskrajnom strpljenju i entuzijazmu koji su me poticali na rad.

Poglavlje 1

Izračunljivost

1.1 Osnovni pojmovi i rezultati

Za funkciju $f : S \to \mathbb{N}$, $S \subseteq \mathbb{N}^k$ kažemo da je **totalna** ako je $S = \mathbb{N}^k$.

Neka su $k, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $S_1, \ldots, S_n \subseteq \mathbb{N}^k$, $T \subseteq \mathbb{N}^n$ i $g_i : S_i \to \mathbb{N}$, $i = 1, \ldots, n$ te $h : T \to \mathbb{N}$. Definiramo k-mjesnu funkciju f sa

$$f(x) \simeq h(g_1(x), \ldots, g_n(x)),\ x \in \mathbb{N}^k.$$

Pri tome oznaka $\simeq$ znači da je domena funkcije f skup

$$S = \{x \in S_1 \cap \cdots \cap S_n \mid (g_1(x), \ldots, g_n(x)) \in T\}$$

i za svaki $x \in S$ je

$$f(x) = h(g_1(x), \ldots, g_n(x)).$$

Za ovako definiranu funkciju f kažemo da je dobivena **kompozicijom funkcija** $h, g_1, \ldots, g_n$.

Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}, h : \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N}$. Definiramo funkciju $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ na sljedeći način:

$$\begin{aligned} f(0, x) &= g(x) \\ f(y+1, x) &= h(f(y, x), y, x),\ x \in \mathbb{N}^k, y \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Kažemo da je f dobivena **primitivnom rekurzijom** od funkcija g i h.

Ako je $k = 0$ tada definicija funkcije f pomoću primitivne rekurzije izgleda

$$\begin{aligned} f(0) &= a \text{ (za neki } a \in \mathbb{N}) \\ f(y+1) &= h(f(y), y),\ y \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Definiciju funkcije dobivene primitivnom rekurzijom na očit način proširujemo i na slučaj kada polazne funkcije g i h nisu totalne.

Neka je $S \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$ i $f : S \to \mathbb{N}$ funkcija. Neka je

$$T = \left\{ x \in \mathbb{N}^k \mid (\exists y \in \mathbb{N})(\forall z \leq y)\ (x, z) \in S \wedge f(x, y) = 0 \right\}.$$

Za $x \in T$ sa $\mu y(f(x, y) \simeq 0)$ označavamo najmanji prirodni broj y koji ima svojstvo iz definicije skupa T, odnosno najmanji $y \in \mathbb{N}$ takav da je $(x, z) \in S$ za sve $z \leq y$ i $f(x, y) = 0$. Za funkciju $g : T \to \mathbb{N}$ definiranu s

$$g(x) = \mu y(f(x, y) \simeq 0),\ x \in T$$

kažemo da je dobivena primjenom **μ-operatora** na funkciju f.

Funkciju $Z : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiranu s $Z(x) = 0,\ x \in \mathbb{N}$ nazivamo **nul-funkcija**. Funkciju $S_c : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiranu s $S_c(x) = x + 1,\ x \in \mathbb{N}$ nazivamo **funkcija sljedbenika**. Neka je $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i $k \in \{1, \ldots, n\}$. Funkciju $I_k^n : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ definiranu s $I_k^n(x_1, \ldots, x_n) = x_k,\ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{N}^n$ nazivamo **projekcija**.

Za funkcije Z, S_c i I_k^n $(n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, k \in \{1, \ldots, n\})$ kažemo da su **inicijalne funkcije**.

Najmanja klasa funkcija koja sadrži sve inicijalne funkcije te je zatvorena na kompoziciju i primitivnu rekurziju naziva se **klasa primitivno rekurzivnih funkcija**. Preciznije, klasu primitivno rekurzivnih funkcija definiramo na sljedeći način:
Neka je Φ_0 skup svih inicijalnih funkcija. Pretpostavimo da je $n \in \mathbb{N}$ i da smo definirali skup Φ_n. Tada definiramo skup S_n kao skup svih funkcija koje se mogu dobiti kompozicijom i primitivnom rekurzijom funkcija iz Φ_n te stavimo $\Phi_{n+1} = S_n \cup \Phi_n$.
Tada je $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \Phi_n$ klasa primitivno rekurzivnih funkcija.
Budući da su sve inicijalne funkcije totalne, iz gornje definicije se lako vidi da su i sve primitivno rekurzivne funkcije totalne.
Za skup $S \subseteq \mathbb{N}^k$ kažemo da je **primitivno rekurzivan** ako je njegova karakteristična funkcija primitivno rekurzivna.

Primjer 1.1.1. Navodimo nekoliko važnih primjera primitivno rekurzivnih funkcija.

- $(x, y) \mapsto x + y$
- $(x, y) \mapsto x \cdot y$
- $(x, y) \mapsto x^y$ (pri čemu po dogovoru stavljamo da je $0^0 = 1$)
- $x \mapsto x!$

- $(x, y) \mapsto \max\{x, y\}$
- $(x, y) \mapsto \min\{x, y\}$
- $(x, y) \mapsto x \dot{-} y$, pri čemu je za $x, y \in \mathbb{N}$

$$x \dot{-} y = \begin{cases} x - y, & \text{ako je } x \geq y \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

- $sg(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$
- $\overline{sg}(x) = \begin{cases} 0, & x \geq 1 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$
- $(x, y) \mapsto |x - y|$

Najmanja klasa funkcija koja sadrži sve inicijalne funkcije te je zatvorena na kompoziciju, primitivnu rekurziju i μ-operator naziva se **klasa parcijalno rekurzivnih funkcija**. (precizniju definiciju klase parcijalno rekurzivnih funkcija dobivamo na analogan način kao za klasu primitivno rekurzivnih funkcija).
Uočimo, za razliku od primitivno rekurzivnih funkcija, parcijalno rekurzivna funkcija ne mora biti totalna. To je posljedica činjenice da primjenom μ-operatora na totalnu funkciju ne moramo nužno dobiti totalnu funkciju.
Funkcija iz klase parcijalno rekurzivnih funkcija koja je totalna naziva se i **rekurzivna funkcija**. Kažemo da je skup $S \subseteq \mathbb{N}^k$ **rekurzivan** ako je njegova karakteristična funkcija rekurzivna.
Dokazi sljedećih dviju propozicija se mogu naći u [2].

Propozicija 1.1.2. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$, $\alpha, \beta : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ (primitivno) rekurzivne funkcije. Tada su (primitivno) rekurzivne i funkcije $g, h : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ definirane sa*

$$g(x) = \begin{cases} \sum_{i=\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, i), & \textit{ako je } \alpha(x) \leq \beta(x) \\ 0, & \textit{inače} \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} \prod_{i=\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, i), & \textit{ako je } \alpha(x) \leq \beta(x) \\ 1, & \textit{inače} \end{cases}$$

Propozicija 1.1.3. *Neka su $k, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i $F_1, \dots, F_n : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ (primitivno) rekurzivne funkcije. Nek su $S_1, \dots, S_n \subseteq \mathbb{N}^k$ (primitivno) rekurzivni skupovi takvi da za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ postoji točno jedan $i \in \{1, \dots, n\}$ takav da je $x \in S_i$. Tada je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ definirana sa*

$$f(x) = \begin{cases} F_1(x), & \text{ako je } x \in S_1 \\ \vdots & \\ F_n(x), & \text{ako je } x \in S_n \end{cases}$$

također (primitivno) rekurzivna.

Važan rezultat je da je skup svih prostih brojeva primitivno rekurzivan (vidi [2]). Za $n \in \mathbb{N}$ neka je p_n n-ti prosti broj (dakle, $p_0 = 2, p_1 = 3, \dots$). U nastavku ćemo često koristiti sljedeće funkcije:

- $exp : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$,

$$exp(x, i) = \begin{cases} \text{eksponent s kojim } p_i \text{ ulazi u rastav od } x \text{ na proste faktore}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

- $(x)_i = exp(x, i) \dot{-} 1, \ x, i \in \mathbb{N}$
- $lh : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$,

$$lh(x) = \text{najmanji prirodan broj } i \text{ takav da } exp(x, i) = 0, \ x \in \mathbb{N}$$

- $\bar{i} = lh(i) \dot{-} 1, \ i \in \mathbb{N}$

Pokazuje se da su navedene funkcije primitivno rekurzivne. U teoriji izračunljivosti ove funkcije igraju važnu ulogu u kodiranju konačnih nizova prirodnih brojeva ([2]).

1.2 Rekurzivne funkcije $\mathbb{N}^k \to \mathbb{R}^n$

Kako bismo definirali pojam rekurzivne funkcije $\mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$, najprije pojam rekurzivne funkcije na prirodan način proširujemo na funkcije $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$:

Za funkciju $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ kažemo da je **rekurzivna** ako postoje rekurzivne funkcije $a, b, c : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, $b(x) \neq 0$, za sve $x \in \mathbb{N}^k$, takve da je

$$f(x) = (-1)^{c(x)} \frac{a(x)}{b(x)}, \ x \in \mathbb{N}^k$$

.

Propozicija 1.2.1. *Neka su* $f, g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$, $h : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}^k$ *rekurzivne funkcije. Tada su i funkcije* $f + g$, $f \cdot g$, $-f$, $|f| : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$, $f \circ h : \mathbb{N}^n \to \mathbb{Q}$ *također rekurzivne. Ako je* $f(x) \neq 0$, *za sve* $x \in \mathbb{N}^k$, *tada je i funkcija* $\frac{1}{f} : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ *rekurzivna.*

Propozicija 1.2.2. *Neka su* $\alpha, \beta : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ *rekurzivne funkcije. Tada su rekurzivne i funkcije* $g, g', h, h' : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ *definirane sa*

$$g(x) = \sum_{i=\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,i), \quad g'(x) = \prod_{i=\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,i),$$

$$h(x) = \min_{0 \le i \le \alpha(x)} f(x,i), \quad h'(x) = \max_{0 \le i \le \alpha(x)} f(x,i),$$

pri čemu je $g(x) = 0$, $g'(x) = 1$ *za* $\alpha(x) > \beta(x)$.

Propozicija 1.2.3. *Neka su* $f, g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ *rekurzivne funkcije. Tada su skupovi*

$$\{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) > g(x)\}, \{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) \ge g(x)\}, \{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) = g(x)\}$$

rekurzivni.

Za funkciju $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ kažemo da je **rekurzivna** ako postoji rekurzivna funkcija $F : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ takva da je

$$|f(x) - F(x,i)| < 2^{-i}$$

za sve $x \in \mathbb{N}^k$, $i \in \mathbb{N}$. Za F kažemo da je **rekurzivna aproksimacija** od f.

Dokazi sljedećih propozicija mogu se pronaći u [1].

Propozicija 1.2.4. *Neka su* $f, g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}^k$ *rekurzivne funkcije. Tada su i funkcije* $f + g$, $f \cdot g$, $-f$, $|f| : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$, $f \circ h : \mathbb{N}^n \to \mathbb{R}$ *također rekurzivne. Ako je* $f(x) \neq 0$, *za sve* $x \in \mathbb{N}^k$, *tada je i funkcija* $\frac{1}{f} : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ *rekurzivna.*

Propozicija 1.2.5. *Neka su* $\alpha, \beta : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{R}$ *rekurzivne funkcije. Tada su rekurzivne i funkcije* $g, g', h, h' : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ *definirane sa*

$$g(x) = \sum_{i=\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,i), \quad g'(x) = \prod_{i=\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,i),$$

$$h(x) = \min_{0 \le i \le \alpha(x)} f(x,i), \quad h'(x) = \max_{0 \le i \le \alpha(x)} f(x,i),$$

pri čemu je $g(x) = 0$, $g'(x) = 1$ *za* $\alpha(x) > \beta(x)$.

Za funkciju $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}^n$ kažemo da je **rekurzivna** ako su njene komponentne funkcije $f_1, ..., f_n : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ rekurzivne. Analogno definiramo pojam rekurzivne funkcije $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}^n$ i $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$.

1.3 Rekurzivno prebrojivi skupovi u $\mathbb{N}^n$

Za $S \subseteq \mathbb{N}^n$ kažemo da je **rekurzivno prebrojiv** ako je $S = \emptyset$ ili ako postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^n$ takva da je $S = f(\mathbb{N})$.

Propozicija 1.3.1. *Ako je $S \subseteq \mathbb{N}^n$ rekurzivan, tada je S rekurzivno prebrojiv.*

Dokaz. Ako je $S = \emptyset$ tada je tvrdnja jasna.
Ako $S \neq \emptyset$ rekurzivan, uzmimo $s = (s_1, \ldots, s_m) \in S$. Neka je $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^n$ proizvoljna rekurzivna surjekcija, primjerice možemo uzeti $g(x) = ((x)_1, \ldots, (x)_n)$, $x \in \mathbb{N}$. Definiramo funkciju $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^n$ na sljedeći način:

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & g(x) \in S \\ s, & g(x) \notin S \end{cases}$$

Tada za komponentne funkcije $f_1, \ldots, f_n$ vrijedi:

$$f_i(x) = \begin{cases} g_i(x), & g(x) \in S \\ s_i, & g(x) \notin S \end{cases}, \quad i = 1, \ldots, n$$

Vidimo da je $f_i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcija definirana po slučajevima iz rekurzivnih relacija i rekurzivnih funkcija, stoga je za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$ funkcija f_i rekurzivna. Iz ovoga slijedi da je f rekurzivna i očito $f(\mathbb{N}) = S$. Dakle, S je rekurzivno prebrojiv.

□

Propozicija 1.3.2. *Neka je $S \subseteq \mathbb{N}^k$ rekurzivno prebrojiv i $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ rekurzivna. Tada je $f(S)$ rekurzivno prebrojiv.*

Dokaz. Ako je $S = \emptyset$ tvrdnja je jasna. Neka je $S \neq \emptyset$ rekurzivno prebrojiv i $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^k$ rekurzivna funkcija takva da je $S = g(\mathbb{N})$. Tada je $f \circ g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^n$ rekurzivna i vrijedi

$$(f \circ g)(\mathbb{N}) = f(g(\mathbb{N})) = f(S).$$

Dakle, $f(S)$ je rekurzivno prebrojiv.

□

Teorem 1.3.3 (o projekciji).
Neka je $T \subseteq \mathbb{N}^{k+n}$ rekurzivno prebrojiv i

$$S = \left\{ x \in \mathbb{N}^k \mid (\exists y \in \mathbb{N}^n) \ (x, y) \in T \right\}.$$

Tada je S rekurzivno prebrojiv.

Dokaz. Uočimo da je $S = p(T)$, pri čemu je $p : \mathbb{N}^{k+n} \to \mathbb{N}^k$ projekcija na prvih k koordinata, odnosno

$$p(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n) = (x_1, \ldots, x_k),\ x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{N}.$$

Očito je p rekurzivna pa iz propozicije 1.3.2 slijedi da je S rekurzivno prebrojiv.

□

Propozicija 1.3.4. *Neka je $S \subseteq \mathbb{N}^n$ rekurzivno prebrojiv i $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ rekurzivna funkcija. Tada je $f^{-1}(S)$ rekurzivno prebrojiv skup.*

Dokaz. Za $S = \emptyset$ je jasno da tvrdnja vrijedi. Neka je $S \neq \emptyset$ i $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^n$ rekurzivna funkcija takva da je $S = g(\mathbb{N})$. Za $x \in \mathbb{N}^k$ imamo:

$$x \in f^{-1}(S) \Leftrightarrow f(x) \in S \Leftrightarrow (\exists i \in \mathbb{N})\ \ f(x) = g(i).$$

Definiramo

$$T = \left\{(x, i) \in \mathbb{N}^{k+1} \mid f(x) = g(i)\right\}.$$

Budući da su f i g rekurzivne, lako se vidi da je $T \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$ rekurzivan. Sada uočimo da vrijedi

$$x \in f^{-1}(S) \Leftrightarrow (\exists i \in \mathbb{N})\ (x, i) \in T.$$

Sada iz teorema 1.3.3 slijedi da je $f^{-1}(S)$ rekurzivno prebrojiv.

□

Propozicija 1.3.5. *Neka su S, T rekurzivno prebrojivi skupovi u $\mathbb{N}^n$. Tada su $S \cup T$ i $S \cap T$ rekurzivno prebrojivi.*

Dokaz. Ako je $S = \emptyset$ ili $T = \emptyset$ tada tvrdnja očito vrijedi. Neka je $S \neq \emptyset$ i $T \neq \emptyset$ te $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^n$ rekurzivne takve da je $S = f(\mathbb{N})$, $T = g(\mathbb{N})$. Definiramo funkciju $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^n$,

$$h(x) = \begin{cases} f((x)_0), & (x)_1 \text{ paran} \\ g((x)_0), & (x)_1 \text{ neparan.} \end{cases}$$

h je rekurzivna te je očito $h(\mathbb{N}) \subseteq S \cup T$. No, za proizvoljne $s \in S$, $t \in T$ imamo $s = f(n)$, $t = g(m)$, za neke $n, m \in \mathbb{N}$. Tada je $s = h(2^{n+1}3)$, $t = h(2^{m+1}3^2)$. Dakle $h(\mathbb{N}) = S \cup T$, iz čega slijedi da je $S \cup T$ rekurzivno prebrojiv.
Za $S \cap T$ imamo sljedeće:

$$\begin{aligned} x \in S \cap T &\Leftrightarrow x \in S \wedge x \in T \\ &\Leftrightarrow (\exists i \in \mathbb{N})\ x = f(i),\ (\exists j \in \mathbb{N})\ x = g(j) \\ &\Leftrightarrow (\exists (i, j) \in \mathbb{N}^2)\ (x, i, j) \in A, \end{aligned}$$

pri čemu je

$$A = \left\{ (x, i, j) \in \mathbb{N}^{n+2} \mid x = f(i),\ x = g(j) \right\}$$

rekurzivan skup. Iz teorema 1.3.3 slijedi da je $S \cap T$ rekurzivno prebrojiv.

□

Teorem 1.3.6 (**Single-Valuedness**).
Neka su $T \subseteq \mathbb{N}^{k+n}$, $S_1 \subseteq \mathbb{N}^k$, $S_2 \subseteq \mathbb{N}^n$ rekurzivno prebrojivi skupovi takvi da za svaki $x \in S_1$ postoji $y \in S_2$ takav da je $(x, y) \in T$. Tada postoji parcijalno rekurzivna funkcija $\varphi : S_1 \to \mathbb{N}^n$ takva da je $\varphi(S_1) \subseteq S_2$ i $(x, \varphi(x)) \in T$, za svaki $x \in S_1$.

Dokaz. Za $S_1 = \emptyset$ tvrdnja očito vrijedi. Ako je $S_1 \neq \emptyset$, tada je i $S_2 \neq \emptyset$. Neka su $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^{k+n}$, $g_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^k$, $g_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^n$ rekurzivne funkcije takve da je $g(\mathbb{N}) = T$, $g_1(\mathbb{N}) = S_1$, $g_2(\mathbb{N}) = S_2$. Neka je

$$S' = \left\{ (x, i) \in \mathbb{N}^{k+1} \mid x = g_1((i)_0),\ (x, g_2((i)_1)) = g((i)_2) \right\}.$$

Prema propoziciji 1.2.3 S' je rekurzivan. Definiramo k-mjesnu funkciju f sa

$$f(x) \simeq \mu i\left((x, i) \in S'\right),\ x \in \mathbb{N}^k$$

f je parcijalno rekurzivna i ako je $x \in \mathbb{N}^k$ u domeni funkcije f, tada zbog $x = g_1((f(x))_0)$, imamo da je $x \in S_1$. S druge strane, ako je $x \in S_1$, tada postoji $y \in S_2$ takav da je $(x, y) \in T$. Odnosno, ako su $k, l \in \mathbb{N}$ takvi da je $x = g_1(k)$ i $y = g_2(l)$, tada postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je $(x, y) = g(m)$. Kako je funkcija $i \mapsto ((i)_0, (i)_1, (i)_2)$ surjekcija $\mathbb{N} \to \mathbb{N}^3$, postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $(k, l, m) = ((i)_0, (i)_1, (i)_2)$, a tada je $(x, i) \in S'$. Dakle, za svaki $x \in S_1$ je skup

$$\{i \in \mathbb{N} \mid (x, i) \in S'\}$$

neprazan, pa se svaki $x \in S_1$ nalazi u domeni od f. Dakle, dokazali smo da je domena od f upravo S_1. Također, za $x \in S_1$ očito je $(x, g_2((f(x))_1)) \in T$. Dakle, funkcija $\varphi : S_1 \to \mathbb{N}^n$ definirana sa

$$\varphi(x) = g_2((f(x))_1),\ x \in S_1$$

ima tražena svojstva.

□

Dokaz sljedeće propozicije može se pronaći u [1].

Propozicija 1.3.7. *Ako je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ rekurzivna, tada je $S = \{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) > 0\}$ rekurzivno prebrojiv.*

Propozicija 1.3.8. *Neka su $T_1, \ldots, T_n$ rekurzivno prebrojivi skupovi u $\mathbb{N}^k$ takvi da je $T_1 \cup \cdots \cup T_n = \mathbb{N}^k$. Tada postoje rekurzivni međusobno disjunktni skupovi $S_1, \ldots, S_n$ u $\mathbb{N}^k$ takvi da je $S_1 \cup \cdots \cup S_n = \mathbb{N}^k$ i $S_i \subseteq T_i$, $i = 1, \ldots, n$.*

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $T_i \neq \emptyset$, za sve $i \in \{1, \ldots, n\}$. Za $i \in \{1, \ldots, n\}$ neka je $g_i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^k$ rekurzivna funkcija takva da $T_i = g_i(\mathbb{N})$. Definiramo $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$,

$$f(x) = \mu y \left(x = g_1(y) \vee x = g_2(y) \vee \cdots \vee x = g_n(y)\right), \; x \in \mathbb{N}^k.$$

Kako je $T_1 \cup \cdots \cup T_n = \mathbb{N}^k$, f je dobro definirana i očito je rekurzivna. Sada definiramo skupove $S_1, \ldots, S_n$ na sljedeći način:

$$S_1 = \left\{x \in \mathbb{N}^k \mid x = g_1(f(x))\right\},$$

$$S_{i+1} = \left\{x \in \mathbb{N}^k \mid x = g_{i+1}(f(x))\right\} \setminus (S_1 \cup \cdots \cup S_i), \quad i < n$$

Indukcijom je lako provjeriti da su $S_1, \ldots, S_n$ rekurzivni, a očito su međusobno disjunktni i $S_i \subseteq T_i$, $i = 1, \ldots, n$. Također, za $x \in \mathbb{N}^k$, ako je i_0 najmanji $i \in \{1, \ldots, n\}$ takav da $x = g_i(f(x))$, tada imamo $x \in S_{i_0}$. Stoga, $S_1 \cup \cdots \cup S_n = \mathbb{N}^k$.

□

1.4 R.r.o. funkcije

Neka su $k, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\Phi : \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$. Za Φ kažemo da je **rekurzivna** ako je funkcija $\overline{\Phi} : \mathbb{N}^{k+n} \to \mathbb{N}$,

$$\overline{\Phi}(x, y) = \chi_{\Phi(x)}(y), \quad x \in \mathbb{N}^k, \; y \in \mathbb{N}^n$$

rekurzivna.

Za $m \in \mathbb{N}$ neka je

$$\mathbb{N}^n_m = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{N}^n \mid x_1, \ldots, x_n \in \{0, \ldots, m\}\} = \{0, \ldots, m\}^n .$$

Za funkciju $\Phi : \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$ kažemo da je **rekurzivno omeđena** ako postoji rekurzivna funkcija $\varphi : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takva da je

$$\Phi(x) \subseteq \mathbb{N}^n_{\varphi(x)},$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Tada za φ kažemo da je **rekurzivna međa** za Φ.

Za $\Phi : \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$ kažemo da je **r.r.o. funkcija** ako je Φ rekurzivna i rekurzivno omeđena.

Propozicija 1.4.1. *Neka su $\Phi, \Psi : \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$ r.r.o. funkcije. Tada su i funkcije $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3 : \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$,*

$$\Lambda_1(x) = \Phi(x) \cup \Psi(x), \quad \Lambda_2(x) = \Phi(x) \cap \Psi(x), \quad \Lambda_3(x) = \Phi(x) \setminus \Psi(x), \quad x \in \mathbb{N}^k$$

r.r.o. funkcije.

Dokaz. Imamo $\overline{\Lambda_1} : \mathbb{N}^{k+n} \to \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\overline{\Lambda_1}(x,y) &= \chi_{\Lambda_1(x)}(y) = \chi_{\Phi(x)\cup\Psi(x)}(y) \\ &= sg\left(\chi_{\Phi(x)}(y) + \chi_{\Psi(x)}(y)\right) \\ &= sg\left(\overline{\Phi}(x,y) + \overline{\Psi}(x,y)\right),\end{aligned}$$

za sve $x \in \mathbb{N}^k, y \in \mathbb{N}^n$. Kako su funkcije $\overline{\Phi}$, $\overline{\Psi}$ rekurzivne, vidimo da je i funkcija $\overline{\Lambda_1}$ rekurzivna, pa je Λ_1 rekurzivna funkcija.
Budući da su Φ, Ψ rekurzivno omeđene, postoje rekurzivne funkcije $\varphi, \psi : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, takve da je

$$\Phi(x) \subseteq \mathbb{N}^n_{\varphi(x)}, \ \Psi(x) \subseteq \mathbb{N}^n_{\psi(x)},$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Neka je $\lambda : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, $\lambda(x) = \max\{\varphi(x), \psi(x)\}$, $x \in \mathbb{N}^k$. Očito je λ rekurzivna i vidimo da je

$$\Lambda_1(x) \subseteq \mathbb{N}^n_{\lambda(x)},$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ pa je Λ_1 rekurzivno omeđena. Dakle, Λ_1 je r.r.o. funkcija.

Slično se pokazuje da su Λ_2 i Λ_3 r.r.o. funkcije.

□

Propozicija 1.4.2. *Neka su $\Phi_1 : \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$, $\Phi_2 : \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^m)$ r.r.o. funkcije. Tada je i $\Phi : \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^{n+m})$,*

$$\Phi(x) = \Phi_1(x) \times \Phi_2(x), \quad x \in \mathbb{N}^k$$

r.r.o. funkcija.

Dokaz. Neka su $\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne međe za Φ_1 i Φ_2. Tada je očito $\varphi := \varphi_1 + \varphi_2$ rekurzivna međa za Φ. Dakle, Φ je rekurzivno omeđena.
Neka je $\overline{\Phi} : \mathbb{N}^{k+n+m} \to \mathbb{N}$,

$$\overline{\Phi}(x,y,z) = \chi_{\Phi(x)}(y,z), \quad x \in \mathbb{N}^k, \ y \in \mathbb{N}^n, \ z \in \mathbb{N}^m$$

Budući da je

$$(y,z) \in \Phi(x) \ \Leftrightarrow \ y \in \Phi_1(x), \ z \in \Phi_2(x),$$

imamo

$$\overline{\Phi}(x,y,z) = \chi_{\Phi_1(x)}(y) \cdot \chi_{\Phi_2(x)}(z) = \overline{\Phi_1}(x,y) \cdot \overline{\Phi_2}(x,z),$$

za sve $x \in \mathbb{N}^k$, $y \in \mathbb{N}^n$, $z \in \mathbb{N}^m$. Dakle, Φ je rekurzivna funkcija.

□

Lema 1.4.3. *Neka je $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. Tada postoje rekurzivne funkcije $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^n$, $\omega : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takve da je*

$$\mathbb{N}^n_m \subseteq \{g(i) \mid 0 \leq i \leq \omega(m)\},$$

za svaki $m \in \mathbb{N}$.

Dokaz. Definiramo $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^n,\ \omega : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$,

$$g(i) = ((i)_1, \dots, (i)_n)\,, \quad i \in \mathbb{N}$$

$$\omega(m) = p_1^{m+1} \cdots p_n^{m+1}, \quad m \in \mathbb{N}$$

Imamo:

$$(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{N}^n_m \ \Rightarrow\ y_1, \dots, y_n \le m \ \Rightarrow\ p_1^{y_1+1} \cdots p_n^{y_n+1} \le \omega(m)$$

Sada za $i = p_1^{y_1+1} \cdots p_n^{y_n+1}$ vrijedi $g(i) = (y_1, \dots, y_n)$ te $i \le \omega(m)$.

□

Propozicija 1.4.4. *Neka je* $\Phi : \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$ *r.r.o. funkcija. Tada je*

$$S = \left\{x \in \mathbb{N}^k \mid \Phi(x) = \emptyset\right\}$$

rekurzivan skup.

Dokaz. Neka je $\varphi : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija takva da je $\Phi(x) \subseteq \mathbb{N}^n_{\varphi(x)}$, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Neka su g i ω funkcije iz prethodne leme. Tada je za $x \in \mathbb{N}^k$

$$\mathbb{N}^n_{\varphi(x)} \subseteq \{g(i) \mid 0 \le i \le \omega(\varphi(x))\}\,,$$

iz čega slijedi

$$\Phi(x) \subseteq \{g(i) \mid 0 \le i \le \omega(\varphi(x))\}\,.$$

Sada imamo:

$$\begin{aligned} x \in S \ &\Leftrightarrow\ \Phi(x) = \emptyset \\ &\Leftrightarrow\ g(i) \notin \Phi(x),\ \forall i \in \{0, \dots, \omega(\varphi(x))\} \\ &\Leftrightarrow\ \overline{\Phi}(x, g(i)) = 0,\ \forall i \in \{0, \dots, \omega(\varphi(x))\} \\ &\Leftrightarrow\ \sum_{i=0}^{\omega(\varphi(x))} \overline{\Phi}(x, g(i)) = 0 \end{aligned}$$

Kako je funkcija $F : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$,

$$F(x) = \sum_{i=0}^{\omega(\varphi(x))} \overline{\Phi}(x, g(i)), \quad x \in \mathbb{N}^k$$

rekurzivna te $\chi_S(x) = \overline{sg}(F(x))$, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$, slijedi da je S rekurzivan skup.

□

Korolar 1.4.5. *Neka su $\Phi, \Psi : \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$ r.r.o. funkcije. Tada su skupovi*

$$S = \left\{x \in \mathbb{N}^k \mid \Phi(x) \subseteq \Psi(x)\right\}, \quad T = \left\{x \in \mathbb{N}^k \mid \Phi(x) = \Psi(x)\right\}$$

rekurzivni.

Dokaz. Očito je da za $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$\Phi(x) \subseteq \Psi(x) \Leftrightarrow \Phi(x) \setminus \Psi(x) = \emptyset$$

Definiramo funkciju $\Lambda : \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$, $\Lambda(x) = \Phi(x) \setminus \Psi(x)$, $x \in \mathbb{N}^k$. Prema propoziciji 1.4.1, Λ je r.r.o. funkcija.
Sada je $S = \left\{x \in \mathbb{N}^k \mid \Lambda(x) = \emptyset\right\}$, pa je prema propoziciji 1.4.4 S rekurzivan skup.
Imamo

$$T = S \cap \left\{x \in \mathbb{N}^k \mid \Psi(x) \subseteq \Phi(x)\right\}$$

Kako je presjek rekurzivnih skupova rekurzivan, T je rekurzivan.

□

Za $\Phi : \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$ i $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}^m$ definiramo funkciju $f(\Phi) : \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^m)$ sa

$$f(\Phi)(x) = f(\Phi(x)), \ x \in \mathbb{N}^k.$$

Teorem 1.4.6. *Neka je $\Phi : \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$ r.r.o. funkcija i $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}^m$ rekurzivna funkcija. Tada je $f(\Phi)$ r.r.o. funkcija.*

Dokaz. Neka su g i ω funkcije iz leme 1.4.3 te $\varphi : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija takva da je $\Phi(x) \subseteq \mathbb{N}^n_{\varphi(x)}$, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$.
Kako je za $x \in \mathbb{N}^k$,

$$\Phi(x) \subseteq \mathbb{N}^n_{\varphi(x)} \subseteq \{g(i) \mid 0 \leq i \leq \omega(\varphi(x))\}$$

imamo

$$f(\Phi(x)) \subseteq \{f(g(i)) \mid 0 \leq i \leq \omega(\varphi(x))\}$$

Neka su $f_1, \ldots, f_m : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ koordinatne funkcije od f. Definiramo $F : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$,

$$F(y) = f_1(y) + \cdots + f_m(y), \quad y \in \mathbb{N}^n$$

Očito je F rekurzivna i za svaki $y \in \mathbb{N}^n$ vrijedi $f(y) \in \mathbb{N}^m_{F(y)}$. Definiramo funkciju $\psi : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$,

$$\psi(x) = \sum_{i=0}^{\omega(\varphi(x))} F(g(i)), \quad x \in \mathbb{N}^k$$

ψ je rekurzivna i za $x \in \mathbb{N}^k$, $0 \leq i \leq \omega(\varphi(x))$ vrijedi $F(g(i)) \leq \psi(x)$, a onda i $\mathbb{N}^m_{F(g(i))} \subseteq \mathbb{N}^m_{\psi(x)}$. Kako je $f(g(i)) \in \mathbb{N}^m_{F(g(i))}$, za svaki $i \in \mathbb{N}$, imamo

$$\{f(g(i)) \mid 0 \leq i \leq \omega(\varphi(x))\} \subseteq \mathbb{N}^m_{\psi(x)},$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Iz ovoga slijedi da je

$$f(\Phi)(x) = f\left(\Phi(x)\right) \subseteq \mathbb{N}^m_{\psi(x)},$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Dakle $f(\Phi)$ je rekurzivno omeđena.

Preostaje još dokazati da je $f(\Phi)$ rekurzivna. Neka je $\overline{f(\Phi)} : \mathbb{N}^{k+m} \to \mathbb{N}$,

$$\overline{f(\Phi)}(x, z) = \chi_{f(\Phi)(x)}(z), \quad x \in \mathbb{N}^k,\ z \in \mathbb{N}^m$$

Za sve $x \in \mathbb{N}^k$, $z \in \mathbb{N}^m$ imamo

$$\begin{aligned}
\overline{f(\Phi)}(x, z) = 1 \ &\Leftrightarrow \ z \in f(\Phi)(x) \ \Leftrightarrow \ z \in f\left(\Phi(x)\right)\\
&\Leftrightarrow \ (\exists y \in \Phi(x))\ z = f(y)\\
&\Leftrightarrow \ (\exists i \in \{0, \ldots, \omega(\varphi(x))\})\ z = f(g(i)),\ g(i) \in \Phi(x)\\
&\Leftrightarrow \ (\exists i \in \{0, \ldots, \omega(\varphi(x))\})\ \chi_T(z, f(g(i)) > 0,\ \overline{\Phi}(x, g(i)) > 0\\
&\Leftrightarrow \ \sum_{i=0}^{\omega(\varphi(x))} \chi_T(z, f(g(i))) \cdot \overline{\Phi}(x, g(i)) > 0,
\end{aligned}$$

pri čemu je $T = \left\{(z_1, z_2) \in \mathbb{N}^{2m} \mid z_1, z_2 \in \mathbb{N}^m,\ z_1 = z_2\right\}$. Ako definiramo funkciju $G : \mathbb{N}^{k+m} \to \mathbb{N}$,

$$G(x, z) = \sum_{i=0}^{\omega(\varphi(x))} \chi_T(z, f(g(i))) \cdot \overline{\Phi}(x, g(i)), \quad x \in \mathbb{N}^k,\ z \in \mathbb{N}^m$$

vidimo da je G rekurzivna i vrijedi

$$\overline{f(\Phi)}(x, z) = 1 \ \Leftrightarrow \ G(x, z) > 0,$$

za svake $x \in \mathbb{N}^k$, $z \in \mathbb{N}^m$. Dakle $\overline{f(\Phi)} = sg \circ G$, pa je $\overline{f(\Phi)}$ rekurzivna, a onda i $f(\Phi)$. Slijedi da je $f(\Phi)$ r.r.o. funkcija.

□

Primjer 1.4.7. Neka je $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^n$ rekurzivna funkcija. Definiramo funkciju $\Psi : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$,

$$\Psi(i) = \{g(0), \ldots, g(i)\} = g\left(\{0, \ldots, i\}\right), \quad i \in \mathbb{N}$$

Tvrdimo da je Ψ r.r.o. funkcija. Neka je $\Phi : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$,

$$\Phi(i) = \{0, \ldots, i\}, \quad i \in \mathbb{N}$$

Φ je rekurzivna jer vrijedi $\overline{\Phi}(i, y) = \overline{sg}(y \dot{-} i)$, za sve $i, y \in \mathbb{N}$. Također, Φ je rekurzivno omeđena jer je $\Phi(i) \subseteq \mathbb{N}^1_i$. Dakle, Φ je r.r.o. funkcija. Imamo da je $\Psi(i) = g(\Phi(i))$, za svaki $i \in \mathbb{N}$, pa prema prethodnom teoremu slijedi da je Ψ r.r.o. funkcija.

□

Napomena 1.4.8. Ako je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ rekurzivna i $\Phi : \mathbb{N}^n \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^m)$ r.r.o. funkcija, tada je $\Phi \circ f : \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^m)$ r.r.o. funkcija. Naime, ako je φ neka rekurzivna međa za Φ, tada je očito $\Phi(f(x)) \subseteq \mathbb{N}^m_{\varphi(f(x))}$, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Također za $\overline{\Phi \circ f} : \mathbb{N}^{k+m} \to \mathbb{N}$ imamo da je

$$\overline{\Phi \circ f}(x, z) = \chi_{(\Phi \circ f)(x)}(z) = \chi_{\Phi(f(x))}(z) = \overline{\Phi}(f(x), z),$$

za sve $x \in \mathbb{N}^k,\ z \in \mathbb{N}^m$. Kako su $\overline{\Phi},\ f$ rekurzivne, vidimo da je i $\overline{\Phi \circ f}$ rekurzivna. Dakle, $\Phi \circ f$ je r.r.o. □

Teorem 1.4.9. *Neka je $T \subseteq \mathbb{N}^n$ rekurzivno prebrojiv skup te neka je $\Phi : \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$ r.r.o. funkcija. Tada je skup*

$$S = \left\{x \in \mathbb{N}^k \mid \Phi(x) \subseteq T\right\}$$

rekurzivno prebrojiv.

Dokaz. Ako je $T = \emptyset$, tada je $S = \left\{x \in \mathbb{N}^k \mid \Phi(x) = \emptyset\right\}$ pa je prema propoziciji 1.4.4 S rekurzivan, a onda i rekurzivno prebrojiv.

Neka je $T \neq \emptyset$ i $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^n$ rekurzivna funkcija takva da je $g(\mathbb{N}) = T$. Definiramo funkciju $\Psi : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$,

$$\Psi(i) = \{g(0), \ldots, g(i)\}, \quad i \in \mathbb{N}$$

Prema primjeru 1.4.7, Ψ je r.r.o. Uočimo da je $T = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Psi(i)$. Neka je

$$\Omega = \left\{(x, i) \in \mathbb{N}^{k+1} \mid \Phi(x) \subseteq \Psi(i)\right\}$$

Budući da su prema napomeni 1.4.8, $\Phi_1(x, i) = \Phi(x)$ i $\Psi_1(x, i) = \Psi(i)$, za $x \in \mathbb{N}^k,\ i \in \mathbb{N}$, r.r.o funkcije $\mathbb{N}^{k+1} \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$ i vrijedi

$$\Omega = \left\{(x, i) \in \mathbb{N}^{k+1} \mid \Phi_1(x, i) \subseteq \Psi_1(x, i)\right\},$$

prema korolaru 1.4.5, Ω je rekurzivan skup. Sada je:

$$\begin{aligned} x \in S &\Leftrightarrow \Phi(x) \subseteq T \\ &\Leftrightarrow (\exists i \in \mathbb{N})\ \Phi(x) \subseteq \Psi(i) \\ &\Leftrightarrow (\exists i \in \mathbb{N})\ (x, i) \in \Omega \end{aligned}$$

Prema teoremu 1.3.3, S je rekurzivno prebrojiv skup.

□

Teorem 1.4.10. *Neka su $k, n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i $\Phi : \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$, $\Psi : \mathbb{N}^n \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^m)$ r.r.o. funkcije. Definiramo $\Lambda : \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^m)$,*

$$\Lambda(x) = \bigcup_{y \in \Phi(x)} \Psi(y), \quad x \in \mathbb{N}^k$$

Tada je Λ r.r.o. funkcija.

Dokaz. Neka su g i ω funkcije iz leme 1.4.3 te φ i ψ rekurzivne međe za Φ i Ψ, respektivno. Tada je, za $x \in \mathbb{N}^k$,

$$\Phi(x) \subseteq \mathbb{N}^n_{\varphi(x)} \subseteq \{g(i) \mid 0 \le i \le \omega(\varphi(x))\} \tag{1.4.1}$$

Iz ovoga slijedi

$$\Lambda(x) = \bigcup_{y \in \Phi(x)} \Psi(y) \subseteq \bigcup_{i=0}^{\omega(\varphi(x))} \Psi(g(i)) \subseteq \bigcup_{i=0}^{\omega(\varphi(x))} \mathbb{N}^m_{\psi(g(i))} \subseteq \mathbb{N}^m_{\lambda(x)},$$

gdje je $\lambda : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$,

$$\lambda(x) = \sum_{i=0}^{\omega(\varphi(x))} \psi(g(i)), \quad x \in \mathbb{N}^k$$

Očito je λ rekurzivna funkcija i imamo da je

$$\Lambda(x) \subseteq \mathbb{N}^m_{\lambda(x)},$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Dakle, Λ je rekurzivno omeđena.

Neka su $x \in \mathbb{N}^k$, $z \in \mathbb{N}^m$. Imamo

$$\begin{aligned}
\overline{\Lambda}(x, z) = 1 &\Leftrightarrow z \in \Lambda(x) \\
&\Leftrightarrow (\exists y \in \Phi(x))\ z \in \Psi(y) \\
&\overset{(1.4.1)}{\Leftrightarrow} (\exists y \in \{g(i) \mid 0 \le i \le \omega(\varphi(x))\})\ z \in \Psi(y),\ y \in \Phi(x) \\
&\Leftrightarrow (\exists i \in \{0, \ldots, \omega(\varphi(x))\})\ z \in \Psi(g(i)),\ g(i) \in \Phi(x) \\
&\Leftrightarrow (\exists i \in \{0, \ldots, \omega(\varphi(x))\})\ \overline{\Psi}(g(i), z) \cdot \overline{\Phi}(x, g(i)) > 0 \\
&\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{\omega(\varphi(x))} \overline{\Psi}(g(i), z) \cdot \overline{\Phi}(x, g(i)) > 0
\end{aligned}$$

Vidimo da je

$$\overline{\Lambda}(x,z) = sg\left(\sum_{i=0}^{\omega(\varphi(x))} \overline{\Psi}(g(i),z)\cdot\overline{\Phi}(x,g(i))\right),$$

za sve $x \in \mathbb{N}^k,\ z \in \mathbb{N}^m$ pa je Λ rekurzivna, a onda i r.r.o. funkcija.

□

Napomena 1.4.11. Funkcija $\Psi : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$,

$$\Psi(i) = \left\{(i)_0, \dots, (i)_{\bar{i}}\right\}, \quad i \in \mathbb{N}$$

je r.r.o. Imamo

$$\begin{aligned}\Psi(i) &= \{\sigma(i,0), \dots, \sigma(i,\eta(i))\}\\ &= \sigma\left(\{(i,0),\dots,(i,\eta(i))\}\right), \quad i \in \mathbb{N},\end{aligned}$$

pri čemu je $\sigma(i,k) = (i)_k$, $\eta(i) = \bar{i}$, za sve $i,k \in \mathbb{N}$. Neka je $\Phi : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$,

$$\Phi(i) = \{(i,0),\dots,(i,\eta(i))\}, \quad i \in \mathbb{N}$$

Imamo da je

$$\overline{\Phi}(i,x,y) = \overline{sg}\left(|x-i| + \prod_{k=0}^{\eta(i)} |y-k|\right), \quad i,x,y \in \mathbb{N}$$

pa vidimo da je $\overline{\Phi}$ rekurzivna. Također, kako je $\eta(i) \leq i$, za svaki $i \in \mathbb{N}$, imamo da je $\Phi(i) \subseteq \mathbb{N}^2_i$, za sve $i \in \mathbb{N}$. Dakle, Φ je r.r.o. funkcija. Kako je $\Psi(i) = \sigma\left(\Phi(i)\right)$, za sve $i \in \mathbb{N}$, iz teorema 1.4.6 slijedi da je Ψ r.r.o. funkcija. Ubuduće ćemo za $i \in \mathbb{N}$ skup $\Psi(i)$ označavati s $[i]$, odnosno

$$[i] := \left\{(i)_0, \dots, (i)_{\bar{i}}\right\}, \quad i \in \mathbb{N}$$

Propozicija 1.4.12. *Neka je $\Phi : \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ r.r.o. funkcija takva da je $\Phi(x) \neq \emptyset$, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Tada postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takva da je $\Phi(x) = [f(x)]$, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$.*

Dokaz. Definiramo skup

$$T = \left\{(x,l) \in \mathbb{N}^{k+1} \mid \Phi(x) = [l]\right\}.$$

Prema korolaru 1.4.5, T je rekurzivan. Nadalje, kako je

$$\{[l] \mid l \in \mathbb{N}\}$$

skup svih konačnih nepraznih podskupova od $\mathbb{N}$, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ postoji $l \in \mathbb{N}$ takav da je $(x, l) \in T$. Sada prema teoremu 1.3.6 postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takva da je $(x, f(x)) \in T$, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Dakle vidimo da je

$$\Phi(x) = [f(x)],$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$.

□

Poglavlje 2

Izračunljiv metrički prostor

2.1 Osnovni pojmovi i primjeri

Izračunljiv metrički prostor je uređena trojka (X, d, α), gdje je (X, d) metrički prostor, $\alpha : \mathbb{N} \to X$ niz gust u (X, d) takav da je funkcija

$$(i, j) \mapsto d(\alpha_i, \alpha_j)$$

rekurzivna $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$.

Primjer 2.1.1. Neka je d Euklidska metrika na $\mathbb{R}^n$ te $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}^n$ niz definiran sa

$$\alpha(i) = \left((-1)^{(i)_0} \frac{(i)_1}{(i)_2 + 1}, (-1)^{(i)_3} \frac{(i)_4}{(i)_5 + 1}, \dots, (-1)^{(i)_{3n-3}} \frac{(i)_{3n-2}}{(i)_{3n-1} + 1}\right), \quad i \in \mathbb{N}$$

Tada je $(\mathbb{R}^n, d, \alpha)$ izračunljiv metrički prostor.
Uočimo prvo da je α surjekcija. Naime, za proizvoljnu n-torku $x \in \mathbb{Q}^n$, imamo da je

$$x = \left((-1)^{a_0} \frac{a_1}{a_2 + 1}, (-1)^{a_3} \frac{a_4}{a_5 + 1}, \dots, (-1)^{a_{3n-3}} \frac{a_{3n-2}}{a_{3n-1} + 1}\right),$$

za neke $a_0, a_1, \dots, a_{3n-1} \in \mathbb{N}$. Sada za

$$i = p_0^{a_0+1} p_1^{a_1+1} \cdots p_{3n-1}^{a_{3n-1}+1}$$

imamo $\alpha(i) = x$. Budući da je $\mathbb{Q}^n$ gust u $(\mathbb{R}^n, d)$, vidimo da je α gust niz u $(\mathbb{R}^n, d)$.

Preostaje pokazati da je funkcija $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$, $f(i, j) = d(\alpha(i), \alpha(j))$ rekurzivna. Označimo $\alpha_1, \dots, \alpha_n : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ komponentne funkcije od α, odnosno

$$\alpha_k(i) = (-1)^{(i)_{3k-3}} \frac{(i)_{3k-2}}{(i)_{3k-1} + 1}, \quad k = 1, \dots, n, \ i \in \mathbb{N}$$

Očito je α_k rekurzivna za $k = 1, \dots, n$ te imamo da je

$$f(i,j) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left(\alpha_k(i) - \alpha_k(j)\right)^2}, \quad i, j \in \mathbb{N}$$

Iz propozicije 1.2.2 lako vidimo da je funkcija $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{Q}$,

$$g(i,j) = \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k(i) - \alpha_k(j))^2, \quad i, j \in \mathbb{N}$$

rekurzivna i nenegativna, dakle postoje rekurzivne funkcije $a, b : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $b(i,j) \neq 0$, za sve $i, j \in \mathbb{N}$ takve da je $g(i,j) = \frac{a(i,j)}{b(i,j)}$, $i, j \in \mathbb{N}$. Dakle

$$f(i,j) = \sqrt{\frac{a(i,j)}{b(i,j)}} = \frac{\sqrt{a(i,j)}}{\sqrt{b(i,j)}}, \quad i, j \in \mathbb{N}$$

Kako bi dokazali da je f rekurzivna dovoljno je dokazati sljedeće:

Neka je $h : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija te $H : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ definirana sa $H(x) = \sqrt{h(x)}$, $x \in \mathbb{N}^k$. Tada je H rekurzivna.

Naime, tada će iz propozicije 1.2.5 slijediti da je f rekurzivna.
Fiksirajmo $x \in \mathbb{N}^k$ i neka je

$$\sqrt{h(x)} = A + 0.a_1a_2a_3... = A + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{a_i}{10^i}, \quad A \in \mathbb{N}, \ a_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$$

Imamo:

$$A + 0.a_1a_2 \dots a_n \leq \sqrt{h(x)} < A + 0.a_1a_2 \dots a_n + \frac{1}{10^n}, \ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

Množenjem s 10^n te kvadriranjem gornjih nejednakosti dobivamo:

$$(10^n A + \overline{a_1a_2 \dots a_n})^2 \leq h(x) \cdot 10^{2n} < (10^n A + \overline{a_1a_2 \dots a_n} + 1)^2, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

Označimo li

$$y(x,n) = \begin{cases} A, & n = 0 \\ 10^n A + \overline{a_1a_2 \dots a_n}, & n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \end{cases}$$

vidimo da je tada

$$y(x,n) = \mu z\left(z^2 \leq h(x) \cdot 10^{2n} \wedge h(x) \cdot 10^{2n} < (z+1)^2\right), \quad x \in \mathbb{N}^k, \ n \in \mathbb{N}$$

Dakle $y : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ je rekurzivna funkcija.
Neka je $G : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ definirana sa:

$$G(x,n) = \begin{cases} y(x,0), & n = 0 \\ ost(y(x,n) \dot{-} 10^n y(x,0), 10), & n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \end{cases}$$

pri čemu za $a, b \in \mathbb{N}, b \neq 0$ s $ost(a,b)$ označavamo ostatak pri djeljenju broja a sa b. Funkcija G je rekurzivna te uočimo da je $G(x,0) = \lfloor H(x) \rfloor$ a za $n \neq 0$, $G(x,n)$ je upravo n-ta decimala broja $H(x)$ (tj. $G(x,n) = a_n$ u oznakama kao gore).
Sada je očito funkcija $F : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$,

$$F(x,n) = G(x,0) + G(x,1) \cdot \frac{1}{10} + \cdots + G(x,n) \cdot \frac{1}{10^n}, \quad x \in \mathbb{N}^k, \; n \in \mathbb{N}$$

rekurzivna, te vrijedi

$$|H(x) - F(x,n)| < \frac{1}{10^n} \leq \frac{1}{2^n},$$

za sve $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{N}^k$. Dakle, H je rekurzivna funkcija.

Iz svega ovoga slijedi da je $(\mathbb{R}^n, d, \alpha)$ izračunljiv metrički prostor.

□

Primjer 2.1.2. Označimo sa I^∞ skup svih nizova u $[0,1]$ te neka je $d : I^\infty \times I^\infty \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa

$$d((x_i)_{i\in\mathbb{N}}, (y_i)_{i\in\mathbb{N}}) = \sup\left\{ \tfrac{1}{2^{i+1}} |x_i - y_i| \mid i \in \mathbb{N} \right\}.$$

Lako je vidjeti da je d metrika na I^∞. Metrički prostor (I^∞, d) nazivamo **Hilbertova kocka**.

Za $n \in \mathbb{N}$ neka je

$$A_n = \{(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in I^\infty \mid (\forall i \leq n) \; x_i \in \mathbb{Q}, \; (\forall i > n) \; x_i = 0\}$$

te

$$\mathcal{A} = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$$

Dakle $\mathcal{A}$ je zapravo skup svih konačnih racionalnih nizova u $[0,1]$.

Pokažimo da je $\mathcal{A}$ gust u (I^∞, d), odnosno da je $\bar{\mathcal{A}} = I^\infty$. Za to je dovoljno vidjeti da za svaki niz $(x_i) \in I^\infty$ i svaki $r > 0$ vrijedi $K((x_i), r) \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$.
Neka su dakle $(x_i) \in I^\infty, r > 0$ proizvoljni. Odaberimo $i_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\frac{1}{2^{i_0+1}} < \frac{r}{2},$$

te neka su za $i \in \{1, \dots, i_0\}$, $q_i \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ takvi da je

$$|x_i - q_i| < 2^{i+1} \cdot \frac{r}{2}$$

Takve q_i možemo odabrati zbog gustoće $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ u $[0, 1]$. Definirajmo niz (y_i) na sljedeći način:

$$y_i = \begin{cases} q_i, & i \in \{1, \dots, i_0\} \\ 0, & i > i_0 \end{cases}$$

Vidimo da je za $i \in \{1, \dots i_0\}$,

$$\frac{1}{2^{i+1}} |x_i - y_i| < \frac{r}{2},$$

a za $i > i_0$ imamo

$$\frac{1}{2^{i+1}} |x_i - y_i| = \frac{1}{2^{i+1}} |x_i| \leq \frac{1}{2^{i+1}} < \frac{1}{2^{i_0+1}} < \frac{r}{2}$$

Slijedi da je $d((x_i), (y_i)) \leq \frac{r}{2} < r$, pa je $(y_i) \in K((x_i), r)$, a očito je i $(y_i) \in \mathcal{A}$. Dakle, $K((x_i), r) \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$ pa vidimo da je $\mathcal{A}$ gust u (I^∞, d).

Neka je $\beta : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{Q}$ definirana sa

$$\beta(i, k) = \frac{(i)_{2k}}{(i)_{2k+1} + 1} \cdot \overline{sg}\Big((i)_{2k} \dot{-} ((i)_{2k+1} + 1)\Big), \ i, k \in \mathbb{N}$$

Tada je β rekurzivna i očito je $\beta(i, k) \in \mathbb{Q} \cap [0, 1], \forall i, k \in \mathbb{N}$.
Sada definiramo funkciju $\alpha : \mathbb{N} \to \mathcal{A}$ sa

$$\alpha(i) = \big(\beta(i, k)\big)_{k \in \mathbb{N}}$$

Uočimo da je α dobro definirana. Naime, $\beta(i, k) = 0$ za $2k \geq i$, a već smo komentirali da je $\beta(i, k) \in \mathbb{Q} \cap [0, 1], \forall i, k \in \mathbb{N}$. Dakle, zaista je $\alpha(i) \in \mathcal{A}, \forall i \in \mathbb{N}$. No α je također i surjektivna. Proizvoljan niz $x \in \mathcal{A}$ je oblika

$$x = \Big(\frac{a_0}{a_1 + 1}, \frac{a_2}{a_3 + 1}, \dots, \frac{a_{2n}}{a_{2n+1} + 1}, 0, 0, \dots\Big),$$

za neke $n, a_0, \dots, a_{2n+1} \in \mathbb{N}$ takve da je $\frac{a_{2k}}{a_{2k+1} + 1} \in [0, 1]$, pa je onda

$$\overline{sg}\Big(a_{2k} \dot{-} (a_{2k+1} + 1)\Big) = 1,$$

za $k = 0, \dots, n$.
Ukoliko definiramo

$$i = p_0^{a_0+1} p_1^{a_1+1} \cdots p_{2n+1}^{a_{2n+1}+1}$$

vidimo da je $\alpha(i) = x$.
Tvrdimo da je (I^∞, d, α) izračunljiv metrički prostor. Pokazali smo da je α gust niz u (I^∞, d), preostaje još dokazati da je funkcija $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$ definirana sa

$$f(i, j) = d(\alpha(i), \alpha(j)),\ i, j \in \mathbb{N}$$

rekurzivna.
Iz definicije od d i α slijedi da je

$$f(i, j) = \sup\left\{\tfrac{1}{2^{k+1}} |\beta(i, k) - \beta(j, k)| \mid k \in \mathbb{N}\right\} = \max\left\{\tfrac{1}{2^{k+1}} |\beta(i, k) - \beta(j, k)| \mid 0 \le k \le i + j\right\}$$

Posljednja jednakost slijedi zbog toga što je $\beta(i, k) = 0$ za $k \ge \dfrac{i}{2}$, pa je onda za proizvoljne $i, j \in \mathbb{N}$ i $k > i + j, \beta(i, k) = \beta(j, k) = 0$. Sada zbog rekurzivnosti funkcija

$$(i, j, k) \mapsto \frac{1}{2^{k+1}} |\beta(i, k) - \beta(j, k)|\,,$$

$$(i, j) \mapsto i + j$$

te propozicije 1.2.5 slijedi da je f rekurzivna.

Dakle (I^∞, d, α) je izračunljiv metrički prostor.

□

Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor.
Za $a \in X$ kažemo da je **izračunljiva točka** u (X, d, α) ako postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je

$$d(a, \alpha_{f(k)}) < 2^{-k},$$

za sve $k \in \mathbb{N}$.
Za niz $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ u X kažemo da je **izračunljiv niz** u (X, d, α) ako postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da je

$$d(x_i, \alpha_{f(i,k)}) < 2^{-k},$$

za sve $i, k \in \mathbb{N}$.
Uočimo da su točke $\alpha_i, i \in \mathbb{N}$ izračunljive jer za rekurzivnu funkciju iz definicije možemo uzeti konstantnu funkciju $f(k) = i,\ k \in \mathbb{N}$. Također, niz $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ je izračunljiv jer rekurzivna funkcija $f(i, k) = i,\ i, k \in \mathbb{N}$ ima traženo svojstvo.
Budući da je rekurzivnih funkcija $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ prebrojivo, vidimo da izračunljivih točaka i izračunljivih nizova u proizvoljnom izračunljivom metričkom prostoru uvijek ima najviše prebrojivo. Stoga ako je X neprebrojiv skup, tada postoje točke koje nisu izračunljive (čak njih neprebrojivo). Za egzistenciju nizova koji nisu izračunljivi dovoljno je da X bude beskonačan.

Neka je $(\mathbb{R}, d, \alpha)$ izračunljiv metrički prostor iz primjera 2.1.1, za $n = 1$. Izračunljive točke u tom prostoru prirodno zovemo **izračunljivim brojevima** i pokazuje se da oni čine polje ([1]). Kao što se i iz same definicije može naslutiti, rekurzivne funkcije $\mathbb{N}^n \to \mathbb{R}$ imaju jedno "dobro" svojstvo u odnosu na taj metrički prostor. Odnosno imamo sljedeći rezultat:

Propozicija 2.1.3. *Neka je $g : \mathbb{N}^n \to \mathbb{R}$ rekurzivna funkcija. Tada je $g(x)$ izračunljiv broj u $(\mathbb{R}, d, \alpha)$, za svaki $x \in \mathbb{N}^n$.*

Dokaz. Neka je $G : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{Q}$ rekurzivna aproksimacija od g i fiksirajmo $x \in \mathbb{N}^n$. Tada za svaki $k \in \mathbb{N}$ imamo
$$d(g(x), G(x, k)) = |g(x) - G(x, k)| < 2^{-k}$$
Budući da je $(k, j) \mapsto \alpha(j) - G(x, k)$ rekurzivna $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{Q}$, skup

$$S = \left\{(k, j) \in \mathbb{N}^2 \mid \alpha(j) = G(x, k)\right\}$$

je rekurzivan prema propoziciji 1.2.3. Definirajmo funkciju $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sa:

$$f(k) \simeq \mu j\,(\alpha(j) = G(x, k)) \simeq \mu j\,(\chi_S(k, j) \simeq 0)$$

Očito je f parcijalno rekurzivna funkcija. Zbog surjektivnosti od α, za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je $(k, j) \in S$, pa vidimo da je f totalna. Dakle f je rekurzivna i imamo da je $\alpha(f(k)) = G(x, k)$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Znači

$$d(g(x), \alpha(f(k))) < 2^{-k},$$

za svaki $k \in \mathbb{N}$, tj. $g(x)$ je izračunljiv broj.

□

Propozicija 2.1.4. *Neka su $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ izračunljivi nizovi u (X, d, α). Tada je funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$, $(i, j) \mapsto d(x_i, y_j)$, rekurzivna.*

Dokaz. Neka su $f, g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije takve da za sve $i, k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$d(x_i, \alpha_{f(i,k)}) < 2^{-k},$$

$$d(y_i, \alpha_{g(i,k)}) < 2^{-k}.$$

Za proizvoljne $i, j, k \in \mathbb{N}$ iz nejednakosti trokuta za d dobivamo

$$d(x_i, y_j) \leq \underbrace{d(x_i, \alpha_{f(i,k)})}_{<2^{-k}} + d(\alpha_{f(i,k)}, \alpha_{g(j,k)}) + \underbrace{d(\alpha_{g(j,k)}, y_j)}_{<2^{-k}} < 2 \cdot 2^{-k} + d(\alpha_{f(i,k)}, \alpha_{g(j,k)})$$

Odnosno imamo

$$d(x_i, y_j) - d(\alpha_{f(i,k)}, \alpha_{g(j,k)}) < 2 \cdot 2^{-k}$$

Sasvim analogno dobivamo i nejednakost

$$d(\alpha_{f(i,k)}, \alpha_{g(j,k)}) - d(x_i, y_j) < 2 \cdot 2^{-k}$$

Sada je

$$\left| d(x_i, y_j) - d(\alpha_{f(i,k)}, \alpha_{g(j,k)}) \right| < 2 \cdot 2^{-k}$$

Funkcija $\mathbb{N}^3 \to \mathbb{R}$,

$$(i, j, k) \mapsto d(\alpha_{f(i,k)}, \alpha_{g(j,k)})$$

je rekurzivna. Neka je $F : \mathbb{N}^4 \to \mathbb{Q}$ njena rekurzivna aproksimacija. Tada imamo

$$\left| d(\alpha_{f(i,k)}, \alpha_{g(j,k)}) - F(i, j, k, l) \right| < 2^{-l},$$

za sve $i, j, k, l \in \mathbb{N}$. Sada je

$$\begin{aligned} \left| d(x_i, y_j) - F(i, j, k, l) \right| &\leq \overbrace{\left| d(x_i, y_j) - d(\alpha_{f(i,k)}, \alpha_{g(j,k)}) \right|}^{<2\cdot 2^{-k}} + \overbrace{\left| d(\alpha_{f(i,k)}, \alpha_{g(j,k)}) - F(i, j, k, l) \right|}^{<2^{-l}} \\ &< 2 \cdot 2^{-k} + 2^{-l}, \end{aligned}$$

za sve $i, j, k, l \in \mathbb{N}$. Uvrstimo li $l = k$ u gornju nejednakost, dobivamo

$$\left| d(x_i, y_j) - F(i, j, k, k) \right| < 3 \cdot 2^{-k},$$

a iz ovoga slijedi

$$\left| d(x_i, y_j) - F(i, j, k + 2, k + 2) \right| < 3 \cdot 2^{-k-2} < 2^{-k},$$

za sve $i, j, k \in \mathbb{N}$. Sada vidimo da je funkcija $(i, j, k) \mapsto F(i, j, k + 2, k + 2)$ rekurzivna aproksimacija funkcije $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$, $(i, j) \mapsto d(x_i, y_j)$. Time je propozicija dokazana.

□

Očito je točka $a \in X$ izračunljiva u (X, d, α) ako i samo ako je konstantan niz $x_n = a$, $n \in \mathbb{N}$ izračunljiv niz. Iz ovoga i prethodne dvije propozicije slijedi:

Korolar 2.1.5. *Neka je (X, d', α') izračunljiv metrički prostor i $(x_i), (y_i)$ izračunljivi nizovi u tom prostoru. Tada je $d'(x_i, y_j)$ izračunljiv broj, za sve $i, j \in \mathbb{N}$. Posebno, ako su a, b izračunljive točke u (X, d', α'), tada je $d'(a, b)$ izračunljiv broj.*

2.2 Hausdorffova metrika

Neka je (X, d) metrički prostor.
Za neprazne podskupove A i B od X te $\varepsilon > 0$ pišemo

$$A \prec_\varepsilon B$$

ako za svaki $a \in A$ postoji $b \in B$ takav da je $d(a, b) < \varepsilon$. Pišemo

$$A \approx_\varepsilon B$$

ako je $A \prec_\varepsilon B$ i $B \prec_\varepsilon A$.

Uočimo da ako su A i B neprazni omeđeni skupovi u (X, d), tada postoji $\varepsilon > 0$ takav da je $A \approx_\varepsilon B$. Naime, kako su A i B omeđeni skupovi, omeđen je i skup $A \cup B$ pa postoje $x_0 \in X$, $R > 0$ takvi da je $A \cup B \subseteq K(x_0, R)$. Sada iz nejednakosti trokuta za d lako vidimo da je $d(a, b) < 2R$, za sve $a \in A, b \in B$ pa možemo uzeti $\varepsilon = 2R$.
Dakle za neprazne i omeđene skupove A i B u (X, d) možemo definirati

$$d_H(A, B) = \inf \{\varepsilon > 0 \mid A \approx_\varepsilon B\} \tag{2.2.1}$$

Označimo sa $\mathcal{H}$ familiju svih nepraznih kompaktnih skupova u (X, d). Budući da je kompaktan skup u metričkom prostoru omeđen, možemo promatrati $d_H : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{R}$, pri čemu je za $A, B \in \mathcal{H}$ vrijednost $d_H(A, B)$ definirana sa (2.2.1).

Iz definicije funkcije d_H je lako vidjeti da za $A, B \in \mathcal{H}$ i $\varepsilon > 0$ takav da je $d_H(A, B) < \varepsilon$ vrijedi da za svaki $a \in A$ postoji $b \in B$ takav da je $d(a, b) < \varepsilon$ te za svaki $b \in B$ postoji $a \in A$ takav da je $d(b, a) < \varepsilon$.

Propozicija 2.2.1. *$d_H : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ je metrika.*

Dokaz. Redom provjeravamo svojstva iz definicije metrike.

Iz definicije d_H je očito da je $d_H(A, B) \geq 0$, za sve $A, B \in \mathcal{H}$.
Neka su $A, B \in \mathcal{H}$ takvi da je $d_H(A, B) = 0$. Želimo pokazati da je tada $A = B$.
Uzmimo proizvoljne $a \in A$, $\varepsilon > 0$. Kako je $d_H(A, B) < \varepsilon$, postoji $b \in B$ takav da je $d(a, b) < \varepsilon$, odnosno $b \in K(a, \varepsilon)$. Stoga vidimo da za proizvoljan $\varepsilon > 0$ vrijedi

$$K(a, \varepsilon) \cap B \neq \emptyset$$

pa je $a \in \overline{B}$.

Kako je B kompaktan, a kompaktan skup u metričkom prostoru je zatvoren, imamo $\overline{B} = B$ te $a \in B$. Dakle $A \subseteq B$. Sasvim analogno vidimo da je $B \subseteq A$, iz čega slijedi $A = B$.

Iz definicije relacije $\approx_\varepsilon$ je očito da je za $A \in \mathcal{H}$,

$$A \approx_\varepsilon A,$$

za sve $\varepsilon > 0$. Iz ovoga slijedi $d_H(A, A) = 0$, za sve $A \in \mathcal{H}$. Dakle, dokazali smo da je $d_H(A, B) = 0$ ako i samo ako je $A = B$, za sve $A, B \in \mathcal{H}$.

Kako je $A \approx_\varepsilon B$ ako i samo ako je $B \approx_\varepsilon A$, za proizvoljne $A, B \in \mathcal{H}$, $\varepsilon > 0$, vidimo da je

$$d_H(A, B) = d_H(B, A),$$

za sve $A, B \in \mathcal{H}$.

Preostaje još dokazati da d_H zadovoljava nejednakost trokuta, odnosno da za proizvoljne $A, B, C \in \mathcal{H}$ vrijedi

$$d_H(A, B) \leq d_H(A, C) + d_H(C, B)$$

Neka su $A, B, C \in \mathcal{H}$ i uzmimo proizvoljan $\varepsilon > 0$.
Budući da je

$$d_H(A, C) + \frac{\varepsilon}{2} > d_H(A, C),$$

imamo da za svaki $a \in A$, postoji $c \in C$ t.d.

$$d(a, c) < d_H(A, C) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Također, zbog

$$d_H(C, B) + \frac{\varepsilon}{2} > d_H(C, B),$$

imamo da za svaki $c \in C$, postoji $b \in B$ t.d.

$$d(c, b) < d_H(C, B) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Slijedi da za svaki $a \in A$ postoji $b \in B$ takav da je

$$d(a, c) + d(c, b) < d_H(A, C) + d_H(C, B) + \varepsilon.$$

Kako je

$$d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b),$$

vidimo da za svaki $a \in A$ postoji $b \in B$ takav da je

$$d(a, b) < d_H(A, C) + d_H(C, B) + \varepsilon,$$

iz čega slijedi

$$A \prec_{d_H(A,C)+d_H(C,B)+\varepsilon} B.$$

Analogno vidimo

$$B \prec_{d_H(A,C)+d_H(C,B)+\varepsilon} A,$$

iz čega slijedi

$$A \approx_{d_H(A,C)+d_H(C,B)+\varepsilon} B,$$

a onda i

$$d_H(A,B) \leq d_H(A,C) + d_H(C,B) + \varepsilon.$$

Kako ovo vrijedi za proizvoljan $\varepsilon > 0$, mora biti

$$d_H(A,B) \leq d_H(A,C) + d_H(C,B).$$

Dakle d_H je metrika.

□

Metriku d_H na $\mathcal{H}$ nazivamo **Hausdorffova metrika**.

Propozicija 2.2.2. *Neka je K neprazan kompaktan skup u (X,d) te $\mathcal{A}$ gust skup u (X,d). Tada za svaki $\varepsilon > 0$ postoji konačan $A \subseteq \mathcal{A}$ takav da je*

$$K \approx_\varepsilon A.$$

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$. Budući da je $\mathcal{A}$ gust skup u (X,d), nije teško vidjeti da je

$$\mathcal{U} = \{K(a,\varepsilon) \mid a \in \mathcal{A}\}$$

otvoren pokrivač od X. No tada je $\mathcal{U}$ ujedno i otvoren pokrivač od K u (X,d) pa budući da je K kompaktan, postoje $n \in \mathbb{N}$, $a_0,\dots,a_n \in \mathcal{A}$ takvi da je

$$K \subseteq \bigcup_{i=0}^{n} K(a_i,\varepsilon).$$

Uočimo da bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je

$$K \cap K(a_i,\varepsilon) \neq \emptyset,$$

$i = 0,\dots,n$. Uzmimo

$$A = \{a_0,...,a_n\}$$

Sada očito za svaki $x \in K$ vrijedi $x \in K(a_i,\varepsilon)$ odnosno $d(x,a_i) < \varepsilon$ za neki $a_i \in A$, pa je $K \prec_\varepsilon A$.
Za proizvoljan $a_i \in A$ vrijedi $K(a_i,\varepsilon) \cap K \neq \emptyset$, pa postoji $x \in K$ takav da je $x \in K(a_i,\varepsilon)$, odnosno $d(x,a_i) < \varepsilon$. Stoga $A \prec_\varepsilon K$. Slijedi $K \approx_\varepsilon A$.

□

Može se pokazati da za $A, B \in \mathcal{H}$ vrijedi

$$d_H(A, B) = \max\left\{\max_{a\in A} d(a, B), \max_{b\in B} d(b, A)\right\}, \tag{2.2.2}$$

pri čemu je za $S \subseteq X$ i $x \in X$,

$$d(x, S) = \inf\{d(x, s) \mid s \in S\}.$$

Iz (2.2.2) se lako vidi da za $A, B \in \mathcal{H}$ i $\varepsilon > 0$ vrijedi:

$$d_H(A, B) < \varepsilon \Leftrightarrow A \approx_\varepsilon B \tag{2.2.3}$$

2.3 Izračunljivi skupovi

Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor.
Točke $\{\alpha_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ nazivamo **racionalne točke**.
Označimo s Λ familiju svih konačnih nepraznih skupova racionalnih točaka. U svrhu daljnjih definicija, željeli bismo pronaći rekurzivne funkcije $\sigma : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $\eta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takve da je

$$\{(\sigma(i, 0), \sigma(i, 1), \ldots, \sigma(i, \eta(i))) \mid i \in \mathbb{N}\} \tag{2.3.4}$$

skup svih nepraznih konačnih nizova u $\mathbb{N}$.

Kako je svaki $A \in \Lambda$ oblika $A = \{\alpha_{a_0}, \ldots, \alpha_{a_n}\}$ za neke $n, a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$, a $(a_0, ..., a_n)$ je konačan niz u $\mathbb{N}$, vidimo da je tada

$$\Lambda = \left\{\left\{\alpha_{\sigma(i,0)}, \alpha_{\sigma(i,1)}, \ldots, \alpha_{\sigma(i,\eta(i))}\right\} \mid i \in \mathbb{N}\right\}.$$

Tvrdimo da je

$$\left\{\left((i)_0, (i)_1, \ldots, (i)_{lh(i)\dot{-}1}\right) \mid i \in \mathbb{N}\right\}$$

skup svih nepraznih konačnih nizova u $\mathbb{N}$. Očito je

$$\left((i)_0, \ldots, (i)_{lh(i)\dot{-}1}\right)$$

konačan neprazan niz u $\mathbb{N}$ za svaki $i \in \mathbb{N}$. Također, ako je $(a_0, \ldots, a_n)$ proizvoljan neprazan konačan niz u $\mathbb{N}$, tada za

$$i = p_0^{a_0+1} p_1^{a_1+1} \cdots p_n^{a_n+1}$$

imamo

$$(a_0, \ldots, a_n) = \left((i)_0, \ldots, (i)_{lh(i)\dot{-}1}\right).$$

Stoga vidimo da za tražene rekurzivne funkcije možemo uzeti $\sigma(i, j) = (i)_j$, $\eta(i) = lh(i) \dot{-} 1$, $i, j \in \mathbb{N}$.

Definiramo

$$\Lambda_i = \left\{\alpha_{\sigma(i,0)}, \ldots, \alpha_{\sigma(i,\eta(i))}\right\}, \ i \in \mathbb{N}. \tag{2.3.5}$$

Vidimo da je $i \mapsto \Lambda_i$ surjekcija $\mathbb{N} \to \Lambda$.
Označimo $\mathcal{A} = \mathrm{Im}\alpha$. Iz definicije izračunljivog metričkog prostora imamo da je $\mathcal{A}$ gust skup u (X, d). Sada iz propozicije 2.2.2 imamo da za proizvoljan neprazan kompaktan skup K u (X, d) i $\varepsilon > 0$ postoji $i \in \mathbb{N}$ tako da je

$$K \approx_\varepsilon \Lambda_i.$$

Za kompaktan neprazan skup K u (X, d) kažemo da je **izračunljiv skup** u (X, d, α) ako postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je

$$K \approx_{2^{-k}} \Lambda_{f(k)},$$

za sve $k \in \mathbb{N}$.

Uočimo da ova definicija ne ovisi o odabiru rekurzivnih funkcija sa svojstvom (2.3.4).

Neka su $\sigma' : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $\eta' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ proizvoljne rekurzivne funkcije sa svojstvom (2.3.4) te skupovi Λ'_i, $i \in \mathbb{N}$ definirani kao u (2.3.5).
Definiramo funkciju g sa

$$g(i) \simeq \mu j\Big(\eta(i) = \eta'(j) \wedge \sigma(i, 0) = \sigma'(j, 0) \wedge \sigma(i, 1) = \sigma'(j, 1) \wedge \cdots \wedge \sigma(i, \eta(i)) = \sigma'(j, \eta'(i))\Big),$$

za $i \in \mathbb{N}$, odnosno

$$g(i) \simeq \min\left\{j \in \mathbb{N} \mid (\sigma(i, 0), \sigma(i, 1), \ldots, \sigma(i, \eta(i)) = (\sigma'(j, 0), \sigma'(j, 1), \ldots, \sigma'(j, \eta'(j))\right\},$$

za $i \in \mathbb{N}$. Relacija R definirana sa $R(i, j)$ ako i samo ako

$$\eta(i) = \eta'(j) \wedge \sigma(i, 0) = \sigma'(j, 0) \wedge \sigma(i, 1) = \sigma'(j, 1) \wedge \cdots \wedge \sigma(i, \eta(i)) = \sigma'(j, \eta'(i)),$$

je rekurzivna. Naime, karakteristična funkcija od R je dana s

$$\chi_R(i, j) = \overline{sg}\Big(|\eta(i) - \eta'(j)| + \sum_{k=0}^{\eta(i)} |\sigma(i, k) - \sigma'(j, k)|\Big), \ i, j \in \mathbb{N}$$

pa je, zbog rekurzivnosti funkcija $\sigma, \sigma', \eta, \eta'$ te $(x, y) \mapsto |x - y|$, rekurzivna.
Dakle g je parcijalno rekurzivna funkcija. No zbog svojstva (2.3.4) vidimo da je g totalna, odnosno za svaki $i \in \mathbb{N}$ postoji $j \in \mathbb{N}$ iz skupa iz definicije od g, pa onda postoji i najmanji element tog skupa. Dakle, $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je rekurzivna.
Uočimo da je $\Lambda_i = \Lambda'_{g(i)}$, za sve $i \in \mathbb{N}$.

Neka je sada K proizvoljan neprazan kompaktan skup u (X, d) takav da postoji $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija takva da je

$$K \approx_{2^{-k}} \Lambda_{f(k)},$$

za sve $k \in \mathbb{N}$. Tada je $g \circ f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ također rekurzivna i vrijedi da je

$$K \approx_{2^{-k}} \Lambda'_{g \circ f(k)},$$

za sve $k \in \mathbb{N}$. Posljednje slijedi iz

$$\Lambda_{f(k)} = \Lambda'_{g(f(k))},$$

za sve $k \in \mathbb{N}$.

Analogno vidimo i obrnutu tvrdnju, ako postoji rekurzivna funkcija f takva da je

$$K \approx_{2^{-k}} \Lambda'_{f(k)},$$

za sve $k \in \mathbb{N}$, tada postoji rekurzivna funkcija h takva da je

$$K \approx_{2^{-k}} \Lambda_{h(k)},$$

za sve $k \in \mathbb{N}$.

Uočimo da je Λ_i izračunljiv skup, za svaki $i \in \mathbb{N}$. Kako je Λ_i konačan i neprazan, očito je da je kompaktan u (X, d). Za funkciju iz definicije izračunljivog skupa možemo uzeti $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(k) = i$, $k \in \mathbb{N}$.

Propozicija 2.3.1. *Funkcija* $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$, $f(i, j) = d_H(\Lambda_i, \Lambda_j)$, $i, j \in \mathbb{N}$ *je rekurzivna.*

Dokaz. Prema (2.2.2) vidimo da je:

$$f(i, j) = \max \left\{ \max_{a \in \Lambda_i} d(a, \Lambda_j), \max_{b \in \Lambda_j} d(b, \Lambda_i) \right\}$$

Za proizvoljan $a \in \Lambda_i$ prema (2.3.5) vidimo da je $a = \alpha_{\sigma(i,k)}$ za neki $k \in \{0, \ldots, \eta(i)\}$. Sada je

$$d(a, \Lambda_j) = d(\alpha_{\sigma(i,k)}, \Lambda_j) = \min\{d(\alpha_{\sigma(i,k)}, \alpha_{\sigma(j,l)}) \mid l = 0, \ldots, \eta(j))\}$$

Funkcija $(i, k, j, l) \to d(\alpha_{\sigma(i,k)}, \alpha_{\sigma(j,l)})$ je rekurzivna funkcija $\mathbb{N}^4 \to \mathbb{R}$ zbog rekurzivnosti funkcija $(i, j) \to d(\alpha_i, \alpha_j)$ i σ. Stoga, zbog rekurzivnosti od η i propozicije 1.2.5 vidimo da je funkcija
$(i, k, j) \to d(\alpha_{\sigma(i,k)}, \Lambda_j)$ rekurzivna $\mathbb{N}^3 \to \mathbb{R}$. Sada imamo

$$\max_{a \in \Lambda_i} d(a, \Lambda_j) = \max\{d(\alpha_{\sigma(i,k)}, \Lambda_j) \mid k = 0, \ldots, \eta(i)\}$$

Ponovno zbog propozicije 1.2.5 i prethodnog zaključka imamo da je funkcija

$$g(i, j) = \max_{a \in \Lambda_i} d(a, \Lambda_j)$$

rekurzivna $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$. Sada je

$$f(i, j) = \max\{g(i, j), g(j, i)\}, \quad i, j \in \mathbb{N},$$

pa je prema propoziciji 1.2.5, f rekurzivna. □

Iz svega prethodnog dobivamo sljedeći rezultat:

Korolar 2.3.2. *$(\mathcal{H}, d_H, \Lambda)$ je izračunljiv metrički prostor. Točka $K \in \mathcal{H}$ je izračunljiva u $(\mathcal{H}, d_H, \Lambda)$ ako i samo ako je K izračunljiv skup u (X, d, α).*

Dokaz. Prema 2.2.1 $(\mathcal{H}, d_H)$ je metrički prostor, a iz propozicije 2.2.2 i (2.2.3) vidimo da za svaki $K \in \mathcal{H}$ i $\varepsilon > 0$ postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $d_H(K, \Lambda_i) < \varepsilon$, dakle Λ je gust niz u $(\mathcal{H}, d_H)$.
Sada iz ovoga i prethodne propozicije vidimo da je $(\mathcal{H}, d_H, \Lambda)$ zaista izračunljiv metrički prostor.

Točka $K \in \mathcal{H}$ je izračunljiva ako postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je

$$d_H(K, \Lambda_{f(k)}) < 2^{-k},$$

za sve $k \in \mathbb{N}$. No iz (2.2.3) vidimo da posljednje vrijedi ako i samo ako je

$$K \approx_{2^{-k}} \Lambda_{f(k)},$$

za sve $k \in \mathbb{N}$, odnosno, ako i samo ako je K izračunljiv skup u (X, d, α).

□

Dalje bismo htjeli povezati pojmove izračunljive točke, izračunljivog niza i izračunljivog skupa. Navodimo jednostavan primjer koji pokazuje da niz ne mora biti izračunljiv čak ni uz neka naizgled "jaka" dodatna svojstva.

Primjer 2.3.3. Neka je d diskretna metrika na $\mathbb{N}$, odnosno $d : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$,

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}, \ x, y \in \mathbb{N}$$

Uočimo da je d rekurzivna kao funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$. Neka je $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ proizvoljna rekurzivna surjekcija (primjerice identiteta). Tada je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Očito je niz α gust u $(\mathbb{N}, d)$. Također, funkcija $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$ definirana sa

$$f(i, j) = d(\alpha(i), \alpha(j)), \ i, j \in \mathbb{N}$$

je rekurzivna kao funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ jer su to i funkcije α i d, pa je onda naravno rekurzivna i kao funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$.

Uočimo da su u $(\mathbb{N}, d, \alpha)$ sve točke izračunljive jer za proizvoljan $x \in \mathbb{N}$ postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $x = \alpha_i$, a već smo komentirali da su točke iz $\mathrm{Im}\alpha$ izračunljive.
Također, za proizvoljan $S \subseteq \mathbb{N}$ imamo da je S kompaktan u metričkom prostoru $(\mathbb{N}, d)$ ako i samo ako je S konačan. Jedan smjer slijedi iz činjenice da je u proizvoljnom metričkom prostoru svaki konačan skup kompaktan. S druge strane, ako S nije konačan, budući da za proizvoljan $x \in \mathbb{N}$ i $r \in \langle 0, 1]$ vrijedi $K(x, r) = \{x\}$ te je zato $\{x\}$ otvoren, vidimo da je

$$\{\{x\} \mid x \in S\}$$

otvoren pokrivač skupa S koji se ne može reducirati na konačan pokrivač pa tada S nije kompaktan.

Sada za proizvoljan neprazan kompaktan skup K imamo da je $K = \Lambda_i$ za neki $i \in \mathbb{N}$, pri čemu su za $i \in \mathbb{N}$ skupovi Λ_i definirani kao u (2.3.5). Dakle, vidimo da su u $(\mathbb{N}, d, \alpha)$ svi neprazni kompaktni skupovi izračunljivi.
Neka je sada $S \subseteq \mathbb{N}$ proizvoljan skup koji nije rekurzivan, prema ([2]), primjerice

$$S = \{x \in \mathbb{N} \mid \{x\}(x) \downarrow\}.$$

Definirajmo niz

$$x_n = \begin{cases} 0, & n \in S \\ 1, & n \notin S \end{cases}$$

Uočimo da x kao funkcija $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ nije rekurzivan jer bi u suprotnom, zbog

$$S = \{n \in \mathbb{N} \mid x_n = 0\},$$

imali da je S rekurzivan. Tvrdimo da taj niz nije izračunljiv u $(\mathbb{N}, d, \alpha)$. Pretpostavimo suprotno. Tada postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da je

$$d(x_i, \alpha_{f(i,k)}) < 2^{-k},$$

za sve $i, k \in \mathbb{N}$. No vidimo da za proizvoljne $i, k \in \mathbb{N}$ vrijedi $d(x_i, \alpha_{f(i,k)}) < 2^{-k}$ ako i samo ako je $x_i = \alpha_{f(i,k)}$, pa mora biti $x_i = \alpha_{f(i,k)}$, odnosno

$$x(i) = \alpha(f(i, k)),$$

za sve $i, k \in \mathbb{N}$. Ukoliko uzmemo $k = 0$ dobivamo $x(i) = \alpha(f(i, 0))$, za sve $i \in \mathbb{N}$, što je nemoguće jer je funkcija $i \mapsto \alpha(f(i, 0))$ rekurzivna, dok x nije. Dakle, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nije izračunljiv niz u $(\mathbb{N}, d, \alpha)$. S druge strane x_n je izračunljiva točka za svaki $n \in \mathbb{N}$, a skup $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ je konačan i neprazan pa je prema prethodnim razmatranjima, izračunljiv u $(\mathbb{N}, d, \alpha)$.

$\square$

Prethodni primjer nam pokazuje da niz u izračunljivom metričkom prostoru ne mora biti izračunljiv niz čak ni ako su mu svi članovi izračunljive točke i slika izračunljiv skup. S druge strane, očito je da su članovi izračunljivog niza izračunljive točke, a već smo komentirali da je točka a izračunljiva ako i samo ako je konstantan niz $x_n = a$, $n \in \mathbb{N}$ izračunljiv.

Propozicija 2.3.4. *Ako je točka $a \in X$ izračunljiva, tada je skup $\{a\}$ izračunljiv.*

Dokaz. Neka je a izračunljiva točke te neka je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija takva da je

$$d(a, \alpha_{f(k)}) < 2^{-k},$$

za sve $k \in \mathbb{N}$. Iz definicije relacije $\approx_\varepsilon$ je očito da je tada

$$\{a\} \approx_{2^{-k}} \{\alpha_{f(k)}\},$$

za sve $k \in \mathbb{N}$. Definirajmo funkciju g na sljedeći način:

$$g(k) \simeq \mu i\{\eta(i) = 0 \wedge \sigma(i, 0) = k\},\ k \in \mathbb{N}$$

g je parcijalno rekurzivna zbog rekurzivnosti funkcija η, σ, a budući da je (k) konačan niz za svaki $k \in \mathbb{N}$, vidimo da je g i totalna. Dakle $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je rekurzivna funkcija. Također, uočimo da vrijedi da je

$$\{\alpha_k\} = \Lambda_{g(k)},$$

za sve $k \in \mathbb{N}$, a onda i

$$\{\alpha_{f(k)}\} = \Lambda_{g(f(k))},$$

za sve $k \in \mathbb{N}$. Sada je $g \circ f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ rekurzivna, te vrijedi

$$\{a\} \approx_{2^{-k}} \Lambda_{g \circ f(k)},$$

za sve $k \in \mathbb{N}$. Dakle $\{a\}$ je izračunljiv skup.

□

Vrijedi i obrat ove propozicije, no u sljedećem poglavlju ćemo dokazati i nešto općenitiju tvrdnju.

Primjer 2.3.5. Neka je $(\mathbb{R}, d, \alpha)$ izračunljiv metrički prostor definiran kao u primjeru 2.1.1 za $n = 1$. Tvrdimo da je $[0, 1]$ izračunljiv skup u $(\mathbb{R}, d, \alpha)$. Da bismo to dokazali, dovoljno je pronaći rekurzivnu funkciju $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takvu da je

$$\Lambda_{f(k)} = \left\{0, \tfrac{1}{2^k}, \tfrac{2}{2^k} \ldots, \tfrac{2^k-1}{2^k}, 1\right\} = \left\{\tfrac{j}{2^k} \mid j = 0, \ldots, 2^k\right\}, \tag{2.3.6}$$

za svaki $k \in \mathbb{N}$. Budući da je za $k \in \mathbb{N}$,

$$[0,1] = \left[0, \tfrac{1}{2^k}\right\rangle \cup \left[\tfrac{1}{2^k}, \tfrac{2}{2^k}\right\rangle \cup \cdots \cup \left[\tfrac{2^k-1}{2^k}, 1\right\rangle \cup \{1\},$$

te za proizvoljan $i \in \{0, \ldots, 2^k - 1\}$ i svaki $x \in \left[\dfrac{i}{2^k}, \dfrac{i+1}{2^k}\right\rangle$ imamo $d\left(x, \dfrac{i}{2^k}\right) < 2^{-k}$, pa

$$[0,1] \prec_{2^{-k}} \Lambda_{f(k)}.$$

No također

$$\Lambda_{f(k)} \prec_{2^{-k}} [0,1]$$

jer je $\Lambda_{f(k)} \subseteq [0,1]$. Stoga, ukoliko pronađemo takvu funkciju f vrijedit će

$$[0,1] \approx_{2^{-k}} \Lambda_{f(k)},$$

za sve $k \in \mathbb{N}$. Imamo da je

$$\alpha(i) = (-1)^{(i)_0} \frac{(i)_1}{(i)_2 + 1}, \ i \in \mathbb{N}$$

te možemo uzeti $\sigma(i, j) = (i)_j$, $\eta(i) = lh(i) \dot{-} 1$, $\forall i, j \in \mathbb{N}$. Sada definiramo funkciju $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sa

$$f(k) = p_0^{p_1 p_2^{2^k}+1} p_1^{p_1^2 p_2^{2^k}+1} p_2^{p_1^3 p_2^{2^k}+1} \cdots p_{2^k-1}^{p_1^{2^k} p_2^{2^k}+1} p_{2^k}^{p_1^{2^k+1} p_2^{2^k}+1} = \prod_{j=0}^{2^k} p_j^{p_1^{j+1} p_2^{2^k}+1}, \ k \in \mathbb{N}$$

Imamo da je

$$\Lambda_i = \left\{ (-1)^{((i)_j)_0} \tfrac{((i)_j)_1}{((i)_j)_2+1} \mid j = 0, \ldots, lh(i) \dot{-} 1 \right\},$$

pa za $k \in \mathbb{N}$ i $j \in \{0, \ldots, 2^k\}$ vrijedi da je

$$(f(k))_j = p_1^{j+1} p_2^{2^k},$$

stoga je očito $\left((f(k))_j\right)_0 = 0$, $\left((f(k))_j\right)_1 = j$ te $\left((f(k))_j\right)_2 = 2^k - 1$, a onda $((f(k))_j)_2 + 1 = 2^k$. Kako je $lh(f(k)) = 2^k + 1$ vidimo da zaista vrijedi jednakost (2.3.6). Rekurzivnost funkcije f slijedi iz činjenice da su funkcije $(k, j) \mapsto p_j^{p_1^{j+1} p_2^{2^k}+1}$, $k \mapsto 2^k$ rekurzivne.

□

Primjer nam pokazuje da što se kardinalnosti tiče, izračunljivi skupovi mogu biti "vrlo veliki". Stoga proizvoljna točka izračunljivog skupa ne mora biti izračunljiva.
No, ako je prostor potpun (kao što je to $(\mathbb{R}, d)$ iz prethodnog primjera), onda u svakom izračunljivom skupu postoji gust izračunljiv niz, što ćemo i dokazati u sljedećem poglavlju.

2.4 Izračunljivo prebrojivi skupovi

Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor.
Ako je $a \in \mathrm{Im}\alpha$ i $r \in \mathbb{Q},\ r > 0$, tada za $K(a, r)$ kažemo da je **racionalna kugla** u (X, d, α).

Kao što smo u prethodnom poglavlju "enumerirali" konačne podskupove od $\mathrm{Im}\alpha$, sada želimo slično napraviti i za racionalne kugle. Preciznije, neka je $q : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ neka rekurzivna funkcija takva da je $\mathrm{Im}q = \langle 0, +\infty\rangle \cap \mathbb{Q}$, npr. možemo uzeti

$$q(i) = \frac{(i)_0 + 1}{(i)_1 + 1},\ i \in \mathbb{N}.$$

Neka su $\tau_1, \tau_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije sa svojstvom $\{(\tau_1(i), \tau_2(i)) \mid i \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}^2$, npr. uzmimo $\tau_1(i) = (i)_0,\ \tau_2(i) = (i)_1,\ i \in \mathbb{N}$. Sada za $i \in \mathbb{N}$ definiramo

$$I_i = K(\alpha_{\tau_1(i)}, q_{\tau_2(i)}) \tag{2.4.7}$$

Zbog svojstava funkcija q, τ_1, τ_2, očito je da je $\{I_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ upravo skup svih racionalnih kugli u (X, d, α).

Za $S \subseteq X$ zatvoren u (X, d) kažemo da je **izračunljivo prebrojiv skup** u (X, d, α) ako je skup

$$\{i \in \mathbb{N} \mid I_i \cap S \neq \emptyset\}$$

rekurzivno prebrojiv.

Ponovno, htjeli bismo dokazati da ova definicija ne ovisi o funkcijama q, τ_1, τ_2, nego samo o trojci (X, d, α).
Stoga, pretpostavimo da su q', τ_1', τ_2' neke druge funkcije sa spomenutim svojstvima te neka su za $i \in \mathbb{N}$ skupovi I_i' definirani kao u (2.4.7). Neka je $S \subseteq X$ takav da je

$$A = \{i \in \mathbb{N} \mid I_i \cap S \neq \emptyset\}$$

rekurzivno prebrojiv. Htjeli bismo dokazati da je tada i skup

$$A' = \{i \in \mathbb{N} \mid I_i' \cap S \neq \emptyset\}$$

također rekurzivno prebrojiv. Uzmimo proizvoljan $i \in A'$. Uočimo da je tada $(\tau_1'(i), \tau_2'(i)) \in \mathbb{N}^2$, pa postoji $j \in \mathbb{N}^2$ takav da je $(\tau_1(j), \tau_2(j)) = (\tau_1'(i), \tau_2'(i))$. No, za taj j očito vrijedi $I_i' = I_j$, pa kako je $I_i' \cap S \neq \emptyset$, mora biti $j \in A$. Također, vrijedi i obrnuta implikacija, odnosno, ako je $j \in A$ i $(\tau_1(j), \tau_2(j)) = (\tau_1'(i), \tau_2'(i))$, tada je $i \in A'$. Dakle, vrijedi:

$$i \in A' \Leftrightarrow (\exists j \in A)\ (\tau_1(j), \tau_2(j)) = (\tau_1'(i), \tau_2'(i))$$

Označimo

$$T = \left\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid \tau_1(j) = \tau_1'(i), \tau_2(j) = \tau_2'(i)\right\} \cap \left\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid j \in A\right\}$$

T je rekurzivno prebrojiv u $\mathbb{N}^2$ jer je presjek dva rekurzivno prebrojiva skupa. Naime, skup

$$\left\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid \tau_1(j) = \tau_1'(i), \tau_2(j) = \tau_2'(i)\right\}$$

je rekurzivan, pa je onda prema propoziciji 1.3.1 i rekurzivno prebrojiv. Skup

$$\left\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid j \in A\right\}$$

je zapravo praslika skupa A pri projekciji na drugu koordinatu, pa je prema propoziciji 1.3.4 rekurzivno prebrojiv. Sada iz propozicije 1.3.5 slijedi da je skup T rekurzivno prebrojiv i uočimo da je

$$i \in A' \Leftrightarrow (\exists j \in \mathbb{N})\ (i, j) \in T$$

Iz teorema 1.3.3 slijedi da je A' rekurzivno prebrojiv. Također, ako je A' rekurzivno prebrojiv, sasvim analogno vidimo da je tada i A rekurzivno prebrojiv.

Radi jednostavnosti zapisa, uvodimo funkcije λ i ϱ:

$$\lambda_i = \alpha_{\tau_1(i)},$$

$$\varrho_i = q_{\tau_2(i)},$$

za svaki $i \in \mathbb{N}$. Dakle

$$I_i = K(\lambda_i, \varrho_i),$$

za svaki $i \in \mathbb{N}$ te je

$$\{I_i \mid i \in \mathbb{N}\}$$

efektivna enumeracija racionalnih kugli u (X, d, α). Također, uvodimo oznaku $\hat{I}_i$ za zatvorenu racionalnu kuglu $\overline{K}(\lambda_i, \varrho_i)$.

Propozicija 2.4.1. *Neka je $K \neq \emptyset$ kompaktan u (X, d). Ako je K izračunljiv u (X, d, α), tada je K izračunljivo prebrojiv u (X, d, α).*

Dokaz. Neka je K izračunljiv skup u (X, d, α) i neka je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija takva da je

$$K \approx_{2^{-k}} \Lambda_{f(k)},$$

za sve $k \in \mathbb{N}$. Neka je $i \in \mathbb{N}$ takav da je $I_i \cap K \neq \emptyset$. Tada postoji $x \in K$ takav da je

$$d(x, \lambda_i) < \varrho_i.$$

Kako je

$$\varrho_i - d(x, \lambda_i) > 0,$$

postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\varrho_i - d(x, \lambda_i) > 2 \cdot 2^{-k}.$$

Sada za taj k, zbog
$$K \prec_{2^{-k}} \Lambda_{f(k)},$$
postoji
$$j \in \{\sigma(f(k),0), \dots, \sigma(f(k), \eta(f(k)))\}$$
takav da je $d(\alpha_j, x) < 2^{-k}$. Također, imamo
$$d(\alpha_j, \lambda_i) \leq d(\alpha_j, x) + d(x, \lambda_i)$$
pa slijedi da je
$$\varrho_i - d(\alpha_j, \lambda_i) \geq \underbrace{\varrho_i - d(x, \lambda_i)}_{>2\cdot 2^{-k}} - \underbrace{d(x, \alpha_j)}_{<2^{-k}} > 2^{-k}$$
Za $k \in \mathbb{N}$ označimo
$$L_k = \{\sigma(f(k),0), \dots, \sigma(f(k), \eta(f(k)))\}.$$
Za sada imamo implikaciju
$$I_i \cap K \neq \emptyset \Rightarrow (\exists k \in \mathbb{N})(\exists j \in L_k)\ \varrho_i - d(\alpha_j, \lambda_i) > 2^{-k}$$
No vrijedi i obrat, ako je
$$\varrho_i - d(\alpha_j, \lambda_i) > 2^{-k},$$
za neke $k \in \mathbb{N}$, $j \in L_k$, tada zbog $\alpha_j \in \Lambda_{f(k)}$ i $\Lambda_{f(k)} \prec_{2^{-k}} K$, postoji $x \in K$ takav da je $d(x, \alpha_j) < 2^{-k}$. Iz ovoga i
$$d(x, \lambda_i) \leq d(x, \alpha_j) + d(\alpha_j, \lambda_i),$$
dobivamo
$$\varrho_i - d(x, \lambda_i) \geq \underbrace{\varrho_i - d(\alpha_j, \lambda_i)}_{>2^{-k}} - \underbrace{d(x, \alpha_j)}_{<2^{-k}} > 0$$
Odnosno vrijedi
$$d(x, \lambda_i) < \varrho_i,$$
pa je $x \in I_i$, tj. $I_i \cap K \neq \emptyset$. Označimo li sa
$$S_K = \{i \in \mathbb{N} \mid I_i \cap K \neq \emptyset\},$$
vidimo da je
$$i \in S_K \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{N})(\exists j \in L_k)\ \varrho_i - d(\alpha_j, \lambda_i) > 2^{-k} \tag{2.4.8}$$
Skup
$$T_1 = \left\{(i,k,j) \in \mathbb{N}^3 \mid \varrho_i - d(\alpha_j, \lambda_i) - 2^{-k} > 0\right\}$$
je rekurzivno prebrojiv prema propoziciji 1.3.7 jer je funkcija
$$(i,k,j) \mapsto \varrho_i - d(\alpha_j, \lambda_i) - 2^{-k}$$

rekurzivna $\mathbb{N}^3 \to \mathbb{R}$. Karakteristična funkcija skupa

$$T_2 = \left\{(i,k,j) \in \mathbb{N}^3 \mid j \in L_k\right\}$$

je

$$\chi_{T_2}(i,k,j) = \overline{sg}\left(\prod_{l=0}^{\eta(f(k))} |j - \sigma(f(k),l)|\right),$$

što je rekurzivna funkcija $\mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$, pa je T_2 rekurzivan, a onda i rekurzivno prebrojiv. Sada je prema propoziciji 1.3.5 skup $T_1 \cap T_2 \subseteq \mathbb{N}^3$ rekurzivno prebrojiv, te iz (2.4.8) lako vidimo da je

$$i \in S_K \Leftrightarrow \left(\exists (k,j) \in \mathbb{N}^2\right)\ (i,k,j) \in T_1 \cap T_2$$

Sada iz teorema 1.3.3 slijedi da je S_K rekurzivno prebrojiv, a onda je K izračunljivo prebrojiv u (X,d,α).

□

Obrat prethodne propozicije ne vrijedi. Možemo zamišljati da je skup izračunljivo prebrojiv ako možemo "rekurzivno izlistati" sve racionalne kugle koje ga sijeku, a izračunljiv ako postoji rekurzivna funkcija koja za svaki $k \in \mathbb{N}$ određuje konačno mnogo racionalnih točaka koje aproksimiraju skup s točnošću 2^{-k}. Sljedeći primjer pokazuje da je prvi uvjet zaista nešto slabiji od drugog.

Primjer 2.4.2. Neka je $(\mathbb{R},d,\alpha)$ izračunljiv metrički prostor iz primjera 2.1.1. U [1] je pokazano da postoji rekurzivna funkcija $a : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ sa svojstvom da je $a_0 = 0$, $a_k \leq a_{k+1}, \forall k \in \mathbb{N}$ te niz a konvergira k broju $x \in \langle 0,1\rangle$ koji nije izračunljiv u $(\mathbb{R},d,\alpha)$. Pokazat ćemo da je tada skup $[0,x]$ izračunljivo prebrojiv, ali nije izračunljiv u $(\mathbb{R},d,\alpha)$.

Neka je $r : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ proizvoljna rekurzivna funkcija sa svojstvom da je $\mathrm{Im} r = \mathbb{Q} \cap [0,1]$, (npr. $r(i) = \beta(i,0)$, $i \in \mathbb{N}$, za β iz primjera 2.1.2). Definiramo funkciju $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{Q}$ na sljedeći način

$$f(j,k) = a_k + r_j(a_{k+1} - a_k),\ j,k \in \mathbb{N}$$

Uočimo da je za $j,k \in \mathbb{N}$, $f(j,k) \in [0,x]$. Tvrdimo da je $\mathrm{Im} f$ gust skup u $[0,x]$. Neka su $y \in [0,x\rangle$ i $\varepsilon > 0$ proizvoljni. Kako je $x - y > 0$, tada postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je

$$x - a_k = d(x,a_k) < x - y,$$

odnosno $y < a_k$. Neka je $k_0 \in \mathbb{N}$ najmanji prirodan broj s tim svojstvom. Uočimo da je tada $k_0 > 0$. Sada imamo da je

$$a_{k_0-1} \leq y < a_{k_0}.$$

Kako je tada $\dfrac{y - a_{k_0-1}}{a_{k_0} - a_{k_0-1}} \in [0,1]$, postoji $j_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\left| \frac{y - a_{k_0-1}}{a_{k_0} - a_{k_0-1}} - r_{j_0} \right| < \frac{\varepsilon}{a_{k_0} - a_{k_0-1}},$$

odnosno

$$d(y, f(j_0, k_0 - 1)) = |y - f(j_0, k_0 - 1)| < \varepsilon.$$

Također, za $y = x$ i proizvoljan $\varepsilon > 0$ možemo odabrati $j_0, k_0 \in \mathbb{N}$ takve da $r_{j_0} = 0$, $d(x, a_{k_0}) < \varepsilon$ pa imamo $d(x, f(j_0, k_0)) < \varepsilon$.

Dakle, za svaki $y \in [0, x]$ i $\varepsilon > 0$ postoji $z \in \mathrm{Im} f$ takav da je $d(y, z) < \varepsilon$, pa je $\mathrm{Im} f$ gust u $[0, x]$. Uočimo da je sada

$$\begin{aligned} S &= \{i \in \mathbb{N} \mid I_i \cap [0, x] \neq \emptyset\} = \{i \in \mathbb{N} \mid I_i \cap \mathrm{Im} f \neq \emptyset\} \\ &= \left\{ i \in \mathbb{N} \mid \left(\exists (j,k) \in \mathbb{N}^2\right) \ |\lambda_i - f(j,k)| < \varrho_i \right\} \end{aligned}$$

Budući da je funkcija

$$g(i, j, k) = \varrho_i - |\lambda_i - f(j,k)|, \ i, j, k \in \mathbb{N}$$

rekurzivna $\mathbb{N}^3 \to \mathbb{R}$, skup

$$T = \{(i, j, k) \in \mathbb{N}^3 \mid g(i, j, k) > 0\}$$

je rekurzivno prebrojiv prema propoziciji 1.3.7. Sada imamo da je

$$i \in S \Leftrightarrow \left(\exists (j,k) \in \mathbb{N}^2\right) \ (i, j, k) \in T,$$

pa je S rekurzivno prebrojiv prema teoremu 1.3.3. Iz ovoga slijedi da je $[0, x]$ izračunljivo prebrojiv skup u $(\mathbb{R}, d, \alpha)$.

S druge strane, neka je $j \in \mathbb{N}$ takav da je $\alpha_j < \dfrac{x}{2}$. Tada je

$$d_H(\{\alpha_j\}, [0, x]) = x - \alpha_j.$$

Kako izračunljivi brojevi u $(\mathbb{R}, d, \alpha)$ čine polje, a broj α_j je izračunljiv, vidimo da $x - \alpha_j$ nije izračunljiv. Također, budući da je α_j izračunljiva točka, prema propoziciji 2.3.4, skup $\{\alpha_j\}$ je izračunljiv. Kada bi skup $[0, x]$ bio izračunljiv, tada bi prema korolaru 2.3.2 imali da su $\{\alpha_j\}$ i $[0, x]$ izračunljive točke u $(\mathcal{H}, d_H, \Lambda)$, a onda bi prema korolaru 2.1.5 $d_H(\{\alpha_j\}, [0, x])$ bio izračunljiv broj. Stoga, $[0, x]$ ne može biti izračunljiv skup.

$\square$

No u nekim slučajevima obrat propozicije 2.4.1 ipak vrijedi. Primjerice za jednočlane skupove imamo sljedeći rezultat:

Propozicija 2.4.3. *Neka je $a \in X$. Ako je $\{a\}$ izračunljivo prebrojiv skup, tada je a izračunljiva točka.*

Dokaz. Neka je $\{a\}$ izračunljivo prebrojiv skup. Po definiciji to znači da je skup

$$S = \{i \in \mathbb{N} \mid I_i \cap \{a\}\} = \{i \in \mathbb{N} \mid a \in I_i\}$$

rekurzivno prebrojiv. Također, skup

$$T = \{(k, i) \in \mathbb{N}^2 \mid \varrho_i < 2^{-k}\}$$

je prema propoziciji 1.3.7 rekurzivno prebrojiv jer je funkcija $(k, i) \mapsto 2^{-k} - \varrho_i$ rekurzivna $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$. Neka je $p_2 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ projekcija na drugu koordinatu. Sada imamo da je i skup

$$S_1 = p_2^{-1}(S) \cap T = \left\{(k, i) \in \mathbb{N}^2 \mid a \in I_i,\ \varrho_i < 2^{-k}\right\}$$

rekurzivno prebrojiv. Također, zbog gustoće niza α u (X, d), za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $(k, i) \in S_1$. Sada, prema teoremu 1.3.6, postoji rekurzivna funkcija $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $(k, g(k)) \in S_1$, za sve $k \in \mathbb{N}$. Znači, imamo da je

$$a \in I_{g(k)} = K(\lambda_{g(k)}, \varrho_{g(k)}),$$

$$\varrho_{g(k)} < 2^{-k},$$

za sve $k \in \mathbb{N}$. Ako definiramo $f = \tau_1 \circ g$, imamo da je f rekurzivna i vrijedi

$$d(a, \alpha_{f(k)}) < 2^{-k},$$

za sve $k \in \mathbb{N}$. Dakle, a je izračunljiva točka.

□

Iz upravo dokazane i propozicija 2.3.4 i 2.4.1 dobivamo:

Korolar 2.4.4. *a je izračunljiva točka ako i samo ako je $\{a\}$ izračunljivo prebrojiv skup.*

U primjeru 2.4.2 smo vidjeli da izračunljivo prebrojiv skup ne mora biti izračunljiv čak ni ako je kompaktan. Dakle, ne moramo ga moći "rekurzivno" aproksimirati konačnim skupovima racionalnih točaka. No ipak možemo postići malo drugačiju aproksimaciju, i to gustim rekurzivnim nizom. O tome govore sljedeće dvije propozicije. No prije toga trebamo dvije leme:

Lema 2.4.5. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor i neka su (x_i), (y_j) izračunljivi nizovi u (X, d, α), a (r_i), (s_j) izračunljivi nizovi u $\langle 0, +\infty\rangle$ (odnosno, r i s su pozitivne rekurzivne funkcije $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$). Neka je*

$$A = \left\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid d(x_i, y_j) + s_j < r_i\right\}.$$

Tada:

(i) A je rekurzivno prebrojiv;

(ii) ako je $(j, i) \in A$, tada je $\overline{K}(y_j, s_j) \subseteq K(x_i, r_i)$;

(iii) za $a \in X$, $i \in \mathbb{N}$ takve da je $a \in K(x_i, r_i)$, postoji $\varepsilon > 0$ takav da ako je $a \in K(y_j, s_j)$ i $s_j < \varepsilon$, tada $(i, j) \in A$.

Dokaz.

(i) Iz propozicija 2.1.4 i 1.2.4 slijedi da je funkcija $(i, j) \mapsto r_i - d(x_i, y_j) - s_j$ rekurzivna $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$, pa je prema propoziciji 1.3.7 A rekurzivno prebrojiv.

(ii) Neka je $a \in \overline{K}(y_j, s_j)$. Tada imamo

$$d(a, x_i) \leq \underbrace{d(a, y_j)}_{\leq s_j} + \underbrace{d(x_i, y_j)}_{<r_i - s_j} < r_i,$$

dakle $a \in K(x_i, r_i)$.

(iii) Neka su $a \in X$, $i \in \mathbb{N}$ takvi da je $a \in K(x_i, r_i)$. Tada postoji $\varepsilon > 0$ takav da je

$$d(x_i, a) + 2\varepsilon < r_i.$$

Neka je $j \in \mathbb{N}$ takav da je $a \in K(y_j, s_j)$ i $s_j < \varepsilon$. Imamo

$$d(x_i, y_j) + s_j < \underbrace{d(y_j, a)}_{<s_j<\varepsilon} + d(a, x_i) + \varepsilon < d(a, x_i) + 2\varepsilon < r_i,$$

pa je $(i, j) \in A$.

□

Lema 2.4.6. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Neka je (x_n) niz u X i pretpostavimo da postoje rekurzivne funkcije $F : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $G : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$ takve da*

$$d(x_n, \alpha_{F(k,n)}) < G(k, n),$$

za sve $k, n \in \mathbb{N}$ i

$$\lim_{k\to\infty} G(k, n) = 0,$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$. Tada je (x_n) izračunljiv niz u (X, d, α).

Dokaz. Definiramo skup

$$T = \left\{(n, m, k) \in \mathbb{N}^3 \mid G(k, n) < 2^{-m}\right\}.$$

Prema propoziciji 1.3.7, T je rekurzivno prebrojiv i zbog svojstva funkcije G, očito za sve $n, m \in \mathbb{N}$ postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $(n, m, k) \in T$. Sada prema teoremu 1.3.6, postoji rekurzivna funkcija $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da je $(n, m, h(n, m)) \in T$, za sve $n, m \in \mathbb{N}$. Sada imamo da je

$$d(x_n, \alpha_{F(h(n,m),n)}) < G(h(n, m), n) < 2^{-m},$$

za sve $n, m \in \mathbb{N}$. Funkcija $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ definirana s

$$f(n, m) = F(h(n, m), n),\ n, m \in \mathbb{N}$$

je rekurzivna, pa je niz (x_n) doista izračunljiv u (X, d, α).

□

Propozicija 2.4.7. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor takav da je (X, d) potpun metrički prostor. Ako je $S \subseteq X$ neprazan izračunljivo prebrojiv skup, tada postoji izračunljiv niz u (X, d, α) koji je gust u S.*

Dokaz. Neka je A skup iz prethodne leme pridružen nizovima (ϱ_i), (ϱ_j), (λ_i), (λ_j), tj.

$$A = \left\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid d(\lambda_i, \lambda_j) + \varrho_j < \varrho_i\right\}.$$

Definiramo još i skupove

$$C = \left\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid \varrho_j < \tfrac{1}{2}\varrho_i\right\},$$

$$B = \{i \in \mathbb{N} \mid S \cap I_i \neq \emptyset\}.$$

Skup A je rekurzivno prebrojiv prema prethodnoj lemi, a skup C je rekurzivno prebrojiv prema propoziciji 1.3.7. Dakle, prema propoziciji 1.3.5 i skup $D = A \cap C$ je rekurzivno prebrojiv. Nadalje, neka je $i \in B$ proizvoljan i neka je $x \in I_i \cap S$. Prema lemi 2.4.5 (iii), postoji $\varepsilon > 0$ takav da ako je $x \in I_j$ i $\varrho_j < \varepsilon$, tada $(i, j) \in A$. Neka je $r \in \mathbb{Q}$ takav da je

$$r < \min\left\{\varepsilon, \tfrac{1}{2}\varrho_i\right\}.$$

Zbog gustoće niza α u X, tada postoji $l \in \mathbb{N}$ takav da je

$$d(x, \alpha_l) < r.$$

Neka je sada $j \in \mathbb{N}$ takav da je $(\lambda_j, \varrho_j) = (\alpha_l, r)$. Tada imamo da je $j \in B$ te je prema lemi 2.4.5 i definiciji skupa C, $(i, j) \in D$.

Dakle, B i D su rekurzivno prebrojivi skupovi i za svaki $i \in B$ postoji $j \in B$ takav da je $(i, j) \in D$. Sada prema teoremu 1.3.6 postoji parcijalno rekurzivna funkcija $\varphi : B \to \mathbb{N}$ takva da je $\varphi(B) \subseteq B$ i $(i, \varphi(i)) \in D$, za svaki $i \in \mathbb{N}$. Uočimo da je funkcija $B \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$,

$$(i, k) \mapsto \varphi^{(k)}(i),$$

pri čemu je $\varphi^{(0)}(i) = i$, $\varphi^{(k+1)}(i) = \varphi\left(\varphi^{(k)}(i)\right)$, za $i \in \mathbb{N}$, parcijalno rekurzivna. Nadalje, neka je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija takva da je $f(\mathbb{N}) = B$. Sada za $n \in \mathbb{N}$ definiramo

$$S_n = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} I_{\varphi^{(k)}(f(n))}.$$

Kako je za svaki $n \in \mathbb{N}$ i svaki $k \in \mathbb{N}$,

$$\left(\varphi^{(k)}(f(n)), \varphi^{(k+1)}(f(n))\right) \in D,$$

prema lemi 2.4.5 (ii) imamo da je

$$\hat{I}_{\varphi^{(k)}(f(n))} \subseteq I_{\varphi^{(k+1)}(f(n))}, \tag{2.4.9}$$

za sve $k, n \in \mathbb{N}$. Nadalje, indukcijom lako dobivamo da je

$$\varrho_{\varphi^{(k)}(f(n))} < \tfrac{1}{2^k} \varrho_{f(n)},$$

za sve $k, n \in \mathbb{N}$. Dakle, za fiksan $n \in \mathbb{N}$ imamo da je

$$\lim_{k \to \infty} \varrho_{\varphi^{(k)}(f(n))} = 0. \tag{2.4.10}$$

Iz svega ovoga slijedi da je za svaki $n \in \mathbb{N}$ niz $(S \cap \hat{I}_{\varphi^{(k)}(f(n))})_{k \in \mathbb{N}}$ opadajući niz nepraznih zatvorenih skupova čiji dijametri teže u 0. Kako je (X, d) potpun, prema Cantorovom teoremu je

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} (S \cap \hat{I}_{\varphi^{(k)}(f(n))}) = \{x_n\},$$

za neki $x_n \in S$. Nadalje, uočimo da je zbog (2.4.9),

$$S_n = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \hat{I}_{\varphi^{(k)}(f(n))},$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$. Dakle, imamo $x_n \in S_n$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Tvrdimo da je (x_n) traženi niz.

Dokažimo prvo da je (x_n) izračunljiv u (X, d, α). Iz definicije skupova S_n imamo da je

$$d(x_n, \lambda_{\varphi^{(k)}(f(n))}) < \varrho_{\varphi^{(k)}(f(n))},$$

za sve $k, n \in \mathbb{N}$. Sada iz leme 2.4.6 slijedi da je (x_n) izračunljiv niz.

Preostaje još dokazati da je skup $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ gust u S. Neka je $x \in S$ i $\varepsilon > 0$. Odaberimo $i \in \mathbb{N}$ takav da je $\varrho_i < \frac{\varepsilon}{3}$ i $x \in I_i$. Tada je očito $i \in B$. Nadalje, uočimo da za proizvoljan $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ zbrajanjem nejednakosti

$$\begin{aligned}
&d(\lambda_i, \lambda_{\varphi(i)}) + \varrho_{\varphi(i)} < \varrho_i \\
&d(\lambda_{\varphi(i)}, \lambda_{\varphi^{(2)}(i)}) + \varrho_{\varphi^{(2)}(i)} < \varrho_{\varphi(i)} \\
&\vdots \\
&d(\lambda_{\varphi^{(k-1)}(i)}, \lambda_{\varphi^{(k)}(i)}) + \varrho_{\varphi^{(k)}(i)} < \varrho_{\varphi^{(k-1)}(i)}
\end{aligned}$$

i korištenjem nejednakosti trokuta dobivamo da je

$$d(\lambda_i, \lambda_{\varphi^{(k)}(i)}) < \varrho_i - \varrho_{\varphi^{(k)}(i)} < \varrho_i,$$

za svaki $k \in \mathbb{N}$. Neka je sada $n \in \mathbb{N}$ takav da je $i = f(n)$ i $k \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\varrho_{\varphi^{(k)}(f(n))} < \frac{\varepsilon}{3}$$

(takav k postoji zbog (2.4.10)). Sada imamo

$$d(x_n, x) \leq \underbrace{d(x_n, \lambda_{\varphi^{(k)}(f(n))})}_{<\varrho_{\varphi^{(k)}(f(n))}<\frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{d(\lambda_{\varphi^{(k)}(f(n))}, \lambda_{f(n)})}_{<\varrho_{f(n)}<\frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{d(\lambda_{f(n)}, x)}_{<\varrho_{f(n)}<\frac{\varepsilon}{3}} < \varepsilon.$$

Dakle, za svaki $x \in S$ i svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $d(x, x_n) < \varepsilon$, pa je niz (x_n) doista gust u S.

□

Propozicija 2.4.8. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor, $S \subseteq X$ potpun i izračunljivo prebrojiv skup. Tada postoji izračunljiv niz u (X, d, α) koji je gust u S.*

Dokaz. Neka je (X', d') upotpunjenje od (X, d). Tada je (X', d') potpun metrički prostor, (X, d) je potprostor od (X', d') te je X gust skup u (X', d'). Nadalje, imamo da je $\operatorname{Im}\alpha$ gust skup u X'. Naime, za $x' \in X'$ i proizvoljan $\varepsilon > 0$, postoji $x \in X$ takav da je

$$d'(x', x) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Kako je $\operatorname{Im}\alpha$ gust u X, postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je

$$d'(x, \alpha_i) = d(x, \alpha_i) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sada je

$$d'(x', \alpha_i) \leq d'(x', x) + d'(x, \alpha_i) < \varepsilon.$$

Kako je $d'(\alpha_i, \alpha_j) = d(\alpha_i, \alpha_j)$, za sve $i, j \in \mathbb{N}$, imamo da je (X', d', α) izračunljiv metrički prostor.

Za željenu tvrdnju sada je dovoljno dokazati da je S izračunljivo prebrojiv u (X', d', α). Za $i \in \mathbb{N}$ uvodimo oznaku

$$I_i' = K_{(X',d')}(\lambda_i, \varrho_i).$$

Dakle, vrijedi

$$I_i = I_i' \cap X.$$

Sada imamo

$$I_i' \cap S \neq \emptyset \overset{S \subseteq X}{\Leftrightarrow} (I_i' \cap X) \cap S \neq \emptyset \Leftrightarrow I_i \cap S \neq \emptyset$$

Dakle, vrijedi

$$\{i \in \mathbb{N} \mid I_i \cap S \neq \emptyset\} = \{i \in \mathbb{N} \mid I_i' \cap S \neq \emptyset\}. \tag{2.4.11}$$

Korištenjem nizovne karakterizacije zatvorenosti, lako se vidi da ako je skup potpun u metričkom prostoru, tada je on zatvoren u njegovom upotpunjenju. Dakle, S je zatvoren u (X', d'), pa iz (2.4.11) slijedi da je S izračunljivo prebrojiv skup u (X', d', α).

Nadalje, kako je S potpun u (X, d), S je očito potpun i u (X', d'), a onda je i zatvoren u (X', d'). Sada prema propoziciji 2.4.7 imamo da postoji izračunljiv niz (x_i) u (X', d', α) takav da je $\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ gust skup u S. Dakle, postoji rekurzivna funkcija $F : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da je

$$d(x_i, \alpha_{F(i,k)}) \overset{x_i,\ \alpha_{F(i,k)} \in X}{=} d'(x_i, \alpha_{F(i,k)}) < 2^{-k}$$

za sve $i, k \in \mathbb{N}$. Stoga je (x_i) izračunljiv niz u (X, d, α).

□

2.5 Poluizračunljivi skupovi

Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor.

Konačnu unija racionalnih otvorenih kugli zovemo **racionalan otvoren skup**. Za $j \in \mathbb{N}$ definiramo

$$J_j = \bigcup_{i \in [j]} I_i.$$

Uočimo da je tada

$$\left\{J_j \mid j \in \mathbb{N}\right\}$$

skup svih racionalnih otvorenih skupova.

Za $S \subseteq X$ kažemo da je **poluizračunljiv** ako vrijedi:

(i) $S \cap K$ je kompaktan skup, za svaku zatvorenu kuglu K u (X, d);

(ii) skup $\left\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid \hat{I}_i \cap S \subseteq J_j\right\}$ je rekurzivno prebrojiv.

Slično kao za izračunljive i izračunljivo prebrojive skupove, htjeli bismo pokazati da definicija poluizračunljivog skupa ne ovisi o odabiru efektivne enumeracije racionalnih otvorenih skupova, već samo o trojci (X, d, α). Preciznije, pretpostavimo da je $\Phi : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ proizvoljna r.r.o. funkcija takva da je

$$\{\Phi(j) \mid j \in \mathbb{N}\}$$

skup svih nepraznih konačnih podskupova od $\mathbb{N}$. Nadalje, neka su $\tau_1, \tau_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ i $q : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ rekruzivne funkcije takve da je

$$\{(\tau_1(i), \tau_2(i)) \mid i \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}^2,$$

$$\operatorname{Im} q = \langle 0, +\infty\rangle \cap \mathbb{Q}.$$

Za $i, j \in \mathbb{N}$ neka je

$$I'_i = K(\alpha_{\tau_1(i)}, q_{\tau_2(i)}),$$

$$J'_j = \bigcup_{i \in \Phi(j)} I'_i.$$

Neka je $S \subseteq X$. Tvrdimo da je skup

$$T = \left\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid \hat{I}_i \cap S \subseteq J_j\right\}$$

rekurzivno prebrojiv ako i samo ako je skup

$$T' = \left\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid \hat{I}'_i \cap S \subseteq J'_j\right\}$$

rekurzivno prebrojiv.

Pretpostavimo prvo da je T rekurzivno prebrojiv. Primjenom teorema 1.3.6 na skup

$$A = \left\{(i, k) \in \mathbb{N}^2 \mid \alpha_{\tau_1(i)} = \lambda_k,\ q_{\tau_2(i)} = \varrho_k\right\},$$

zaključujemo da postoji rekurzivna funkcija $f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $(i, f_1(i)) \in A$, za svaki $i \in \mathbb{N}$, a onda je i $I'_i = I_{f_1(i)}$, za svaki $i \in \mathbb{N}$. Sada je

$$J'_j = \bigcup_{i \in \Phi(j)} I_{f_1(i)} = \bigcup_{i \in f_1(\Phi)(j)} I_i.$$

Prema propoziciji 1.4.12, postoji rekurzivna funkcija $f_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je

$$f_1(\Phi)(j) = [f_2(j)],$$

za svaki $j \in \mathbb{N}$. Očito je $J'_j = J_{f_2(j)}$, za svaki $j \in \mathbb{N}$ i uočimo da je

$$T' = \left\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid \hat{I}_{f_1(i)} \cap S \subseteq J_{f_2(j)}\right\}.$$

Dakle,

$$(i, j) \in T' \Leftrightarrow (f_1(i), f_2(j)) \in T,$$

pa je $T' = f^{-1}(T)$, za $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^2$,

$$f(i, j) = (f_1(i), f_2(j)),\ i, j \in \mathbb{N}.$$

Budući da je f rekurzivna funkcija, T' je rekurzivno prebrojiv prema propoziciji 1.3.4. Obrat se dokazuje slično.

Za kompaktne skupove imamo sljedeću karakterizaciju poluizračunljivosti:

Propozicija 2.5.1. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor i S kompaktan skup u (X, d). Tada je S poluizračunljiv ako i samo ako je skup*

$$\left\{j \in \mathbb{N} \mid S \subseteq J_j\right\}$$

rekurzivno prebrojiv.

Dokaz. Označimo

$$T_1 = \left\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid \hat{I}_i \cap S \subseteq J_j\right\},$$

$$T_2 = \left\{j \in \mathbb{N} \mid S \subseteq J_j\right\}.$$

Kako je skup S kompaktan, on je i zatvoren, pa je za svaku zatvorenu kuglu K u (X, d) $S \cap K$ zatvoren podskup od S, pa je kompaktan. Dakle, za kompaktan skup uvijek vrijedi (i) iz gornje definicije, pa zapravo dokazujemo:

$$T_1 \text{ rekurzivno prebrojiv } \Leftrightarrow T_2 \text{ rekurzivno prebrojiv}$$

Pretpostavimo prvo da je T_1 rekurzivno prebrojiv. Kako je S kompaktan, on je i ograničen, pa imamo da je

$$S \subseteq \hat{I}_{i_0},$$

za neki $i_0 \in \mathbb{N}$. Sada vidimo da je

$$\begin{aligned} j \in T_2 &\Leftrightarrow S = \hat{I}_{i_0} \cap S \subseteq J_j \\ &\Leftrightarrow (i_0, j) \in T_1 \\ &\Leftrightarrow j \in p_{i_0}^{-1}(T_1), \end{aligned}$$

gdje je $p_{i_0} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$,

$$p_{i_0}(j) = (i_0, j), \ \ j \in \mathbb{N}.$$

Budući da je

$$T_2 = p_{i_0}^{-1}(T_1)$$

i p_{i_0} je očito rekurzivna, prema propoziciji 1.3.4, skup T_2 je rekurzivno prebrojiv.

Obratno, pretpostavimo da je T_2 rekurzivno prebrojiv i da je $(i, j) \in T_1$. Tada je

$$S \cap \hat{I}_i \subseteq J_j,$$

a onda je

$$(S \setminus J_j) \cap \hat{I}_i = \emptyset. \tag{2.5.12}$$

Označimo

$$K = S \setminus J_j.$$

Kako je S zatvoren i J_j otvoren, imamo da je K zatvoren podskup kompakta S, dakle kompaktan je. Zbog (2.5.12), za svaki $x \in K$ vrijedi

$$d(x, \lambda_i) > \varrho_i.$$

Budući da je funkcija

$$x \mapsto d(x, \lambda_i)$$

neprekidna $X \to \mathbb{R}$, a K je kompaktan, ta funkcija postiže minimum na K. Dakle, postoji $x_0 \in K$ takav da je

$$d(x, \lambda_i) \geq d(x_0, \lambda_i),$$

za svaki $x \in K$. Kako je

$$d(x_0, \lambda_i) > \varrho_i,$$

postoji $\varepsilon > 0$ takav da je

$$d(x_0, \lambda_i) > \varrho_i + \varepsilon,$$

a onda je

$$d(x, \lambda_i) > \varrho_i + \varepsilon, \tag{2.5.13}$$

za svaki $x \in K$. Neka je sada $r \in \mathbb{Q}$ takav da je $r \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Budući da je

$$\{K(\alpha_k, r) \mid k \in \mathbb{N}\}$$

otvoren pokrivač od X, ta familija je i otvoren pokrivač od K, dakle postoje $i_1, \ldots, i_n \in \mathbb{N}$ takvi da je

$$K \subseteq K(\alpha_{i_1}, r) \cup \cdots \cup K(\alpha_{i_n}, r).$$

Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je

$$K(\alpha_{i_k}, r) \cap K \neq \emptyset,\ k = 1, \dots, n.$$

Sada za $k \in \{1, \dots, n\}$ imamo da postoji $x \in K \cap K(\alpha_{i_k}, r)$, pa je

$$d(\alpha_{i_k}, \lambda_i) \geq \underbrace{d(\lambda_i, x)}_{>\varrho_i+\varepsilon} - \underbrace{d(x, \alpha_{i_k})}_{<r\leq\frac{\varepsilon}{2}} > \varrho_i + \frac{\varepsilon}{2} \geq \varrho_i + r$$

Neka su $j_1, \dots, j_n \in \mathbb{N}$ takvi da je

$$(\lambda_{j_k}, \varrho_{j_k}) = (\alpha_{i_k}, r),\ k = 1, \dots, n$$

te neka je $l \in \mathbb{N}$ takav da je

$$[l] = \{j_1, \dots, j_k\}.$$

Sada je

$$K(\alpha_{i_k}, r) = K(\lambda_{j_k}, \varrho_{j_k}),\ k = 1, \dots, n,$$

$$K(\alpha_{i_1}, r) \cup \cdots \cup K(\alpha_{i_n}, r) = J_l$$

i vidimo da je

$$S \subseteq J_j \cup J_l.$$

Dakle dokazali smo sljedeću implikaciju:

$$(i, j) \in T_1 \;\Rightarrow\; \text{postoji } l \in \mathbb{N} \text{ takav da je } S \subseteq J_j \cup J_l \text{ i } d(\lambda_i, \lambda_k) > \varrho_i + \varrho_k,\ \text{ za svaki } k \in [l]$$

Obratno, pretpostavimo da za $(i, j) \in \mathbb{N}$ postoji $l \in \mathbb{N}$ sa gornjim svojstvima. Tada za $k \in [l]$ imamo

$$I_k \cap \hat{I}_i = \emptyset.$$

Naime, suprotnom bi imali da postoji $x \in I_k \cap \hat{I}_i$, pa je

$$\varrho_i + \varrho_k < d(\lambda_i, \lambda_k) \leq d(\lambda_i, x) + d(x, \lambda_k) < \varrho_i + \varrho_k,$$

što je naravno nemoguće. Dakle, vrijedi

$$J_l \cap \hat{I}_i = \emptyset,$$

pa je

$$S \cap \hat{I}_i \subseteq (J_j \cap \hat{I}_i) \cup \underbrace{(J_l \cap \hat{I}_i)}_{=\emptyset} \subseteq J_j,$$

dakle $(i, j) \in T_1$. Sada imamo:

$$\begin{aligned}(i, j) \in T_1 &\Leftrightarrow \text{ postoji } l \in \mathbb{N} \text{ takav da je } S \subseteq J_j \cup J_l \text{ i } d(\lambda_i, \lambda_k) > \varrho_i + \varrho_k, \text{ za svaki } k \in [l] \\ &\Leftrightarrow (\exists l \in \mathbb{N})\ (i, j, l) \in T,\end{aligned}$$

gdje je

$$T = \left\{(i, j, l) \in \mathbb{N}^3 \mid S \subseteq J_j \cup J_l\right\} \cap \left\{(i, j, l) \in \mathbb{N}^3 \mid (\forall k \in [l])\ d(\lambda_i, \lambda_k) > \varrho_i + \varrho_k\right\}.$$

Definiramo

$$A = \left\{(j, l) \in \mathbb{N}^2 \mid S \subseteq J_j \cup J_l\right\},$$
$$B = \left\{(i, k) \in \mathbb{N}^2 \mid d(\lambda_i, \lambda_k) > \varrho_i + \varrho_k\right\},$$
$$C = \left\{(i, l) \in \mathbb{N}^2 \mid (\forall k \in [l])\ (i, k) \in B\right\}.$$

Definiramo funkciju $\Phi : \mathbb{N}^2 \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$,

$$\Phi(j, l) = [j] \cup [l], \ \ j, l \in \mathbb{N}.$$

Φ je r.r.o. funkcija prema napomeni 1.4.11 i propoziciji 1.4.1, pa prema propoziciji 1.4.12, postoji rekurzivna funkcija takva da je

$$[j] \cup [l] = [f(j, l)],$$

za sve $j, l \in \mathbb{N}$. Sada vidimo da je

$$J_j \cup J_l = J_{f(j,l)},$$

za sve $j, l \in \mathbb{N}$. Dakle, vrijedi da je

$$(j, l) \in A \ \Leftrightarrow \ f(j, l) \in T_2,$$

odnosno

$$A = f^{-1}(T_2),$$

pa je prema propoziciji 1.3.4, A rekurzivno prebrojiv. Nadalje, prema propoziciji 1.3.7 i B je rekurzivno prebrojiv. Sada definiramo $\Psi : \mathbb{N}^2 \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$,

$$\Psi(i, l) = \{i\} \times [l], \ \ i, l \in \mathbb{N}.$$

Prema propoziciji 1.4.2, Ψ je r.r.o. funkcija i vidimo da je

$$C = \{(i, l) \in \mathbb{N} \mid \Psi(i, l) \subseteq B\}.$$

Sada je C rekurzivno prebrojiv prema teoremu 1.4.9. Sada je

$$T = p_1^{-1}(A) \cap p_2^{-1}(C),$$

gdje su $p_1, p_2 : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$, p_1 je projekcija na druge dvije koordinate a p_2 je projekcija na prvu i treću koordinatu. To su očito rekurzivne funkcije, pa je T rekurzivno prebrojiv prema propozicijama 1.3.4 i 1.3.5. Kako je,

$$(i, j) \in T_1 \iff (\exists l \in \mathbb{N})\ (i, j, l) \in T,$$

prema teoremu 1.3.3, T_1 je rekurzivno prebrojiv.

□

Lema 2.5.2. *Neka je (X, d) metrički prostor $a_1, \dots, a_k \in X$, $r_1, \dots, r_k \in \langle 0, +\infty\rangle$. Neka je K kompaktan skup u (X, d) takav da je*

$$K \subseteq K(a_1, r_1) \cup \cdots \cup K(a_k, r_k).$$

Tada postoji $\mu > 0$ takav da za svaki $x \in K$ postoji $i \in \{1, \dots, k\}$ takav da je

$$d(x, a_i) + \mu < r_i.$$

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, da takav $\mu > 0$ ne postoji. Tada za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $x_n \in K$ takav da za svaki $i \in \{1, \dots, k\}$ vrijedi

$$d(x_n, a_i) + \tfrac{1}{n} \geq r_i.$$

Budući da je K kompaktan, postoji konvergentan podniz (x_{p_n}) niza (x_n). Neka je $\tilde{x} \in K$ takav da je

$$\lim_{n\to\infty} x_{p_n} = \tilde{x}.$$

Imamo da je $\tilde{x} \in K(a_i, r_i)$, za neki $i \in \{1, \dots, k\}$. Sada zbog neprekidnosti funkcije $x \mapsto d(x, a_i)$ i $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{p_n} = 0$ imamo

$$\lim_{n\to\infty} \left(d(x_{p_n}, a_i) + \tfrac{1}{p_n} \right) = d(\tilde{x}, a_i) < r_i.$$

Dakle, mora postojati $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$d(x_{p_{n_0}}, a_i) + \tfrac{1}{p_{n_0}} < r_i,$$

što je kontradikcija s pretpostavkom.

□

Propozicija 2.5.3. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Ako je K izračunljiv skup u tom prostoru, tada je K i poluizračunljiv.*

Dokaz. Prema propoziciji 2.5.1, dovoljno je dokazati da je skup

$$T = \left\{ j \in \mathbb{N} \mid K \subseteq J_j \right\}$$

rekurzivno prebrojiv. Neka je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija takva da je za svaki $k \in \mathbb{N}$

$$K \approx_{2^{-k}} \Lambda_{f(k)}. \tag{2.5.14}$$

Neka je $j \in T$. Prema lemi 2.5.2, postoji $\mu > 0$ takav da za svaki $x \in K$ postoji $i \in [j]$ takav da je

$$d(x, \lambda_i) + 2\mu < \varrho_i.$$

Neka je $k \in \mathbb{N}$ takav da je $2^{-k} < \mu$ i $l \in [f(k)]$. Zbog (2.5.14), postoji $x \in K$ takav da je $d(\alpha_l, x) < 2^{-k}$. S druge strane, postoji $i \in [j]$ takav da je

$$d(x, \lambda_i) + 2\mu < \varrho_i.$$

Sada je

$$\begin{aligned} d(\alpha_l, \lambda_i) + 2^{-k} &< d(\alpha_l, \lambda_i) + \mu \\ &\leq \underbrace{d(\alpha_l, x)}_{<\mu} + d(x, \lambda_i) + \mu \\ &< d(x, \lambda_i) + 2\mu \\ &< \varrho_i. \end{aligned}$$

Dakle, dokazali smo da za svaki $j \in T$ postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da

$$(\forall l \in [f(k)])\, (\exists i \in [j])\ d(\alpha_l, \lambda_i) + 2^{-k} < \varrho_i. \tag{2.5.15}$$

Dokažimo obrat. Neka su $j, k \in \mathbb{N}$ takvi da vrijedi (2.5.15) i $x \in K$. Zbog (2.5.14), postoji $l \in [f(k)]$ takav da je

$$d(x, \alpha_l) < 2^{-k},$$

a prema (2.5.15), postoji $i \in [j]$ takav da je

$$d(\alpha_l, \lambda_i) + 2^{-k} < \varrho_i,$$

pa je

$$d(x, \lambda_i) \leq d(x, \alpha_l) + d(\alpha_l, \lambda_i) < 2^{-k} + d(\alpha_l, \lambda_i) < \varrho_i,$$

odnosno $x \in I_i \subseteq J_j$. Dakle, za $j \in \mathbb{N}$ za koji postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi (2.5.15), imamo $K \subseteq J_j$, odnosno $j \in T$. Dakle, imamo ekvivalenciju

$$j \in T \;\Leftrightarrow\; (\exists k \in \mathbb{N})\, (\forall l \in [f(k)])\, (\exists i \in [j])\ d(\alpha_l, \lambda_i) + 2^{-k} < \varrho_i.$$

Neka je

$$T_1 = \left\{(j,k) \in \mathbb{N}^2 \mid (\forall l \in [f(k)])\,(\exists i \in [j])\ d(\alpha_l, \lambda_i) + 2^{-k} < \varrho_i\right\}.$$

Definiramo skupove

$$A = \left\{(i,j,k,l) \in \mathbb{N}^4 \mid i \in [j],\ d(\alpha_l, \lambda_i) + 2^{-k} < \varrho_i\right\},$$

$$B = \left\{(j,k,l) \in \mathbb{N}^3 \mid (\exists i \in \mathbb{N})(i,j,k,l) \in A\right\}.$$

Skup A je rekurzivno prebrojiv prema korolaru 1.4.5 i propozicijama 1.2.3,1.3.5. Nadalje, B je rekurzivno prebrojiv prema teoremu 1.3.3. Sada se lako vidi da je

$$T_1 = \left\{(j,k) \in \mathbb{N}^2 \mid \{j\} \times \{k\} \times [f(k)] \subseteq B\right\}.$$

Prema propoziciji 1.4.2 i teoremu 1.4.9, T_1 je rekurzivno prebrojiv i vidimo da je

$$j \in T \ \Leftrightarrow\ (\exists k \in \mathbb{N})\ (j,k) \in T_1.$$

Sada iz teorema 1.3.3 slijedi da je T rekurzivno prebrojiv, pa je K poluizračunljiv.

$\square$

Sada dobivamo sljedeću važnu karakterizaciju izračunljivog skupa:

Teorem 2.5.4. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor i neka je $K \subseteq X$ kompaktan i neprazan. Tada je K izračunljiv ako i samo ako je poluizračunljiv i izračunljivo prebrojiv.*

Dokaz. Ako je K izračunljiv, tada je poluizračunljiv i izračunljivo prebrojiv prema propozicijama 2.4.1 i 2.5.3.

Dokažimo sada drugi smjer. Kako je K kompaktan, tada je on i potpun, pa prema propoziciji 2.4.8 postoji izračunljiv niz (x_n) koji je gust u S. Neka je $F : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija takva da za sve $i, k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$d(x_i, \alpha_{F(i,k)}) < 2^{-k}.$$

Definiramo

$$T = \left\{(k,j) \in \mathbb{N}^2 \mid K \subseteq \bigcup_{i \in [j]} K(\alpha_{F(i,k+1)}, 2^{-k})\right\}.$$

Uočimo da za $(k, j) \in T$ vrijedi

$$K \approx_{2^{-k}} \{\alpha_{F(i,k+1)} \mid i \in [j]\}. \tag{2.5.16}$$

Naime, iz definicije skupa T, očito je

$$K \prec_{2^{-k}} \{\alpha_{F(i,k+1)} \mid i \in [j]\},$$

a budući da je za $i \in \mathbb{N}$, $x_i \in K$ i $d(x_i, \alpha_{F(i,k+1)}) < 2^{-(k+1)} < 2^{-k}$, imamo i

$$\{\alpha_{F(i,k+1)} \mid i \in [j]\} \prec_{2^{-k}} K.$$

Dokažimo sada da je T rekurzivno prebrojiv skup. Definiramo

$$T_1 = \left\{(i,k,l) \in \mathbb{N}^3 \mid F(i,k+1) = (l)_0,\ 2^{-k} = q_{(l)_1}\right\}.$$

Prema propozicijama 1.2.3 i 1.3.1, T_1 je rekurzivno prebrojiv skup. Nadalje, za svaki $(i,k) \in \mathbb{N}^2$ postoji $l \in \mathbb{N}$ takav da je $(i,k,l) \in T_1$, pa prema teoremu 1.3.6, postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da je $(i,k,f(i,k)) \in T_1$, za svaki $(i,k) \in \mathbb{N}^2$. Za $(i,k,l) \in T_1$ vrijedi

$$K(\alpha_{F(i,k+1)}, 2^{-k}) = I_l,$$

pa je

$$K(\alpha_{F(i,k+1)}, 2^{-k}) = I_{f(i,k)},$$

za svaki $(i,k) \in \mathbb{N}^2$. Sada je

$$T = \left\{(k,j) \in \mathbb{N}^2 \mid K \subseteq \bigcup_{i\in[j]} I_{f(i,k)}\right\}.$$

Nadalje, definiramo $\Phi : \mathbb{N}^2 \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$,

$$\Phi(k,j) = [j] \times \{k\},\ k,j \in \mathbb{N}.$$

Φ je r.r.o. prema propoziciji 1.4.2. Sada je prema teoremu 1.4.6 i funkcija $f(\Phi) : \mathbb{N}^2 \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ r.r.o. i prema propoziciji 1.4.12 postoji rekurzivna funkcija $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da je

$$f(\Phi(k,j)) = [g(k,j)],$$

za sve $k, j \in \mathbb{N}$. Uočimo da je

$$f(\Phi)(k,j) = f([j] \times \{k\}) = \{f(i,k) \mid i \in [j]\} = [g(k,j)],$$

za sve $k, j \in \mathbb{N}$. Sada iz definicije skupova J_l, za $(k,j) \in \mathbb{N}^2$ imamo

$$\bigcup_{i\in[j]} I_{f(i,k)} = J_{g(k,j)}.$$

Dakle

$$T = \left\{(k,j) \in \mathbb{N}^2 \mid K \subseteq J_{g(k,j)}\right\}.$$

Kako je K poluizračunljiv, prema propoziciji 2.5.1 imamo da je skup

$$S = \{l \in \mathbb{N} \mid K \subseteq J_l\}$$

rekurzivno prebrojiv. Sada imamo

$$(k, j) \in T \iff g(k, j) \in S,$$

stoga je $T = g^{-1}(S)$, pa je T rekurzivno prebrojiv prema propoziciji 1.3.4.

Nadalje, za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoji $j \in \mathbb{N}$ tako da je $(k, j) \in T$. Naime, za $k \in \mathbb{N}$ imamo da je

$$K \subseteq K(x_{i_1}, 2^{-(k+1)}) \cup \cdots \cup K(x_{i_n}, 2^{-(k+1)}),$$

za neke $i_1, \ldots, i_n \in \mathbb{N}$. Ovo sljedi iz kompaktnosti skupa K i činjenice da je, zbog gustoće niza (x_i) u K, za proizvoljan $\varepsilon > 0$

$$\{K(x_i, \varepsilon) \mid i \in \mathbb{N}\}$$

otvoren pokrivač od K. Neka je sada $x \in K$. Tada je $d(x, x_{i_j}) < 2^{-(k+1)}$ za neki $j \in \{1, \ldots, n\}$, a onda je

$$d(x, \alpha_{F(i_j,k+1)}) \leq d(x, x_{i_j}) + d(x_{i_j}, \alpha_{F(i_j,k+1)}) < 2 \cdot 2^{-(k+1)} = 2^{-k},$$

dakle

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} K(\alpha_{F(i_j,k+1)}, 2^{-k}).$$

Sada imamo da postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je

$$[j] = \{i_1, \ldots, i_n\},$$

a za taj j imamo da je $(k, j) \in T$. Dakle, prema teoremu 1.3.6, postoji rekurzivna funkcija $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $(k, h(k)) \in T$, za svaki $k \in \mathbb{N}$. Iz (2.5.16) imamo da za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$K \approx_{2^{-k}} \{\alpha_{F(i,k+1)} \mid i \in [h(k)]\}.$$

Sada definiramo funkciju $\Psi : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$,

$$\Psi(k) = [h(k)] \times \{k + 1\}, \ k \in \mathbb{N}.$$

Prema napomeni 1.4.8 i propoziciji 1.4.2, Ψ je r.r.o. funkcija. Prema teoremu 1.4.6 tada je i $F(\Psi) : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ r.r.o. funkcija i vrijedi

$$F(\Psi)(k) = \{F(i, k + 1) \mid i \in [h(k)]\},$$

za svaki $k \in \mathbb{N}$. Sada prema propoziciji 1.4.12, postoji rekurzivna funkcija $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je

$$\{F(i, k + 1) \mid i \in [h(k)]\} = [\varphi(k)],$$

za svaki $k \in \mathbb{N}$. Imamo

$$\Lambda_{\varphi(k)} = \alpha([\varphi(k)]) = \alpha(\{F(i, k+1) \mid i \in [h(k)]\}) = \{\alpha_{F(i,k+1)} \mid i \in [h(k)]\},$$

pa je

$$K \approx_{2^{-k}} \Lambda_{\varphi(k)},$$

za svaki $k \in \mathbb{N}$, dakle K je izračunljiv.

□

2.6 Lokalna izračunljivost

Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor i $S \subseteq X$. Kažemo da je S **slabo izračunljivo prebrojiv** ako su izračunljive točke guste u S.

Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor i $A, B \subseteq X$, $A \subseteq B$. Kažemo da je A **izračunljiv do na** B ako postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je

$$A \prec_{2^{-k}} \Lambda_{f(k)}, \ \Lambda_{f(k)} \prec_{2^{-k}} B,$$

za svaki $k \in \mathbb{N}$. Uočimo da je neprazan kompaktan skup K izračunljiv ako i samo ako je K izračunljiv do na K.

Propozicija 2.6.1. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor i $A, B, S \subseteq X$, $A, B \subseteq S$. Ako su A i B izračunljivi do na S, tada je i $A \cup B$ izračunljiv do na S.*

Dokaz. Neka su $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije takve da je

$$A \prec_{2^{-k}} \Lambda_{f(k)} \prec_{2^{-k}} S,$$

$$B \prec_{2^{-k}} \Lambda_{g(k)} \prec_{2^{-k}} S,$$

za svaki $k \in \mathbb{N}$. Tada lako vidimo da je

$$A \cup B \prec_{2^{-k}} \Lambda_{f(k)} \cup \Lambda_{g(k)} \prec_{2^{-k}} S,$$

za svaki $k \in \mathbb{N}$. Sada uočimo da je za $k \in \mathbb{N}$

$$\Lambda_{f(k)} \cup \Lambda_{g(k)} = \alpha([f(k)]) \cup \alpha([g(k)]) = \alpha([f(k)] \cup [g(k)]).$$

Neka je $\Phi : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$,

$$\Phi(k) = [f(k)] \cup [g(k)], \ k \in \mathbb{N}.$$

Φ je r.r.o. funkcija prema napomenama 1.4.11, 1.4.8 i propoziciji 1.4.1. Prema propoziciji 1.4.12, postoji rekurzivna funkcija $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je

$$\Phi(k) = [h(k)],$$

za svaki $k \in \mathbb{N}$. Sada je

$$\Lambda_{f(k)} \cup \Lambda_{g(k)} = \alpha(\Phi(k)) = \alpha([h(k)]) = \Lambda_{h(k)},$$

za svaki $k \in \mathbb{N}$, pa vidimo da je

$$A \cup B \prec_{2^{-k}} \Lambda_{h(k)} \prec_{2^{-k}} S,$$

za svaki $k \in \mathbb{N}$, iz čega slijedi da je $A \cup B$ izračunljiv do na S.

□

Indukcijom lako dobivamo:

Korolar 2.6.2. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor i $A_1, \dots, A_k, S \subseteq X$, $A_1, \dots, A_k \subseteq S$. Ako su $A_1, \dots, A_k$ izračunljivi do na S, tada je i $A \cup \dots \cup A_k$ izračunljiv do na S.*

Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor, $S \subseteq X$ i $x \in S$. Kažemo da je S **izračunljiv u** x ako postoji okolina N od x u S takva da je N izračunljiv do na S.

Propozicija 2.6.3. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor i neka je $K \subseteq X$ kompaktan i neprazan. Tada je K izračunljiv ako i samo ako je K izračunljiv u x, za svaki $x \in K$*

Dokaz. Očito je izračunljiv skup izračunljiv u svakoj svojoj točki (za traženu okolinu proizvoljne točke uzmemo čitav skup).

S druge strane, pretpostavimo da je kompaktan skup K izračunljiv u svakoj svojoj točki. Tada za svaki $x \in K$ postoji okolina N_x od x u K koja je izračunljiva do na K. Kako je za $x \in K$ N_x okolina od x u K, postoji otvoren skup V_x u K takav da je

$$x \in V_x \subseteq N_x.$$

Nadalje, budući da je za $x \in K$ V_x otvoren u K, postoji otvoren skup U_x u (X, d) takav da je $V_x = U_x \cap K$. Sada je

$$\{U_x \mid x \in K\}$$

otvoren pokrivač od K u (X, d), pa kako je K kompaktan, postoje $x_1, \dots, x_n \in K$ tako da je

$$K \subseteq U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_n},$$

a onda je i

$$K = V_{x_1} \cup \dots \cup V_{x_n} \subseteq N_{x_1} \cup \dots \cup N_{x_n},$$

odnosno

$$K = N_{x_1} \cup \cdots \cup N_{x_n}.$$

Kako je za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$, N_{x_i} izračunljiv do na K, prema prethodnom korolaru K je izračunljiv do na K, pa je K izračunljiv skup.

□

Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor, $S \subseteq X$ i $x \in S$. Pretpostavimo da postoji izračunljiva kompaktna okolina N od x u S. Tada je N izračunljiva do na N, a onda je N izračunljiva i do na S. Dakle, ako postoji izračunljiva kompaktna okolina od x u S, tada je S izračunljiv u x.

Pokazat ćemo da vrijedi i obrat ako je S potpun, odnosno želimo karakterizirati izračunljivost u točki na sljedeći način:

$$S \text{ je izračunljiv u } x \;\Leftrightarrow\; x \text{ ima kompaktnu izračunljivu okolinu u } S$$

Propozicija 2.6.4. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Ako je $S \subseteq X$ potpun i izračunljiv u x, tada postoji okolina N točke x u S takva da je N izračunljivo prebrojiv kompaktan skup i izračunljiv do na S.*

Dokaz. Neka je M okolina od x u S takva da postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tako da

$$M \prec_{2^{-k}} \Lambda_{f(k)} \prec_{2^{-k}} S, \tag{2.6.17}$$

za sve $k \in \mathbb{N}$. Kako je M okolina od x u S, postoji $i_0 \in \mathbb{N}$ tako da $x \in I_{i_0} \cap S \subseteq M$. Prema (2.6.17), imamo

$$I_{i_0} \cap S \prec_{2^{-k}} \Lambda_{f(k)}, \tag{2.6.18}$$

za sve $k \in \mathbb{N}$. Neka je

$$\Omega = \{i \in \mathbb{N} \mid I_{i_0} \cap S \cap I_i \neq \emptyset\}.$$

Tvrdimo da za proizvoljan $i \in \mathbb{N}$ imamo sljedeću ekvivalenciju

$$i \in \Omega \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{N})(\exists j \in [f(k)])\; d(\lambda_i, \alpha_j) + 2^{-k} < \rho_i,\; d(\lambda_{i_0}, \alpha_j) + 2^{-k} < \rho_{i_0} \tag{2.6.19}$$

Naime, ako je $i \in \Omega$, tada postoji $y \in I_{i_0} \cap S \cap I_i$. Zbog $d(\lambda_i, y) < \rho_i$ i $d(\lambda_{i_0}, y) < \rho_{i_0}$, postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da

$$d(\lambda_i, y) + 2 \cdot 2^{-k} < \rho_i$$

i

$$d(\lambda_{i_0}, y) + 2 \cdot 2^{-k} < \rho_{i_0}.$$

Kako je $y \in M$, iz (2.6.17) slijedi da postoji $j \in [f(k)]$ tako da $d(y, \alpha_j) < 2^{-k}$. Sada imamo

$$\begin{aligned} d(\lambda_i, \alpha_j) + 2^{-k} &\leq d(\lambda_i, y) + d(y, \alpha_j) + 2^{-k} \\ &< d(\lambda_i, y) + 2 \cdot 2^{-k} \\ &< \rho_i. \end{aligned}$$

Analogno dobivamo

$$d(\lambda_{i_0}, \alpha_j) + 2^{-k} < \rho_{i_0}.$$

Neka je sada $i \in \mathbb{N}$ takav da postoji $k \in \mathbb{N}$ i $j \in [f(k)]$ takvi da

$$d(\lambda_i, \alpha_j) + 2^{-k} < \rho_i,$$

$$d(\lambda_{i_0}, \alpha_j) + 2^{-k} < \rho_{i_0}.$$

Sada lako dobivamo $K(\alpha_j, 2^{-k}) \subseteq I_i$ i $K(\alpha_j, 2^{-k}) \subseteq I_{i_0}$. Prema (2.6.17), postoji $y \in S$ tako da $d(\alpha_j, y) < 2^{-k}$. Dakle imamo

$$y \in K(\alpha_j, 2^{-k}) \subseteq I_i \cap I_{i_0},$$

pa je $y \in I_{i_0} \cap S \cap I_i$ te $i \in \Omega$.

Neka je

$$\Omega' = \left\{(i, j, k) \in \mathbb{N}^3 \mid j \in [f(k)],\ d(\lambda_i, \alpha_j) + 2^{-k} < \rho_i,\ d(\lambda_{i_0}, \alpha_j) + 2^{-k} < \rho_{i_0}\right\}.$$

Lako je vidjeti da je Ω' rekurzivno prebrojiv i vidjeli smo

$$i \in \Omega \iff (\exists (j, k) \in \mathbb{N}^2)\ (i, j, k) \in \Omega'.$$

Sada je prema teoremu 1.3.3, Ω rekurzivno prebrojiv. Neka je

$$N = \mathrm{Cl}(I_{i_0} \cap S).$$

Kako je S zatvoren i $I_{i_0} \cap S \subseteq S$, mora biti $N \subseteq S$. Također, N je očito okolina točke x u S. Iz (2.6.18) dobivamo

$$N \prec_{2^{-k}} \Lambda_{f(k+1)} \prec_{2^{-k}} S,$$

za sve $k \in \mathbb{N}$. Stoga je N izračunljiv do na S. Također, iz

$$N \prec_{2^{-k}} \Lambda_{f(k+1)},$$

za sve $k \in \mathbb{N}$ slijedi da je N, kao potprostor od (X, d), potpuno omeđen metrički prostor. Također, budući da je N zatvoren u S, a S je potpun, N je također potpun. Stoga je N potpun i potpuno omeđen, pa je kompaktan.

Očito za proizvoljan otvoren skup U u (X, d) i $A \subseteq X$ vrijedi

$$A \cap U \neq \emptyset \Leftrightarrow \mathrm{Cl}(A) \cap U \neq \emptyset.$$

Dakle imamo

$$\{i \in \mathbb{N} \mid N \cap I_i \neq \emptyset\} = \Omega,$$

pa je prema dokazanom, N izračunljivo prebrojiv skup.

□

Propozicija 2.6.5. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Ako je $S \subseteq X$ potpun i izračunljiv u x, tada postoji izračunljiv niz (x_i) u S, rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ i okolina N točke x u S tako da vrijedi*

$$N \prec_{2^{-k}} \{x_i \mid 0 \leq i \leq f(k)\},$$

za sve $k \in \mathbb{N}$.

Dokaz. Po prethodnoj propoziciji, postoji okolina M točke x u S takva da je M izračunljivo prebrojiv kompaktan skup koji je izračunljiv do na S. Neka je $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija takva da vrijedi

$$M \prec_{2^{-k}} \Lambda_{g(k)} \prec_{2^{-k}} S, \tag{2.6.20}$$

za sve $k \in \mathbb{N}$. Budući da je M izračunljivo prebrojiv i kompaktan, prema propoziciji 2.4.8, postoji izračunljiv niz (x_i) koji je gust u M. Neka je a racionalna točka (tj. $a \in \mathrm{Im}\,\alpha$) i $\varepsilon \in \mathbb{Q}$, $\varepsilon > 0$ tako da

$$x \in K(a, \varepsilon),\ K_S(a, 4\varepsilon) \subseteq M,$$

gdje je $K_S(a, r) = K(a, r) \cap S$, za $r > 0$.

Definiramo

$$\Omega_1 = \{i \in \mathbb{N} \mid d(a, \alpha_i) < 3\varepsilon\},$$

$$\Omega_2 = \{i \in \mathbb{N} \mid d(a, \alpha_i) > 2\varepsilon\}.$$

Ω_1, Ω_2 su rekurzivno prebrojivi i očito $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \mathbb{N}$. Po propoziciji 1.3.8, postoje rekurzivni skupovi Γ_1, Γ_2 tako da $\Gamma_1 \subseteq \Omega_1$, $\Gamma_2, \subseteq \Omega_2$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$, $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \mathbb{N}$. Imamo

$$K_S(a, \varepsilon) \prec_{2^{-k}} \{\alpha_i \mid i \in [g(k)]\} \prec_{2^{-k}} S, \tag{2.6.21}$$

za sve $k \in \mathbb{N}$. Neka je sada $k \in \mathbb{N}$ takav da $2^{-k} < \varepsilon$. Tvrdimo da

$$K_S(a, \varepsilon) \prec_{2^{-k}} \{\alpha_i \mid i \in [g(k)] \cap \Gamma_1\} \prec_{2^{-k}} K_S(a, 4\varepsilon) \tag{2.6.22}$$

Naime, za $y \in K_S(a, \varepsilon)$, prema (2.6.21), postoji $i \in [g(k)]$ tako da $d(y, \alpha_i) < 2^{-k}$. Koristeći nejednakost trokuta, dobivamo

$$d(a, \alpha_i) \leq d(a, y) + d(y, \alpha_i) < \varepsilon + 2^{-k} < 2\varepsilon$$

Dakle, $i \in \Gamma_1$.

Neka je sada $i \in [g(k)] \cap \Gamma_1$. Prema (2.6.21), postoji $z \in S$ tako da $d(\alpha_i, z) < 2^{-k}$. Imamo

$$d(a, z) \le d(a, \alpha_i) + d(\alpha_i, z) < 3\varepsilon + \varepsilon = 4\varepsilon,$$

stoga je $z \in K_S(a, 4\varepsilon)$.

Iz (2.6.22) slijedi da za $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da $2^{-k_0} < \varepsilon$ imamo

$$K_S(a, \varepsilon) \prec_{2^{-(k_0+k)}} \{\alpha_i \mid i \in [g(k_0 + k)] \cap \Gamma_1\} \prec_{2^{-(k_0+k)}} K_S(a, 4\varepsilon), \tag{2.6.23}$$

za sve $k \in \mathbb{N}$. Lako se vidi da je $k \mapsto [g(k_0 + k)] \cap \Gamma_1$ r.r.o. funkcija $\mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$, pa prema propoziciji 1.4.12, postoji rekurzivna funkcija $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je

$$[g(k_0 + k)] \cap \Gamma_1 = [h(k)],$$

za sve $k \in \mathbb{N}$. Iz (2.6.23) dobivamo

$$K_S(a, \varepsilon) \prec_{2^{-k}} \Lambda_{h(k)} \prec_{2^{-k}} K_S(a, 4\varepsilon), \tag{2.6.24}$$

za sve $k \in \mathbb{N}$. Neka je

$$\Omega = \left\{(j, k, i) \in \mathbb{N}^3 \mid d(\alpha_j, x_i) < 2 \cdot 2^{-k},\ j \in [h(k)]\right\}.$$

Zbog gustoće niza (x_i) u M i (2.6.24), za sve $k \in \mathbb{N}$, $j \in [h(k)]$ postoji $i \in \mathbb{N}$ tako da je $(j, k, i) \in \Omega$. Prema teoremu 1.3.6, postoji parcijalno rekurzivna funkcija

$$\varphi : \left\{(j, k) \in \mathbb{N}^2 \mid j \in [h(k)]\right\} \to \mathbb{N},$$

takva da je $(j, k, \varphi(j, k)) \in \Omega$ za sve $k \in \mathbb{N}$, $j \in [h(k)]$. Imamo

$$\Lambda_{h(k)} \prec_{2 \cdot 2^{-k}} \left\{x_{\varphi(j,k)} \mid j \in [h(k)]\right\},$$

za sve $k \in \mathbb{N}$. Stoga imamo

$$\Lambda_{h(k+2)} \prec_{2^{-(k+1)}} \left\{x_{\varphi(j,k+2)} \mid j \in [h(k + 2)]\right\},$$

za sve $k \in \mathbb{N}$. Ovo, zajedno sa (2.6.24) povlači

$$K_S(a, \varepsilon) \prec_{2^{-k}} \{x_i \mid 0 \le i \le \max\{\varphi(j, k + 2) \mid j \in [h(k + 2)]\}\}.$$

Neka je $N = K_S(a, \varepsilon)$ i $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$,

$$f(k) = \max\{\varphi(j, k + 2) \mid j \in [h(k + 2)]\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Sada je očito da N i f imaju tražena svojstva.

□

Lema 2.6.6. *Neka je (X, d) metrički prostor, (x_i) niz u X, $T \subseteq X$ takav da $T \prec_\varepsilon \{x_i \mid i \in A\}$, $T \prec_\delta \{x_j \mid j \in B\}$, za neke $\varepsilon, \delta > 0$ i $A, B \subseteq \mathbb{N}$. Ako je $\eta \geq \varepsilon + \delta$ i*

$$B' = \left\{ j \in B \mid (\exists i \in A)\ d(x_j, x_i) < \eta \right\},$$

tada

$$T \prec_\delta \{x_j \mid j \in B'\},$$
$$\{x_j \mid j \in B'\} \prec_\eta \{x_i \mid i \in A\}.$$

Dokaz. Neka je $y \in T$. Tada postoji $i \in A$ i $j \in B$ tako da $d(y, x_i) < \varepsilon$, $d(y, x_j) < \delta$. Sada imamo

$$d(x_i, x_j) \leq d(x_i, y) + d(y, x_j) < \varepsilon + \delta \leq \eta,$$

pa je $j \in B'$. Stoga

$$T \prec_\delta \{x_j \mid j \in B'\}.$$

Iz definicije skupa B' očito je

$$\{x_j \mid j \in B'\} \prec_\eta \{x_i \mid i \in A\}.$$

□

Lema 2.6.7. *Neka je (X, d) metrički prostor i $a \in X$, $r > 0$ tako da je $\overline{K}(a, 2r)$ kompaktan skup u (X, d). Ako je U otvoren skup u (X, d) takav da je $\overline{K}(a, r) \subseteq U$, tada postoji $r' > r$ takav da $\overline{K}(a, r') \subseteq U$.*

Dokaz. Neka je $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da $2^{-n_0} < r$. Pretpostavimo da

$$\overline{K}(a, r + 2^{-(n_0+n)}) \nsubseteq U,$$

za sve $n \in \mathbb{N}$. Tada za svaki $n \in \mathbb{N}$, postoji

$$y_n \in \overline{K}(a, r + 2^{-(n_0+n)}) \setminus U. \tag{2.6.25}$$

Kako je $2^{-(n_0+n)} < r$, imamo $y_n \in \overline{B}(a, 2r)$, za sve $n \in \mathbb{N}$. Budući da je $\overline{K}(a, 2r)$ kompaktan, postoji konvergentan podniz (y_{p_n}). Neka je

$$y = \lim_{n \to \infty} y_{p_n}.$$

Iz $d(a, y_n) \leq r + 2^{-(n_0+n)}$, za sve $n \in \mathbb{N}$ slijedi da je $d(a, y) \leq r$, tj. $y \in \overline{K}(a, r)$. Dakle $y \in U$, što je u kontradikciji s (2.6.25). Zaključujemo da postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\overline{K}(a, r + 2^{-(n_0+n)}) \subseteq U,$$

što je upravo tražena tvrdnja.

□

Teorem 2.6.8. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor i $S \subseteq X$. Ako je S potpun u (X, d) i izračunljiv u x, tada postoji okolina N točke x u S takva da je N izračunljiv skup. Štoviše, za svaki $\varepsilon > 0$ postoji takva okolina N sa svojstvom* $\operatorname{diam} N < \varepsilon$.

Dokaz. Prema propoziciji 2.6.5 postoji okolina M točke x u S, izračunljiv niz (x_i) u S i rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tako da je

$$M \prec_{2^{-k}} \{x_i \mid 0 \leq i \leq f(k)\},$$

za sve $k \in \mathbb{N}$. Neka je a racionalna točka i $r \in \mathbb{Q}, r > 0$ tako da je

$$x \in K(a, r), \ \overline{K}_S(a, 2r) \subseteq M,$$

gdje je $\overline{K}_S(a, t) = \overline{K}(a, t) \cap S$, za $t > 0$. Imamo

$$\overline{K}_S(a, r) \prec_{2^{-k}} \{x_i \mid 0 \leq i \leq f(k)\}. \tag{2.6.26}$$

Definiramo

$$\Omega_1 = \left\{(i, k) \in \mathbb{N}^2 \mid d(a, x_i) < r + 2 \cdot 2^{-k}\right\},$$

$$\Omega_2 = \left\{(i, k) \in \mathbb{N}^2 \mid d(a, x_i) > r + 2^{-k}\right\}.$$

Ω_1 i Ω_2 su rekurzivno prebrojivi i $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \mathbb{N}^2$, pa prema propoziciji 1.3.8, postoje rekurzivni skupovi Γ_1, Γ_2 takvi da je $\Gamma_1 \subseteq \Omega_1$, $\Gamma_2 \subseteq \Omega_2$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$, $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \mathbb{N}^2$. Definiramo $\Phi : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$,

$$\Phi(k) = \{i \in \mathbb{N} \mid 0 \leq i \leq f(k), \ (i, k) \in \Gamma_1\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Lako se vidi da je Φ r.r.o. funkcija. Sada tvrdimo da je

$$\overline{K}_S(a, r) \prec_{2^{-k}} \{x_i \mid i \in \Phi(k)\} \subseteq K(a, r + 2 \cdot 2^{-k}), \tag{2.6.27}$$

za sve $k \in \mathbb{N}$. Iz definicije funkcije Φ, očito je

$$\{x_i \mid i \in \Phi(k)\} \subseteq K(a, r + 2 \cdot 2^{-k}).$$

Neka je $y \in \overline{K}_S(a, r)$. Prema (2.6.26), postoji $i \in \{0, \ldots, f(k)\}$ takav da je $d(y, x_i) < 2^{-k}$. Imamo

$$d(a, x_i) \leq d(a, y) + d(y, x_i) < r + 2^{-k},$$

pa $(i, k) \notin \Gamma_2$. Stoga mora biti $(i, k) \in \Gamma_1$ pa smo dobili traženu tvrdnju. Definiramo

$$\Omega_1' = \left\{(j, k, i) \in \mathbb{N}^3 \mid d(x_j, x_i) < 3 \cdot 2^{-k}\right\},$$

$$\Omega_2' = \left\{(j,k,i) \in \mathbb{N}^3 \mid d(x_j, x_i) > 2 \cdot 2^{-k}\right\}.$$

Ponovno su Ω_1', Ω_2' rekurzivno prebrojivi i $\Omega_1' \cup \Omega_2' = \mathbb{N}^3$. Neka su Γ_1', Γ_2' rekurzivni skupovi iz propozicije 1.3.8. Neka je $\Psi : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$,

$$\begin{aligned} \Psi(0) &= \Phi(0), \\ \Psi(k+1) &= \{j \in \Phi(k+1) \mid (\exists i \in \Psi(k))\ (j,k,i) \in \Gamma_1'\}, \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Za $A \subseteq \mathbb{N}$ označimo

$$x_A := \{x_i \mid i \in A\}.$$

Indukcijom dokazujemo da je

$$\overline{K}_S(a,r) \prec_{2^{-k}} x_{\Psi(k)}, \tag{2.6.28}$$

za sve $k \in \mathbb{N}$. Za $k = 0$ tvrdnja slijedi iz (2.6.27). Pretpostavimo da (2.6.28) vrijedi za neki $k \in \mathbb{N}$. Prema (2.6.27) imamo

$$\overline{K}_S(a,r) \prec_{2^{-(k+1)}} x_{\Phi(k+1)}.$$

Sada iz leme 2.6.6 slijedi da je

$$\overline{K}_S(a,r) \prec_{2^{-(k+1)}} x_{B'},$$

gdje je

$$B' = \left\{j \in \Phi(k+1) \mid (\exists i \in \Psi(k))\ d(x_j, x_i) < \tfrac{3}{2} \cdot 2^{-k}\right\}.$$

Sada vidimo da je $B' \subseteq \Psi(k+1)$, dakle

$$\overline{K}_S(a,r) \prec_{2^{-(k+1)}} x_{\Psi(k+1)},$$

pa (2.6.28) vrijedi za svaki $k \in \mathbb{N}$. Iz definicije od Ψ sada dobivamo

$$\begin{aligned} \overline{K}_S(a,r) &\prec_{2^{-k}} x_{\Psi(k)}, \\ x_{\Psi(k+1)} &\prec_{3 \cdot 2^{-k}} x_{\Psi(k)}, \end{aligned} \tag{2.6.29}$$

za sve $k \in \mathbb{N}$. Neka je $k_0 \in \mathbb{N}$. Definiramo

$$N = \overline{K}_S(a,r) \cup \left\{x_i \mid i \in \bigcup_{k \geq k_0} \Psi(k)\right\}.$$

Sada za $k, n \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$ iz (2.6.29) dobivamo

$$x_{\Psi(n+k)} \prec_{3 \cdot 2^{-(n+k-1)}} x_{\Psi(n+k-1)} \prec \cdots \prec_{3 \cdot 2^{-(n+1)}} x_{\Psi(n+1)} \prec_{3 \cdot 2^{-n}} x_{\Psi(n)},$$

pa iz nejednakosti trokuta lako vidimo da je

$$x_{\Psi(n+k)} \prec_{3\cdot 2^{-(n+k-1)}+\cdots+3\cdot 2^{-(n+1)}+3\cdot 2^{-n}} x_{\Psi(n)}.$$

Zbog

$$\begin{aligned} 3\cdot 2^{-(n+k-1)}+\cdots+3\cdot 2^{-(n+1)}+3\cdot 2^{-n} &= 3\cdot 2^{-(n+k-1)}\cdot(1+\cdots+2^{k-1}) \\ &= 3\cdot 2^{-(n+k-1)}\cdot(2^k-1) \\ &\le 3\cdot 2^{-(n-1)}\cdot 2^{-k}\cdot 2^k \\ &= 6\cdot 2^{-n}, \end{aligned}$$

imamo

$$x_{\Psi(n+k)} \prec_{6\cdot 2^{-n}} x_{\Psi(n)},$$

za sve $k, n \in \mathbb{N}$. Iz ovoga je lako vidjeti da ako su $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$, tada je

$$x_{\Psi(m)} \prec_{6\cdot 2^{-n}} x_{\Psi(n)}.$$

Stoga imamo

$$N \approx_{6\cdot 2^{-n}} \Big\{x_i \mid i \in \bigcup_{k=k_0}^{k_0+n} \Psi(k)\Big\}, \tag{2.6.30}$$

za sve $n \in \mathbb{N}$.

Sada nam je cilj dokazati da je Ψ r.r.o. funkcija $\mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Prvo definiramo $\Lambda : \mathbb{N}^2 \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$,

$$\Lambda(k, a) = \{j \in \Phi(k+1) \mid (\exists i \in [a])\,(j, k, i) \in \Gamma_1'\}, \quad k, a \in \mathbb{N}.$$

Budući da je Φ r.r.o. funkcija i Γ_1' rekurzivan, lako se vidi da je Λ r.r.o. funkcija. Neka je $a_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\Psi(0) = [a_0]$ i g definirana sa

$$\begin{aligned} &g(0) = a_0 \\ &g(k+1) \simeq \mu y\,(\Lambda(k, g(k)) = [y]), \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

g je parcijalno rekurzivna, $[g(0)] = \Psi(0)$ i ako je $k \in \mathbb{N}$ takav da je k u domeni od g i $[g(k)] = \Psi(k)$, tada je

$$\Lambda(k, g(k)) = \Psi(k+1).$$

Kako je $\Psi(k+1) \neq \emptyset$, za sve $k \in \mathbb{N}$, imamo da postoji $y \in \mathbb{N}$ takav da je $\Psi(k+1) = [y]$, pa je $k+1$ također u domeni od g i $[g(k+1)] = \Psi(k+1)$. Stoga je g totalna funkcija takva da je

$$[g(k)] = \Psi(k),$$

za sve $k \in \mathbb{N}$. Iz prethodne jednakosti slijedi da je Ψ r.r.o. funkcija.

Neka je sada $\Theta : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$,

$$\Theta(n) = \bigcup_{k=k_0}^{k_0+n} \Psi(k), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Prema teoremu 1.4.10, Θ je r.r.o. funkcija, te vrijedi

$$N \approx_{6\cdot 2^{-n}} x_{\Theta(n)},$$

za sve $n \in \mathbb{N}$. Neka je $F : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija takva da je

$$d(x_i, \alpha_{F(i,n)}) < 2^{-n},$$

za sve $i, n \in \mathbb{N}$. Imamo

$$N \approx_{7\cdot 2^{-n}} \{\alpha_{F(i,n)} \mid i \in \Theta(n)\},$$

za sve $n \in \mathbb{N}$.

Sada definiramo $\Sigma : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$,

$$\Sigma(n) = \{F(i, n+3) \mid i \in \Theta(n+3)\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Σ je r.r.o. funkcija i imamo

$$N \approx_{2^{-n}} \{\alpha_j \mid j \in \Sigma(n)\},$$

za sve $n \in \mathbb{N}$. Također, iz $\Psi(k) \neq \emptyset$, za sve $k \in \mathbb{N}$, slijedi da $\Sigma(n) \neq \emptyset$, za sve $n \in \mathbb{N}$. Stoga postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je

$$[f(n)] = \Sigma(n),$$

za sve $n \in \mathbb{N}$. Sada imamo

$$N \approx_{2^{-n}} \Lambda_{f(n)},$$

za sve $n \in \mathbb{N}$.

Još preostaje dokazati da je N kompaktan skup u (X, d). Neka je $\mathcal{U}$ otvoren pokrivač skupa N u (X, d). Tada je $\mathcal{U}$ otvoren pokrivač i od $\overline{K}_S(a, r)$ u (X, d). Budući da je $\overline{K}_S(a, r)$ zatvoren u S, on je i potpun, a prema (2.6.26) je i potpuno omeđen. Stoga je $\overline{K}_S(a, r)$ kompaktan u (X, d), pa postoje $n \in \mathbb{N}$ i $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$ takvi da je

$$\overline{K}_S(a, r) \subseteq U_1 \cup \cdots \cup U_n,$$

pa imamo

$$\overline{K}_S(a, r) \subseteq (U_1 \cup \cdots \cup U_n) \cap S \tag{2.6.31}$$

Analogno zaključujemo da je $\overline{K}_S(a, 2r)$ kompaktan u S (ako S gledamo kao potprostor od (X, d)), pa iz (2.6.31) i leme 2.6.7 dobivamo da postoji $r' > r$ takav da je $\overline{K}_S(a, r') \subseteq$

$(U_1 \cup \cdots \cup U_n) \cap S$. Kako je $x_{\Psi(k)} \subseteq K_S(a, r + 2 \cdot 2^{-k})$, za $l_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $2 \cdot 2^{-l_0} \leq r' - r$, imamo

$$\Big\{x_i \mid i \in \bigcup_{k \geq l_0} \Psi(k)\Big\} \subseteq \overline{K}_S(a, r') \subseteq U_1 \cup \cdots \cup U_n.$$

Budući da je

$$N = \underbrace{\overline{K}_S(a, r) \cup \Big\{x_i \mid i \in \bigcup_{k \geq l_0} \Psi(k)\Big\}}_{\subseteq U_1 \cup \cdots \cup U_n} \cup \underbrace{\Big\{x_i \mid i \in \bigcup_{k = k_0}^{l_0} \Psi(k)\Big\}}_{\text{konačan skup}},$$

postoje $m \in \mathbb{N}$ i $U_1, \ldots, U_m$ takvi da je

$$N \subseteq U_1 \cup \cdots \cup U_m.$$

Dakle, N je kompaktan skup u (X, d).

Iz definicije skupa N i (2.6.27) slijedi da je

$$N \subseteq K(a, r + 2 \cdot 2^{-k_0},$$

pa je

$$\operatorname{diam} N \leq 2r + 4 \cdot 2^{-k_0}).$$

Dakle, ako za zadani $\varepsilon > 0$ uzmemo r takav da je $r < \frac{\varepsilon}{4}$, možemo uzeti k_0 takav da je

$$2r + 4 \cdot 2^{-k_0} < \varepsilon,$$

pa imamo da je $\operatorname{diam} N < \varepsilon$.

□

Ako je (X, d) metrički prostor i K kompaktan skup u (X, d), tada je K potpuno omeđen. Dakle, za proizvoljan $\varepsilon > 0$ možemo pronaći konačno skupova dijametra manjeg od ε koji pokrivaju K. Ukoliko uzmemo zatvarače tih skupova, tada dobivamo kompaktne skupove dijametra manjeg od ε čija unija je jednaka K.

Pitamo se vrijedi li analogna tvrdnja u izračunljivim metričkim prostorima, odnosno možemo li izračunljiv skup napisati kao uniju konačno mnogo izračunljivih skupova proizvoljno malog dijametra. Odgovor je potvrdan, a dobivamo ga kao jednostavnu posljedicu teorema 2.6.8.

Teorem 2.6.9. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor i K neprazan izračunljiv skup u (X, d, α). Tada za svaki $\varepsilon > 0$ postoji konačno mnogo izračunljivih skupova dijametra manjeg od ε čija unija je K.*

Dokaz. Budući da je K izračunljiv, izračunljiv je u svakoj točki $x \in K$. Dakle, prema teoremu 2.6.8, za svaki $x \in K$ postoji izračunljiva okolina N_x od x u K takva da je $\operatorname{diam} N_x < \varepsilon$. Budući da je K kompaktan,

$$K = N_{x_1} \cup \cdots \cup N_{x_n}.$$

□

Na prvi pogled se možda čini da smo prethodni rezultat mogli dobiti direktnije, bez korištenja teorema 2.6.8. Odnosno, da smo tražene izračunljive skupove proizvoljno malog dijametra mogli dobiti kao presjeke skupa K s nekim zatvorenim racionalnim kuglama. No problem je u tome što općenito zatvorena racionalna kugla ne mora biti izračunljiv skup. Nadalje, čak i ako pronađemo izračunljive zatvorene racionalne kugle koje pokrivaju K, njihovi presjeci s K ne moraju biti izračunljivi skupovi.

Korolar 2.6.10. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor i neka je K izračunljiv skup u tom prostoru.*

(i) Pretpostavimo da je (F, G) separacija od K. Tada su F i G izračunljivi skupovi u (X, d, α).

(ii) Ako K ima konačno mnogo komponenti povezanosti, tada je svaka komponenta izračunljiv skup u (X, d, α).

Dokaz.

(i) Budući da su F i G zatvoreni u K, oni su kompaktni u (X, d). Neka je

$$\varepsilon = d(F, G) = \inf\{d(x, y) \mid x \in F,\ y \in G\}.$$

Tada je $\varepsilon > 0$. Prema teoremu 2.6.9, postoje izračunljivi skupovi $K_1, \dots, K_n$ takvi da je

$$K = K_1 \cup \cdots \cup K_n,$$
$$\operatorname{diam} K_i < \varepsilon,\ i = 1, \dots, n.$$

Tvrdimo da je tada $K_i \subseteq F$ ili $K_i \subseteq G$, za svaki $i \in \{1, \dots, n\}$. Pretpostavimo suprotno, da je $K_i \cap F \neq \emptyset$ i $K_i \cap G \neq \emptyset$, za neki $i \in \{1, \dots, n\}$. Tada imamo da postoje $x \in K_i \cap F$ i $y \in K_i \cap G$. Dakle imamo

$$\varepsilon > \operatorname{diam} K_i \geq d(x, y) \geq d(F, G) = \varepsilon,$$

što je očito kontradikcija. Sada vidimo da su F i G unije konačno mnogo izračunljivih skupova, pa su izračunljivi.

(ii) Pretpostavimo da su $C_1, \ldots, C_n$ sve (međusobno različite) komponente povezanosti od K. Općenito, komponente povezanosti topološkog prostora su zatvoreni međusobno disjunktni skupovi (to slijedi iz činjenice da je zatvarač povezanog skupa povezan i maksimalnosti svake komponente povezanosti). Dakle, za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$(C_i, C_1 \cup \cdots \cup C_{i-1} \cup C_{i+1} \cup \cdots \cup C_n)$$

je separacija od K, pa je prema (i) C_i izračunljiv skup.

□

Općenito, komponente povezanosti izračunljivog skupa ne moraju biti izračunljivi skupovi. Naime, moguće je da izračunljiv skup ima neprebrojivo mnogo komponenti povezanosti, pa tada ne može svaka komponenta biti izračunljiv skup jer je izračunljivih skupova uvijek najviše prebrojivo mnogo (to slijedi iz definicije izračunljivog skupa i činjenice da je rekurzivnih funkcija $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ prebrojivo). Pogledajmo sljedeći primjer.

Primjer 2.6.11. **Cantorov skup** je skup

$$C = [0, 1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{3^{n-1}-1} \left\langle \tfrac{3k+1}{3^n}, \tfrac{3k+2}{3^n} \right\rangle .$$

Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor iz primjera 2.1.1. Tvrdimo da je C izračunljiv skup u (X, d, α). U dokazu će nam biti važna sljedeća ekvivalencija:

$$x \in C \iff x \in [0, 1] \text{ i } x \text{ dopušta trijadski zapis u kojem se pojavljuju samo znamenke 0 i 2.} \tag{2.6.32}$$

Neka je sada za $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, S_n skup svih mogućih n-tih parcijalnih suma u trijadskom zapisu koji se sastoji samo od 0 i 2 broja iz C, odnosno

$$S_n = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{3^k} \mid a_k \in \{0, 2\} \right\},$$

te stavimo da je

$$S_0 = \{0, 1\} .$$

Uočimo sada da za svaki $x \in C$ i za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $y \in S_n$ takav da je $d(x, y) \leq 3^{-n}$. Naime, ako je $x \in C$, tada znamo da postoji niz (a_k) takav da je $a_k \in \{0, 2\}$, za svaki $k \in \mathbb{N}$,

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k},$$

$$\left| x - \sum_{k=1}^{n} \tfrac{a_k}{3^k} \right| \leq 3^{-n},$$

za svaki $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Dakle, možemo uzeti

$$y = \sum_{k=1}^{n} \tfrac{a_k}{3^k}.$$

Kako je $3^{-n} < 2^{-n}$, za svaki $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, zaključujemo da je $C \prec_{2^{-n}} S_n$, za svaki $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Također, očito je i $C \prec_{2^0} \{0, 1\} = S_0$.

S druge strane, iz ekvivalencije (2.6.32), očito je da je $S_n \subseteq C$, za svaki $n \in \mathbb{N}$, stoga vidimo da je

$$C \approx_{2^{-n}} S_n,$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$. Kako bismo dokazali da je C izračunljiv, sada je dovoljno pronaći rekurzivnu funkciju $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takvu da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$S_n \subseteq \Lambda_{f(n)} \subseteq C.$$

Znamo da je

$$\{((i)_0, \ldots, (i)_{\bar{i}}) \mid i \in \mathbb{N}\}$$

skup svih konačnih nepraznih nizova prirodnih brojeva, pa je očito

$$\{((i)_0 \cdot \chi_{\{0,2\}}((i)_0), \ldots, (i)_{\bar{i}} \cdot \chi_{\{0,2\}}((i)_{\bar{i}}) \mid i \in \mathbb{N}\}$$

skup svih konačnih nepraznih nizova 0 i 2. Nadalje, uočimo da za $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ skup

$$\left\{((i)_0 \cdot \chi_{\{0,2\}}((i)_0), \ldots, (i)_{\bar{i}} \cdot \chi_{\{0,2\}}((i)_{\bar{i}}) \mid 0 \leq i \leq p_0^3 p_1^3 \cdots p_n^3\right\}$$

sadrži sve konačne nizove 0 i 2 duljine manje ili jednake n. Sada definiramo funkcije $\tau : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$,

$$\tau(i, k) = (i)_k \chi_{\{0,2\}}((i)_k), \; i, k \in \mathbb{N},$$
$$g(n) = p_0^3 p_1^3 \cdots p_n^3, \; n \in \mathbb{N}.$$

Znamo da su τ i g rekurzivne funkcije. Nadalje, definiramo funkciju $G : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$,

$$G(i) = \sum_{k=0}^{\bar{i}} \frac{\tau(i, k)}{3^k}, \; i \in \mathbb{N}.$$

Prema propoziciji 1.2.2, G je rekurzivna funkcija i imamo da je

$$S_n \subseteq \{G(i) \mid 0 \leq i \leq g(n)\} \subseteq C,$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$. Nadalje, skup

$$T = \left\{(i, l) \in \mathbb{N}^2 \mid G(i) = \alpha_l\right\}$$

je rekurzivno prebrojiv te za svaki $i \in \mathbb{N}$ postoji $l \in \mathbb{N}$ takav da je $(i, l) \in T$, pa prema teoremu 1.3.6, postoji rekurzivna funkcija $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $(i, h(i)) \in T$, za svaki $i \in \mathbb{N}$, odnosno $G(i) = \alpha_{h(i)}$, za svaki $i \in \mathbb{N}$. Nadalje, definiramo funkciju $\Phi : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$,

$$\Phi(n) = \{h(i) \mid 0 \le i \le g(n)\}, \ n \in \mathbb{N}.$$

Lako je provjeriti da je Φ r.r.o. funkcija te je $\Phi(n) \neq \emptyset$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Stoga prema propoziciji 1.4.12, postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $\Phi(n) = [f(n)]$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Sada imamo

$$\begin{aligned}
\{G(i) \mid 0 \le i \le g(n)\} &= \{\alpha_{h(i)} \mid 0 \le i \le g(n)\} \\
&= \alpha\left(\{h(i) \mid 0 \le i \le g(n)\}\right) \\
&= \alpha(\Phi(n)) \\
&= \alpha([f(n)]) \\
&= \Lambda_{f(n)},
\end{aligned}$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$. Dakle, C je izračunljiv skup.

S druge strane, poznato je da je C *totalno nepovezan*, odnosno da su komponente povezanosti u C jednočlani skupovi. Kako je C neprebrojiv, vidimo da C ima neprebrojivo mnogo komponenti povezanosti, pa ne mogu sve biti izračunljive jer je izračunljivih skupova samo prebrojivo mnogo.

2.7 Izračunljive točke u poluizračunljivim mnogostrukostima

Za $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ neka je

$$\mathbb{H}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n \ge 0\},$$

$$\operatorname{Bd} \mathbb{H}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\}.$$

Kažemo da je topološki prostor X n-**mnogostrukost** ako je Hausdorffov, zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti i svaka točka iz X ima okolinu homeomorfnu nekom otvorenom skupu u $\mathbb{H}^n$. Ako je X n-mnogostrukost, tada podskup od X koji se sastoji od svih točaka $x \in X$ za koje postoji okolina N od x u X, otvoren podskup U od $\mathbb{H}^n$ i homeomorfizam $f : N \to U$ takav da je $f(x) \in \operatorname{Bd} \mathbb{H}^n$ zovemo **rub** od X i označavamo ga ∂X.

Može se pokazati da je $x \in \partial X$ ako i samo ako svaki homeomorfizam između neke okoline od x u X i otvorenog podskupa od $\mathbb{H}^n$ preslikava x u točku iz $\operatorname{Bd} \mathbb{H}^n$.

Dakle, $x \in X \backslash \partial X$ ako i samo ako postoji okolina N od x koja je homeomorfna otvorenoj kugli u $\mathbb{R}^n$, odnosno homeomorfna $\mathbb{R}^n$.

Sada možemo poopćiti sljedeći rezultat ([3], teorem 5.6):

Teorem 2.7.1. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor, S poluizračunljiv kompaktan skup u tom prostoru i $x \in S$ točka koja ima okolinu u S homeomorfnu $\mathbb{R}^n$, za neki $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Tada je S izračunljiv u x.*

Prvo dokažimo da možemo maknuti pretpostavku da je S kompaktan, te da zapravo vrijedi i jača tvrdnja:

Teorem 2.7.2. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor, S poluizračunljiv skup u tom prostoru i $x \in S$ točka koja ima okolinu u S homeomorfnu $\mathbb{R}^n$, za neki $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Tada x ima izračunljivu okolinu u S.*

Dokaz. Neka je N okolina od x u S i $f : N \to \mathbb{R}^n$ homeomorfizam. Neka je $a = f(x)$ i $r > 0$ proizvoljan te definiramo

$$M = f^{-1}(K(a, r)).$$

Tada je M otvorena okolina od x u N, pa je i okolina od x u S. Budući da je $K(a, r)$ homeomorfna $\mathbb{R}^n$, M je također homeomorfna $\mathbb{R}^n$ i sadržana je u kompaktu $f^{-1}(\overline{K}(a, r))$. Dakle, M je ograničen skup, pa postoji $i_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$M \subseteq I_{i_0}.$$

Očito je M okolina od x u $\hat{I}_{i_0} \cap S$.

Budući da je S poluizračunljiv skup, skup $\hat{I}_{i_0} \cap S$ je kompaktan. Označimo

$$T = \left\{ j \in \mathbb{N} \mid I_{i_0} \cap S \subseteq J_j \right\}.$$

Kako je

$$T = p_{i_0}^{-1}\Big(\underbrace{\left\{ (i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid \hat{I}_i \cap S \subseteq J_j \right\}}_{\text{rekurzivno prebrojiv}} \Big),$$

gdje je $p_{i_0} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$,

$$p_{i_0}(j) = (i_0, j), \ \ j \in \mathbb{N},$$

T je rekurzivno prebrojiv. Sada je prema propoziciji 2.5.1 skup $\hat{I}_{i_0} \cap S$ poluizračunljiv. Sada prema teoremu 2.7.1, postoji okolina L od x u $\hat{I}_{i_0} \cap S$ takva da je L izračunljiv do na $\hat{I}_{i_0} \cap S$. Tada je očito L izračunljiv do na S i lako se vidi da je L okolina od x u S. Dakle S je izračunljiv u x, pa tvrdnja slijedi iz teorema 2.6.8.

□

Lema 2.7.3. *Neka je (X, d) metrički prostor i $S \subseteq X$ n-mnogostrukost. Ako je $x \in \partial S$, tada za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $x' \in S \setminus \partial S$ takav da je $d(x, x') < \varepsilon$.*

Dokaz. Neka je N okolina od x u S, U otvoren podskup od $\mathbb{H}^n$ i $f : N \to U$ homeomorfizam takav da je $f(x) \in \operatorname{Bd} \mathbb{H}^n$. Neka je V otvoren skup u S takav da je $x \in V \subseteq N$. Kako je f^{-1} neprekidna u $f(x)$, postoji $\varepsilon' > 0$ takav da za sve $y \in f(V)$ vrijedi

$$d'(f(x), y) < \varepsilon' \Rightarrow d(x, f^{-1}(y)) < \varepsilon,$$

pri čemu je d' euklidska metrika na $f(V)$. Iz svojstava euklidske metrike lako se vidi da postoji $y \in (\mathbb{H}^n \setminus \operatorname{Bd} \mathbb{H}^n) \cap f(V)$ takav da je $d(f(x), y) < \varepsilon'$. Sada stavimo $x' = f^{-1}(y)$. Tada je $d(x, x') < \varepsilon$, a budući da je $g : V \to f(V)$, $g(z) = f(z)$, $z \in V$, homeomorfizam između okoline od x' u S i otvorenog podskupa od $\mathbb{H}^n$ koji preslikava x' u točku iz $\mathbb{H}^n \setminus \operatorname{Bd} \mathbb{H}^n$, imamo $x' \notin \partial S$.

□

Teorem 2.7.4. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor i S poluizračunljiva mnogostrukost u tom prostoru. Tada je S slabo izračunljivo prebrojiv skup.*

Dokaz. Neka je $x \in S$ i $\varepsilon > 0$. Ako je $x \in S \setminus \partial S$, tada x ima okolinu homeomorfnu $\mathbb{R}^n$, za neki $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, pa prema teoremu 2.7.2, postoji izračunljiv skup N takav da je $x \in N \subseteq S$. Budući da su prema propoziciji 2.4.8 izračunljive točke guste u izračunljivom skupu, postoji $y \in N$, y izračunljiva takva da je $d(x, y) < \varepsilon$.

S druge strane, ako je $x \in \partial S$, tada prema lemi 2.7.3 postoji $x' \in S \setminus \partial S$ takva da je $d(x, x') < \frac{\varepsilon}{2}$. Prema dokazanom, sad imamo da postoji izračunljiva točka $y \in S$ takva da je $d(y, x') < \frac{\varepsilon}{2}$, a iz nejednakosti trokuta sada vidimo da je $d(x, y) < \varepsilon$.

□

Neka je S poluizračunljiva kompaktna mnogostrukost u iračunljivom metričkom prostoru (X, d, α). Prema prethodnom teoremu, za svaki $\varepsilon > 0$ postoji konačan skup izračunljivih točaka $A \subseteq S$ tako da vrijedi

$$A \approx_\varepsilon S.$$

Budući da je A konačna unija jednočlanih izračunljivih skupova, A je izračunljiv skup.

Stoga vidimo da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji izračunljiv skup A takav da je

$$d_H(A, S) < \varepsilon,$$

gdje je d_H Hausdorffova metrika. Drugim riječima, poluizračunljiva kompaktna mnogostrukost se može po volji dobro aproksimirati izračunljivim skupovima.

Štoviše, spomenuta aproksimacija se može i poboljšati. Gore spomenut skup A se može izabrati tako da A "pokriva" čitavu mnogostrukost S osim eventualno nekog dijela koji je "blizu" ∂S. O tome govori sljedeći teorem.

Teorem 2.7.5. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor i S poluizračunljiva kompaktna mnogostrukost u tom prostoru. Tada za svaki $\varepsilon > 0$ postoji izračunljiv skup A takav da je $A \subseteq S$, $d_H(A, S) < \varepsilon$ i*

$$S \setminus A \prec_\varepsilon \partial S.$$

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$. Odaberimo $r > 0$ takav da je $r < \varepsilon$ i da za skup

$$U = \bigcup_{x \in \partial S} K(x, r)$$

vrijedi $S \setminus U \neq \emptyset$. Za svaki $x \in S \setminus U$ imamo $x \in S \setminus \partial S$, pa x ima okolinu homeomorfnu $\mathbb{R}^n$, za neki $n \in \mathbb{N}$, a onda prema teoremu 2.7.2 postoji izračunljiva okolina N_x od x u S. Skup $S \setminus U$ je kompaktan jer je zatvoren i sadržan u kompaktnom skupu S, stoga postoji $k \in \mathbb{N}$ i $x_0, \ldots, x_k \in S \setminus U$ tako da je

$$S \setminus U \subseteq N_{x_0} \cup \cdots \cup N_{x_k}.$$

Neka je A' izračunljiv skup takav da je $A' \subseteq S$ i $S \approx_{\frac{\varepsilon}{2}} A'$ i neka je

$$A = A' \cup N_{x_0} \cup \cdots \cup N_{x_k}.$$

Imamo da je A izračunljiv skup, $A \subseteq S$ i $S \approx_{\frac{\varepsilon}{2}} A$, pa je $d_H(S, A) < \varepsilon$. Nadalje, zbog $S \setminus A \subseteq U$ i definicije skupa U vidimo da je $S \setminus A \prec_\varepsilon \partial S$.

□

2.8 Izračunljive točke u poluizračunljivim poliedrima

Za skup J neka je E^J skup svih funkcija $x : J \to \mathbb{R}$ takvih da je $x(\alpha) = 0$ za sve osim konačno mnogo $\alpha \in J$.
Lako je provjeriti da je E^J vektorski prostor nad $\mathbb{R}$ (s obzirom na uobičajeno zbrajanje i množenje po komponentama) te da je funkcija $d : E^J \times E^J \to \mathbb{R}$,

$$d(x, y) = \max \{|x(\alpha) - y(\alpha)| \mid \alpha \in J\}, \ x, y \in E^J$$

metrika na E^J. Uočimo da je za $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ovako definiran metrički prostor $E^{\{1,\ldots,n\}}$ upravo jednak $\mathbb{R}^n$.

Neka je $n \in \mathbb{N}$ i $a_0, \ldots, a_n \in E^J$ geometrijski nezavisne točke, odnosno $n = 0$ ili su $a_1 - a_0, \ldots, a_n - a_0$ linearno nezavisni vektori u E^J. Neka je σ konveksna ljuska skupa $\{a_0, \ldots, a_n\}$. Tada kažemo da je σ **simpleks** u E^J razapet s $a_0, \ldots, a_n$ (ili skupom $\{a_0, \ldots, a_n\}$). Kažemo da su $a_0, \ldots, a_n$ **vrhovi** od σ, a n **dimenzija** od σ (označavat ćemo je sa $\dim \sigma$). Ako je τ simpleks razapet proizvoljnim nepraznim podskupom od $\{a_0, \ldots, a_n\}$,

kažemo da je τ **stranica** od σ, a ako je uz to $\tau \neq \sigma$, reći ćemo da je τ **prava stranica** od σ. Uniju svih pravih stranica od σ zovemo **rub** od σ i označavamo sa $\mathrm{Bd}\,\sigma$. **Interior** od σ je skup $\mathrm{Int}\,\sigma = \sigma \setminus \mathrm{Bd}\,\sigma$.
Važno je uočiti da se ovako definiran rub i interior simpleksa σ ne mora podudarati sa topološkim rubom i interiorom od σ u E^J.

U nastavku ćemo koristiti sljedeće dvije činjenice (njihovi dokazi se mogu naći u [6]):

(F1) $\mathrm{Int}\,\sigma$ je otvoren i gust u σ;

(F2) ako je $n = \dim \sigma$, tada je $\mathrm{Int}\,\sigma$ homeomorfan otvorenoj kugli u $\mathbb{R}^n$, pa je $\mathrm{Int}\,\sigma$ homeomorfan $\mathbb{R}^n$.

Simplicijalni kompleks $\mathcal{K}$ u E^J je familija simpleksa u E^J takva da vrijedi:

- ako je $\sigma \in \mathcal{K}$ i τ stranica od σ, tada je $\tau \in \mathcal{K}$;
- ako su $\sigma, \tau \in \mathcal{K}$ i $\sigma \cap \tau \neq \emptyset$, tada je $\sigma \cap \tau$ stranica i od σ i od τ.

Ako je $\mathcal{K}$ simplicijalni kompleks u E^J, tada ćemo uniju $\bigcup_{\sigma \in \mathcal{K}} \sigma$ označavati sa $|\mathcal{K}|$. Topologiju na $|\mathcal{K}|$ definiramo kao familiju svih skupova $U \subseteq |\mathcal{K}|$ takvih da je $U \cap \sigma$ otvoren u σ, za svaki $\sigma \in \mathcal{K}$. (Lako je provjeriti da je tako definirana familija zaista topologija na $|\mathcal{K}|$.)

Poliedar je topološki prostor koji je jednak $|\mathcal{K}|$, za neki simplicijalni kompleks $|\mathcal{K}|$ u nekom E^J.

Neka je $\mathcal{K}$ simplicijalni kompleks u E^J i $v \in E^J$. Kažemo da je v **vrh** od $\mathcal{K}$ ako je v vrh nekog simpleksa iz $\mathcal{K}$.

Za simplicijalni kompleks $\mathcal{K}$ reći ćemo da je **lokalno konačan** ako se svaki vrh od $\mathcal{K}$ nalazi u konačno mnogo simpleksa iz $\mathcal{K}$.

Nadalje, ako je $\mathcal{K}$ simplicijalni kompleks i $\sigma \in \mathcal{K}$, kažemo da je σ **maksimalan** u $\mathcal{K}$ ako je σ maksimalan element od $\mathcal{K}$ s obzirom na inkluziju.
Slično kao u prethodnom poglavlju, htjeli bismo dokazati da je u izračunljivom metričkom prostoru svaki poluizračunljiv skup koji ima topološki tip poliedra slabo izračunljivo prebrojiv. Za to će nam trebati sljedeća lema.

Lema 2.8.1. *Neka je $\mathcal{K}$ simplicijalni kompleks u E^J.*

(i) Ako je σ maksimalan u $\mathcal{K}$, tada je $\mathrm{Int}\,\sigma$ *otvoren u $|\mathcal{K}|$.*

(ii) Ako je $\mathcal{K}$ lokalno konačan, tada svaka točka $x \in |\mathcal{K}|$ leži u nekom maksimalnom $\sigma \in \mathcal{K}$.

Dokaz.

(i) Neka je $\tau \in \mathcal{K}$. Želimo dokazati da je $\operatorname{Int}\sigma \cap \tau$ otvoren u τ.

Ako je $\tau = \sigma$, tada to slijedi iz 2.8. Pretpostavimo da je $\tau \neq \sigma$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\sigma \cap \tau \neq \emptyset$. Tada je $\sigma \cap \tau$ stranica od σ, a kako je σ maksimalan i $\sigma \neq \tau$, $\sigma \cap \tau$ je prava stranica od σ. Stoga je $\sigma \cap \tau \subseteq \operatorname{Bd}\sigma$, pa mora biti $\operatorname{Int}\sigma \cap \tau = \emptyset$. Dakle, u svakom slučaju je $\operatorname{Int}\sigma$ otvoren u τ.

(ii) Može se pokazati da za svaki $x \in |\mathcal{K}|$ postoji jedinstven $\sigma \in \mathcal{K}$ takav da je $x \in \operatorname{Int}\sigma$. Također, ako je σ simpleks u E^J i $x \in \sigma$, tada postoji jedinstvena stranica τ od σ takva da je $x \in \operatorname{Int}\tau$ (vidi [6]).

Neka je sada $\mathcal{K}$ lokalno konačan i $x \in |\mathcal{K}|$. Tada postoji jedinstven $\varrho \in \mathcal{K}$ takav da je $x \in \operatorname{Int}\varrho$. Neka je v proizvoljan vrh od ϱ. Pretpostavimo da je $\sigma \in \mathcal{K}$ takav da je $x \in \sigma$. Tada postoji stranica τ od σ takva da je $x \in \operatorname{Int}\tau$. Tada je $\tau \in \mathcal{K}$ i zbog jedinstvenosti ϱ imamo da je $\varrho = \tau$. Dakle, $\varrho \subseteq \sigma$, pa je $v \in \sigma$. Budući da postoji samo konačno mnogo $\sigma \in \mathcal{K}$ takvih da je $v \in \sigma$, zaključujemo da postoji konačno mnogo $\sigma \in \mathcal{K}$ takvih da je $x \in \sigma$, pa jedan od njih mora biti maksimalan.

□

U teoremu koji slijedi trebat ćemo sljedeći rezultat (lema 2.6 u [6]):
simplicijalni kompleks $\mathcal{K}$ je lokalno konačan ako i samo ako je $|\mathcal{K}|$ lokalno kompaktan.

Teorem 2.8.2. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor i S poluizračunljiv skup u tom prostoru. Ako S ima topološki tip poliedra, tada je S slabo izračunljivo prebrojiv skup.*

Dokaz. Neka je J skup i $\mathcal{K}$ simplicijalni kompleks u E^J takav da je S homeomorfan $|\mathcal{K}|$. Budući da je S poluizračunljiv, presjek S s proizvoljnom zatvorenom kuglom u (X, d) je kompaktan skup, pa je S lokalno kompaktan. Dakle i $|\mathcal{K}|$ je lokalno kompaktan, pa je i lokalno konačan. Neka je

$$D = \{x \in |\mathcal{K}| \mid \text{ postoji } \sigma \in \mathcal{K} \text{ takav da je } \sigma \text{ maksimalan i } x \in \operatorname{Int}\sigma\}.$$

Tvrdimo da je D gust u $|\mathcal{K}|$. Neka je U otvoren neprazan podskup od $|\mathcal{K}|$ i $y \in U$. Prema lemi 2.8 (ii), postoji maksimalni simpleks $\sigma \in \mathcal{K}$ takav da je $y \in \sigma$. Imamo da je $U \cap \sigma$ otvoren neprazan podskup σ, a kako je $\operatorname{Int}\sigma$ gust u σ, mora biti

$$(U \cap \sigma) \cap \operatorname{Int}\sigma \neq \emptyset,$$

a onda i

$$U \cap \operatorname{Int}\sigma \neq \emptyset.$$

Očito je $\operatorname{Int}\sigma \subseteq D$. Stoga $U \cap D \neq \emptyset$, pa je D gust u $|\mathcal{K}|$.

Prema lemi 2.8 (i) i (F2), svaka točka u D ima otvorenu okolinu u $|\mathcal{K}|$ homeomorfnu nekom $\mathbb{R}^n$. Budući da su S i $|\mathcal{K}|$ homeomorfni, zaključujemo da postoji gust podskup D' od S takav da svaka točka iz D' ima okolinu u S homeomorfnu nekom $\mathbb{R}^n$. Sada analogno kao u teoremu 2.7.4 zaključujemo da je S slabo izračunljivo prebrojiv skup.

$\square$

Poglavlje 3

Izračunljiv topološki prostor

3.1 Definicija izračunljivog topološkog prostora i osnovna svojstva

Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor te $i, j \in \mathbb{N}$. Kažemo da su I_i i I_j **formalno disjunktni** i pišemo $I_i \diamond I_j$, ako je

$$d(\lambda_i, \lambda_j) > \varrho_i + \varrho_j$$

Očito vrijedi $I_i \diamond I_j \;\Rightarrow\; I_i \cap I_j = \emptyset$.

Kažemo da je I_i **formalno sadržan** u I_j i pišemo $I_i \subseteq_F I_j$ ako je

$$d(\lambda_i, \lambda_j) + \varrho_i < \varrho_j$$

Očito vrijedi $I_i \subseteq_F I_j \;\Rightarrow\; I_i \subseteq I_j$.

Propozicija 3.1.1. *Skupovi*

$$S = \left\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid I_i \diamond I_j\right\}, \quad T = \left\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid I_i \subseteq_F I_j\right\}$$

su rekurzivno prebrojivi.

Dokaz. Imamo

$$S = \left\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid d(\lambda_i, \lambda_j) - \varrho_i - \varrho_j > 0\right\}, \quad T = \left\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid \varrho_j - \varrho_i - d(\lambda_i, \lambda_j) > 0\right\}$$

Kako su funkcije $(i, j) \mapsto d(\lambda_i, \lambda_j) - \varrho_i - \varrho_j$, $(i, j) \mapsto \varrho_j - \varrho_i - d(\lambda_i, \lambda_j)$ rekurzivne $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$, tvrdnja slijedi iz propozicije 1.3.7.

□

Lema 3.1.2. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Tada za proizvoljne $x \in X$ i $r > 0$ postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $x \in I_i$ i $\varrho_i < r$.*

Dokaz. Očito postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $q_k < r$, a zbog gustoće niza α, postoji $l \in \mathbb{N}$ tako da $d(x, \alpha_l) < q_k$. Sada postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $(\tau_1(i), \tau_2(i)) = (l, k)$, pa je $\lambda_i = \alpha_{\tau_1(i)} = \alpha_l$, $\varrho_i = \alpha_{\tau_2(i)} = q_k$. Imamo $x \in K(\lambda_i, \varrho_i) = I_i$ te $\varrho_i < r$.

□

Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te $(I_i)_{i\in\mathbb{N}}$ niz u $\mathcal{T}$ takav da je $\{I_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ baza topologije $\mathcal{T}$. Za $(X, \mathcal{T}, (I_i))$ kažemo da je **izračunljiv topološki prostor** ako postoje rekurzivno prebrojivi skupovi $FD, FS \subseteq \mathbb{N}^2$ sa sljedećim svojstvima:

1. $(i, j) \in FD \;\Rightarrow\; (j, i) \in FD$
2. $(i, j), (j, k) \in FS \;\Rightarrow\; (i, k) \in FS$
3. $(i, j) \in FD \;\Rightarrow\; I_i \cap I_j = \emptyset$
4. $(i, j) \in FS \;\Rightarrow\; I_i \subseteq I_j$
5. $(i, j) \in FS,\ (j, k) \in FD \;\Rightarrow\; (i, k) \in FD$
6. $x, y \in X,\ x \neq y \;\Rightarrow\; (\exists i, j \in \mathbb{N})\ x \in I_i,\ y \in I_j,\ (i, j) \in FD$
7. $x \in I_i \cap I_j \;\Rightarrow\; (\exists k \in \mathbb{N})\ x \in I_k,\ (k, i) \in FS,\ (k, j) \in FS$

za sve $i, j, k \in \mathbb{N}$.

Napomena 3.1.3. Kad govorimo o izračunljivom topološkom prostoru, onda pod FD i FS podrazumijevamo skupove iz gornje definicije.

Primjer 3.1.4. Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Tada je $(X, \mathcal{T}_d, (I_i))$ izračunljiv topološki prostor.

Očito je $\{I_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ baza topologije $\mathcal{T}_d$. Definiramo skupove $FD, FS \subseteq \mathbb{N}^2$ na sljedeći način:

$$FD = \left\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid I_i \diamond I_j\right\}$$

$$FS = \left\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid I_i \subseteq_F I_j\right\}$$

Prema propoziciji 3.1.1, FD i FS su rekurzivno prebrojivi. Također, očito je da vrijedi 1, 3, 4.

Neka su $(i, j), (j, k) \in FS$. Tada je

$$d(\lambda_i, \lambda_j) + \varrho_i < \varrho_j,$$

$$d(\lambda_j, \lambda_k) + \varrho_j < \varrho_k,$$

pa zbrajanjem gornjih nejednakosti i primjenom nejednakosti trokuta dobivamo

$$d(\lambda_i, \lambda_k) + \varrho_i \leq d(\lambda_i, \lambda_j) + d(\lambda_j, \lambda_k) + \varrho_i < \varrho_k$$

Dakle, $(i, k) \in FS$, iz čega slijedi 2.

Neka su sada $(i, j) \in FS$, $(j, k) \in FD$. Pretpostavimo $(i, k) \notin FD$. Tada imamo

$$d(\lambda_i, \lambda_k) \leq \varrho_i + \varrho_k$$

a iz $(i, j) \in FS$ je

$$d(\lambda_i, \lambda_j) + \varrho_i < \varrho_j$$

Zbrajanjem ovih nejednakosti i primjenom nejednakosti trokuta dobivamo

$$d(\lambda_j, \lambda_k) < \varrho_k + \varrho_j$$

što je u kontradikciji s $(j, k) \in FD$. Dakle mora biti $(i, k) \in FD$, pa vrijedi 5.

Neka su $x, y \in X$, $x \neq y$. Neka je $r := \dfrac{d(x, y)}{4}$. Prema lemi 3.1.2, postoje $i, j \in \mathbb{N}$ takvi da je $x \in I_i$, $\varrho_i < r$ i $y \in I_j$, $\varrho_j < r$. Tvrdimo da je $I_i \diamond I_j$, odnosno $(i, j) \in FD$. Pretpostavimo suprotno. Tada je

$$d(\lambda_i, \lambda_j) \leq \varrho_i + \varrho_j$$

pa imamo

$$d(x, y) \leq \underbrace{d(x, \lambda_i)}_{<\varrho_i<r} + \underbrace{d(\lambda_i, \lambda_j)}_{\leq\varrho_i+\varrho_j<2r} + \underbrace{(\lambda_j, y)}_{<\varrho_j<r} < 4r = d(x, y)$$

Ovo je kontradikcija, pa je $(i, j) \in FD$. Slijedi 6.

Neka je $x \in I_i \cap I_j$. Tada očito postoji $r > 0$ takav da je

$$2r + d(x, \lambda_i) < \varrho_i,$$

$$2r + d(x, \lambda_j) < \varrho_j$$

Također, prema lemi 3.1.2, postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $x \in I_k$, $\varrho_k < r$. Sada imamo

$$d(\lambda_k, \lambda_i) + \varrho_k \leq \underbrace{d(\lambda_k, x)}_{<\varrho_k<r} + d(x, \lambda_i) + \underbrace{\varrho_k}_{<r} < 2r + d(x, \lambda_i) < \varrho_i$$

Dakle, $(k, i) \in FS$. Analogno dokazujemo $(k, j) \in FS$. Stoga vrijedi 7.
Slijedi da je $(X, \mathcal{T}_d, (I_i))$ izračunljiv topološki prostor. □

Neka je $(X, \mathcal{T}, (I_i))$ izračunljiv topološki prostor i neka su $i, b \in \mathbb{N}$.
Kažemo da su I_i i J_b **FD-disjunktni** i pišemo $I_i \diamond_{FD} J_b$ ako je $(i, j) \in FD$, za sve $j \in [b]$.

Očito za $i, b \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$I_i \diamond_{FD} J_b \;\Rightarrow\; I_i \cap J_b = \emptyset$$

Propozicija 3.1.5. *Neka je $(X, \mathcal{T}, (I_i))$ izračunljiv topološki prostor. Skup*

$$\Omega = \left\{(i, b) \in \mathbb{N}^2 \mid I_i \diamond_{FD} J_b\right\}$$

je rekurzivno prebrojiv.

Dokaz. Imamo

$$\begin{aligned}(i, b) \in \Omega \;&\Leftrightarrow\; (i, j) \in FD, \;\forall j \in [b]\\ &\Leftrightarrow\; \{i\} \times [b] \subseteq FD\end{aligned}$$

Definiramo $\Phi : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$,

$$\Phi(i, b) = \{i\} \times [b], \quad i, b \in \mathbb{N}$$

Iz propozicije 1.4.2 i napomene 1.4.8 slijedi da je Φ r.r.o. funkcija i vrijedi

$$\Omega = \left\{(i, b) \in \mathbb{N}^2 \mid \Phi(i, b) \subseteq FD\right\}$$

Iz teorema 1.4.9 slijedi da je Ω rekurzivno prebrojiv skup.

□

Neka je $(X, \mathcal{T}, (I_i))$ izračunljiv topološki prostor i neka su $a, b \in \mathbb{N}$.
Kažemo da su J_a i J_b **FD-disjunktni** i pišemo $J_a \diamond_{FD} J_b$ ako je $(i, j) \in FD$, za sve $i \in [a]$, $j \in [b]$.

Uočimo:

$$J_a \diamond_{FD} J_b \;\Leftrightarrow\; I_i \diamond_{FD} J_b, \;\forall i \in [a]$$

Propozicija 3.1.6. *Skup*

$$A = \left\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid J_a \diamond_{FD} J_b\right\}$$

je rekurzivno prebrojiv.

Dokaz. Imamo

$$(a, b) \in A \;\Leftrightarrow\; [a] \times [b] \subseteq FD$$

Sada analogno kao u propoziciji 3.1.5 zaključujemo da je A rekurzivno prebrojiv.

□

Propozicija 3.1.7. *Neka je $(X, \mathcal{T}, (I_i))$ izračunljiv topološki prostor i neka su $n, i_0, \dots, i_n \in \mathbb{N}$, $x \in X$ takvi da je $x \in I_{i_0} \cap \cdots \cap I_{i_n}$. Tada postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $x \in I_k$, $(k, i_0), \dots, (k, i_n) \in FS$.*

Dokaz. Dokazujemo tvrdnju indukcijom po n.
Ako je $x \in I_{i_0}$, za neki $i_0 \in \mathbb{N}$, tada je $x \in I_{i_0} \cap I_{i_0}$ pa tvrdnja slijedi iz svojstva 7.

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$. Neka su $i_0, \dots, i_{n+1} \in \mathbb{N}$ i $x \in I_{i_0} \cap \cdots \cap I_{i_{n+1}}$. Kako je $x \in I_{i_0} \cap \cdots \cap I_{i_n}$, prema pretpostavci postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je

$$x \in I_k, \ (k, i_0), \dots, (k, i_n) \in FS$$

Sada je $x \in I_k \cap I_{n+1}$ pa iz svojstva 7 slijedi da postoji $l \in \mathbb{N}$ takav da je

$$x \in I_l, \ (l, k), (l, i_{n+1}) \in FS$$

Iz tranzitivnosti relacije FS, odnosno prema 2, slijedi da je i $(l, i_0), \dots, (l, i_n) \in FS$ pa slijedi tražena tvrdnja.

$\square$

Propozicija 3.1.8. *Neka je $(X, \mathcal{T}, (I_i))$ izračunljiv topološki prostor i neka su $x \in X$ te K neprazan kompaktan skup u $(X, \mathcal{T})$ takav da $x \notin K$. Tada postoje $k, b \in \mathbb{N}$ takvi da je $x \in I_k$, $K \subseteq J_b$ i $I_k \diamond_{FD} J_b$.*

Dokaz. Za $y \in K$ imamo da je $x \neq y$ pa prema 6 postoje $i_y, j_y \in \mathbb{N}$ takvi da je

$$x \in I_{i_y}, \ y \in I_{j_y}, \ (i_y, j_y) \in FD$$

Očito je $\left\{ I_{j_y} \mid y \in K \right\}$ otvoren pokrivač od K pa postoje $y_0, \dots, y_n \in K$ takvi da je

$$K \subseteq I_{j_{y_0}} \cup \cdots \cup I_{j_{y_n}} \tag{3.1.1}$$

Imamo da je

$$x \in I_{i_{y_0}} \cap \cdots \cap I_{i_{y_n}}$$

pa prema prethodnoj propoziciji postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $x \in I_k$, $(k, i_{y_0}), \dots, (k, i_{y_n}) \in FS$. Prema svojstvu 5 imamo da je

$$(k, j_{y_0}), \dots, (k, j_{y_n}) \in FD \tag{3.1.2}$$

Neka je $b \in \mathbb{N}$ takav da je $[b] = \left\{ j_{y_0}, \dots, j_{y_n} \right\}$ Sada zbog (3.1.1) imamo $K \subseteq J_b$, a zbog (3.1.2) je $I_k \diamond_{FD} J_b$.

$\square$

Neka su $i, b \in \mathbb{N}$. Kažemo da je I_i **FS-sadržan** u J_b i pišemo $I_i \subseteq_{FS} J_b$ ako postoji $j \in [b]$ takav da je $(i, j) \in FS$.

Neka su $a, b \in \mathbb{N}$. Kažemo da je J_a **FS-sadržan** u J_b i pišemo $J_a \subseteq_{FS} J_b$ ako je I_i FS-sadržan u J_b, za svaki $i \in [a]$.

Propozicija 3.1.9. *Neka je $(X, \mathcal{T}, (I_i))$ izračunljiv topološki prostor. Skupovi*

$$S_1 = \left\{(i, b) \in \mathbb{N}^2 \mid I_i \subseteq_{FS} J_b\right\},$$

$$S_2 = \left\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid J_a \subseteq_{FS} J_b\right\}$$

su rekurzivno prebrojivi.

Dokaz. Imamo

$$\begin{aligned}(i, b) \in S_1 &\Leftrightarrow (\exists j \in [b])\ (i, j) \in FS\\ &\Leftrightarrow (\exists j \in \mathbb{N})\ (i, j) \in FS,\ j \in [b]\\ &\Leftrightarrow (\exists j \in \mathbb{N})\ (i, b, j) \in T_1 \cap T_2,\end{aligned}$$

gdje je

$$\begin{aligned}T_1 &= \left\{(i, b, j) \in \mathbb{N}^3 \mid (i, j) \in FS\right\},\\ T_2 &= \left\{(i, b, j) \in \mathbb{N}^3 \mid j \in [b]\right\}\end{aligned}$$

Vidimo da je $T_1 = p^{-1}(FS)$, za $p : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}^2$,

$$p(i, b, j) = (i, j), \quad i, b, j \in \mathbb{N}$$

pa je prema propoziciji 1.3.4 T_1 rekurzivno prebrojiv. Također, uočimo da je

$$\chi_{T_2}(i, b, j) = \chi_{[b]}(j) = \overline{\Phi}(b, j),$$

za sve $i, b, j \in \mathbb{N}$, pri čemu je

$$\Phi(b) = [b], \quad b \in \mathbb{N}$$

Kako je, prema napomeni 1.4.11, Φ r.r.o. funkcija, $\overline{\Phi}$ je rekurzivna, a onda i χ_{T_2}. Dakle, T_2 je rekurzivan. Sada iz propozicije 1.3.5 slijedi da je $T_1 \cap T_2$ rekurzivno prebrojiv te iz teorema 1.3.3 imamo da je S_1 rekurzivno prebrojiv.

Imamo

$$\begin{aligned}(a, b) \in S_2 &\Leftrightarrow (\forall i \in [a])\ (i, b) \in S_1\\ &\Leftrightarrow [a] \times \{b\} \subseteq S_1\end{aligned}$$

Funkcija $\Phi : \mathbb{N}^2 \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$,

$$\Phi(a, b) = [a] \times \{b\}, \quad a, b \in \mathbb{N}$$

je prema propoziciji 1.4.2 r.r.o. i vrijedi

$$S_2 = \left\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 \mid \Phi(a,b) \subseteq S_1\right\}$$

Sada je, prema teoremu 1.4.9, S_2 rekurzivno prebrojiv.

□

Propozicija 3.1.10. *Neka je $(X, \mathcal{T}, (I_i))$ izračunljiv topološki prostor. Neka je K neprazan kompaktan skup u $(X, \mathcal{T})$ i $a, b \in \mathbb{N}$ takvi da je $K \subseteq J_a \cap J_b$. Tada postoji $c \in \mathbb{N}$ takav da je $K \subseteq J_c$, $J_c \subseteq_{FS} J_a$ i $J_c \subseteq_{FS} J_b$.*

Dokaz. Neka je $x \in K$. Tada je $x \in J_a$ i $x \in J_b$ pa postoje $i \in [a]$, $j \in [b]$ takvi da je $x \in I_i$ i $x \in I_j$. Kako je $x \in I_i \cap I_j$, prema 7, postoji $k \in \mathbb{N}$ tako da je $x \in I_k$ te $(k, i), (k, j) \in FS$. Iz ovoga slijedi da je $I_k \subseteq_{FS} J_a$ i $I_k \subseteq_{FS} J_b$.

Dakle, za svaki $x \in K$ postoji $k_x \in \mathbb{N}$ tako da je

$$x \in I_{k_x},\ I_{k_x} \subseteq_{FS} J_a,\ I_{k_x} \subseteq_{FS} J_b \tag{3.1.3}$$

Očito je $\{I_{k_x} \mid x \in K\}$ otvoren pokrivač od K u $(X, \mathcal{T})$ pa budući da je K kompaktan, postoji $n \in \mathbb{N}$ i $x_0, \dots, x_n \in K$ tako da je

$$K \subseteq I_{k_{x_0}} \cup \cdots \cup I_{k_{x_n}}$$

Neka je $c \in \mathbb{N}$ takav da je

$$((c)_0, \dots, (c)_{\overline{c}}) = (k_{x_0}, \dots, k_{x_n})$$

Tada $[c] = \{k_{x_0}, \dots, k_{x_n}\}$ pa je $J_c = I_{k_{x_0}} \cup \cdots \cup I_{k_{x_n}}$, a onda je $K \subseteq J_c$. Također, iz (3.1.3) je očito $J_c \subseteq_{FS} J_a$ i $J_c \subseteq_{FS} J_b$.

□

Napomena 3.1.11. Neka su $i, a, b, c, d \in \mathbb{N}$. Tada:

(i) $J_a \subseteq_{FS} J_b \subseteq_{FS} J_c \Rightarrow J_a \subseteq_{FS} J_c$

(ii) $J_b \subseteq_{FS} J_a$ i $I_i \diamond_{FD} J_a \ \Rightarrow\ I_i \diamond_{FD} J_b$

(iii) $J_b \subseteq_{FS} J_a$ i $J_a \diamond_{FD} J_c \ \Rightarrow\ J_b \diamond_{FD} J_c$

(iv) $J_b \subseteq_{FS} J_a$, $J_d \subseteq_{FS} J_c$ i $J_a \diamond_{FD} J_c \ \Rightarrow\ J_b \diamond_{FD} J_d$

Iz prethodne propozicije i napomene indukcijom lako dobivamo sljedeće:

Korolar 3.1.12. *Neka je $(X, \mathcal{T}, (I_i))$ izračunljiv topološki prostor. Neka su $n, a_0, \dots, a_n \in \mathbb{N}$ i K neprazan kompaktan skup u $(X, \mathcal{T})$ takav da je $K \subseteq J_{a_0} \cap \cdots \cap J_{a_n}$. Tada postoji $c \in \mathbb{N}$ takav da je $K \subseteq J_c$ i $J_c \subseteq_{FS} J_{a_i}$, za $i = 0, \dots, n$.*

Propozicija 3.1.13. *Neka je $(X, \mathcal{T}, (I_i))$ izračunljiv topološki prostor te neka su K i L neprazni kompaktni skupovi u $(X, \mathcal{T})$ i $K \cap L = \emptyset$. Tada postoje $a, b \in \mathbb{N}$ takvi da $K \subseteq J_a$, $L \subseteq J_b$ i $J_a \diamond_{FD} J_b$.*

Dokaz. Neka je $x \in K$. Tada $x \notin L$ pa prema propoziciji 3.1.8, postoje $k_x, b_x \in \mathbb{N}$ takvi da

$$x \in I_{k_x},\ L \subseteq J_{b_x},\ I_{k_x} \diamond_{FD} J_{b_x}$$

Sada je $\{I_{k_x} \mid x \in K\}$ otvoren pokrivač od K pa postoje $n \in \mathbb{N}$ i $x_0, \dots, x_n \in K$ takvi da

$$K \subseteq I_{k_{x_0}} \cup \cdots \cup I_{k_{x_n}}$$

Također, očito je

$$L \subseteq J_{b_{x_0}} \cap \cdots \cap J_{b_{x_n}}$$

Prema prethodnom korolaru, postoji $c \in \mathbb{N}$ takav da

$$L \subseteq J_c \text{ i } J_c \subseteq_{FS} J_{b_{x_i}},\ \text{za } i = 0, \dots, n.$$

Neka je $i \in \{0, \dots, n\}$. Budući da je $I_{k_{x_i}} \diamond_{FD} J_{b_{x_i}}$ i $J_c \subseteq_{FS} J_{b_{x_i}}$, prema prethodnoj napomeni je $I_{k_{x_i}} \diamond_{FD} J_c$. Neka je $d \in \mathbb{N}$ takav da je

$$[d] = \{k_{x_0}, \dots, k_{x_n}\}$$

Tada je $K \subseteq J_d$ i $J_d \diamond_{FD} J_c$.

□

Teorem 3.1.14. *Neka je $(X, \mathcal{T}, (I_i))$ izračunljiv topološki prostor. Neka su $n \in \mathbb{N}$, $K_0, \dots, K_n$ neprazni kompaktni skupovi u $(X, \mathcal{T})$ i $e_0, \dots, e_n \in \mathbb{N}$ takvi da je $K \subseteq J_{e_i},\ i = 0, \dots, n$. Tada postoje $c_0, \dots, c_n \in \mathbb{N}$ takvi da $K \subseteq J_{c_i}$, $J_{c_i} \subseteq_{FS} J_{e_i},\ i = 0, \dots, n$ te ako je $K_i \cap K_j = \emptyset$, tada je $J_{c_i} \diamond_{FD} J_{c_j}$, za sve $i, j \in \{0, \dots, n\}$.*

Dokaz. Neka je

$$\mathcal{D} = \left\{(i, j) \mid K_i \cap K_j = \emptyset\right\}$$

Prema prethodnoj propoziciji, za sve $i, j \in \{0, \dots, n\}$ takve da $(i, j) \in \mathcal{D}$ postoje $a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{N}$ takvi da

$$K_i \subseteq J_{a_{ij}},\ K_j \subseteq J_{b_{ij}},\ J_{a_{ij}} \diamond_{FD} J_{b_{ij}}$$

Za $i \in \{0, \dots, n\}$ definiramo

$$\Gamma_i = \{e_i\} \cup \left\{a_{ij} \mid j \in \{0, \dots, n\},\ (i, j) \in \mathcal{D}\right\} \cup \left\{b_{ji} \mid j \in \{0, \dots, n\},\ (j, i) \in \mathcal{D}\right\}$$

Očito je Γ_i konačan neprazan podskup od $\mathbb{N}$, za svaki $i \in \{0, \dots, n\}$.

Također, uočimo da za $u \in \Gamma_i$ imamo $K_i \subseteq J_u$, pa prema korolaru 3.1.12, postoji $c_i \in \mathbb{N}$ takav da

$$K_i \subseteq J_{c_i},\ J_{c_i} \subseteq_{FS} J_u,\ \forall u \in \Gamma_i$$

Očito je tada $J_{c_i} \subseteq_{FS} J_{e_i}$, za $i = 0, \dots, n$.

Isto tako, uočimo da za $i, j \in \{0, \dots, n\}$ takve da $K_i \cap K_j = \emptyset$ postoje $u \in \Gamma_i,\ v \in \Gamma_j$ takvi da su $J_u \diamond_{FD} J_v$. Kako je $J_{c_i} \subseteq_{FS} J_u$ i $J_{c_j} \subseteq_{FS} J_v$, prema napomeni 3.1.11 je $J_{c_i} \diamond_{FD} J_{c_j}$. □

Neka je $(X, \mathcal{T}, (I_i))$ izračunljiv topološki prostor.

Za zatvoren skup S u $(X, \mathcal{T})$ kažemo da je **izračunljivo prebrojiv** u $(X, \mathcal{T}, (I_i))$ ako je skup

$$\{i \in \mathbb{N} \mid I_i \cap S \neq \emptyset\}$$

rekurzivno prebrojiv.

Za kompaktan skup S u $(X, \mathcal{T})$ kažemo da je **poluizračunljiv** u $(X, \mathcal{T}, (I_i))$ ako je skup

$$\left\{j \in \mathbb{N} \mid S \subseteq J_j\right\}$$

rekurzivno prebrojiv.

Za kompaktan skup S u $(X, \mathcal{T})$ kažemo da je **izračunljiv** u $(X, \mathcal{T}, (I_i))$ ako je izračunljivo prebrojiv i poluizračunljiv.

Za $x \in X$ kažemo da je **izračunljiva točka** u $(X, \mathcal{T}, (I_i))$ ako je skup

$$\{i \in \mathbb{N} \mid x \in I_i\}$$

rekurzivno prebrojiv.

Uočimo: x je izračunljiva točka $\Leftrightarrow$ $\{x\}$ izračunljivo prebrojiv

Napomena 3.1.15. Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor i $x \in X$. Tada:

x izračunljiva točka u (X, d, α) $\Leftrightarrow$ x izračunljiva točka u $(X, \mathcal{T}_d, (I_i))$

Naime, vrijedi

$$\begin{aligned} x \text{ izračunljiva točka u } (X, d, \alpha) &\overset{2.4.3}{\Leftrightarrow} \{x\} \text{ izračunljivo prebrojiv u } (X, d, \alpha) \\ &\Leftrightarrow \{x\} \text{ izračunljivo prebrojiv u } (X, \mathcal{T}_d, (I_i)) \\ &\Leftrightarrow x \text{ izračunljiva točka u } (X, \mathcal{T}_d, (I_i)) \end{aligned}$$

Propozicija 3.1.16. *Neka je $(X, \mathcal{T}, (I_i))$ izračunljiv topološki prostor. Tada je $x \in X$ izračunljiva točka ako i samo ako je skup $\{x\}$ izračunljiv.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $x \in X$ izračunljiva točka. Tada je skup $\{x\}$ izračunljivo prebrojiv. Neka su

$$S = \left\{j \in \mathbb{N} \mid x \in J_j\right\},$$
$$S_1 = \{i \in \mathbb{N} \mid x \in I_i\}$$

Imamo

$$\begin{aligned} j \in S &\Leftrightarrow (\exists i \in [j])\ i \in S_1 \\ &\Leftrightarrow (\exists i \in \mathbb{N})\ i \in [j],\ i \in S_1 \\ &\Leftrightarrow (\exists i \in \mathbb{N})\ (j, i) \in T, \end{aligned}$$

gdje je

$$T = \left\{(j, i) \in \mathbb{N}^2 \mid i \in [j],\ i \in S_1\right\}$$

Kako je funkcija $j \mapsto [j]$ r.r.o. i skup S_1 rekurzivno prebrojiv, lako se vidi da je skup T rekurzivno prebrojiv. Sada iz teorema 1.3.3 slijedi da je S rekurzivno prebrojiv. Dakle, $\{x\}$ je poluizračunljiv, a onda i izračunljiv.

Obratno, ako je $\{x\}$ izračunljiv skup, tada je po definiciji i izračunljivo prebrojiv, a onda je očito x izračunljiva točka.

□

Propozicija 3.1.17. *Neka je $(X, \mathcal{T}, (I_i))$ izračunljiv topološki prostor i $x \in X$. Ako je $\{x\}$ poluizračunljiv, tada je $\{x\}$ izračunljiv.*

Dokaz. Neka su

$$S = \left\{j \in \mathbb{N} \mid x \in J_j\right\},$$
$$T = \{i \in \mathbb{N} \mid x \in I_i\},$$
$$\Omega = \left\{(i, j) \in \mathbb{N} \mid (j)_0 = i,\ \overline{j} = 0\right\}$$

Ω je očito rekurzivan skup i za svaki $i \in \mathbb{N}$ postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je $(i, j) \in \Omega$. Sada prema teoremu 1.3.6 postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $(i, f(i)) \in \Omega$, za svaki $i \in \mathbb{N}$.

Uočimo da je za $(i, j) \in \Omega$, $I_i = J_j$, pa je $I_i = J_{f(i)}$, za svaki $i \in \mathbb{N}$. Sada je

$$\begin{aligned} T &= \{i \in \mathbb{N} \mid x \in I_i\} \\ &= \left\{i \in \mathbb{N} \mid x \in J_{f(i)}\right\} \\ &= \{i \in \mathbb{N} \mid f(i) \in S\} \\ &= f^{-1}(S) \end{aligned}$$

Kako je prema pretpostavci S rekurzivno prebrojiv, prema propoziciji 1.3.4, T je rekurzivno prebrojiv skup.

□

3.2 Lančasti kontinuumi

Za povezan i kompaktan metrički prostor kažemo da je **kontinuum**.

Neka je X skup i $C_0, \dots, C_m$ konačan niz podskupova od X. Za $C_0, \dots, C_m$ kažemo da je **lanac** u X ako

$$C_i \cap C_j \neq \emptyset \;\Leftrightarrow\; |i-j| \leq 1,$$

za sve $i, j \in \{0, \dots, m\}$.

Neka su $C_0, \dots, C_m$ i S skupovi. Kažemo da $C_0, \dots, C_m$ **pokriva** S ako je $S \subseteq C_0 \cup \dots \cup C_m$. Kažemo da $C_0, \dots, C_m$ **pokriva** S **od** a **do** b ako $C_0, \dots, C_m$ pokriva S te je $a \in C_0$, $b \in C_m$.

Neka je (X, d) metrički prostor, $C_0, \dots, C_m$ lanac u X i $\varepsilon > 0$. Kažemo da je $C_0, \dots, C_m$ ε**-lanac** u (X, d) ako je $\operatorname{diam}(C_i) < \varepsilon$, za svaki $i \in \{0, \dots, m\}$. Za lanac $C_0, \dots, C_m$ kažemo da je **otvoreni lanac** u (X, d) ako su $C_0, \dots, C_m$ otvoreni skupovi u (X, d). Analogno definiramo **kompaktni lanac** u (X, d).

Za kontinuum (X, d) kažemo da je **lančasti kontinuum** ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji otvoreni ε-lanac u (X, d) koji pokriva X.

Neka je (X, d) kontinuum i $a, b \in X$. Za (X, d) kažemo da je **kontinuum lančast od** a **do** b ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji otvoreni ε-lanac koji pokriva X od a do b.

Propozicija 3.2.1. *Neka je (X, d) kontinuum i $a, b \in X$. Tada je (X, d) lančast od a do b ako i samo ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji kompaktan ε-lanac koji pokriva X od a do b.*

Dokaz. Pretpostavimo da je (X, d) lančast od a do b. Neka je $\varepsilon > 0$ i $C_0, \dots, C_m$ otvoreni ε-lanac koji pokriva X od a do b. Tada je $\{C_0, \dots, C_m\}$ otvoreni pokrivač od (X, d), pa budući da je (X, d) kompaktan, postoji $\lambda > 0$ Lebesgueov broj tog pokrivača. Također,

$$\left\{K(x, \tfrac{\lambda}{3}) \mid x \in X\right\}$$

je otvoren pokrivač od (X, d), pa postoji $n \in \mathbb{N}$ i $x_0, \dots, x_n \in X$ takvi da je

$$X = \bigcup_{i=0}^{n} K(x_i, \tfrac{\lambda}{3})$$

Za $i \in \{0, \dots, m\}$ definiramo

$$K_i' = \bigcup_{\substack{j \in \{0, \dots, n\}, \\ \overline{K}(x_j, \frac{\lambda}{3}) \subseteq C_i}} \overline{K}(x_j, \tfrac{\lambda}{3})$$

Sada neka je

$$K_i = \begin{cases} K_0' \cup \{a\}, & i = 0 \\ K_i', & i \in \{1, \dots, m-1\} \\ K_m' \cup \{b\}, & i = m \end{cases}$$

Kako su $K_0, \dots, K_m$ zatvoreni u (X, d), a (X, d) je kompaktan, $K_0, \dots, K_m$ su kompaktni u (X, d). Također, $K_0, \dots, K_m$ pokriva X od a do b. Naime, za proizvoljan $x \in X$ postoji $j \in \{0, \dots, n\}$ takav da je $x \in \overline{K}(x_j, \frac{\lambda}{3})$. Kako je

$$\operatorname{diam}\left(\overline{K}(x_j, \tfrac{\lambda}{3})\right) \leq \frac{2}{3}\lambda < \lambda,$$

postoji $i \in \{0, \dots, m\}$ takav da je $\overline{K}(x_j, \frac{\lambda}{3}) \subseteq C_i$, a onda je i $\overline{K}(x_j, \frac{\lambda}{3}) \subseteq K_i$ pa je $x \in K_i$. Dakle,

$$X = \bigcup_{i=0}^{m} K_i.$$

Iz definicije skupova K_i i zbog $a \in C_0$, $b \in C_m$, imamo $K_i \subseteq C_i$, za svaki $i \in \{0, \dots, m\}$. Neka su $i, j \in \{0, \dots, m\}$ takvi da je $|i - j| > 1$. Tada je

$$K_i \cap K_j \subseteq C_i \cap C_j = \emptyset$$

Neka je $i \in \{0, \dots, m - 1\}$. Pretpostavimo da je $K_i \cap K_{i+1} = \emptyset$. Tada je

$$(K_0 \cup \cdots \cup K_i, K_{i+1} \cup \cdots \cup K_m)$$

separacija od (X, d), što je u kontradikciji s povezanošću od (X, d). Dakle, $K_i \cap K_{i+1} \neq \emptyset$, za sve $i \in \{0, \dots, m - 1\}$. Preostaje još dokazati da je $K_i \neq \emptyset$, za svaki $i \in \{0, \dots, m\}$. Za $i = 0$ i $i = m$ tvrdnja je jasna, a za $i \in \{1, \dots, m - 1\}$ bi u suprotnom ponovno imali kontradikciju s povezanošću od (X, d) jer bi

$$(K_0 \cup \cdots \cup K_{i-1}, K_{i+1} \cup \cdots \cup K_m)$$

bila separacija od (X, d). Naposlijetku, zbog $K_i \subseteq C_i$ imamo

$$\operatorname{diam}(K_i) \leq \operatorname{diam}(C_i) < \varepsilon,$$

za svaki $i \in \{0, \dots, m\}$. Dakle, $K_0, \dots, K_m$ je kompaktni ε-lanac koji pokriva (X, d) od a do b.

Obratno, pretpostavimo da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji kompaktan ε-lanac koji pokriva X od a do b. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan i neka je $K_0, \dots, K_m$ kompaktni $\frac{\varepsilon}{2}$-lanac koji pokriva X od a do b. Neka je

$$\lambda = \frac{1}{2} \min\left\{d(K_i, K_j) \mid i, j \in \{0, \dots, m\},\ |i - j| > 1\right\}$$

Tada je očito $\lambda > 0$. Neka je $r = \min\left\{\lambda, \frac{\varepsilon}{4}\right\}$. Za $i \in \{0, \dots, m\}$ neka je

$$C_i = \bigcup_{x \in K_i} K(x, r)$$

Tvrdimo da je $C_0, \ldots, C_m$ otvoreni ε-lanac koji pokriva X od a do b. Očito je $K_i \subseteq C_i$, za svaki $i \in \{0, \ldots, m\}$, iz čega slijedi da je $a \in C_0,\ b \in C_m$, $|i-j| \leq 1 \ \Rightarrow\ C_i \cap C_j \neq \emptyset$ te $C_0, \ldots, C_m$ pokriva X.

Neka je $|i-j| > 1$. Pretpostavimo da je $C_i \cap C_j \neq \emptyset$ i neka je $z \in C_i \cap C_j$. Tada postoje $x \in K_i$ i $y \in K_j$ takvi da je $z \in K(x,r) \cap K(y,r)$. Sada je

$$d(K_i, K_j) \leq d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) < 2r \leq 2\lambda \leq d(K_i, K_j),$$

što je kontradikcija. Dakle $|i-j| > 1 \ \Rightarrow\ C_i \cap C_j = \emptyset$.

Neka je $i \in \{0, \ldots, m\}$ i neka su $x, y \in C_i$. Tada postoje $x_1, y_1 \in K_i$ takvi da je $x \in K(x_1, r)$ i $y \in K(y_1, r)$. Sada je

$$d(x,y) \leq \underbrace{d(x,x_1)}_{<r} + \underbrace{d(x_1,y_1)}_{\leq \mathrm{diam}(K_i)} + \underbrace{d(y_1,y)}_{<r} < \frac{\varepsilon}{2} + \mathrm{diam}(K_i),$$

a onda je i

$$\mathrm{diam}(C_i) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \underbrace{\mathrm{diam}(K_i)}_{<\frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$

Dakle, $C_0, \ldots, C_m$ je otvoreni ε-lanac koji pokriva X od a do b. Slijedi da je (X,d) lančast od a do b.

□

Za topološki prostor X kažemo da je **Hausdorffov kontinuum** ako je X kompaktan, povezan i Hausdorffov.

Neka je $C_0, \ldots, C_m$ lanac u skupu X i $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Za $C_0, \ldots, C_m$ kažemo da je **$\mathcal{U}$-lanac** ako za svaki $i \in \{0, \ldots, m\}$ postoji $U \in \mathcal{U}$ takav da je $C_i \subseteq U$. Ako su uz to $C_0, \ldots, C_m$ otvoreni skupovi, tada kažemo da je $C_0, \ldots, C_m$ **otvoreni $\mathcal{U}$-lanac**.

Neka je X Hausdorffov kontinuum. Kažemo da je X **lančast Hausdorffov kontinuum** ako za svaki otvoren pokrivač $\mathcal{U}$ od X postoji otvoreni $\mathcal{U}$-lanac u X koji pokriva X.

Neka je X Hausdorffov kontinuum i $a, b \in X$. Za X kažemo da je **Hausdorffov kontinuum lančast od** a **do** b ako za svaki otvoren pokrivač $\mathcal{U}$ od X postoji otvoreni $\mathcal{U}$-lanac u X koji pokriva X od a do b.

Propozicija 3.2.2. *Neka je (X,d) metrički prostor.*

1. *(X,d) je lančasti kontinuum ako i samo ako je $(X, \mathcal{T}_d)$ Hausdorffov lančasti kontinuum.*

2. *(X,d) je kontinuum lančast od a do b ako i samo ako je $(X, \mathcal{T}_d)$ Hausdorffov kontinuum lančast od a do b.*

Dokaz. Pretpostavimo da je (X, d) lančasti kontinuum. Tada je očito $(X, \mathcal{T}_d)$ Hausdorffov kontinuum. Neka je $\mathcal{U}$ otvoren pokrivač od $(X, \mathcal{T}_d)$. Tada postoji $\lambda > 0$ Lebesgueov broj od $\mathcal{U}$. Neka je $C_0, \dots, C_m$ λ-lanac u (X, d) koji pokriva X. Tada je $C_0, \dots, C_m$ i $\mathcal{U}$-lanac u $(X, \mathcal{T}_d)$. Dakle, $(X, \mathcal{T}_d)$ je lančast Hausdorffov kontinuum.

Obratno, pretpostavimo da je $(X, \mathcal{T}_d)$ Hausdorffov lančasti kontinuum. Neka je $\varepsilon > 0$. Kako je

$$\mathcal{U} = \left\{ K(x, \tfrac{\varepsilon}{3}) \mid x \in X \right\}$$

otvoren pokrivač od $(X, \mathcal{T}_d)$, postoji $\mathcal{U}$-lanac $C_0, \dots, C_m$ koji pokriva X.

Za $i \in \{0, \dots, m\}$ postoji $x \in X$ takav da je $C_i \subseteq K(x, \frac{\varepsilon}{3})$, pa je

$$\operatorname{diam}(C_i) \leq \operatorname{diam}\left(K(x, \tfrac{\varepsilon}{3})\right) \leq \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon$$

Slijedi da je $C_0, \dots, C_m$ ε-lanac u (X, d) koji pokriva X. Dakle, (X, d) je lančasti kontinuum.

Analogno dokazujemo i drugu ekvivalenciju.

□

Lema 3.2.3. *Neka je $(X, \mathcal{T}, (I_i))$ izračunljiv topološki prostor i $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Tada postoji rekurzivna funkcija $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takva da je*

$$J_{x_1} \cup \dots \cup J_{x_k} = J_{g(x_1, \dots, x_k)},$$

za sve $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{N}$.

Dokaz. Neka je

$$\Gamma = \left\{ (x_1, \dots, x_k, i) \in \mathbb{N}^{k+1} \mid [x_1] \cup \dots \cup [x_k] = [i] \right\}$$

Kako su $(x_1, \dots, x_k) \mapsto [x_1] \cup \dots \cup [x_k]$ i $i \mapsto [i]$ r.r.o. funkcije, prema korolaru 1.4.5, Γ je rekurzivan.

Za proizvoljne $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{N}$ skup $[x_1] \cup \dots \cup [x_k]$ je konačan neprazan podskup od $\mathbb{N}$ pa postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $[x_1] \cup \dots \cup [x_k] = [i]$. Prema teoremu 1.3.6, postoji rekurzivna funkcija $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takva da je $(x, g(x)) \in \Gamma$, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Dakle

$$[x_1] \cup \dots \cup [x_k] = [g(x_1, \dots, x_k)],$$

iz čega je

$$J_{x_1} \cup \dots \cup J_{x_k} = J_{g(x_1, \dots, x_k)},$$

za sve $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{N}$.

□

Propozicija 3.2.4. *Neka je $(X, \mathcal{T}, (I_i))$ izračunljiv topološki prostor, S poluizračunljiv skup u $(X, \mathcal{T}, (I_i))$ i $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Tada je*

$$\Omega = \left\{(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{N}^k \mid S \subseteq J_{x_1} \cup \cdots \cup J_{x_k}\right\}$$

rekurzivno prebrojiv.

Dokaz. Neka je

$$\Gamma = \left\{j \in \mathbb{N} \mid S \subseteq J_j\right\}$$

i $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ funkcija iz prethodne leme.

Tada je

$$(x_1, \ldots, x_k) \in \Omega \Leftrightarrow g(x_1, \ldots, x_k) \in \Gamma$$

Stoga je $\Omega = g^{-1}(\Gamma)$, pa budući da je Γ rekurzivno prebrojiv, iz propozicije 1.3.4 je to i Ω. □

Teorem 3.2.5. *Neka je $(X, \mathcal{T}, (I_i))$ izračunljiv topološki prostor. Neka je S poluizračunljiv u $(X, \mathcal{T}, (I_i))$ i $a, b \in X$ izračunljive točke. Pretpostavimo da je S kao potprostor od $(X, \mathcal{T})$ Hausdorffov kontinuum lančast od a do b. Tada je S izračunljiv u $(X, \mathcal{T}, (I_i))$.*

Dokaz. Ako je S jednočlan, tada tvrdnja slijedi iz propozicije 3.1.17. Pretpostavimo da je $\operatorname{card}(S) \geq 2$ i označimo s $\mathcal{T}_S$ relativnu topologiju na S.

Želimo dokazati da je S izračunljivo prebrojiv. Neka je $i \in \mathbb{N}$ takav da je $I_i \cap S \neq \emptyset$. Tvrdimo da tada postoji $x \in I_i \cap S$ takav da $x \notin \{a, b\}$. Pretpostavimo suprotno, da je $I_i \cap S \neq \emptyset$ i $I_i \cap S \subseteq \{a, b\}$. Imamo da je $I_i \cap S$ neprazan otvoren skup u $(S, \mathcal{T}_S)$, a kako je konačan, zbog Hausdorffovosti je i zatvoren u $(S, \mathcal{T}_S)$. Budući da je $(S, \mathcal{T}_S)$ povezan, mora biti $I_i \cap S = S$, no onda je S konačan i Hausdorffov, pa je $\mathcal{T}_S = \mathcal{P}(S)$. Ovo je u kontradikciji s povezanošću od $(S, \mathcal{T}_S)$ jer je $\operatorname{card}(S) \geq 2$. Dakle, postoji $x \in I_i \cap S$ takav da $x \notin \{a, b\}$.

Budući da je $(S, \mathcal{T}_S)$ kompaktan i Hausdorffov, $(S, \mathcal{T}_S)$ je i normalan. Isto tako, kao potprostor od $(X, \mathcal{T})$, $(S, \mathcal{T}_S)$ zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti. Iz ovoga slijedi da je $(S, \mathcal{T}_S)$ metrizabilan. Neka je d metrika na S takva da je $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_S$. Prema propoziciji 3.2.2, (S, d) je kontinuum lančast od a do b.

Neka je sada $r > 0$ takav da je $K(x, r) \subseteq I_i \cap S$ i $\lambda = \min\{r, d(x, a), d(x, b)\}$. Očito je $\lambda > 0$, pa po propoziciji 3.2.1, postoji kompaktni λ-lanac $K_0, \ldots, K_m$ u (S, d) koji pokriva S od a do b. Neka je $l \in \{0, \ldots, m\}$ takav da je $x \in K_l$. Tada $l \notin \{0, m\}$. Ako je $l = 0$, tada su $a, x \in K_l$, pa je

$$d(a, x) \leq \operatorname{diam}(K_l) < \lambda \leq d(a, x),$$

što je nemoguće. Analogno se pokazuje da je $l \neq m$. Dakle, vrijedi $0 < l < m$. Tvrdimo da je $K_l \subseteq I_i$. Naime, za $y \in K_l$ imamo

$$d(y, x) \leq \operatorname{diam}(K_l) < \lambda \leq r,$$

pa je $y \in K(x, r) \subseteq I_i$.

Neka je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija iz dokaza propozicije 3.1.17. Imamo $I_k = J_{f(k)}$, za svaki $k \in \mathbb{N}$. Dakle, vrijedi $K_l \subseteq J_{f(i)}$.

Neka su

$$A = K_0 \cup \cdots \cup K_{l-1},$$

$$B = K_{l+1} \cup \cdots \cup K_m$$

Očito su A, B kompaktni i disjunktni u (S, d) te je $a \in A,\ b \in B.\ A, K_l, B$ su kompaktni u $(S, \mathcal{T}_S)$, pa i u $(X, \mathcal{T})$. Prema propoziciji 3.1.13 i teoremu 3.1.14, postoje $u, v, w \in \mathbb{N}$ takvi da je $A \subseteq J_u$, $K_l \subseteq J_v$, $B \subseteq J_w$, $J_v \subseteq_{FS} J_{f(i)}$ i $J_u \diamond_{FD} J_v$. Iz ovoga slijedi da je $a \in J_u$, $b \in J_v$ i $S \subseteq J_u \cup J_v \cup J_w$.

Dakle, ako je $I_i \cap S \neq \emptyset$, tada postoje $u, v, w \in \mathbb{N}$ takvi da:

(1) $a \in J_u$

(2) $b \in J_w$

(3) $S \subseteq J_u \cup J_v \cup J_w$

(4) $J_v \subseteq_{FS} J_{f(i)}$

(5) $J_u \diamond_{FD} J_v$

Obratno, pretpostavimo da je $i \in \mathbb{N}$ takav da postoje $u, v, w \in \mathbb{N}$ za koje vrijedi (1)-(5). Tvrdimo da je tada $I_i \cap S \neq \emptyset$. Pretpostavimo suprotno, da je $I_i \cap S = \emptyset$. Kako je $I_i = J_{f(i)}$, prema (4) je i $J_v \cap S = \emptyset$. Sada je $S \subseteq J_u \cup J_w$, pa je $(S \cap J_u, S \cap J_w)$ separacija od $(S, \mathcal{T}_S)$, što je kontradikcija s povezanošću od $(S, \mathcal{T}_S)$.

Definiramo

$$\Omega = \left\{(i, u, v, w) \in \mathbb{N}^4 \mid \text{vrijedi } (1) - (5)\right\}$$

i za $k \in \{1, \ldots, 5\}$ neka je

$$\Omega_k = \left\{(i, u, v, w) \in \mathbb{N}^4 \mid \text{vrijedi } (k)\right\}$$

Tada je očito

$$\Omega = \Omega_1 \cap \cdots \cap \Omega_5$$

Skupovi Ω_1, Ω_2 i Ω_3 su rekurzivno prebrojivi prema propozicijama 3.2.4 i 1.3.4, a skup Ω_4 prema propozicijama 3.1.9 i 1.3.4 te Ω_5 prema propozicijama 3.1.6 i 1.3.4. Iz ovoga je, prema propoziciji 1.3.5, Ω rekurzivno prebrojiv. Neka je

$$\Gamma = \{i \in \mathbb{N} \mid I_i \cap S \neq \emptyset\}$$

Imamo da je
$$i \in \Gamma \ \Leftrightarrow\ \left(\exists (u,v,w) \in \mathbb{N}^3\right)\ (i,u,v,w) \in \Omega$$
Sada je prema teoremu 1.3.3, Γ rekurzivno prebrojiv, a onda je S izračunljivo prebrojiv.

□

3.3 Cirkularno lančasti kontinuumi

Neka je X skup. Za konačan niz $C_0, \dots, C_m$ podskupova od X kažemo da je **cirkularni lanac** ako
$$C_i \cap C_j \neq \emptyset \ \Leftrightarrow\ |i-j| \leq 1 \text{ ili } |i-j| = m$$

Uočimo:
Niz nepraznih skupova $C_0, \dots, C_m$ je cirkularni lanac ako i samo ako
$$i < j,\ C_i \cap C_j \neq \emptyset \ \Leftrightarrow\ j = i+1 \text{ ili } j = m,\ i = 0 \tag{3.3.4}$$

Ako je (X,d) metrički prostor i $\varepsilon > 0$ te $C_0, \dots, C_m$ cirkularni lanac u X takav da je $\operatorname{diam}(C_i) < \varepsilon$, za svaki $i \in \{0, \dots, m\}$, tada kažemo da je $C_0, \dots, C_m$ **cirkularni ε-lanac**. Pojmove **kompaktnog** i **otvorenog** cirkularnog lanca definiramo na očit način.

Za kontinuum (X,d) kažemo da je **cirkularno lančasti kontinuum** ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji otvoren cirkularni ε-lanac koji pokriva X.

Propozicija 3.3.1. *Neka je (X,d) kontinuum. Tada je (X,d) cirkularno lančasti kontinuum ako i samo ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji kompaktan cirkularni ε-lanac koji pokriva X.*

Dokaz. Pretpostavimo prvo da je (X,d) cirkularno lančasti kontinuum. Neka je $\varepsilon > 0$ i neka je $C_0, \dots, C_m$ cirkularni ε-lanac koji pokriva X. Neka je $\lambda > 0$ Lebesgueov broj pokrivača $\{C_0, \dots, C_m\}$. Kako je
$$\left\{K(x, \tfrac{\lambda}{3}) \mid x \in X\right\}$$
otvoren pokrivač od (X,d), postoji $n \in \mathbb{N}$ i $x_0, \dots, x_n \in X$ takvi da je
$$X = \bigcup_{i=0}^{n} K(x_i, \tfrac{\lambda}{3}).$$

Za $i \in \{0, \dots, m-1\}$ neka je $y_i \in C_i \cap C_{i+1}$ i neka je $y_m \in C_0 \cap C_m$.

Neka je
$$K_i' = \bigcup_{\substack{j \in \{0,\dots,n\},\\ \overline{K}(x_j, \frac{\lambda}{3}) \subseteq C_i}} \overline{K}(x_j, \tfrac{\lambda}{3}),$$

za $i = 0, \dots, m$.

Sada definiramo

$$K_i = \begin{cases} K_0' \cup \{y_0, y_m\}, & i = 0 \\ K_i' \cup \{y_{i-1}, y_i\}, & i \in \{1, \dots, m\} \end{cases}$$

Očito je K_i kompaktan i neprazan za svaki $i \in \{0, \dots, m\}$. Za $i \in \{0, \dots, m-1\}$ je $y_i \in K_i \cap K_{i+1}$ te je $y_m \in K_m \cap K_0$, pa za $i < j$ i $j = i+1$ ili $j = m,\ i = 0$ je $K_i \cap K_j \neq \emptyset$.

Obrnuto, ako je $i < j$ i $K_i \cap K_j \neq \emptyset$, tada je i $C_i \cap C_j \neq \emptyset$, pa kako je $C_0, \dots, C_m$ cirkularni lanac, prema (3.3.4) je $j = i+1$ ili $j = m,\ i = 0$. Dakle, $K_0, \dots, K_m$ je niz nepraznih skupova koji zadovoljava svojstvo (3.3.4), pa je $K_0, \dots, K_m$ cirkularni lanac.

Neka je $x \in X$. Tada je $x \in K(x_j, \frac{\lambda}{3})$, za neki $j \in \{0, \dots, n\}$. Kako je

$$\operatorname{diam}\left(K(x_j, \tfrac{\lambda}{3})\right) \leq \frac{2}{3}\lambda < \lambda,$$

imamo da je $K(x_j, \frac{\lambda}{3}) \subseteq C_i$, za neki $i \in \{0, \dots, m\}$. Tada je $x \in K_i$. Dakle,

$$X = \bigcup_{i=0}^{m} K_i,$$

odnosno $K_0, \dots, K_m$ pokriva X. Naposlijetku, za svaki $i \in \{0, \dots, m\}$ je $K_i \subseteq C_i$, pa je

$$\operatorname{diam}(K_i) \leq \operatorname{diam}(C_i) < \varepsilon$$

Obratno, pretpostavimo da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji kompaktan cirkularni lanac u (X, d) koji pokriva X. Neka je $\varepsilon > 0$ i $K_0, \dots, K_m$ kompaktan cirkularni $\frac{\varepsilon}{2}$-lanac koji pokriva X. Neka je

$$\lambda = \frac{1}{2} \min \left\{ d(K_i, K_j) \mid 1 < |i - j| < m \right\}$$

te $r = \min\{\lambda, \frac{\varepsilon}{4}\}$.

Za $i \in \{0, \dots, m\}$ definiramo

$$C_i = \bigcup_{x \in K_i} K(x, r)$$

Sada analogno kao u dokazu propozicije 3.2.1 dokazujemo da je $C_0, \dots, C_m$ otvoren cirkularni ε-lanac koji pokriva X.

□

Pojmove **cirkularni $\mathcal{U}$-lanac**,**otvoreni cirkularni $\mathcal{U}$-lanac** i **cirkularno lančasti Hausdorffov kontinuum** definiramo na očit način.

Neka je $(X, \mathcal{T}, (I_i))$ izračunljiv topološki prostor. Za $l \in \mathbb{N}$ definiramo

$$\mathcal{H}_l := \left(J_{(l)_0}, \ldots, J_{(l)_{\bar{l}}}\right)$$

Za $l \in \mathbb{N}$ kažemo da **reprezentira formalni cirkularni lanac**, odnosno da je $\mathcal{H}_l$ formalni cirkularni lanac, ako za sve $i, j \in \{0, \ldots, \bar{l}\}$ takve da je $1 < |i - j| < \bar{l}$ vrijedi

$$J_{(l)_i} \diamond_{FD} J_{(l)_j}.$$

Propozicija 3.3.2. *Skup*

$$\Omega = \{l \in \mathbb{N} \mid \mathcal{H}_l \textit{ je formalni cirkularni lanac}\}$$

je rekurzivno prebrojiv.

Dokaz. Neka je

$$S = \left\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid J_a \diamond_{FD} J_b\right\}$$

Po propoziciji 3.1.6, S je rekurzivno prebrojiv.

Imamo

$$\begin{aligned} l \in \Omega \;&\Leftrightarrow\; \left((l)_i, (l)_j\right) \in S, \text{ za } i, j \in \{0, \ldots, \bar{l}\},\ 1 < |i - j| < \bar{l} \\ &\Leftrightarrow\; \Phi(l) \subseteq S, \end{aligned}$$

gdje je $\Phi : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$,

$$\Phi(l) = \left\{\left((l)_i, (l)_j\right) \mid i, j \in \{0, \ldots, \bar{l}\},\ 1 < |i - j| < \bar{l}\right\}, \quad l \in \mathbb{N}$$

Neka je $\Psi : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^3)$,

$$\Psi(l) = \left\{(l, i, j) \mid i, j \leq \bar{l},\ 1 < |i - j| < \bar{l}\right\}, \quad l \in \mathbb{N}$$

Lako se vidi da je Ψ r.r.o. funkcija. Dalje, neka je $f : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}^2$,

$$f(l, i, j) = \left((l)_i, (l)_j\right), \quad l, i, j \in \mathbb{N}$$

Očito je f rekurzivna. Sada uočimo da je $\Phi(l) = f(\Psi(l))$, za sve $l \in \mathbb{N}$, pa je prema teoremu 1.4.6, Φ r.r.o. funkcija.

Imamo

$$\Omega = \{l \in \mathbb{N} \mid \Phi(l) \subseteq S\},$$

pa je prema teoremu 1.4.9, Ω rekurzivno prebrojiv skup.

□

Lema 3.3.3. *Postoji rekurzivna funkcija $\xi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je*

$$\bigcup \mathcal{H}_l = J_{\xi(l)},$$

za svaki $l \in \mathbb{N}$.

Dokaz. Neka je $\Lambda : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$,

$$\Lambda(l) = [(l)_0] \cup \cdots \cup [(l)_{\bar{l}}], \quad l \in \mathbb{N}$$

Tvrdimo da je Λ r.r.o. funkcija.

Neka je $\Psi : \mathbb{N}^2 \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$,

$$\Psi(i, l) = [(l)_i], \quad i, l \in \mathbb{N}$$

Prema napomenama 1.4.8 i 1.4.11, Ψ je r.r.o. funkcija.

Dalje, neka je $\Phi : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$,

$$\Phi(l) = \{0, \dots, \bar{l}\} \times \{l\}, \quad l \in \mathbb{N}$$

Lako se vidi da je i Φ r.r.o. funkcija.

Sada je

$$\begin{aligned}\Lambda(l) &= \Psi(0, l) \cup \cdots \cup \Psi(\bar{l}, l) \\ &= \bigcup_{y \in \Phi(l)} \Psi(y)\end{aligned}$$

Prema teoremu 1.4.10, Λ je r.r.o. Definiramo skup

$$S = \left\{(l, k) \in \mathbb{N}^2 \mid \Lambda(l) = [k]\right\}$$

Prema korolaru 1.4.5, S je rekurzivan skup. Očito je za svaki $l \in \mathbb{N}$, $\Lambda(l)$ konačan i neprazan podskup od $\mathbb{N}$, pa postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $\Lambda(l) = [k]$. Sada po teoremu 1.3.6, postoji rekurzivna funkcija $\xi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, takva da je $(l, \xi(l)) \in S$, za svaki $l \in \mathbb{N}$. Iz ovoga slijedi

$$\mathcal{H}_l = \bigcup_{i \in [(l)_0]} I_i \cup \cdots \cup \bigcup_{i \in [(l)_{\bar{l}}]} I_i = \bigcup_{i \in \Lambda(l)} I_i = \bigcup_{i \in [\xi(l)]} I_i = J_{\xi(l)},$$

za svaki $l \in \mathbb{N}$.

□

Propozicija 3.3.4. *Neka je $(X, \mathcal{T}, (I_i))$ izračunljiv topološki prostor i neka je S poluizračunljiv u $(X, \mathcal{T}, (I_i))$. Tada je skup*

$$T = \left\{l \in \mathbb{N} \mid S \subseteq \bigcup \mathcal{H}_l\right\}$$

rekurzivno prebrojiv.

Dokaz. Neka je ξ funkcija iz prethodne leme. Imamo

$$T = \left\{ l \in \mathbb{N} \mid S \subseteq J_{\xi(l)} \right\} = \xi^{-1} \left(\left\{ j \in \mathbb{N} \mid S \subseteq J_j \right\} \right)$$

Iz propozicije 1.3.4 slijedi tražena tvrdnja.

□

Teorem 3.3.5. *Neka je $(X, \mathcal{T}, (I_i))$ izračunljiv topološki prostor. Neka je S neprazan podskup od X takav da je S, kao potprostor od $(X, \mathcal{T})$, cirkularno lančast Hausdorffov kontinuum, ali ne i lančast. Ako je S poluizračunljiv, tada je i izračunljiv.*

Dokaz. Kao u dokazu teorema 3.2.5 zaključujemo da postoji metrika d na S takva da je $(S, \mathcal{T}_d)$ potprostor od $(X, \mathcal{T})$. Tada je (S, d) cirkularno lančast kontinuum koji nije lančast.

Tvrdimo da za svaki $y \in S$ i svaki $\varepsilon > 0$ postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je

$$y \in J_j, \quad \operatorname{diam}(J_j \cap S) < \varepsilon$$

Neka je $\varepsilon > 0$. Tada je $K(y, \frac{\varepsilon}{3}) = V \cap S$, za neki $V \in \mathcal{T}$. Kako je (I_i) baza topologije $\mathcal{T}$, postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $y \in I_i \subseteq V$ te je tada

$$I_i \cap S \subseteq V \cap S = K(y, \tfrac{\varepsilon}{3})$$

Kako je $I_i = J_j$ za neki $j \in \mathbb{N}$ i $\operatorname{diam}\left(K(y, \frac{\varepsilon}{3})\right) < \varepsilon$, slijedi tražena tvrdnja.

Budući da (S, d) nije lančast, postoji $\varepsilon_0 > 0$ takav da ne postoji otvoreni ε_0-lanac u (S, d) koji pokriva (S, d). Iz kompaktnosti od S i prethodno dokazanog, lako dobivamo da postoje $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{N}$ takvi da je

$$S \subseteq \bigcup_{i=0}^{n} J_{a_i}, \quad \operatorname{diam}(J_{a_i} \cap S) < \varepsilon_0, \ i = 0, \dots, n$$

Neka je $\lambda > 0$ Lebesgueov broj pokrivača $\{J_{a_0} \cap S, \dots, J_{a_n} \cap S\}$. Neka je $k \in \mathbb{N}$ takav da je $I_k \cap S \neq \emptyset$ i $x \in I_k \cap S$. Kako je $I_k \cap S$ otvoren u (S, d), postoji $0 < r < \lambda$ takav da je $K(x, r) \subseteq I_k \cap S$.

Prema propoziciji 3.3.1, postoji kompaktan cirkularni r-lanac $K_0, \dots, K_m$ u (S, d) koji pokriva S. Uočimo da bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $x \in K_0$ jer je za svaki $l \in \{1, \dots, m\}$, $K_l, \dots, K_{l+1}, K_0, \dots, K_{l-1}$ također cirkularni r-lanac koji pokriva S. Kako je $x \in K_0$ i $\operatorname{diam}(K_0) < r$, imamo da je $K_0 \subseteq K(x, r) \subseteq I_k$.

Kako je za $i \in \{0, \dots, m\}$, $\operatorname{diam}(K_i) < \lambda$, postoji $j_i \in \{0, \dots, n\}$ takav da je $K_i \subseteq J_{a_{j_i}}$. Sada je

$$K_0 \subseteq J_{a_{j_0}} \cap I_k = J_{a_{j_0}} \cap J_{f(k)},$$

gdje je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcija iz dokaza propozicije 3.1.17. Prema propoziciji 3.1.10, postoji $c \in \mathbb{N}$ takav da je

$$K_0 \subseteq J_c, \quad J_c \subseteq_{FS} J_{a_{j_0}}, \quad J_c \subseteq_{FS} J_{f(k)}$$

Sada je

$$K_0 \subseteq J_c,\ K_1 \subseteq J_{a_{j_1}}, \dots, K_m \subseteq J_{a_{j_m}}$$

Prema teoremu 3.1.14, postoje $u_0, \dots, u_m \in \mathbb{N}$ takvi da je

$$K_i \subseteq J_{u_i}, \quad J_{u_0} \subseteq_{FS} J_c,\ J_{u_i} \subseteq_{FS} J_{a_{j_i}},\ i = 1, \dots, m, \quad J_{u_i} \diamond_{FD} J_{u_j},\ \text{za } 1 < |i - j| < m$$

Iz napomene 3.1.11 dobivamo da je $J_{u_0} \subseteq_{FS} J_{a_{j_0}}$ i $J_{u_0} \subseteq_{FS} J_{f(k)}$. Neka je $l \in \mathbb{N}$ takav da je

$$(u_0, \dots, u_m) = \left((l)_0, \dots, (l)_{\bar{l}}\right)$$

i uočimo da je tada

$$S \subseteq J_{u_0} \cup \cdots \cup J_{u_m} = \bigcup \mathcal{H}_l$$

te da je $\mathcal{H}_l$ formalni cirkularni lanac.

Dakle, ako je $k \in \mathbb{N}$ takav da je $I_k \cap S \neq \emptyset$, tada postoji $l \in \mathbb{N}$ sa sljedećim svojstvima:

(1) $S \subseteq \bigcup \mathcal{H}_l$

(2) svaki od $J_{(l)_0}, \dots, J_{(l)_{\bar{l}}}$ je FS-sadržan u nekom od $J_{a_0}, \dots, J_{a_n}$

(3) $J_{(l)_0} \subseteq_{FS} J_{f(k)}$

(4) $\mathcal{H}_l$ je formalni cirkularni lanac

Neka je

$$\Omega = \left\{(k, l) \in \mathbb{N}^2 \mid \text{vrijedi } (1) - (4)\right\}$$

Dokazali smo da ako je $k \in \mathbb{N}$ takav da je $I_k \cap S \neq \emptyset$, tada postoji $l \in \mathbb{N}$ takav da je $(k, l) \in \Omega$.

Obratno, pretpostavimo da su $k, l \in \mathbb{N}$ takvi da je $(k, l) \in \Omega$. Tvrdimo da je tada $I_k \cap S \neq \emptyset$. Pretpostavimo suprotno, da je u $I_k \cap S = \emptyset$. Kako je $I_k = J_{f(k)}$, iz svojstva (3) slijedi da je i $J_{(l)_0} \cap S = \emptyset$. Neka je

$$C_i = J_{(l)_i} \cap S,$$

za $i \in \{0, \dots, \bar{l}\}$ i neka su

$$p = \min\left\{i \in \{0, \dots, \bar{l}\} \mid C_i \neq \emptyset\right\},$$

$$q = \max\left\{i \in \{0, \dots, \bar{l}\} \mid C_i \neq \emptyset\right\}$$

Kako je $C_0 = \emptyset$ imamo $p, q \geq 1$.

Tvrdimo da je $C_p, \dots, C_q$ otvoreni lanac u (S, d) koji pokriva S. Iz (1) slijedi da $C_p, \dots, C_q$ pokriva S. Za $i, j \in \{p, \dots, q\}$ takve da je $|i - j| > 1$ vrijedi $C_i \cap C_j = \emptyset$. Naime, zbog $p, q \geq 1$ je $|i - j| < \overline{l}$, pa tvrdnja slijedi iz (4). Također, zbog povezanosti od S je $C_i \cap C_{i+1} \neq \emptyset$, za svaki $i \in \{p, \dots, q - 1\}$. Naime, u suprotnom bi

$$(C_q \cup \dots \cup C_i, C_{i+1} \cup \dots \cup C_q)$$

bila separacija od (S, d).

Neka je $i \in \{p, \dots, q\}$. Prema (2), postoji $v \in \{0, \dots, n\}$ takav da je $J_{(l)_i} \subseteq J_{a_v}$. Tada je

$$C_i = J_{(l)_i} \cap S \subseteq J_{a_v} \cap S,$$

a onda je

$$\mathrm{diam}(C_i) \leq \mathrm{diam}(J_{a_v} \cap S) < \varepsilon_0$$

Iz ovoga slijedi da je $C_p, \dots, C_q$ otvoreni ε_0-lanac u (S, d) koji pokriva S. Ovo je kontradikcija, pa smo dokazali

$$I_k \cap S \neq \emptyset \Leftrightarrow (\exists l \in \mathbb{N})\ (k, l) \in \Omega \tag{3.3.5}$$

Preostaje još dokazati da je Ω rekurzivno prebrojiv. Neka je

$$\Omega_1 = \left\{(k, l) \in \mathbb{N}^2 \mid S \subseteq \bigcup \mathcal{H}_l\right\}$$

Prema propozicijama 3.3.4 i 1.3.4, Ω_1 je rekurzivno prebrojiv. Dalje, neka su

$$\Omega_2 = \left\{(k, l) \in \mathbb{N}^2 \mid \text{ svaki od } J_{(l)_0}, \dots, J_{(l)_{\overline{l}}} \text{ je FS-sadržan u nekom od } J_{a_0}, \dots, J_{a_n}\right\},$$

$$\Omega_2' = \left\{l \in \mathbb{N}^2 \mid \text{ svaki od } J_{(l)_0}, \dots, J_{(l)_{\overline{l}}} \text{ je FS-sadržan u nekom od } J_{a_0}, \dots, J_{a_n}\right\}$$

Za $a \in \mathbb{N}$ neka je

$$S_a = \left\{j \in \mathbb{N} \mid J_j \subseteq_{FS} J_a\right\}$$

Tada je $S_a = g^{-1}(A)$, gdje je

$$A = \left\{(j, j') \in \mathbb{N}^2 \mid J_j \subseteq_{FS} J_{j'}\right\},$$

i $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$,

$$g(j) = (j, a), \quad j \in \mathbb{N}$$

g je očito rekurzivna i A je prema propoziciji 3.1.9 rekurzivno prebrojiv, pa je prema propoziciji 1.3.4 S_a rekurzivno prebrojiv. Neka je

$$B = \left\{j \in \mathbb{N} \mid J_j \text{ je FS-sadržan u nekom od } J_{a_0}, \dots, J_{a_n}\right\}$$

Očito je

$$B = \bigcup_{i=0}^{n} S_{a_i},$$

pa je prema propoziciji 1.3.5, B rekurzivno prebrojiv. Sada je

$$\begin{aligned}\Omega_2' &= \left\{l \in \mathbb{N} \mid (l)_0, \ldots, (l)_{\bar{l}} \in B\right\} \\ &= \{l \in \mathbb{N} \mid [l] \subseteq B\}\end{aligned}$$

Funkcija $l \mapsto [l]$ je r.r.o. funkcija, pa je Ω_2' rekurzivno prebrojiv prema teoremu 1.4.9. Iz propozicije 1.3.4 slijedi da je Ω_2 rekurzivno prebrojiv.

Neka je

$$\begin{aligned}\Omega_3 &= \left\{(k,l) \in \mathbb{N}^2 \mid J_{(l)_0} \subseteq_{FS} J_{f(k)}\right\} \\ &= \left\{(k,l) \in \mathbb{N}^2 \mid ((l)_0, f(k)) \in A\right\}\end{aligned}$$

Funkcija $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$,

$$h(k,l) = ((l)_0, f(k))\,, \quad k, l \in \mathbb{N}$$

je očito rekurzivna i vrijedi $\Omega_3 = h^{-1}(A)$. Dakle i Ω_3 je rekurzivno prebrojiv prema propoziciji 1.3.4.

Naposlijetku, neka je

$$\Omega_4 = \left\{(k,l) \in \mathbb{N}^2 \mid \mathcal{H}_l \text{ je formalni cirkularni lanac}\right\}$$

Iz propozicija 3.3.2 i 1.3.4 lako se vidi da je Ω_4 rekurzivno prebrojiv. Sada je

$$\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2 \cap \Omega_3 \cap \Omega_4,$$

pa je i Ω rekurzivno prebrojiv skup.

Označimo

$$\Gamma = \{k \in \mathbb{N} \mid I_k \cap S \neq \emptyset\}$$

Prema (3.3.5) imamo

$$k \in \Gamma \;\Leftrightarrow\; (\exists l \in \mathbb{N})\; (k,l) \in \Omega$$

Sada iz teorema 1.3.3 slijedi da je Γ rekurzivno prebrojiv, a onda je S izračunljivo prebrojiv, pa i izračunljiv.

$\square$

Bibliografija

[1] Z. Iljazović: *Rekurzivnost lančastih i cirkularno lančastih skupova*, disertacija, Zagreb, 2009.

[2] M. Vuković: *Izračunljivost*, skripta, Sveučilište u Zagrebu

[3] Z. Iljazović: *Compact manifolds with computable boundaries*, Logical Methods in Computer Science 9 (4:19) (2013), 1-22

[4] J.S. Miller: *Effectiveness for embedded spheres and balls*, Electronic Notes in Theoretical Computer Science, 66 (2002), 127-138

[5] Z. Iljazović: *Chainable and Circularly Chainable Co-r.e. Sets in Computable Metric Spaces*, Journal of Universal Computer Science 15 (2009), 1206-1235

[6] J.R. Munkres: *Elements of Algebraic topology*, Addison-Wesley Publishing Company, Menlo Park, California, 1984.

[7] Z. Iljazović, L. Validžić: *Maximal computability structures*, Bulletin of Symbolic Logic, prihvaćeno za objavu

[8] Z. Iljazović, A. Kuruc, L. Validžić: *Linear metrics and effective separating sequences*, British Journal of Mathematics and Computer Science, 12 (2015), 1-8

[9] K. Burnik: *Computability of 1-manifolds*, disertacija, Zagreb, 2015.

[10] Z. Iljazović, B. Pažek: *Computable intersection points*, preprint

[11] V. Brattka, G. Presser: *Computability on subsets of metric spaces*, Theoretical Computer Science, 305 (2003), 43-76

[12] M.B. Pour-El, I. Richards: *Computability in Analysis and Physics*, Springer-Verlag, Berlin-Heielberg-New York, 1989.

[13] T. Kihara: *Incomputability of Simply Connected Planar Continua*, Computability, (1:2) (2012), 131-152

Sažetak

Rad je logički podjeljen u tri poglavlja. Prvo poglavlje je općenito o izračunljivosti i predstavlja temelj za daljnja razmatranja.

U drugom poglavlju bavimo se izračunljivim metričkim prostorima. Kako bismo uveli teoriju izračunljivosti u metrički prostor, govorimo o izračunljivim točkama, izračunljivim nizovima, izračunljivim skupovima, izračunljivo prebrojivim skupovima, poluizračunljivim skupovima. Dokazujemo da ako je potpun skup S izračunljiv u točki, tada možemo pronaći izračunljivu okolinu u S te točke proizvoljno malog dijametra. Posljedica ovoga i rezultata iz [5] je da su izračunljive točke guste u poluizračunljivim mnogostrukostima i poluizračunljivim topološkim poliedrima.

Treće poglavlje je o izračunljivim topološkim prostorima. Slično kao u prethodnom poglavlju, definiramo osnovne pojmove koji su nam važni za uvođenje izračunljivosti u topološke prostore i bavimo se uvjetima uz koje su poluizračunljivi lančasti i poluizračunljivi cirkularno lančasti kontinuumi izračunljivi. Dokazujemo da ako je Hausdorffov kontinuum poluizračunljiv i lančast od a do b, gdje su a i b izračunljive točke, tada je nužno i izračunljiv. Osim toga, pokazujemo da poluizračunljivost Hausdorffovog kontinuuma koji je cirkularno lančast, ali ne i lančast, povlači njegovu izračunljivost.

Summary

This thesis is logically divided into three chapters. First chapter is generally about computability and it forms a basis for further studies.

In the second chapter we talk about computable metric spaces. In order to introduce computability into metric spaces, we define computable points, computable sequences, computable sets, computably enumerable sets, semicomputable sets. We prove that if a semicomputable set S is computable in a point, then we can find a computable neighbourhood of that point in S which has arbitrarily small diameter. As a consequence of that and results from [5], we get that computable points are dense in semicomputable manifolds and semicomputable topological polyhedra.

The last chapter is about computable topological spaces. Similarly as in previous chapter, we introduce notions which we use to establish some connections between the computability theory and topology. We investigate sufficient conditions under which semicomputable chainable and circularly chainable continua are computable. We show that if a Hausdorff continuum is semicomputable and chainable from a to b, where a and b are computable points, then it is computable. Moreover, we prove that semicomputability of a Hausdorff continuum which is circularly chainable, but not chainable, implies its computability.

Životopis

Rođena sam 9. studenog 1992. godine u Zagrebu. Pohađala sam Osnovnu školu Gračani u Zagrebu te kasnije Klasičnu gimnaziju, također u Zagrebu. Zahvaljujući uspjesima na natjecanjima tijekom školovanja, 2011. godine sam proglašena maturanticom generacije. Iste godine sam upisala preddiplomski sveučilišni studij *Matematika* na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu, a potom 2014. godine diplomski sveučilišni studij *Teorijska matematika* na istom fakultetu.

Na završetku oba studija nagrađena sam za izniman uspjeh u studiju, a 2015. godine dobila sam i posebno rektorovo priznanje za postignut uspjeh međunarodnog značaja zbog koautorstva u radu „*Linear metrics and effective separating sequences*" objavljenom u *British Journal of Mathematics and Computer Science* ([8]). Uz to, koautorica sam i rada „*Maximal computability structures*" koji je prihvaćen za objavu u časopisu *Bulletin of Symbolic Logic* ([7]).

Tijekom studiranja bila sam demonstratorica iz mnogih kolegija te sam od 2013. godine studentski predstavnik u Vijeću Matematičkog odsjeka. Osim toga, sudjelovala sam i u radu udruge *Mladi nadareni matematičari* „*Marin Getaldić*" koja se bavi pripremom učenika osnovnih i srednjih škola za matematička natjecanja te popularizacijom matematike.