Multirezolucijski valići i diskretne transformacije

Vidović, Toni

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Toni Vidović

MULTIREZOLUCIJSKI VALIĆI I DISKRETNE TRANSFORMACIJE

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Damir Bakić

Zagreb, Srpanj, 2016.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

U ovom nam je radu cilj predstaviti ortonormirane valiće. Za funkciju $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ reći ćemo da je ortonormirani valić ako sistem $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$ čini ortonormiranu bazu za prostor $L^2(\mathbb{R})$, gdje je

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j x - k), \text{ za sve } j, k \in \mathbb{Z}.$$

Uz valiće ćemo vezati i skup potprostora prostora $L^2(\mathbb{R})$, koje ćemo, ako zadovoljavaju određena svojstva, nazivati *multirezolucijskom analizom*. Pokazat će se da će nam upravo multirezolucijska analiza biti koristan alat prilikom generiranja valića. Spomenimo kako se valići mogu promatrati i na $\mathbb{R}^n$, no mi ćemo se u ovom radu zadržati u jednoj dimenziji.

Pokazuje se da su valići baza mnogim algoritmima korištenim u raznim granama, poput obrade signala ili analize i kompresije slika. Glavna prednost, s računalskog aspekta, leži u jednostavnosti "pamćenja" takvog sistema. Naime, dovoljno je znati ponašanje funkcije ψ kako bi smo znali ponašanje svih funkcija $\psi_{j,k}$. Također, pokazuje se da valići imaju i dobra rekonstrukcijska svojstva. Primjerice, prilikom kompresije slike, lako se iz komprimiranih podataka dobije originalna slika.

Rad je podijeljen u 4 poglavlja. U početnom poglavlju navodimo nekoliko potrebnih rezultata iz funkcionalne analize, koje ćemo koristiti kroz čitav rad. U drugom poglavlju formalno uvodimo multirezolucijsku analizu te pokazujemo kako iz nje dobiti ortonormirani valić. Treće je poglavlje posvećeno karakterizaciji valića i multirezolucijske analize, dok u četvrtom poglavlju uvodimo diskretnu valićnu transformaciju te algoritme za dekomponiranje i rekonstruiranje podataka. Na samom kraju poglavlja, predstavljamo *valićne pakete*, koji služe poboljšavanju određenih svojstava valićne transformacije, ponajviše lokalizaciji frekvencije.

Poglavlje 1

Kratki pregled teorijskih činjenica

Kroz čitav rad bavit ćemo se ortonormiranim sistemima i bazama u Hilbertovim prostorima. Jedni od glavnih alata bit će nam razvoj u Fourierov red te Fourierova transformacija. Stoga, u ovom početnom poglavlju, navest ćemo osnovne definicije i rezultate, koje ćemo kasnije koristiti. Rezultate navodimo bez dokaza.

Za dani ortonormirani sistem $\{f_k : k \in \mathbb{Z}\}$ i funkciju $f \in \mathbb{H}$, gdje je $\mathbb{H}$ Hilbertov prostor, definiramo Fourierov koeficijente funkcije f s

$$c_k = \langle f, f_k \rangle, k \in \mathbb{Z}.$$

Od interesa je proučavati kada je i kako zadovoljena jednakost

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k f_k. \tag{1.1}$$

Kada (1.1) vrijedi za svaki $f \in \mathbb{H}$, s konvergencijom reda u normi prostora $\mathbb{H}$, onda sistem $\{f_k : k \in \mathbb{Z}\}$ zovemo ortonormiranom bazom prostora $\mathbb{H}$. Tipičan primjer je $\mathbb{H} = L^2(\mathbb{T})$, gdje je $\mathbb{T}$ jednodimenzionalni torus koji po potrebi identificiramo s $[0, 1\rangle$ ili $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$, te $f_k(x) = e^{ikx}$. U tom slučaju, govorimo o razvoju u Fourierov red.

Na prostoru $L^2(\mathbb{R})$ možemo, uz standardne ortonormirane baze, promatrati i druge korisne alate. Definiramo Fourierovu transformaciju, koja, isprva, funkciji $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ pridružuje funkciju $\hat{f}$ po formuli

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx.$$

Ponekad ćemo varijablu x zvati vremenskom, a varijablu ξ frekvencijskom varijablom. Lako se pokaže da je $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$, te da vrijedi Plancherelov teorem (vidi [3]), koji kaže

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle. \tag{1.2}$$

Time je zapravo definiran ograničen operator koji po neprekidnosti možemo proširiti na $L^2(\mathbb{R})$, obzirom da je $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ gust potprostor prostora $L^2(\mathbb{R})$. Tada je operator $f \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\hat{f}$ unitaran operator, te se može pokazati da je i surjektivan.

Inverzna Fourierova transformacija dana je formulom

$$\check{g}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{i\xi x} d\xi.$$

Ako primijenimo inverznu transformaciju na $g = \hat{f}$, dobijemo $(\hat{f})\check{} = f$.

Kod ortonormiranih valića, često ćemo spominjati operatore translacije i diletacije. Za $h \in \mathbb{R}$, definiramo operator $\tau_h : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ formulom $(\tau_h f)(x) = f(x-h)$, te operator $\rho_h : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ formulom $(\rho_h f)(x) = f(hx)$. Od interesa će nam biti cjelobrojne translacije, te diletacije potencijom broja 2. Stoga, definiramo posebne operatore T_k i D_j, za $k, j \in \mathbb{Z}$, formulama

$$\begin{aligned}(T_k f)(x) &= f(x-k),\\ (D_j f)(x) &= 2^{\frac{j}{2}} f(2^j x),\end{aligned}$$

za $f \in L^2(\mathbb{R})$. Oba su operatora unitarna, što će nam biti od iznimne važnosti.

Fourierova se transformacija dobro ponaša u kompoziciji s ovim operatorima, jer vrijedi

$$\begin{aligned}\widehat{T_k f}(\xi) &= e^{-ik\xi} \hat{f}(\xi)\\ \widehat{D_j f}(\xi) &= 2^{-\frac{j}{2}} \hat{f}(2^{-j}\xi).\end{aligned}$$

Poglavlje 2

Multirezolucijska analiza i konstrukcija valića

U ovom poglavlju predstavit ćemo metodu konstruiranja ortonormiranih valića baziranu na postojanju familije potprostora prostora $L^2(\mathbb{R})$, koja zadovoljava određena svojstva. Takvu ćemo familiju nazivati *multirezolucijskom analizom*, ili, skraćeno, MRA. U sekciji 2.1 definirat ćemo MRA preko standardnih pet svojstava, ali i pokazati da ta svojstva nisu nezavisna. Samu konstrukciju valića na temelju MRA pokazat ćemo u sekciji 2.2, te usput prikazati neke od najpoznatijih primjera.

2.1 Multirezolucijska analiza

Multirezolucijska analiza sastoji se od niza zatvorenih potprostora V_j, $j \in \mathbb{Z}$, prostora $L^2(\mathbb{R})$ koji zadovoljavaju

$$V_j \subset V_{j+1}, \forall j \in \mathbb{Z}, \tag{2.1}$$

$$f \in V_j \iff f(2(\cdot)) \in V_{j+1}, \forall j \in \mathbb{Z}, \tag{2.2}$$

$$\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\}, \tag{2.3}$$

$$\overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R}), \tag{2.4}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{postoji funkcija } \varphi \in V_0, \text{ takva da je skup} \\ \{\varphi(\cdot - k) \colon k \in \mathbb{Z}\} \text{ ortonormirana baza za } V_0.\end{array}\right\} \tag{2.5}$$

Funkcija φ iz (2.5) zove se *skalirajuća funkcija* dane MRA.

Ponekad se uvjet (2.5) relaksira pretpostavljajući da je skup $\{\varphi(\cdot - k) \colon k \in \mathbb{Z}\}$ Rieszova baza za V_0, tj. da za svaki $f \in V_0$ postoji jedinstveni niz $\{\alpha_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$ tako da vrijedi

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k \varphi(x-k),$$

gdje red konvergira u $L^2(\mathbb{R})$, i

$$A \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\alpha_k|^2 \le \left\| \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k \varphi(x-k) \right\|_2^2 \le B \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\alpha_k|^2 ,$$

gdje su $0 < A \le B < \infty$ konstante neovisne o f. Takvu ćemo MRA nazivati MRA s Rieszovom bazom. Na kraju sekcije pokazat ćemo da je ovaj naoko slabiji zahtjev od (2.5) zapravo ekvivalentan. Primijetimo da (2.5) implicira da je $\{\varphi(\cdot - k) \colon k \in \mathbb{Z}\}$ Rieszova baza za V_0, s konstantama $A = B = 1$.

Neka je $\varphi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \varphi(2^j x - k)$. Iz uvjeta (2.2) proizlazi da je, za fiksni $j \in \mathbb{Z}$, skup $\{\varphi_{j,k} \colon k \in \mathbb{Z}\}$ ortonormirana baza za prostor V_j. Naime, neka je $f \in V_j$. Tada imamo (uz oznaku $f_0 = 2^{\frac{-j}{2}} f(2^{-j}(\cdot)) \in V_0$)

$$\|f - \sum_{k=-n}^{n} \langle f, \varphi_{j,k} \rangle \varphi_{j,k}\|_2^2 = \|f_0 - \sum_{k=-n}^{n} \langle f_0, \varphi_{0,k} \rangle \varphi_{0,k}\|_2^2 \to 0, \text{ kako } n \to \infty,$$

gdje smo iskoristili unitarnost operatora D^j, te invarijantnost skalarnog produkta na isti.

Već smo spomenuli kako svojstva (2.1)-(2.5) nisu nezavisna. Konkretno, vrijede sljedeća dva teorema:

Teorem 2.1.1. *Uvjeti* (2.1)*,* (2.2) *i* (2.5) *impliciraju* (2.3)*. To vrijedi čak i ako u* (2.5) *pretpostavimo da je riječ samo o Rieszovoj bazi.*

Dokaz. Pretpostavimo da postoji $0 \ne f \in \bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j$, bez smanjenja općenitosti $\|f\|_2 = 1$. Posebno, $f \in V_{-j}, \forall j \in \mathbb{Z}$, pa možemo definirati funkcije $f_j(x) = 2^{\frac{j}{2}} f(2^j x)$ tako da je $f_j \in V_0$, po svojstvu (2.2). Vrijedi i da je $\|f_j\|_2 = \|f\|_2 = 1$. Pošto je $\{\varphi(\cdot - k) \colon k \in \mathbb{Z}\}$ Rieszova baza, možemo pisati $f_j(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k^j \varphi(x-k)$ te vrijedi $A \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\alpha_k^j\right|^2 \le \|f_j\|_2^2 = 1$.

Primijenjujući Fourierovu transformaciju, možemo pisati

$$2^{-\frac{j}{2}} \hat{f}(2^{-j}\xi) = \hat{f}_j(\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k^j e^{-ik\xi} \hat{\varphi}(\xi) = m_j(\xi)\hat{\varphi}(\xi),$$

gdje je

$$m_j(\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k^j e^{-ik\xi}$$

Primijetimo da je m_j 2π-periodična funkcija koja se nalazi u $L^2(\mathbb{T})$ s normom $\leq \sqrt{\frac{2\pi}{A}}$. Iz svega navedenog vidimo da je $\hat{f}_j(\xi) = 2^{\frac{j}{2}} m_j(2^j\xi)\hat{\varphi}(2^j\xi)$, te za $j \geq 1$ raspisujemo:

$$\begin{aligned}
\int_{2\pi}^{4\pi} |\hat{f}(\xi)| d\xi &\leq 2^{\frac{j}{2}} \left(\int_{2\pi}^{4\pi} |\hat{\varphi}(2^j\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{2\pi}^{4\pi} |m_j(2^j\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= 2^{-\frac{j}{2}} \left(\int_{2^{j+1}\pi}^{2^{j+2}\pi} |\hat{\varphi}(\mu)|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{2^{j+1}\pi}^{2^{j+2}\pi} |m_j(\mu)|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\int_{2^{j+1}\pi}^{\infty} |\hat{\varphi}(\mu)|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2^j} \int_{2^{j+1}\pi}^{2^{j+2}\pi} |m_j(\mu)|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_{2^{j+1}\pi}^{\infty} |\hat{\varphi}(\mu)|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2^j} \sum_{l=0}^{2^j-1} \int_{2^{j+1}\pi+2l\pi}^{2^{j+2}\pi+2(l+1)\pi} |m_j(\mu)|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\int_{2^{j+1}\pi}^{\infty} |\hat{\varphi}(\mu)|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2\pi}{A} \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Dakle, puštajući $j \to \infty$, zaključujemo da je $\int_{2\pi}^{4\pi} |\hat{f}(\xi)| d\xi = 0$, pa je $\hat{f}(\xi) = 0$ skoro svuda na $[2\pi, 4\pi]$. Isti račun možemo primijeniti na funkciju $2^{\frac{l}{2}} \hat{f}(2^l\xi)$, $l \in \mathbb{Z}$, te zaključiti da je $\hat{f}(\xi) = 0$ skoro svuda na $2^l[2\pi, 4\pi]$. To nam daje da je $\hat{f}(\xi) = 0$ skoro svuda na $\langle 0, \infty \rangle$. Ponavljajući čitav ovaj postupak s intervalom $[-4\pi, -2\pi]$ u ulozi intervala $[2\pi, 4\pi]$, zaključujemo da je $\hat{f}(\xi) = 0$ skoro svuda. To je u kontradikciji s početnom pretpostavkom da je $f \neq 0$, čime je dokaz gotov. $\square$

Teorem 2.1.2. *Neka je* $\{V_j \colon j \in \mathbb{Z}\}$ *niz zatvorenih potprostora u* $L^2(\mathbb{R})$ *koji zadovoljavaju* (2.1), (2.2) *i* (2.5), *te da je funkcija* φ *iz* (2.5) *takva da je* $|\hat{\varphi}|$ *neprekidna u nuli. Tada je ekvivalentno:*

i) $\hat{\varphi}(0) \neq 0$,

ii) $\overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$.

Tada je $|\hat{\varphi}(0)| = 1$.

Dokaz. Pretpostavimo da je $\hat{\varphi}(0) \neq 0$. Prvo tvrdimo da je skup

$$W := \overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j}$$

invarijantan na translacije. Da bismo to dokazali, prvo ćemo pokazati da je W invarijantan na dijadske translacije $\tau_{2^{-l}m}, l, m \in \mathbb{Z}$. Uzmimo $f \in W$. Za dani $\varepsilon > 0$ postoje $j_0 \in \mathbb{Z}$ i

$h \in V_{j_0}$ takvi da je $\|f - h\|_2 < \varepsilon$. Iz (2.1) zaključujemo da je $h \in V_j, \forall j \geq j_0$, a zbog (2.2) i (2.5) možemo pisati

$$h(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k^j \varphi(2^j x - k).$$

Stoga je

$$(\tau_{2^{-l}m} h)(x) = h(x - 2^{-l}m) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k^j \varphi\left(2^j(x - 2^{-l}m) - k\right).$$

Ako je $j \geq l$, onda je $2^{j-l}m \in \mathbb{Z}$, pa je $\varphi(2^j(x-2^{-l}m)-k) = \varphi(2^j - 2^{j-l}m - k)$ element prostora V_j. Kako je W zatvoren, to je $\tau_{2^{-l}m}h \in W$. Jer je ε bio proizvoljan, a $\|\tau_{2^{-l}m}f - \tau_{2^{-l}m}h\|_2 = \|f - h\|_2 < \varepsilon$, zaključujemo da je i $\tau_{2^{-l}m}f \in W$. Općenito, za $x \in \mathbb{R}$ možemo naći $l, m \in \mathbb{Z}$ tako da je $2^{-l}m$ proizvoljno blizu x. Tada je i $\|\tau_{2^{-l}m}f - \tau_x f\|_2$ po volji malo, pa je W invarijantan na sve translacije.

Pošto je $\hat{\varphi}(0) \neq 0$ i $|\hat{\varphi}|$ neprekidna u nuli, postoji $\mu > 0$ takav da je $\hat{\varphi}(\xi) \neq 0$ na $\langle -\mu, \mu \rangle$. Pretpostavimo sada da postoji $g \in W^\perp$. Jer je, po upravo dokazanom, W invarijantan na translacije, vrijedi

$$0 = \int_{\mathbb{R}} f(x + t)\overline{g(t)}dt,$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$ i $f \in W$. Zbog $(\tau_{-x}f)\hat{}(\xi) = e^{i\xi x}\hat{f}(\xi)$, posljednja jednakost i Plancherelova formula daju

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x}\hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}d\xi,$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$. Kako je $\hat{f}\overline{\hat{g}} \in L^1(\mathbb{R})$, slijedi da je $\hat{f}\overline{\hat{g}} = 0$ za skoro svaki $\xi \in \mathbb{R}$. Posebno, neka je $f(x) = 2^j\varphi(2^j x)$ tako da je $f \in V_j \subset W$ i $\hat{f}(\xi) = \hat{\varphi}(2^{-j}\xi)$. Dakle, $\hat{\varphi}(2^{-j}\xi)\overline{\hat{g}(\xi)} = 0$ za skoro svaki $\xi \in \mathbb{R}$. No, $\hat{\varphi}(2^{-j}\xi) \neq 0$ za $\xi \in \langle -2^j\mu, 2^j\mu \rangle$, pa mora vrijediti $\hat{g}(\xi) = 0$ za skoro svaki $\xi \in \langle -2^j\mu, 2^j\mu \rangle$. Puštajući $j \to \infty$, vidimo da je $\hat{g} = 0$ skoro svuda, pa je i $g = 0$ skoro svuda. Dakle, $W = L^2(\mathbb{R})$.

Pretpostavimo sada da je $W = L^2(\mathbb{R})$ i neka je f takva da je $\hat{f} = \chi_{[-1,1]}$. Tada je $\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\|\hat{f}\|_2^2 = \frac{1}{\pi}$. Označimo s P_j ortogonalni projektor na V_j. Po (2.1) i našoj pretpostavci imamo da $\|f - P_j f\|_2 \to 0$, kako $j \to \infty$, a time i $\|P_j f\|_2 \to \|f\|_2$. Označimo li $\varphi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}}\varphi(2^j x - k)$, imamo

$$\|P_j f\|_2^2 = \|\sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{j,k} \rangle \varphi_{j,k}\|_2^2 \to \frac{1}{\pi},$$

kako $j \to \infty$ (jer iz (2.2) i (2.5) slijedi da je $\{\varphi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}$ ortonormirana baza za V_j). Zamjena varijabli i Plancherelov teorem daju nam

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\langle f, \varphi_{j,-k}\rangle\right|^2 = \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left| \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\overline{(\varphi_{j,-k})\hat{}(\xi)} d\xi \right|^2 = \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left| \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) 2^{\frac{-j}{2}} e^{-i2^{-j}k\xi} \overline{\hat{\varphi}(2^{-j}\xi)} d\xi \right|^2 = \\
&= 2^j \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-2^{-j}}^{2^{-j}} \overline{\hat{\varphi}(\mu)} e^{-ik\mu} d\mu \right|^2 .
\end{aligned}
$$

Za dovoljno veliki j vrijedi $[-2^{-j}, 2^{-j}] \subset [-\pi, \pi]$, pa je zadnji izraz pod sumom kvadrat norme k-tog Fourierovog koeficijenta funkcije $\chi_{[-2^{-j},2^{-j}]}\overline{\hat{\varphi}}$. Ponovnom primjenom Plancherelove formule za Fourierove redove, dobivamo

$$
\lim_{j\to\infty} \frac{2^j}{2\pi} \int_{-2^{-j}}^{2^{-j}} |\hat{\varphi}(\mu)|^2 d\mu = \frac{1}{\pi}.
$$

Međutim, iz neprekidnosti funkcije $|\hat{\varphi}|$ u nuli zaključujemo da isti taj izraz konvergira k $\frac{1}{\pi}|\hat{\varphi}(0)|^2$. Dakle, $|\hat{\varphi}(0)| = 1 \neq 0$. □

Iz dokaza prethodnog teorema vidimo da se (2.4) može zaključiti ako pretpostavimo (2.1), (2.2), (2.5) te da postoji $\mu > 0$ takav da je $\hat{\varphi}(\xi) \neq 0$ na $\langle -\mu, \mu\rangle$. Nadalje, ako je $\{V_j : j \in \mathbb{Z}\}$ MRA, dokaz teorema pokazuje da mora vrijediti

$$
\lim_{j\to\infty} \frac{1}{2^{-j+1}} \int_{-2^{-j}}^{2^{-j}} |\hat{\varphi}(\mu)|^2 d\mu = 1.
$$

Za kraj, pokazat ćemo činjenicu koju smo spomenuli na početku, da je uvjet (2.5) ekvivalentan zahtjevu da je skup $\{\varphi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ Rieszova baza za V_0, tj. da ako je skup $\{\varphi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ Rieszova baza za V_0, tada možemo naći funkciju $\gamma \in V_0$ takvu da je skup $\{\gamma(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ ortonormirana baza za V_0. Ta je činjenica lagana posljedica sljedeće leme:

Lema 2.1.3. *Pretpostavimo da je $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ takva da skup $\{\varphi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ čini Rieszovu bazu za $\overline{\operatorname{span}}\{\varphi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$, tj. da postoje konstante $0 < A \leq B < \infty$ takve da $\forall \mathbf{c} = \{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$ vrijedi*

$$
A \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 \leq \left\| \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \varphi(\cdot - k) \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq B \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 \tag{2.6}
$$

Neka je

$$\sigma_\varphi(\xi) := \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi + 2k\pi)|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.7}$$

Tada je $\sqrt{A} \leq \sigma_\varphi(\xi) \leq \sqrt{B}$ *za skoro svaki* $\xi \in \mathbb{R}$.

Prije samog dokaza, pogledajmo kako iz leme slijedi naša činjenica. Definiramo γ tako da stavimo $\hat{\gamma} = \hat{\varphi}/\sigma_\varphi$. Po lemi, $1/\sigma_\varphi$ je ograničena funkcija, tako da $\hat{\gamma}$, a time i γ pripadaju prostoru $L^2(\mathbb{R})$. Dodatno, zbog 2π-periodičnosti funkcije σ_φ, možemo naći nizove $\{\alpha_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ i $\{\beta_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ iz $l^2(\mathbb{Z})$ tako da vrijedi

$$\frac{1}{\sigma_\varphi(\xi)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k e^{-ik\pi} \text{ i } \sigma_\varphi(\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \beta_k e^{-ik\pi},$$

s konvergencijom u $L^2(\mathbb{T})$ (a čak i skoro svuda na $\mathbb{T}$). Stoga možemo pisati

$$\hat{\gamma}(\xi) = \hat{\varphi}(\xi) \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k e^{-ik\pi} \text{ i } \hat{\varphi}(\xi) = \hat{\gamma}(\xi) \sum_{k\in\mathbb{Z}} \beta_k e^{-ik\pi}.$$

Djelujući Fourierovom transformacijom na gornje jednakosti, dobivamo

$$\gamma(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k \varphi_{0,k}(x) \text{ i } \varphi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \beta_k \gamma_{0,k}(x),$$

s konvergencijom u $L^2(\mathbb{R})$. Iz toga slijedi

$$\gamma \in \overline{\text{span}}\{\varphi_{0,k} \colon k \in \mathbb{Z}\} \text{ i } \varphi \in \overline{\text{span}}\{\gamma_{0,k} \colon k \in \mathbb{Z}\}.$$

Nadalje, iz definicije funkcije $\hat{\gamma}$ i 2π-periodičnosti funkcije σ_φ jasno je da vrijedi

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\gamma}(\xi + 2k\pi)|^2 = \frac{1}{\sigma_\varphi^2(\xi)} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi + 2k\pi)|^2 = 1, \text{ za skoro svaki } \xi \in \mathbb{R}.$$

Konačni korak u rezoniranju daje sljedeća propozicija o karakterizaciji ortonormiranih sistema:

Propozicija 2.1.4. *Ako je* $g \in L^2(\mathbb{R})$, *tada je skup* $\{g(\cdot - k) \colon k \in \mathbb{Z}\}$ *ortonormirani sistem ako i samo ako vrijedi*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{g}(\xi + 2k\pi)|^2 = 1, \textit{ za skoro svaki } \xi \in \mathbb{R}.$$

Dokaz. Dokaz se svodi na primjenu Plancherelove formule i periodizacije funkcije. Raspisujemo:

$$\begin{aligned}\langle g(\cdot), g(\cdot - k)\rangle &= \int_{\mathbb{R}} g(x)\overline{g(x-k)}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}|\hat{g}(\xi)|^2 e^{ik\xi}d\xi\\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\int_{2l\pi}^{2(l+1)\pi}|\hat{g}(\xi)|^2 e^{ik\xi}d\xi\\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\int_0^{2\pi}|\hat{g}(\mu+2l\pi)|^2 e^{ik\mu}d\mu\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{l=-\infty}^{\infty}|\hat{g}(\mu+2l\pi)|^2\right)e^{ik\mu}d\mu\\ &= \left(\sum_{l=-\infty}^{\infty}|\hat{g}(\mu+2l\pi)|^2\right)\hat{\ }(-k).\end{aligned}$$

Ako je sistem ortonormiran, onda je lijeva strana jednaka $\delta_{0,k}$, pa funkcija $\left(\sum_{l=-\infty}^{\infty}|\hat{g}(\mu+2l\pi)|^2\right)$ ima samo nulti Fourierov koeficijent različit od nule, te je stoga jednaka konstanti skoro svuda, u ovom slučaju 1. Obratno, ako je funkcija $\left(\sum_{l=-\infty}^{\infty}|\hat{g}(\mu+2l\pi)|^2\right)$ skoro svuda jednaka 1, onda je desna strana jednaka $\delta_{0,k}$, pa je sistem ortonormiran. □

Dokaz leme 2.1.3. Za $\mathbf{c} = \{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$ definiramo $S_{\mathbf{c}} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\varphi_{0,k}$. Tada vrijedi

$$\widehat{S_{\mathbf{c}}}(\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-ik\xi}\hat{\varphi}(\xi) =: \vartheta_{\mathbf{c}}(\xi)\hat{\varphi}(\xi),$$

gdje je $\vartheta_{\mathbf{c}}(\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{-ik\xi}$ funkcija iz $L^2(\mathbb{T})$. Štoviše,

$$\begin{aligned}\left\|\widehat{S_{\mathbf{c}}}\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})} &= \int_{\mathbb{R}}|\vartheta_{\mathbf{c}}(\xi)\hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi}|\vartheta_{\mathbf{c}}(\xi)\hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi\\ &= \int_{\mathbb{T}}|\vartheta_{\mathbf{c}}(\xi)|^2\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\hat{\varphi}(\xi+2k\pi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{T}}|\vartheta_{\mathbf{c}}(\xi)\sigma_{\varphi}(\xi)|^2 d\xi.\end{aligned}$$

Plancherelov teorem nam zajedno s gornjim računom daje

$$||S_{\mathbf{c}}||^2_{L^2(\mathbb{R})} = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}|\vartheta_{\mathbf{c}}(\xi)\sigma_{\varphi}(\xi)|^2 d\xi.$$

Ovim računom možemo reformulirati uvjet (2.6) u oblik

$$A||\vartheta_{\mathbf{c}}||^2_{L^2(\mathbb{T})} \leq ||\vartheta_{\mathbf{c}}\sigma_{\varphi}||^2_{L^2(\mathbb{T})} \leq B||\vartheta_{\mathbf{c}}||^2_{L^2(\mathbb{T})}. \tag{2.8}$$

Fiksirajmo $\eta \in \mathbb{T}$ i izaberimo $\mathbf{c}$ tako da je $\vartheta_{\mathbf{c}}(\xi) = \frac{1}{2m\pi} \sum_{k=0}^{m-1} e^{ik(\xi-\eta)}$. Tada dobivamo

$$|\vartheta_{\mathbf{c}}(\xi)|^2 = \frac{1}{2m\pi} \left[\frac{\sin \frac{m(\xi-\eta)}{2}}{\sin \frac{\xi-\eta}{2}} \right]^2 = K_m(\eta - \xi),$$

gdje je K_m m-ta Fejérova jezgra. Pošto vrijedi $\|\vartheta_{\mathbf{c}}\|_{L^2(\mathbb{T})} = 1$, (2.8) postaje

$$A \le (K_m * \sigma_\varphi^2)(\eta) \le B, \text{ za skoro svaki } \eta \in \mathbb{T}. \tag{2.9}$$

Konačno, funkcija σ_φ^2 je iz prostora $L^1(\mathbb{T})$, pa parcijalne sume Fourierovog reda u smislu Cesàra konvergiraju prema funkciji skoro svuda. Dakle, puštajući $m \to \infty$ u (2.9) dolazimo do traženih nejednakosti. □

Napomena 2.1.5. *Primijetimo da je funkcija σ_φ iz leme 2.1.3 uvijek dobro definirana, čim je $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$. Naime*

$$\int_{\mathbb{T}} |\sigma_\varphi(\xi)|^2 d\xi = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} |\hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}} |\hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi = 2\pi \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2.$$

2.2 Konstrukcija valića na temelju MRA

Sada prelazimo na konstrukciju valića iz dane MRA. Neka je W_0 ortognalni komplement prostora V_0 u V_1, tj. $V_1 = V_0 \oplus W_0$. Ako diletiramo elemente prostora W_0 s 2^j, dobivamo zatvoreni potprostor W_j prostora V_{j+1} tako da vrijedi

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j, \forall j \in \mathbb{Z}.$$

Kako je $V_j \subset V_{j+1}$ i $\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\}$, vrijedi

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j = \bigoplus_{l=-\infty}^{j} W_l, \forall j \in \mathbb{Z}$$

S druge strane, kako je $\overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$, to je

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j=-\infty}^{\infty} W_j. \tag{2.10}$$

Kako bismo dobili ortonormirani valić, jedino što nam preostaje je pronaći funkciju $\psi \in W_0$ takvu da je $\{\psi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ ortonormirana baza za W_0. Zapravo, kada to nađemo, zbog definicije prostora W_j i svojstva (2.2) imamo da je $\{2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j \cdot - k) \colon k \in \mathbb{Z}\}$ ortonormirana baza za W_j. Stoga, $\{\psi_{j,k} \colon j, k \in \mathbb{Z}\}$ je ortonormirana baza za $L^2(\mathbb{R})$, što pokazuje da je ψ ortonormirani valić na $\mathbb{R}$.

Pokušajmo sada pronaći takvu funkciju ψ. Promotrimo $V_0 = W_{-1} \oplus V_{-1}$ i primijetimo da je $\frac{1}{2}\varphi(\frac{\cdot}{2}) \in V_{-1} \subset V_0$. Po (2.5), možemo tu funkciju zapisati u bazi prostora V_0 $\{\varphi(\cdot + k) \colon k \in \mathbb{Z}\}$ čime dobivamo

$$\frac{1}{2}\varphi(\tfrac{1}{2}x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \varphi(x + k), \tag{2.11}$$

gdje je $\alpha_k = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \varphi(\frac{1}{2}x)\overline{\varphi(x + k)}dx$, red u (2.11) konvergira u $L^2(\mathbb{R})$ te $\{\alpha_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$. Uzimajući Fourierovu transformaciju, dobivamo

$$\hat{\varphi}(2\xi) = \hat{\varphi}(\xi) \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k e^{ik\xi} =: \hat{\varphi}(\xi) m_0(\xi), \tag{2.12}$$

gdje je m_0 2π-periodična funkcija u $L^2(\mathbb{T})$. Funkcija m_0 naziva se *niskopropusni filter* povezan sa skalirajućom funkcijom φ.

Za početak, dokažimo jednostavnu posljedicu propozicije 2.1.4:

Korolar 2.2.1. *Ako je $g \in L^2(\mathbb{R})$ takva da je $\{g(\cdot - k) \colon k \in \mathbb{Z}\}$ ortonormirani sistem, tada je $|supp(\hat{g})| \geq 2\pi$. Jednakost vrijedi ako i samo ako je $|\hat{g}| = \chi_K$, za neki izmjeriv skup $K \subset \mathbb{R}$ za koji vrijedi $|K| = 2\pi$.*

Dokaz. Iz propozicije 2.1.4 slijedi da je $|\hat{g}(\xi)| \leq 1$ skoro svuda na $\mathbb{R}$. Koristeći Plancherelov teorem računamo,

$$|supp(\hat{g})| = \int_{supp(\hat{g})} 1 d\xi \geq \int_{\mathbb{R}} |\hat{g}(\xi)|^2 d\xi = 2\pi \int_{\mathbb{R}} |g(x)|^2 dx = 2\pi.$$

Ako je $|supp(\hat{g})| = 2\pi$ i $0 < g < 1$ na skupu E pozitivne mjere, dolazimo do kontradikcije. Naime,

$$2\pi = \|\hat{g}\|_2^2 = \int_{supp(\hat{g})} |\hat{g}(\xi)|^2 d\xi < |supp(\hat{g}) \backslash E| + |E| = |supp(\hat{g})| = 2\pi.$$

Stoga, $|\hat{g}(\xi)| = 1$ na nosaču funkcije $\hat{g}$. Obratno, ako je $|\hat{g}| = \chi_K$ za $|K| = 2\pi$, onda je očito $|supp(\hat{g})| = 2\pi$. □

Nastavljamo s konstrukcijom ortonormiranih valića ψ povezanih sa skalirajućom funkcijom φ. Važno svojstvo niskopropusnog filtera je

$$|m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + \pi)|^2 = 1, \text{ za skoro svaki } \xi \in \mathbb{R}. \tag{2.13}$$

Kako bismo to dokazali, koristimo propoziciju 2.1.4 primijenjenu na φ te dobijamo

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi + 2k\pi)|^2 = 1, \text{ za skoro svaki } \xi \in \mathbb{R}.$$

Iz (2.12) slijedi da je gornje ekvivalentno s

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi + k\pi)|^2 |m_0(\xi + k\pi)|^2 = 1, \text{ za skoro svaki } \xi \in \mathbb{R}.$$

Sumu na lijevoj strani rastavimo na sumu po parnim i sumu po neparnim cijelim brojevima te koristeći propoziciju 2.1.4 i 2π-periodičnost funkcije m_0, dobijamo

$$\begin{aligned} 1 &= |m_0(\xi)|^2 \sum_{l\in\mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi + 2l\pi)|^2 + |m_0(\xi + \pi)|^2 \sum_{l\in\mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi + \pi + 2l\pi)|^2 \\ &= |m_0(\xi)|^2 \cdot 1 + |m_0(\xi + \pi)|^2 \cdot 1, \end{aligned}$$

čime smo dokazali (2.13).

Da bismo našli ψ promatramo W_{-1}, i to iz perspektive Fourierove transformacije.

Lema 2.2.2. *Ako je φ skalirajuća funkcija MRA $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ i m_0 pridruženi niskopropusni filter, tada*

$$\begin{aligned} V_{-1} &= \{f : \hat{f}(\xi) = m(2\xi) m_0(\xi) \hat{\varphi}(\xi), \text{ za neku } 2\pi\text{-periodičnu } m \in L^2(\mathbb{T})\}; \\ V_0 &= \{f : \hat{f}(\xi) = l(\xi)\hat{\varphi}(\xi), \text{ za neku } 2\pi\text{-periodičnu } l \in L^2(\mathbb{T})\}. \end{aligned}$$

Dokaz. Ako je $f \in V_{-1}$, tada je $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \varphi(\frac{1}{2}x - k)$, za neki $\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$. Stoga, koristeći (2.12), imamo

$$\hat{f}(\xi) = \sqrt{2}\hat{\varphi}(2\xi) \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{-i2k\xi} = m(2\xi)\hat{\varphi}(2\xi) = m(2\xi) m_0(\xi) \hat{\varphi}(\xi),$$

gdje smo uveli $m(\xi) = \sqrt{2} \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{-ik\xi}$, koja je iz $L^2(\mathbb{T})$.

Obratno, ako je $m \in L^2(\mathbb{T}) 2\pi$-periodična, možemo obrnuti gornji postupak te vidjeti da funkcija f, definirana s $\hat{f}(\xi) = m(2\xi) m_0(\xi)\hat{\varphi}(\xi)$, pripada prostoru V_{-1}. Jedino moramo pokazati da je $m(2\xi) m_0(\xi)\hat{\varphi}(\xi)$ funkcija iz prostora $L^2(\mathbb{R})$. Općenito, za $h \in L^2(\mathbb{T}) 2\pi$-periodičnu, zbog ortogonalnosti sistema $\{\varphi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ po propoziciji 2.1.4 vrijedi:

$$\int_{\mathbb{R}} |h(\xi)|^2 |\hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} |h(\mu)|^2 |\hat{\varphi}(\mu + 2k\pi)|^2 d\mu = \|h\|^2_{L^2(\mathbb{T})}.$$

Kako je m_0 ograničena, a $m \in L^2(\mathbb{T})$, to $h(\xi) := m(2\xi) m_0(\xi)$ pripada $L^2(\mathbb{T})$.

Ako je $g \in V_0$, tada je $g(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} d_k \varphi(x - k)$, za neki $\{d_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$. Tada vrijedi

$$\hat{g}(\xi) = \hat{\varphi}(\xi) \sum_{k\in\mathbb{Z}} d_k e^{-ik\xi} =: l(\xi)\hat{\varphi}(\xi),$$

gdje je l 2π-periodična funkcija iz $L^2(\mathbb{T})$. Obrat slijedi istim računom kao za V_{-1}. $\square$

Nastavimo s konstrukcijom valića ψ. Neka je $U : V_0 \to L^2(\mathbb{T})$ definiran formulom $U(f) = l$, gdje je l kao u lemi 2.2.2. U je očito linearan, štoviše, U zadovoljava

$$||Uf||^2_{L^2(\mathbb{T})} = ||l||^2_{L^2(\mathbb{T})} = 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} |d_k|^2 = 2\pi ||f||^2_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Polarizacijske nam formule daju

$$\langle f, g\rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \frac{1}{2\pi}\langle Uf, Ug\rangle_{L^2(\mathbb{T})} \forall f, g \in V_0.$$

Ako je f okomita na V_{-1}, zadnja jednakost i lema 2.2.2 govore nam da je l okomita na $m(2\cdot)m_0(\cdot)$, za sve 2π-periodične $m \in L^2(\mathbb{T})$. Stoga,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^{2\pi} l(\xi)\overline{m(2\xi)m_0(\xi)}d\xi \\ &= \int_0^{\pi} \overline{m(2\xi)}\{l(\xi)\overline{m_0(\xi)} + l(\xi+\pi)\overline{m_0(\xi+\pi)}\}d\xi, \end{aligned}$$

za sve 2π-periodične $m \in L^2(\mathbb{T})$. To jest, π-periodična funkcija u vitičastim zagradama je okomita na sve π-periodične kvadratno integrabilne funkcije, pa je $l(\xi)\overline{m_0(\xi)} + l(\xi + \pi)\overline{m_0(\xi + \pi)} = 0$ za skoro svaki $\xi \in \mathbb{T}$. Dakle, mora vrijediti

$$(l(\xi), l(\xi + \pi) = -\lambda(\xi + \pi)(\overline{m_0(\xi + \pi)}, -\overline{m_0(\xi)}) \tag{2.14}$$

za skoro svaki ξ i prikladnu $\lambda(\xi)$. Ako stavimo $\xi = \mu + \pi$, dobivamo

$$(l(\mu + \pi), l(\mu) = -\lambda(\xi + 2\pi)(\overline{m_0(\mu)}, -\overline{m_0(\mu + \pi)}),$$

zbog 2π-periodičnosti funkcija m_0 i l. No, ova je jednakost ekvivalentna jednakosti

$$(l(\xi), l(\xi + \pi) = \lambda(\xi + 2\pi)(\overline{m_0(\xi + \pi)}, -\overline{m_0(\xi)}) \tag{2.15}$$

za skoro svaki ξ. Iz (2.13) znamo da vektor

$$(\overline{m_0(\xi + \pi)}, -\overline{m_0(\xi)})$$

ima normu 1 za skoro svaki ξ. Ova činjenica, skupa s jednakostima (2.14) i (2.15), implicira $\lambda(\xi + \pi) = -\lambda(\xi + 2\pi)$, tj. $\lambda(\xi) = -\lambda(\xi + \pi)$ za skoro svaki ξ. Dakle, λ je 2π-periodična funkcija iz $L^2(\mathbb{T})$ koja zadovoljava

$$\lambda(\xi) = -\lambda(\xi + \pi), \text{ za skoro svaki } \xi \in \mathbb{T}. \tag{2.16}$$

Ovo znači da je $\lambda(\xi) = e^{i\xi}s(2\xi)$, gdje je s 2π-periodična funkcija iz $L^2(\mathbb{T})$ (dovoljno je definirati $s(\xi) = e^{-i\frac{\xi}{2}}\lambda(\frac{1}{2}\xi)$).

Iz (2.14) i (2.16) dobivamo

$$l(\xi) = e^{i\xi}s(2\xi)\overline{m_0(\xi+\pi)}, \tag{2.17}$$

gdje je s 2π-periodična iz $L^2(\mathbb{T})$. Lagano se pokaže da je potprostor prostora $L^2(\mathbb{R})$ koji sadrži sve funkcije f za koje je $\hat{f}(\xi) = l(\xi)\hat{\varphi}(\xi)$, l kao u (2.17), ortogonalni komplement potprostora V_{-1} u V_0. Ovo nam daje karakterizaciju prostora W_{-1}:

$$W_{-1} = \{f : \hat{f}(\xi) = e^{i\xi}s(2\xi)\overline{m_0(\xi+\pi)}\hat{\varphi}(\xi) \text{ za neku } 2\pi\text{-periodičnu funkciju } s \in L^2(\mathbb{T})\},$$

što daje sljedeću karakterizaciju prostora W_0:

Lema 2.2.3. *Ako je φ skalirajuća funkcija MRA $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ i m_0 pridruženi niskopropusni filter, tada*

$$W_0 = \{f : \hat{f}(2\xi) = e^{i\xi}s(2\xi)\overline{m_0(\xi+\pi)}\hat{\varphi}(\xi) \textit{ za neku } 2\pi\textit{-periodičnu funkciju } s \in L^2(\mathbb{T})\}.$$

Iz ove leme slijedi da je W_0 invarijantan na integralne translacije. Slično, imamo

$$W_j = \{f : \hat{f}(2^{j+1}\xi) = e^{i\xi}s(2\xi)\overline{m_0(\xi+\pi)}\hat{\varphi}(\xi) \text{ za neku } 2\pi\text{-periodičnu funkciju } s \in L^2(\mathbb{T})\}.$$

Ako definiramo ψ sa

$$\hat{\psi}(2\xi) = e^{i\xi}\overline{m_0(\xi+\pi)}\hat{\varphi}(\xi) \tag{2.18}$$

(tj. $s \equiv 1$ u (2.17)), tvrdimo da smo našli ortonormirani valić koji smo tražili. Dapače, svi ortonormirani valići u W_0 mogu se karakterizirati na sljedeći način:

Propozicija 2.2.4. *Neka je φ skalirajuća funkcija MRA $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ i m_0 pridruženi niskopropusni filter, tada je funkcija $\psi \in W_0 = V_1 \cap V_0^{\perp}$ ortonormirani valić za $L^2(\mathbb{R})$ ako i samo ako vrijedi*

$$\hat{\psi}(2\xi) = e^{i\xi}\nu(2\xi)\overline{m_0(\xi+\pi)}\hat{\varphi}(\xi) \tag{2.19}$$

skoro svuda na $\mathbb{R}$, za neku 2π-periodičnu izmjerivu funkciju ν tako da je

$$|\nu(\xi)| = 1 \textit{ skoro svuda na } \mathbb{T}.$$

Dokaz. Za početak, očito je $\psi \in W_0$, jer zadnja jednakost osigurava $\nu \in L^2(\mathbb{T})$. Sada, za bilo koji $g \in W_0$, po karakterizaciji iz leme 2.2.3, postoji 2π-periodična funkcija $s \in L^2(\mathbb{T})$ takva da je $\hat{g}(2\xi) = e^{i\xi}s(2\xi)\overline{m_0(\xi+\pi)}\hat{\varphi}(\xi)$. Ovo nam daje

$$\hat{g}(\xi) = \frac{s(\xi)}{\nu(\xi)}e^{i\frac{\xi}{2}}\nu(\xi)\overline{m_0(\tfrac{1}{2}\xi+\pi)}\hat{\varphi}(\tfrac{1}{2}\xi) = \frac{s(\xi)}{\nu(\xi)}\hat{\psi}(\xi) = s(\xi)\overline{\nu(\xi)}\hat{\psi}(\xi).$$

Pošto je $s\overline{v} \in L^2(\mathbb{T})$, možemo pisati $s(\xi)\overline{v(\xi)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{-ik\xi}$, za neki $\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$, i dobiti

$$g(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \psi(x-k),$$

što dokazuje da $\{\psi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ razapinje W_0. Ortonormiranost ovog sistema možemo dokazati preko propozicije 2.1.4:

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}(\xi + 2k\pi)|^2 &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\tfrac{1}{2}\xi + k\pi)|^2 |m_0(\tfrac{1}{2}\xi + k\pi + \pi)|^2 \\
&= \sum_{l\in\mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\tfrac{1}{2}\xi + 2l\pi)|^2 |m_0(\tfrac{1}{2}\xi + 2l\pi + \pi)|^2 \\
&\quad + \sum_{l\in\mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\tfrac{1}{2}\xi + 2l\pi + \pi)|^2 |m_0(\tfrac{1}{2}\xi + 2l\pi + 2\pi)|^2 \\
&= |m_0(\tfrac{1}{2}\xi + \pi)|^2 + |m_0(\tfrac{1}{2}\xi)|^2 = 1,
\end{aligned}$$

gdje smo prvo sumu razdvojili na sumiranje po parnim i neparnim cijelim brojevima, iskoristili 2π-periodičnost funkcije m_0, propoziciju 2.1.4 za funkciju φ i jednakost (2.13) za m_0.

Već smo komentirali kako iz činjenice da je $\{\psi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ ortonormirana baza za W_0 slijedi da je $\{2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j \cdot -k) : k \in \mathbb{Z}\}$ ortonormirana baza za W_j. Stoga, pomoću jednakosti (2.10), dobivamo da je ψ ortonormirani valić za $L^2(\mathbb{R})$.

Preostaje nam pokazati da su svi ortonormirani valići $\psi \in W_0$ opisani jednakosti (2.19). Za bilo koji $\psi \in W_0$, po lemi 2.2.3, postoji 2π-periodična funkcija $\nu \in L^2(\mathbb{T})$ tako da vrijedi

$$\hat{\psi}(\xi) = e^{i\frac{\xi}{2}} \nu(\xi) \overline{m_0(\tfrac{1}{2}\xi + \pi)} \hat{\varphi}(\tfrac{1}{2}\xi).$$

Ako je ψ ortonormirani valić, onda nam ortonormiranost sistema $\{\psi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ daje

$$\begin{aligned}
1 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}(\xi + 2k\pi)|^2 &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\nu(\xi)|^2 |\hat{\varphi}(\tfrac{1}{2}\xi + k\pi)|^2 |m_0(\tfrac{1}{2}\xi + k\pi + \pi)|^2 \\
&= |\nu(\xi)|^2 \Bigg(\sum_{l\in\mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\tfrac{1}{2}\xi + 2l\pi)|^2 |m_0(\tfrac{1}{2}\xi + \pi)|^2 \\
&\qquad + \sum_{l\in\mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\tfrac{1}{2}\xi + 2l\pi + \pi)|^2 |m_0(\tfrac{1}{2}\xi)|^2 \Bigg) \\
&= |\nu(\xi)|^2 \left(|m_0(\tfrac{1}{2}\xi + \pi)|^2 + |m_0(\tfrac{1}{2}\xi)|^2 \right) = |\nu(\xi)|^2 \text{ za skoro svaki } \xi \in \mathbb{T},
\end{aligned}$$

čime je dokaz gotov. □

Ovom smo propozicijom upotpunili konstrukciju valića iz MRA.

Proučimo još malo valić ψ dan relacijom (2.18). Pošto je ψ iz V_1, možemo ju prikazati kao (prebrojivu) linearnu kombinaciju translata funkcije $\varphi(2x)$. Zapravo, postoji način da koeficijenti u tom prikazu budu povezani s koeficijentima α_k koji su definirali m_0. Iz (2.18) i (2.12) dobivamo

$$\hat{\psi}(2\xi) = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \overline{\alpha_k} e^{-i(k-1)\xi)} \right) \hat{\varphi}(\xi),$$

to jest

$$\hat{\psi}(\xi) = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \overline{\alpha_k} e^{-i(k-1)\frac{1}{2}\xi)} \right) \hat{\varphi}(\tfrac{1}{2}\xi),$$

Primijenjujući inverznu Fourierovu transformaciju, dolazimo do

$$\psi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \overline{\alpha_k} \varphi(2x - (k-1)). \tag{2.20}$$

Pogledajmo jedan od najpoznatijih primjera valića, **Haarov valić**.

Primjer 2.2.5. *Haarov valić konstruira se, do na translaciju, iz MRA generirane skalirajućom funkcijom* $\varphi = \chi_{[-1,0\rangle}$. *Lako vidimo da za takvu* φ *vrijedi da je* V_j *prostor svih funkcija koje su konstante na intervalima oblika* $[2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)]$, $k \in \mathbb{Z}$. *Pošto je*

$$\tfrac{1}{2}\varphi(\tfrac{1}{2}x) = \tfrac{1}{2}\chi_{[-2,0\rangle}(x) = \tfrac{1}{2}\varphi(x) + \tfrac{1}{2}\varphi(x+1),$$

možemo iskoristiti (2.20) *kako bismo dobili*

$$\psi(x) = \varphi(2x+1) - \varphi(2x) = \chi_{[-1,-\frac{1}{2}\rangle} - \chi_{[-\frac{1}{2},0\rangle}.$$

Ovaj se rezultat mogao dobiti i direktno. Naime,

$$\tfrac{1}{2}\varphi(\tfrac{1}{2}x) = \tfrac{1}{2}\varphi(x) + \tfrac{1}{2}\varphi(x+1),$$

pa je niskopropusni filter za Haarov valić funkcija $m_0(\xi) = \frac{1}{2}(1 + e^{i\xi})$. *Jer je*

$$\hat{\varphi}(\xi) = \frac{1 - e^{i\xi}}{-i\xi} = e^{i\frac{\xi}{2}} \frac{\sin(\xi/2)}{(\xi/2)},$$

dobivamo

$$\hat{\psi}(2\xi) = e^{i\xi} \frac{1 + e^{-i(\xi+\pi)}}{2} \frac{e^{i\xi} - 1}{i\xi} = e^{i\xi} \frac{(1 - e^{-i\xi})(e^{i\xi} - 1)}{2i\xi}.$$

Dakle,

$$\hat{\psi}(\xi) = e^{i\frac{\xi}{2}} \frac{e^{i\frac{\xi}{2}} - 2 + e^{-i\frac{\xi}{2}}}{i\xi} = ie^{i\frac{\xi}{2}} \frac{\sin^2(\xi/4)}{(\xi/4)}.$$

Lako se vidi da je Fourierova transformacija funkcije $\chi_{[-1,-\frac{1}{2}\rangle} - \chi_{[-\frac{1}{2},0\rangle}$ *upravo gore dobivena funkcija.*

Prije daljnjih primjera, pokazat ćemo kako dobiti $|\hat{\varphi}|$ iz $|\hat{\psi}|$. Iz (2.12), (2.18) i (2.13) dobivamo

$$|\hat{\varphi}(2\xi)|^2 + |\hat{\psi}(2\xi)|^2 = |\hat{\varphi}(\xi)|^2 \{|m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + \pi)|^2\} = |\hat{\varphi}(\xi)|^2.$$

Iterirajući ovaj izraz, dolazimo do

$$|\hat{\varphi}(\xi)|^2 = |\hat{\varphi}(2^N \xi)|^2 + \sum_{j=1}^{N} |\hat{\psi}(2^j \xi)|^2.$$

Pošto je $|\hat{\varphi}(\xi)| \leq 1$, niz $\{\sum_{j=1}^{N} |\hat{\psi}(2^j \xi)|^2 : N = 2, 3, \cdots\}$ je rastući niz realnih brojeva ograničen s 1 pa imam limes. Zbog toga postoji i limes $\lim_{N\to\infty} |\hat{\varphi}(2^N \xi)|^2$. Štoviše,

$$\int_{\mathbb{R}} |\hat{\varphi}(2^N \xi)|^2 d\xi = \frac{1}{2N} \int_{\mathbb{R}} |\hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi \to 0, \text{ kako } N \to \infty$$

pa po Fatouovoj lemi imamo

$$\int_{\mathbb{R}} \lim_{N\to\infty} |\hat{\varphi}(2^N \xi)|^2 d\xi \leq \lim_{N\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |\hat{\varphi}(2^N \xi)|^2 d\xi = 0.$$

Ovo pokazuje da je

$$\lim_{N\to\infty} |\hat{\varphi}(2^N \xi)|^2 = 0.$$

Time smo dokazali formulu

$$|\hat{\varphi}(\xi)|^2 = \sum_{j=1}^{N} |\hat{\psi}(2^j \xi)|^2, \text{ za skoro svaki } \xi \in \mathbb{R}, \tag{2.21}$$

čime je $|\hat{\varphi}|$ izražena preko Fourierove transformacije valića.

Primjer 2.2.6. *Funkcija ψ čija Fourierova transformacija zadovoljava*

$$\hat{\psi}(\xi) = e^{i\frac{\xi}{2}}\chi_I(\xi), \text{ gdje je } I = [-2\pi, -\pi\rangle \cup \langle\pi, 2\pi],$$

zove se ***Shannonov valić****. Da bismo dokazali da je ovo valić, koristimo* (2.21) *da dobijemo skalirajuću funkciju MRA koja će dati ovaj valić. Imamo $\hat{\psi}(2^j\xi) = e^{i2^{j-1}\xi}\chi_{I_j}(\xi)$, gdje je*

$$I_j = [-2^{-j+1}\pi, --2^{-j}\pi\rangle \cup \langle 2^{-j}\pi, 2^{-j+1}\pi].$$

Pošto su I_j disjunktni, a njihova unija, po $j \geq 1$ je $[-\pi,\pi]\backslash\{0\}$, možemo uzeti $\hat{\varphi} = \chi_{[-\pi,\pi]}$. Po propoziciji 2.1.4, $\{\varphi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ je ortonormirani sistem u $L^2(\mathbb{R})$. Izaberemo V_j kao zatvorenu linearnu ljusku skupa $\{\varphi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}}\varphi(2^jx - k) : k \in \mathbb{Z}\}$, za sve $j \in \mathbb{Z}$. Tada je $\{V_j : j \in \mathbb{Z}\}$ multirezolucijska analiza ako pokažemo da je $\frac{1}{2}\varphi(\frac{1}{2}x)$ element prostora V_0, što je ekvivalentno pronalasku niskopropusnog filtera m_0 koji zadovoljava (2.12). *Pošto m_0 mora biti 2π-periodična funkcija u $L^2(\mathbb{T})$, jednakost* (2.12) *nam daje*

$$m_0(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{ako } -\frac{\pi}{2} \leq \xi < \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{ako } -\pi \leq \xi < -\frac{\pi}{2} \text{ ili } \frac{\pi}{2} \leq \xi < \pi, \end{cases}$$

što se zatim proširi po periodičnosti na $\mathbb{R}$. Iz (2.18) *možemo zaključiti da je $\hat{\psi}(\xi) = e^{i\frac{\xi}{2}}\chi_I(\xi)$.*

Za Haarov valić imali smo

$$\hat{\varphi}(\xi) = e^{i\frac{\xi}{2}}\frac{\sin(\xi/2)}{(\xi/2)} \text{ i } \hat{\psi}(\xi) = ie^{i\frac{\xi}{2}}\frac{\sin^2(\xi/4)}{(\xi/4)}.$$

Dakle, skalirajuća funkcija zadovoljavala je $\hat{\varphi}(2k\pi) = 0$, za sve $k \neq 0$, $k \in \mathbb{Z}$, a valić je zadovoljavao $\hat{\psi}(4k\pi) = 0$, za sve $k \in \mathbb{Z}$. Općenito, imamo sljedeći rezultat:

Propozicija 2.2.7. *Ako je φ skalirajuća funkcija MRA i $|\hat{\varphi}|$ neprekidna, onda je*

$$\hat{\varphi}(2k\pi) = 0, \text{ za sve } k \neq 0,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Dodatno, ako je ψ valić konstruiran iz ove skalirajuće funkcije pomoću propozicije 2.2.4 te su $|m_0|$ i $|\nu|$ neprekidne, onda vrijedi

$$\hat{\psi}(4k\pi) = 0, \text{ za sve } k \in \mathbb{Z}.$$

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. $\hat{\varphi}(2k_0\pi) \neq 0$, za neki $k_0 \in \mathbb{Z}, k_0 \neq 0$. Označimo $|\hat{\varphi}(2k_0\pi)| = a$. Tada mora vrijediti

$$|\hat{\varphi}(\xi)|^2 + |\hat{\varphi}(\xi + 2k_0\pi)|^2 > 1 + \frac{1}{2}a^2, \text{ kada je } \xi \in [-\varepsilon, \varepsilon],$$

za neki $\varepsilon > 0$, zbog neprekidnosti $|\hat{\varphi}|$ i teorema 2.1.2. No, ovo je u kontradikciji s propozicijom 2.1.4.

Da bismo pokazali drugi dio, iz (2.19) zaključujemo da je

$$|\hat{\psi}(2\xi)| = |m_0(\xi + \pi)\hat{\varphi}(\xi)| \text{ na } \mathbb{R},$$

zbog neprekidnosti $|\hat{\varphi}|$, $|m_0|$ i $|\nu|$ pa je $|\hat{\psi}(4k\pi)| = |m_0(\pi)\hat{\varphi}(2k\pi)|$, za sve $k \in \mathbb{Z}$. Međutim, iz (2.12), (2.13) te neprekidnosti funkcija $|\hat{\varphi}|$ i m_0 dobivamo da je $m_0(\pi) = 0$. Dakle, $|\hat{\psi}(4k\pi)| = 0$, za sve $k \in \mathbb{Z}$. □

Postoje primjeri valića koji nisu produkt multirezolucijske analize. Prvi je primjer dao J.L. Journé i sastoji se od funkcije ψ koja zadovoljava $|\hat{\psi}| = \chi_K$, gdje je

$$K = [-\tfrac{32}{7}\pi, -4\pi\rangle \cup [-\pi, -\tfrac{4}{7}\pi\rangle \cup \langle \tfrac{4}{7}\pi, \pi] \cup \langle 4\pi, \tfrac{32}{7}\pi].$$

U kasnijim ćemo poglavljima pokazati uvjete iz kojih će proizaći da je ovako definirana ψ zaista valić. Zasada ćemo samo prihvatiti da to vrijedi, te pogledati zašto ne može postojati MRA iz koje bi proizašao ovaj valić. Naime, u tom bi slučaju skalirajuća funkcija φ morala zadovoljavati (2.21). Iz toga bi slijedilo

$$|\hat{\varphi}(\xi)| = \begin{cases} 1 & \text{ako } 0 < \xi \leq \frac{4}{7}\pi \text{ ili } \pi \leq |\xi| \leq \frac{8}{7}\pi \text{ ili } 2\pi \leq |\xi| \leq \frac{16}{7}\pi, \\ 0 & \text{inace.} \end{cases}$$

Kada bi φ bila skalirajuća funkcija neke MRA, zadovoljavala bi propoziciju 2.1.4. No, ako označimo $I = \langle 0, \frac{2}{7}\pi\rangle$, tada je $|\hat{\varphi}(\xi)| = 1$ na I. Štoviše, za $\xi \in I$ je $2\pi < \xi + 2\pi < \frac{16}{7}\pi$, pa je i $|\hat{\varphi}(\xi + 2k\pi)| = 1$. Tada bi vrijedilo

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi + 2k\pi)|^2 \geq |\hat{\varphi}(\xi)|^2 + |\hat{\varphi}(\xi + 2\pi)|^2 = 2 \text{ za } \xi \in I,$$

što je u kontradikciji s propozicijom 2.1.4.

Veoma jednostavan uvjet koji karakterizira valiće proizašle iz MRA jest

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{j=1}^{\infty} |\hat{\psi}(2^j(\xi + 2k\pi))|^2 = 1, \text{ za skoro svaki } \xi \in \mathbb{R}. \tag{2.22}$$

Iz (2.21) i propozicije 2.1.4 odmah vidimo da je ovaj uvjet nužan. Da je uvjet (2.22) i dovoljan da bi valić ψ proizašao iz MRA je malo teže pokazati, te dokaz odgađamo za sljedeće poglavlje.

Znamo kako dobiti niskopropusni filter m_0 iz skalirajuće funkcije φ (vidjeti (2.11) i (2.12)). No, u nekim je slučajevima moguće je pronaći skalirajuću funkciju ako znamo filter. Za sada ćemo pokazati poseban slučaj, dok ćemo podrobniju analizu dati u poglavlju 2.

Za danu funkciju φ definiramo njenu **radijalnu (ili parnu) majorantu** R_φ s

$$R_\varphi(x) = \operatorname*{ess\,sup}_{|t|\geq|x|} |\varphi(t)|. \tag{2.23}$$

Pretpostavimo da radijalna majoranta pripada $L^1(\mathbb{R})$. Na primjer, za Haarov valić to je očito ispunjeno. S druge strane, nije ispunjeno za Shannonov valić, jer je tamo $|\varphi| \sim \frac{1}{|x|}$ u beskonačnosti. Zbog jednostavnosti, uzmimo $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R})$.

Primijetimo da je R_φ radijalna, padajuća na $[0, \infty\rangle$, i $|\varphi(x)| \leq R_\varphi(x)$ za skoro svaki $x \in \mathbb{R}$. Za $k \neq 0$ imamo

$$\begin{aligned}
|\alpha_k| &= \frac{1}{2}\left|\int_{\mathbb{R}} \varphi(\tfrac{1}{2}x)\overline{\varphi(x+k)}dx\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|\int_{|x|<\frac{|k|}{2}} \varphi(\tfrac{1}{2}x)\overline{\varphi(x+k)}dx + \int_{|x|\geq\frac{|k|}{2}} \varphi(\tfrac{1}{2}x)\overline{\varphi(x+k)}dx\right|.
\end{aligned}$$

Ako je $|x| < \frac{1}{2}|k|$, onda je $|x+k| > \frac{1}{2}|k|$ pa je $|\varphi(x+k)| \leq R_\varphi(\frac{1}{2}|k|)$. Za $|x| \geq \frac{1}{2}|k|$ vrijedi $|\varphi(\frac{1}{2}x)| \leq R_\varphi(\frac{1}{4}|k|)$. Stoga, jer je $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ (što proizlazi iz $R_\varphi \in L^1(\mathbb{R})$), imamo

$$\begin{aligned}
|\alpha_k| &\leq \tfrac{1}{2}R_\varphi(\tfrac{1}{2}|k|)\int_{|x|<\frac{|k|}{2}} \varphi(\tfrac{1}{2}x)dx + \tfrac{1}{2}R_\varphi(\tfrac{1}{4}|k|)\int_{|x|\geq\frac{|k|}{2}} |\varphi(x+k)|dx \\
&\leq c(\varphi)R_\varphi(\tfrac{1}{4}|k|).
\end{aligned}$$

Posljedično, imamo

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\alpha_k| \leq c(\varphi)\sum_{k\in\mathbb{Z}} R_\varphi(\tfrac{1}{4}|k|) \leq 2c(\varphi)\sum_{k=1}^{\infty}\int_{k-1}^{k} R_\varphi(\tfrac{1}{4}x)dx < \infty.$$

Kako je $m_0(\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k e^{ik\xi}$, gornjim smo raspisom dobili sljedeći rezultat:

Propozicija 2.2.8. *Ako je φ skalirajuća funkcija za MRA koja je ograničena te njena radijalna majoranta, definirana s* (2.23)*, pripada prostoru $L^1(\mathbb{R})$, tada pripadni niskopropusni filter m_0 pripada prostoru $C(\mathbb{T})$.*

Iterirajući $\hat{\varphi}(\xi) = m_0(\frac{1}{2}\xi)\hat{\varphi}(\frac{1}{2}\xi)$ dobivamo

$$\hat{\varphi}(\xi) = \hat{\varphi}(2^{-N}\xi)\prod_{j=1}^{N} m_0(2^{-j}\xi), \text{ za sve cijele brojeve } N \geq 1.$$

Pretpostavimo da je φ integrabilna. Tada je $\hat{\varphi}$ neprekidna pa je po teoremu 2.1.2 $|\hat{\varphi}(0)| = 1$. Stoga,

$$m_0(0) = \lim_{\xi\to 0}\frac{\hat{\varphi}(2\xi)}{\hat{\varphi}(\xi)} = 1.$$

Iz gornjeg slijedi da vrijedi

$$\lim_{N\to\infty}\prod_{j=1}^{N} m_0(2^{-j}\xi) = \lim_{N\to\infty}\frac{\hat{\varphi}(\xi)}{\hat{\varphi}(2^{-N}\xi)} = \frac{\hat{\varphi}(\xi)}{\hat{\varphi}(0)}.$$

Uvijek možemo pretpostaviti da je $\hat{\varphi}(0) = 1$, što ćemo i učiniti. Tada imamo sljedeći rezultat:

Propozicija 2.2.9. *Ako je φ ograničena skalirajuća funkcija za MRA, a pripadajuća radijalna majoranta R_φ pripada $L^1(\mathbb{R})$, $\hat{\varphi}(0) = 1$, tada vrijedi*

$$\hat{\varphi}(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0(2^{-j}\xi).$$

Niskopropusni filter višeg stupnja regularnosti možemo dobiti ako pretpostavimo jače uvjete na φ. Jedan od takvih uvjeta je da pretpostavimo da postoji pozitivan broj m takav da

$$\int_{-\infty}^{\infty}(1+|x|^2)^m|\varphi(x)|^2dx =: c_m < \infty. \tag{2.24}$$

Iz ovog uvjeta slijedi da vrijedi

$$\int_{|x|\geq A}|\varphi(x)|^2dx \leq \frac{c_m}{(1+A^2)^m}, \tag{2.25}$$

za sve $A > 0$. Tada, koristeći Cauchy-Schwarzovu nejednakost i činjenicu da je $\|\varphi\|_2 = 1$, dobivamo

$$\begin{aligned}
|\alpha_k| &= \frac{1}{2}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\tfrac{1}{2}x)\overline{\varphi(x+k)}dx\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|\int_{|x|<\frac{|k|}{2}}\varphi(\tfrac{1}{2}x)\overline{\varphi(x+k)}dx + \int_{|x|\geq\frac{|k|}{2}}\varphi(\tfrac{1}{2}x)\overline{\varphi(x+k)}dx\right| \\
&\leq \frac{1}{2}\sqrt{2}\left(\int_{|x|<\frac{|k|}{2}}|\varphi(x+k)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}1\left(\int_{|x|\geq\frac{|k|}{2}}|\varphi(\tfrac{1}{2}x)|^2\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Zamjenom varijabli $x + k = y$ u prvom te $\frac{1}{2}x = y$ u drugom integralu lako se vidi da je

$$|\alpha_k| \leq \frac{c'_m}{(1+|k|^2)^{\frac{m}{2}}}$$

Ako je m cijeli broj, $m > 2$, ova nejednakost implicira da niskopropusni filter m_0 pripada prostoru $C^{m-2}(\mathbb{T})$.

Za kraj ovog poglavlja, spomenimo jedan rezultat koji se tiče funkcija koje imaju polinomijalan pad. Kažemo da funkcija φ ima polinomijalan pad u $L^2(\mathbb{R})$ ako je (2.24) zadovoljeno za svaki nenegativni cijeli broj m. Za skalirajuće funkcije s tim svojstvom vrijedi sljedeći rezultat, kojeg navodimo bez dokaza:

Propozicija 2.2.10. *Ako skalirajuća funkcija φ za MRA polinomijalno pada, tada niskopropusni filter m_0 pripada prostoru $C^\infty(\mathbb{T})$. Ako je još i $\hat{\varphi}(0) = 1$, tada vrijedi*

$$\hat{\varphi}(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0(2^{-j}\xi).$$

Poglavlje 3

Karakterizacije u teoriji valića

U ovom ćemo se poglavlju baviti karakterizacijama ortonormiranih valića. Naime, umjesto direktne provjere je li neka funkcija $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ valić (dakle, čine li njene cjelobrojne translacije i diletacije ortonormiranu bazu za $L^2(\mathbb{R})$), ponekad je jednostavnije provjeriti neka druga svojstva. Tako ćemo u sekciji 3.1 pokazati nužne i dovoljne uvjete da bi funkcija ψ bila valić. U sekciji 3.2 bavimo se uvjetima u kojima je ta funkcija MRA valić, dok u sekciji 3.3 karakteriziramo skalirajuće funkcije za MRA.

3.1 Osnovne jednakosti

Kako smo spomenuli u uvodu, postoje dvije jednakosti koje karakteriziraju sve ortonormirane valiće na $L^2(\mathbb{R})$. Dokazat ćemo sljedeći rezultat:

Teorem 3.1.1. *Funkcija $\psi \in L^2(\mathbb{R})$, gdje je $\|\psi\|_2 = 1$, je ortonormirani valić ako i samo ako vrijedi*

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}(2^j\xi)|^2 = 1, \text{ za skoro svaki } \xi \in \mathbb{R} \tag{3.1}$$

i

$$\sum_{j=0}^{\infty} \hat{\psi}(2^j\xi)\overline{\hat{\psi}(2^j(\xi + 2m\pi))} = 0, \text{ za skoro svaki } \xi \in \mathbb{R}, m \in 2\mathbb{Z} + 1. \tag{3.2}$$

Napomena 3.1.2. *Sistem $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$, gdje je $\psi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j x - k)$, je ortonormiran ako i samo ako vrijedi*

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}(\xi + 2k\pi)|^2 = 1, \text{ za skoro svaki } \xi \in \mathbb{R} \tag{3.3}$$

i

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{\psi}(2^j(\xi + 2k\pi))\overline{\hat{\psi}(\xi + 2k\pi)} = 0, \text{ za skoro svaki } \xi \in \mathbb{R}, j \geq 1. \tag{3.4}$$

Dokaz ove tvrdnje je krajnje elementaran, a može se naći u [2, poglavlje 3.1].

Pretpostavka $\|\psi\|_2 = 1$ u teoremu 3.1.1 je sasvim prirodna, jer inače sistem $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$ ne bi bio normiran. No, važno je napomenuti kako jednakosti (3.1) i (3.2) bez pretpostavke o normiranosti karakteriziraju sisteme koji nisu nužno ortonormirane baze za $L^2(\mathbb{R})$, ali zadovoljavaju osnovna "analitička" i "rekonstrukcijska" svojstva ovih baza. Pokazat ćemo, zapravo, sljedeći rezultat:

Teorem 3.1.3. *Ako je $\psi \in L^2(\mathbb{R})$, sljedeće je ekvivalentno:*

(A) $\sum_{j,k\in\mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{j,k}\rangle|^2 = \|f\|^2, \forall f \in L^2(\mathbb{R}),$

(B) $f = \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k}\rangle\psi_{j,k}$, *s konvergencijom u $L^2(\mathbb{R})$, $\forall f \in L^2(\mathbb{R})$,*

(C) ψ *zadovoljava jednakosti* (3.1) *i* (3.2).

Prije dokaza teorema proći ćemo kroz nekoliko napomena i opaski.

Rezultati koje ćemo pokazati apstraktne su činjenice o općenitom Hilbertovom prostoru $\mathbb{H}$, poput ekvivalencije (A) i (B) dijela teorema 3.1.3. Jednostavnosti radi, neka je $\{e_j : j = 1, 2, \cdots\}$ familija vektora u $\mathbb{H}$. Tada ekvivalenciju (A) i (B) možemo zapisati na sljedeći način:

Teorem 3.1.4. *Neka je $\mathbb{H}$ Hilbertov prostor i $\{e_j : j = 1, 2, \cdots\}$ familija vektora u $\mathbb{H}$. Tada je ekvivalentno*

(i) $\|f\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\langle f, e_j\rangle|^2, \forall f \in \mathbb{H},$

(ii) $f = \sum_{j=1}^{\infty} \langle f, e_j\rangle e_j$, *s konvergencijom u $\mathbb{H}$, $\forall f \in \mathbb{H}$,*

Prije samog dokaza, važno je primijetiti kako u teoremu 3.1.3 imamo enumeraciju po skupu $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, dok u teoremu 3.1.4 po skupu $\mathbb{N}$. Naime, općenito se familija vektora $\{e_j : j = 1, 2, \cdots\}$ koja ima svojstvo (i) teorema 3.1.4 naziva Parsevalov bazni okvir, ili Parsevalov frame (vidi [1]. Međutim, red u (i) konvergira apsolutno, pa i bezuvjetno. Stoga, poredak vektora e_j nije važan, tako da možemo enumerirati po bilo kojem prebrojivom skupu. Dakle, teorem 3.1.4 doista jest apstraktan zapis tvrdnji (A) i (B) teorema 3.1.3.

Dokaz. Lako vidimo da (ii) povlači (i). Kako bismo pokazali da (i) povlači (ii) prvo uočimo da je

$$\{S_N\} = \left\{\sum_{j=1}^{N} \langle f, e_j \rangle e_j\right\}, N = 1, 2, \cdots,$$

Cauchyev niz. Naime, ako uzmemo $1 \leq M \leq N$, tada je

$$\begin{aligned} \|\sum_{j=M}^{N} \langle f, e_j \rangle e_j\| &= \sup_{|g| \leq 1} |\langle \sum_{j=M}^{N} \langle f, e_j \rangle e_j, g \rangle| \\ &\leq \sup_{|g| \leq 1} \sum_{j=M}^{N} |\langle f, e_j \rangle| \cdot |\langle g, e_j \rangle| \leq \left(\sum_{j=M}^{N} |\langle f, e_j \rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

jer je po (i)

$$\sum_{j=M}^{N} |\langle g, e_j \rangle|^2 \leq \|g\|^2 \leq 1.$$

Pošto je red u (i) konvergentan, njegove parcijalne sume čine Cauchyjev niz. Zbog toga je i niz $\{S_N\}$ Cauchyjev, a iz potpunosti prostora $\mathbb{H}$, slijedi da je i konvergentan. Dakle, postoji element $h \in \mathbb{H}$ tako da je

$$h = \sum_{j=1}^{\infty} \langle f, e_j \rangle e_j.$$

Primjenom poralizacijskih formula na jednakost u (i), dobivamo

$$\langle f, g \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \langle f, e_j \rangle \langle e_j, g \rangle, \forall f, g \in \mathbb{H}.$$

Konačno, koristeći zadnju jednakost

$$\langle h, g \rangle = \langle \sum_{j=1}^{\infty} \langle f, e_j \rangle e_j, g \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \langle f, e_j \rangle \langle e_j, g \rangle = \langle f, g \rangle, \forall g \in \mathbb{H}.$$

Iz toga slijedi da je $h = f$, pa smo dobili (ii). □

Sljedeći nam rezultat govori kako je teorem 3.1.1 direktna posljedica teorema 3.1.3.

Teorem 3.1.5. *Pretpostavimo da je $\{e_j : j = 1, 2, \cdots\}$ sistem vektora u Hilbertovom prostoru $\mathbb{H}$ koji zadovoljava uvjet (i) teorema 3.1.4. Ako je*

$$\|e_j\| \geq 1, \forall j = 1, 2, \cdots,$$

tada je $\{e_j : j = 1, 2, \cdots\}$ ortonormirana baza za $\mathbb{H}$.

Dokaz. Ako primijenimo jednakost (i) teorema 3.1.4 na $f = e_{j_0}$, dobivamo

$$\|e_{j_0}\|^2 = |\langle e_{j_0}, e_{j_0}\rangle|^2 + \sum_{j \neq j_0} |\langle e_{j_0}, e_j\rangle|^2.$$

To jest

$$\|e_{j_0}\|^2 \left(1 - \|e_{j_0}\|^2\right) = \sum_{j \neq j_0} |\langle e_{j_0}, e_j\rangle|^2.$$

Pošto je $\|e_{j_0}\|^2 \geq 1$, lijeva je strana gornje jednakosti nepozitivna. No, desna je strana nenegativna, tako da su obje strane jednake nuli. Zaključujemo da je $\|e_{j_0}\|^2 = 1$, te da je e_{j_0} okomit na ostale e_j. Proizvoljnost indeksa j_0 pokazuje nam da je da je čitav sistem ortonormiran. Uvjet (i) teorema 3.1.4 nam pak govori kako je riječ o bazi prostora $\mathbb{H}$, tako da je naš sistem zapravo ortonormirana baza. □

Sada ćemo dati primjer funkcije $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ koja zadovoljava (3.1) i (3.2) ali sistem $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$ nije ortonormirana baza za $L^2(\mathbb{R})$. Neka je b nenegativna parna funkcija takva da je $\{t \geq 0 : b(t) > 0\} \subseteq [\frac{1}{4}\pi, \pi]$ i

$$b^2(t) + b^2(\tfrac{1}{2}t) = 1, t \in [\tfrac{1}{2}\pi, \pi]. \tag{3.5}$$

Na primjer, možemo izabrati b da bude proizvoljno glatka funkcija na $\mathbb{R}^+$ (kao u [2, strana 37]). Nosač funkcije b sadržan je u skupu $E = [-\pi, -\frac{1}{4}\pi] \cup [\frac{1}{4}\pi, \pi]$. Ako translatiramo E za $2^j q\pi$, dobiveni skup leži u potpunosti desno (lijevo) od skupa E, ako je q pozitivan (negativan) neparan cijeli broj, a $j \geq 0$. Dakle, ako definiramo ψ preko $|\hat{\psi}| = b$, uvjet (3.2) je zadovoljen. Jednakost (3.5) nam daje uvjet (3.1). S druge strane, zbog korolara 2.2.1, sistem $\{\psi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ ne može biti ortonormiran, jer mjera nosača funkcije $\hat{\psi}$ ne prelazi $|E| = \frac{3}{2}\pi < 2\pi$. No, po teoremu 3.1.3, funkcija ψ ima osnovna svojstva (A) i (B) ortnormiranog valića.

Vratimo se sada na teorem 3.1.3. Po teoremu 3.1.4, dovoljno je pokazati ekvivalenciju (A) i (C) uvjeta. Sljedeća nam lema govori da uvjet (A) možemo i oslabiti:

Lema 3.1.6. *Pretpostavimo da je $\{e_j : j = 1, 2, \cdots\}$ sistem vektora u Hilbertovom prostoru $\mathbb{H}$ koji zadovoljava uvjet (i) teorema 3.1.4 za sve f iz nekog gustog skupa $D \subseteq \mathbb{H}$. Tada je taj uvjet zadovoljen i za sve $f \in \mathbb{H}$.*

Dokaz. Uzmimo $f \in \mathbb{H}$ i niz $\{f_n\}$ u D koji konvergira k f. Tada, za fiksni prirodni broj N, imamo

$$\sum_{j=1}^{N} |\langle f, e_j \rangle|^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{N} |\langle f_n, e_j \rangle|^2 \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |\langle f_n, e_j \rangle|^2$$
$$= \lim_{n\to\infty} \|fn\|^2 = \|f\|^2.$$

Pošto je N bio proizvoljan, vidimo da je

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\langle f, e_j \rangle|^2 \leq \|f\|^2. \tag{3.6}$$

Kako bismo dobili obratnu nejednakost, uzmimo $\varepsilon > 0$ i $g \in D$ tako da je $\|f - g\| < \varepsilon$. Tada, po nejednakosti Minkowskog u l^2, iz (3.6) i činjenice da je $\|f\| \leq \|g\| + \varepsilon$ proizlazi

$$\|f\| - 2\varepsilon \leq \|g\| - \varepsilon \leq \|g\| - \|g - f\| = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\langle g, e_j \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}} - \|g - f\|$$
$$\leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\langle g, e_j \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}} - \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\langle g - f, e_j \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\langle f, e_j \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Jer je ε bio proizvoljan, slijedi tvrdnja. □

Ostatak dokaza teorema 3.1.1 je tehnički, te ga izostavljamo. Može se pronaći u [2, sekcija 7.1].

3.2 Karakterizacija MRA valića

U ovoj ćemo sekciji pokazati nužne i dovoljne uvjete da bi valić ψ bio povezan s MRA. Za početak, objasnimo što znaci da je valić povezan s MRA.

Neka je ψ ortonormirani valić. Za $j \in \mathbb{Z}$ definiramo W_j kao zatvarač u $L^2(\mathbb{R})$ linearne ljuske skupa $\{\psi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}$. Budući da je ψ ortonormirani valić, vrijedi

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} W_j.$$

Definiramo

$$V_j = \bigoplus_{l=-\infty}^{j-1},\ j \in \mathbb{Z}.$$

Niz potprostora $\{V_j : j \in \mathbb{Z}\}$ očito zadovoljava svojstva (2.1), (2.2), (2.3) i (2.4) iz definicije MRA. Stoga, $\{V_j : j \in \mathbb{Z}\}$ će biti MRA ako postoji funkcija $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ takva da je sistem $\{\varphi(\cdot - k : k \in \mathbb{Z}\}$ ortonormirana baza za V_0. U tom slučaju kažemo da je valić ψ povezan s MRA, ili, jednostavnije, da je ψ MRA valić.

Za dani valić ψ proučavat ćemo svojstva funkcije D_ψ, koju definiramo kako slijedi

$$D_\psi(\xi) := \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}(2^j(\xi + 2k\pi))|^2. \tag{3.7}$$

Da je D_ψ dobro definirano za skoro svaki ξ, lagano proizlazi iz 2π-periodičnosti i sljedećeg računa

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} D_\psi(\xi) d\xi &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} |\hat{\psi}(2^j(\xi + 2k\pi))|^2 d\xi \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} |\hat{\psi}(2^j(\xi))|^2 d\xi \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(2^j(\xi))|^2 d\xi \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi \\
&= ||\hat{\psi}||_2^2 = 2\pi ||\psi||_2^2 = 2\pi.
\end{aligned}$$

Glavni rezultat ove sekcije je sljedeći teorem:

Teorem 3.2.1. *Valić $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ je MRA valić ako i samo ako je $D_\psi(\xi) = 1$, za skoro svaki $\xi \in \mathbb{R}$.*

Jedan smjer odmah proizlazi iz propozicije 2.1.4 i jednakosti (2.21). Naime,

$$D_\psi(\xi) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}(2^j(\xi + 2k\pi))|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi + 2k\pi)|^2 = 1.$$

Dakle, da bismo dovršili dokaz teorema 3.2.1 moramo pokazati da ako je $D_\psi(\xi) = 1$ skoro svuda, tada je ψ MRA valić. Dokaz te tvrdnje razdvajamo u nekoliko lema.

Lema 3.2.2. *Ako je ψ ortonormirani valić, tada vrijedi*

$$\hat{\psi}(2^n\xi) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{\psi}(2^n(\xi + 2k\pi)) \overline{\hat{\psi}(2^j(\xi + 2k\pi))} \hat{\psi}(2^j\xi) \text{ skoro svuda,} \tag{3.8}$$

za sve $n \in \mathbb{N}$.

Dokaz. Pokažimo prvo da je red u (3.8) dobro definiran. Koristeći Cauchy-Schwartzovu nejednakost i (3.3) dobivamo

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}(2^n(\xi+2k\pi))\overline{\hat{\psi}(2^j(\xi+2k\pi))}| \\
&\leq \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}(2^n(\xi+2k\pi))|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}(2^j(\xi+2k\pi))|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\sum_{l\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}(2^n\xi+2l\pi)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}(2^j(\xi+2k\pi))|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= 1 \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}(2^j(\xi+2k\pi))|^2\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Sumirajući po svim $j \in \mathbb{N}$ te koristeći Cauchy-Schwartzovu nejednakost i (3.1), zaključujemo

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}(2^n(\xi+2k\pi))\overline{\hat{\psi}(2^j(\xi+2k\pi))}\hat{\psi}(2^j\xi)| \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}(2^j(\xi+2k\pi))|^2\right)^{\frac{1}{2}} |\hat{\psi}(2^j\xi)| \\
&\leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}(2^j(\xi+2k\pi))|^2\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{j=1}^{\infty} \left(|\hat{\psi}(2^j\xi)|\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}(2^j(\xi+2k\pi))|^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot 1 = \sqrt{D_\psi(\xi)}
\end{aligned}
$$

Gornje su (ne)jednakosti istinite za skoro svaki $\xi \in \mathbb{R}$. Dakle, red u (3.8) je dobro definiran skoro svuda. Neka je $G_n(\xi)$ desna strana u (3.8). Da bismo pokazali da je $G_n(\xi) = \hat{\psi}(2^n\xi)$ skoro svuda, prvo ćemo pokazati da je $G_n(\xi) = G_{n-1}(2\xi)$, a potom da je $G_1(\xi) = \hat{\psi}(2\xi)$.

Koristeći (3.4), s indeksom n na mjestu indeksa j, imamo

$$\begin{aligned}
G_n(\xi) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{\psi}(2^n(\xi + 2k\pi)) \sum_{j=1}^{\infty} \overline{\hat{\psi}(2^j(\xi + 2k\pi))}\hat{\psi}(2^j\xi) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{\psi}(2^n(\xi + 2k\pi))\overline{\hat{\psi}(\xi + 2k\pi)}\hat{\psi}(\xi) \\
&\qquad + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{\psi}(2^n(\xi + 2k\pi))\overline{\hat{\psi}(\xi + 2k\pi)}\hat{\psi}(\xi) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{\psi}(2^n(\xi + 2k\pi)) \sum_{j=0}^{\infty} \overline{\hat{\psi}(2^j(\xi + 2k\pi))}\hat{\psi}(2^j\xi)
\end{aligned}$$

Po (3.2), unutarnja je suma skoro svuda jednaka nuli, čim je k neparan. S tim u vidu, supstituiramo k sa $2l$ te zaključujemo

$$\begin{aligned}
G_n(\xi) &= \sum_{l\in\mathbb{Z}} \hat{\psi}(2^n(\xi + 4l\pi)) \sum_{j=0}^{\infty} \overline{\hat{\psi}(2^j(\xi + 4l\pi))}\hat{\psi}(2^j\xi) \\
&= \sum_{l\in\mathbb{Z}} \hat{\psi}(2^{n+1}(\tfrac{\xi}{2} + 2l\pi)) \sum_{j=0}^{\infty} \overline{\hat{\psi}(2^{j+1}(\tfrac{\xi}{2} + 2l\pi))}\hat{\psi}(2^{j+1}\tfrac{\xi}{2}) \\
&= \sum_{l\in\mathbb{Z}} \hat{\psi}(2^{n+1}(\tfrac{\xi}{2} + 2l\pi)) \sum_{j=1}^{\infty} \overline{\hat{\psi}(2^{j}(\tfrac{\xi}{2} + 2l\pi))}\hat{\psi}(2^{j}\tfrac{\xi}{2}) = G_{n+1}(\tfrac{\xi}{2}).
\end{aligned}$$

Sada računamo $G_1(\xi)$. Promjenom varijabli u sumi po j dobivamo

$$\begin{aligned}
G_1(\xi) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{\psi}(2(\xi + 2k\pi)) \sum_{j=1}^{\infty} \overline{\hat{\psi}(2^j(\xi + 2k\pi))}\hat{\psi}(2^j\xi) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{\psi}(2\xi + 4k\pi) \sum_{j=0}^{\infty} \overline{\hat{\psi}(2^j(2\xi + 4k\pi))}\hat{\psi}(2^j 2\xi).
\end{aligned}$$

Sumi po k dodamo odgovarajuće sumande, sa $2k + 1$ umjesto $2k$, koji su jednaki nuli po (3.2). To nam daje

$$G_1(\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{\psi}(2\xi + 2k\pi) \sum_{j=0}^{\infty} \overline{\hat{\psi}(2^j(2\xi + 2k\pi))}\hat{\psi}(2^j 2\xi).$$

Mijenjanjući poredak sumacije te koristeći (3.4) za $j \geq 1$ i (3.3) za $j = 0$, dobivamo $G_1(\xi) = \hat{\psi}(2\xi)$. ◻

Promotrimo sada $l^2(\mathbb{Z})$. Ako je ψ ortonormirani valić, tada definiramo vektor

$$\Psi_j(\xi) = \{\hat{\psi}(2^j(\xi + 2k\pi)) : k \in \mathbb{Z}\},\ j \geq 1.$$

Za skoro svaki ξ ovaj vektor pripada prostoru $l^2(\mathbb{Z})$, jer iz (3.3) slijedi

$$\begin{aligned}
\|\Psi_j(\xi)\|_{l^2} &= \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}(2^j(\xi + 2k\pi))|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\sum_{l\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}(2^j\xi + 2l\pi)|^2\right)^{\frac{1}{2}} = 1, \text{ za skoro svaki } \xi \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Neka je $\mathbb{F}_\psi(\xi)$ zatvarač linearne ljuske skupa vektora $\{\Psi_j(\xi) : j \geq 1\}$, što je dobro definiran potprostor prostora $l^2(\mathbb{Z})$, za skoro svaki ξ. Jednakost (3.8) tada možemo zapisati koristeći novouvedene oznake:

$$\hat{\psi}(2^n\xi) = \sum_{j=1}^{\infty} \langle \Psi_n(\xi), \Psi_j(\xi) \rangle_{l^2} \hat{\psi}(2^j\xi), \text{ za skoro svaki } \xi \in \mathbb{R}.$$

Supstituirajući ξ sa $\xi + 2l\pi$, dobivamo

$$\hat{\psi}(2^n(\xi + 2l\pi)) = \sum_{j=1}^{\infty} \langle \Psi_n(\xi), \Psi_j(\xi) \rangle_{l^2} \hat{\psi}(2^j(\xi + 2l\pi)), \text{ za skoro svaki } \xi \in \mathbb{R},$$

jer je $\langle \Psi_n(\xi), \Psi_j(\xi) \rangle_{l^2}$ 2π-periodično. Zapisano vektorski, vrijedi

$$\Psi_n(\xi) = \sum_{j=1}^{\infty} \langle \Psi_n(\xi), \Psi_j(\xi) \rangle_{l^2} \Psi_j(\xi). \tag{3.9}$$

Primijetimo da se i $D_\psi(\xi)$ može izraziti preko Ψ

$$D_\psi(\xi) = \sum_{j=1}^{\infty} \|\Psi_j(\xi)\|_{l^2}^2. \tag{3.10}$$

Za daljnja razmatranja, potrebna nam je sljedeća lema:

Lema 3.2.3. *Neka je $\{v_j : j \geq 1\}$ familija vektora u Hilbertovom prostoru $\mathbb{H}$ takva da vrijedi*

(1) $\sum_{j=1}^{\infty} \|v_j\|^2 = C < \infty$ *i*

(2) $v_n = \sum_{k=1}^{\infty} \langle v_j, v_k \rangle v_k$, *za sve* $j \geq 1$.

Neka je $\mathbb{F} = \overline{\operatorname{span}}\{v_j : j \geq 1\}$. *Tada je* $\dim \mathbb{F} = \sum_{j=1}^{\infty} \|v_j\|^2 = C$

Dokaz. Pokažimo prvo da je $T : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, definiran formulom

$$Tv = \sum_{k=1}^{\infty} \langle v, v_k \rangle v_k,$$

dobro definiran linearan operator. Neka su $N, M \in \mathbb{N}$ takvi da je $M < N$. Tada imamo

$$\left\| \sum_{k=M}^{N} \langle v, v_k \rangle v_k \right\| \leq \sum_{k=M}^{N} \|\langle v, v_k \rangle v_k\| \leq \|v\| \sum_{k=M}^{N} \|v_k\|^2.$$

Po (1), posljednja suma tezi k nuli, kako $M, N \to \infty$. Kako je $\mathbb{H}$ potpun, Tv je dobro definiran element prostora $\mathbb{H}$. Linearnost operatora T je očita. Štoviše, T je ograničen operator zbog

$$\|Tv\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\langle v, v_k \rangle| \cdot \|v_k\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|v\| \cdot \|v_k\|^2 = C\|v\|.$$

Tvrdimo da je $\mathbb{F} = \operatorname{Ker}(T - I) = \operatorname{Im}(T)$. Uistinu, $\mathbb{F} \subseteq \operatorname{Ker}(T - I)$ slijedi iz uvjeta (2) i neprekidnosti operatora T, $\operatorname{Ker}(T - I) \subseteq \operatorname{Im}(T)$ vrijedi za svaki linearni operator, a $\operatorname{Im}(T) \subseteq \mathbb{F}$ slijedi iz definicije operatora T i prostora $\mathbb{F}$.

Neka je $\{e_k\}$ ortnormirana baza za $\mathbb{F}$. Jer je $e_k \in \operatorname{Ker}(T - I)$, imamo

$$\begin{aligned} C = \sum_j \|v_j\|^2 &= \sum_j \sum_k |\langle v_j, e_k \rangle|^2 = \sum_j \sum_k \langle v_j, e_k \rangle \langle e_k, v_j \rangle \\ &= \sum_k \left\langle \sum_j \langle e_k, v_j \rangle v_j, e_k \right\rangle = \sum_k \langle Te_k, e_k \rangle = \sum_k \langle e_k, e_k \rangle = \sum_k 1. \end{aligned}$$

Ovo pokazuje da je broj elemenata baze za $\mathbb{F}$ jednak C, što smo i htjeli pokazati. □

Neka je $S \subseteq \mathbb{T}$ na kojem je $D_\psi(\xi) < \infty$ i vrijedi (3.9). Tada su vektori $\Psi_j(\xi)$, $j \geq 1$, dobro definirani na S te, uz $v_j = \Psi_j(\xi)$, vrijede pretpostavke leme 3.2.3. To nam daje

$$\dim \mathbb{F}_\psi(\xi) = D_\psi(\xi) \text{ na } S. \tag{3.11}$$

Sada smo spremni dokazati dovoljnost u teoremu 3.2.1. Dakle, neka je $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ valić za koji je $D_\psi(\xi) = 1$ skoro svuda na $\mathbb{R}$. Po (3.11), za svaki $\xi \in S$, $\mathbb{F}_\psi(\xi)$ je jednodimenzionalan potprostor prostora $l^2(\mathbb{Z})$. Neka je $U(\xi)$ jedinični vektor koji razapinje $\mathbb{F}_\psi(\xi)$, izabran na sljedeći način. Za $j \geq 1$ neka je

$$E_j = \{\xi \in S : \Psi_j(\xi) \neq \vec{0} \text{ i } \Psi_m(\xi) = \vec{0} \text{ za sve } m < j\}.$$

Skupovi E_j su međusobno disjunktni i skupa s

$$E_0 = \{\xi \in \mathbb{T} : D_\psi(\xi) = 0\},$$

čine particiju skupa S. Stoga, za svaki $\xi \in S \setminus E_0$ postoji jedinstveni $j \geq 1$ takav da je $\xi \in E_j$. Jer skup E_0 ima mjeru nula, skoro svuda na S dobro je definiran jedinični vektor

$$U(\xi) = \frac{1}{\|\Psi_j(\xi)\|_{l^2}} \Psi_j(\xi),\ \xi \in E_j, \text{ za neki } j \geq 1.$$

Pišimo $U(\xi) = \{u_k(\xi) : k \in \mathbb{Z}\}$. S obzirom na ono što želimo dobiti, prirodno je nadati se da je $u_k(\xi) = \hat{\varphi}(\xi + 2k\pi)$, ako nađemo skalirajuću funkciju φ koju tražimo. Stoga, neka je

$$\hat{\varphi}(\xi) = u_k(\xi - 2k\pi), \text{ ako je } \xi \in \mathbb{T} + 2k\pi, \text{ za neki } k \in \mathbb{Z}.$$

Time smo definirali $\hat{\varphi}$ na $\mathbb{R}$. Tvrdimo da je $\hat{\varphi} \in L^2(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} \|\hat{\varphi}\|_2^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{T}} |\hat{\varphi}(\xi + 2k\pi)|^2 d\xi &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{T}} |u_k(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{\mathbb{T}} \|U(\xi)\|_{l^2}^2 d\xi = 2\pi, \end{aligned}$$

pošto je $U(\xi)$ jedinični vektor. Vrijedi i

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi + 2k\pi)|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |u_k(\xi)|^2 = \|U(\xi)\|_{l^2}^2 = 1, \text{ za skoro svaki } \xi \in \mathbb{R}, \tag{3.12}$$

što je ekvivalentno činjenici da je $\{\varphi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ ortonormiran sistem u $L^2(\mathbb{R})$, po propoziciji 2.1.4. Definiramo $V_0^\sharp$ kao zatvoreni potprostor prostora $L^2(\mathbb{R})$ razapet sistemom $\{\varphi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$. Tvrdimo da je

$$V_0^\sharp = V_0 = \bigoplus_{j<0} W_j. \tag{3.13}$$

Iz ovog će slijediti da je $\{V_j : j \in \mathbb{Z}\}$ tražena MRA.

Za svaki $j \geq 1$ postoji izmjeriva funkcija ν_j, definirana na $\mathbb{T}$, takva da je $\Psi_j = \nu_j U$, skoro svuda na $\mathbb{T}$. Komponentno,

$$\hat{\psi}(2^j(\xi + 2k\pi)) = \nu_j(\xi)\hat{\varphi}(\xi + 2k\pi), \text{ za skoro svaki } \xi \in \mathbb{T} \text{ i svaki } k \in \mathbb{Z}.$$

Stoga, po (3.12), za skoro svaki $\xi \in \mathbb{T}$ vrijedi

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}(2^j(\xi + 2k\pi))|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\nu_j(\xi)|^2 |\hat{\varphi}(\xi + 2k\pi)|^2 = |\nu_j(\xi)|^2, \tag{3.14}$$

što pokazuje da je $\nu_j \in L^2(\mathbb{T})$ s normom $\|\nu_j\|^2_{L^2(\mathbb{T})} = 2^{-j}(2\pi)$. Zapišimo Fourierov red funkcije ν_j kao

$$\nu_j(\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k^j e^{-ik\xi}, \text{ za skoro svaki } \xi \in \mathbb{T},$$

s konvergencijom u $L^2(\mathbb{T})$ i $\{a_k^j\}_{k\in\mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$. Proširimo li ν_j po 2π-periodičnosti na $\mathbb{R}$, dobivamo

$$\hat{\psi}(2^j\xi) = \nu_j(\xi)\hat{\varphi}(\xi), \text{ za skoro svaki } \xi \in \mathbb{T} \text{ i svaki } j \geq 1. \tag{3.15}$$

Djelujući inverznom Fourierovom transformacijom na gornju jednakost, imamo

$$\psi_{-j,0}(x) = 2^{-\frac{j}{2}}\psi(2^{-j}x) = 2^{\frac{j}{2}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k^j \varphi(x - k), \; j \geq 1.$$

Stoga je $\psi_{-j,0} \in V_0^\sharp$, za $j \geq 1$. Kako je $V_0^\sharp$ invarijantan na cjelobrojne translacije, to je $\psi_{-j,k} \in V_0^\sharp$, za sve $k \in \mathbb{Z}$ i $j \geq 1$. Dakle, $W_{-j} \subseteq V_0^\sharp$ za sve $j \geq 1$, pa je i $V_0 \subseteq V_0^\sharp$.

Preostaje nam pokazati $V_0^\sharp \subseteq V_0$. Dovoljno je pokazati da je φ okomita na W_j, za sve $j \geq 0$. Naime, pošto je W_j invarijantan na cjelobrojne translacije, zamjenom varijabli lagano dobivamo da su i $\varphi(\cdot - k)$ okomite na W_j, za svaki $k \in \mathbb{Z}$. Iz toga slijedi da je i čitav $V_0^\sharp$ okomit na sve W_j, $j \geq 0$, pa je $V_0^\sharp \subseteq V_0$.

Za $j \geq 0$ i $l \in \mathbb{Z}$, koristeći Plancherelov teroem, zamjenu varijabli i periodizaciju, pišemo

$$\begin{aligned} 2\pi\langle\varphi, \psi_{j,l}\rangle = \langle\hat{\varphi}, (\psi_{j,l})^\wedge\rangle &= 2^{-\frac{j}{2}} \int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(\xi)\overline{\hat{\psi}(2^{-j}\xi)} e^{i2^{-j}l\xi} d\xi \\ &= 2^{\frac{j}{2}} \int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(2^j\xi)\overline{\hat{\psi}(\xi)} e^{il\xi} d\xi \\ &= 2^{\frac{j}{2}} \int_{\mathbb{T}} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{\varphi}(2^j(\xi + 2k\pi))\overline{\hat{\psi}(\xi + 2k\pi)} \right) e^{il\xi} d\xi. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Iz (3.14) i pretpostavke da je $D_\psi(\xi) = 1$ skoro svuda, dobivamo

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\nu_j(\xi)|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\hat{\psi}(2^j(\xi + 2k\pi))|^2 = 1, \text{ za skoro svaki } \xi \in \mathbb{R}.$$

Dakle, za takve ξ i za svaki $j \geq 0$ postoji $j_0 = j_0(2^j\xi)$ takav da je $\nu_{j_0}(2^j\xi) \neq 0$. Ovo, zajedno s (3.15) daju, za takve ξ,

$$\hat{\varphi}(2^j(\xi + 2k\pi)) = \frac{1}{\nu_{j_0}(2^j\xi)} \hat{\psi}(2^{j+j_0}(\xi + 2k\pi)), k \in \mathbb{Z}.$$

Sada iskoristimo (3.4) kako bismo dobili

$$\begin{aligned}
&\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{\varphi}(2^j(\xi + 2k\pi))\overline{\hat{\psi}(\xi + 2k\pi)} \\
&= \frac{1}{\nu_{j_0}(2^j\xi)} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{\psi}(2^{j+j_0}(\xi + 2k\pi))\overline{\hat{\psi}(\xi + 2k\pi)} = 0,
\end{aligned}$$

za skoro svaki $\xi \in \mathbb{T}$ i sve $j \geq 0$. Uvrstimo li dobiveno u (3.16), te koristeći neprekidnost skalarnog produkta, dobivamo traženu ortogonalnost.

Propozicija 3.2.4. *Neka je ψ ortonormirani valić na $L^2(\mathbb{R})$. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

(1) *ψ je MRA valić,*

(2) $D_\psi(\xi) = 1$ *za skoro svaki* $\xi \in \mathbb{T}$,

(3) $D_\psi(\xi) > 0$ *za skoro svaki* $\xi \in \mathbb{T}$,

(4) $\dim \mathbb{F}_\psi(\xi) = 1$, *za skoro svaki* $\xi \in \mathbb{T}$.

Dokaz. Ekvivalenciju među tvrdnjama (1), (2) i (4) već imamo. Kako iz (2) očito slijedi (3), dovoljno je samo pokazati da (3) povlači (2). Kako $D_\psi(\xi)$ poprima samo cjelobrojne vrijednosti te je nenegativna skoro svuda i 2π-periodična, iz $\int_0^{2\pi} D_\psi(\xi)d\xi = 2\pi$, što smo pokazali na početku sekcije, zaključujemo da je $D_\psi(\xi) = 1$ skoro svuda. □

Navedimo i rezultat o aproksimaciji valića MRA valićima:

Teorem 3.2.5. *Pretpostavimo da niz MRA valića $\{\psi^{(n)} : n = 1, 2, \cdots\}$ konvergira k ψ u $L^2(\mathbb{R})$. Ako je i ψ valić, tada je ψ MRA valić.*

Dokaz. Raspis kao na početku ove sekcije nam daje

$$\int_{\mathbb{T}} D_{\psi^{(n)}-\psi}(\xi)d\xi = 2\pi\|\psi^{(n)} - \psi\|_2^2.$$

Kako, prema pretpostavci teorema, desna strana ove jednakosti tezi k nuli, kada $n \to \infty$, po Fatouovoj lemi imamo

$$\liminf_{n\to\infty} D_{\psi^{(n)}-\psi}(\xi) = 0, \text{ za skoro svaki } \xi \in \mathbb{T}.$$

Iz (3.10) vidimo da za $\sqrt{D_\psi(\xi)}$ vrijedi svojevrsna nejednakost trokuta, pa imamo

$$\sqrt{D_\psi(\xi)} \leq \sqrt{D_{\psi^{(n)}-\psi}(\xi)} + \sqrt{D_{\psi^{(n)}}(\xi)}.$$

Kako je $\psi^{(n)}$ MRA valić, imamo

$$\sqrt{D_\psi(\xi)} \leq \sqrt{D_{\psi^{(n)}-\psi}(\xi)} + 1.$$

Uzimajući $\liminf_{n\to\infty}$, vidimo da je $\sqrt{D_\psi(\xi)} \leq 1$. No, kako $D_\psi(\psi)$ poprima samo nenegativne cjelobrojne vrijednosti, te je $\int_{\mathbb{T}} D_\psi(\xi)d\xi = 0$, zaključujemo da je $D_\psi(\xi) = 1$ skoro svuda na $\mathbb{T}$. Preostaje primijeniti propoziciju 3.2.4. □

3.3 Karakterizacija skalirajućih funkcija

Karakterizirali smo sve ortonormirane valiće s dvije osnovne jednakosti (3.1) i (3.2) u sekciji 3.1, dok smo u sekciji 3.2 prikazali karakterizaciju svih valića koji proizlaze iz MRA (teorem 3.2.1). Prirodno je postaviti pitanje kako karakterizirati one funkcije koje su skalirajuće funkcije neke MRA.

Trebamo jasno naznaciti što mislimo kad kazemo da je funkcija skalirajuća funkcija neke MRA. Za danu $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$, definiramo zatvorene potprostore V_j, $j \in \mathbb{Z}$, kao

$$V_j = \begin{cases} \overline{\text{span}}\{\varphi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}, & \text{ako je } j = 0, \\ \{f : f(2^{-j}\cdot) \in V_0\}, & \text{ako je } j \neq 0. \end{cases} \tag{3.17}$$

Kažemo da je $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ skalirajuća funkcija za MRA ako niz zatvorenih potprostora $\{V_j : j \in \mathbb{Z}\}$ danih u (3.17) čini MRA za $L^2(\mathbb{R})$, te je $\{\varphi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ ortonormirana baza za V_0.

Teorem 3.3.1. *Funkcija φ je skalirajuća funkcija za MRA ako i samo ako vrijedi*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi + 2k\pi)|^2 = 1, \text{ za skoro svaki } \xi \in \mathbb{T}, \tag{3.18}$$

$$\lim_{j\to\infty} |\hat{\varphi}(2^{-j}\xi)| = 1, \text{ za skoro svaki } \xi \in \mathbb{R}, \tag{3.19}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{postoji } 2\pi\text{-periodična funkcija } m_0 \text{ takva da je} \\ \hat{\varphi}(2\xi) = m_0(\xi)\hat{\varphi}(\xi), \text{ za skoro svaki } \xi \in \mathbb{R}. \end{array}\right\} \tag{3.20}$$

Dokaz. Pretpostavimo da je φ skalirajuća funkcija za MRA kako je definirano u sekciji 2.1. Tada je $\{\varphi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ ortonormiran sistem u $L^2(\mathbb{R})$, pa (3.18) vrijedi po propoziciji 2.1.4. Uvjet (3.20) je zapravo jednakost (2.12) poglavlja 2. Budući je $\{V_j : j \in \mathbb{Z}\}$ MRA za $L^2(\mathbb{R})$, mora vrijediti zaključak koji smo dobili nakon dokaza teorema 2.1.2, koji glasi

$$\lim_{j\to\infty} \frac{1}{2^{-j+1}} \int_{-2^{-j}}^{2^{-j}} |\hat{\varphi}(\mu)|^2 d\mu = 1.$$

Zamjena varijabli $\mu = 2^{-j}\xi$ pokazuje da vrijedi

$$\lim_{j\to\infty} \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} |\hat{\varphi}(2^{-j}\xi)|^2 d\xi = 1.$$

Jer je $|m_0(\xi)| \leq 1$ za skoro svaki $\xi \in \mathbb{R}$ (po (2.13) u poglavlju 2), iz jednakosti $\hat{\varphi}(2\xi) = m_0(\xi)\hat{\varphi}(\xi)$ zaključujemo da $|\hat{\varphi}(2^{-j}\xi)|$ ne pada kako $j \to \infty$, za skoro svaki $\xi \in \mathbb{R}$. Neka je

$$g(\xi) = \lim_{j\to\infty} |\hat{\varphi}(2^{-j}\xi)|.$$

Činjenica da je $|\hat{\varphi}(\xi)| \leq 1$ skoro svuda (kao posljedica (3.18)) nam, zajedno s Lebesgueovim teoremom o dominiranoj konvergenciji, daje

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^{1} g(\xi) d\xi = 1,$$

pa (3.19) slijedi, jer je $0 \leq g(\xi) \leq 1$ za skoro svaki $\xi \in \mathbb{R}$.

Pretpostavimo sada da vrijede (3.18), (3.19) i (3.20). Ortonormiranost sistema $\{\varphi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ slijedi direktno iz (3.18) i propozicije 2.1.4. To nam, zajedno s definicijom potprostora V_0 iz (3.17), daje (2.5) iz poglavlja 2 u definiciji MRA.

Definicija potprostora V_j dana u (3.17) očito pokazuje da je ispunjen i uvjet (2.2) poglavlja 2. Dodatno, tvrdimo da za svaki $j \in \mathbb{Z}$ vrijedi

$$V_j = \{f : \hat{f}(2^j\xi) = \mu_j(\xi)\hat{\varphi}(\xi), \text{ za neku } 2\pi\text{-periodičnu funkciju } \mu_j \in L^2(\mathbb{T})\}. \tag{3.21}$$

Ta se tvrdnja lagano dobije tako da izrazimo $f(2^{-j}\cdot) \in V_0$ kao linearnu kombinaciju funkcija $\varphi(\cdot - k)$, $k \in \mathbb{Z}$, te primijenimo Fourierovu transformaciju. Koristeći (3.20), (3.18) i 2π-periodičnost funkcije m_0, imamo

$$\begin{aligned}
1 &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(2\xi + 2k\pi)|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |m_0(\xi + k\pi)|^2 |\hat{\varphi}(\xi + k\pi)|^2 \\
&= |m_0(\xi)|^2 \sum_{l\in\mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi + 2l\pi)|^2 + |m_0(\xi + \pi)|^2 \sum_{l\in\mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi + 2(l+1)\pi)|^2 \\
&= |m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + \pi)|^2, \text{ za skoro svaki } \xi \in \mathbb{T}.
\end{aligned}$$

Posebno, ovo pokazuje da je $|m_0(\xi)| \geq 1$ skoro svuda na $\mathbb{T}$. Svojstvo (2.1) iz poglavlja 2 slijedit će čim pokažemo da je $V_0 \subset V_1$. Po (3.21), za dani $f \in V_0$ postoji 2π-periodična funkcija $\mu_0 \in L^2(\mathbb{T})$ takva da je $\hat{f}(\xi) = \mu_0(\xi)\hat{\varphi}(\xi)$. Stoga, koristeći (3.20), vrijedi

$$\hat{f}(2\xi) = \mu_0(2\xi)\hat{\varphi}(2\xi) = \mu_0(2\xi)m_0(\xi)\hat{\varphi}(\xi).$$

Jer je m_0 ograničena na $\mathbb{T}$ i 2π-periodična, očito je $\mu_0(2\xi)m_0(\xi)$ 2π-periodična funkcija iz prostora $L^2(\mathbb{T})$. Ponovno koristeći (3.21), imamo $f \in V_1$.

Teorem 2.1.1 nam kaže da svojstvo (2.3) poglavlja 2 slijedi iz svojstava (2.1), (2.2) i (2.5). Preostaje nam pokazati da vrijedi svojstvo (2.4) iz definicije MRA, tj. da vrijedi

$$L^2(\mathbb{R}) = \overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j}. \tag{3.22}$$

Neka je P_j ortogonalni projektor na V_j. Kako je $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ sistem rastućih potprostora, dovoljno je pokazati da za svaku $f \in L^2(\mathbb{R})$ vrijedi

$$\|P_j f - f\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \|P_j f\|_2^2 \to 0, \text{ kako } j \to \infty.$$

Dodatno, možemo pretpostaviti da je f takva da $\hat{f}$ ima kompaktan nosač, jer je funkcije s kompaktnim nosačem čine gust podskup prostora $L^2(\mathbb{R})$, a operator $f \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\hat{f}$ je unitaran. Tada funkcije f, za koje $\hat{f}$ ima kompaktan nosač, čine gust potprostor prostora $L^2(\mathbb{R})$, pa je tvrdnju dovoljno pokazati samo za takve funkcije f. Kako je $\{2^{\frac{j}{2}}\varphi(2^j \cdot -k) : k \in \mathbb{Z}\}$

ortonormirana baza za V_j i, za velike j $\hat{f}(2^j\cdot)$ ima nosač sadržan u $[-\pi, \pi]$, to je

$$\begin{aligned}
\|P_j f\|_2^2 &= 2^{-j} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left| \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{\varphi(2^j t - k)} 2^j dt \right|^2 \\
&= 2^{-j} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left| \int_{\mathbb{R}} f(2^{-j}t)\overline{\varphi(t - k)} dt \right|^2 \\
&= 2^{j} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(2^j\xi)\overline{\hat{\varphi}(\xi)} e^{ik\xi} d\xi \right|^2 \\
&= \frac{2^j}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\hat{f}(2^j\xi)\hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-2^j\pi}^{2^j\pi} |\hat{f}(\eta)\hat{\varphi}(2^{-j}\eta)|^2 d\eta.
\end{aligned}$$

Ali,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-2^j\pi}^{2^j\pi} |\hat{f}(\eta)|^2 |\hat{\varphi}(2^{-j}\eta)|^2 d\eta \to \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\eta)|^2 d\eta = \|f\|_2^2, \tag{3.23}$$

kako $j \to \infty$, po Lebesgueovom teoremu o dominiranoj konvergenciji i (3.19). □

Napomena 3.3.2. *Karakterizacija dana u teoremu 3.3.1 nam govori da ako je φ skalirajuća funkcija za MRA, onda je i $\varphi^\sharp$, definirana preko $\widehat{\varphi^\sharp}(\xi) = |\hat{\varphi}(\xi)|$, također skalirajuća funkcija za MRA u $L^2(\mathbb{R})$.*

Za kraj, pokažimo na primjeru Shannonovog valića kako nam teorem 3.3.1 može biti od velike koristi. Naime, za funkciju

$$\varphi(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

znamo da vrijedi $\hat{\varphi}(\xi) = \chi_{[-\pi,\pi]}(\xi)$. Provjera uvjeta teorema 3.3.1 je trivijalna.

Poglavlje 4

Diskretne transformacije

U prošlim smo poglavljima proučavali funkcije definirane na čitavom skupu $\mathbb{R}$. No, u proučavanju signala (i mnogih drugih problema), često se susrećemo samo s podacima reprezentiranima samo s konačno mnogo vrijednosti. Stoga je važno proučiti kako primijeniti razvijenu teoriju na te "diskretne funkcije". Opisat ćemo algoritme za dekompoziciju i rekonstrukciju podataka bazirane na valićima. Konačno, u sekciji 4.2 spomenut ćemo načine dobivanja novih, boljih baza za $L^2(\mathbb{R})$ koje su dobivene korištenjem tzv. "valićnih paketa".

4.1 Valićni algoritmi za dekompoziciju i rekonstrukciju

MRA metoda može se lagano primijeniti na analizu slika. Prostore V_j možemo shvatiti kao prostore u kojima imamo aproksimaciju slike na j-tom nivou. Aproksimacija daje zamućenu sliku kada je j malen, a sve čišću kako j raste. Dodatno, "detalji" aproksimacije iz prostora V_j, koji nisu u V_{j-1}, "spremljeni" su u prostorima W_{j-1} koji zadovoljavaju jednakost $V_j = V_{j-1} \oplus W_{j-1}$. Struktura prostora V_j, vezana uz diletacije i translacije, naslijeđena je i u prostorima W_j. Ovo dovodi do efikasnih algoritama za dekompoziciju i rekonstrukciju, koje ćemo podrobnije opisati u jednodimenzionalnom slučaju.

Neka je f funkcija definirana na $\mathbb{R}$ (koju možemo smatrati npr. zvučnim signalom). Izaberemo MRA sa skalirajućom funkcijom φ i valićem ψ, danim propozicijom 2.2.4, s $\nu \equiv 1$. Ortogonalni projektori $P_j : L^2(\mathbb{R}) \to V_j$, $j \in \mathbb{Z}$, dani su formulom

$$P_j f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{j,k} \rangle \varphi_{j,k}(x).$$

Obzirom da $\lim_{j\to\infty} P_j f = f$, u $L^2(\mathbb{R})$ normi, možemo izabrati J tako da $P_j f$ dovoljno dobro aproksimira f (ovaj će izbor, naravno, ovisiti o konkretnoj primjeni i odabranoj MRA). Dakle, imamo koeficijente

$$c_{j,k} = \langle f, \varphi_{j,k} \rangle,\ j,k \in \mathbb{Z},$$

te ono što želimo napraviti je dekomponirati niz

$$\mathbf{c}^j = \{c_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}, \tag{4.1}$$

koji pripada prostoru $l^2(\mathbb{Z})$, na aproksimaciju iz prostora niže rezolucije V_{j-1} i detalje iz prostora W_{j-1}.

Prije nastavka opisa dekompozicijskog algoritma, spomenimo kako način na koji se koeficijenti vektora $\mathbf{c}^j$ računaju nije dio algoritma. S druge strane, u numeričkim primjenama funkcija f već je dana kao (konačan) niz uzoraka. U tom se slučaju uzorci mogu shvatiti kao koeficijenti projekcije na prostor V_j povezan s MRA, prikladnom za konkretnu primjenu. Skica algoritma za biranje najbolje baze bit će dana u sekciji 4.2.

Nastavimo sada s dekompozicijskim algoritmom. Koristimo filtere $m_0(\xi)$ i $m_1(\xi) = e^{i\xi}\overline{m_0(\xi+\pi)}$ uvedene u sekciji 2.1. Prisjetimo se da je $\frac{1}{2}\varphi(\frac{(\cdot)}{2}) \in V_{-1} \subset V_0$, pa vrijedi

$$\tfrac{1}{2}\varphi(\tfrac{1}{2}x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n \varphi(x+n), \tag{4.2}$$

gdje je

$$\alpha_n = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \varphi(\tfrac{1}{2}x)\overline{\varphi(x+n)}dx, \tag{4.3}$$

te

$$m_0(\xi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n e^{in\xi}. \tag{4.4}$$

Jednakost (4.2) lako poopćavamo s V_{-1} i V_0 na V_{j-1} i V_j, $j \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}\varphi_{j-1,k}(x) &= 2^{\frac{1}{2}(j-1)}\varphi(2^{j-1}x-k) = 2^{\frac{1}{2}(j+1)}\varphi(\tfrac{1}{2}(2^jx-2k)) \\ &= 2^{\frac{1}{2}(j+1)}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n \varphi(2^jx-2k+n).\end{aligned}$$

To jest,

$$\varphi_{j-1,k}(x) = \sqrt{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n \varphi_{j,2k-n}(x),\ j,k \in \mathbb{Z}. \tag{4.5}$$

Slično, $\frac{1}{2}\psi(\frac{(\cdot)}{2}) \in W_{-1} \subset V_0$ pa vrijedi

$$\tfrac{1}{2}\psi(\tfrac{1}{2}x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \beta_n \varphi(x+n), \tag{4.6}$$

i

$$\psi_{j-1,k}(x) = \sqrt{2} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \beta_n \varphi_{j,2k-n}(x),\ j,k \in \mathbb{Z}. \tag{4.7}$$

Štoviše, koeficijenti β_n povezani su s koeficijentima α_n. Uzimajući Fourierovu transformaciju u jednakosti (4.6), dobivamo $\hat{\psi}(2\xi) = m_1(\xi)\hat{\varphi}(\xi)$, gdje je

$$m_1(\xi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \beta_n e^{in\xi},$$

a izbor valića ψ nam daje

$$m_1(\xi) = e^{i\xi}\overline{m_0(\xi+\pi)}$$

(po propoziciji 2.2.4). Iz toga slijedi

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \beta_n e^{in\xi} &= m_1(\xi) = e^{i\xi}\overline{m_0(\xi+\pi)} = e^{i\xi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{\alpha_n} e^{-in(\xi+\pi)} \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{\alpha_n}(-1)^n e^{i(1-n)\xi} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^{n+1}\overline{\alpha_{1-n}} e^{in\xi}.\end{aligned}$$

Dakle,

$$\beta_n = (-1)^{n+1}\overline{\alpha_{1-n}}, \tag{4.8}$$

pa koeficijenti β_n ne zahtijevaju dodatno računanje.

Uvrstimo sada (4.5) u definiciju koeficijenta $c_{j-1,k}$ kako bismo dobili

$$\begin{aligned}c_{j-1,k} &= \langle f, \varphi_{j-1,k}\rangle = \left\langle f,\ \sqrt{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n \varphi_{j,2k-n}\right\rangle \\ &= \sqrt{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{\alpha_n} c_{j,2k-n}.\end{aligned} \tag{4.9}$$

Ovo pokazuje da se koeficijenti $c_{j-1,k}$ niže rezolucije V_{j-1} mogu dobiti preko koeficijenata $c_{j,l}$ više rezolucije V_j i niskopropusnog filtera. Za fiksni j, desna je strana u (4.9) konvolucija nizova

$$\tilde{\alpha}_n = \sqrt{2}\,\overline{\alpha_n} \text{ i } \tilde{c}_n = c_{j,n},$$

ali zadržavajući samo parne indekse. Stoga, ako bi postojalo N značajnih komponenti niza $\mathbf{c}^j$, (4.9) nam kaže kako da izračunamo zamućenu rezoluciju sa približno $\frac{1}{2}N$ komponenti.

Ostatak komponenti, u kojima su sadržani detalji prelaska s v_{j-1} na V_j, nalaze se u W_{j-1}. Preciznije,

$$D_j f(x) := P_j f(x) - P_{j-1} f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} d_{j-1,k}\psi_{j-1,k}(x),$$

gdje je $d_{j-1,k} = \langle f, \psi_{j-1,k}\rangle$. Koristeći (4.7), dobivamo

$$d_{j-1,k} = \left\langle f,\ \sqrt{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\beta_n\varphi_{j,2k-n}\right\rangle = \sqrt{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\overline{\beta_n}c_{j,2k-n}. \tag{4.10}$$

Kao i prije, zadnji je izraz konvolucija, praćena zadržavanjem samo parnih indeksa. Dakle, dekomponirali smo niz $\mathbf{c}^j$ na nizove $\mathbf{c}^{j-1}$ i $\mathbf{d}^{j-1}$. Proces možemo nastaviti s nizom $\mathbf{c}^{j-1}$ i tako dobivamo dekomponirajući algoritam. Algoritam staje nakon M koraka, kada komponente niza $\mathbf{c}^{j-M}$ padnu u neki unaprijed određeni raspon.

Ako uzmemo u obzir samo N komponenti početnog niza $\mathbf{c}^j$, tada dobivamo približno $\frac{1}{2}N$ komponenti u $\mathbf{d}^{j-1}$, $\frac{1}{4}N$ komponenti u $\mathbf{d}^{j-2}$ itd. Konačno, u $\mathbf{c}^{j-M}$ nam ostaje $2^{-M}N$ komponenti, nakon M koraka. Vidimo da je količina podataka koju imamo na kraju algoritma jednaka početnoj

$$\left(\frac{N}{2} + \frac{N}{4} + \cdots + \frac{N}{2^M}\right) + \frac{N}{2^M} = N.$$

Primjer 4.1.1. *Pogledajmo sada kako opisani algoritam radi s Haarovim valićem. Uzmimo*

$$\psi(x) = \chi_{[-1,-\frac{1}{2}\rangle}(x) - \chi_{[-\frac{1}{2},0\rangle}(x) \text{ i } \varphi(x) = \chi_{[-1,0\rangle}(x),$$

kako bismo bili konzistentni s primjerom 2.2.5. Tada vrijedi

$$\tfrac{1}{2}\varphi(\tfrac{1}{2}x) = \tfrac{1}{2}\varphi(x) + \tfrac{1}{2}\varphi(x+1),$$

i

$$\tfrac{1}{2}\psi(\tfrac{1}{2}x) = \tfrac{1}{2}\varphi(x+1) - \tfrac{1}{2}\varphi(x).$$

Dakle,

$$\alpha_n = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{ako je } n \in \{0,1\}, \\ 0 & \text{inace,} \end{cases}$$

i

$$\beta_n = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & \text{ako je } n = 0, \\ \frac{1}{2}, & \text{ako je } n = 1, \\ 0 & \text{inace.} \end{cases}$$

Iz (4.9) *vidimo da vrijedi*

$$c_{j-1,k} = \sqrt{2}\left\{\frac{c_{j,2k} + c_{j,2k-1}}{2}\right\},$$

a iz (4.10)

$$d_{j-1,k} = \sqrt{2}\left\{\frac{c_{j,2k-1} - c_{j,2k}}{2}\right\}.$$

Dakle, do na faktor $\sqrt{2}$*, koeficijenti* $c_{j-1,k}$ *su aritmetičke sredine susjednih dviju komponenti niza* $\mathbf{c}^j$*, a detalji* $d_{j-1,k}$ *su polovice razlika susjednih dviju komponenti niza* $\mathbf{c}^j$*.*

Analizirajmo sada problem rekonstruiranja niza $\mathbf{c}^j$ iz nizova $\mathbf{d}^{j-1}, \mathbf{d}^{j-2}, \cdots, \mathbf{d}^{j-M}$ i $\mathbf{c}^{j-M}$. Za početak, razmotrimo rekonstrukciju niza $\mathbf{c}^j$ iz nizova $\mathbf{d}^{j-1}$ i $\mathbf{c}^{j-1}$. Kako je

$$P_j f = P_{j-1} f + D_{j-1} f,$$

koristimo (4.5) i (4.7) kako bismo dobili

$$\begin{aligned}
\sum_{l\in\mathbb{Z}} c_{j,l}\varphi_{j,l}(x) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_{j-1,k}\varphi_{j-1,k}(x) + \sum_{k\in\mathbb{Z}} d_{j-1,k}\psi_{j-1,k}(x) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_{j-1,k}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \sqrt{2}\alpha_n\varphi_{j,2k-n}(k)\right) \\
&\quad + \sum_{k\in\mathbb{Z}} d_{j-1,k}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \sqrt{2}\beta_n\varphi_{j,2k-n}(k)\right) \\
&= \sum_{l\in\mathbb{Z}}\left\{\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left[\sqrt{2}c_{j-1,k}\alpha_{2k-l} + \sqrt{2}d_{j-1,k}\beta_{2k-l}\right]\right\}\varphi_{j,l}(x).
\end{aligned}$$

Dakle, vrijedi formula

$$c_{j,l} = \sqrt{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left[c_{j-1,k}\alpha_{2k-l} + d_{j-1,k}\beta_{2k-l}\right]. \tag{4.11}$$

Na temelju toga, lako dobijemo algoritam koji iz koeficijenata $\mathbf{c}^{j-M}$ i detalja $\mathbf{d}^{j-M}, \mathbf{d}^{j-M+1}, \cdots, \mathbf{d}^{j-1}$ rekonstruira niz $\mathbf{c}^j$. Naime, po gore opisanom principu, samo s $j-M+1$ u ulozi j, rekonstruiramo $\mathbf{c}^{j-M+1}$ iz $\mathbf{c}^{j-M}$ i $\mathbf{d}^{j-M}$. Dalje nastavljamo induktivno. Primijetimo da je svaki pribrojnik u (4.11) konvolucija. Da to pokažemo, za fiksni j pogledajmo nizove

$$\tilde{c}_n = \begin{cases} c_{j-1,\frac{n}{2}}, & \text{ako je } n \text{ paran,} \\ 0 & \text{inace,} \end{cases}$$

i $\tilde{\alpha}_n = \sqrt{2}\alpha_{-n}$. Tada je

$$(\tilde{c} * \tilde{\alpha})_l = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \tilde{c}_n \tilde{\alpha}_{l-n} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \tilde{c}_{2k} \tilde{\alpha}_{l-2k} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_{j-1,k} \sqrt{2}\alpha_{2k-l}.$$

Dakle, svaki korak algoritma zahtijeva proširivanje nizova **c** i **d** nulama, te njihovu konvoluciju s koeficijentima filtera α i β.

Proučimo sada složenost algoritam dekomponiranja, složenost algoritma rekonstruiranja dobije se slično. Pretpostavimo da niz $\{\alpha_k : k \in \mathbb{Z}\}$ ima samo K ne-nul elemenata. Po (4.8), isto vrijedi i za niz $\{\beta_k : k \in \mathbb{Z}\}$. U tom slučaju, filtere nazivamo *konačnim impulsno-responzivnim* filterima. Ako $\mathbf{c}^j$ ima N ne-nul komponenti, onda $\mathbf{c}^{j-1}$ ima približno $\frac{1}{2}N$ ne-nul komponenti, pa po (4.9) trebamo obaviti $\frac{1}{2}KN$ množenja. Slično, iz (4.8) i (4.10) slijedi da nam za $\mathbf{d}^{j-1}$ također treba približno $\frac{1}{2}KN$ množenja. Nastavljajući algoritam, dobivamo

$$\left(K\frac{N}{2} + K\frac{N}{4} + K\frac{N}{8} + \cdots + K\frac{N}{2^M}\right) + K\frac{N}{2^M} = KN.$$

Dakle, složenost algoritma dekomponiranja je, u ovom slučaju, linearna po N.

Tipičan primjer konačnog impulsno-responzivnog filtera je Haarov niskopropusni filter, koji ima samo dva ne-nul koeficijenta. S druge strane, Shannonov ih niskopasni filter ima beskonačno mnogo, što je pak primjer *beskonačnog impulsno-responzivnog* filtera. U tom se slučaju filter mora skratiti do konačnog, a greška u skraćivanju mora biti izračunata a priori.

Na prvi pogled, algoritam dekomponiranja ne izgleda kao da ima dobra numericka svojstva. Iako je rekonstrukcija egzaktna, algoritam pretvori N brojeva u približno N brojeva, cime ne cini nikakvu vidljivu kompresiju. Ali ako proučimo detaljnije, vidimo da mnogi od detalja

$$d_{l,k},\ l = j-1, \cdots, j-M,\ k \in \mathbb{Z},$$

mogu biti nula, ili dovoljno mali da padnu ispod nekog fiksiranog praga. Dakle, možemo izostaviti te male detalje, i dalje postižući dobru rekonstrukciju.

4.2 Valićni paketi

Valićne baze koje smo razvili u prethodnim poglavljima imaju lokalizaciju frekvencije proporcionalnu 2^j na rezolucijskom nivou j. Stoga, takve baze imaju slabu lokalizaciju frekvencije kada je j velik. Za neke primjene, poput analize govora, pogodnije je imati baze koje imaju bolju lokalizaciju. To će nam dati *valićni paketi*, koji su dobiveni iz valića povezanih s MRA.

Ako je ψ ortonormirani valić generiran nekom MRA, tada W_j, $j \in \mathbb{Z}$ označava zatvarač, u $L^2(\mathbb{R})$, vektorskog potprostora razapetog skupom $\{\psi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}$. Stoga, kako bismo smanjili lokalizaciju frekvencije elemenata prostora W_j trebamo zapisati W_j kao direktnu sumu dva potprostora razapeta elementima s boljom lokalizacijom. Postupak možemo nastaviti sa svakim od ta dva potprostora, dok ne dobijemo zadovoljavajuću lokalizaciju.

Sami proces nije specifičan za $L^2(\mathbb{R})$, može biti opisan za bilo koji beskonačnodimenzionalan separabilan Hilbertov prostor $\mathbb{H}$. Nakon općenitog pristupa, dobit ćemo valićne pakete primijenjujući dobivene rezultate na potprostore prostora $L^2(\mathbb{R})$.

Neka je $\{e_k : k \in \mathbb{Z}\}$ ortonormirani sistem za beskonačnodimenzionalan separabilan Hilbertov prostor $\mathbb{H}$. Trivijalan način kako razdvojiti sistem na dva nova ortonormirana sistema je podjela po parnim i neparnim indeksima. Zanimljivija podjela je sljedeća

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}[e_{2k-1} + e_{2k}] : k \in \mathbb{Z}\right\} \text{ i } \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}[e_{2k-1} - e_{2k}] : k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Općenito, uzmimo dva niza $\{\alpha_k : k \in \mathbb{Z}\}$ i $\{\beta_k : k \in \mathbb{Z}\}$ iz $l^2(\mathbb{Z})$. Definiramo elemente $f_k \in \mathbb{H}$ preko

$$\begin{cases} f_{2k} = \sqrt{2}\sum_{l\in\mathbb{Z}} \alpha_{2k-l} e_l, \\ f_{2k+1} = \sqrt{2}\sum_{l\in\mathbb{Z}} \beta_{2k-l} e_l. \end{cases} \tag{4.12}$$

(Primijetimo sličnost gornjih formula s dekompozicijskim formulama (4.9) i (4.10).) Zanima nas karakterizacija nizova $\{\alpha_k : k \in \mathbb{Z}\}$ i $\{\beta_k : k \in \mathbb{Z}\}$ za koje je skup $\{f_k : k \in \mathbb{Z}\}$ ortonormirani sistem. Promotrimo dva filtra:

$$\begin{cases} m_0(\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k e^{ik\xi}, \\ m_1(\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \beta_k e^{ik\xi}, \end{cases} \quad \xi \in \mathbb{R}. \tag{4.13}$$

Također, promotrimo matricu

$$M(\xi) = \begin{pmatrix} m_0(\xi) & m_0(\xi+\pi) \\ m_1(\xi) & m_1(\xi+\pi) \end{pmatrix}, \xi \in \mathbb{R}. \tag{4.14}$$

Pokazat ćemo da je $\{f_k : k \in \mathbb{Z}\}$ ortonormirani sistem ako i samo ako je matrica $M(\xi)$ unitarna. Prije samog dokaza, pronađimo ekvivalentne uvjete da bi $M(\xi)$ bila unitarna.

Lako se vidi da je $M(\xi)$ unitarna ako i samo ako vrijedi

$$\begin{cases} \text{a) } |m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi+\pi)|^2 = 1, \\ \text{b) } |m_1(\xi)|^2 + |m_1(\xi+\pi)|^2 = 1, \\ \text{c) } m_0(\xi)\overline{m_1(\xi)} + m_0(\xi+\pi)\overline{m_1(\xi+\pi)} = 0. \end{cases} \tag{4.15}$$

Uvrštavajući (4.13) u a) dio (4.15), dobivamo

$$\begin{aligned}
1 &= \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k e^{ik\xi}\right)\left(\sum_{l\in\mathbb{Z}} \overline{\alpha_l} e^{-il\xi}\right) + \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k (-1)^k e^{ik\xi}\right)\left(\sum_{l\in\mathbb{Z}} \overline{\alpha_l} (-1)^l e^{-il\xi}\right) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left\{ \alpha_k \left(\sum_{l\in\mathbb{Z}} \overline{\alpha_l} e^{-i(l-k)\xi} + \sum_{l\in\mathbb{Z}} \overline{\alpha_l} (-1)^{l+k} e^{-i(l-k)\xi} \right)\right\} \\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \left\{ \sum_{l\in\mathbb{Z}} \alpha_{l-m}\overline{\alpha_l}[1 + (-1)^m] \right\} e^{-im\xi} \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left\{ 2 \sum_{l\in\mathbb{Z}} \alpha_{l-2k}\overline{\alpha_k} \right\} e^{-i2k\xi}.
\end{aligned}$$

Dakle, dio a) u (4.15) ekvivalentan je s

$$2 \sum_{l\in\mathbb{Z}} \alpha_{l-2k}\overline{\alpha_k} = \delta_{k,0}, \text{ za sve } k \in \mathbb{Z}.$$

Slični argumenti dokazuju ostatak sljedeće propozicije

Propozicija 4.2.1. *Matrica $M(\xi)$, dana relacijama* (4.14) *i* (4.13)*, unitarna je ako i samo ako vrijedi*

$$\begin{aligned}
&a) \sum_{l\in\mathbb{Z}} \alpha_{l-2k}\overline{\alpha_l} = \tfrac{1}{2}\delta_{k,0}, \text{ za sve } k \in \mathbb{Z}, \\
&b) \sum_{l\in\mathbb{Z}} \beta_{l-2k}\overline{\beta_l} = \tfrac{1}{2}\delta_{k,0}, \text{ za sve } k \in \mathbb{Z}, \text{ i} \\
&c) \sum_{l\in\mathbb{Z}} \alpha_{l-2k}\overline{\beta_l} = 0, \text{ za sve } k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Teorem 4.2.2. *Neka je $\{e_k : k \in \mathbb{Z}\}$ ortonormirani sistem u Hilbertovom prostoru $\mathbb{H}$. Skup $\{f_k : k \in \mathbb{Z}\}$, dan relacijom* (4.12)*, ortonormiran je sistem u $\mathbb{H}$ ako i samo ako je matrica $M(\xi)$, dana s* (4.14) *i* (4.13)*, unitarna za svaki $\xi \in \mathbb{R}$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $M(\xi)$ unitarna. Po a) dijelu u (4.16), vrijedi

$$\begin{aligned}
\langle f_{2k}, f_{2s}\rangle &= \left\langle \sqrt{2}\sum_{l\in\mathbb{Z}} \alpha_{2k-l} e_l, \sqrt{2}\sum_{l\in\mathbb{Z}} \alpha_{2s-l} e_l \right\rangle \\
&= 2\sum_{l\in\mathbb{Z}} \alpha_{2k-l}\overline{\alpha_{2s-l}} = 2\sum_{p\in\mathbb{Z}} \alpha_{p-2(s-k)}\overline{\alpha_p} = \delta_{s-k,0} = \delta_{s,k}.
\end{aligned}$$

Slično, $\langle f_{2k+1}, f_{2s+1}\rangle = \delta_{s,k}$ po b) dijelu u (4.16). Konačno, po (4.16) c), imamo

$$\begin{aligned}\langle f_{2k}, f_{2s+1}\rangle &= \left\langle \sqrt{2}\sum_{l\in\mathbb{Z}} \alpha_{2k-l}e_l,\ \sqrt{2}\sum_{l\in\mathbb{Z}} \beta_{2k-l}e_l\right\rangle \\ &= 2\sum_{l\in\mathbb{Z}} \alpha_{2k-l}\overline{\beta_{2s-l}} = 2\sum_{p\in\mathbb{Z}} \alpha_{p-2(s-k)}\overline{\beta_p} = 0.\end{aligned}$$

Ovo pokazuje da je $\{f_k : k \in \mathbb{Z}\}$ ortonormirani sistem. Drugi se smjer dobije obrtanjem gornjeg postupka. □

Napomena 4.2.3. *Činjenica da je $M(\xi)$ unitarna govori nam da su m_0 i m_1 povezani. Zapravo, počevši s c) dijelom* (4.15) *te argumentirajući kao u* (2.14), (2.15) *i* (2.16) *poglavlja* (2) *(koristeći pritom* (4.15) *a) i b)), zaključujemo da vrijedi*

$$m_1(\xi) = e^{i\xi}s(2\xi)\overline{m_0(\xi+\pi)}, \tag{4.17}$$

gdje je $s \in L^2(\mathbb{T})$, 2π-periodična i $|s(\xi)| = 1$ za svaki $\xi \in \mathbb{R}$. Ovo je nužan i dovoljan uvjet, jer se lako provjeri da ako vrijedi (4.17)*, tada je $M(\xi)$ unitarna.*

Sada ćemo pokazati kako rastaviti Hilbertov prostor na direktnu sumu potprostora koristeći (4.12).

Teorem 4.2.4. *Neka je $\{e_k : k \in \mathbb{Z}\}$ ortonormirana baza za Hilbertov prostor $\mathbb{H}$, skup $\{f_k : k \in \mathbb{Z}\}$ i matrica $M(\xi)$ dani relacijama* (4.12), (4.13) *i* (4.14)*. Tada je ekvivalentno:*

i) *skup $\{f_k : k \in \mathbb{Z}\}$ je ortonormirani sistem u $\mathbb{H}$,*

ii) *skup $\{f_k : k \in \mathbb{Z}\}$ je ortonormirana baza za $\mathbb{H}$,*

iii) *matrica $M(\xi)$ je unitarna.*

Dokaz. Po teoremu 4.2.2, i) i iii) su ekvivalentni. Budući da očito ii) povlači i), treba pokazati da ako pretpostavimo i), vrijedi ii). To lagano slijedi iz sljedećeg racuna

$$e_l = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sqrt{2}\overline{\alpha_{2k-l}}f_{2k} + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sqrt{2}\overline{\beta_{2k-l}}f_{2k+1} \tag{4.18}$$

□

Jasno je sada kako za dani Hilbertov prostor $\mathbb{H}$ s ortonormiranom bazom $\{e_k : k \in \mathbb{Z}\}$, te dva niza $\{\alpha_k : k \in \mathbb{Z}\}$ i $\{\beta_k : k \in \mathbb{Z}\}$ iz $l^2(\mathbb{Z})$ koji zadovoljavaju uvjete propozicije 4.2.1, imamo

$$\mathbb{H} = \mathbb{H}_0 \oplus \mathbb{H}_1, \tag{4.19}$$

gdje su $\mathbb{H}_0$ i $\mathbb{H}_1$ zatvarači u $\mathbb{H}$ potprostora razapetih s $\{f_{2k} : k \in \mathbb{Z}\}$ i $\{f_{2k+1} : k \in \mathbb{Z}\}$, definiranima s (4.12).

Sada smo spremni definirati valićne pakete povezane sa skalirajućom funkcijom. Razmotrimo MRA, zadanu kao u sekciji 2.1, sa sklalirajućom funkcijom φ za koju je $\hat{\varphi}(0) = 1$. Neka je

$$m_0(\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k e^{ik\xi}$$

niskopropusni filter povezan s φ tako da vrijedi

$$\hat{\varphi}(2\xi) = m_0(\xi)\hat{\varphi}(\xi). \tag{4.20}$$

Također, uzmimo $m_1(\xi) = e^{i\xi}\overline{m_0(\xi + \pi)}$ tako da vrijedi

$$m_1(\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \beta_k e^{ik\xi}, \text{ gdje je } \beta_k = (-1)^{k+1}\overline{\alpha_{1-k}}.$$

S ovim izborom m_0 i m_1, napomena 4.2.3 pokazuje da je matrica $M(\xi)$ unitarna.

Neka je $\omega_0 = \varphi$. Osnovni valićni paketi $\omega_n(x), n = 0, 1, 2, \cdots$, povezani sa skalirajućom funkcijom φ definirani su rekurzivno s

$$\omega_{2n}(x) = 2\sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k \omega_n(2x + k) \tag{4.21}$$

i

$$\omega_{2n+1}(x) = 2\sum_{k\in\mathbb{Z}} \beta_k \omega_n(2x + k). \tag{4.22}$$

Kada je $n = 0$ u (4.21), dobivamo

$$\varphi(x) = 2\sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k \varphi(2x + k),$$

za što se lako vidi da je ekvivalentno relaciji (4.20) (primjenom Fourierove transformacije).

Kada je $n = 0$ u (4.22), zaključujemo da je

$$\omega_1 = 2\sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k \varphi(2x + k).$$

Djelujući Fourierovom transformacijom, dobivamo

$$\widehat{\omega_1}(\xi) = m_1(\tfrac{1}{2}\xi)\hat{\varphi}(\tfrac{1}{2}\xi). \tag{4.23}$$

Jer je $m_1(\xi) = e^{i\xi}\overline{m_0(\xi + \pi)}$, propozicija 2.2.4 pokazuje da je $\omega_1 = \psi$ ortnormirani valić povezan s danom MRA.

Iz (4.20) i pretpostavke da je $\hat{\varphi}(0) = 1$ zaključujemo

$$\hat{\varphi}(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0(2^{-j}\xi) = m_0(\tfrac{1}{2}\xi)\hat{\varphi}(\tfrac{1}{2}\xi). \tag{4.24}$$

Slično, iz (4.23) dobivamo

$$\hat{\psi}(\xi) = \widehat{\omega_1}(\xi) = m_1(\tfrac{1}{2}\xi)\prod_{j=1}^{\infty} m_0(2^{-j}\xi) = m_1(\tfrac{1}{2}\xi)\hat{\varphi}(\tfrac{1}{2}\xi). \tag{4.25}$$

Kako bismo poopćili ove rezultate promotrimo dijadski zapis nenegativnog cijelog broja n, to jest

$$n = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j 2^{j-1}, \ \varepsilon_j \in \{0, 1\}. \tag{4.26}$$

Primijetimo da je gornja suma uvijek konačna, te da je dijadski zapis uvijek jedinstven.

Propozicija 4.2.5. *Neka je n nenegativan cijeli broj s dijadskim zapisom danim u* (4.26)*. Tada Fourierova transformacija osnovnih valićnih paketa, zadanih s* (4.21) *i* (4.22)*, zadovoljava*

$$\widehat{\omega_n}(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty} m_{\varepsilon_j}(2^{-j}\xi) = \left\{\prod_{j=1}^{k} m_{\varepsilon_j}(2^{-j}\xi)\right\}\hat{\varphi}(2^{-k}\xi), \tag{4.27}$$

gdje je $k = \max\{j : \varepsilon_j = 1\}$.

Dokaz. Relacije (4.24) i (4.25) pokazuju da tvrdnja vrijedi za $n = 0$ i $n = 1$. Nastavljamo indukcijom po n. Neka je $n = 2l$ paran i (4.27) vrijedi za sve nenegativne cijele brojeve $m < n$. Po (4.21) imamo

$$\widehat{\omega_{2l}}(\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k e^{ik\frac{\xi}{2}}\widehat{\omega_l}(\tfrac{1}{2}\xi) = m_0(\tfrac{1}{2}\xi)\widehat{\omega_l}(\tfrac{1}{2}\xi).$$

Ako je $l = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j 2^{j-1}$ dijadski zapis broja l, onda je dijadski zapis broja $n = 2l$

$$n = 0 + 2\varepsilon_1 + 2^2\varepsilon_2 + \cdots + 2^j\varepsilon_j + \cdots = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_{j-1}2^{j-1},$$

s $\varepsilon_0 = 0$. Stoga,

$$\widehat{\omega_n}(\xi) = \widehat{\omega_{2l}}(\xi) = m_0(\tfrac{1}{2}\xi)\prod_{j=1}^{\infty} m_{\varepsilon_j}(2^{-j}\tfrac{1}{2}\xi) = m_0(\tfrac{1}{2}\xi)\prod_{j=2}^{\infty} m_{\varepsilon_{j-1}}(2^{-j}\xi),$$

što pokazuje traženi rezultat za parni n. Za slučaj kad je $n = 2l + 1$ neparan, raspisujemo sasvim analogno, koristeći (4.22) i definiciju $m_1(\xi)$, te dijadski zapis broja n preko zapisa $l = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j 2^{j-1}$

$$n = 2l + 1 = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_{j-1} 2^{j-1},$$

gdje je $\varepsilon_0 = 1$. □

Koristeći svu dosad razvijenu teoriju lako je naći nove ortonormirane baze za $L^2(\mathbb{R})$ bazirane na osnovnim valićnim paketima.

Teorem 4.2.6. *Neka je $\{\omega_n : n \in \mathbb{Z}\}$ osnovni valićni paket, definiran s* (4.21) *i* (4.22)*, povezan sa skalirajućom funkcijom φ za MRA $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$. Tada*

a) *za svaki $j = 0, 1, 2, \cdots$, skup $\{\omega_n(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}, 0 \leq n < 2^j\}$ je ortonormirana baza za V_j,*

b) *skup $\{\omega_n(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}, n = 0, 1, 2, \cdots\}$ je ortonormirana baza za $L^2(\mathbb{R})$.*

Dokaz. Slučaj $j = 0$ u a) dijelu slijedi iz definicije MRA i činjenice da je $\omega_0 = \varphi$. Nastavljamo indukcijom po j. Pretpostavimo da je

$$\{\omega_n(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}, 0 \leq n < 2^{j-1}\}$$

ortonormirana baza za V_{j-1}. Tada je

$$\{\sqrt{2}\omega_n(2(\cdot) - k) : k \in \mathbb{Z}, 0 \leq n < 2^j\}$$

ortonormirana baza za V_j po (2.2) u definiciji MRA. No, koristeći (4.21) i (4.22), možemo pisati

$$\begin{aligned}\omega_{2n}(x - m) &= \sqrt{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k[\sqrt{2}\omega_n(2x - 2m + k)] \\ &= \sqrt{2}\sum_{l\in\mathbb{Z}} \alpha_{2m-l}[\sqrt{2}\omega_n(2x - l)]\end{aligned}$$

i

$$\omega_{2n+1}(x-m) = \sqrt{2}\sum_{l\in\mathbb{Z}}\beta_{2m-l}[\sqrt{2}\omega_n(2x-l)],$$

pokazujući da imamo transformaciju oblika (4.12). Kako je φ skalirajuća funkcija za MRA, $M(\xi)$ je unitarna (uz izbor $\beta_k = (-1)^{k+1}\alpha_k$). Dakle, po teoremu 4.2.4, skup $\{\omega_n(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}, 0 \le n < 2^j\}$ je ortonormirana baza za V_j. Time je a) dio dokazan.

Da bismo dokazali b), dovoljno je iskoristiti činjenicu da je

$$L^2(\mathbb{R}) = \overline{\bigcup_{j=0}^{\infty} V_j}$$

i $V_j \subset V_{j+1}$, za svaki j. □

Za skalirajuću funkciju φ i povezani valić ψ konstruirali smo odgovarajuce valićne pakete dane relacijama (4.21) i (4.22). Skup

$$\{2^{\frac{j}{2}}\omega_n(2^j \cdot -k) : j, k \in \mathbb{Z}, n = 0, 1, 2, \cdots\}$$

sadrži, možemo reći, previše elemenata. Naime, ovaj skup sadrži valićnu bazu $\{2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j \cdot -k) : j, k \in \mathbb{Z}\}$ (za $n = 1$) i valićne pakete

$$\{\omega_n(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}, n = 0, 1, 2, \cdots\}$$

(za $j = 0$). Mnoge druge potkolekcije daju ortonormirane baze za $L^2(\mathbb{R})$.

Za familiju valićnih paketa $\{\omega_n\}$ koji odgovaraju nekoj ortonormiranoj skalirajućoj funkciji $\varphi = \omega_0$ definiramo familiju potprostora prostora $L^2(\mathbb{R})$ danu s

$$U_j^n = \overline{\text{span}}\{\omega_n(2^j \cdot -k) : k \in \mathbb{Z}\},\ j \in \mathbb{Z}, n = 0, 1, 2, \cdots . \tag{4.28}$$

Primijetimo da je

$$\left\{\begin{array}{l} U_j^0 = V_j, \\ U_j^1 = W_j, \end{array}\right. \quad j \in \mathbb{Z},$$

pa ortogonalnu dekompoziciju $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$ možemo pisati kao

$$U_{j+1}^0 = U_j^0 \oplus U_j^1,\ j \in \mathbb{Z}.$$

Ovaj rezultat možemo generalizirati za sve n.

Propozicija 4.2.7. *Za $n = 0, 1, 2, \cdots$ imamo*

$$U^n_{j+1} = U^{2n}_j \oplus U^{2n+1}_j, \; j \in \mathbb{Z},$$

gdje je U^n_j definiran kao u (4.28).

Dokaz. Iz (4.21) slijedi da je U^{2n}_j potprostor od U^n_{j+1}. Slično, iz (4.22) imamo da je U^{2n+1}_j potprostor od U^n_{j+1}. Skup

$$\{E_l(x) = 2^{\frac{j+1}{2}} \omega_n(2^{j+1}x - l) : l \in \mathbb{Z}\}$$

je ortonormirana baza za U^n_{j+1}. Stoga, ako $F_k(x)$ zadamo s (4.12) (gdje uloge e_l preuzimaju $E_l(x)$), teorem 4.2.4 pokazuje da vrijedi

$$U^n_{j+1} = \mathbb{H}_0 \oplus \mathbb{H}_1,$$

gdje su

$$\begin{cases} \mathbb{H}_0 = \overline{\text{span}}\{F_{2k}(\cdot) : k \in \mathbb{Z}\}, \\ \mathbb{H}_1 = \overline{\text{span}}\{F_{2k+1}(\cdot) : k \in \mathbb{Z}\}. \end{cases}$$

Ali,

$$\begin{aligned} F_{2k}(x) = \sqrt{2} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \alpha_{2k-l} E_l(x) &= sqrt2 \sum_{l \in \mathbb{Z}} \alpha_{2k-l} 2^{\frac{j+1}{2}} \omega_n(2^{j+1}x - l) \\ &= 2 \sum_{l \in \mathbb{Z}} \alpha_{2k-l} 2^{\frac{j}{2}} \omega_n(2^j x - l) \\ &= 2 \sum_{m \in \mathbb{Z}} \alpha_m 2^{\frac{j}{2}} \omega_n(2(2^j x - k) + m) \\ &= 2^{\frac{j}{2}} \omega_{2n}(2^j x - k), \end{aligned}$$

gdje zadnja jednakost slijedi iz (4.21). Dakle, $\mathbb{H}_0 = U^{2n}_j$. Slično, uz pomoć relacije (4.22), dobivamo $\mathbb{H}_1 = U^{2n+1}_j$. □

Teorem 4.2.8. *Za svaki $j = 1, 2, 3, \cdots$ vrijedi*

$$\begin{cases} W_j = U^2_{j-1} \oplus U^3_{j-1}, \\ W_j = U^4_{j-2} \oplus U^5_{j-2} \oplus U^6_{j-2} \oplus U^7_{j-2}, \\ \vdots \\ W_j = U^{2^k}_{j-k} \oplus U^{2^k+1}_{j-k} \oplus \cdots \oplus U^{2^{k+1}-1}_{j-k}, \\ \vdots \\ W_j = U^{2^j}_0 \oplus U^{2^j+1}_0 \oplus \cdots \oplus U^{2^{j+1}-1}_0, \end{cases} \tag{4.29}$$

gdje su U_j^n *definirani kao u* (4.28)*. Nadalje, za svaki* $j = 1, 2, \cdots$, $k = 1, 2, \cdots, j$ *i* $m = 0, 1, \cdots, 2^k - 1$ *skup*

$$\{2^{\frac{j-k}{2}} \omega_{2^k+m}(2^{j-k} \cdot -l : l \in \mathbb{Z}\} \tag{4.30}$$

je ortonormirana baza za $U_{j-k}^{2^k+m}$.

Dokaz. Kako je $U_j^1 = W_j$, možemo primjenjivati propoziciju 4.2.7 iterativno kako bismo dobili (4.29). Definicija prostora $U_{j-k}^{2^k+m}$ i ortonormiranost skupa $\{\omega_{2^k+m}(2^{j-k} \cdot -l : l \in \mathbb{Z}\}$ (po teoremu 4.2.6) pokazuju da je (4.30) ortonormirana baza za $U_{j-k}^{2^k+m}$. □

Prethodni nam teorem govori kako možemo dobiti mnogo ortonormiranih baza za za $L^2(\mathbb{R})$. Kako je

$$L^2(\mathbb{R}) = V_0 \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots,$$

možemo izabrati koji ćemo od prostora W_j dalje rastaviti, i kako, koristeći relaciju (4.29). Ako odlučimo da nećemo rastaviti nijedan W_j, tada dobivamo valićni rastav prostora $L^2(\mathbb{R})$. Ako izaberemo zadnju formulu u (4.29) za svaki W_j, tada dobivamo valićne pakete. Između ove dvije opcije, postoji prebrojivo beskonačno načina kako rastaviti $L^2(\mathbb{R})$, i pritom svaki daje novu ortonormiranu bazu za $L^2(\mathbb{R})$. Takva je fleksibilnost jako pogodna za primjenu, gdje možemo izabrati hoćemo li rastaviti ili ne prostor W_j, ovisno o podacima koje imamo.

Bibliografija

[1] Damir Bakić, *Normirani prostori*, `https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/onp/predavanja/np-1516-final.pdf`, Zadnje pristupanje: 29.06.2016.

[2] Eugenio Hernández i Guido Weiss, *A first course on wavelets*, CRC Press, 1996.

[3] Elias M. Stein i Guido Weiss, *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces*, sv. 32, Princeton university Press, 2016.

Sažetak

U ovom smo radu izložili osnove teorije ortonormiranih valića u jednoj dimenziji. Prikazali smo kako konstruirati valiće na temelju multirezolucijske analize, no važno je napomenuti kako to nisu ni blizu svi ortonormirani valići u $L^2(\mathbb{R})$. Nakon same konstukcije, važno je bilo uvesti jednostavnije karakterizacije kako ortonormiranih valića, tako i multirezolucijske analize i pripadne skalirajuće funkcije. U zadnjem smo poglavlju prikazali neke primjene ortonormiranih valića. Uveli smo algoritme za kompresiju i rekonstrukciju podataka bazirane na valićima koji se koriste, primjerice, u kompresiji slika. Kroz valićne pakete, koji se koriste u analizi signala, pokazali smo kako dobiti bolju lokalizaciju frekvencije, ako nam originalna valićna nije dostatna.

Summary

In this thesis we have introduced basic theory of orthonormal wavelets in one dimension. We have shown how to construct wavelets from multiresolutional analysis; however, it is important to emphasise that there are wavelets that do not arise from a multiresolutional analysis on $L^2(\mathbb{R})$. After construction, it was important to indroduce simpler characterizations of orthonormal wavelets, multiresolutional analysis and associated scaling function. In the last chapter we have shown some applications of orthonormal wavelets. We introduced algortihms for data compression and data reconstruction based on wavelets, which are used, for instance, in image compression. Using wavelet packets, which are one of the tools for signal processing, we have shown how to achieve better frequency localization, if the original wavelet frequency localization was not enough.

Životopis

Rođen sam 10.03.1993. u Splitu. Nakon završene Osnovne škole Pojišan, upisao sam splitsku III. gimnaziju, u kojoj sam sve razrede završio odličnim uspjehom. Godine 2011. upisujem preddiplomski studij matematike na Matematičkom odsjeku PMF-a u Zagrebu, gdje 2014. godine upisujem diplomski studij Primijenjena matematika.