Stabilnost diferencijalnih jednadžbi

Vopel, Ramona Mihaela

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO - MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODJEL

Ramona Mihaela Vopel

STABILNOST DIFERENCIJALNIH JEDNADŽBI

DIPLOMSKI RAD

Voditelj rada:
doc.dr.sc. Lavoslav Čaklović

Zagreb, 2016.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana _________________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. _______________________________, predsjednik
2. _______________________________, član
3. _______________________________, član

Povjerenstvo je ocijenilo rad ocjenom ________________________ .

Potpisi članova povjerenstva:

1. _____________________________
2. _____________________________
3. _____________________________

Sadržaj

UVOD

Teorija diferencijalnih jednadžbi je jedna od najvažnijih i najopsežnijih matematičkih disciplina. Diferencijalne jednadžbe se pojavljuju kao matematički modeli u rješavanju važnih prirodnih i tehničkih problema. Njihovo rješavanje je vrlo teško i zauzima pažnju znanstvenika od početka razvoja diferencijalnog računa do danas. Na prijelazu s 19. u 20. stoljeće to je bio pravi izazov za mnoge matematičare. Ovaj diplomski rad se sastoji od pet poglavlja.
U prvom poglavlju ćemo ponoviti neke osnovne definicije i tvrdnje vezane za obične diferencijalne jednadžbe te opći sustav diferencijalnih jednadžbi. Dajemo iskaz i dokaz tri klasična teorema za postojanje rješenja, čiji se rezultati neposredno prenose i na jednadžbe (odnosno sustave) višeg reda: Cauchyjev, Picardov i Peanov.
Drugo poglavlje nam daje uvid u povijest teorije stabilnosti, kao i definiciju stabilnosti po Lyapunovu. Također dajemo pregled stabilnosti trivijalnih, te periodičnih rješenja.
Treće poglavlje proučava stabilnost rješenja linearnih sustava, ukratko dajemo uvid u stabilnost sustava s konstantnim, periodičnim koeficijentima te koeficijentima koji imaju limit.
Četvrto poglavlje opisuje stabilnost direktnom metodom, Sylvesterov kriterij te daje iskaze i dokaze Lyapunovog teorema o stabilnosti kretanja, te asimptotskoj stabilnosti.
Zadnje peto poglavlje opisuje metodu linearizacije, također dajemo iskaze i dokaze par teorema te Hurwitzov kriterij stabilnosti koji daje odgovor na pitanje koje uvjete moraju ispunjavati koeficijenti da bi svi realni dijelovi korijena karakteristične jednadžbe bili negativni.

Poglavlje 1.

Uvodni Pojmovi

1.1. Obične diferencijalne jednadžbe (ODJ)

Obična diferencijalna jednadžba je jednadžba oblika

$$F\left(t, x, x', x'', ..., x^{(n)}\right) = 0 \tag{1.1}$$

koja povezuje nezavisnu varijablu t, nepoznatu funkciju $x = x(t)$ i njene derivacije. Red diferencijalne jednadžbe je red najviše derivacije koja se u njoj pojavljuje, pa ćemo za jednadžbu (1.1) reći da je n-tog reda.
Normalan oblik diferencijalne jednadžbe (1.1) je oblika:

$$x^{(n)} = f\left(t, x, x', ..., x^{(n-1)}\right) \tag{1.2}$$

Za $n = 1$, diferencijalna jednadžba prvog reda (1.1) je oblika:

$$F(t, x, x') = 0 \tag{1.3}$$

Normalan oblik diferencijalne jednadžbe prvog reda je:

$$x' = f(t, x) \tag{1.4}$$

Definicija 1.1. *Rješenje obične diferencijalne jednadžbe n-tog reda na intervalu $[a, b]$ je svaka funkcija $x = \varphi(t)$ koja na tom intervalu ima sve derivacije do uključivo n-tog reda i čije uvrštavanje u jednadžbu pretvara istu u identitet na $[a, b]$. Graf rješenja diferencijalne jednadžbe zove se integralna krivulja te jednadžbe.*

Definicija 1.2. *Za običnu diferencijalnu jednadžbu*

$$x' = f(t,x)$$

nam treba još i početni uvjet $x_0 = \varphi(t_0)$. *Problem nalaženja (jedinstvenog) rješenja diferencijalne jednadžbe koje zadovoljava dani početni uvjet naziva se* ***Cauchyjev problem*** *ili problem s početnim uvjetima.*

1.2. Egzistencija i jedinstvenost rješenja

Poznata su tri klasična teorema za postojanje rješenja, čiji se rezultati neposredno prenose i na jednadžbe (odnosno sustave) višeg reda: Cauchyjev, Picardov i Peanov.

Teorem 1.1. (Cauchy) *Ako je funkcija* f *analitička na nekoj okolini točke* (t_0, x_0), *onda postoji jedinstveno rješenje* x *gornjeg Cauchyjevog problema, koje je analitičko na nekoj okolini točke* t_0.

Cauchyjev teorem zahtijeva preveliku regularnost. Matematičari se najčešće pozivaju na Picardov teorem, u kojem se pretpostavlja da je funkcija f neprekinuta po t (taj se uvjet može oslabiti do izmjerivosti) i Lipschitzova po x. Taj se teorem dokazuje pomoću Banachovog teorema o čvrstoj točki, koji daje i praktičnu metodu za konstrukciju (Picardovih) aproksimacija rješenja. Prisjetimo se da je funkcija izmjeriva ako je praslika svakog otvorenog skupa u kodomeni izmjeriv skup u domeni. Posebno je svaka neprekinuta funkcija izmjeriva (ukoliko su topološka struktura i ρ - algebra izmjerivih skupova usklađeni, što jest slučaj na R^d). Spomenimo i to da se pretpostavke na funkciju f mogu još oslabiti, te zahtijevati samo da je funkcija f neprekidna po x, ali se pritom gubi jedinstvenost. Taj slučaj opisuje Peanov teorem.
U daljnjem koristimo sljedeću oznaku: za $h, r > 0$ valjak visine $2h$ i promjera $2r$ u $\mathbb{R}^{1+d}$označujemo sa

$$S := \langle t_0 - h, t_0 + h\rangle \times K\left[x_0, r\right].$$

Teorem 1.2. (Picard) *Neka je* f *neprekidna i omeđena s* M *na* S, *te Lipschitzova po drugoj varijabli:*

$$(\exists C\ > 0)\,(\forall t \in \langle t_0 - h, t_0 + h\rangle)\,(\forall x, y \in K\left[x_0, r\right])\,\left|f\left(t,x\right) - f\left(t,y\right)\right| \le C\left|x - y\right|.$$

Tada Cauchyjev problem ima jedinstveno C^1 *rješenje barem na* $\langle t_0 - T, t_0 + T\rangle$, *za svaki* $T \leq \min\left\{h, \frac{r}{M}\right\}$.

Dokaz. *Rješenje konstruiramo koristeći Picardove sukcesivne aproksimacije, to jest polazimo od* x_0 *i induktivno rješavamo Cauchyjeve zadaće:*

$$\left\{ \begin{array}{c} x_k^{,}(t) = f(t, x_{k-1}(t)) \\ x_k(t_0) = x_0 \end{array} \right\}$$

Naravno, takvu Cauchyjevu zadaću lako rješavamo integriranjem:

$$x_k(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_{k-1}(s))\, ds \tag{1.5}$$

za $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$. *Da bi* f *bila dobro definirana, treba dokazati da je* $|x_k(t) - x_0| \leq r$ *na segmentu* $[t_0 - T, t_0 + T]$. *Induktivno (baza je očigledna) iz gornje jednakosti zaključujemo da je*

$$|x_k(t) - x_0| \leq \int_{t_0}^{t} f(s, x_{k-1}(s))\, ds \leq |t - t_0|\, M \leq tM \leq r.$$

Pokažimo da je (x_k) *Cauchyjev niz u prostoru* $C[t_0 - T, t_0 + T]$. *Iz* (1.5) *dobivamo*

$$|x_k(t) - x_{k-1}(t)| \leq \left| \int_{t_0}^{t} (f(s, x_{k-1}(s)) - f(s, x_{k-2}(s)))\, ds \right| \leq C \int_{t_0}^{t} |x_{k-1}(s) - x_{k-2}(s)|\, ds.$$

Kako je $|x_1(t) - x_0| \leq M\,|t - t_0|$, *to je indukcijom i*

$$|x_k(t) - x_{k-1}(t)| \leq MC^{k-1} \frac{|t - t_0|^k}{k!} \leq \frac{M}{C} \frac{(CT)^k}{k!}.$$

Poznato je da je

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(CT)^k}{k!} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{(CT)^k}{k!} = e^{CT} < \infty,$$

pa je niz $x_k = x_k - x_{k-1} + x_{k-1} - \ldots + x_1 - x_0$ *Cauchyjev, i stoga jednoliko konvergira zbog potpunosti prostora* $C[t_0 - T, t_0 + T]$ *nekom limesu* x, *koji je* *neprekinuta funkcija na* $[t_0 - T, t_0 + T]$ *, takva da je* $|x(t) - x_0| \leq r$ *na tom segmentu (limes niza ostaje u kugli koja sadrži niz), te vrijedi*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds.$$

Stoga je taj limes i klase C^1*, te rješava Cauhyjevu zadaću.*
Kako bismo pokazali jedinstvenost, pretpostavimo da je $\overline{x}$ *drugo takvo rješenje, te pogledajmo razliku:*

$$|x(t) - \overline{x}(t)| = \int_{t_0}^{t} (f(s, x(s)) - f(s, \overline{x}(s)))\, ds.$$

Stoga je $|x(t) - \overline{x}(t)| \leq 2M\, |t - t_0|$*, pa je (zaključak slijedi kao i za* $x_k - x_{k-1}$ *gore)*

$$|x(t) - \overline{x}(t)| \leq \frac{2M}{C} \frac{(CT)^k}{k!}.$$

Na limesu $k \to \infty$ *dobivamo da je* $x = \overline{x}$*.* ■

Teorem 1.3. (Peano) *Ako je funkcija* f *neprekidna i omeđena s konstantom* M *na* S*, onda Cauchyjev zadatak ima barem jedno rješenje klase* C^1 *na intervalu* $|t - t_0| \leq T$*, za neki* $T \leq \min\left\{h, \frac{r}{M}\right\}$ *.*
Dokaz. *Najprije proširimo funkciju* f *na* $[t_0 - h, t_0 + h] \times \mathbb{R}^d$*, tako da van kugle* $\Bbbk[x_0, r]$ *stavimo da je* f *radijalno proširena sa sfere:*

$$f(t, x) := f\left(t, x_0 + r\frac{x - x_0}{|x - x_0|}\right),$$

za $|x - x_0| > r$*.*
Regularizacijom funkcije f *po varijabli* x*, koristeći standardni regulator, dobivamo niz funkcija* $f_n \in C([t_0 - h, t_0 + h]\, ; C^\infty(\mathbb{R}^d))$*, takav da* $f_n \rightrightarrows f$ *na* S*, te je* $|f| \leq M$*. Po Picardovom teoremu Cauchyjeva zadaća*

$$\begin{cases} x_n' = f_n(\cdot, x_n) \\ x_n(t_0) = x_0 \end{cases}$$

ima jedinstveno rješenje na $|t - t_0| \leq T$*, za koje vrijedi* $|x_n(t) - x_0| \leq r$ *i* $|x_n^{\cdot}| \leq M$*, pa taj niz ima jednoliko konvergentan podniz (po Arzela-Ascolijevom teoremu),* $x_n \rightrightarrows x$*, te vrijedi*

$$x_n^{\cdot} = f_n(\cdot, x_n) \rightrightarrows f(\cdot, x),$$

pa je i to gomilište x rješenje Cauchyjeve zadaće. ∎

1.3. Opći sustav diferencijalnih jednadžbi

Dajemo popis nekih osnovnih teorema. Promatramo za početak općeniti sustav s m jednadžbi i m nepoznatih funkcija (mogli smo gledati još općenitije sustave u kojima se broj jednadžbi ne podudara s brojem nepoznatih funkcija, ali ovdje se ipak ograničavamo samo na sustave kod kojih imamo tu jednakost).

$$
\begin{gathered}
F_1(t, x_1, x_1^{'}, \ldots, x_1^{(\nu_1)}, x_2, x_2^{'}, \ldots, x_2^{(\nu_2)}, \ldots, x_m, x_m^{'}, \ldots, x_m^{(\nu_m)}) = 0, \qquad (1.6)\\
F_2(t, x_1, x_1^{'}, \ldots, x_1^{(\nu_1)}, x_2, x_2^{'}, \ldots, x_2^{(\nu_2)}, \ldots, x_m, x_m^{'}, \ldots, x_m^{(\nu_m)}) = 0,\\
\ldots\\
F_m(t, x_1, x_1^{'}, \ldots, x_1^{(\nu_1)}, x_2, x_2^{'}, \ldots, x_2^{(\nu_2)}, \ldots, x_m, x_m^{'}, \ldots, x_m^{(\nu_m)}) = 0,
\end{gathered}
$$

Sustav opisuje vezu između nezavisne varijable t, m funkcija $x_1, \ldots x_m$ i njihovih derivacija. Redovi najviših derivacija su općenito različiti. Zbroj redova najviših derivacija svih nepoznatih funkcija koje se pojavljuju u sustavu naziva se red sustava. Dakle, red sustava je broj $\sum_{i=1}^{m} \nu_i$. Vektorska funkcija $F = (F_{1,\ldots,}F_m)$ može biti proizvoljna. U konkretnim situacijama ćemo zadavati neki uvjet na nju poput neprekidnosti, diferencijabilnosti i sl. Najčešće pretpostavljamo da se radi o barem neprekidnoj funkciji.

1.3.1. Normalni sustav diferencijalnih jednadžbi

Nakon pojednostavljivanja (1.6), dobivamo *normalni sustav diferencijalnih jednadžbi*

$$
\begin{aligned}
x_1^{'} &= f_1\,(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (1.7)\\
x_2^{'} &= f_2\,(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)\\
&\ldots\\
x_n^{'} &= f_n\,(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)
\end{aligned}
$$

Sistem jednadžbi možemo zapisati u vektorskom obliku:

$$X' = F(t, X) \qquad (1.8)$$

gdje je $X = (x_1, \ldots, x_n)$ i $F(t, X) = (f_1(t, X), f_2(t, X), \ldots, f_n(t, X))^T$

Želimo dokazati da rješenje sustava (1.7) uz odgovarajuće pretpostavke na desnu stranu sustava postoji. Preciznije, dokazat ćemo da postoji rješenje pripadnog inicijalnog problema kojeg možemo zapisati na sljedeći način:

$$\begin{aligned} x_i' &= f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), i = 1, \ldots, n, \\ x_1(t_0) &= x_1^{(0)}, \ldots, x_n(t_0) = x_n^{(0)} \end{aligned} \tag{1.9}$$

Pritom je $\left(t_0, x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$ neka točka iz domene funkcije $f = (f_1, \ldots, f_n)$.

Teorem 1.4. *Neka su u D, $D \subset \mathbb{R}_{tX}^{n+1}$, funkcije $F(t, X)$ i $\frac{\partial f_i(t,X)}{\partial x_j}$, $\left(i = \overline{1, n}\right)$ neprekidne. Tada je skup D područje egzistencije i jedinstvenosti rješenja sustava jednadžbi.*

Teorem 1.5. (Peano) *Ako je funkcija $F(t, X)$ neprekidna na D, $D \subset \mathbb{R}_{tX}^{n+1}$, tada je D područje egzistencije rješenja sustava jednadžbi.*

Teorem 1.6. (Picard) *Ako je funkcija $F(t, X)$ neprekidna na D, $D \subset \mathbb{R}_{tX}^{n+1}$, i parcijalni izvodi $\frac{\partial f_i(t,X)}{\partial x_j}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ postoje i ograničeni su, tada je D područje egzistencije i jedinstvenosti rješenja sustava jednadžbi.*

1.3.2. Autonomni sustavi diferencijalnih jednadžbi

Normalni sustav diferencijalnih jednadžbi se može svesti na autonomni (dinamički) sustav uvođenjem smjene $t = x_{n+1}$, $\frac{dx_{n+1}}{dt} = 1$ u (1.9):

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &\cdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{aligned} \tag{1.10}$$

Sustav (1.10) se može napisati u vektorskom obliku

$$X' = F(X) \tag{1.11}$$

gdje je $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i $F(X) = (f_1(X), f_2(X), \ldots, f_n(X))^T$.
Točka $X_0 \in D$ u kojoj je $F(X_0) = 0$ naziva se ravnotežna točka autonomnog

sustava (1.10). Pretpostavimo da su funkcije F i $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ neprekidne na $D, D \subset \mathbb{R}^{n+1}_{tX}$. Tada, $\forall (t_0, X_0) \in R \times D$, sustav jednadžbi (1.10), ima jedinstveno rješenje $X = X(t)$, $X_0 = X(t_0)$ koje je definirano na nekom intervalu K koji sadrži t_0.

1.3.3. Homogeni linearni sustavi

Homogeni linearni sustavi su sustavi oblika

$$X' = A\,(t)\,X \tag{1.12}$$

$A\,(t) = \{a_{ij}\,(t)\}_{i,j=1}^{n}$ je $n \times n$ matrična funkcija za koju vrijedi pretpostavka da je neprekidna na intervalu K.

Teorem 1.7. *Neka je $A \in C(K; M_n(\mathbb{R}))$. Rješenja homogenog sustava $X' = A\,(t)\,X$ čine vektorski potprostor od $C^1(K; M_{K_n}(\mathbb{R}))$ dimenzije n.*
Dokaz. *Neka su u i v dva rješenja zadanog sustava i neka su α,$\beta \in \mathbb{R}$. Dakle, za $t \in K$ vrijedi $u'(t) = A(t)u(t)$, $v'(t) = A(t)v(t)$. Definirajmo funkciju $z = \alpha u + \beta v$. Tada je $z'(t) = \alpha u'(t) + \beta v'(t) = \alpha A(t)u(t) + \beta A(t)v(t) = A(t)(\alpha u(t) + \beta v(t)) = A(t)z(t), t \in K$. Dakle, funkcija z je također rješenje zadanog sustava. Prema tome, rješenja sustava čine vektorski potprostor prostora $C^1(K; M_{K_n}(\mathbb{R}))$.* ■

Definicija 1.3. *Neka je $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t), t \in K$, fundamentalni skup rješenja. Matricu $M(t)$ čiji su stupci $\varphi_1(t), \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ zovemo fundamentalnom matricom. Determinantu $W(t) = \det M(t)$ zovemo **determinantom Wronskog** ili kraće **Wronskijan**.*

Definicija 1.4. *Rješenja $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t), t \in K$ čine fundamentalni sustav rješenja (1.12) ako i samo ako je $W(t) = \det M(t) \neq 0$ za svako $t \in K$.*

Definicija 1.5. *Neka je $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t), t \in K$ fundamentalni skup rješenja sustava jednadžbi (1.12), opće rješenje sustava na području $K \times \mathbb{R}^n_X$ se može zapisati kao linearna kombinacija fundamentalnog sustava:*

$$X = C_1\varphi_1(t) + C_2\varphi_2(t) + \ldots + C_n\varphi_n(t),\ t \in K$$

gdje su $C_i, i = 1, \ldots, n$ proizvoljne konstante.

1.3.4. Nehomogeni linearni sustavi

Nehomogeni linearni sustavi su sustavi oblika

$$X' = A(t)X + B(t), \tag{1.13}$$

gdje je

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & & a_{2n}(t) \\ \vdots & & & \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & & a_{nn}(t) \end{bmatrix}, \quad B(t) = \begin{bmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix}.$$

Matricu $A(t)$ zovemo matricom sustava, $B(t) \neq 0$ je slobodan član.

Teorem 1.8. *Ako je $M(t)$ fundamentalna matrica homogenog dijela sustava* (1.13)*, tada je vektorska funkcija*

$$Y_0(t) = M(t) \int_{t_0}^{t} M^{-1}(s) B(s) \, ds, \quad t_0, t \in K$$

rješenje sustava (1.13) *koje zadovoljava početni uvjet $Y_p(t_0) = 0$.*

Teorem 1.9. *Neka je $Y_p(t)$ neko rješenje nehomogenog sustava jednadžbi, i neka je $Y_h(t)$ neko rješenje njegovog homogenog dijela. Tada je*

$$Y(t) = Y_p(t) + Y_h(t)$$

opće rješenje nehomogenog sustava.

1.3.5. Linearni sustavi sa konstantnim koeficijentima

To su sustavi jednadžbi oblika

$$X' = AX \tag{1.14}$$

gdje je matrica A konstantna.

Teorem 1.10. *Matrica oblika*

$$M\left(t\right) = e^{At}$$

je fundamentalna matrica sustava za $t \in K$ *i vrijedi da je* $M\left(0\right) = I$*.*
Opće rješenje sustava je oblika

$$X = e^{tA}C$$

gdje je C *proizvoljni konstantni vektor dužine* n*.*

Poglavlje 2.

Teorija stabilnosti

2.1. Povijest teorije stabilnosti

Ruski matematičar Aleksandr Lyapunov je dao veliki doprinos razvoju teorije stabilnosti, objavljivanjem svoje knjige, 1892. godine pod nazivom "Opći problem stabilnosti kretanja". Njegov rad, koji je izvorno objavljen na ruskom, i kasnije preveden na francuski, nije privukao pažnju godinama. Nakon perioda tzv. Hladnog rata, kada je utvrđeno da "Druga Lyapunova metoda" ima primjenu u stabilnosti usmjeravanja u zračnom prostoru, Lyapunova popularnost je porasla. Njegova knjiga proučava dvije metode za analizu stabilnosti, metodu linearizacije te direktnu metodu.

2.2. Stabilnost trivijalnih rješenja

Promatramo normalni sustav diferencijalnih jednadžbi oblika:

$$x' = f(t, x), \; x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R} \tag{2.1}$$

gdje je $f(t, x)$ neprekidna u t i x, te Lipschitz neprekidna u x. Pretpostavimo da je $x = 0$ kritična točka vektorske funkcije $f(t, x)$, tj. $f(t, 0) = 0$, $t \in \mathbb{R}$. Obzirom na to da svaku kritičnu točku možemo translatirati u izvor prostora, pretpostavka da je $x = 0$ kritična točka nije restrikcija.

Definicija 2.1. (Stabilnost po Lyapunovu) *Trivijalno rješenje* $x = 0$ *jednadžbe* (2.1) *je stabilno po Lyapunovu ako za svako* $\epsilon > 0$ *postoji* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *tako da za svako rješenje* $x = x(t)$, $x(0) = x_0$ *iz* $|x_0| < \delta$ *slijedi* $|x(t)| < \varepsilon$,

$t \in [0, \infty)$.
Kompaktni zapis:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0, |x_0| < \delta \Longrightarrow |x(t)| < \varepsilon, t \in [0, \infty)$$

Promotrimo trivijalno rješenje $x = 0$ jednadžbe (2.1). Ako rješenje nije stabilno po Lyapunovu, kažemo da je nestabilno.

Definicija 2.2. (Asimptotska stabilnost po Lyapunovu) *Trivijalno rješenje $x = 0$ jednadžbe* (2.1) *je **asimptotski stabilno po Lyapunovu** ako je stabilno i ako postoji $\sigma > 0$,tako da za svako rješenje $x = x(t)$, $x(0) = x_0$ iz $|x_0| < \sigma$ slijedi $\lim_{t\to\infty} |x(t)| = 0$.*
Kompaktni zapis:

$$\forall \sigma > 0, |x_0| < \sigma \Longrightarrow \lim_{t\to\infty} |x(t)| = 0.$$

2.3. Stabilnost periodičkih rješenja

Promatramo opet sustav jednadžbi

$$x' = f(t, x)$$

te pretpostavljamo da zadovoljava uvjete teorema o egzistenciji i jedinstvenosti rješenja.

Definicija 2.3. (Stabilnost po Lyapunovu) *Rješenje $x = \rho(t)$, $\rho(t_0) = \rho_0$ sustava diferencijalnih jednadžbi* (2.1) *je **stabilno po Lyapunovu** kad $t \to \infty$, ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta = \delta(\varepsilon)$ tako da za svako rješenje $x = x(t)$, $x(t_0) = x_0$ iz $|x_0 - \rho_0| < \delta$ slijedi $|x(t) - \rho(t)| < \varepsilon$, $t \in [t_0, \infty)$.*
Kompaktni zapis:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0, |x_0 - \rho_0| < \delta \Longrightarrow |x(t) - \rho(t)| < \varepsilon, t \in [t_0, \infty)$$

Napomenimo da će slučaj gdje je periodično rješenje stabilno po Lyapunovu biti iznimka.

Definicija 2.4. (Asimptotska stabilnost po Lyapunovu) *Rješenje* $x = \varphi(t), \varphi(t_0) = \varphi_0$ *sustava diferencijalnih jednadžbi je asimptotski stabilno po Lyapunovu kad* $t \to \infty$, *ako je stabilno i ako postoji* $\sigma > 0$ *,tako da za svako rješenje* $x = x(t)$, $x(t_0) = x_0$ *iz* $|x_0 - \varphi_0| < \sigma$ *slijedi* $\lim_{t\to\infty} |x(t) - \varphi(t)| = 0$.

Kompaktni zapis:

$$\forall\sigma > 0, |x_0| < \sigma \Longrightarrow \lim_{t\to\infty} |x(t) - \varphi(t)| = 0.$$

Poglavlje 3.

Linearne jednadžbe

Ovo poglavlje sadržava važne rezultate i metode za analizu i određivanje stabilnosti linearnih jednadžbi.

3.1. Jednadžbe s konstantnim koeficijentima

Promatramo jednadžbu

$$\dot{x} = Ax \tag{3.1}$$

gdje je A nesingularna, konstantna $n \times n$ matrica. Svojstvene vrijednosti $\lambda_1, \lambda_{2,} \ldots, \lambda_n$ su rješenja karakteristične jednadžbe $det\,(A - \lambda I) = 0$.
Pretpostavimo da su svojstvene vrijednosti različite sa odgovarajućim svojstvenim vektorima c_k, $k = 1, \ldots, n$. U ovom slučaju

$$c_k e^{\lambda_k t},\ k = 1, \ldots, n$$

su n nezavisnih rješenja jednadžbe 3.1.
Pretpostavimo sada da npr.svojstvena vrijednost λ ima mnogostrukost $m > 1$. Ova svojstvena vrijednost generira m nezavisnih rješenja oblika

$$P_0 e^{\lambda t}, P_1\,(t)\, e^{\lambda t}, P_2\,(t)\, e^{\lambda t}, P_0 e^{\lambda t}, \ldots P_{m-1}\,(t)\, e^{\lambda t}$$

gdje su $P_k\,(t)\,, k = 0, 1, \ldots, m-1$ polinomijanlni vektori stupnja manjeg ili jednakog k.
Za razvoj teorije korisno je sastaviti n nezavisnih rješenja $x_1\,(t)\,, \ldots, x_n\,(t)$ za matricu $\Phi\,(t)$ na način da sljedeća rješenja postavimo kao stupce matrice:

$$\Phi\,(t) = [x_1\,(t)\, x_2\,(t) \ldots x_n\,(t)]\,.$$

$\Phi(t)$ je fundamentalna matrica jednadžbe $\dot{x} = Ax$. Svako rješenje prethodne jednadžbe se može zapisati kao

$$x(t) = \Phi(t)\, c$$

gdje je c konstantni vektor. Dodamo li početni uvjet $x(t_0) = x_0$, rješenje početnog problema je

$$x(t) = \Phi(t)\, \Phi^{-1}(t_0)\, x_0.$$

Za fundamentalnu matricu $\Phi(t)$ često uzimamo $n \times n$ jediničnu matricu, $\Phi(t_0) = I$.

Teorem 3.1. *Promatrajmo jednadžbu $\dot{x} = Ax$, gdje je A nesigularna, konstantna $n \times n$ matrica, a $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ svojstvene vrijednosti.*

a) *Ako je $\operatorname{Re}\lambda_k < 0, k = 1, \ldots, n$, onda za za svaki $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ i pozitivne konstante C i μ imamo*

$$\|x(t)\| \leq C\, \|x_0\|\, e^{-\mu t} \ i \ \lim_{t\to\infty} x(t) = 0.$$

b) *Ako je $\operatorname{Re}\lambda_k \leq 0, k = 1, \ldots, n$, gdje su svojstvene vrijednosti čiji je $\operatorname{Re}\lambda_k = 0$ različite, onda je $x(t)$ omeđen za $t \geq t_0$. Eksplicitno*

$$\|x(t)\| \leq C\, \|x_0\|$$

gdje je C pozitivna konstanta.

c) *Ako postoji svojstvena vrijednost λ_k za koju vrijedi $\operatorname{Re}\lambda_k > 0$, tada u svakom susjedstvu od $x = 0$ postoje početne vrijednosti takve da za odgovarajuća rješenja imamo $\lim_{t\to\infty} \|x(t)\| = +\infty$.*
U slučaju a), rješenje $x = 0$ je asimptotski stabilno, u slučaju b) $x = 0$ je stabilno po Lyapunovu, te u slučaju c) nestabilno.

Primjer 3.1. *Odredite stabilnost rješenja jednadžbe $\dot{x} = Ax$ gdje je*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 4 & -3 \end{pmatrix}, \ a \in \mathbb{R}$$

Svojstvene vrijednosti su $-1 \pm 2\sqrt{1-a}$, te je realan dio negativan ako je $a > \frac{3}{4}$. Zaključujemo sljedeće:

- *za* $a > \frac{3}{4}$ *imamo asimptotsku stabilnost trivijalnog rješenja x=0 iz jednadžbe 3.1*
- *ako je* $a = \frac{3}{4}$, *matrica* A *je singularna.*
- *ako je* $a < \frac{3}{4}$, *trivijalno rješenje je nestabilno.*

Napomena 3.2. *Rješenja jednadžbe* $\dot{x} = Ax$ *možemo napisati u drugom obliku, koristeći pojam eksponencijalne matrice*

$$x(t) = e^{At}c.$$

Eksponencijalna funkcija matrice je definirana redom

$$e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (At)^n = I + At + \frac{1}{2!} A^2 t^2 + \dots$$

Fundamentalnu matricu $\Phi(t)$ *i njezin inverz zapisujemo kao:*

$$\Phi(t) = e^{At}, \ \Phi^{-1}(t) = e^{-At}.$$

3.2. Jednadžbe s koeficijentima koji imaju limes

Promotrimo jednadžbu

$$\dot{x} = Ax + B(t)x \tag{3.2}$$

gdje je A nesingularna, konstantna $n \times n$ matrica, $B(t)$ neprekidna $n \times n$ matrica. Ako

$$\lim_{t \to \infty} ||B(t)|| = 0$$

tada rješenja jednadžbe $\dot{x} = Ax + B(t)x$ teže rješenjima jednadžbe $\dot{x} = Ax$. Ova ideja postavljanja uvjeta na matricu $B(t)$ je korektna, ali generalno nedovoljna.

Primjer 3.2.

$$\ddot{x} - \frac{2}{t}\dot{x} + x = 0, \ t \geq 1.$$

Očekujemo da za $t \to \infty$ *rješenja teže rješenjima jednadžbe*

$$\dot{x} + x = 0$$

koja ima samo ograničena rješenja. No, ne-autonomna jednadžba ima dva nezavisna rješenja $\sin t - t\cos t$ *i* $\cos t + t \sin t$. *Ova rješenja nemaju gornju granicu ako* t *teži beskonačnosti.*

Teorem 3.3. *Promatrajmo jednadžbu* $\dot{x} = Ax + B(t)x$, $B(t)$ *neprekidna za* $t \geq t_0$ *sa svojstvima da*

a) *svojstvene vrijednosti* λ_k *matrice* A, $k = 1, \ldots, n$ *imaju* $\operatorname{Re}\lambda_k \leq 0$, *svojstvene vrijednosti kojima je* $\operatorname{Re}\lambda_k = 0$ *su različite;*

b) $\int\limits_{t_0}^{\infty} \|B\| \, dt$ *je ograničen,*

tada su rješenja jednadžbe ograničena i $x = 0$ *je stabilno rješenje u smislu Lyapunova.*

Dokaz. *Koristit ćemo metodu "varijacije konstanti".*
Fundamentalnu matricu $\Phi(t)$ *jednadžbe* $\dot{x} = Ax$ *možemo napisati kao* $\Phi(t) = \exp(A(t - t_0))$. *Substituiramo* $x = \Phi(t)z$ *u jednadžbu* $\dot{x} = Ax + B(t)x$ *i dobivamo*

$$\frac{d}{dt}\Phi(t)z + \Phi(t)\dot{z} = A\Phi(t)z + B(t)\Phi(t)z$$

te kako je $\frac{d}{dt}\Phi(t) = A\Phi(t)$

$$\dot{z} = \Phi^{-1}(t)(B(t)\Phi(t)z).$$

Integriranje ovog izraza i množenje sa $\Phi(t)$ *nam za rješenja jednadžbe* $\dot{x} = Ax + B(t)x$ *daje sljedeću integralnu jednadžbu*

$$x(t) = \Phi(t)x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \Phi(t - r + t_0)B(r)x(r)\,dr. \tag{3.3}$$

Primijetimo da smo koristili sljedeće:

$$\begin{aligned} \Phi(t)\Phi^{-1}(r) &= e^{A(t-t_0)}e^{-A(r-t_0)} \\ &= e^{A(t-r)} = \Phi(t - r + t_0). \end{aligned}$$

Jednadžba 3.3 daje sljedeću nejednakost

$$\|x\| \leq \|\Phi(t)\| \|x_0\| + \int\limits_{t_0}^{t} \|\Phi(t - r + t_0)\| \|B(r)\| \|x(r)\| \, dr. \tag{3.4}$$

Iz pretpostavke a) i teorema (3.1) *slijedi*

$$\|\Phi(t)\| \leq C,\ \ t \geq t_0,$$

pa nejednakost 3.4 postaje

$$\|x\| \leq C\,\|x_0\| + \int_{t_0}^{t} C\,\|B(r)\|\,\|x\|\,dr.$$

Primjenjujući Gronwallovu nejednakost $(\delta_1 = 1, \delta_3 = C\,\|x_0\|)$, *slijedi*

$$\|x\| \leq C\,\|x_0\| \exp\left(C \int_{t_0}^{t} B(r)\,dr\right).$$

Iz pretpostavke b) slijedi da je desna strana, pa i $\|x\|$ *ograničena, štoviše iz nejednakosti slijedi da je* $x = 0$ *stabilno u smislu Lyapunova.* ∎

Ako su realni dijelovi svojstvenih vrijednosti negativni, onda nam je dovoljna i slabija pretpostavka na matricu $B(t)$.

Teorem 3.4. *Promatrajmo jednadžbu* $\dot{x} = Ax + B(t)\,x$, $B(t)$ *neprekidna za* $t \geq t_0$ *sa svojstvima da*

a) *Matrica* A *je konstantna sa svojstvenim vrijednostima* λ_k, $k = 1, \ldots, n$ *takvim da* $\operatorname{Re}\lambda_k < 0$.

b) $\lim_{t\to\infty} \|B(t)\| = 0$
tada za rješenja jednadžbe imamo

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$$

i $x = 0$ *je asimptotski stabilno.*

Dokaz. *Kao u dokazu prethodnog teorema, dolazimo do nejednakosti*

$$\|x\| \leq \|\Phi(t)\|\,\|x_0\| + \int_{t_0}^{t} \|\Phi(t - r + t_0)\|\,\|B(r)\|\,\|x(r)\|\,dr.$$

Primijenimo procjenu teorema (3.1) *za fundamentalnu matricu* $\Phi(t)$

$$\|\Phi(t)\| \le C_1 e^{-\mu(t-t_0)}$$

gdje su C_1 *i* μ *odgovarajuće pozitivne konstante. Iz pretpostavke b slijedi, da za svaki* $\varepsilon > 0$ *postoji vrijeme* $t_1(\varepsilon) \ge t_0$ *takvo da*

$$\|B(t)\| \le \varepsilon, \;\; t \ge t_1(\varepsilon).$$

Obje procjene koristimo u nejednakosti za $t \ge t_1$*:*

$$\begin{aligned} \|x\| &\le C_1 e^{-\mu(t-t_0)} \|x_0\| + \int_{t_0}^{t} C_1 e^{-\mu(t-r)} \|B(r)\| \|x(r)\| \, dr \qquad (3.5) \\ &\le C_1 e^{-\mu(t-t_0)} \left(\|x_0\| + \int_{t_0}^{t} e^{\mu(r-t_0)} \|B(r)\| \|x(r)\| \, dr + \int_{t_1}^{t} \varepsilon e^{\mu(r-t_0)} \|x(r)\| \, dr \right). \end{aligned}$$

Sada stavimo $\varepsilon > 0$ *(a time i* $t_1(\varepsilon)$*) takve da*

$$\varepsilon C_1 < \mu. \tag{3.6}$$

Zbog linearnosti jednadžbe 3.2 rješenje $x(t)$ *postoji za* $t \ge t_0$*, a i za* $t_0 \le t \le t_1$*.Slijedi*

$$\|x_0\| + \int_{t_0}^{t_1} e^{\mu(r-t_0)} \|B(r)\| \|x(r)\| \, dr \le C_2$$

gdje je C_2 *pozitivna konstanta. Zajedno s 3.5*

$$e^{\mu(t-t_0)} \|x\| \le C_1 C_2 \exp\left(C_1 \varepsilon (t - t_1)\right)$$

ili

$$\|x\| \le C_1 C_2 \exp\left((C_1\varepsilon - \mu) t + \mu t_0 - C_1 \varepsilon t_1\right).$$

Primjenom 3.6 smo dokazali teorem. ■

Primjer 3.3. *Promatrajmo*

$$\dot{x} = -x + \frac{1}{1+t^2} x, \;\; t \ge 0$$

Primjenom teorema (3.3) *zaključujemo da je* $x = 0$ *stabilno rješenje; primjenom teorema* (3.4) *zaključujemo da je* $x = 0$ *asimptotski stabilno.*
Promatrajmo

$$\dot{x} = -x + \frac{1}{1+t}x, \ t \geq 0$$

Teorem (3.3) *ne možemo primijeniti; primjenom teorema* (3.4) *zaključujemo da je* $x = 0$ *asimptotski stabilno rješenje.*
Promatrajmo

$$\dot{x} = -x + \frac{at}{1+t}x, \ a > 0, \ t \geq 0$$

Koeficijent koji ovisi o vremenu je takav da ne možemo primijeniti teoreme (3.3) *i* (3.4). *Eksplicitnom integracijom, ako je* $0 < a \leq 1$, $x = 0$ *je asimptotski stabilno, za* $a > 1$ *nestabilno rješenje.*

Ako jednadžba $\dot{x} = Ax + B(t)x$ ima matricu A čije neke od svojstvenih vrijednosti imaju pozitivan realan dio, onda očekujemo nestabilno trivijalno rješenje.

Teorem 3.5. *Promatrajmo jednadžbu* $\dot{x} = Ax + B(t)x$, $B(t)$ *neprekidna za* $t \geq t_0$ *sa svojstvom da je* $\lim_{t\to\infty} \|B(t)\| = 0$. *Ako barem jedna svojstvena vrijednost matrice* A *ima pozitivan realan dio, tada u svakom susjedstvu od* $x = 0$ *postoje rješenja* $x(t)$*takva da*

$$\lim_{t\to\infty} \|x(t)\| = +\infty$$

Rješenje $x = 0$ *je nestabilno.*

3.3. Jednadžbe s periodičnim koeficijentima

Promatrajmo jednadžbu

$$\dot{x} = A(t)x, t \in \mathbb{R} \tag{3.7}$$

gdje je $A(t)$ neprekidna $T-$ periodična $n \times n$ matrica; $A(t+T) = A(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Teorem 3.6. (Flocquet) *Promatramo jednadžbu 3.7 gdje je* $A(t)$ *neprekidna* $T-$*periodična* $n \times n$ *matrica. Svaku fundamentalna matricu* $\Phi(t)$ *jednadžbe 3.7 možemo napisati kao produkt dviju* $n \times n$ *matrica*

$$\Phi(t) = P(t)e^{Bt}$$

gdje je $P(t)$ $T-$periodična i B konstantna $n \times n$ matrica.
Dokaz. *Fundamentalna matrica $\Phi(t)$se sastoji od n nezavisnih rješenja; $\Phi(T+t)$ je također fundamentalna matrica. Da bismo to i pokazali, stavimo da je $r = t + T$, tada*

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dr} &= A(r-T)x \\ &= A(r)x \end{aligned}$$

$\Phi(r)$ je također fundamentalna matrica. Fundamentalne matrice $\Phi(t)$ i $\Phi(r) = \Phi(t+T)$ su linearno zavisne, što znači da postoji nesingularna $n \times n$ matrica C takva da

$$\Phi(T+t) = \Phi(t)C.$$

Postoji konstantna matrica B takva da

$$C = e^{BT}$$

Sada ćemo dokazati da je $\Phi(t)\exp.(-Bt)$ T-preiodična. Stavimo

$$\Phi(t) = e^{-Bt} = P(t).$$

Tada

$$\begin{aligned} P(t+T) &= \Phi(T+t)e^{-B(t+T)} \\ &= \Phi(t)Ce^{-BT}e^{-Bt} \\ &= \Phi(t)e^{-Bt} \\ &= P(t). \end{aligned}$$

■

Napomena 3.7. *Matrica C koju smo uveli u prethodnom teoremu se zove* monodromna matrica *jednadžbe 3.7. Svojstvene vrijednosti ρ matrice C se zovu* karakteristični množioci. *Svaki kompleksni broj λ takav da*

$$\rho = e^{\lambda t}$$

se zove karakteristični *ili* Flocquetov eksponent. *Imaginarni dijelovi karakterističnih eksponenata nisu jednoznačno određeni, možemo im dodati $\frac{2\Pi i}{T}$. Karakteristični množioci su jednoznačno određeni. Možemo izabrati eksponente λ takve da se podudaraju sa svojstvenim vrijednostima matrice B.*

Napomena 3.8. *Postojanje periodičkog rješenja jednadžbe 3.7 i stabilnost trivijalnog rješenja su određeni svojstvenim vrijednostima matrice B. Nužan uvjet za postojanje T-periodičkih rješenja je da su jedan ili više karakterističnih eksponenata imaginarni.*

Nužan i dovoljan uvjet za asimptotsku stabilnost trivijalnog rješenja je da su realni dijelovi karakterističnih eksponenata negativni.
Nužan i dovoljan uvjet za stabilnost trivijalnog rješenja je da su realni dijelovi karakterističnih eksponenata negativni, dok eksponenti sa realnim dijelovima nula imaju mnogostrukost jedan.

Poglavlje 4.

Stabilnost direktnom metodom

Početke ove metode možemo naći u polju klasične mehanike, u Torricellijevim spisima. Kasnije je Lyapunov u svom radu pokazao koje opće karakteristike moraju imati analitičke funkcije koje su definirane za dati sustav za ispitivanje stabilnosti. Upravo zbog toga se te funkcije nazivaju funkcijama Lyapunova.

4.1. Funkcije Lyapunova, Sylvesterov kriterij

Promatrajmo jednadžbu

$$x' = f(t, x)\,,\ t \geq t_0, x \in D \subset \mathbb{R}^n$$

i pretpostavimo da trivijalno rješenje zadovoljava jednadžbu, tj. $f(t, 0) = 0$, $t \geq t_0$.

U ovom poglavlju funkcija $V(t, x)$ je definirana i neprekidno diferencijabilna na $[t_0, \infty) \times D$, $D \subset \mathbb{R}^n$. Štoviše, $x = 0$ je unutarnja točka od D i

$$V(t, 0) = 0$$

.

U nekim slučajevima funkcija $V(t, x)$ ne ovisi eksplicitno o t, pa kratko zapisujemo $V(x)$.

Za realnu neprekidnu funkciju

$$V(x) = V(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,,\ V(0) = 0$$

kažemo da je **lokalno pozitivno definitina** ako unutar područja $\|X(t)\| < \varepsilon$ vrijedi $x \neq 0 \Longrightarrow V(x) > 0$.
Ako je $V(0) = 0$ i ako gore navedeno vrijedi za $\varepsilon \to \infty$, tada kažemo da je $V(x)$ **globalno pozitivno definitna.**
Funkcija $V(x)$ je negativno definitna ako je $-V(x)$ pozitivno definitna.

Definicija 4.1. *Za realnu neprekidnu funkciju*

$$V(x) = V(x_1, x_2, \ldots, x_n), V(0) = 0$$

kažemo da je ***pozitivno semidefinitina*** *ako vrijedi* $x \neq 0 \Longrightarrow V(x) \geq 0$.

Funkcija $V(X)$ je negativno semidefinitna ako je $-V(X)$ pozitivno semidefinitna.
Funkcije gore definirane zovemo **funkcijama Lyapunova.**

Definicija 4.2. *Funkciju* $V(t,x)$ *zovemo pozitivno (negativno) definitnom u* D *ako postoji funkcija* $W(x)$ *sa sljedećim značajkama:* $W(x)$ *je definirana i neprekidna na* D, $W(0) = 0$, $0 < W(x) \leq V(t,x)$ $(V(t,x) \leq W(x) < 0)$ *za* $x \neq 0$, $t \geq t_0$. *Za definiranje semidefinitnih funkcija* $V(t,x)$ *zamijenit ćemo* $<$ $(>)$ *sa* $\leq$ $(\geq)$.

Definicija 4.3. *Orbitalna derivacija* L_t *funkcije* $V(t,x)$ *u smjeru vektorskog polja* x, *gdje je* x *rješenje jednadžbe* $x' = f(t,x)$ *je*

$$L_tV = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x}\dot{x} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t,x) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x_1}(t,x) + \ldots + \frac{\partial V}{\partial x_n} f_n(t,x)$$

gdje je $x = (x_1, \ldots, x_n)$ *i* $f = (f_1, \ldots, f_n)$.

Odredimo osobine funkcije V.
Pretpostavimo da je $V = V(x)$ i njeni izvodi neprekidna funkcija. Tada su za $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ parcijalni izvodi prvog reda u toj točki jednaki nuli:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x_j}\right)_0 = 0 \quad (j = 1, \ldots, n)$$

Sada razložimo funkciju V u McLorenov red po $x_1, \ldots, x_n$:

$$V = V(0) + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial V}{\partial x_j}\right)_0 x_j + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_k \partial x_j}\right)_0 x_k x_j + \ldots$$

No, $V(0) = 0$ i $\left(\frac{\partial V}{\partial x_j}\right)_0 = 0$, pa je

$$V = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{kj}x_k x_j + \dots \tag{4.1}$$

gdje je konstanta c_{kj} definirana na sljedeći način:

$$c_{kj} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_k \partial x_j}\right)_0.$$

Iz (4.1) je vidljivo da razložena funkcija V ne sadrži linearne članove.
Pretpostavimo da je kvadratna forma

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{kj}x_k x_j \tag{4.2}$$

stalno pozitivna i jednaka nuli samo ako je $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$. Ako ignoriramo članove stupnja većeg od 2, za dovoljno male apsolutne vrijednosti od x_j i funkcija V je također stalno pozitivna i jednaka nuli samo za $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$. Iz prethodnog slijedi da ako je kvadratna forma (4.2) pozitivno definitna tada i funkcija V mora biti pozitivno definitna.
Za ispitivanje da li je kvadratna forma pozitivno definitna koristimo Sylvesterov kriterij.

Teorem 4.1. (Sylvesterov kriterij) *Neka je $C = (c_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ simetrična. Označimo redom determinante*

$$\Delta_1 = c_{11}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}.$$

- *C je pozitivno definitna ako i samo ako je $\Delta_i > 0$, $i = 1, \dots, n$.*
- *C je negativno definitna ako i samo ako je*

$$\Delta_1 < 0,\ \Delta_2 > 0,\ \Delta_3 < 0, \dots$$

Dokaz. *Za dijagonalnu matricu lako je provjeriti da teorem vrijedi. U slučaju $n = 2$ nadopunjavanjem do punog kvadrata dobivamo*

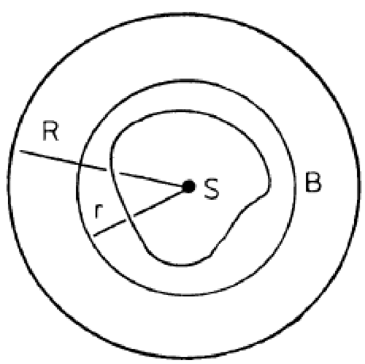
$$\begin{aligned} (Cx \mid x) &= c_{11}x_1^2 + 2c_{12}x_1x_2 + c_{22}x_2^2 \\ &= c_{11}\left(x_1^2 + 2\frac{c_{12}}{c_{11}}x_1x_2 + \frac{c_{12}^2}{c_{11}^2}x_2^2\right) + \frac{-c_{12}^2 + c_{11}c_{22}}{c_{11}}x_2^2 \\ &= c_{11}\left(x_1 + \frac{c_{12}}{c_{11}}x_2\right)^2 + \frac{\det C}{c_{11}}x_2^2. \end{aligned}$$

Odavde, jednostavno slijedi tvrdnja teorema. ■

Iz prethodnog slijedi da je Sylvesterov kriterij dovoljan uvjet za pozitivnu definitnost kvadratnog dijela funkcije V određene formulom (4.1).

Teorem 4.2. (Lyapunov teorem o stabilnosti kretanja) *Promatrajmo normalni sustav diferencijalnih jednadžbi $x' = f(t,x)$ i $f(t,0) = 0$, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, $t \geq t_0$. Ako funkcija $V(t,x)$ postoji, definirana u okolini točke $x = 0$, i pozitivno definitna za $t \geq t_0$ sa orbitalnom derivacijom negativno semidefinitnom, rješenje $x = 0$ je stabilno u smislu Lyapunova.*
Dokaz. *U okolini $x = 0$ imamo da je $R > 0$ i $||x|| \leq R$*

$$\begin{aligned} V(t,x) &\geq W(x) > 0,\ x \neq 0,\ t \geq t_0 \\ L_tV &\leq 0. \end{aligned}$$



Slika 1.

Promatrajmo sfernu ljusku (prsten) B, danu sa $0 < r \leq ||x|| \leq R$ i označimo

$$m = \min_{x \in B} W(x).$$

Sada promotrimo okolinu S od $x = 0$ sa svojstvom da ako je $x \in S$,tada $V(t, X) < m$. Takva okolina postoji jer je $V(t, x)$ neprekidna i pozitivno definitivna, te $V(t, 0) = 0$. Počevši s rješenjem u S, $t = t_0$, rješenje nikada ne može dosegnuti B, jer imamo za $t \geq t_0$

$$V(t, x(t)) - V(t_0, x(t_0)) = \int_{t_0}^{t} L_\tau V(\tau, x(\tau))\, d\tau \leq 0.$$

Drugim riječima, funkcija $V(t, x(t))$ se ne može povećati po rješenju, a ovo bi bilo potrebno za ulazak u B jer je inicijalno $V(t_0, x(t_0)) < m$. ■

Funkcija $V(t, x)$ korištena u gornjem teoremu je Lyapunova funkcija. Da li ove funkcije postoje i kako ih konstruirati je poznato u mnogim slučajevima, ali ne općenito. Za svaku klasu problema moramo početi iznova želimo li koristiti koncept Lyapunove funkcije.

Teorem 4.3. (Lyapunov teorem o asimptotskoj stabilnosti) *Promatrajmo normalni sustav diferencijalnih jednadžbi $x' = f(t, x)$ i $f(t, 0) = 0$, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, $t \geq t_0$. Ako funkcija $V(t, x)$ postoji, definirana u okolini točke $x = 0$, i pozitivno definitna za $t \geq t_0$ sa orbitalnom derivacijom negativno definitnom, rješenje $x = 0$ je asimptotski stabilno.*

Dokaz. *Iz prethodnog teorema proizlazi da je $x = 0$ stabilno rješenje. Da li je moguće da za svaki $R > 0$ postoji rješenje $x(t)$ koje ne teži nuli i počinje u domeni $||x|| \leq R$? Drugim riječima, postoji li rješenje $x(t)$ i konstanta $a > 0$ takva da je $||x(t)|| \geq a$ za $t \geq t_0$, počevši proizvoljno blizu nule? Pretpostavimo sljedeće, rješenje ostaje u sfernoj ljusci B: $a \leq ||x(t)|| \leq R$, $t \geq t_0$. Vrijedi $L_t V(t, x) \leq W(x) < 0$, $x \neq 0$. Stoga u B imamo*

$$L_t V \leq -\mu,\ \mu > 0$$

pa je

$$V(t, x(t)) - V(t_0, x(t_0)) = \int_{t_0}^{t} L_\tau V(\tau, x(\tau))\, d\tau \leq -\mu(t - t_0).$$

No, znamo da je $V(t, x)$ pozitivno definitna, a iz gornjeg slijedi da je nakon nekog vremena $V(t, x)$ negativna, što je kontradikcija. ■

Teorem 4.4. *Promatrajmo jednadžbu* $x' = f(t,x)$ *i* $f(t,0) = 0$, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, $t \geq t_0$. *Ako postoji funkcija* $V(t,x)$ *u susjedstvu od* $x = 0$ *takva da:*

- $V(t,x) \to 0$ *za* $||x|| \to 0$, *uniformno u* t;
- $L_t V$ *je pozitivno definitna u susjedstvu od* $x = 0$;
- *od određene vrijednosti* $t = t_1 \geq t_0$, $V(t,x)$ *ima pozitivne vrijednosti u svakom dovoljno malom susjedstvu od* $x = 0$*;*

tada je trivijalno rješenje nestabilno.

Dokaz. *Za pozitivne konstante* a *i* b, *te* $x \neq 0$ *i* $||x|| \leq a$ *imamo:* $L_t V(t,x) \geq W(x) > 0$ *i* $|V(t,x)| \leq b$; *posljednje slijedi iz prve pretpostavke teorema. Pretpostavimo da je* $x = 0$ *stabilno rješenje. Tada postoji* $\varepsilon > 0$, $0 < \varepsilon < a$ *takvo da počevši u* x_0, $||x_0|| \leq \varepsilon$, *imamo* $||x(t)|| \leq a$ *za* $t \geq t_1$. *Koristeći treću pretpostavku možemo odabrati* x_0 *takvo da je* $V(t_1, x_0) > 0$. *Za rješenje* $x(t)$ *koje počinje u* x_0 *za* $t = t_1$*:*

$$V(t, x(t)) - V(t_1, x_0) = \int_{t_1}^{t} L_\tau V(\tau, x(\tau)) > 0$$

Stoga je $V(t, x(t))$ *neopadajuća. Promatrajmo sada skup točaka* x *sa svojstvom* $V(t,x) \geq V(t_1, x_0)$ *i* $||x|| \leq a$. *Ovaj skup se nalazi u sfernoj ljusci danoj sa* $0 < r \leq ||x|| \leq a$. *Imamo*

$$\mu = \inf_S W(x) > 0$$

tako da

$$V(t, x(t)) - V(t_1, x_0) \geq \mu (t - t_1).$$

Stoga za $||x|| \leq a$, $V(t,x)$ *može biti proizvoljno velik; naišli smo na kontradikciju.* ■

Poglavlje 5.

Stabilnost linearizacijom

Metode utvrđivanja stabilnosti su bile u upotrebi dosta vremena, no tek oko 1900.e godine su korištenje metode linearizacije opravdali Poincare i Lyapunov.
Jedan od novijih rezultata je teorem vezan uz autonomne jednadžbe oblika

$$\dot{x} = Ax + g(x)$$

gdje je A konstantna $n \times n$ matrica čije svojstvene vrijednosti imaju realan dio različit od nule. U ovom poglavlju ću dati iskaz i dokaz dva osnovna teorema gdje ćemo promatrati stabilnost trivijalnog rješenja za neautonomne jednadžbe.

5.1. Asimptotska stabilnost trivijalnih rješenja

Teorem 5.1. *Promatrajmo*

$$\dot{x} = f(t, x), \ x(t_0) = x_0$$

gdje je $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, $|t - t_0| \leq a$; $D = \{x \mid \ ||x - x_0|| \leq d\}$, *a i d su pozitivne konstante. Vektorska funkcija* $f(t, x)$ *zadovoljava sljedeće uvjete:*

- $f(t, x)$ *je neprekidna na* $G = [t_0 - a, \ t_0 + a] \ x \ D$
- $f(t, x)$ *je Lipschitz neprekidna u* x.

Tada početni problem ima jedno i samo jedno rješenje za $|t - t_0| \leq \inf\left(a, \frac{d}{M}\right)$ *i*

$$M = \sup_G ||f|| \,.$$

Teorem 5.2. (Gronwall) *Pretpostavimo da za* $t_0 \leq t \leq t_0 + a$*, sa pozitivnom konstantnom* a*, imamo procjenu*

$$\phi(t) \leq \delta_1 \int_{t_0}^{t} \psi(s)\, \phi(s)\, ds + \delta_3$$

u kojoj su za $t_0 \leq t \leq t_0 + a$*,* $\phi(t)$ *i* $\psi(t)$ *neprekidne funkcije,* $\phi(t) \geq 0$ *i* $\psi(t) \geq 0$*;* δ_1 *i* δ_3 *su pozitivne konstante. Tada za* $t_0 \leq t \leq t_0 + a$ *imamo*

$$\phi(t) \leq \delta_3 e^{\delta_1 \int_{t_0}^{t} \psi(s) ds.}$$

Teorem 5.3. (Poincare-Lyapunov) *Promatrajmo jednadžbu u* $\mathbb{R}^n$

$$x' = Ax + B(t)\, x + f(t, x)\,,\ x(t_0) = x_0,\ t \in \mathbb{R}. \tag{5.1}$$

A *je konstantna* $n \times n$ *matrica sa svojstvenim vrijednostima čiji je realan dio negativan;* $B(t)$ *je neprekidna* $n \times n$ *matrica sa sljedećim svojstvom*

$$\lim ||B(t)|| = 0.$$

Vektorska funkcija $f(t, x)$ *je neprekidna u* t *i* x*, te Lipschitz-neprekidna u* $x = 0$ *susjedstvu; štoviše imamo sljedeće*

$$\lim \frac{||f(t, x)||}{||x||} = 0$$

uniformna u t*. (zadnji uvjet implicira da je* $x = 0$ *rješenje jednadžbe 5.1).*

Tada postoje pozitivne konstante C, t_0, δ, μ *takve da*

$$||x(t)|| \leq C\, ||x||\, e^{-\mu(t - t_0)},\ t \leq t_0.$$

Rješenje $x = 0$ *je asimptotski stabilno i privlačnost je eksponencijalna u* $\delta -$ *susjedstvu od* $x = 0$*.*

Dokaz. *Iz teorema* (3.1.) *slijedi procjena za fundamentalnu matricu jednadžbe*

$$\dot{\Phi} = A\Phi, \Phi(t_0) = I.$$

S obzirom na činjenicu da svojstvene vrijednosti matrice A imaju realne dijelove različite od 0*, postoje pozitivne konstante C i μ_0 takve da*

$$\|\Phi(t)\| \leq Ce^{-\mu_0(t-t_0)}, \ t \geq t_0.$$

Iz pretpostavki na f i B slijedi da za dovoljno mali $\delta > 0$, postoji konstanta $b(\delta)$ takva da ako je $\|x\| < \delta$ imamo

$$\|f(t,x)\| \leq b(\delta)\|x\|, \ t \geq t_0$$

i ako je t_0 dovoljno velik

$$\|B(t)\| \leq b(\delta), \ t \geq t_0.$$

Iz teorema 3.1. slijedi da u susjedstvu od $x = 0$, rješenje početnog problema 5.1 postoji za $t_0 \leq t \leq t_1$. Ovo rješenje vrijedi za sve $t \geq t_0$.
Početni problem 5.1 je ekvivalentan integralnoj jednadžbi

$$\begin{aligned} x(t) &= \Phi(t)x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t-s+t_0)\left[\|B(s)\|\|x(s)\| + \|f(s,x(s))\|\right] ds \\ &\leq Ce^{-\mu_0(t-t_0)}\|x_0\| + \int_{t_0}^{t} Ce^{-\mu_0(t-s)} 2b\|x(s)\,ds\| \end{aligned}$$

pa slijedi

$$e^{\mu_0(t-t_0)}\|x(t)\| \leq C\|x_0\| + \int_{t_0}^{t} Ce^{-\mu_0(s-t_0)} 2b\|x(s)\,ds\|.$$

Sada koristimo Gronwall-ovu nejednakost ($\psi(s) = 2Cb$) pa dobivamo

$$e^{-\mu_0(t-t_0)}\|x(t)\| \leq C\|x_0\| e^{2Cb(t-t_0)}$$

ili

$$\|x(t)\| \leq C\|x_0\| e^{(2Cb-\mu_0)(t-t_0)}. \tag{5.2}$$

Ako su δ, a potom i b dovoljno mali, $\mu = \mu_0 - 2Cb$ je veći od 0, te imamo potrebnu procjenu za $t_0 \leq t \leq t_1$.
Sada izabiremo $||x_0||$ takav da

$$C\,||x_0|| \leq \delta.$$

Procjena 5.2 vrijedi za $t \geq t_0$. ■

5.2. Nestabilnost trivijalnog rješenja

Kada analiziramo sustav lineariziran u susjedstvu ekvilibrijskog rješenja, pod određenim pretpostavkama možemo zaključiti da je rješenje nestabilno. U sljedećem teoremu to i dokazujemo.

Teorem 5.4. *Promatrajmo jednadžbu u $\mathbb{R}^n$*

$$\dot{x} = Ax + B(t)\,x + f(t,x)\,,\ \ t \geq t_0. \tag{5.3}$$

A je konstantna $n \times n$ matrica sa svojstvenim vrijednostima od kojih barem jedna ima pozitivan realan dio; $B(t)$ je neprekidna $n \times n$ matrica sa sljedećim svojstvom

$$\lim_{t\to\infty} ||B(t)|| = 0.$$

Vektorska funkcija $f(t,x)$ je neprekidna u t i x, te Lipchitz-neprekidna u x u $x = 0$ susjedstvu; štoviše imamo sljedeće

$$\lim \frac{||f(t,x)||}{||x||} = 0$$

uniformna u t. Trivijalno rješenje jednadžbe 5.3 je nestabilno.
Dokaz. *Prvo transformirajmo jednadžbu 5.3 koristeći nesingularnu $n \times n$ matricu $S : x = Sy$. Imamo*

$$\dot{y} = S^{-1}ASy + S^{-1}B(t)\,Sy + S^{-1}f(t,Sy)\,. \tag{5.4}$$

Rješenje $x(t)$ ima realnu vrijednost, $y(t)$ će u općem slučaju biti kompleksna funkcija. Nestabilnost trivijalnog rješenja jednadžbe 5.4 implicira nestabilnost trivijalnog rješenja jednadžbe 5.3. Radi jednostavnosti pretpostavimo da

S možemo odabrati tako da je $S^{-1}AS$ u dijagonalnoj formi, primjerice svojstvene vrijednosti λ_i matrice A se nalaze na glavnoj dijagonali od $S^{-1}AS$, a ostali matrični elementu su nula. Imamo

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\lambda_i) &\geq \sigma > 0, i = 1, \dots, k \\ \operatorname{Re}(\lambda_i) &\leq 0, i = k+1, \dots, n. \end{aligned}$$

Još uvodimo sljedeće oznake

$$R^2 = \sum_{i=1}^{k} |y_i|^2 \ \ i \ r^2 = \sum_{i=k+1}^{n} |y_i|^2 .$$

Koristeći jednadžbu 5.4 računamo derivacije od R^2 i r^2;koristimo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}|y_i|^2 &= \frac{d}{dt}(y_i\bar{y}_i) = \dot{y}_i\bar{y}_i + y_i\overline{\dot{y}_i} \\ & 2\operatorname{Re}(\lambda_i)|y_i|^2 + \left(S^{-1}B(t)Sy\right)_i \overline{y_i} + y_i\left(S^{-1}B(t)Sy\right)_i + \\ & + \left(S^{-1}f(t, Sy)\right)_i \overline{y_i} + y_i\left(S^{-1}f(t, Sy)\right)_i . \end{aligned}$$

Sada možemo izabrati $\varepsilon > 0$, δ_0 i δ takve da za $t \geq t_0$ i $||y|| \leq \delta$ imamo

$$\left|S^{-1}B(t)Sy\right|_i \leq \varepsilon|y_i| , \ \left|S^{-1}f(t, Sy)\right|_i \leq \varepsilon|y_i| .$$

Stoga

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(R^2 - r^2\right) \geq \sum_{i=1}^{k}(\operatorname{Re}(\lambda_i) - \varepsilon)|y_i|^2 - \sum_{i=k+1}^{n}(\operatorname{Re}(\lambda_i) + \varepsilon)|y_i|^2 .$$

Ako izaberemo $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}\sigma$ imamo

$$\begin{aligned} (\operatorname{Re}\lambda_i - \varepsilon) &\geq \sigma - \varepsilon \geq \varepsilon, i = 1, \dots, k \\ (\operatorname{Re}\lambda_i + \varepsilon) &\leq \varepsilon, i = k+1, \dots, n. \end{aligned}$$

Slijedi da

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(R^2 - r^2\right) \geq \varepsilon\left(R^2 - r^2\right), \ t \geq t_0, \ \ ||y|| \leq \delta. \tag{5.5}$$

Ako početne vrijednosti izaberemo tako da

$$\left(R^2 - r^2\right)_{t=t_0} = a > 0$$

onda sa 5.5

$$||y||^2 \geq R^2 - r^2 \geq ae^{2\varepsilon(t-t_0)}.$$

Vidimo da ovo rješenje ostavlja domenu određenu sa $||y|| \leq \delta$; trivijalno rješenje nije stabilno. ■

U nastavku dajemo iskaz dva teorema, te Hurwitzov kriterij.

Teorem 5.5. *Ako su realni dijelovi svih korijena karakteristične jednadžbe*

$$\lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + \ldots + b_{n-1}\lambda + b_n = 0$$

negativni, tada je trivijalno rešenje asimptotski stabilno nezavisno od članova reda višeg od prvog.

Teorem 5.6. *Ako barem jedan od korijena karakteristične jednadžbe ima pozitivan realan dio, tada je trivijalno rješenje nestabilno, nezavisno od članova reda višeg od prvog.*

5.3. Stabilnost - Hurwitzov kriterij stabilnosti

Promatrajmo karakterističnu jednadžbu

$$A_Z(s) = \sum_{i=0}^{n} a_i s^i = a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s^1 + a_0 = 0 \tag{5.6}$$

i Hurwitzovu matricu formiranu od koeficijenata $a_0, a_1, \ldots, a_n$:

$$\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & . & . & . & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & . & . & . & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & . & . & . & . \\ 0 & a_n & a_{n-2} & . & a_1 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & . & . & . & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & . & . & . & a_4 & a_2 & a_0 \end{vmatrix}. \tag{5.7}$$

Postavljamo pitanje; koje uvjete moraju ispunjavati koeficijenti a_k da bi svi realni dijelovi korijena karakteristične jednadžbe bili negativni?
Glavne dijagonalne minore Hurwitzove matrice su:

$$\Delta_1 = a_{n-1}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}, \ldots, \Delta_n = a_n\Delta_{n-1}$$

Teorem 5.7. *Nužan i dovoljan uvjet da bi svi korijeni karakteristične jednadžbe s realnim koeficijentima a_k, $k = 1, \ldots n$ i $a_n > 0$ imali negativne realne dijelove jest da su sve glavne dijagonalne minore pozitivne,tj.*

$$\Delta_1 > 0,\ \Delta_2 > 0, \ldots, \Delta_{n-1} > 0,\ \Delta_n > 0 \tag{5.8}$$

Primijetimo sljedeće:

1. Ako je barem jedna od dijagonalnih minora negativna, tada među korijenima karakteristične jednadžbe $s_1, \ldots, s_n$ postoje takvi čiji su realni dijelovi pozitivni.

2. Vieteove formule:

$$\begin{aligned} \frac{a_{n-1}}{a_n} &= -(s_1 + s_2 + \ldots + s_n) \\ \frac{a_{n-2}}{a_n} &= s_1 s_2 + \ldots + s_{n-1} s_n \\ \cdots &= \cdots \\ \frac{a_0}{a_n} &= (-1)^n s_1 s_2 \ldots s_n \end{aligned} \tag{5.9}$$

- S obzirom da je $a_n > 0$, da bi svi korijeni karakteristične jednadžbe imali realne negativne dijelove, nužan uvjet je da koeficijenti $a_0, \ldots, a_{n-1}$ moraju biti pozitivni (ali ne i dovoljan).

$$a_0 > 0, \ldots, a_{n-1} > 0.$$

- Ako je barem jedan od koeficijenata $a_0, \ldots, a_{n-1}$ negativan, tada među korijenima karakteristične jednadžbe postoje oni kojima su realni dijelovi pozitivni.

Red sustava:

1. $n = 1$ Karakteristična jednadžba:

$$a_1 s + a_0 = 0$$

Uvjet stabilnosti:

$$\begin{aligned} a_0 &> 0,\ a_1 > 0 \\ \Delta_1 &= a_1 > 0 \end{aligned}$$

2. $n = 2$ Karakteristična jednadžba:

$$a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$$

Uvjet stabilnosti:

$$\begin{aligned} a_0 &> 0,\ a_1, a_2 > 0 \\ \Delta_1 &= a_1 > 0 \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix} = a_1 a_0 > 0 \end{aligned}$$

3. $n = 3$ Karakteristična jednadžba:

$$a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$$

Uvjet stabilnosti:

$$\begin{aligned} a_0 &> 0,\ a_1, a_2, a_3 > 0 \\ \Delta_1 &= a_2 > 0 \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} = a_2 a_1 - a_3 a_0 > 0 \\ \Delta_3 &= \begin{vmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = a_0 \Delta_2 > 0 \end{aligned}$$

4. $n = 4$ Karakteristična jednadžba:

$$a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$$

Uvjet stabilnosti:

$$\begin{aligned} a_0 &> 0,\ a_1, a_2, a_3, a_4 > 0 \\ \Delta_1 &= a_3 > 0 \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ a_4 & a_2 \end{vmatrix} = a_3 a_2 - a_4 a_1 > 0 \\ \Delta_3 &= a_1 \left(a_3 a_2 - a_4 a_1 \right) - a_3^2 a_0 > 0 \\ \Delta_4 &= \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & 0 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_1 & 0 \\ 0 & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_4 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = a_0 \Delta_3 > 0 \end{aligned}$$

Primjer 5.1. *Koje uvjete mora zadovoljavati sustav da bi bio stabilan?*

$$A_Z(s) = 0.333s^2 + 1.71s + 2 + K = a_2 s^2 + a_1 s^1 + a_0$$

$$a_2 = 0.3333 \qquad a_1 = 1.71 \qquad a_0 = 2 + K$$

- *Nužan uvjet: svi koeficijenti* a_i *veći od* 0

$$\begin{aligned} a_1, a_2 &> 0 \\ a_0 &= 2 + K > 0 \\ ispunjen\ za\ K &> -2 \end{aligned}$$

- *Dodatni uvjeti: sve glavne poddeterminante pozitivne*

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= a_1 > 0 \\ \Delta_2 &= a_1 a_0 > 0 \end{aligned}$$

Zaključujemo da će sustav biti stabilan za $K > -2$.

Bibliografija

[1] D.A. Sanchez, Ordinary Differential Equations and Stability Theory: An Introduction, W.H. Freeman and Company, 1968.

[2] F. Verhulst, Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems, Springer, Heidelberg, 1990.

[3] J. P. LaSalle, Stability Theory for Ordinary Differential Equations, dostupno na:
http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/002203966890048X
(August, 1967)

[4] M. Braun, Differential equations and their applications, Springer Verlag, 1993.

Sažetak

Diferencijalne jednadžbe imaju važnu ulogu u mnogim granama znanosti i industrije. Predmet proučavanja teorije stabilnosti je asimptotsko ponašanje funkcija u okviru familije rješenja, tj. da li se one približavaju ili razilaze jedna od druge na beskonačnom intervalu. U ovom radu smo se usredotočili na obične diferencijalne jednadžbe, njihovu podjelu, te osnovne teoreme o postojanju i jedinstvenosti rješenja. Dana je kratka povijest razvoja teorije stabilnosti , kao i različite definicije stabilnosti. Pod određenim uvjetima, pitanje koje teorija stabilnosti postavlja se može svesti na problem koji razmatra svojstvene vrijednosti matrica. U analizi stabilnosti rješenja običnih diferencijalnih jednadžbi smo koristili dvije metode, direktnu metodu te metodu linearizacije. Također smo pokazali neke od metoda određivanja Lyapunovih funkcija.

Summary

Differential equations have come to play an important role in many branches of science and industry. Stability theory addresses the following questions: Will a nearby orbit indefinitely stay close to a given orbit? Will it converge to the given orbit? We describe the ordinary differential equations, their classification, as well as the basic theorems of existence and uniqueness of solutions.. A brief history of stability theory development is given, as well as stability definitions. Various criteria have been developed to prove stability or instability of an orbit. Under favorable circumstances, above question may be reduced to a well-studied problem involving eigenvalues of matrices. In stability analysis of solutions of ODE, two methods are used: direct method and method of linearisation. Some techniques are shown to determine the Lyapunov function.

Životopis

Zovem se Ramona Mihaela Vopel (29.9.1990., Split). Nakon završetka opće gimnazije „Marko Marulić" s odličnim uspjehom, upisala sam PMF u Splitu, smjer matematika - informatika. Diplomski studij sam nastavila u Zagrebu, smjer Financijska i poslovna matematika. Tijekom studiranja bila sam član raznih humanitarnih projekata te udruge TIM. Radila sam kao praktikant Erste banke u Splitu, predavala informatiku (pripreme za maturu) u Privatnoj gimnaziji Futura te statistiku u Hotelijersko - turističkoj školi. Također, radila sam u agenciji za istraživanje tržišta te na poslovima direktne prodaje za T-mobile i Tele2. Položila sam razne tečajeve na Courseri, od kojih bi posebno istaknula Game Theory, Search Engine Optimization i Business Analytics for Decision Making.