

# Simsonov pravac i poopćenja

---

Vrančić, Katarina

Master's thesis / Diplomski rad

2014

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:667060>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-01-08**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Katarina Vrančić

**SIMSONOV PRAVAC I POOPĆENJA**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
doc.dr.sc. Mea Bombardelli

Zagreb, rujan 2014.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

# Sadržaj

<b>Sadržaj</b>	<b>iii</b>
<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>1 Simsonov pravac</b>	<b>2</b>
<b>2 Steinerov pravac</b>	<b>13</b>
<b>3 Okomiti Simsonovi pravci</b>	<b>25</b>
<b>4 Poopćeni Simsonov pravac</b>	<b>31</b>
<b>5 Još neki teoremi o Simsonovom pravcu</b>	<b>35</b>
<b>A A</b>	<b>41</b>
<b>Bibliografija</b>	<b>45</b>

# Uvod

Robert Simson (14. listopada 1687. - 1. listopada 1768.) bio je škotski matematičar i profesor matematike na Sveučilištu u Glasgowu. Bio je najstariji sin od sedamnaestero muške djece, od kojih je samo njih šest doživjelo odraslu dob. Kao student teologije, po želji svoga oca, okrenuo se matematici jer je smatrao da su argumenti koje teolozi koriste nekoenzistentni i spekulativni.

Školovao se na Sveučilištu u Glasgowu i diplomirao M.A. Njegov glavni doprinos u dijelu matematike je njegov prijevod Euklidovih elemenata i njegova rekonstrukcija izgubljenih djela Euklida i Apolonija. [7].

Simsonov teorem pripisuje se možda pogrešno Robertu Simsonu jer postoje zapisi koji pokazuju da je taj teorem dokazao ustvari William Wallace, još jedan škotski matematičar rođen u godini smrti R. Simsona. Poznato je da je Wallace objavio dokaz tog teorema 1799. godine, no ne postoje zapisi koji tvrde da je nastavio Simsonova proučavanja. [4].

U ovom diplomskom radu bavit ćemo se Simsonovim pravcem, svojstvima i nekim njegovim poopćenjima. Na početku rada iskažemo i dokažemo teorem o Simsonovom pravcu. Upoznat ćemo se i s drugim skupom kolinearnih točaka kojeg vežemo uz Simsonov pravac, a to je Steinerov pravac. Zatim promatramo međusoban odnos Simsonovog pravca i Steinerovog pravca, nakon čega ćemo istražiti razna svojstva tih pravaca. Tada ćemo pokazati i u kakvom su međusobnom odnosu Simsonovi pravci dviju točaka kružnice opisane trokutu te kada će oni biti okomiti. Pri kraju rada definirat ćemo poopćeni Simsonov pravac te promatrati kut Simsonovog pravca i poopćenog Simsonovog pravca. Na samom kraju rada promatramo Simsonove pravce svakog od vrhova tetivnog četverokuta.

# Poglavlje 1

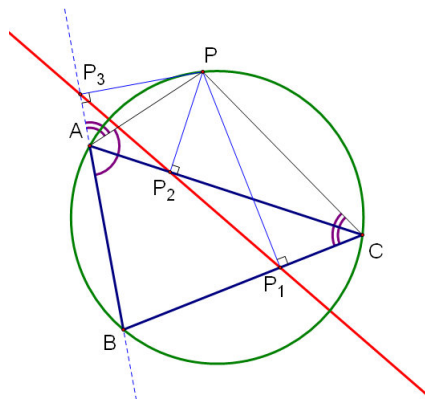
## Simsonov pravac

Jedan od najzanimljivijih teorema vezanih uz trokut i proizvoljnu točku kružnice opisane tom trokutu je svakako sljedeći teorem.

**Teorem 1.1** (Simsonov teorem). *Neka je dan trokut  $ABC$  i njemu opisana kružnica  $k$ . Neka je  $P$  točka kružnice  $k$  i neka su točke  $P_1, P_2, P_3$  ortogonalne projekcije točke  $P$  na pravce  $BC, AC$  i  $AB$  redom. Tada su točke  $P_1, P_2$  i  $P_3$  kolinearne.*

*Dokaz.* Teorem dokazujemo prvo za šiljastokutan trokut, zatim za pravokutan i tupokutan trokut.

◆ Pretpostavimo da je trokut  $ABC$  šiljastokutan i da je  $P$  proizvoljna točka kružnice  $k$ . Razlikujemo slučajeve:



Slika 1.1: Ortogonalne projekcije točke  $P$  na stranice trokuta  $ABC$

Neka je  $P$  jednaka jednoj od točaka  $A, B, C$ . Ako je  $P = A$  onda je ortogonalna projekcija točke  $P$  na pravce  $CA$  i  $AB$  ta točka, tj.  $P_2 = A$  i  $P_3 = A$ .

$P_1$ , ortogonalna projekcija točke  $P$  na pravac  $BC$ , je točka na stranici  $\overline{BC}$ . Točke  $A$  i  $P_1$  su kolinearne. Kako dvije ortogonalne projekcije "padaju" u točku  $A$  zaključujemo da su  $P_1, P_2$  i  $P_3$  kolinearne.

Analogno je i za slučajeve kada je  $P = B$  i  $P = C$ .

Neka je  $P$  proizvoljna točka kružnice različita od točki  $A, B$  i  $C$ . Tada je točka  $P$  ili na kružnom luku  $\widehat{CA}$ , kojemu ne pripada točka  $B$ , ili na kružnom luku  $\widehat{AB}$ , kojemu ne pripada točka  $C$ , ili na kružnom luku  $\widehat{BC}$ , kojemu ne pripada točka  $A$ .

Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da točka  $P$  pripada kružnom luku  $\widehat{CA}$ , kojem ne pripada točka  $B$ .

Pogledajmo gdje se mogu nalaziti ortogonalne projekcije točke  $P$  s obzirom na stranice trokuta  $ABC$ . Zbog toga što je točka  $P$  na kraćem pripadajućem kružnom luku  $\widehat{CA}$  tetive  $\overline{CA}$  ortogonalna projekcija točke  $P$  na pravac  $CA$  nalazi se na stranici  $\overline{CA}$ .

Za točke  $P_1$  i  $P_3$  nismo sigurni nalaze li se na stranici trokuta ili na njezinu produžetku, to ovisi o položaju točke  $P$ . Promatramo kružnicu promjera  $\overline{PA}$ . Njoj pripada točka  $P_3$  zbog toga što je  $\sphericalangle AP_3P$  pravi kut po definiciji točke  $P_3$ . Točka  $P_3$  može se nalaziti s jedne ili druge strane promjera  $\overline{PA}$ , tj. na stranici  $\overline{AB}$  ili na njenom produžetku. Ako je kut  $\sphericalangle BAP$  tupi kut točka  $P_3$  nalazit će se na produžetku stranice  $\overline{AB}$ , a ako je kut  $\sphericalangle BAP$  šiljasti točka  $P_3$  nalazit će se na stranici  $\overline{AB}$ . Analogno, o kutu  $\sphericalangle PCB$  ovisi da li se točka  $P_1$  nalazi na stranici  $\overline{BC}$  ili na produžetku stranice.

Pretpostavimo da  $P_3$  nije na stranici  $\overline{AB}$  trokuta  $ABC$  nego na njezinu produžetku. (Kao na slici 1.1).

Dokažimo da vrijedi:

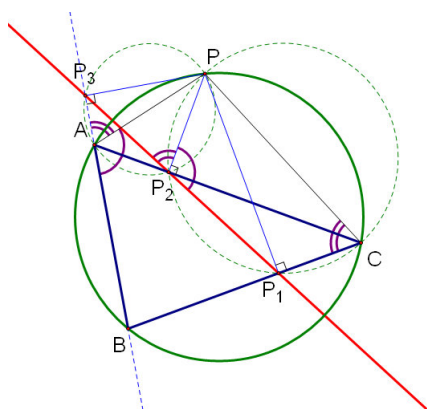
$$\sphericalangle P_1P_2P + \sphericalangle PP_2P_3 = \pi.$$

Točka  $P_2$  ortogonalna je projekcija točke  $P$  na pravac  $AC$  pa je kut  $\sphericalangle CP_2P$  pravi kut. Također je i kut  $\sphericalangle CP_1P$  pravi kut zbog definicije točke  $P_1$ . Primijenjujući obrat Talesovog teorema o obodnom kutu nad promjerom kružnice zaključujemo da su  $P_1, P_2, P, C$  konciklične točke jer pripadaju kružnici promjera  $\overline{PC}$ . Kako su  $P, P_2, P_1, C$  redom točke kružnice vrijedi:

$$\sphericalangle P_1P_2P + \sphericalangle PCP_1 = \pi. \tag{1.1}$$

Znamo da su  $P, A, B, C$  redom točke opisane kružnice trokuta  $ABC$  pa vrijedi:

$$\sphericalangle BAP + \sphericalangle PCB = \pi. \tag{1.2}$$


 Slika 1.2: Kružnice promjera  $\overline{PC}$  i  $\overline{PA}$ 

Točka  $P_1$  nalazi se na pravcu  $BC$  pa vrijedi:  $\sphericalangle PCB = \sphericalangle PCP_1$ . Tada je

$$\sphericalangle BAP + \sphericalangle PCP_1 = \pi. \quad (1.3)$$

Iz relacija 1.1 i 1.3 slijedi:

$$\sphericalangle P_1P_2P = \sphericalangle BAP. \quad (1.4)$$

Točke  $P_2$  i  $P_3$  ortogonalne su projekcije točke  $P$  na pravce  $AC$  i  $AB$  pa su kutovi  $\sphericalangle PP_2A$  i  $\sphericalangle PP_3A$  pravi kutovi te znamo da točke  $P_2, P_3, P, A$  pripadaju kružnici promjera  $\overline{PA}$  prema obratu Talesovog teorema o obodnom kutu nad promjerom kružnice.

Znamo da su obodni kutovi nad istim kružnim lukom jednake veličine, što primijenjujemo na kružni luk  $\widehat{PP_3}$ :

$$\sphericalangle PAP_3 = \sphericalangle PP_2P_3. \quad (1.5)$$

Kako je točka  $P_3$  ortogonalna projekcija točke  $P$  na pravac  $AB$  znamo da su točke  $A, B$  i  $P_3$  kolinearne i vrijedi:

$$\sphericalangle PAP_3 + \sphericalangle BAP = \pi. \quad (1.6)$$

Iz relacija 1.4 i 1.6 slijedi:

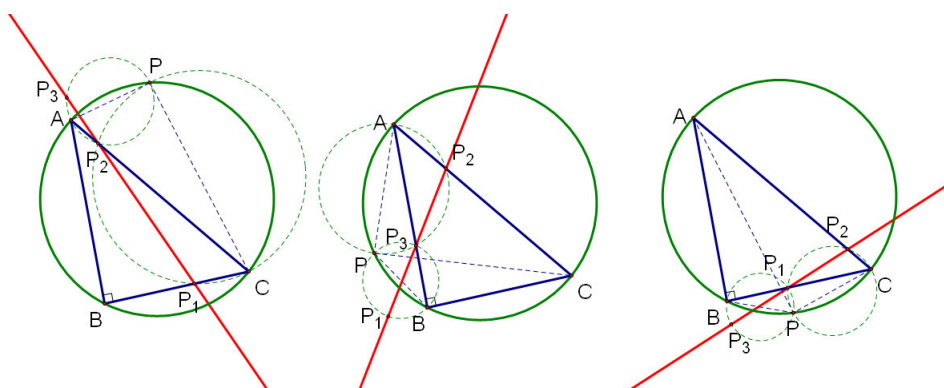
$$\sphericalangle PAP_3 + \sphericalangle P_1P_2P = \pi.$$

Primijenimo li na to još i 1.5 imamo:

$$\sphericalangle PP_2P_3 + \sphericalangle P_1P_2P = \pi.$$

Čime smo dokazali da su točke  $P_1, P_2, P_3$  kolinearne.





Slika 1.3: Teorem 1.1 u slučaju pravokutnog trokuta  $ABC$

◆ Pretpostavimo sada da je trokut  $ABC$  pravokutan za pravi kut  $\sphericalangle ABC$ .

Kada je točka  $P$  jednaka jednoj od točaka  $A, B, C$  imamo analogan slučaj kao za šiljastokutan trokut. Neka je  $P$  točka kružnice različita od točki  $A, B, C$ . Točke  $A, B, C$  dijele kružnicu na tri kružna luka pa ćemo promatrati da je točka  $P$  na svakom od tih kružnih lukova.

Neka je  $P$  točka kružnice opisane trokutu  $ABC$  na kružnom luku  $\widehat{CA}$ , kojem ne pripada točka  $B$ . Taj kružni luk dulji je od svih kružnih lukova koje imamo kod šiljastokutnog trokuta. Ponovno ovisno o vrsti kutova  $\sphericalangle BAP$  i  $\sphericalangle PCB$  znamo pripadaju li točke  $P_1$  i  $P_3$  stranicama trokuta. Neka je  $P_3$  na produžetku stranice  $\overline{AB}$ .

Potrebno je dokazati jednakost:  $\sphericalangle PP_2P_3 + \sphericalangle P_1P_2P = \pi$ .

Točke  $P_1, P_2, P, C$  redom su točke kružnice promjera  $\overline{PC}$  pa vrijedi:

$$\sphericalangle P_1P_2P + \sphericalangle PCP_1 = \pi. \quad (1.7)$$

Točke  $P, A, B, C$  redom su koncikličke točke kružnice te vrijedi:

$$\sphericalangle BAP + \sphericalangle PCB = \pi. \quad (1.8)$$

Kako je  $P_1$  na stranici  $\overline{BC}$  te iz 1.7 i 1.8 slijedi:

$$\sphericalangle P_1P_2P = \sphericalangle BAP. \quad (1.9)$$

Točke  $P_2, P_3, P, A$  su koncikličke pa promatramo obodne kutove nad lukom  $\widehat{PP_3}$ :

$$\sphericalangle PAP_3 = \sphericalangle PP_2P_3. \quad (1.10)$$

Kako su  $P_3, A, B$  kolinearne imamo:

$$\sphericalangle PAP_3 + \sphericalangle BAP = \pi. \quad (1.11)$$

Iz relacija 1.9 i 1.11 na koje primijenimo relaciju 1.10 slijedi:

$$\sphericalangle PP_2P_3 + \sphericalangle P_1P_2P = \pi$$

pa možemo zaključiti da su točke  $P_1, P_2, P_3$  kolinearne.

Neka je  $P$  točka kružnice opisane trokutu  $ABC$  na kružnom luku  $\widehat{AB}$ , kojem ne pripada točka  $C$ .

Potrebno je dokazati jednakost:  $\sphericalangle PP_3P_2 + \sphericalangle P_1P_3P = \pi$ .

Točke  $P, P_3, P_2, A$  redom su točke kružnice promjera  $\overline{PA}$  pa vrijedi:

$$\sphericalangle PAP_2 + \sphericalangle PP_3P_2 = \pi. \quad (1.12)$$

Točke  $P, B, C, A$  redom su koncikličke točke kružnice te vrijedi:

$$\sphericalangle PAC + \sphericalangle CBP = \pi. \quad (1.13)$$

Zbog toga što je  $P_2$  kolinearna s  $A$  i  $C$  te iz 1.12 i 1.13 slijedi:

$$\sphericalangle PP_3P_2 = \sphericalangle CBP. \quad (1.14)$$

Točke  $P, P_1, B, P_3$  su koncikličke pa promatramo obodne kutove nad lukom  $\widehat{PP_1}$ :

$$\sphericalangle PP_3P_1 = \sphericalangle PBP_1. \quad (1.15)$$

Kako su  $P_1, B, C$  kolinearne imamo:

$$\sphericalangle PAP_3 + \sphericalangle BAP = \pi. \quad (1.16)$$

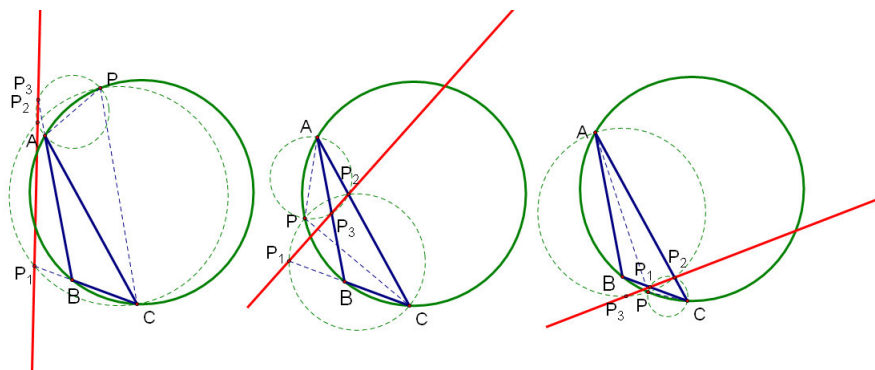
Iz relacija 1.14 i 1.16 na koje primijenimo relaciju 1.15 slijedi:

$$\sphericalangle PP_3P_2 + \sphericalangle P_1P_3P = \pi$$

pa možemo zaključiti da su točke  $P_1, P_2, P_3$  kolinearne.

Neka je  $P$  točka kružnice opisane trokutu  $ABC$  na kružnom luku  $BC$ , kojem ne pripada točka  $A$ .

Potrebno je dokazati jednakost:  $\sphericalangle P_3P_1P + \sphericalangle PP_1P_2 = \pi$  koja se dokazuje na sličan način kao i prethodni slučaj.



Slika 1.4: Teorem 1.1 u slučaju tupokutnog trokuta  $ABC$

◆ Pretpostavimo sada da je trokut  $ABC$  tupokutan za tupi kut  $\sphericalangle ABC$ .

Kada je točka  $P$  jednaka jednoj od točaka  $A, B, C$  imamo analogan slučaj kao za šiljastokutan trokut. Neka je  $P$  točka kružnice različita od točki  $A, B, C$ . Točke  $A, B, C$  dijele kružnicu na tri kružna luka pa ponovno promatramo ta tri slučaja.

Neka je  $P$  točka kružnice opisane trokutu  $ABC$  na kružnom luku  $\widehat{CA}$ , kojem ne pripada točka  $B$ . U ovom slučaju ovisno o položaju točke  $P$  može se dogoditi da sve ortogonalne projekcije budu na produžetcima stranica trokuta. Dokaz se provodi na analogan način kao i za slučaj pravokutnog trokuta kada je  $P$  točka kružnog luka  $\widehat{CA}$  kojem ne pripada točka  $B$ .

Neka je  $P$  točka kružnice opisane trokutu  $ABC$  na kružnom luku  $AB$ , kojem ne pripada točka  $C$  ili Neka je  $P$  točka kružnice opisane trokutu  $ABC$  na kružnom luku  $BC$ , kojem ne pripada točka  $A$ . Dokazi se provode analogno kao i za pravokutan trokut gdje samo jedna od ortogonalnih projekcija neće biti na stranici trokuta  $ABC$ , ovisno o položaju točke  $P$ .

Time je teorem dokazan za sva tri slučaja. □

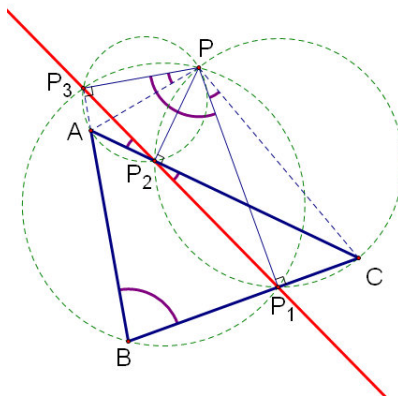
Prethodni teorem dokazali smo za šiljastokutan, pravokutan i tupokutan trokut te smo vidjeli da dokaz teorema ne ovisi o vrsti trokuta. Zbog toga ćemo u nastavku rada promatrati samo šiljastokutne trokute, a dokazi za pravokutne i tupokutne trokute provode se analogno.

**Definicija 1.2** (Simsonov pravac). *Pravac kojemu pripadaju ortogonalne projekcije  $P_1$ ,  $P_2$  i  $P_3$  točke  $P$  kružnice opisane trokutu  $ABC$  na pravce  $BC, CA, AB$  redom nazivamo **Simsonov pravac** točke  $P$  u odnosu na trokut  $ABC$  i označavamo ga  $s_P$ .*

**Napomena.** U nastavku rada koriste se uvijek iste oznake. Točke  $P_1, P_2, P_3$  su ortogonalne projekcije točke  $P$  na pravce  $BC, CA, AB$ , redom.

Iskažimo sada obrat teorema 1.1.

**Teorem 1.3.** *Neka je  $ABC$  dani trokut,  $P$  neka točka te ravnine i neka su točke  $P_1, P_2, P_3$  ortogonalne projekcije točke  $P$  na pravce  $BC, CA, AB$  redom. Ako su točke  $P_1, P_2, P_3$  kolinearne, onda točka  $P$  pripada kružnici opisanoj trokutu  $ABC$ .*



Slika 1.5:  $P$  je točka ravnine  $ABC$

*Dokaz.* Pretpostavimo situaciju kao na slici 1.5.

Neka je trokut  $ABC$  šiljastokutan i neka je  $P$  točka ravnine sa suprotne strane točke  $B$  s obzirom na pravac  $CA$ . Neka se točka  $P_3$  ne nalazi na stranici  $\overline{AB}$  nego na njezinu produžetku, a točke  $P_1$  i  $P_2$  redom na stranicama  $\overline{BC}$  i  $\overline{CA}$ . Slično se teorem dokazuje i u ostalim situacijama.

Točke  $P, P_3, A, P_2$  su redom koncikličke točke jer pripadaju kružnici promjera  $\overline{PA}$  pa možemo primijeniti teorem o obodnim kutovima nad lukom  $\widehat{P_3A}$ :

$$\sphericalangle P_3PA = \sphericalangle P_3P_2A.$$

Kako su točke  $P_1, P_2, P_3$  kolinearne, kutovi  $\sphericalangle P_3P_2A$  i  $\sphericalangle P_1P_2C$  imaju zajednički vrh te im krakovi pripadaju istim pravcima (Simsonov pravac i pravac  $CA$ ) pa zaključujemo da su ti kutovi vršni te vrijedi:

$$\sphericalangle P_3P_2A = \sphericalangle P_1P_2C.$$

Točke  $P, P_2, P_1, C$  su redom koncikličke točke jer pripadaju kružnici promjera  $\overline{PC}$  pa možemo primijeniti teorem o obodnim kutovima nad lukom  $\widehat{P_1C}$ :

$$\sphericalangle P_1P_2C = \sphericalangle P_1PC.$$

Sada imamo jednakost kutova:

$$\sphericalangle P_1PC = \sphericalangle P_1P_2C = \sphericalangle P_3P_2A = \sphericalangle P_3PA.$$

Točke  $P, P_3, B, P_1$  su redom koncikličke točke jer pripadaju kružnici promjera  $\overline{PB}$  pa vrijedi:

$$\sphericalangle P_3PP_1 + \sphericalangle P_1BP_3 = \pi. \quad (1.17)$$

Uočimo:

$$\sphericalangle P_3PC = \sphericalangle P_3PP_1 + \sphericalangle P_1PC = \sphericalangle P_3PA + \sphericalangle APC. \quad (1.18)$$

Koristeći se jednakošću kutova  $\sphericalangle P_3PA = \sphericalangle P_1PC$  te relacijom 1.18 zaključujemo da je  $\sphericalangle P_3PP_1 = \sphericalangle APC$ . Kada na relaciju 1.17 primijenimo prethodnu jednakost imamo:

$$\sphericalangle APC + \sphericalangle P_1BP_3 = \pi.$$

Točka  $P_3$  pripada pravcu  $AB$ , a točka  $P_1$  pravcu  $BC$  pa je:

$$\sphericalangle P_3BP_1 = \sphericalangle ABC,$$

te vrijedi:

$$\sphericalangle APC + \sphericalangle ABC = \pi$$

čime smo dokazali da su točke  $P, A, B, C$  koncikličke.

Dakle, ako su ortogonalne projekcije  $P_1, P_2, P_3$  kolinearne onda je  $P$  točka kružnice opisane trokutu  $ABC$ .  $\square$

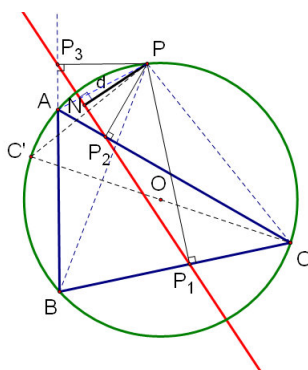
Sada možemo izreći i konačan zaključak o Simsonovom pravcu.

- Dane su nekolinearne točke  $A, B, C$  i točka  $P$ . Neka su točke  $P_1, P_2, P_3$  ortogonalne su projekcije točke  $P$  na pravce  $BC, CA, AB$ , redom. Točke  $P_1, P_2, P_3$  kolinearne ako i samo ako je  $P$  točka kružnice  $k$  opisane trokutu  $ABC$ .

Iz dokaza teorema 1.1 je jasno da Simsonov pravac možemo definirati i na drukčiji način.

- Neka je dana kružnica  $k$  i neka točka  $P$  kružnice  $k$ . Povucimo točkom  $P$  tri različite tetive  $\overline{PA}, \overline{PB}, \overline{PC}$ . Konstruiramo tri kružnice  $k_a, k_b, k_c$  kojima su spomenute tetive promjeri. Te tri kružnice prolaze točkom  $P$  i sijeku se u parovima u još tri kolinearne točke. Pravac kojemu pripadaju te točke naziva se Simsonov pravac.

**Teorem 1.4.** *Neka je  $P$  proizvoljna točka kružnice opisane trokutu  $ABC$ . Neka su točke  $P_1, P_2, P_3$  ortogonalne projekcije točke  $P$  na pravce  $BC, CA, AB$  redom. Tada vrijedi:  $|PA| \cdot |PP_1| = |PB| \cdot |PP_2| = |PC| \cdot |PP_3| = 2Rd$ , gdje je  $R$  radijus opisane kružnice, a  $d$  udaljenost točke  $P$  od Simsonovog pravca  $s_P$ . Pravac kojemu pripadaju te tri točke nazivamo Simsonov pravac.*



Slika 1.6: Teorem 1.4 u slučaju šiljastokutnog trokuta

*Dokaz.* Promotrimo situaciju kao na slici 1.6. Neka je  $P$  točka kružnice opisane trokutu  $ABC$  na kružnom luku  $\widehat{CA}$ , kojem ne pripada točka  $B$  te neka je  $P_3$  na produžetku stranice  $\overline{AB}$ . Neka je točka  $N$  ortogonalna projekcija točke  $P$  na Simsonov pravac  $s_P$ .

Uočimo trokute  $PBP_3$  i  $PCP_2$  i njihove kutove.

Točke  $A, B, C, P$  redom su koncikličke točke kružnice opisane trokutu  $ABC$  pa možemo primijeniti teorem o obodnim kutovima nad kružnim lukom  $\widehat{PA}$  te imamo:  $\sphericalangle PBA = \sphericalangle PCA$ . Zbog toga što  $P_3$  pripada pravcu  $AB$  imamo:  $\sphericalangle PBA = \sphericalangle PBP_3$  i  $P_2$  pripada pravcu  $CA$  pa imamo:  $\sphericalangle PCA = \sphericalangle PCP_2$  stoga vrijedi jednakost kutova  $\sphericalangle PBP_3 = \sphericalangle PCP_2$ .

Točke  $P_2$  i  $P_3$  su ortogonalne projekcije točke  $P$  na pravce  $CA$  i  $AB$  pa znamo da su  $\sphericalangle BP_3P$  i  $\sphericalangle CP_2P$  pravi kutovi. Trokuti  $PBP_3$  i  $PCP_2$  imaju sve kutove jednakih veličina pa zaključujemo da su slični po K-K-K poučku o sličnosti trokuta.

Zbog sličnosti trokuta vrijedi razmjjer

$$\frac{|PB|}{|PC|} = \frac{|PP_3|}{|PP_2|}$$

odnosno

$$|PB| \cdot |PP_2| = |PC| \cdot |PP_3|. \quad (1.19)$$

Promotrimo sada trokute  $PAP_2$  i  $PBP_1$ .

Analogno pokažemo da vrijedi:  $\sphericalangle P_2AP = \sphericalangle P_1BP$  i da su  $\sphericalangle PP_1B$  i  $\sphericalangle PP_2A$  pravi kutovi te zaključujemo da su trokuti  $PAP_2$  i  $PBP_1$  slični.

Zbog sličnosti trokuta  $PAP_2$  i  $PBP_1$  vrijedi:

$$\frac{|PB|}{|PA|} = \frac{|PP_1|}{|PP_2|}$$

odnosno

$$|PB| \cdot |PP_2| = |PA| \cdot |PP_1|. \quad (1.20)$$

Iz relacija 1.19 i 1.20 slijedi:

$$|PA| \cdot |PP_1| = |PB| \cdot |PP_2| = |PC| \cdot |PP_3|. \quad (1.21)$$

Označimo sada s  $d$  udaljenost točke  $P$  od Simsonovog pravca  $s_P$ ,  $d = |PN|$ . Uočimo trokute  $PNP_3$  i  $PP_2A$ . Imamo jednakost kutova  $\sphericalangle PP_2A = \sphericalangle PNP_3 = \frac{\pi}{2}$  po definiciji točaka  $N$  i  $P_2$ . Točke  $P, P_3, A, P_2$  su koncikličke točke kružnice promjera  $\overline{PA}$  pa imamo jednakost obodnih kutova nad kružnim lukom  $\widehat{PP_2}$ :  $\sphericalangle P_2AP = \sphericalangle P_2P_3P = \sphericalangle NP_3P$  jer je  $N$  točka Simsonovog pravca, tj. točke  $P_3, N, P_2$  su kolinearne. Zaključujemo da su trokuti  $PNP_3$  i  $PP_2A$  slični po K-K-K poučku o sličnosti trokuta.

Zbog sličnosti trokuta  $PNP_3$  i  $PP_2A$  vrijedi:

$$\frac{|PP_3|}{|PA|} = \frac{|PN|}{|PP_2|}$$

odnosno

$$|PP_3| \cdot |PP_2| = |PA| \cdot |PN|. \quad (1.22)$$

Neka je  $C'$  dijametralno suprotna točka točki  $C$  na kružnici opisano trokutu  $ABC$ , dakle  $|CC'| = 2R$ .

Promotrimo trokute  $C'PC$  i  $PP_1B$ .

Kut  $\sphericalangle C'PC$  je kut nad promjerom opisane kružnice pa iz toga slijedi:  $\sphericalangle C'PC = \frac{\pi}{2}$ . Kako je  $P_1$  ortogonalna projekcija točke  $P$  na pravac  $BC$  znamo da je  $\sphericalangle PP_1B$  pravi kut. Točke  $P, C', B, C$  su koncikličke točke te je  $P_1$  točka pravca  $BC$  pa primjenjujemo teorem o obodnim kutovima nad kružnim lukom  $\widehat{PC}$ :  $\sphericalangle CC'P = \sphericalangle CBP = \sphericalangle P_1BP$ . Trokuti  $C'PC$  i  $PP_1B$  su slični po K-K-K poučku o sličnosti trokuta.

Zbog sličnosti trokuta  $C'PC$  i  $PP_1B$  vrijedi:

$$\frac{|PB|}{|CC'|} = \frac{|PP_1|}{|PC|}$$

odnosno

$$|PB| \cdot |PC| = |CC'| \cdot |PP_1|.$$

Kako su  $C$  i  $C'$  dijametralno suprotne točke opisane kružnice slijedi  $|CC'| = 2R$  te prethodnu jednakost možemo pisati:

$$|PB| \cdot |PC| = 2R \cdot |PP_1|. \quad (1.23)$$

Množeći relacije 1.22 i 1.23 dobivamo

$$|PP_3| \cdot |PP_2| \cdot |PB| \cdot |PC| = |PA| \cdot |PN| \cdot 2R \cdot |PP_1|.$$

Zbog komutativnosti to možemo zapisati:

$$|PB| \cdot |PP_2| \cdot |PC| \cdot |PP_3| = |PA| \cdot |PP_1| \cdot 2R \cdot |PN|.$$

Kako je  $|PB| \cdot |PP_2| = |PA| \cdot |PP_1|$  te  $|PC| \cdot |PP_3| = |PA| \cdot |PP_1|$  imamo:

$$|PA| \cdot |PP_1| \cdot |PA| \cdot |PP_1| = |PA| \cdot |PP_1| \cdot 2R \cdot |PN|.$$

Sada možemo prethodnu jednakost podijeliti s  $|PA| \cdot |PP_1|$  nakon čega imamo:

$$|PA| \cdot |PP_1| = 2R|PN|$$

koristeći relaciju 1.21 i  $|PN| = d$  konačno dobivamo

$$|PA| \cdot |PP_1| = |PB| \cdot |PP_2| = |PC| \cdot |PP_3| = 2Rd.$$

Analogno se teorem dokazuje i u ostalim slučajevima. □

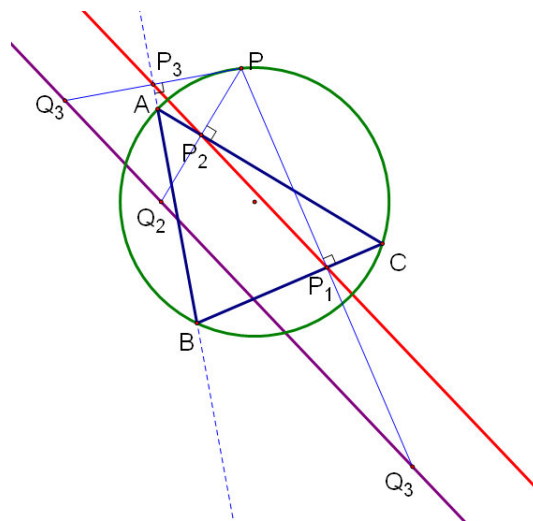


## Poglavlje 2

### Steinerov pravac

Slijedeći teorem reći će nešto više o još nekim točkama koje ovise o izboru točke  $P$  kružnice opisane danom trokutu.

**Teorem 2.1.** *Neka točka  $P$  pripada kružnici  $k$  opisanoj trokutu  $ABC$ . Neka su  $Q_1, Q_2, Q_3$  točke simetrične točki  $P$  s obzirom na pravce  $BC, AC, AB$  redom. Tada su točke  $Q_1, Q_2, Q_3$  kolinearne.*



Slika 2.1: Steinerov pravac točke  $P$  s obzirom na trokut  $ABC$

*Dokaz.* Neka je  $P$  točka kružnice opisane trokutu  $ABC$  različita od  $A, B, C$ .

Sjetimo se:  $P_1, P_2, P_3$  su ortogonalne projekcije točke  $P$  na pravce  $BC, CA, AB$  redom i uočimo da je

$P_1$  polovište dužine  $\overline{PQ_1}$ ,

$P_2$  polovište dužine  $\overline{PQ_2}$ ,

$P_3$  polovište dužine  $\overline{PQ_3}$ .

Promatramo homotetiju  $\Phi$  sa središtem u točki  $P$  i koeficijentom 2.

Točke  $Q_1, Q_2, Q_3$  slike su točaka  $P_1, P_2, P_3$  pri djelovanju homotetije  $\Phi$ .

Prema teoremu 1.1 znamo da su točke  $P_1, P_2, P_3$  kolinearne na Simsonovom pravcu  $s_P$ .

Dakle, točke  $Q_1, Q_2, Q_3$  su kolinearne, pripadaju pravcu koji je slika pravca  $s_P$  pri djelovanju homotetije  $\Phi$ .

Dodatno, Simsonov pravac i pravac kojemu pripadaju točke  $Q_1, Q_2, Q_3$  su paralelni jer homotetija preslikava pravac u njemu paralelan pravac.  $\square$

**Definicija 2.2.** *Pravac kojemu pripadaju točke  $Q_1, Q_2, Q_3$  simetrične točki  $P$  kružnice opisane trokutu  $ABC$  s obzirom na pravce  $BC, CA, AB$  redom nazivamo **Steinerovim pravcem** točke  $P$  s obzirom na trokut  $ABC$  i označavamo ga s  $d_P$ .*

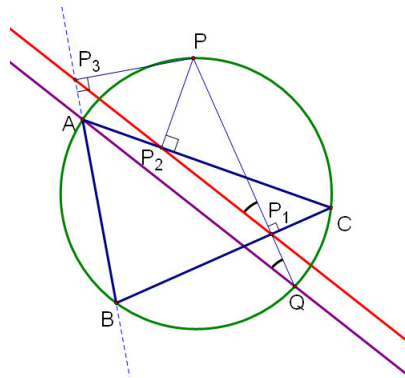
**Napomena.** Nakon što smo definirali pravac kojemu pripadaju točke  $Q_1, Q_2, Q_3$  možemo reći da su Simsonov pravac i Steinerov pravac točke  $P$  s obzirom na trokut  $ABC$  međusobno paralelni,  $s_P \parallel d_P$ .

**Teorem 2.3.** *Neka je  $P$  točka kružnice  $k$  opisane trokutu  $ABC$ . Točka  $P_1$  ortogonalna je projekcija točke  $P$  na pravac  $BC$ . Neka je  $Q$  druga točka presjeka pravca  $PP_1$  i kružnice  $k$ . Tada vrijedi:  $\sphericalangle(AQ, PP_1) = \sphericalangle(s_P, PP_1)$ , odnosno  $AQ \parallel s_P$ . Specijalno, ako je  $PP_1$  tangenta kružnice  $k$ , tj. ako je  $Q = P$  također vrijedi  $AQ \parallel s_P$ .*

*Dokaz.* Imamo situaciju kao na slici 2.2. Neka je  $P$  točka kružnog luka  $\widehat{CA}$ , kojem ne pripada točka  $B$  te neka je ortogonalna projekcija točke  $P$  na pravac  $AB$  na produžetku stranice  $\overline{AB}$ .

Točke  $Q, A, C, P$  su koncikličke jer točka  $Q$  pripada kružnici kojoj pripadaju točke  $A, C, P$  po njezinoj definiciji. Primjenjujemo teorem o obodnim kutovima nad kružnim lukom  $\widehat{PA}$ , pa imamo:

$$\sphericalangle PQA = \sphericalangle PCA. \quad (2.1)$$



Slika 2.2: Pravac  $PP_1$  presjeca kružnicu  $k$  u točki  $Q$

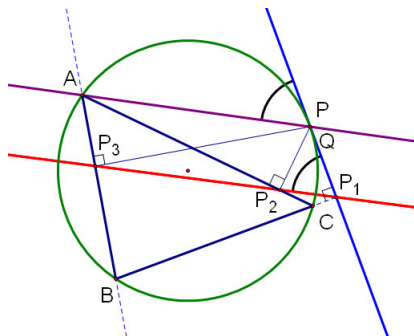
Točke  $P_1, P_2, C, P$  su koncikličke jer pripadaju kružnici promjera  $\overline{CP}$ . Uočavamo obodne kutove nad kružnim lukom  $\widehat{PP_2}$ :

$$\sphericalangle PP_1P_2 = \sphericalangle PCP_2. \tag{2.2}$$

Kako  $P_2$  pripada pravcu  $AC$  vrijedi:

$$\sphericalangle PP_1P_2 = \sphericalangle PCA. \tag{2.3}$$

Iz relacija 2.1 i 2.3 imamo:  $\sphericalangle PQA = \sphericalangle PP_1P_2$ . Kutovi su jednake veličine i oba kuta su s istih strana pravca kojemu pripada po jedan krak svakog od kutova pa zaključujemo da su to kutovi s paralelnim kracima, tj. da je pravac  $AQ$  paralelan Simsonovom pravcu  $s_P$ ,  $AQ \parallel s_P$ .



Slika 2.3: Pravac  $PP_1$  je tangenta kružnice  $k$

Gledamo sliku 2.3 za razmatranje specijalnog slučaja. Neka je pravac  $PP_1$  tangenta u točki  $P$  na kružnicu  $k$ . Označimo:  $t_P$  je pravac točkama  $P, P_1$ .

Točke  $P_1, P_2, C, P$  su koncikličke jer pripadaju kružnici promjera  $\overline{CP}$ . Primjenjujemo teorem o obodnim kutovima nad kružnim lukom  $\widehat{PP_2}$ :  $\sphericalangle PP_1P_2 = \sphericalangle PCP_2$ .

Točka  $P_2$  je ortogonalna projekcija na pravac  $AC$  pa vrijedi:

$$\sphericalangle PP_1P_2 = \sphericalangle PCA.$$

Kružnica  $k$  sadrži točke  $A, C, P$ , koristeći lemu A.3 da za tangentu  $t_P$  kružnice  $k$  u točki  $P$  vrijedi:

$$\sphericalangle (PA, t_P) = \sphericalangle PCA.$$

Iz prethodne dvije jednakosti imamo:  $\sphericalangle (PA, t_P) = \sphericalangle PP_1P_2$ , no kako je pravac  $PP_1$  tangenta u točki  $P$  na kružnicu  $k$ , a točka  $Q$  druga točka presijeka tog pravca i kružnice znamo da je  $Q = P$  pa jednakost kutova tumačimo:  $\sphericalangle (AQ, PP_1) = \sphericalangle (s_P, PP_1)$ . Kutovi su jednake veličine i oba kuta su s istih strana tangente pa zaključujemo da su to kutovi s paralelnim kracima, tj. da je pravac  $AQ$  paralelan Simsonovom pravcu  $s_P$ ,  $AQ \parallel s_P$ . Čime smo dokazali tvrdnju teorema.

□

Sada ćemo iskazati i dokazati lemu koja je potrebna za dokaz sljedećeg teorema. U njoj ćemo definirati točke koje u nastavku rada često spominjemo.

**Lema 2.4.** *Neka je  $H$  ortocentar trokuta  $ABC$  i  $k$  kružnica opisana trokutu  $ABC$ . Neka je  $H_1$  presjek pravca  $AH$  i kružnice  $k$ ,  $H_2$  presjek pravca  $BH$  i kružnice  $k$  i  $H_3$  presjek pravca  $CH$  i kružnice  $k$ . Tada su točke  $H_1, H_2, H_3$  simetrične ortocentru trokuta s obzirom na pravce  $BC, CA, AB$ , redom.*

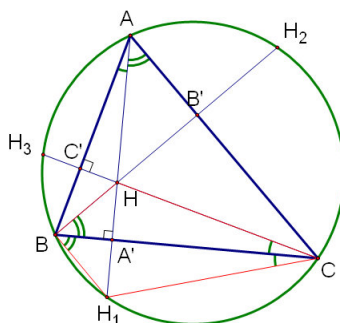
*Dokaz.* Dokazat ćemo da je točka  $H_1$  simetrična ortocentru trokuta  $H$  s obzirom na pravac  $BC$  jer se na isti način pokaže i za  $H_2$  i  $H_3$ .

Neka je  $A'$  nožište okomice iz točke  $A$  na pravac  $BC$ . Analogno definiramo točke  $B', C'$ .

Kako su točke  $A, B, H_1, C$  koncikličke možemo primijeniti teorem o obodnim kutovima nad kružnim lukom  $\widehat{BH_1}$  i kružnim lukom  $\widehat{H_1C}$ :

$$\sphericalangle BCH_1 = \sphericalangle BAH_1,$$

$$\sphericalangle H_1BC = \sphericalangle H_1AC.$$



Slika 2.4: Točke simetrične ortocentru s obzirom na pravce stranica trokuta pripadaju kružnici opisanoj trokutu

Uočimo trokute  $C'HA$  i  $A'HC$ .

Kutovi  $\sphericalangle C'HA$  i  $\sphericalangle A'HC$  su vršni kutovi jer im krakovi pripadaju istim pravcima i imaju zajednički vrh  $H$  pa su jednakih veličina. Kako su  $C'$  i  $A'$  nožišta okomica na stranice  $AB$  i  $BC$  slijedi:  $\sphericalangle HC'A = \sphericalangle HA'C = \frac{\pi}{2}$ . Imamo dva trokuta  $C'HA$  i  $A'HC$  čija su dva kuta jednakih veličina pa zaključujemo da vrijedi:  $\sphericalangle C'AH = \sphericalangle HCA'$ .

Zbog toga što  $C'$  pripada pravcu  $AB$ , a  $H$  pravcu  $AH_1$  slijedi:

$$\sphericalangle C'AH = \sphericalangle BAH_1.$$

Iz prethodne dvije jednakosti imamo:

$$\sphericalangle HCA' = \sphericalangle BAH_1.$$

Kako je  $\sphericalangle BCH_1 = \sphericalangle BAH_1$  i  $\sphericalangle HCA' = \sphericalangle BAH_1$  slijedi da je  $\sphericalangle BCH_1 = \sphericalangle HCA'$ .

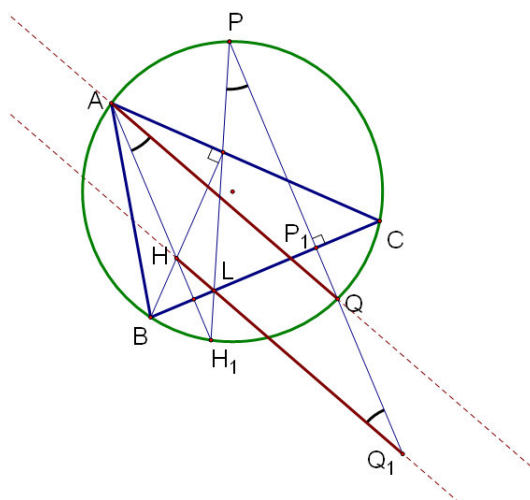
Promotrimo sada trokute  $H_1A'C$  i  $HA'C$ .

Kako je  $A'$  nožište okomice na stranicu  $BC$  te su  $H, A', H_1$  kolinearni znamo da je  $\sphericalangle HA'C = \sphericalangle H_1A'C = \frac{\pi}{2}$  te znamo da je  $\sphericalangle A'CH_1 = \sphericalangle A'CH$ .

Također znamo da je trokutima  $H_1A'C$  i  $HA'C$  stranica  $\overline{A'C}$  zajednička pa po K-S-K poučku o sukladnosti trokuta zaključujemo da su trokuti  $H_1A'C$  i  $HA'C$  sukladni. Zbog sukladnosti slijedi da je  $\overline{HA'} = \overline{H_1A'}$  pa zaključujemo da je točka  $H_1$  simetrična točki  $H$  s obzirom na pravac  $BC$ .

Analogno dokazujemo simetričnost točke  $H_2$  točki  $H$  s obzirom na pravce  $CA$  i simetričnost točke  $H_3$  točki  $H$  s obzirom na pravac  $AB$ .  $\square$

**Teorem 2.5.** Neka je točka  $H_1$  definirana kao u prethodnoj lemi. Neka je  $P$  točka kružnice kojoj pripadaju točke  $A, B, C, H_1$ , različita od tih točki te neka je  $Q$  druga točka presjeka pravca  $PP_1$  i kružnice  $k$ , gdje je  $P_1$  ortogonalna projekcija točke  $P$  na pravac  $BC$ . Točka  $Q_1$  simetrična je točki  $P$  s obzirom na pravac  $BC$ . Tada vrijedi:  $\sphericalangle PQ_1H = \sphericalangle H_1AQ$ , odnosno  $HQ_1 \parallel AQ$ .



Slika 2.5: Pravac  $HQ_1$  paralelan s pravcem  $AQ$

*Dokaz.* Neka je  $P$  točka kružnog luka  $\widehat{CA}$  kojemu ne pripada točka  $B$ . Neka pravac  $PP_1$  siječe kružnicu opisanu trokutu  $ABC$  u dvije različite točke.

Uočimo da je  $H$  simetrična točki  $H_1$  s obzirom na pravac  $BC$  te da je  $Q_1$  je simetrična točki  $P$  s obzirom na pravac  $BC$ .

Iz toga možemo uočiti da je pravac  $BC$  os simetrije koji preslikava:

$$H_1 \mapsto H$$

$$P \mapsto Q_1$$

$$Q_1 \mapsto P$$

Označimo presjek pravaca  $\overline{PH_1}$  i  $\overline{HQ_1}$  s točkom  $L$ . Uočimo trokute  $LP_1P$  i  $LP_1Q_1$ . Stranica  $\overline{LP_1}$  im je zajednička, stranice  $\overline{P_1P}$  i  $\overline{P_1Q_1}$  su jednako duge jer su točke  $P$  i  $Q_1$  simetrične s obzirom na pravac  $BC$ , kutovi  $\sphericalangle PP_1L$  i  $\sphericalangle Q_1P_1L$  su pravi jer je pravac  $PP_1$  kojemu pripada

točka  $Q_1$  okomit na pravac  $BC$ . Po S-K-S poučku o sukladnosti trokuta slijedi da su trokuti  $LP_1P$  i  $LP_1Q_1$  sukladni. Zbog sukladnosti imamo jednakost kutova:

$$\sphericalangle P_1Q_1L = \sphericalangle LPP_1.$$

No, kako je  $L$  presijek pravaca  $HQ_1$  i  $H_1P$  te kako su  $P, P_1, Q_1$  kolinearne vrijedi:

$$\sphericalangle PQ_1H = \sphericalangle H_1PQ_1. \quad (2.4)$$

Točke  $H_1, A, P, Q$  su koncikličke točke kružnice  $k$ , pa možemo primijeniti teorem o jednakosti obodnih kutova kružnice nad kružnim lukom  $\widehat{H_1Q}$ :

$$\sphericalangle H_1PQ = \sphericalangle H_1AQ. \quad (2.5)$$

Iz relacija 2.4 i 2.5 možemo zaključiti:

$$\sphericalangle PQ_1H = \sphericalangle H_1AQ$$

Kako je pravac  $BC$  os simetrije znamo:

$$PQ_1 \perp BC$$

$$AH_1 \perp BC$$

iz čega slijedi da je

$$PQ_1 \parallel AH_1.$$

Imamo jednakost kutova  $\sphericalangle PQ_1H = \sphericalangle H_1AQ$  i paralelnost pravaca  $PP_1 \parallel AH_1$  pa možemo zaključiti da je  $HQ_1 \parallel AQ$ .

Pretpostavimo sada da je pravac  $PP_1$  tangenta na kružnicu  $k$  u točki  $P$ . Tada je  $Q = P$ . Promatramo situaciju na slici 2.6.

$A, H_1, P$  su točke kružnice  $k$ . Za tangentu kružnice  $k$  u točki  $P$  koristeći lemu A.3 vrijedi:

$$\sphericalangle (t_P, PH_1) = \sphericalangle H_1AP. \quad (2.6)$$

Zbog osne simetrije imamo sukladne trokute  $LPP_1$  i  $LQ_1P$ , pa vrijedi već pokazana jednakost kutova:

$$\sphericalangle PQ_1H = \sphericalangle H_1PQ_1. \quad (2.7)$$

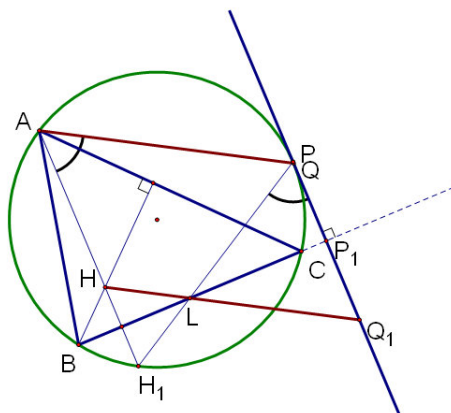
Koristeći relacije 2.6 i 2.7 možemo zaključiti:

$$\sphericalangle PQ_1H = \sphericalangle H_1AQ.$$

Kako je  $PQ_1 \parallel AH_1$ , jer je  $BC$  os simetrije, slijedi da je  $HQ_1 \parallel AQ$ .

Čime smo dokazali teorem u slučaju da pravac  $PP_1$  siječe kružnicu u jednoj ili dvije točke.

□



Slika 2.6: Pravac  $PP_1$  je tangenta na kružnicu  $k$

**Teorem 2.6.** *Točka  $H_1$  definirana je kao u lemi 2.4. Neka je  $P$  točka kružnice kojoj pripadaju točke  $A, B, C, H_1$ , različita od tih točki. Točka  $H$  je ortocentar trokuta  $ABC$ , točka  $P_1$  ortogonalna je projekcija točke  $P$  na pravac  $BC$ . Neka je  $Q$  druga točka presjeka pravca  $PP_1$  i kružnice  $k$ . Tada Steinerov pravac  $d_P$  točke  $P$  sadrži točku  $H$ .*

*Dokaz.* Iz teorema 2.3 i teorema 2.5 imamo:

$$HQ_1 \parallel AQ$$

$$AQ \parallel s_P$$

odakle slijedi:

$$HQ_1 \parallel s_P.$$

Pravac  $HQ_1$  je paralelan sa Simsonovim pravcem  $s_P$  i sadrži točku  $Q_1$ .

Iz dokaza teorema 2.1 i definicije 2.2 znamo da je Steinerov pravac  $d_P$  paralelan sa Simsonovim pravcem  $s_P$  i da sadrži točku  $Q_1$ .

Zaključujemo da je Steinerov pravac  $d_P$  ustvari pravac kroz točke  $H, Q_1$ .

Dakle, Steinerov pravac  $d_P$  sadrži ortocentar  $H$  trokuta  $ABC$  ako  $P$  pripada kružnici  $k$  koja prolazi točkama  $A, B, C, H_1$ .

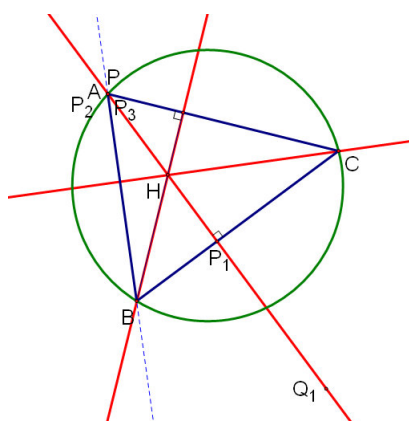
□



Dokazali smo da Steinerovom pravcu bilo koje točke kružnice opisane trokutu pripada ortocentar trokuta. Promotrimo Steinerov i Simsonov pravac vrhova trokuta.

Specijalano, Simsonovi pravci vrhova trokuta sijeku se u ortocentru trokuta što ćemo pokazati u sljedećem teoremu.

**Teorem 2.7.** *Dan je trokut  $ABC$  i njemu opisana kružnica. Simsonovi pravci  $s_A, s_B, s_C$  sijeku se u ortocentru  $H$  trokuta  $ABC$ .*



Slika 2.7: Simsonovi pravci vrhova trokuta  $ABC$  sijeku se u ortocentru trokuta

*Dokaz.* Odredimo Simsonov pravac točke  $A$ . Ortogonalne projekcije točke  $A$  na pravce  $CA$  i  $AB$  su ta ista točka  $A$ , ortogonalna projekcija na pravac  $BC$  je točka  $P_1$  koja je ujedno i nožište visine iz točke  $A$  na stranicu  $CB$  trokuta  $ABC$ . Dakle, Simsonovom pravcu pripada točka  $A$  i nožište visine iz  $A$  pa zaključujemo da je Simsonov pravac  $s_A$  ujedno i pravac kojemu pripada visina trokuta iz točke  $A$ .

Kako smo u prethodnom teoremu dokazali da Steinerovom pravcu točke kružnice opisane trokutu pripada ortocentar trokuta znamo da Steinerovom pravcu točke  $A$  pripada točka  $A$  i točka  $H$ .

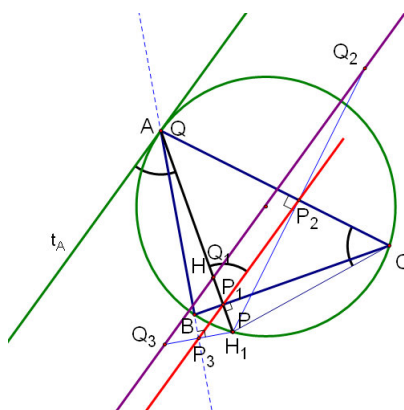
Uočimo da se Simsonov pravac  $s_A$  i Steinerov pravac  $d_A$  poklapaju.

Na isti način definiramo Simsonov pravac  $s_B$  kojemu pripada visina trokuta iz točke  $B$  te Simsonov pravac  $s_C$  kojemu pripada visina trokuta iz točke  $C$ . Analogno dokažemo da se Simsonov pravac  $s_B$  i Steinerov pravac  $s_c$  poklapaju kao i pravci  $s_C = d_C$ .

Kako svakom od Simsonovih pravaca  $s_A, s_B, s_C$  pripada ortocentar trokuta  $H$  zaključujemo da se  $s_A, s_B, s_C$  sijeku u točki  $H$ . □

Promotrimo sada Simsonov i Steinerov pravac točkaka  $H_1, H_2$  i  $H_3$ .

**Teorem 2.8.** *Neka je  $P$  točka kružnice  $k$  kojoj pripadaju točke  $A, B, C, H_1$ , gdje je  $H_1$  definirana kao u lemi 2.4. Neka je  $t_A$  tangenta na kružnicu  $k$  u točki  $A$ . Tada je tangenta  $t_A$  u točki  $A$  kružnice  $k$  paralelna sa Simsonovim pravcem  $s_{H_1}$  i Steinerovim pravcem  $d_{H_1}$ .*



Slika 2.8: Paralelnost Simsonovog pravca  $s_{H_1}$ , Steinerovog pravca  $d_{H_1}$  i tangente  $t_A$

*Dokaz.* Imamo situaciju kao na slici 2.8. Odredimo Simsonov pravac  $s_{H_1}$  i Steinerov pravac  $d_{H_1}$  točke  $H_1$  s obzirom na trokut  $ABC$  pa zaključujemo da je  $P = H_1$ .

Neka su točke  $P_1, P_2, P_3$  ortogonalne projekcije točke  $P$  na pravce  $BC, CA, AB$  te neka su  $Q_1, Q_2, Q_3$  simetrične točki  $P$  s obzirom na pravce  $BC, CA, AB$ .

Točke  $A, H_1, C$  pripadaju kružnici  $k$ . Za tangentu  $t_A$  kružnice  $k$  u točki  $A$  primjenom leme A.3 vrijedi:

$$\sphericalangle(t_A, AH_1) = \sphericalangle ACH_1.$$

Zbog toga što je  $H_1 = P$  točke  $P_1, P_2, C, H_1$  su koncikličke točke kružnice promjera  $\overline{CH_1}$  pa vrijedi:

$$\sphericalangle H_1P_1P_2 + \sphericalangle P_2CH_1 = \pi. \quad (2.8)$$

Zato jer je  $P_2$  točka pravca  $CA$  vrijedi:

$$\sphericalangle P_2CH_1 = \sphericalangle ACH_1. \quad (2.9)$$

Iz relacija 2.8 i 2.9 imamo:

$$\sphericalangle H_1P_1P_2 + \sphericalangle ACH_1 = \pi. \quad (2.10)$$

Kako je  $P = H_1$  vrijedi da je  $Q = A$  jer je  $Q$  točka presjeka kružnice opisane trokutu  $ABC$  i pravca okomitog na stranicu  $\overline{BC}$  iz točke  $P$ . Znamo da pravcu  $PQ$ , tj pravcu  $H_1Q$  pripada točka  $P_1$  pa imamo:

$$\sphericalangle H_1P_1P_2 + \sphericalangle P_2P_1A = \pi. \quad (2.11)$$

Iz relacija 2.10 i 2.11 imamo:

$$\sphericalangle P_2P_1A = \sphericalangle ACH_1.$$

Kut  $\sphericalangle P_2P_1A$  je kut između Simsonovog pravca  $s_{H_1}$  i pravca  $AP$  vrijedi:

$$\sphericalangle (s_{H_1}, AP) = \sphericalangle ACP.$$

Uočimo kako je  $\sphericalangle (t_A, AP) = \sphericalangle ACP$  i  $\sphericalangle (s_{H_1}, AP) = \sphericalangle ACP$  te možemo zaključiti da su kutovi  $\sphericalangle (t_A, AP)$  i  $\sphericalangle (s_{H_1}, AP)$  jednakih veličina. Nalaze se sa suprotnih strana pravca kojemu pripada po jedan krak svakog od kutova pa zaključujemo da su to kutovi s paralelnim kracima. Tada vrijedi da je Simsonov pravac  $s_{H_1}$  paralelan s tangentom  $t_A$ .

Znamo da su Simsonov i Steinerov pravac neke točke međusobno paralelni pa zaključujemo da je Steinerov pravac  $d_{H_1}$  paralelan s tangentom  $t_A$ .  $\square$

Dokazali smo da su Simsonov i Steinerov pravac točke  $H_1$  paralelni s tangentom kružnice opisane trokutu  $ABC$  u točki  $A$ . Na isti način bi iskazali i dokazali i da su Simsonov i Steinerov pravac točke  $H_2$  paralelni s tangentom kružnice opisane trokutu  $ABC$  u točki  $B$  te da su Simsonov i Steinerov pravac točke  $H_3$  paralelni s tangentom kružnice opisane trokutu  $ABC$  u točki  $C$ , gdje su  $H_2$  i  $H_3$  definirane kao u lemi 2.4.

**Teorem 2.9.** *Simsonovom pravcu  $s_P$  točke  $P$  kružnice opisane trokutu  $ABC$  pripada polovište  $P_0$  dužine  $\overline{PH}$  gdje je  $H$  ortocentar trokuta  $ABC$ .*

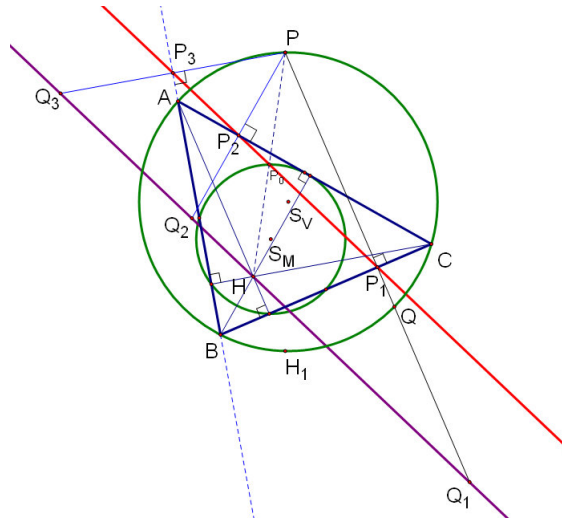
*Dokaz.* Iz teorema 2.6 znamo da ortocentar  $H$  trokuta  $ABC$  pripada Steinerovom pravcu  $d_P$ . Promotrimo homotetiju  $\Psi$  sa središtem u točki  $P$  i koeficijentom  $\frac{1}{2}$ .

Simsonov pravac  $s_P$  slika je Steinerovog pravca  $d_P$ , primijenimo li homotetiju  $\Psi$ .

Točka  $H$  pripada Steinerovom pravcu  $d_P$ , dakle točka koja je slika točke  $H$  pri homotetiji  $\Psi$  pripada Simsonovom pravcu  $s_P$ .

Označimo s  $P_0$  točku homotetičnu točki  $H$ . Točka  $P_0$  dobivena tom homotetijom polovište je dužine  $\overline{HP}$ . Pa zaključujemo da polovište  $P_0$  pripada Simsonovom pravcu  $s_P$ .  $\square$

**Teorem 2.10.** *Neka je  $P$  točka kružnice opisane trokutu  $ABC$ ,  $H$  ortocentar trokuta  $ABC$ ,  $P_0$  je polovište dužine  $\overline{PH}$ . Tada točka  $P_0$  pripada Feuerbachovoj kružnici trokuta  $ABC$ .*



Slika 2.9: Feuerbachova kružnica trokuta  $ABC$

*Dokaz.* Označimo Feuerbachovu kružnicu s  $k'$ .

Zbog leme A.5 znamo da je Feuerbachova kružnica trokuta  $ABC$  slika opisane kružnice trokuta  $ABC$ , sa središtem homotetije  $H$  i koeficijentom  $\frac{1}{2}$ . Kako je  $P_0$  polovište dužine  $\overline{PH}$  primjenom te iste homotetije znamo da je  $P_0$  slika točke  $P$ .

Kako  $P$  pripada kružnici  $k$  tako  $P_0$ , polovište dužine  $\overline{PH}$ , pripada Feuerbachovoj kružnici  $k'$ .

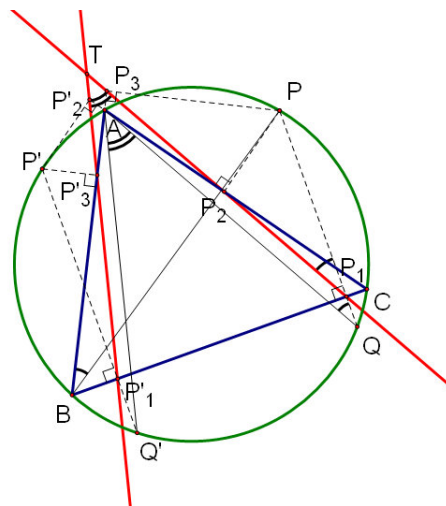
□

## Poglavlje 3

### Okomiti Simsonovi pravci

U ovom poglavlju promatrat ćemo međusoban odnos dvaju Simsonovih pravaca te u kakvom su međusobnom odnosu točke kružnice ako su Simsonovi pravci tih točaka okomiti. Istražit ćemo geometrijsko mjesto točaka presjeka dvaju okomitih Simsonovih pravaca.

**Teorem 3.1.** *Neka su  $P$  i  $P'$  dvije različite točke kružnice opisane trokutu  $ABC$  koje određuju dva Simsonova pravca  $s_P$  i  $s_{P'}$ . Tada je kut između Simsonovih pravaca  $s_P$  i  $s_{P'}$  jednak polovici središnjeg kuta nad kružnim lukom  $\widehat{PP'}$ .*



Slika 3.1: Kut dvaju Simsonovih pravaca

*Dokaz.* Promotrimo situaciju kao na slici 3.1. Neka su točke  $P$  i  $P'$  na različitim kružnim lukovima. Neka je točka  $P$  na kružnom luku  $\widehat{CA}$  kojoj ne pripada točka  $B$ , a točka  $P'$  na kružnom luku  $\widehat{AB}$  kojem ne pripada točka  $C$ . Neka su  $P_1, P_2, P_3$  ortogonalne projekcije točke  $P$  na pravce  $BC, CA, AB$ , te  $P'_1, P'_2, P'_3$  ortogonalne projekcije točke  $P'$  na pravce  $BC, CA, AB$ .

Točka  $Q$  presjek je pravca  $PP_1$  i kružnice opisane trokutu  $ABC$ . Analogno definiramo i točku  $Q'$ . Označimo točkom  $T$  presjek Simsonovih pravaca  $s_p$  i  $s_{p'}$ .

Iz teorema 2.3 slijedi paralelnost pravaca:

$$AQ \parallel s_p. \quad (3.1)$$

Analogno, gledamo li točku  $P'$  imamo paralelnost:

$$AQ' \parallel s_{p'}. \quad (3.2)$$

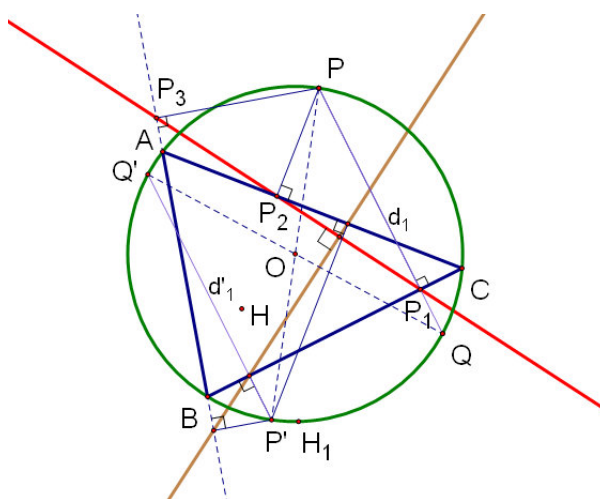
Simsonovi pravci  $s_p$  i  $s_{p'}$  sijeku se u točki  $T$  dok se pravci  $AQ$  i  $AQ'$  sijeku u točki  $A$ . Promotrimo kut koji zatvaraju Simsonovi pravci  $s_p$  i  $s_{p'}$ , kut  $\angle P'_1TP_1$ , i kut koji zatvaraju pravci  $AQ$  i  $AQ'$ , kut  $\angle Q'AQ$ . Kako je  $AQ \parallel s_p$  i  $AQ' \parallel s_{p'}$  uočavamo da su  $\angle P'_1TP_1$  i  $\angle Q'AQ$  kutovi s paralelnim kracima pa vrijedi:

$$\angle P'_1TP_1 = \angle Q'AQ. \quad (3.3)$$

Znamo da je  $\angle Q'AQ$  obodni kut kružnice nad kružnim lukom  $\widehat{Q'Q}$  pa možemo primijeniti teorem o obodnom i središnjem kutu kružnice nad istim kružnim lukom te zaključujemo da je kut  $\angle Q'AQ$  jednak polovini središnjeg kuta nad kružnim lukom  $\widehat{Q'Q}$ . Primijenimo li relaciju 3.3 dobijemo da je kut  $\angle P'_1TP_1$  jednak polovini središnjeg kuta nad kružnim lukom  $\widehat{Q'Q}$ . Kako su pravci  $PQ$  i  $P'Q'$  okomiti na pravac  $BC$  slijedi da su međusobno paralelni te zaključujemo da je duljina kružnog luka  $\widehat{Q'Q}$  jednaka duljini kružnog luka  $\widehat{P'P}$  pa imamo da je kut  $\angle P'_1TP_1$  jednak polovini središnjeg kuta nad kružnim lukom  $\widehat{P'P}$ . Čime smo dokazali da je kut između Simsonovih pravaca  $s_p$  i  $s_{p'}$  jednak polovini središnjeg kuta nad kružnim lukom  $\widehat{P'P}$ .

□

**Teorem 3.2.** Neka su  $P$  i  $P'$  dvije različite točke kružnice  $k$  opisane trokutu  $ABC$  koje određuju dva Simsonova pravca  $s_P$  i  $s_{P'}$ . Simsonovi pravci  $s_P$  i  $s_{P'}$  su međusobno okomiti ako i samo ako su točke  $P$  i  $P'$  dijametralno suprotne s obzirom na kružnicu  $k$ .



Slika 3.2: Pravci  $s_P$  i  $s_{P'}$  međusobno su okomiti

*Dokaz.* Neka su Simsonovi pravci  $s_P$  i  $s_{P'}$  međusobno okomiti. Dokazat ćemo da su  $P$  i  $P'$  dijametralno suprotne s obzirom na kružnicu  $k$ .

Promatramo situaciju kao na slici 3.2. Neka je  $P_1$  ortogonalna projekcija točke  $P$  na pravac  $BC$  i  $P'_1$  ortogonalna projekcija točke  $P'$  na pravac  $BC$ . Simsonovi pravci  $s_P$  i  $s_{P'}$  su okomiti, tj. kut koji zatvaraju  $\angle(s_P, s_{P'}) = \frac{\pi}{2}$  pa kao u dokazu prethodnog teorema znamo da je tada i kut  $\angle Q'AQ = \frac{\pi}{2}$ , gdje je  $Q$  presjek pravca  $PP_1$  i kružnice  $k$  te  $Q'$  presjek pravca  $P'P'_1$  i kružnice  $k$ .

Razlikovat ćemo slučajeve kada je:

$$Q \neq A \text{ i } Q' \neq A,$$

$$Q = A \text{ i } Q' \neq A,$$

$$Q \neq A \text{ i } Q' = A.$$

Znamo da položaj točaka  $Q$  i  $Q'$  ovisi o izboru točaka  $P$  i  $P'$ . Ako je  $Q = A$  onda je  $P$  presjek okomice iz  $A$  na pravac  $BC$  i kružnice  $k$ , a tako je u lemi 2.4 definirana točka  $H_1$ . Analogno je i u slučaju kada je  $Q' = A$ .

Zbog toga razlikujemo slučajeve:

- Ako je  $P \neq H_1$  i  $P' \neq H_1$ .  
Tada je:  $Q \neq A, Q' \neq A$  pa iz teorema 2.3 znamo da je  $s_P \parallel AQ, s_{P'} \parallel AQ'$ .  
Kako su Simsonovi pravci  $s_P$  i  $s_{P'}$  međusobno okomiti vrijedi okomitost pravaca  $AQ$  i  $AQ'$ . Točke  $A, Q, Q'$  su točke kružnice  $k$  te pravci  $AQ$  i  $AQ'$  mogu biti međusobno okomiti samo ako je  $\angle Q'AQ = \frac{\pi}{2}$ , tj.  $Q$  i  $Q'$  su dijametralno suprotne točke s obzirom na kružnicu  $k$ . Kako je  $PQ \perp BA$  i  $P'Q' \perp BC$  imamo paralelnost  $PQ \parallel P'Q'$  i dijametralno suprotne točke  $Q$  i  $Q'$  pa zaključujemo da su tada  $P$  i  $P'$  dijametralno suprotne točke kružnice  $k$ .
- Ako je  $P = H_1$ , onda je  $P' \neq H_1$  (jer je  $P \neq P'$ ).  
Tada je:  $Q = A$  i  $Q' \neq A$ . Jer je  $Q = A$  po teoremu 2.6 imamo da je  $s_P \parallel t_A$ , a zbog toga što je  $Q' \neq A$  imamo da je  $s_{P'} \parallel AQ'$ .  
Zbog okomitosti Simsonovih pravaca  $s_P \perp s_{P'}$  zaključujemo da je  $t_A \perp AQ'$  gdje je  $t_A$  tangenta kružnice  $k$  u točki  $A$ .  
Kako su  $s_P$  i  $s_{P'}$  međusobno okomiti vrijedi da su  $A$  i  $Q'$  su dijametralno suprotne točke s obzirom na kružnicu  $k$  ali je  $A = Q$ , odakle imamo da su  $Q$  i  $Q'$  su dijametralno suprotne točke s obzirom na kružnicu  $k$ . Analogno zaključujemo da su tada  $P$  i  $P'$  dijametralno suprotne točke kružnice  $k$ .
- Ako je  $P' = H_1$ , onda je  $P \neq H_1$ .  
Na isti način zaključimo:  
Ako je  $s_P \perp s_{P'}$  onda su  $Q$  i  $Q'$  dijametralno suprotne točke s obzirom na kružnicu  $k$ . Analogno,  $P$  i  $P'$  su dijametralno suprotne točke kružnice  $k$  kada su Simsonovi pravci  $s_P, s_{P'}$  međusobno okomiti.

U sva tri slučaja došli smo do istog zaključka ako su Simsonovi pravci  $s_P$  i  $s_{P'}$  međusobno okomiti tada su  $P$  i  $P'$  su dijametralno suprotne točke kružnice  $k$ .

Ostaje nam pokazati da su Simsonovi pravci  $s_P$  i  $s_{P'}$  međusobno okomiti ako su  $P$  i  $P'$  dijametralno suprotne točke kružnice opisane trokutu  $ABC$ .

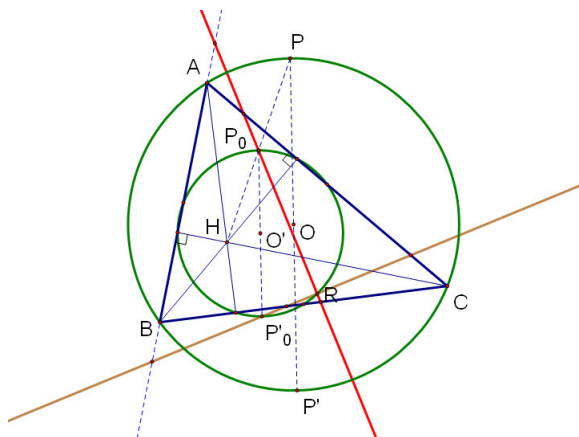
Taj obrat slijedi nam direktno iz prethodnog teorema. Ako znamo da su  $P$  i  $P'$  dijametralno suprotne točke onda su  $Q$  i  $Q'$  dijametralno suprotne točke po njihovoj definiciji. Tada znamo i da je  $\angle Q'AQ = \frac{\pi}{2}$ . Kako je  $AQ \parallel s_P$  i  $AQ' \parallel s_{P'}$  zaključujemo da je kut između Simsonovih pravaca pravi, tj. da su Simsonovi pravci međusobno okomiti.

Dakle, Simsonovi pravci  $s_P$  i  $s_{P'}$  međusobno su okomiti ako i samo ako su  $P$  i  $P'$  dijametralno suprotne točke kružnice  $k$ .  $\square$



**Teorem 3.3.** *Neka je  $H$  ortocentar trokuta  $ABC$  i neka je  $O$  središte kružnice opisane trokutu  $ABC$  te neka su  $P$  i  $P'$  dijametralno suprotne kružnice  $k$ .*

*Simsonovi pravci  $s_P$  i  $s_{P'}$  sijeku se u točki  $R$  koja pripada Feuerbachovoj kružnici trokuta  $ABC$ .*



Slika 3.3: Pravci  $s_P$  i  $s_{P'}$  sijeku se u točki Feuerbachove kružnice

*Dokaz.* Neka je  $P$  točka kružnog luka  $\widehat{CA}$  kojemu ne pripada točka  $B$ . Neka su točke  $P$  i  $P'$  dijametralno suprotne točke kružnice  $k$ , tada su  $s_P$  i  $s_{P'}$  okomiti pravci, koji se sijeku u točki  $R$ . Neka je  $k'$  Feuerbachova kružnica trokuta  $ABC$ . Točka  $O$  je središte trokutu opisane kružnice  $k$ , a točka  $O'$  središte Feuerbachove kružnice  $k'$ .

Promatramo homotetiju  $\Psi$  sa središtem u točki  $H$  i koeficijentom  $\frac{1}{2}$ . Znamo da je Feuerbachova kružnica  $k'$  trokuta  $ABC$  slika kružnice  $k$  opisane trokutu primjenom homotetije  $\Psi$ , što nam pokazuje i lema A.5 u dodatku rada.

Neka je  $P_0$  polovište dužine  $\overline{HP}$  i  $P'_0$  polovište dužine  $\overline{HP'}$ .

Promatramo djelovanje homotetije  $\Psi$ :

$$\Psi(P) = P_0, \text{ znamo da je } P \in k \text{ pa tada vrijedi da je } P_0 \in k',$$

$$\Psi(P') = P'_0, \text{ znamo da je } P' \in k \text{ pa tada vrijedi da je } P'_0 \in k',$$

$$\Psi(O) = O'.$$

Točke  $P$  i  $P'$  su dijametralno suprotne točke kružnice  $k$  i  $O$  polovište dužine  $\overline{PP'}$ .

Uočimo trokute  $PHP'$  i  $P_0HP'_0$ . Kut pri vrhu  $H$  im je zajednički, a krakovi im pripadaju istim pravcima pa zaključujemo da su trokuti  $PHP'$  i  $P_0HP'_0$  slični po S-S-S poučku o sličnosti trokuta. Znamo da  $O'$  pripada pravcu  $P_0P'_0$ . Kako je  $O$  polovište dužine  $\overline{PP'}$  zbog sličnosti trokuta slijedi da je  $O'$  polovište dužine  $\overline{P_0P'_0}$ . Točke  $P_0$  i  $P'_0$  dijametralno su suprotne s obzirom na kružnicu  $k'$ . Dakle  $\overline{P_0P'_0}$  je promjer kružnice  $k'$ .

Znamo da su Simsonovi pravci  $s_P$  i  $s_{P'}$  okomiti i da se sijeku u točki  $R$ .

Kako  $P_0$  pripada Simsonovom pravcu  $s_P$  te  $P'_0$  pripada Simsonovom pravcu  $s_{P'}$  zaključujemo da je

$$\sphericalangle P_0RP'_0 = \frac{\pi}{2},$$

a kako je  $\overline{P_0P'_0}$  promjer Feuerbachove kružnice zaključujemo da  $R$  pripada Feuerbachovoj kružnici.

Time smo pokazali da se okomiti Simsonovi pravci sijeku u točki Feuerbachove kružnice.

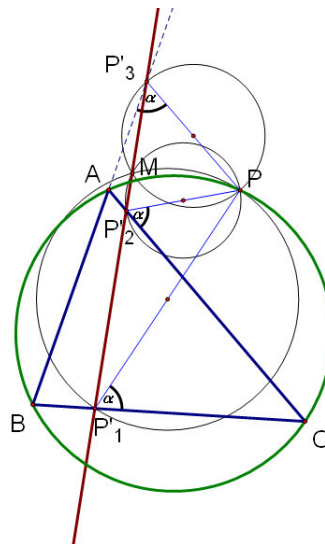
□

## Poglavlje 4

### Poopćeni Simsonov pravac

Možemo li nekako poopćiti Simsonov pravac točke  $P$  kružnice opisane trokutu  $ABC$  s obzirom na taj trokut? Moramo li uvijek promatrati ortogonalne projekcije točke  $P$ ? To ćemo vidjeti u sljedećem teoremu.

**Teorem 4.1.** *Dan je kut  $\alpha$ . Neka je  $ABC$  trokut i neka je  $P$  točka kružnice  $k$  opisane trokutu. Neka su  $P'_1, P'_2, P'_3$  točke na pravcima  $BC, CA, AB$  redom tako da pravci  $PP'_1, PP'_2, PP'_3$  zatvaraju s pravcima  $BC, CA, AB$  kut  $\alpha$ .*



Slika 4.1: Točke  $P'_1, P'_2, P'_3$  su kolinearne

*Dokaz.* Neka je  $P$  točka kružnog luka  $\widehat{CA}$  kojemu ne pripada točka  $B$ . Neka je  $P_3$  točka na produžetku stranice  $AB$ .

Opišimo kružnice kojima su dužine  $\overline{PP'_2}, \overline{PP'_3}$  promjeri. Promatramo sliku 4.1. Te se kružnice sijeku u dvije točke. Jedna od njih je točka  $P$ , a drugu označimo točkom  $M$ .

Želimo prvo dokazati da su točke  $P'_3, M, P'_2$  kolinearne, tj. da je kut  $\sphericalangle P'_2MP'_3$  ispruženi kut. Promatrajmo kutove  $\sphericalangle P'_2MP$  i  $\sphericalangle PMP'_3$ .

Točke  $P, M, P'_2$  su točke kružnice promjera  $\overline{PP'_2}$ . Prema teoremu o obodnom kutu nad promjerom kružnice zaključujemo da je  $\sphericalangle P'_2MP = \frac{\pi}{2}$ . Analogno tome kut  $\sphericalangle PMP'_3 = \frac{\pi}{2}$  jer je to obodni kut nad promjerom kružnice promjera  $\overline{PP'_3}$ .

Dakle, imamo da je  $\sphericalangle PMP'_3 = \sphericalangle P'_2MP = \frac{\pi}{2}$ , tj.  $\sphericalangle P'_2MP'_3 = \pi$ , što znači da su točke  $P'_2, M, P'_3$  kolinearne.

Opišimo kružnicu kojoj je dužina  $\overline{PP'_1}$  promjer. Uočimo da se sve tri kružnice sijeku u točkama  $P$  i  $M$ .

Dokažimo da su točke  $P'_1, M, P'_3$  kolinearne, tj. da je kut  $\sphericalangle P'_1MP'_3 = \pi$ . Promatramo kružnice s promjerom  $\overline{PP'_1}$  i  $\overline{PP'_3}$ .

Potpuno analogno pokažemo da je:  $\sphericalangle PMP'_3 = \sphericalangle P'_1MP = \frac{\pi}{2}$ , tj.  $\sphericalangle P'_1MP'_3 = \pi$ .

Znamo da su točke  $P'_2, M, P'_3$  kolinearne i da su točke  $P'_1, M, P'_3$  kolinearne pa zaključujemo da su točke  $P'_1, P'_2, P'_3$  kolinearne.

□

**Definicija 4.2.** *Dan je kut  $\alpha$ . Točke  $P'_1, P'_2, P'_3$  su na pravcima  $BC, CA, AB$  redom tako da pravci  $PP'_1, PP'_2, PP'_3$  zatvaraju s pravcima  $BC, CA, AB$  kut  $\alpha$ . Tako definirane točke  $P'_1, P'_2, P'_3$  su kolinearne, pripadaju pravcu kojeg nazivamo **poopćeni Simsonov pravac**.*

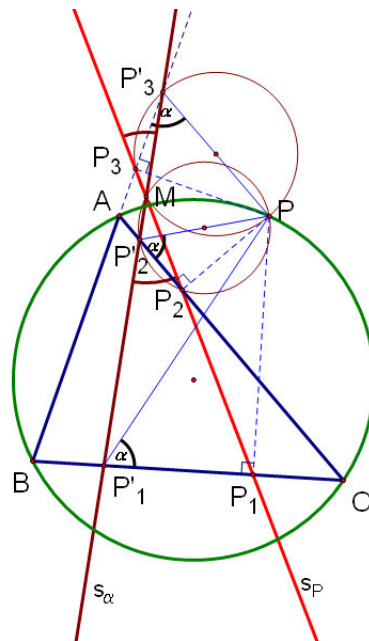
**Teorem 4.3.** *Dan je kut  $\alpha$ . Neka je  $ABC$  trokut i  $P$  točka kružnice opisane tom trokutu. Tada poopćeni Simsonov pravac za dani kut  $\alpha$  i danu točku  $P$  sa Simsonovim pravcem točke  $P$  zatvara kut  $\pi - \alpha$ .*

*Dokaz.* Neka je  $P$  točka kružnog luka  $\widehat{CA}$  kojemu ne pripada točka  $B$ . Neka su  $P_1, P_2, P_3$  ortogonalne projekcije točke  $P$  na pravce  $BC, CA, AB$ , gdje je  $P_3$  na produžetku stranice  $\overline{AB}$ , točke  $P'_1, P'_2, P'_3$  su na pravcima  $BC, CA, AB$  redom tako da pravci  $PP'_1, PP'_2, PP'_3$  zatvaraju s pravcima  $BC, CA, AB$  kut  $\alpha$ .

Imamo situaciju kao na slici 4.2. Uočimo trokute  $P'_1P_1P, P'_2P_2P$  i  $P'_3P_3P$ .

Po definiciji točki  $P'_1, P'_2, P'_3$  imamo:

$$\sphericalangle P_1P'_1P = \sphericalangle P_2P'_2P = \sphericalangle P_3P'_3P = \alpha.$$



Slika 4.2: Presjek poopćenog Simsonovog pravca ( $s_\alpha$ ) i Simsonovog pravca ( $s_P$ )

Po definiciji točki  $P_1, P_2, P_3$  imamo:

$$\angle PP_1P'_1 = \angle PP_2P'_2 = \angle PP_3P'_3 = \frac{\pi}{2}.$$

Prema K-K-K poučku o sličnosti trokuta slijedi da su trokuti  $P'_1P_1P$ ,  $P'_2P_2P$  i  $P'_3P_3P$  slični. Zbog sličnosti trokuta imamo jednakost svih kutova trokuta.

Označimo:  $\angle P'_1PP_1 = \angle P'_2PP_2 = \angle P'_3PP_3 = \frac{\pi}{2} - \alpha$ .

Točka  $M$  je sjecište kružnica iz prethodnog teorema. Pokažimo da je  $M$  sjecište poopćenog Simsonovog pravca i Simsonovog pravca.

Opišimo kružnice promjera  $\overline{PP'_2}$  i  $\overline{PP'_3}$ . Iz dokaza teorema 4.3 znamo da se te kružnice sijeku u točkama  $P$  i  $M$ . Promotrimo kružnicu promjera  $\overline{PP'_2}$  i točku  $P_2$ . Točka  $P_2$  pripada kružnici promjera  $\overline{PP'_2}$  jer je kut  $\angle PP_2P'_2$  pravi kut nad hipotenuzom  $\overline{PP'_2}$ , tj. nad promjerom kružnice. Ako promatramo kružnicu promjera  $\overline{PP'_3}$  i točku  $P_3$  analogno dolazimo do zaključka da točka  $P_3$  pripada kružnici promjera  $\overline{PP'_3}$ .

Točke  $P, M, P'_2, P_2$  pripadaju kružnici promjera  $\overline{PP'_2}$ . Primjenjujući teorem o obodnim kutovima nad kružnim lukom  $\widehat{P_2P'_2}$  imamo:

$$\sphericalangle P'_2MP_2 = \sphericalangle P'_2PP_2 = \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

Točke  $P, M, P'_3, P_3$  pripadaju kružnici promjera  $\overline{PP'_3}$ . Ponovno primjenjujemo teorem o obodnim kutovima nad kružnim lukom  $\widehat{P_3P'_3}$  imamo:

$$\sphericalangle P'_3MP_3 = \sphericalangle P'_3PP_3 = \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

Slijedi:

$$\sphericalangle P'_2MP_2 = \sphericalangle P'_3MP_3 = \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

Kako znamo da su  $P'_2, M, P'_3$  kolinearne zaključujemo da su  $\sphericalangle P'_2MP_2$  i  $\sphericalangle P'_3MP_3$  vršni kutovi pa su time i točke  $P_2, M, P_3$  kolinearne, tj. točka  $M$  pripada i Simsonovom pravcu.

Dakle, točka  $M$  je točka presjeka Simsonovog pravca i poopćenog Simsonovog pravca te veličina kuta između tih pravaca iznosi  $\frac{\pi}{2} - \alpha$ .

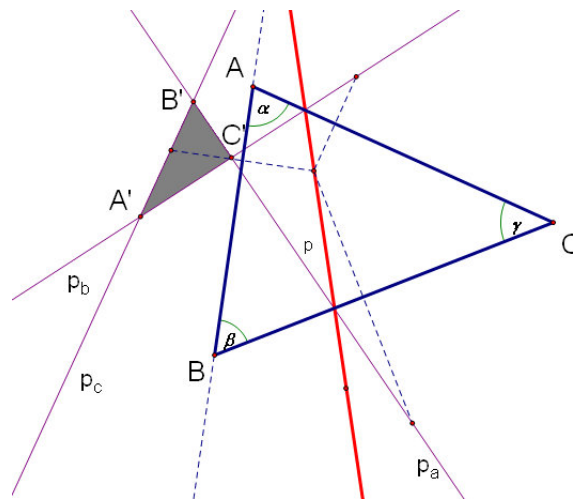
□

## Poglavlje 5

### Još neki teoremi o Simsonovom pravcu

Položaj Simsonovog pravca u odnosu na dani trokut ovisi o položaju točke  $P$  kružnice opisane tom trokutu. Što se događa ako imamo neki pravac i dani trokut, a ne točku kružnice vidjet ćemo u sljedećem teoremu.

**Teorem 5.1.** *Neka je dan trokut  $ABC$  i pravac  $p$ . Neka su  $p_a, p_b, p_c$  pravci simetrični pravcu  $p$  s obzirom na pravce  $BC, CA, AB$ , redom. Neka je  $A$  presijek pravca  $p_b$  i  $p_c$ ,  $B$  je presijek pravca  $p_a$  i  $p_c$ ,  $C$  je presijek pravca  $p_a$  i  $p_b$ . Svi tako dobiveni trokuti  $A'B'C'$ , za različite pravce  $p$ , su međusobno slični.*



Slika 5.1: Trokut  $A'B'C'$

*Dokaz.* Imamo situaciju kao na slici 5.1. Neka pravac  $p$  siječe stranice  $\overline{BC}$  i  $\overline{CA}$  trokuta  $ABC$ .

Pravac  $p_a$  preslikamo osnom simetrijom s obzirom na pravac  $BC$  te dobijemo pravac  $p$ . Zatim pravac  $p$  osnom simetrijom s obzirom na pravac  $CA$  preslikamo u pravac  $p_b$ .

U tom slučaju imamo kompoziciju osne simetrije s obzirom na pravac  $BC$  i osne simetrije s obzirom na pravac  $CA$ . Znamo da se ti pravci sijeku u točki  $C$ .

Lema A.1 nam kaže da je kompozicija dvije osne simetrije kojima se osi sijeku u nekoj točki rotacija s centrom u toj točki i to za dvostruki kut što ga zatvaraju te dvije osi.

Označimo unutarnje kutove trokuta  $ABC$  s  $\alpha, \beta, \gamma$ .

U našem slučaju imamo rotaciju za kut  $2\gamma$  oko centra  $C$  koja preslikava  $p_a \mapsto p_b$ .

Analogno pravac  $p_b$  preslikamo osnom simetrijom s obzirom na pravac  $CA$  te dobijemo pravac  $p$ . Zatim pravac  $p$  osnom simetrijom s obzirom na pravac  $AB$  preslikamo u pravac  $p_c$ .

Ponovno imamo kompoziciju dvije osne simetrije što je u ovom slučaju rotacija s centrom u točki  $A$  za kut  $2\alpha$  koja preslikava  $p_b \mapsto p_c$ .

Analogno, rotacija za kut  $2\beta$  oko centra  $B$  preslikava  $p_c \mapsto p_a$ .

Vidimo dakle da kutovi trokuta  $A'B'C'$  ne ovise o položaju pravca  $p$  nego samo o pravcima kojima pripadaju stranice trokuta, tj. o kutovima danog trokuta  $ABC$ , čime dokazujemo teorem.

□

**Teorem 5.2.** *Neka su dana četiri pravca  $p_1, p_2, p_3, p_4$  od kojih se nijedna tri ne sijeku. Svaka trojka od tih pravaca određuje jedan trokut čiji su vrhovi sjecišta tih pravaca, a stranice trokuta pripadaju tim pravcima. Neka je  $A$  presijek pravaca  $p_1$  i  $p_2$ ,  $B$  presijek pravaca  $p_1$  i  $p_3$ ,  $C$  presijek pravaca  $p_1$  i  $p_4$ ,  $D$  presijek pravaca  $p_2$  i  $p_3$ ,  $E$  presijek pravaca  $p_2$  i  $p_4$ ,  $F$  presijek pravaca  $p_3$  i  $p_4$ . Tada kružnice opisane trokutima  $DEF$ ,  $BCF$ ,  $ACE$  i  $ABD$  prolaze jednom točkom  $P$  te ravnine.*

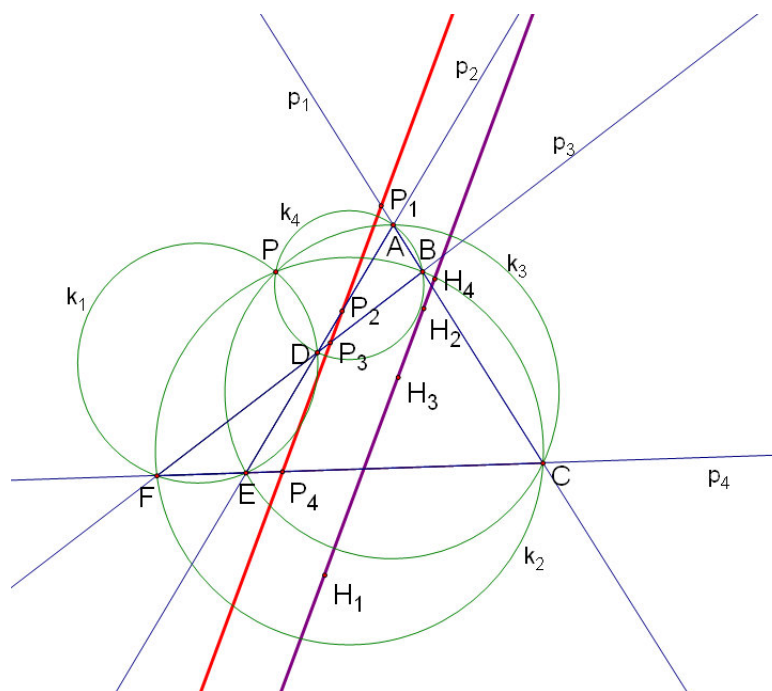
*Dokaz.* Promatramo situaciju kao na slici 5.2.

Neka je  $k_1$  kružnica opisana trokutu  $DEF$ ,  $k_2$  kružnica opisana trokutu  $BCF$ ,  $k_3$  kružnica opisana trokutu  $ACE$ ,  $k_4$  kružnica opisana trokutu  $ABD$ . Neka su  $P_1, P_2, P_3, P_4$  ortogonalne projekcije točke  $P$  na pravce  $p_a, p_b, p_c, p_d$ .

Promotrimo sjecišta kružnica  $k_3$  i  $k_4$ . One se sijeku u dvije točke. Jedna je točka  $A$ , a drugu označimo s  $P$ .

Promotrimo trokut  $ABD$ . Ortogonalne projekcije točke  $P$  na pravce kojima pripadaju stranice trokuta  $ABD$  su  $P_1, P_2, P_3$  jer stranice trokuta  $ABD$  pripadaju pravcima  $p_a, p_b, p_c$ .





Slika 5.2: Kružnice opisane trokutima koje određuju četiri pravca prolaze istom točkom  $P$ . Ortocentri trokuta pripadaju Steinerovom pravcu točke  $P$ .

Znamo da su te točke kolinearne i da pripadaju Simsonovom pravcu  $s_P$  točke  $P$  s obzirom na trokut  $ABD$ .

Promotrimo i trokut  $ACE$ . Ortogonalne projekcije točke  $P$  na pravce kojima pripadaju stranice trokuta  $ACE$  su  $P_1, P_2, P_4$  jer stranice trokuta  $ACE$  pripadaju pravcima  $p_a, p_b, p_d$ . Analogno,  $P_1, P_2, P_4$  su kolinearne, tj. točke Simsonovog pravca točke  $P$  s obzirom na trokut  $ACE$ .

Točke  $P_1, P_2, P_3$  su kolinearne i točke  $P_1, P_2, P_4$  su kolinearne pa odmah zaključujemo da su sve četiri ortogonalne projekcije  $P_1, P_2, P_3, P_4$  kolinearne točke. Odnosno točke  $P_1, P_2, P_3, P_4$  pripadaju Simsonovom pravcu točke  $P$  s obzirom na trokute  $ABD$  i  $ACE$ . Kako stranice trokuta  $DEF$  pripadaju pravcima  $p_2, p_3, p_4$ , a stranice trokuta  $BCF$  pripadaju pravcima  $p_1, p_3, p_4$  znamo da i ortogonalne projekcije točke  $P$  na stranice tih trokuta pripadaju Simsonovom pravcu točke  $P$  s obzirom na trokute  $DEF$  i  $BCF$ .

Konačno možemo zaključiti da sve četiri ortogonalne projekcije pripadaju Simsonovom pravcu točke  $P$  s obzirom na sva četiri trokuta.  $\square$

**Teorem 5.3.** *Neka su  $H_1, H_2, H_3, H_4$  redom ortocentri trokuta  $DEF, BCF, ACE$  i  $ABD$  koji su definirani u prethodnom teoremu. Tada su  $H_1, H_2, H_3, H_4$  kolinearne i pripadaju Steinerovom pravcu točke  $P$  s obzirom na sva četiri trokuta  $DEF, BCF, ACE$  i  $ABD$ .*

*Dokaz.* Promatramo sliku 5.2.

Iz teorema 2.6 znamo da ortocentar trokuta pripada Steinerovom pravcu točke  $P$  s obzirom na dani trokut i da je Steinerov pravac slika Simsonovog pravca točke  $P$  s obzirom na dani trokut pri homotetiji sa središtem u točki  $P$  i koeficijentom 2.

Možemo zaključiti da je Simsonov pravac danog trokuta jednako udaljen od točke  $P$  i Steinerovog pravca točke  $P$  s obzirom na sva četiri trokuta.

Točka  $P$  zajednička je točka sve četiri kružnice  $k_1, k_2, k_3, k_4$ .

Iz prethodnog teorema znamo da ortogonalne projekcije  $P_1, P_2, P_3, P_4$  točke  $P$  na stranice trokuta  $DEF, BCF, ACE$  i  $ABD$  pripadaju Simsonovom pravcu točke  $P$  s obzirom na sva četiri trokuta.

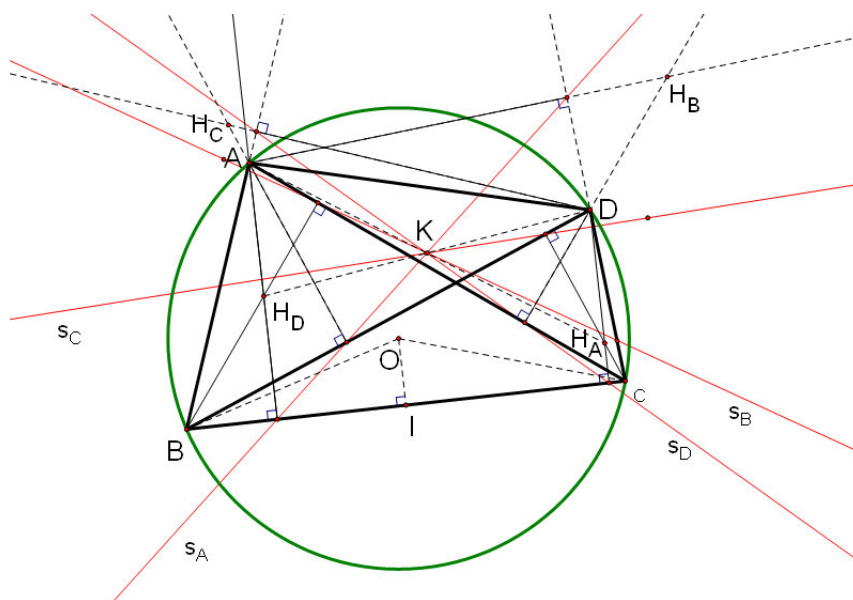
Steinerov pravac svakog od danih trokuta je paralelan s tim zajedničkim Simsonovim pravcem. Svi ti Steinerovi pravci su slika Simsonovog pravca pri homotetiji sa središtem u točki  $P$  i koeficijentom 2. Kako je  $P$  zajednička točka svih opisanih kružnica  $k_1, k_2, k_3, k_4$  trokuta  $DEF, BCF, ACE$  i  $ABD$  zaključujemo da se Steinerovi pravci točke  $P$  s obzirom na trokuta  $DEF, BCF, ACE$  i  $ABD$  poklapaju.

Dakle, ortocentri  $H_1, H_2, H_3, H_4$  trokuta  $DEF, BCF, ACE$  i  $ABD$  su kolinearni i pripadaju Steinerovom pravcu točke  $P$  s obzirom na sva četiri trokuta, te je Simsonov pravac točke  $P$  s obzirom na sva četiri trokuta  $DEF, BCF, ACE$  i  $ABD$  jednako udaljen od njega kao i od točke  $P$ .

□

Neka je dan je četverokut kojemu je opisana kružnica. Promatramo Simsonove pravce svake od točaka  $A, B, C, D$  s obzirom na trokut određen preostalim trima točkama kao njegovim vrhovima. Tada imamo četiri pravca, a sljedeći teorem pokazat će da se ti pravci sijeku u jednoj točki.

**Teorem 5.4.** Četverokut  $ABCD$  upisan je u kružnicu. Neka je  $s_A$  Simsonov pravac točke  $A$  s obzirom na trokut  $BCD$ . Slično definiramo  $s_B, s_C, s_D$ . Tako definirani pravci sijeku se u jednoj točki.



Slika 5.3: Četverokut  $ABCD$  upisan u kružnicu

*Dokaz.* U dokazu koristimo *Hamiltonov poučak* A.7 koji kaže:

Neka je  $ABC$  trokut,  $H$  ortocentar trokuta i  $O$  središte opisane kružnice trokuta  $ABC$ . U trokutu  $ABC$  tada vrijedi:  $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OH}$ .

Koristimo i svojstvo da Simsonovom pravcu točke  $P$  kružnice opisane trokutu  $ABC$  s obzirom na trokut  $ABC$  pripada polovište dužne  $\overline{PH}$ , gdje je  $H$  ortocentar trokuta  $ABC$ .

Promatramo situaciju kao na slici 5.3.

Neka je  $s_A$  Simsonov pravac točke  $A$  s obzirom na trokut  $BCD$  kojemu je  $H_A$  ortocentar. Tada Simsonovom pravcu  $s_A$  pripada polovište dužine  $\overline{AH_A}$ . Označimo polovište dužine te dužine s  $K_A$ . Analogno definiramo Simsonove pravce  $s_B, s_C, s_D$  te polovišta  $K_B, K_C, K_D$ . Pokazat ćemo da su polovišta  $K_A, K_B, K_C, K_D$  ista točka  $K$ .

Dokažimo prvo da je  $K_A = K_D$ . Kada bi polovište dužine  $\overline{AH_A}$  i  $\overline{DH_D}$  bila ista točka  $K$  imali bi dva sukladna trokuta  $AKH_D$  i  $DKH_A$ , po S-K-S poučku o sukladnosti trokuta (vršni kutovi i krakovi jednakih duljina).

Zbog toga je dovoljno pokazati da je  $|AH_D| = |DH_A|$  ili da je  $\overrightarrow{AH_D} = \overrightarrow{DH_A}$ .

Kako je  $H_D$  ortocentar trokuta  $ABC$  upisanog kružnici sa središtem u točki  $O$  po Hamiltonovu poučku vrijedi:

$$\overrightarrow{OH_D} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

i time

$$\overrightarrow{OH_D} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

Oduzimanjem vektora na lijevoj strani dobijemo vektor  $\overrightarrow{AH_D}$ , a zbrajanjem vektora na desnoj strani pravilom paralelograma (romba) dobijemo vektor  $2\overrightarrow{OI}$  gdje je  $I$  polovište dužine  $\overline{BC}$ .

$$\overrightarrow{AH_D} = 2\overrightarrow{OI}. \quad (5.1)$$

Na analogan način promatramo ortocentar  $H_A$  trokuta  $BCD$  upisanog kružnici sa središtem u točki  $O$  te pokažemo da vrijedi:

$$\overrightarrow{DH_A} = 2\overrightarrow{OI}. \quad (5.2)$$

Iz relacija 5.1 i 5.2 imamo:  $\overrightarrow{AH_D} = \overrightarrow{DH_A}$ , tj.  $K_A = K_D$ .

Analogno dokažemo da je  $K_A = K_B$  te  $K_A = K_C$ .

Time smo dokazali da se Simsonovi pravci  $s_A, s_B, s_C, s_D$  koji redom sadrže polovišta dužina  $\overline{AH_A}, \overline{BH_B}, \overline{CH_C}, \overline{DH_D}$  sijeku u zajedničkoj točki  $K$ .  $\square$

# Dodatak A

U dokazima teorema koristili smo neke osnovne poznate teoreme. Navedimo ih.

**Lema A.1** (Talesov teorem o obodnom i središnjem kutu). *Središnji kut nad nekim lukom dane kružnice jednak je dvostrukom obodnom kutu nad istim lukom.*

Prema ovome teoremu, obodni kutovi nad istim kružnim lukom su sukladni.

Idući teorem također je posljedica već navedenog teorema.

**Lema A.2** (Talesov teorem o kutu nad promjerom kružnice). *Neka je dana kružnica  $k$ . Ako je  $\overline{AB}$  promjer kružnice, a  $C$  bilo koja točka kružnice različita od točki  $A$  i  $B$ , onda je kut  $\sphericalangle ACB$  pravi.*

**Lema A.3** (Kut tangente i sekante kružnice). *Neka je dana kružnica  $k$  i neka je  $T$  točka kružnice. Kut što ga zatvaraju tangenta u točki  $T$  i sekanta kružnice koja prolazi točkom  $T$  jednak je obodnom kutu nad lukom koji određuje ta tangenta.*

**Lema A.4** (Feuerbachova kružnica). *Neka su  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  polovišta stranica  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CA}$ ,  $\overline{AB}$ ,  $A_v$ ,  $B_v$ ,  $C_v$  nožišta visina, a  $H$  ortocentar trokuta  $ABC$  te neka su  $A'_v$ ,  $B'_v$ ,  $C'_v$  polovišta dužina  $\overline{HA}$ ,  $\overline{HB}$ ,  $\overline{HC}$ . Devet točaka  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ ,  $A_v$ ,  $B_v$ ,  $C_v$ ,  $A'_v$ ,  $B'_v$ ,  $C'_v$  leže na jednoj kružnici kojoj su  $\overline{A'A'_v}$ ,  $\overline{B'B'_v}$ ,  $\overline{C'C'_v}$  promjeri. Tu kružnicu nazivamo Feuerbachova kružnica. Središte je u točki  $E$ , polovištu dužine  $\overline{OH}$ , gdje je  $O$  središte kružnice opisane trokutu.*

**Lema A.5.** Za dani trokut Feuerbachova kružnica  $k'$  i opisana kružnica  $k$  homotetične su kružnice s centrom homotetije u ortocentru  $H$  i koeficijentom  $\frac{1}{2}$ .

*Dokaz.* Promotrimo tri dužine  $\overline{AH}$ ,  $\overline{BH}$ ,  $\overline{CH}$  što spajaju ortocentar  $H$  s vrhovima  $A, B, C$  danog trokuta  $ABC$  i polovišta  $K, L, M$  tih dužina.

Neka je s  $\Phi$  označena homotetija sa središtem u ortocentru  $H$  koja preslikava:

$$A \mapsto K$$

$$B \mapsto L$$

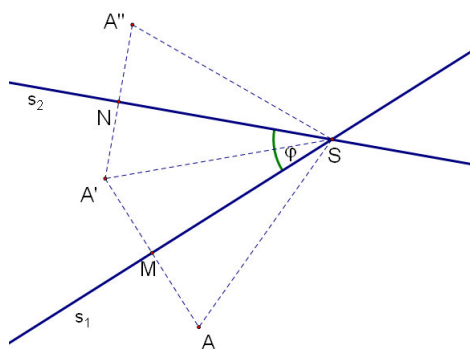
$$C \mapsto M$$

Koeficijent takve homotetije očito je  $\frac{1}{2}$ .

Dakle, imamo homotetiju  $\Phi$  sa središtem u ortocentru  $H$  i koeficijentom  $\frac{1}{2}$ .

Opisana kružnica trokutu  $ABC$  jednoznačno je određena s te tri točke. Ona se homotetijom  $\Phi$  preslikava u kružnicu koja prolazi točkama  $K, L, M$ . Znamo da točke  $K, L, M$  pripdaju Feuerbachovoj kružnici  $k'$ . S tri točke je kružnica jednoznačno određena. Time je lema dokazana. □

**Lema A.6.** Kompozicija dvije osne simetrije  $o_1$  i  $o_2$ , kojima se osi  $s_1$  i  $s_2$  sijeku u točki  $S$ , je rotacija  $r = o_1 o_2$  s centrom u točki  $S$  i kutom rotacije  $2\varphi$ , pri čemu je  $\varphi$  orijentirani kut što ga zatvaraju pravci  $s_1$  i  $s_2$ .



Slika A.1: Kompozicija dviju osnih simetrija je rotacija

*Dokaz.* Simetrija  $o_1$  preslikava točku  $A$  u točku  $A'$ , a simetrija  $o_2$  preslikava točku  $A'$  u točku  $A''$ . Produkt te dvije simetrije preslikava točku  $A$  u točku  $A''$ .

Dakle, neka je  $A' = o_1(A)$  i  $A'' = o_2(A')$ . Tada je  $A'' = o_1o_2(A)$ .

Neka je  $M$  polovište dužine  $AA'$  i  $N$  polovište dužine  $A'A''$ .

Znamo da vrijedi:  $|SA| = |SA'| = |SA''|$ , te za kutove:

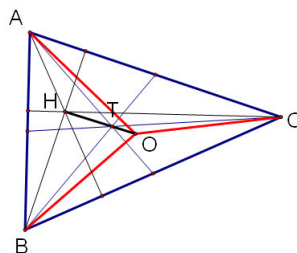
$$\sphericalangle ASA'' = \sphericalangle ASA' + \sphericalangle A'SA'' = 2 \cdot \sphericalangle MSA' + 2 \cdot \sphericalangle A'SN = 2 \cdot (\sphericalangle MSA' + \sphericalangle A'SN)$$

$$\sphericalangle ASA'' = 2 \cdot \sphericalangle MSN = 2 \cdot \varphi.$$

□

**Lema A.7** (Hamiltonov poučak). *Neka je  $ABC$  trokut,  $H$  je ortocentar trokuta  $ABC$  i  $O$  je središte kružnice opisane trokutu  $ABC$ .*

*Tada u trokutu  $ABC$  vrijedi:  $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OH}$ .*



Slika A.2: Težište  $T$ , ortocentar  $H$  i središte  $O$  opisane kružnice trokuta  $ABC$

*Dokaz.* Neka je  $T$  težište trokuta  $ABC$ .

Zbrojamo vektore  $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$ :

$$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OT} + \vec{TA} + \vec{OT} + \vec{TB} + \vec{OT} + \vec{TC} = 3\vec{OT} + (\vec{TA} + \vec{TB} + \vec{TC}). \quad (\text{A.1})$$

Prema teoremu o Eulerovom pravcu znamo da su težište  $T$ , ortocentar  $H$  i središte trokutu opisane kružnice  $O$  trokuta  $ABC$  kolinearne točke pri čemu vrijedi:  $\vec{HT} = 2\vec{TO}$ , zato je  $3\vec{OT} = \vec{OH}$ .

Prema poučku o težištu trokuta i tome da je zbroj vektora težišnica jednak nulvektoru znamo da za težište  $T$  trokuta  $ABC$  vrijedi:  $\vec{TA} + \vec{TB} + \vec{TC}$ .  
Primjenimo li sada to na relaciju A.1 imamo:

$$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OH} = 0.$$

□



# Bibliografija

- [1] S. Marić, *Neki poučci o trokutu*, Matematika i škola, br. 15 (2002.), 223 - 226.
- [2] D. Palman, *Trokut i kružnica*, Element, Zagreb, 1994.
- [3] V. Prasolov , *Problems in plane and solid Geometry*, preveo D. Leites, dostupno na: <http://students.imsa.edu/tliu/Math/planegeo.pdf> (pristupljeno: kolovoz, 2014.).
- [4] M. Riegel, *Simson's Theorem*, dostupno na: <https://www.whitman.deu/mathematics/SeniorProjectArchive/2006/riegelmj.pdf> (pristupljeno: rujan, 2014.).
- [5] Y. Sortais, R. Sortais, *La geometrie du triangle*, Hermann, 1997.
- [6] P. Yiu, *Introduction of the Geometry od the Triangle*,(2002.), dostupno na: <http://math.fau.edu/yiu/GeometryNotes020402.pdf> (pristupljeno: kolovoz, 2014.).
- [7] *Robert Simson*, dostupno na: [www.history.mcs.stand.ac.uk/Biographies/Simson.html](http://www.history.mcs.stand.ac.uk/Biographies/Simson.html) (pristupljeno: rujan, 2014.).

# Sažetak

Na početku ovog diplomskog rada definiramo Simsonov pravac kao pravac kojemu pripadaju ortogonalne projekcije točke  $P$  kružnice opisane trokutu  $ABC$  na pravce kojima pripadaju stranice tog trokuta. Upoznamo se i s nekim njegovim svojstvima. Nakon toga definiramo još jedan skup kolinearnih točaka koje pripadaju Steinerovom pravcu. U nastavku poglavlja o Steinerovom pravcu navode se i dokazuju svojstva Steinerovog pravca, zatim veza Simsonovog pravca i Steinerovog pravca te još neka posebna svojstva Simsonovog pravca.

Treće poglavlje posvećeno je međusobnom odnosu dvaju Simsonovih pravaca, dok se u četvrtome poglavlju susrećemo s poopćenim Simsonovim pravcem te njegovim odnosom sa Simsonovim pravcem.

Na samom kraju rada promatramo Simsonove pravce svakog od vrhova tetivnog četverokuta.

# Summary

At the beginning of this thesis Simson's line with its properties is defined. It's a line that encompasses the orthogonal projection of a point  $P$  of a circle of a triangle  $ABC$  on the lines that belong to the sides of the triangle. Furthermore, a set of colinear points belonging to Steiner's line is defined. In the following chapter the properties of the Steiner's line are listed and proved. Additionally we introduce the link between Steiner's line and Simson's line.

Third chapter is dedicated to the relationship between the two Simson's lines, while in the fourth we meet generalized Simson's line and its relationship to Simson's line.

At the very end we observe Simson's line of each of the vertices of a cyclic quadrilateral.

# Životopis

Rođena sam 30. 8. 1989. godine u Slavonskom Brodu. Osnovnoškolsko obrazovanje započinem 1996. godine u Osnovnoj školi Vladimira Nazora u Slavonskom Brodu. Tada sam posebno zavoľjela matematiku i odlučila da ću jednog dana biti profesorica matematike. Godine 2004. upisujem se u gimnaziju "Matija Mesić", prirodoslovno-matematički smijer u Slavonskom Brodu, gdje sam 2008. godine maturirala s odličnim uspjehom. Iste godine nastavljam daljnje školovanje na Prirodoslovno - matematičkom fakultetu u Zagrebu. Godine 2012., nakon završenog preddiplomskog studija matematike; smjer: nastavnički, upisujem Diplomski sveučilišni studij Matematike; smjer: nastavnički koji upravo završavam.