George Polya - doprinos matematičkoj edukaciji

Vrdoljak, Denis

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO - MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Denis Vrdoljak

George Polya - doprinos matematičkoj edukaciji

Diplomski rad

Voditelj rada:
Prof. dr. sc. Mirko Polonijo

Zagreb, rujan, 2015.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ______________ pred nastavničkim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________________ .

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________

2. ____________________________

3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

"Najbolji način da se nešto nauči jest - *da se samostalno otkrije."*

George Polya

George Polya je značajni matematičar 20. stoljeća i jedan od najboljih metodičara i pedagoga. Njegova razmišljanja, način poučavanja matematike i rješavanja problema koriste se i dan danas, trideset godina nakon njegove smrti.

Svojim znanstvenim radom fundamentalno je pridonio kombinatorici, teoriji brojeva, teoriji vjerojatnosti, kompleksnoj analizi i parcijalnim diferencijalnim jednadžbama, a bio je zainteresiran i za geometriju i geometrijske metode.

Njegov doprinos dao je veliki zamah u području edukacije matematike, konkretno u području matematičke metodike. Kratka lista prijedloga i sugestija za rješavanje matematičkih problema, koju iznosi u knjizi "Kako riješiti matematički zadatak", pretvorila se u konačnu stategiju rješavanja problema, koja ujedno opisuje način ljudske obrade informacija za one koji istražuju, ali i daje upute nastavnicima kako podučavati. Polya smatra da je rješavanje problema temelj poučavanja matematike. Zalagao se za heuristički pristup učenju, i tvrdio da postoji umijeće otkrića i da ga je moguće naučiti.

Polya je poznat i u drugim znanostima kao što su kemija, fizika i astronomija.

U području fizike najviše se zanimao za područja relativnosti i optike.

Zbog širokog područja matematike i znanosti, kojima se Polya bavio, gotovo je nemoguće na jednom mjestu detaljno opisati njegov rad, stoga ćemo se usredotočiti samo na njegov doprinos matematičkoj edukaciji.

Biografija

George Polya rođen je 13. prosinca 1887. u Budimpešti. Nakon osnovne škole u kojoj nije pokazao osobito zanimanje za matematiku, upisuje gimnaziju gdje uči klasične jezike, grčki i latinski, kao i moderne, njemački i naravno mađarski.

Upisuje pravo 1905. na Budimpeštanskom sveučilištu, ali kako je studij smatrao izrazito dosadnim, već nakon prvog semestra se prebacuje na studij jezika i književnosti, njegov omiljeni predmet, te nakon dvije godine stječe zvanje profesora latinskog i mađarskog jezika. Tom se diplomom vrlo ponosio. Ona mu je dozvoljavala predavanje u gimnaziji, ali tu mogućnost nije nikad iskoristio. Ubrzo se počinje zanimati za filozofiju.

Na nagovor svoga profesora filozofije da upiše tečaj iz fizike i matematike kako bi bolje shvatio filozofiju, Polya napokon uviđa, da je matematika predmet kojeg želi proučavati te jednom prilikom izjavljuje: "Smatram da nisam dovoljno dobar za fiziku i da sam predobar za filozofiju. Matematika je između."

Prilično neobično da netko tko u ranim danima svoga školovanja ne pokazuje nikakvu ljubav prema matematici kasnije postane tako fasciniran matematikom na gotovo svim njenim područjima. Razlog bi mogao biti u profesorima matematike čija su podučavanja bila štura i nezanimljiva. Polya je kasnije, dva od tri gimnazijska profesora opisao kao nepodnošljiva, a jednog kao dobrog.

Akademsku godinu 1910/11. Polya je proveo studirajući na bečkom Sveučilištu. Uz studij povremeno je podučavao izvjesnog Gregora, barunovog sina, koji nije imao nikakvog talenta. Polya je proveo sate i sate pronalazeći metodu rješavanja problema koja bi pomogla Gregoru, kao i drugima u istoj situaciji, te je naposljetku ponosno zaključio da vještina rješavanja problema nije urođena vještina, već nešto što se može naučiti.

Nakon godinu dana, vraća se u Budimpeštu gdje predaje svoju doktorsku disertaciju iz matematike te upoznaje Gábora Szegu, koji kasnije postaje njegov najbolji suradnik.

Godine 1913. Polya odlazi na Göttingen na postdoktorski studij, a već sljedeće biva pozvan da predaje u Zürichu studentima među kojima su bili Röntgen i Einstein. Surađujući s doktorom E. H. Weberom upoznaje svoju budući suprugu Stellu, doktorovu kćer, s kojom je proveo 67 godina u braku sve do svoje smrti.

1924. Polya odlazi u Englesku gdje provodi godinu dana na Oxfordu i Cambridgeu, a sljedeće, zajedno sa Szegom objavljuje jednu od svojih najutjecajnijih knjiga "Aufgaben und

Lehrsätze aus der Analysis", u kojoj su klasificirali matematičke probleme, ne po njihovoj tematici, već po metodi rješavanja.

Jedno od poznatijih Polyinih otkrića je "Polya Enumeration Theorem" objavljen 1937., koji je posljedica njegovog zanimanja za kemijske strukture i moguće konfiguracije benzenskog prstena.

Polya je 1940. zajedno sa suprugom emigrirao u Palo Alto u SAD zbog svojih židovskih korjena i ratnih prilika.

Kratko je predavao na Brown Universityju, zatim na Stanfordu gdje je i radio do mirovine.

Ubrzo je postao poznat po svojim istraživanjima i poučavanju rješavanja problema. Poučavao je mnoge profesore u osnovnoj i srednjoj školi kako da motiviraju svoje učenike i razviju im vještine rješavanja problema.

Godine 1945. objavljuje knjigu "Kako riješiti matematički zadatak", koja je prodana u gotovo milijun primjeraka i prevedena na 17 jezika. Drugi njegovi radovi značajni za matematičku edukaciju su "Matematika i uvjerljivo zaključivanje" (1954.), prevedena na šest jezika te "Matematičko otkriće" (1962.), prevedena na devet jezika.

Redovno je posjećivao srednje škole na zapadu SAD - a, gotovo do dana smrti je držao predavanja i tako okupljao stotine mladih zainteresiranih za matematiku koji su posjećivali njegove seminare na Stanfordu. Mnoge je potakao na matematičku karijeu.

Umro je 7. rujna 1985. u Palo Altu.

Tri djela koja "život znače"

Djela "Kako riješiti matematički zadatak", "Matematika i uvjerljivo zaključivanje" i "Matematičko otkriće" su od iznimne važnosti za svakog nastavnika matematike kao i za osobe koje bi željele "razumjeti" matematiku, stoga se s pravom može reći da su to djela koja "život znače" svima kojima je matematika bliska srcu i zato zaslužuju da im se posveti posebna pažnja.
Ova djela čine osnovnu sadašnjeg načina educiranja matematike i jednako su važna kao i onda kad su bila objavljena.

▲ "Kako riješiti matematički zadatak"

U knjizi "Kako riješiti matematički zadatak[1]", sustavno i jednostavno, opisan je postupak rješavanja matematičkih problema koji se temelji na dugotrajnom i ozbiljnom proučavanju rješavalačkih metoda.
Knjiga se sastoji od tri dijela: "U učionici", "Kako rješavati matematički zadatak" i "Mali heuristički leksikon". Predviđena je za:

- nastavnike koji žele kod svojih učenika razvijati vještinu rješavanja zadataka,
- učenike koji nastoje razviti svoje sposobnosti,
- sve koji žele shvatiti sredstva, motive i postupke rješavanja problema.

Razmatranja unutar djela grupiraju se oko niza pitanja i preporuka. Diskutira se o njihovoj svrsi, objašnjavaju pojmovi i misaone operacije na kojima se ona zasnivaju, te pomoću primjera ilustrira njihova praktična primjena. Pitanja i preporuke su takve naravi da ako ih nastavnik uputi samom sebi ili svome učeniku te ih pravilno primijeni, onda će im ona pomoći riješiti zadatak. "Kako rješavati matematički zadatak" je ubrzo postala autorova najpopularnija knjiga i gotovo da nema knjige o heurističkoj metodi koja se ne poziva na nju.

[1] G. Polya, *How to solve it*, Princeton University Press, Stanford 1945.

▲ "Matematičko otkriće"

Ova knjiga se može shvatiti kao nastavak djela "Kako riješiti matematički zadatak". U njoj autor izlaže svoja razmišljanja o matematičkom otkriću te detaljno argumentira ideje i poglede na sve dijelove nastave matematike. Može shvatiti kao priručnik za nastavnike matematike, kojeg također mogu koristiti roditelji i srednjoškolci. Ujedno je i velika zbirka zadataka. Više od 450 pažljivo odabranih povijesnih zadataka i problema, kao i nekih osmišljenih za potrebe ove knjige, omogućuje čitatelju uvid u to kako se "matematika radila" i kako bi je trebalo danas poučavati. Metodičkom raščlambom zadataka autor nastoji uvesti čitatelja u atmosferu znanstvenog istraživanja, koje bi trebalo pobuditi njegovo zanimanje i incijativu. Knjiga objedinjava poučavanje heuristike s konkretnim ciljem - poboljšanje izobrazbe nastavnika. Autor smatra da nastavnik mora dobro poznavati ono što se sprema poučavati. On je dužan pokazati učenicima kako se rješavaju zadaci, ali i nastojati da što bolje ovladaju predmetom kako bi naučili bolje prosuđivati.

Knjiga "Matematičko otkriće[2]" je prevedeno na devet jezika i na neki način predstavlja Bibliju za nastavnike matematike i trebali bi je imati koji žele razumjeti i naučiti kako se matematika poučava jer nije samo važno imati potrebno znanje, već vladati načinima i metodama poučavanja.

▲ "Matematika i uvjerljivo zaključivanje"

"Matematika i uvjerljvo zaključivanje[3]" je knjiga koja se sastoji od dva dijela, a u njoj se autor bavi načinom kako naučiti rješavati probleme i dokazivati teoreme. Polya je posvećivao veliku pažnju, ne samo ovom dijelu, već i općenito, opisu i kvalifikaciji objekata koje je proučavao i na taj način sveo na relativno malen broj, karakterističnih i dobro klasificiranih tipova problema, koje je nastojao međusobno povezati određenom relacijom ili pravilom.

U prvom dijelu knjige autor raspravlja o induktivnom načinu zaključivanja u matematici i matematičkoj indukciji, te izvodi dva zaključka.

---

[2]G. Polya, *Mathematical discovery*, John Wiley & sons inc., New York - London 1962.
[3]G. Polya, *Mathematics and Plausible Reasoning*, Princeton University Press, New Jersey 1954.

Prvi je da induktivno i analogno zaključivanje igraju glavnu ulogu u matematičkom otkriću, a drugi da su i induktivno i analogno zaključivanje posebni slučajevi uvjerljivog zaključivanja.
U drugom dijelu knjige, koji se pokazao podjednako zanimljivim, kako matematičarima, tako i stručnjacima iz prirodnih znanosti i kognitivne psihologije, Polya je nastojao formulirati prepoznatljive primjere uvjerljivog zaključivanja kako bi istražio kada, kako i u kojoj mjeri se ti primjeri mogu tretirati kao "pravila" i kakva je njihova veza s računom vjerojatnosti.
Knjiga je prevedna na šest jezika i namjenjena je svim čitateljima koji dijele interes i način razmišljanja sa cijenjenim autorom.

▲ "Matematičke metode u prirodoslovlju"

Pored tri navedena dijela, koja su od iznimne važnosti za edukaciju matematike uzimam si za pravo spomenuti još i knjigu "Mathematical Methods in Science[4]". U njoj su opisana poglavlja s istoimenog kursa, kojeg je Polya u nekoliko navrata držao nastavnicima matematike i prirodoslovlja na Stanfordu. Iako se možda na prvi pogled čini da se ovo djelo ne uklapa u temu diplomskog rada, u njemu je, kroz niz primjera iz fizike praktično prikazan Polyin rad o poučavanju i rješavanju problema.
Bitno je napomenuti da Polya u ovom raspravlja o jednostavnim fizikalnim problemima, npr. problemima mjerenja i aproksimacija iz povijesti astronomije o kojima se može diskutirati i sa učenicima srednjoškolskog uzrasta. Zatim rasprava o vezi matematike i znanosti te znanosti i matematike. Ta veza se simbolički može prikazati kao dvosmjerna ulica, iako, kao što znamo, ne vrijedi uvijek da stečeno znanje iz matematike sugerira na nešto iz fizike.
Ova knjiga može biti izvor užitka i dubljeg razumijevanja matematike čak i početnicima koji posjeduju malo znanja ili čak nimalo znanja iz fizike.

[4]G. Polya, *Mathematical Methods in Science*, The Mathematical Association of America, Washington 1975.

1. Poučavanje nastave matematike

Dobrih načina poučavanja je toliko koliko je i dobrih nastavnika jer poučavanje nije znanost; nego umijeće.[1] Kada bi poučavanje bilo znanost, postojao bi samo jedan jedini način na koji bi svi poučavali.

Poučavanje mora biti aktivno. Ne uči se samo čitanjem, gledanjem ili slušanjem predavanja. Učenik treba uložiti određeni intelektualni napor kako bi nešto otkrio, a zatim i naučio. Tako stečeno znanje će se duže pamtiti. Postoje dva principa koja propagiraju aktivno učenje, a zastupljena su u gotovo svim područjima matematike.

To su akcija i percepcija. Postoji kineska poslovica koja će možda najbolje objasniti ulogu akcije i percepcije u poučavanju: "Čujem i zaboravim. Vidim i zapamtim. Učinim i razumijem." Dobri savjeti kao i informacije koje smo samo čuli veoma se brzo zaborave. Ono što vidimo vlasititm očima bolje ćemo zapamtiti, ali nećemo u potpunosti razumjeti dok se ne nađemo u situaciji da osobno učinimo nešto kako bi riješili problem.

Najvažniji dio matematičkog mišljenja je imati stav prema problemu, a u poučavanju matematike najvažnije je razviti taktiku rješavanja problema.

Nastavnikov zadatak je poučiti učenika onome što je korisno - kako društvu, tako i samom učeniku. On treba neprestano pamtiti taj zadatak pri kratkoročnom i dugoročnom planiranju nastave, te uvijek moći odgovoriti na pitanje: "Gdje mi to može dobro doći?"

Planiranje procesa poučavanja je nešto više nego sastavljanje i nabrajanje činjenica koje treba naučiti. Tu je važan poredak činjenica i metode kojima ćemo poučavati.

[1]Citirano iz knjige: G. Polya, *Matematičko otkriće*, Hrvatsko matematičko društvo, Zagreb 2003., str. 275.

1.1. Cilj poučavanja

Ne možemo ocijeniti djelovanje nastavnika ako ne znamo koji ciljevi pred njim stoje. Ne možemo smisleno prosuđivati proces poučavanja ako ne postignemo određenu suglasnost u odnosu na to što je cilj poučavanja. Jedna od najvažnijih ideja o tome kakav mora biti cilj poučavanja matematike (u okviru osnovne i srednje škole), je pokušati naučiti mlade kako MISLITI.[2]

Parola "učiti misliti" nam govori da je nastavnik obavezan osposobiti svoje učenike za primjenu stečenih informacija ne samo na određenom tipu zadatka, već i u konkretnim, svakodnevnim situacijama. Zato nastavnik ne smije postati tek sušti izvor informacija. On mora kod svojih učenika razvijati umijeće mišljenja i navike koje se na to odnose, određeni sklad uma.

Da bi učenik bio sposoban rješavati matematičke probleme, on mora razumjeti matematiku i znati koristiti se njome. Zato je jedan od važnijih ciljeva predmeta matematike u školi potaći učenika na voljna, produktivna razmišljanja. Takva razmišljanja mogu se identificirati s umijećem rješavanja zadataka.

S druge pak strane ne smije se dopustiti da matematičko mišljenje postane sasvim formalno. Formalno mišljenje ne zasniva se samo na definicijama, aksiomima i strogim dokazima, nego uključuje i niz drugih jednako bitnih stvari, kao na primjer: poopćenje razmotrenih slučajeva, primjenu indukcije, uporabu analogije, otkrivanje ili izdvajanje matematčkih sadržaja u nekoj konkretnoj situaciji. Zato nastavnik matematike treba upoznati svoje učenike s mnogim važnim neformalnim stadijima misaonog procesa koristeći između ostalog konkretne primjere iz svakodnevnog života. Nažalost, te prilike su često nedovoljno iskorištene. Izražavajući misao sažeto, iako u nepotpunom obliku, moglo bi se reći da:
"Trebamo poučavati umijeće dokazivanja, ne zaboravljajući pri tome procjenjivanja i dosjetke.[3]"

[2]Citirano iz knjige: G. Polya, *Matematičko otkriće*, Hrvatsko matematičko društvo, Zagreb 2003., str. 274.
[3]Citirano iz knjige: G. Polya, *Matematičko otkriće*, Hrvatsko matematičko društvo, Zagreb 2003., str. 274.

1.2. Poučavanje je umijeće

Poučavanje ima mnogo zajedničkog s raznim vrstama umjetnosti između kojih su kazališna umjetnost, glazba i pjesništvo.

Pretpostavimo da nastavnik svojem razredu mora prikazati neki dokaz koji jako dobro zna jer ga je već mnogo puta izvodio tijekom prethodnih godina poučavajući isto gradivo. Naravno, taj dokaz ga više ne zanima, čak mu je i dosadan. Nastavnik nikako ne smije pokazati svoju nezainteresiranost pred razredom. Jer ako učenici primijete da je nastavniku dosadno, tada će i njima postati dosadno. Stoga bi nastavnik tijekom izlaganja trebao "odglumiti" oduševljenje dokazom i nastojati iskoristiti svaku priliku kako bi naglasio zanimljive ideje i time učenicima pružio priliku da primjete njegovo nadahnuće. Na taj način učenici su odgledali predstavu u kojoj je nastavnikov odnos prema razmatranom problemu dao mnogo više nego sama bit problema.

Poučavanje, iako je to manje primjetno, ima nešto zajedničkog i s glazbom. Nastavnik vrlo često dolazi u situaciju da o jednoj stvari govori ne jednom ili dva puta, već više puta. Međutim, višekratno ponavljanje jedne te iste situacije bez predaha, bez promjene intonacije, može odvratiti slušatelja (učenika) od rečenog i samim time ugroziti razlog radi kojeg se ponavlja. Kako bi izbjegao takav scenarij, nastavnik se može poslužiti jednim od važnijih glazbenih oblika, a to je "tema s varijacijama".

Prenoseći taj glazbeni oblik u poučavanje, nastavnik počinje s izlaganjem teksta u najjednostavnijem obliku, drugi put ga ponavlja s nevelikim izmjenama, treći put dodaje nove žarkije boje, itd. Završivši izlaganje, nastavnik se može vratiti prvobitnoj, najjednostavnijoj formulaciji.

Drugi važan glazbeni oblik je "rondo". Prenoseći taj glazbeni oblik u poučavanje matematike, nastavnik između nekoliko uzastopnih ponavljanja osnovne misli s neznatnim izmjenama ili uopće bez njih, uključuje svoj vlastiti ili ilustrativni materijal.

S vremenom se poučavanje matematike može približiti pjesništvu, a ponekad i cinizmu.

Naime, Polya je bio prisutan Einsteinovu razgovoru s grupom fizičara. "Zašto svi elektroni imaju isti naboj?" pitao je Einstein. "No dobro, a zašto svi kozji brabonjci imaju iste dimenzije?[4]"

---

[4]Citirano iz knjige: G. Polya, *Matematičko otkriće*, Hrvatsko matematičko društvo, Zagreb 2003., str. 275.

Razlog postavljanja ovakvih pitanja sigurno ne leži u šokiranju nekoliko snobova nego u nečem puno dubljem.

Kako bi stvari koje proučavamo učinili što opipljivijim nužno je, koristiti se apstrahiranjem, ali i koristiti sva moguća sredstva kako bi ostvarili svoj cilj. *Jer ništa ne bi trebalo biti niti previše dobro ni previše loše, previše poetično ili previše nepromjenjivo kako bi nastavnik objasnio svoje apstraktne konstrukcije - baš kao što je Montaigne rekao: "Istina je toliko velika stvar da ne smijemo zanemariti ništa što nas k njoj vodi.*[5]*"*

[5]Citirano iz knjige: G. Polya, *Matematičko otkriće*, Hrvatsko matematičko društvo, Zagreb 2003., str. 276.

1.3. Tri načela učenja

Svaki učinkoviti način poučavanja mora odgovarati određenom načinu učenja. Iako ne znamo puno o procesu učenja, sljedeća tri "načela učenja" koja se mogu shvatiti kao i "načela poučavanja" rezultat su višestoljetnih iskustava i mišljenja velikih ljudi te psiholoških istraživanja procesa učenja.

► Aktivno učenje

Vrlo često se govori da učenje mora biti aktivno, a ne pasivno ili perceptivno, tj. zasnovano samo na opažanjima, ograničeno samo na čitanje knjige, slušanje izlaganja ili gledanje kino slika koje nije popraćeno aktivnim djelovanjem vlasititog intelekta. *Da bi učenje bilo djelotvornije, učenik mora sam otkriti onoliki dio naučenog gradiva koliko je to u danim uvjetima moguće.*[6]

Gore opisani postupak učenja je načelo aktivnog učenja ("principle of active learning"), koje je i vrlo staro i leži u temeljima ideje "Sokratove metode".

► Najbolji poticaj (motivacija)

Da bi učenje bilo aktivno potrebno je da učenik bude aktivan, a da bi učenik bio aktivan, on mora biti motiviran. Znači da bi učenika potaknuli na umnu aktivnost tj. intelekualni napor potrebno ga je stimulirati, npr. nadom da će dobiti neku nagradu.

Interes učenika za učenjem novog gradiva je najbolji stimulans, dok je najbolja nagrada za intezivan intelektualni napor radost koju učenik doživljava tijekom učenja.

Osim onih sasvim unutarnjih, postoje i drugi stimulansi koji se mogu smatrati poželjnima kao što je pohvala, nagrada u obliku dobre ocjene,...

Kazna zbog "ne učenja" je zasigurno najlošija metoda stimuliranja koja u većini slučajeva može dovesti do kontra efekta; učenik počinje mrziti predmet i samog nastavnika.

[6]Citirano iz knjige: G. Polya, *Matematičko otkriće*, Hrvatsko matematičko društvo, Zagreb 2003., str. 276.

Možemo zaključiti: *"Da bi učenje bilo učinkovito, učenik se mora zainteresirati za gradivo koje uči, nalaziti zadovoljstvo u samom procesu učenja gradiva.[7]"*

► Niz faza učenja

Polyino shvaćanje poznatog Kantovog aforizma: "Svaka umna operacija počinje razmišljanjem, od njega prelazi na pojmove i završava idejama" je: "Učenje počinje s djelovanjem percepcije, od nje prelazi na pojmove, a mora rezultirati izradom nekih novih osobitosti umnih navika.[8]"

U kontekstu shvaćanja navednog aforizma razlikujemo tri faze rada:

Prva faza je faza istraživanja i odvija se na intuitivnoj ili heurističkoj razini. Ona u učeniku izaziva predodžbu o promatranju konkretnih predmeta i radu s tim predmetima.

Druga faza je faza formalizacije i povezana je s izgradnjom terminologije, definicija i dokaza te se podiže do više razine - razine pojmova.[9]

Treća faza je faza usvajanja. U toj fazi poučavano gradivo moraju učenici usvojiti i ono mora ući u njihov sustav znanja. Ona ustvari predstavlja vezu između primjena i poopćavanja, te pokušaj shvaćanja unutarnje biti problema.

Rezimirajmo. *Da bi proces učenja bio djelotvoran, faza istraživanja mora prethoditi fazi formalizacije riječi i izgradnje pojmova. Zaključno, poučavano gradivo mora ući u opću pričuvu znanja učenika, koja ga osposobljava i diže na višu intelektualnu razinu.[10]*

[7]Citirano iz knjige: G. Polya, *Matematičko otkriće*, Hrvatsko matematičko društvo, Zagreb 2003., str. 276.

[8]Citirano iz knjige: G. Polya, *Matematičko otkriće*, Hrvatsko matematičko društvo, Zagreb 2003., str. 277.

[9]Citirano iz knjige: G. Polya, *Matematičko otkriće*, Hrvatsko matematičko društvo, Zagreb 2003., str. 277.

[10]Citirano iz knjige: G. Polya, *Matematičko otkriće*, Hrvatsko matematičko društvo, Zagreb 2003., str. 277.

1.4. Tri načela poučavanja

Da bi nastavnik mogao poučavati, on mora biti upoznat s tijekom procesa učenja.
U svrhu što kvalitetnijeg stjecanja znanja, nastavnik mora izbjegavati nedjelotvorne putove stjecanja znanja kao što su kazna u obliku loše ocjene ili prisila, te koristiti prednosti učinkovitih putova kao što su pozitivna stimulacija, npr. nagrada ili pohvala.
U tu svrhu potrebno je koristiti se trima načelima koje smo prije razmatrali: načelo aktivnog učenja, načelo najboljeg stimuliranja i načelo uzastopnih faza. Navedena tri načela istodobno su i tri načela poučavanja. Da bi nastavnik mogao izvući korist iz tih načela, on ih mora poznavati ne samo površno nego i na osnovi svog osobnog iskustva.

▪ Aktivno učenje

Ono što nastavnik govori u razredu vrlo je važno, ali daleko je važnije ono što misle učenici, jer ideje se moraju roditi u glavama učenika. Nastavnik je taj koji samo prima i usmjerava učenikove ideje i misli kako bi se ostvario željeni cilj.
Unatoč ograničenom vremenu za svladavanje određenog gradiva, nastavnik ima mogućnost služiti se i metodom dijaloga, no bitno je ostaviti učenicima prostora da sami otkrivaju maksimum mogućega u danim okolnostima.
Jedna od mogućnosti je prepustiti učenicima mogućnost sudjelovanja u sastavljanju zadataka koje će kasnije sami rješavati. Uspjeh u rješavanju takvi zadataka će biti puno veći jer ako su učenici uložili određeni intelektualni napor, onda će se i daleko više potruditi oko postupka rješavanja.
Dopustiti učeniku da sudjeluje u formulaciji zadataka je najvrjedniji dio otkrića jer tada učenik mora ući u samu problematiku problema, koristiti svoju kreativnost i orginalnost u znatno većoj mjeri nego je to potrebno pri rješavanju zadataka. Na taj način učenik postaje ne samo uporniji u radu nego i razvija određene mentalne navike.

▪ Najbolji stimulans

Nastavnik mora gledati na sebe kao na trgovačkog putnika koji učenicima želi prodati malo matematike. Kao što u području trgovine vrijedi da je kupac uvijek u pravu, tako i učenik koji ne želi učiti matematiku može biti u pravu što nužno ne znači da je učenik lijen, već njega jednostavno može zanimati nešto sasvim drugo.

Dužnost nastavnika u takvoj situaciji je zainteresirati učenika za matematiku. Pokušati mu objasniti svrhu i primjenu proučavanog problema ukazujući na neku konkretnu situaciju i pomoću pozitivne stimulacije uvjeriti ga da neće požaliti uloži li više napora, truda i vremena. Da bi uspio u tome, nastavnik bi trebao posvetiti posebnu pažnju izboru zadataka, njihovoj formulaciji i izlaganju.

Zadatak mora izgledati osmišljeno ne samo iz perspektive učitelja, nego i iz perspektive učenika. Poželjno je da je povezan sa svakodnevnim životom i iskustvom učenika, a može početi i nekom, učenicima dobro poznatom činjenicom općeg interesa i velike mogućnosti primjene. Kako bi učenika motivirali za rad i stimulirali njegove stvaralačke aktivnosti nastavnik je taj koji mu mora dati osnove kako napor ne bi bio uzaludan.

Jedna od mogućnosti je najaviti učeniku da će ukoliko pokuša i uspije riješiti zadatak biti nagrađen. Međutim, postoje i drugi motivi koji se ne bi smjeli zanemariti. Jedan od njih je da nastavnik predloži učeniku da pokuša pogoditi rješenje zadatka kojeg još nije počeo rješavati. U takvoj situaciji učenik daje svoju hipotezu mogućeg rješenja zadatka. Zainteresiran je za rješavanje zadataka više nego inače, postaje nestrpljiv i jedva čeka riješiti zadatak u potpunosti kako bi doznao da li je pogodio ili pogrešno procijenio rezultat.

■ Uzastopne faze

Većina zbirki zadataka u sklopu školskih udžbenika sadrže zadatke koji imaju vrlo usko područje primjene i koji se sastoje od gotovo rutinskih zadataka koji služe samo kao ilustracija jednog pravila. Pri njihovom rješavanju nedostaju dvije važne faze poučavanja. To su faze istraživanja i usvajanja koje povezuju razmatrani zadatak sa realnom situacijom i s ranije stečenim znanjem. Budući da u većini rutinskih zadataka ne postoji takva veza, učenici teže uočavaju svrhu rješavanja takvih zadataka, ali i njihovu praktičnu primjenu u svakodnevnim situacijama.

Nasuprot takvim rutinskim zadacima bitno je da nastavnik učenicima povremeno zadaje zadatke problemskog tipa koji bi se mogli smatrati oblikom znanstvenog rada.

Predloži li nastavnik učenicima da prije nego što riješe problemski zadatak provedu istraživanje, tada će oni sa većim interesom pristupiti njegovom rješavanju jer će ih zanimati jesu li njihove pretpostavke bile točne ili ne. Na taj način nastavnik je kod njih pobudio želju za dokazivanjem i formalnim rješavanjem zadataka. Također treba ostaviti vremena za raspravu dobivenih rezultata. Detaljno raspravljajući o postupku rješavanja i eventualnim pogreškama, učenici uočavaju svoje pogreške što im može pomoći pri rješavanju drugih zadataka.

Ova tri načela poučavanja moraju organski ući u sve elemente svakodnevnog rada nastavnika i biti polazište pri planiranju i sastavljanju programa svakog predmeta.

1.5. Učenje poučavanja

Mnogi smatraju da je predavanje umijeće. Spontano nam se nameću pitanja: "A može li se poučavati umjetnost? Može li se uopće naučiti predavati? Postoji li uopće takva disciplina kao metodika matematike?"

Naše ovladavanje nekim predmetom sastoji se iz skupljenih znanja i stečenih navika, tj. "umijeća". Umijeće je sposobnost korištenja prikupljenih znanja (informacija) upotrebom vlastite kreativnosti i orginalnosti.

Umijeće u matematici je znatno važnije od posjedovanja samih informacija. Zato je važno da i sam nastavnik, u svrhu razvijanja određenh umijeća kod svojih učenika, ima razvijena umijeća orginalnosti, samostalnosti i stvaralačke sposobnosti.

Postoje dva pravila poučavanja. Prvo je da nastavnik mora dobro poznavati predmet koji predaje, a drugo je da on mora znati više od onoga što treba poučavati. Ako nastavnik ima pravilan stav prema onome što poučava, onda će i takav stav imati i učenici jer uče po uzoru. Da li će predavanje biti dobro ili ne, ovisi o kreativnosti i individualnim kvalitetama nastavnika te njegovim predavalačkim metodama.

Studenti matematike koji se pripremaju za rad u školi obavezni su položiti matematičke i metodičke kolegije, te odraditi praktični rad u osnovnoj i srednjoj školi. Mnogi smatraju da je potrebno odvojiti više vremena za metodičke kolegije i praktični rad u svrhu što kvalitetnije izobrazbe budućeg nastavnika. Nastavnik bi također trebao imati iskustva u znanstveno - istraživačkom radu, kako bi kod svojih učenika pobudio želju i interes za matematikom.

Priprema nastavnika matematike mora biti plod njegove kreativnosti i samostalnog stvaralačkog rada, koji se u procesu poučavanja manifestira u obliku rješavanja zadataka ili pak u nekom drugom obliku, kroz metodu dijaloga, usmenog izlaganja ili grupnog rada.

Znanja i činjenice koje učenici usvoje moraju biti sustavna i dobro organizirana, stoga nastavnik mora obratiti posebnu pažnju na redoslijed izlaganja novih znanja. Novo znanje ne smije se pojaviti "kao grom iz vedra neba" i mora imati vezu sa svakodnevnim, realnim situacijama.

Nakon što su neke činjenice ili pravila usvojeni, odmah treba krenuti s njihovom primjenom u rješavanju drugih zadataka.Treba ih koristiti za rješavanje već poznatih zadataka na drukčiji način. Na taj način nastavnik ukazuje učeniku kako već poznate činjenice, u malo preformuliranom obliku, može koristiti za otkrivanje novih mogućnosti.

Nastavnik treba usmjeravati učenike da tek stečena znanja povezuju i proširuju poopćavajući, specijalizirajući, primjenujući analogiju ili pak druge dostupne metode.
Tako stečeno znanje, koje je nastalo kao rezultat povezivanja činjenica sa već ranije naučenim činjenicama, na dobrom je putu da se pretvori u unutarnje znanje, koje će učenik uvijek moći izvući iz svoje memorije i primjeniti ga na rješavanju konkretnog problema.

1.6. Položaj učitelja

U seminarima i kolegijima, slobodno ih možemo zvati i metodičkim, koje je George Polya držao za nastavnike, velika pozornost je bila usmjerena na pitanja koja su od iznimne važnosti svakom nastavniku u njegovoj svakodnevnoj praksi. S vremenom su Polyine napomene počele dobivati aforističan oblik i na kraju našle svoj sažet izraz u obliku "Deset zapovijedi za učitelje". Evo ih redom:

1) Zanimaj se za svoj predmet.

2) Znaj svoj predmet.

3) Znaj kojim se putem može naučiti ono što je nužno: najbolji način učenja je - otkrij sam.

4) Nauči čitati s lica svojih učenika. Nastoj saznati što oni od tebe očekuju i pokušaj razumjeti njihove poteškoće. Pokušaj se staviti na njihovo mjesto.

5) Nemoj učenicima pružiti samo informaciju, pomozi im razviti sposobnost korištenja prikupljenih podataka i naviku sustavnog rada.

6) Nastoj ih naučiti naslućivati.

7) Nastoj ih naučiti dokazivati.

8) Ističi na zadatku ono što može biti korisno pri rješavanju drugih zadataka, a za danu konkretnu situaciju nastoj otkriti opću metodu.

9) Ne odaj svoju tajnu odmah, neka učenici pokušaju pogoditi rješenje. Predloži učenicima da sami pronađu što više.

10) Savjetuj, no ne nameći nasilno svoje mišljenje.

Važno je napomenuti da su ova pravila, iako su prvobitno namijenjena nastavnicima matematike u osnovnim i srednjim školama primjenjiva i za poučavanje bilo kojeg predmeta i to na bilo kojoj razini.
Kako bi se uvjerili da li je određeni savjet prigodan za konkretnu situaciju, nastavnici bi taj savjet trebali provjeriti u razredu i tek nakon analize postignutih rezultata sami zaključiti da li je primjena savjeta postigla uspjeh ili je pak sav trud bio uzaludan.
Važno je da nastavnik sve odluke donosi osobno, na temelju vlastitog iskustva i osobnog mišljenja ne podvrgavajući se ničijem autoritetu.
Proučimo sada navedena pravila redom, usmjeravajući našu pažnju na probleme vezane uz poučavanje matematike.

1) Ako je nastavnik zadovoljan svojim zanimanjem, oduševljen svojim predmetom i profesijom koju je odabrao i ako takvo oduševljenje svakodnevno pokazuje tijekom poučavanja, onda je sasvim jasno da će i sami učenici biti oduševljeni tim predmetom.

2) Nastavniku koji dobro poznaje svoj predmet, a nije zainteresiran za njega, najbolji savjet bi bio da ga ne poučava jer to nikada neće uspješno raditi i uskoro bi mogao postati jako loš nastavnik. S druge pak strane imati samo interes za poučavanje je nužno, ali ne i dovoljno jer sama iskrena zainteresiranost unatoč maštovitosti i posjedovanju metodičkih dosjetki nastavniku koji ne zna svoj predmet neće biti dovoljna da drugima dobro objasni ono što ni sam dobro ne razumije. Znači nužno je da se nastavnik zanima za svoj predmet i da ga zna.

3) Nastavnik može imati velike koristi ako pročita dobru knjigu ili odsluša neko predavanje, ali to nije dovoljno. On mora poznavati putove i metode koje će koristiti prilikom poučavanja nužnih činjenica, ne samo površno, već na temelju osobnog iskustva i iskustva stečenog u procesu samostalnog učenja tijekom vlastitog školovanja i iskustva stečenog promatranjem svojih učenika.

4) Unatoč činjenici da nastavnik dobro poznaje svoj predmet i vlada potrebnim znanjem, zainteresiran je za njega i na temelju vlastitog iskustva poznaje proces učenja, on ipak može biti slab nastavnik. Da bi poučavanje kojim rukovodi jedna individua (nastavnik) imalo svoje rezultate za druge individue (učenike), između njih mora biti uspostavljen određeni kontakt. Nastavnik mora biti svjestan pozicije u kojoj se nalaze

učenici, naučiti čitati s njihovih zbunjenih lica i pokušati se postaviti na njihovo mjesto. Reakcija učenika na ono što nastavnik podučava ovisi o razini njihove pripreme, njihovom interesu te njihovom razmišljnju o budućnosti. Budući da količina usvojenosti gradiva ovisi o međusobnoj vezi učenika i nastavika, važno je imati na umu što učenici znaju i što ne znaju; što bi htjeli saznati, a što ih ne zanima; što moraju znati i što ne mogu znati.

Četiri prethodna pravila smatraju se temeljima pedagoškog majstorstva. Ona tvore nužne i dovoljne uvjete uspješnog poučavanja.

5) Znanje čine skup informacija i umijeće primjene tih informacija. Umijeće je skup određenih navika i sposobnost uporabe činjenica u svrhu ostvarenja zadanog cilja. U matematici umijeće je sposobnost rješavanja zadataka, provođenja dokaza teorema te analiza rješenja. Umijeće u matematici je važnije od velike količine informacija. Stoga, nastavnik treba nastojati kod svojih učenika razviti naviku sustavnog rada i sposobnost primjene prikupljenih znanja u sličinim uvjetima.

6) Nastavnik bi učenike trebao potaknuti da naslućuju, a zatim i dokazuju. Na taj način se dolazi do otkrića. Takav način razmišljanja i mogućnosti ilustriranja dosjetke u procesu oktrića, nastavnik na osnovi vlastitog iskustva treba nastojati prenijeti na učenike. Na taj način se u učeniku počinje razvijati pozitivan oblik razmišljanja prema istraživačkom radu, ali i matematici kao predmetu. Slabiji učenici mogu izreći sasvim neprikladne i neupotrebljive slutnje, ali nastavnik je taj koji treba učenike usmjeriti na pravi put. Svako naslućivanje treba biti razumno osmišljeno te zasnovano na primjeni analogije i indukcije.

7) U svakodnevnom životu vrlo se rijetko susrećemo sa dokaznim rasuđivanjima. Unatoč tome i činjenici da nije sasvim jasno kako poučavati tom umijeću, nastavnik matematike mora svoje učenike (osim onih u nižim razredima), upoznati s njim. Odgovor na pitanje kako poučavati dokazivanje bi mogao biti "otkrij sam" jer je to najbolji način da učenik stekne nužne navike i nešto nauči.

8) Umijeće je najvrjedniji dio matematičkog znanja, puno vrjednije od posjedovanja informacija. Postoje dva načina učenja kod učenika. Prvi je oponašanjem, a drugi

praksom. Poznavajući tu činjenicu nameće nam se jedno logičko pitanje: "Kako učenike poučiti matematičkom umijeću?" U svrhu stvaranja opće metode rješavanja zadataka uz pomoć konkretnih primjera, nastavnik bi trebao motivirati svoje učenike demonstirajući postupak rješenja zadatake izdvajajući činjenice koje su primjenjive u rješavanju drugih zadataka i naglašavajući poučne osobitnosti rješenja, ne samo pohvalama, nego i svojim stavom.

9) Koristan savjet nastavniku je da učenicima, prije negoli počnu rješavati zadatak, predloži da pokušaju pogoditi rješenje. Tako će učenik, koji se odvažio na glas izreći svoju pretpostavku, postati motiviraniji za nastavak rada. On će pažljivo pratiti tijek rješavanja kako bi doznao je li bio u pravu ili nije, tj. da li je njegova pretpostavka bila točna ili kriva.

10) Ukoliko nastavnik primjeti, pregledavajući postupak rješavanja, da je rješenje nekog zadatka pogrešno, bilo bi korisno pregledati redak po redak, zajednički s učenikom, kako bi mu pružio priliku da sam otkrije pogrešku i na taj način nešto nauči. Ako bi nastavnik postupio suprotno, učenik bi se mogao obeshrabriti i prestati ga slušati čime će svi nastavnikovi daljni naporni propasti.
Najpoželjnije bi bilo izbjegavati riječi poput: "Vi ste pogrješili", a umjesto njih reći nešto poput: "Općenito ste u pravu, no...". Upravo takav metodički postupak ukazuje pravilo: "Savjetujte, no ne namećite svoje mišljenje."

Posljednja dva pravila usmjerena su k istome cilju: ona preporučuju da se učenicima ostavi toliko slobode i inicijative koliko je to najviše moguće pri postojećim uvjetima poučavanja.
Uslijed nedostatka vremena nastavnik matematike često dolazi u napast griješiti protiv tih pravila, tj. protiv načela aktivnog učenja. Tako se dogodi da nastavnik učeniku "servira" gotove činjenice i rješenja, ne ostavljajući mu vremena da sam s razumijevanjem dođe do njih. Nastavnik može uvesti neki pojam ili pravilo, koristiti neko pomoćno sredstvo koje će ga odmah dovesti do željenog rezultata bez posebnog objašnjenja, no takvi postupci mogu samo stvoriti odbojnost učenika prema predmetu. Stoga, bez obzira koliko velik vremenski zaostatak bio, korištenje "trikova" koji se pojavljuju kao "grom iz vedra neba" bez ikakvog objašnjenja, mora se izbjegavati.

Kako bi izbjegli svjesno kršenje načela aktivnog učenja, možemo se poslužiti sljedećim savjetima:

I. Neka učenici postavljaju pitanja ili neka nastavnik pita pitanja koja bi mogli postavljati učenici.
II. Neka učenici odgovaraju na pitanja ili neka nastavnik daje odgovorena pitanja, ali onako kako bi na njih odgovorili učenici.

2. Kako riješiti matematički zadatak

Danas prepoznatljiv način Polyinog razmišljanja počinje se javljati tijekom studija. U želji da bolje shvati i usvoji novo gradivo, Polya je kao revan student pozorno slušao predavanja pokušavajući razumijeti prikazana rješenja i činjenice. No unatoč silnoj želji i trudu uvijek mu se nametalo jedno pitanje koje ga je uznemiravalo: "Jest, rješenje je tu, čini se da je ispravno, no kako je moguće naći takvo rješenje? A kako bih ja mogao nešto takvo pronaći i otkriti?" I upravo to njegovo nastojanje da osim razumijevanja postupka rješenja shvati i razlog rješavanja nekog zadatka kako bi ga potom objasnio drugima, navela su ga, između ostalog, da postane sveučilišni profesor matematike te autor mnogih knjiga kojima se danas služe mnogi nastavnici matematike kao i učenici i svi ostali koje zanimaju "sredstva i putovi izuma i otkrića".

Rješenje velikog problema je veliko otkriće, no u rješavanju svakog problema ima nešto otkrivalačko. I pri najskromnijem zadatku, ako on budi tvoj interes, ako pokreće tvoju dosjetljivost, i ako ga rješavaš vlastitim snagama, doživjet ćeš napetost i trijumf pronalazača.[1] Općenito govoreći, nastavnik koji nastoji takve doživljaje i utiske probuditi kod svojih učenika na dobrom je putu da bude dobar nastavnik, jer postupajući na gore navedeni način on ne samo da razvija pozitivan stav prema učenju, već i stvara sklonost za umnim radom. Ako nastavnik u svoje raspoloživo vrijeme s učenicima samo mehanički uvježbava postupke rješavanja zadataka, smanjuje im interes i koči njihov intelektualni razvoj. No ako on u svojim učenicima budi radoznalost dajući im zadatake primjerene njihovom znanju i ako im pomaže stimulativnim pitanjima, razvijat će u njima sklonost za samostalnim mišljenjem i dovest će ih do zaključka da matematički problem može pružiti isto toliko zadovoljstva koliko i rješavanje križaljki, a da umni rad može biti jednako ugodan kao napeta partija tenisa.

Rješavanje zadataka je praktična vještina kao, na primjer, plivanje ili sviranje na glasoviru, a kako bi stekli manire potrebne za usavršavanje neke praktične vještine moramo puno vježbati i učiti oponašanjem.

---

[1]Citirano iz knjige: G. Polya, *Kako riješiti matematički zadatak*, Školska knjiga, Zagreb 1966., str. V.

Isto tako, onaj tko želi naučiti rješavati zadatke mora oponašati i promatrati što njegov nastavnik čini kada rješava zadatake. Nastavnik mora svojim učenicima davati dovoljno prilike za vježbanje i oponašanje ukoliko želi da njegovi učenici imaju razvijenu sposobnost rješavanja zadataka.

Rješavajući zadatak pred razredom, nastavnik treba sam sebi postavljati pitanja, kao što su:

Što je nepoznato? Što je zadano? Kako glasi uvjet? ,

a koja također upotrebljava kada pomaže svojim učenicima. Na taj način, oponašajući, učenik stječe vještinu pravilnog upotrebljavanja pitanja i preporuke što je čak važnije od poznavanja neke matematičke činjenice.

2.1. Četiri faze rada

Pokušavamo li riješiti neki zadatak, morat ćemo više puta mijenjati stajalište s kojeg taj zadatak razmatramo. Neprestano ćemo morati zauzimati drugi položaj. U početku naša će predodžba o zadatku vjerojatno biti dosta nepotpuna. Čim uznapredujemo, vidici nam se već mijenjaju, a opet su drugačiji kad je zadatak gotovo riješen.

Prilikom rješavanja nekog zadatka bilo bi korisno proći kroz sljedeće četiri faze rada:

Prvo moramo razumijeti zadatak tj. moramo uvidjeti odnosno prepoznati što se traži.

Drugo, moramo razmoriti međusobne povezanosti pojedinih komponenti u zadatku, uočiti vezu između zadanih podataka i nepoznanice, kako bi došli do ideje mogućeg rješenja zadatka i stvorili plan rješavanja.

Treće, trebamo izvršiti taj plan.

Četvrto, osvrćemo se na postupak rješavanja, provjeravamo i diskutiramo gotovo rješenje.

Svaka od ovih faza ima svoje značenje. Može se dogoditi da učeniku iskrsne neka dobra ideja pa preskočivši prve tri faze rada odmah dolazimo do četvrte. Isto tako može se dogoditi da učenik izostavi koju od četriju faza, a nema dobre ideje. Najgore je kad se učenik upusti u izračunavanja i konstrukcije, a zadatak uopće nije razumio. Općenito možemo reći da ukoliko nismo spoznali vezu između zadanog i traženog te načinili plan rješavanja, potpuno je beskorisno upustiti se u provođenje pojedinosti. Učenik će izbjeći mnoge pogreške ako kontrolira svaki korak u izvršavanju svog plana i ako se drži navedenih faza rada.

2.2. Razumijevanje zadatka

Smiješno je i žalosno odgovarati na pitanja koja nismo razumijeli. Često se u školi i izvan nje, događaju takve stvari, no nastavnik treba učiniti sve kako bi ih sprječio u razredu. Učenik se treba upoznati sa zadatkom: razumjeti ga, znati mu smisao, znati ga formulirati i prepoznati što je zadano, a što se traži. Potrebno je da on teži k njegovu rješenju. Ukoliko učenik ne pokazuje interes za zadatkom ili pak ne razumije što se od njega traži, to nužno ne znači da je naš učenik lijen, a nastavnik bi trebao pokušati pomnije odabrati zadatak jer on ne smije biti nit pretežak nit prelagan, nego prirodan i zanimljiv svakom učeniku.
Prije svega valja shvatiti tekst zadatka. Nastavnik može to donekle provjeriti zahtijevajući od učenika da ponovi tekst. Učenik bi trebao znati formulirati zadatak, ukazati na glavne dijelove, tj. moći prepoznati nepoznanicu, zadane podatke i uvjet.
Zato će nastavnik rijetko kada moći izostaviti pitanja:

Što je nepoznato? Što je zadano? Kako glasi uvjet?

Učenik treba pažljivo razmatrati glavne dijelove zadatka. Ako je sa zadatkom u vezi neki crtež, treba nacrtati skicu i na njoj istaknuti nepoznanicu i zadane podatke.

Primjer 1.
Kolika je duljina prostorne dijagonala pravokutnog paralelopipeda (kvadra), kome su poznate duljina, širina i visina?

Da bi učenici uspješno mogli riješiti ovaj zadatak, potrebno ih je prethodno upoznati sa Pitagorinim poučkom i nekim njegovim planimetrijskim primjenama te sa nekim ne znanjima iz stereometrije. Nastavnik može ovaj zadatak učiniti zanimljivijim konkretiziranjem.
Učionica ima oblik kvadra, kojemu bi se dimenzije mogle izmjeriti, a mogu se i "grubo" procijeniti. Učenici trebaju pronaći, tj. "direktno izmjeriti", dijagonalu. Nastavnik pokazuje duljinu, širinu i visinu učionice, naznačuje pokretom ruke dijagonalu i oživljuje sliku, nacrtanu na ploči, upozoravajući neprestano na učionicu.

Razgovor između nastavnika i učenika odvijao bi se nekako ovako:
Nastavnik: "Što je nepoznato?"
Učenik: "Duljina prostorne dijagonale kvadra."
Nastavnik: "Što je zadano?"
Učenik: "Duljina, širina i visina kvadra."
Nastavnik: "Uvedi zgodne oznake! Kojim slovom ćemo označiti nepoznanicu?"
Učenik: "Sa x."
Nastavnik: "Koja slova želiš za duljinu, širinu i visinu?"
Učenik: "a, b i c."
Nastavnik: "Kako glasi uvjet koji veže a, b, c i x?"
Učenik: "x je dijagonala kvadra kojemu su a, b, c duljina, širina i visina."
Nastavnik: "Ima li zadatak smisla tj. jeli uvjet dovoljan za određivanje nepoznanice?"
Učenik: "Da. Ako znamo a, b, c, znamo kvadar. Ako je određen kvadar, određena je i prostorna dijagonala."

2.3. Stvaranje plana

Plan imamo kada znamo ili barem naslućujemo koje račune, transformacije ili konstrukcije moramo izvesti da dobijemo nepoznanicu.[2] Put od razumijevanja zadataka do postavljanja plana može biti dug. Prilikom rješavanja zadatka najvažnije je doći do ideje plana. Ta se ideja može pojavljivati postepeno ili pak nakon prividno bezuspješnih pokušaja iznenada iskrsnuti kao "sjajna ideja". U takvoj situaciji najbolje što nastavnik može učiniti za svoje učenike jest: nenametljivo im pomoći da dođu do takve ideje.

Da bi mogao shvatiti položaj učenika, nastavnik treba misliti na svoje vlastito iskustvo, na teškoće i uspjehe koje je sam imao pri rješavanju zadataka.

Kako bi došli do ideje rješenja potrebno je dobro poznavati predmet čijim se činjenicama i znanjem koristimo. Ukoliko razmatrani predmet poznajemo vrlo malo ili nikako, doći do ideje će biti jako teško ili pak nemoguće. Stoga prirodno dolazimo do zaključka da ako želimo riješiti zadatak moramo doći do ideje, a da bi do nje došli moramo posjedovati bogato iskustvo i znati dobro raspolagati sa ranije stečenim znanjem, jer samo sjećanje nije dovoljno za dobru ideju. Slikovito rečeno, sav materijal nije dovoljan za gradnju kuće, ali kuću ne možemo graditi ako nemamo materijal.

Činjenice neophodne za rješavanje zadatka su ranije riješeni zadaci ili dokazani teoremi odnosno pojedinosti povezane s ranije stečenim matematičkim znanjem. Prema tome, prije rješavanja zadatka, potrebno je učeniku postaviti pitanje:

Znaš li neki srodni zadatak?

Teškoća je u tome što obično ima previše zadataka koji su na neki način srodni s našim, tj. koji s njim imaju nešto zajedničko. Zato je prethodno pitanje bolje preformulirati u:

Promotri nepoznanicu!

Jesi li iskoristio sve zadano?

Jesi li iskoristio čitav uvjet?

[2]Citirano iz knjige: G. Polya, *Kako riješiti matematički zadatak*, Školska knjiga, Zagreb 1966., str. 7.

Nastoj se sjetiti nekog tebi poznatog zadatka koji sadrži istu ili sličnu nepoznanicu!

Ukoliko se učenik ne uspije prisjetiti nekog ranije riješenog zadatka, koji je vrlo srodan našem sadašnjem zadatku, onda mu treba pomoći:

Evo zadatka koji je srodan tvom, a već je riješen! Možeš li ga upotrijebiti?

Prethodna pitanja su oblikovana tako da pomažu učenicima pri pokretanju ispravnog lanca misli. Ako ona ne djeluju, nastavnik mora biti spreman da s učenicima istraži i druge aspekte zadatka, kao što su primjena analogije, specijalizacije, generalizacije ili pak znati varirati (preobraziti, preinačiti) zadatak pitanjem poput:

Možeš li zadatak drukčije izraziti?

Variranje zadataka može dovesti do "zgodnog" pomoćnog zadatka i sljedećeg zaključka:

Ako ne možeš riješiti postavljeni zadatak, onda pokušaj najprije riješiti neki srodni zadatak!

Nastavnik također treba pripaziti da se ne udalji previše od prvobitnog zadatka.
Takvo udaljavanje može izbjeći tako da ne upotrebljava previše raznih poznatih i pomoćnih (modificiranih) zadataka u svrhu rješavanja prvobitnog zadatka.

Primjer 2.

Vratit ćemo se na primjer 1., koji smo razmatrali u prethodnom poglavlju. Moguće je da će sad učenici imati neke vlastite ideje i pokazati incijativu. No ukoliko se dogodi da učenici ne pokažu nikakvu incijativu za zadatak, nastavnik mora pažljivo nastaviti dijalog s njima. Mora biti spreman da u nešto izmijenjenom obliku ponavlja pitanja na koja učenici ne odgovaraju. Nastavnik mora očekivati da će se često sukobiti sa zbunjujućom šutnjom svojih učenika (koja će se u daljnjem tekstu označavati "..........").

Nastavnik: "Znaš li neki srodni zadatak?"
Učenik: ".........."

Nastavnik: "Promotri nepoznanicu! Znaš li neki zadatak koji sadrži istu nepoznanicu?"
Učenik: ".........."
Nastavnik: "No, što je nepoznato?"
Učenik: "Prostorna dijagonala kvadra."
Nastavnik: "Znate li neki zadatak s istom nepoznanicom?"
Učenik: "Ne. Još nismo imali zadatak o prostornoj dijagonali kvadra."
Nastavnik: "Znate li još neki zadatak sa sličnom nepoznanicom?"
Učenik: ".........."
Nastavnik: "Vidite, dijagonala je dužina. Jeste li ikad rješavali zadatak u kome je bila nepoznata duljina neke dužine?"
Učenik: "Da, jesmo! Tražili smo, na primjer, stranicu pravokutog trokuta."
Nastavnik: "Dobro! To je zadatak srodan našem, a koji je već riješen. Možete li ga upotrijebiti?"
Učenik: ".........."
Nastavnik: "Vi se sjećate jednog zadatka koji je srodan našemu. Ne biste li ga upotrijebili? Hoćemo li uvesti neki pomoćni element kako bi mogli iskoristiti naš srodni zadatak?"
Učenik: ".........."
Nastavnik: "Pazite! Zadatak kojeg ste se sjetili obrađuje trokut. Imate li na svojoj slici takav trokut?"

Posljednja napomena bi trebala dovesti do ideje rješenja, a sastoji se u tome da uvedemo pravokutni trokut (Slika 1.) kojem je tražena dijagonala hipotenuza. Ipak, nastavnik treba biti spreman i na slučaj da ni ta napomena neće biti dovoljna da "probudi" učenika, pa stoga treba imati u rezervi niz pitanja i uputa koja pomažu učeniku da dođe do rješenja:

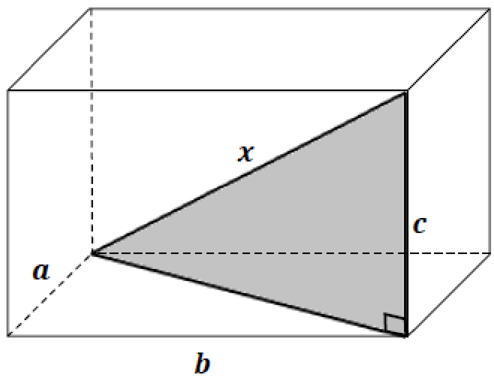
Biste li na slici htjeli imati trokut?

Koja vrsta trokuta bi nam najviše odgovarala?

Dijagonalu još ne znate naći, a kažete da biste mogli naći stranicu trokuta. No, što ćete učiniti?

Da li bi mogli odrediti dijagonalu kad bi ona bila stranica trokuta?

Kad učenici napokon uspiju uvesti odlučujući pomoćni element, zatamnjeni pravokutni trokut (Slika 1.), nastavnik treba provjeriti "vide" li učenici dovoljno unaprijed prije nego ih potakne na konkretna izračunavanja:



Slika 1.

Nastavnik: "Mislim da bi bilo dobro nacrtati taj trokut. Sad imate taj trokut, no imate li nepoznanicu?"
Učenik: "Nepoznanica je hipotenuza tog trokuta. Mi je možemo izračunati primjenom Pitagorina poučka."
Nastavnik: "Možete ako su poznate obje katete. Jesu li one poznate?"
Učenik: "Jedna je kateta zadana, a to je c. A drugu katetu nije teško naći. Druga kateta je hipotenuza jednog drugog pravokutnog trokuta."
Nastavnik: "Vrlo dobro! Sad vidim da imate plan."

Nastavnik je mogao postupiti i drukčije. Mogao je krenuti drugim putem i postaviti sljedeća pitanja:

Znaš li neki analogan zadatak?

Vidiš da je postavljeni zadatak stereometrijski. Bili mogao navesti analogan zadatak iz planimetrije?

Vidiš da zadatak obrađuje prostornu dijagonalu pravokutnog paralelopipeda (kvadra).
Kako bi glasio analogan zadatak u ravnini?

Analogan zadatak bi glasio: Odredi duljinu dijagonale pravokutnog paralelograma tj. pravokutnika.

Dobili smo zadatak srodan našem, a koji je već riješen, možemo li ga iskoristiti?

Učenici sad shvaćaju da se dijagonala zadanog kvadra može shvatiti kao dijagonala prikladnog pravokutnika. Taj pravokutnik treba uvesti u sliku kao presjek kvadra ravninom koja prolazi dvama suprotnim bridovima. Ovdje je analogija most prema ideji rješenja problema.

2.4. Izvršavanje plana

Stvoriti plan tj. doći do ideje rješenja nije lako. Štoviše, teško je. Da bismo u tome uspjeli, potrebno nam puno toga: ranije stečena znanja, koncentracija na cilj, sreća,...
Izvršiti plan puno je lakše i potrebno je uglavnom strpljenje.
Ako je učenik, potaknut vlastitim interesom, uz pomoć vlastitog intelektualnog napora i možda određene nastavnikove pomoći došao do ideje plana, onda će ga nikako ili jako teško zaboraviti. Ukoliko pak učenik do plana dođe isključivo zbog nastavnikova autoriteta, onda nažalost prijeti opasnost da plan učenik zaboravi. Stoga je bitno poticati učenike da vlastitim naporima dođu do ideje plana, potom ga izvrše i tako izbjegnu opasnost od zaboravljanja.
Potrebno je kontrolirati svaki korak u izvršavanju plana i uvjeriti se u njegovu ispravnost ili "inuitivno" ili "formalno". Učenik se može uvjeriti u ispravnost nekog koraka koncentrirajući se na "kritično mjesto" sve dok ne prestane sumnjati u ispravnost tog koraka ili ga pak razjasni uz pomoć formalnih pravila. Zato je važno da nastavnik u pojedinim slučajevima jasno naglasi razliku između "uvidjeti" i "dokazati":

Možeš li jasno vidjeti da je korak ispravan?

Možeš li i dokazati da je korak ispravan?

Primjer 3.

Na kraju primjera 2. učenik napokon ima ideju rješenja zadatka. Učenik na slici uviđa pravokutni trokut kome je nepoznata hipotenuza označena sa x, jedna kateta je zadana visina c, dok je druga kateta dijagonala jednog od pravokutnika.
Pretpostavimo da je učenik sa y označio drugu katetu, tj. dijagonalu pravokutnika sa stranicama a i b. Uvodeći ovu oznaku učenik jasnije vidi ideju rješenja, koja se sastoji u tome da se uvede pomoćni zadatak s nepoznanicom y.
Učenikova pozornost tijekom analize jednog, pa zatim i drugog pravokutnog trokuta je usmjerena na sliku 1, koja se cijelo vrijeme nalazi na ploči i koja mu zorno pomaže pri rješavanju zadatka.

Učenik će naposljetku dobiti:

$$x^2 = y^2 + c^2$$
$$y^2 = a^2 + b^2$$

a odatle, eliminiranjem pomoćne nepoznanice y,

$$x^2 = a^2 + b^2 + c^2$$
$$x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\ .$$

Ako učenik točno izvodi svaki korak, onda nastavnik nema potrebe prekidati ga, osim ako ga želi podsjetiti da kontrolira svaki korak. Tako nastavnik može pitati:

Možeš li jasno vidjeti da je trokut sa stranicama x, y i c pravokutan?

2.5. Osvrt

Radeći onako kako i čak najbolji učenici rade, nakon što riješe zadatak, kad uredno napišu dokaz, zaklope svoje bilježnice i čekaju nastavnikovu uputu za daljni rad, učenici izostavljaju jednu važnu i poučnu fazu rada, a to je osvrt.

Osvrtom na gotovo rješenje, ponovnim razmatranjem i preispitivanjem rezultata i puta koji je do njega doveo, učenici bi mogli učvrstiti svoje znanje i povećati svoje sposobnosti u rješavanju zadataka. Dobar nastavnik smatra da nijedan zadatak nije u potpunosti iscrpljen i takvo mišljenje treba usaditi svojim učenicima: "Ako smo dovoljno marljivi i oštroumni, osvrtom ćemo poboljšat svako rješenje, a u svakom slučaju bolje ćemo ga razumijeti.[3]"

Ako je postupak dokazivanja bio dug i kompliciran, mogućnost pogreške je veća. Unatoč dobro razvijenom planu, kontroli svakog koraka i učenikovom uvjerenju da je točno riješio zadatak, mogućnost potkradanja greške uvijek postoji. Zato je poželjno učenike poticati da, naročito ako postoji neki brz i intiutivan način, provjere svoj postupak, rezultat ili pak dokaz. Jedan od načina kako ih potaknuti na provjeravanje je postavljanje pitanja:

Možeš li provjeriti rezultat?

Možeš li provjeriti dokaz?

Također je važno da nastavnik nizom pitanja i preporuka pokaže da se svaki matematički problem može povezati sa nekim drugim matematičkim problemom ili pak sa problemom iz realnog života. Upravo osvrt na rješenje zadatka "zgodan" je način istraživanja veza među zadacima. Učenicima će biti posebno zanimljivo "pogledati unatrag" ako su se pri rješavanju zadataka koristili vlastitim intelektualnim naporom i ako imaju osjećaj da su pridonijeli nečemu važnome.

Nastavnik može pitanjem potaknuti svoje učenike da se prisjete slučajeva u kojima bi mogli ponovo iskoristiti upotrebljeni postupak ili pak primjeniti dobiveni rezultat:

Možeš li rezultat ili metodu primjeniti na neki drugi zadatak?

[3]Citirano iz knjige: G. Polya, *Kako riješiti matematički zadatak*, Školska knjiga, Zagreb 1966., str. 12.

Uz nastavnikovu pomoć, već nakon par primjera, učenici bi trebali biti sposobni samostalno pronaći primjere u kojima mogu primjeniti već korišteni postupak.

Zadaci u kojima je to moguće obično se sastoje od toga da se zadani apstraktni matematički elementi zadatka konkretiziraju. Jedan takav zadatak obradili smo u primjeru 1.

Primjer 4.

U primjeru 3. učenici su napokon došli do rješenja.
Ako su a, b, c tri brida koja kvadra koja izlaze iz istog vrha, dijagonala je

$$x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\ .$$

Možeš li provjeriti rezultat?

Nastavnik na ovo pitanje ne može očekivati dobar odgovor ukoliko svoje učenike, kroz primjere, nije upoznao sa činjenicom da je ovo zadatak sa "slovima" tj. da njegov rezultat možemo provjeriti na razne načine za razliku od čisto numeričkih zadataka.
Nastavnik može pomoći učenicima ako im postavlja razna pitanja o rezultatu problemskog zadataka, na koja oni mogu odgovoriti sa "da" ili "ne" što pak upućuje na mogućnost postojanja pogreške u rezultatu. Pitanja vezana uz naš primjer bi mogla biti formulirana ovako:

Jesi li iskoristio sve zadano?

Pojavljuju li se u tvojoj formuli za dijagonalu sve zadane veličine a, b, c?

Naš je zadatak stereometrijski: odrediti dijagonalu kvadra kome su zadani bridovi a, b, c. Taj zadatak je analogan planimetrijskom zadatku: odredi dijagonalu pravokutnika kome su zadane stranice a i b. Jeli rezultat našeg "prostornog" zadatka analogan rezultatu našeg "ravninskog" zadatka?

Ako se visina c smanjuje i najzad nestaje, naš paralelopiped postaje paralelogram.

Uvrstiš li u svoju formulu $c = 0$, dobivaš li ispravnu formulu za dijagonalu pravokutnog paralelograma?

Ako raste visina c, onda raste i dijagonala. Pokazuje li to formula?

Mjerimo li a, b, c u decimetrima, tvoja formula daje i dijagonalu mjerenu u decimetrima. Ako sve pretvoriš u centimetre, formula mora ostati ispravna. Da li je to točno?

Učinak svih ovih pitanja je dobar i od velike je pomoći učenicima iz više razloga.
Ponajprije inteligentnog učenika ne može, a da ne impresionira činjenica da formula odolijeva tolikim iskušenjima. Učenik je prije bio uvjeren da je formula ispravna, jer ju je pažljivo izveo. Sad je uvjeren još više.
Nadalje, zahvaljujući prethodnim pitanjima, učenik primjećuje da su neke pojedinosti njegove formule usko povezane sa činjenicama iz raznih područja matematike te da ju je moguće primjeniti i pri rješavanju svakodnevnih, realnih problema. Takvo povezivanje matematičkih činjenica sa realnim i drugim matematičkim problemima povećava izglede da učenik formulu lakše zapamti; njegovo znanje postaje čvršće.
Sva navedena pitanja moguće je prenijeti i na slične zadatke, a nakon određenog iskustva, inteligentan učenik će i sam moći zapaziti opće ideje: iskorištavanje svih bitnih podataka te njihovo variranje i konkretiziranje, stvaranje analognih zadataka.
Ako učenik navikne usmjeravati svoju pažnju na takve stvari, to će biti svakako vrlo korisno za usavršavanje vještine rješavanja zadataka.

3. Znanstveno - istraživački rad na razini srednje škole

Poučavanje matematike u srednjoj školi mora sadržavati upoznavanje učenika sa svim stranama matematičke djelatnosti, a jedna od njih je i znanstveno - istraživački rad.
Zato je važno da nastavnik u procesu poučavanja unese elemente koji će učenike potaknuti na stvaralački rad. Birajući primjerene zadatke, koje potom na odgovarajući način prezentira, nastavnik može dati povoda i prosječnom učeniku za istraživanjem.
Najvažniji korak za matematičara je izbor zadataka. Kada nastavnik učeniku zadaje zadatak koji je sam osmislio ili zadatak koji se nalazi u udžbeniku, vrlo je bitno da učini što god je u njegovoj moći kako bi zadatak postao zanimljiv učeniku. Nastavnik treba djelovati tako da učenicima omogući sudjelovanje u postavljanju zadataka. Takvi zadaci, s dubljim sadržajem, često su povezani sa realnom situacijom, a ujedno su i zadaci namijenjeni primjeni vjerodostojih zaključaka i razvijanju kod učenika umijeća rasuđivanja. Prikladniji su za razvoj umne djelatnosti nego većina zadataka iz zbirki i udžbenika koji su slabo povezani i služe kao ilustracija pojedinog pravila te daju mogućnost stjecanja iskustva u primjeni samo tog pravila.
Matematička pitanja, koja su nužna u takvim zadacima, povezana su i s drugim prirodnim, eksperimentalnim znanostima u kojima promatranje - eksperiment i metoda analogije mogu dovesti do otkrića. Taj aspekt matematike mogao bi osobito privući buduće "korisnike" matematike - prirodoslovce i injženjere. Zato je potrebno u nastavi matematike koristiti znanstvene metode, indukciju i matematičko otkriće koliko god je to moguće.
U svakom znanstvenom istraživanju (pa tako i u matematici) važno je "naslućivanje". Zato se koristi izreka koja se može shvatiti gotovo kao pravilo: "Na početku naslućujte, a zatim dokažite."
U sljedećim primjerima naslućivanje, promatranje, pretpostavke, induktivno zaključivanje ili kraće vjerodostojna rasuđivanja igraju važnu ulogu.[1]

[1]Citirano iz knjige: G. Polya, *Matematičko otkriće*, Hrvatsko matematičko društvo, Zagreb 2003., str. 319., 332.

3.1. Primjer

"Zadan je opseg o jednakostraničnog trokuta. Izračunajte njegovu površinu p."

Baš ovakvi tipovi zadataka se često susreću u školskim matematičkim zbirkama. Nedostatak ovog zadatka je što nije dovoljno zanimljiv ako je odvojen od srodnih zadataka. Stoga je nužno prikazati ga na sljedeći, puno zanimljiviji način.

Nastavnik govori:

"U legendarno vrijeme osvajanja prerije, svaki je stanovnik srednjeg Zapada imao mnogo jutara, ali samo 100 metara bodljikave žice za ogradu. Za ograđivanje pašnjaka namjeravao je utrošiti svu raspoloživu žicu. Razmišljajući o različitim oblicima, začudio se kako mali dio pašnjaka može ograditi."

"Evo problema. Koji biste vi oblik preporučili? Nemojte zaboraviti da ćete morati izračunati njegovu površinu, stoga bi bilo dobro izabrati što jednostavnije likove:

- kvadrat,
- pravokutnik sa stranicama 20 i 30 metara,
- jednakostranični trokut
- jedankokračan pravokutnu trokut,
- krug."

Nastavnik učenicima daje pohvalu i navedenom popisu dodaje nekoliko likova koji su mogući kandidati za točno rješenje:

- pravokutnik sa stranicama 10 i 40 metara,
- jednakokračan trokut sa stranicama duljine 42, 29 i 29 metara,
- jednakokračan trapez sa stranicama duljine 42, 13, 32 i 13 metara,
- pravilan šesterokut,
- polukrug.

Nastavnik napominje da su svi ti likovi izoperimetrijski, tj. imaju jednake opsege, i zadaje sljedeći zadatak:

"Izračunajte površine tih likova u kvadratnim metrima i poredajte ih po veličini od najvećeg prema najmanjem. Pri računanju pokušajte pogoditi koji od njih ima najveću površinu?
A koji najmanju?"

Ovaj se zadatak može zadati i u prosječnom razredu ukoliko nastavnik procjeni da učenici posjeduju potrebna znanja.
Evo liste rješenja, pri čemu je površina u nekim slučajevima približna:

LIK	POVRŠINA
krug	795
pravilan šesterokut	722
kvadrat	625
pravokutnik 20 x 30	600
polukrug	594
jednakostraničan trokut	481
trapez 42, 13, 32, 13	444
jednakokračan pravokutni trokut	430
trokut 42, 29, 29	420
pravokutnik 40 x 10	400

Prije rasprave nastavnik pita:
Imate li kakvih pitanja?

Osnovni cilj nastavnika u ovom primjeru je privući pažnju učenika na popis opsega likova i njihovih površina. Ukoliko i kada to uspije, daljnu raspravu će voditi učenici iskazujući vlastite primjedbe dobivene proučavanjem gore navedenog popisa. Što manje nastavnik sugerira, to će rasprava biti bolja, no ukoliko ipak dođe do zatišja, nastavnik je taj koji potiče na diskusiju postavljanjem pitanja poput:

Što možete reći o ovom popisu?

Prvi na popisu je krug. Što mislite zašto?

Na popisu ima nekoliko trokuta i četverokuta. Koji je od četverokuta prvi na popisu? A koji kod trokuta? Zašto?

Da, u pravu ste, a jeste li to dokazali?

Ako to niste dokazali, kakve su vaše osnove da u to vjerujete?

Trokut možemo smatrati degeneriranim četverokutom, kojem je jedna stranica duljine nula ili jedan kut jednak 180°. Pomaže li vam ta primjedba?

Uz veću ili manju nastavnikovu pomoć, učenici dolaze do sljedećih zaključaka:

- ✓ Između svih ravninskih likova jednakog opsega najveću površinu ima krug.
- ✓ Između svih četverokuta jednakog opsega najveću površinu ima kvadrat.
- ✓ Između svih trokuta jednakog opsega najveću površinu ima jednakostraničan trokut.
- ✓ Između svih mnogokuta jednakog opsega najveću površinu ima pravilan mnogokut.

Proučavajući taj popis učenici su mogli doći i do još jednog zaključka:

- ✓ Ako dva pravilna mnogokuta imaju jednake opsege, onda veću površinu ima onaj koji ima više stranica. Što mnogokut više sliči na krug, on ima veću površinu.

Niti jedna od navedenih tvrdnji nije dokazana mogućim zaključcima iz navedenog popisa jer na osnovi njega navedene tvrdnje možemo samo smatrati vjerodostojnima.

Eksperiment može sugerirati i općenitija razmišljanja, tj. mi iz navedenog popisa možemo doći do još sličnih zaključaka, a povećanjem broja primjera će se potaknuti pojava novih hipoteza.

3.2. Još jedan primjer

Nastavnik govori: "Još su stari Grci poznavali važnu formulu za računanje površine trokuta koju mi danas zovemo Heronova formula. Heronovu formulu koristimo za računanje površine p trokuta ako su zadane duljine a, b i c svih njegovih stranica.
Ta formula glasi

$$p^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$$

gdje je

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

poluopseg trokuta."

Nastavnik:
"Dokaz Heronove formule nije baš jako jednostavan i mi se tim dokazom nećemo baviti. Međutim, i ne raspolažući dokazom, možemo se uvjeriti u njezinu valjanost. Kako se to može učiniti?"

"Prepostavimo da ona vrijedi za jednakostrančan trokut. U tom slučaju $a = b = c, s = \frac{3a}{2}$ i forumula daje istinit rezultat."

$$P^2 = \frac{3a}{2}\left(\frac{3a}{2} - a\right)^3 = \frac{3a}{2} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^3 = \frac{3a^4}{16},$$

nakon korjenovanja dobivamo

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

"Što bismo mogli dalje?"

"Provjerimo njezinu valjanost za pravokutan trokut."

"Provjerimo sad njezinu valjanost za jednakokračan trokut."

"Tako je. Za pravokutni trokut vrijedi da je $c^2 = a^2 + b^2$, dok je za jednakokračni trokut $a = b$. Nakon provođenja algebarskih transformacija dobivamo ispravan rezultat."

"Kako vam se ovo sviđa?"

"Možete li se dosjetiti još kojeg posebnog slučaja koji bi vam mogao poslužiti kao primjer?"

"Kakvo je vaše mišljenje o degeneriranom trokutu, kada trokut degenerira u tu dužinu?
U tom slučaju je $s = c$ (ili a ili b), pa naša formula očito daje istinit rezultat."

Rezultate provjera Heronove formule pomoću nekoliko trokuta određenih oblika, nastavnik može objasniti pregledom svih mogućih oblika grafičkim predočenjem.

Neka su x, y i z duljine stranica trokuta napisane redom od najmanje do najveće, tj. neka je

$$0 < x \leq y \leq z.$$

Očito je da vrijedi (jer je zbroj duljina dviju stranica veći od duljine treće stranice)

$$x + y > z.$$

Budući da smo se pri razmatranju Heronove formule usredotočili samo na oblik trokuta, a ne veličinu, možemo uzeti da je

$$z = 1.$$

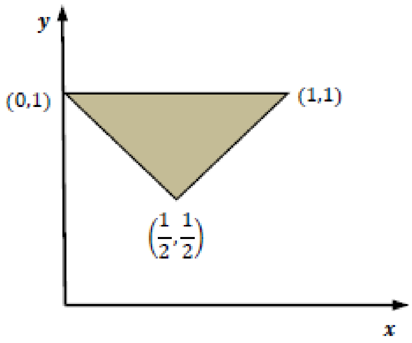
Sada imamo slijedeće tri nejednakosti:

$$x \leq y, \quad y \leq 1, \quad x + y > 1.$$

Trokut sa stranicama x,y i 1, tj. trokut $(x, y, 1)$ predočit ćemo točkom (x, y) u ravnini Kartezijevog koordinatnog sustava.
Svaka od gore navedene tri nejednakosti ograničava položaj točke (x, y) na neku poluravninu.
Za $x \leq y$ i $y \leq 1$, u poluravninu je uključen i njezin rub, dok je za $x + y > 1$ rub isključen.

Ove tri nejednakosti čine sustav čije rješenje zadovoljavaju one samo one točke ravnine koje se nalaze i u presjeku tih triju poluravnina. Taj presjek je trokut (Slika 1.) s vrhovima kojima pripadaju uređeni parovi $(1,1), (0,1)$ i $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Vrh $(1,1)$ i stranice koje iz njega izlaze pripadaju trokutu, dok su treća stranica i preostala dva vrha isključeni.
Kao što smo već rekli, točka (x, y) predstavlja trokut $(x, y, 1)$, dok druge, različite točke predstavljaju neke druge, različite oblike.

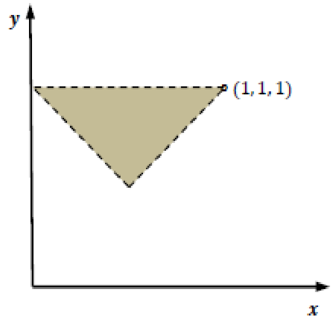
Možemo zaključiti da trokut na slici 1. predstavlja sve trokute.



Slika 1. Skup oblika trokuta

Koje točke na slici 1. odgovaraju razmatranim posebnim slučajevima?

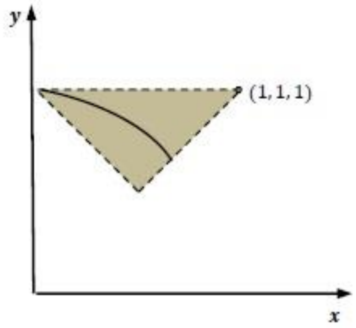
Provjeru Heronove formule smo najprije napravili za jednakostraničan trokut kojem odgovaraju simboli $(1, 1, 1)$, a koji je na slici 2. predočen s koordinatama $(1,1)$.



Slika 2. Provjera za jednakostraničan trokut

Zatim smo provjerili da li je formula valjana i za pravokutan trokut. Neka je $(x, y, 1)$, pravokutni trokut, tada je najveća stranica trokuta upravo hipotenuza pa možemo zaključiti da je

$$x^2 + y^2 = 1.$$

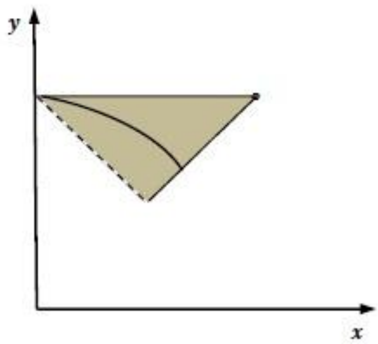


Slika 3. Provjera za pravokutan trokut

I na kraju prije nego smo provjerili jeli formula valjana za degenerirane slučajeve, ispitali smo njenu valjnost na jednakokračnim trokutima. Razlikujemo dva slučaja.

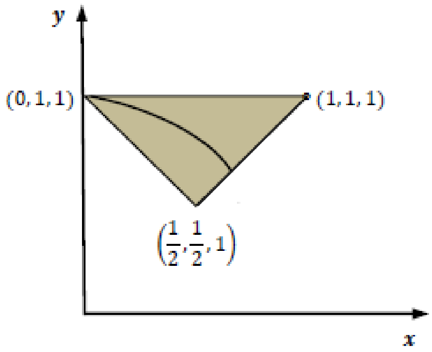
Prvi je kada su krakovi dulji od osnovice (tj. $y = z = 1$), a drugi kada je osnovica dulja od krakova (tj. $x = y$).

Stoga na slici 4. možemo uočiti da su točke koje predočuju trokute dvije granične dužine koje su sada, za razliku od prethodnih primjera, označene punom linijom.



Slika 4. Provjera za jednakokračan trokut

Još nam preostaje ispitati valjanost formule za degenerirane trokute $(x, y, 1)$. Dolazimo do zaključka da vrijedi $x + y = 1$. Degenerirane trokute smo predočili trećom graničnom dužinom koja je označena punom linijom, dok je na prethodna dva primjera bila označena isprekidanom.



Slika 5. Provjera za degenerirani slučaj

Proučavajući niz slika 1 - 5 zorno smo predočili proces razvoja induktivnog zaključivanja. Na početku, radeći provjeru za jednakostraničan trokut, jedna je točka (slika 2.) bila dovoljna kako bi grafički prikazali istinitost naše tvrdnje. Zatim smo postupno uvodili sve više i više točki što je rezultiralo pojavljivanjem sve više i više crta koje predočuju sve novije i novije klase trokuta obuhvaćenih provjerom. Trokuti posebnih oblika za koje je formula bila provjeravana, predstavljeni su točkama koje se nalaze na tim krivuljama.

Iako nam se čini da smo iscprili sve mogućnosti, još nam preostaje provjerit valjanost formule za "osnovnu masu" trokuta općeg oblika, koji su reprezentirani unutarnjim točkama područja omeđenim tim krivuljama. Usprkos tome da formula nije provjerena, zaključak se ipak može izvesti jer ukoliko je formula bila istinita za sve točke ruba trokuta, kao i za točke jedne krivulje koja siječe to područje, onda prirodno očekujemo da će biti istinita i za sve slučajeve.

3.3. Znanstvena metoda: naslutite i ispitajte

Pri proučavanju prethodnih primjera mogli smo zaključiti da promatranje može dovesti do otkrića. Ako je promatranje usmjereno nekom spremnom mišlju ili idejom, onda nas može dovesti do rezultata koji zaslužuje našu pažnju te poslužiti kao motivacija za stvaranje novih pretpostavki i poopćenja, no ono još nije dokaz.

Zato treba provjeravati pretpostavku na općim i posebnim slučajevima te na činjenicama koje logički slijede iz pretpostavke zadataka.

Važno je razlikovati skicu dokaza i sam dokaz, te pretpostavku i činjenicu.

Analogiju se ne smije nikako zanemariti u kontekstu znanstveno - istraživačkog rada jer može dovesti do otkrića novih bitnih činjenica.

Želimo li izvesti karakteristike znanstvene metode, onda ih možemo opisati riječima: naslućujte i ispitujte. Želi li nastavnik potaknuti istraživački duh kod svojih učenika, onda ih prije svega treba naučiti da naslućuju i istražuju.

4. Bibliografija

[1] George Polya, *How to solve it*, Princeton University Press, Stanford 1945.

[2] George Polya, *Patterns of Plausible Inference*, Princeton University Press, New Jersey 1954.

[3] George Polya, *Mathematics and Plausible Reasoning*, Princeton University Press, New Jersey 1954.

[4] George Polya, *Mathematical discovery*, John Wiley & sons inc., New York - London 1962.

[5] George Polya, *Kako riješiti matematički zadatak*, Školska knjiga, Zagreb 1966.

[6] George Polya, *Mathematical Methods in Science*, The Mathematical Association of America, Washington 1975.

[7] George Polya, *Matematičko otkriće*, Hrvatsko matematičko društvo, Zagreb 2003.

- **Internet**

[1] http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Polya.html (preuzeto 8.8.2015.)

[2] http://planetmath.org/georgepolya (preuzeto 8.8.2015.)

[3] http://www.math.wichita.edu/history/men/polya.html (preuzeto 8.8.2015.)

[4] http://math.hawaii.edu/home/pdf/putnam/PolyaHowToSolveIt.pdf (preuzeto 8.8.2015.)

Sažetak

Diplomski rad "George Polya - doprinos matematičkoj edukaciji" započinje biografijom Georgea Polye, te se nastavlja kratkim prikazom njegovih triju najznačajnijih djela: "Kako riješiti matematički zadatak", "Matematičko otkriće" i "Matematika i uvjerljivo zaključivanje". U nastavku se opisuje kakvo treba biti poučavanje nastave matematke, te u kakvom su odnosu učenje i poučavanje. Drugi dio diplomskog rada, "Kako riješiti matematički zadatak", veže se uz listu prijedloga i sugestija za rješavanje matematičkih problema. U trećem dijelu "Znanstveno - istraživački rad na razini srednje škole" navode se razlozi zbog čega su znanstvena metoda, indukcija i otkriće važni u nastavi matematike. Slijede dva primjera u kojima se vidi primjena znanstvene metode i matematičke indukcije.

Summary

Thesis "George Polya - contribution to mathematical education" begins with biography of George Polya, and continues with a short overview of his three major works: "How to solve it", "Mathematical discovery" and "Mathematics and plausible reasoning".

The following describes what should be taught in Mathematics classes, and a relation between learning and teaching. The second part of thesis, "How to solve a mathematical problem", is associated with a list of proposals and suggestions on solving mathematical problems. In the third part "Scientific research work at secondary school level" there are reasons given why the scientific method, induction and discovery are important in mathematics. In the end, there are two examples given to illustrate the application of scientific methods and mathematical induction.

Životopis

Ja sam Denis Vrdoljak rođen 11. 12. 1986. u Splitu. Osnovnu školu "Sućidar" u Splitu završio sam 2001. godine, a Prirodoslovno - matematičku gimnaziju 2005. godine. Iste godine upisujem preddiplomski studij Matematičkog odsjeka Prirodoslovno - matematičkog fakulteta u Zagrebu gdje 2012. postajem prvostupnik matematike. Nakon toga upisujem diplomski studij na istom fakultetu. U slobodno vrijeme čitam knjige, skladam glazbu i nastupam.