SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Marija Vukić

TEOREMI REPREZENTACIJE MARTINGALA S DISKRETNIM VREMENOM

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc.dr.sc. Vjekoslav Kovač

Zagreb, rujan 2014.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Područje kojim se bavi ovaj diplomski rad je teorija martingala. Mnogi od obrađenih rezultata se u literaturi najčešće formuliraju za procese s neprekidnim vremenom. Shodno tome trebalo je prilagoditi iskaze i dokaze za diskretno vrijeme. Tako se na primjer najvažniji rezultati ovog rada kao što su jednodimenzionalni teorem reprezentacije može naći u [6] ili pak apstraktni teorem reprezentacije pronalazimo u knjizi [5].

U prvom poglavlju dan je kratak pregled osnovnih rezultata iz teorije integrala, teorije vjerojatnosti i slučajnih procesa. Definiramo pojmove kao što su σ-algebra, Borelova σ-algebra, Lebesgueova mjera i slučajna šetnja. Također definiramo pojam uvjetnog matematičkog očekivanja i navodimo neka od njegovih svojstava bitna za izradu ovog rada. Na kraju poglavlja dane su definicije martingala, submartingala, filtracije i adaptiranosti, te iskazani i dokazani teoremi konvergencije martingala g.s. i u L^p i Doobova dekompozicija.

Drugo poglavlje sastoji se od dva dijela. Promatramo reprezentacije u odnosu na jednostavnu slučajnu šetnjnu za jednodimenzionalni i višedimenzionalni slučaj. U jednodimenzionalnom slučaju za jednostavnu simetričnu slučajnu šetnju $(S_n)_{n=0}^{\infty}$ na $\mathbb{Z}$ i njezinu prirodnu filtraciju $(\mathcal{F})_{n=0}^{\infty}$, dokazujemo da je tako definirani proces martingal. Zatim uvodimo pojam predvidivog procesa $(H_n)_{n=1}^{\infty}$ pomoću kojeg definiramo martingalnu transformaciju jednostavne simetrične slučajne šetnje $(S_n)_{n=0}^{\infty}$ po procesu $(H_n)_{n=1}^{\infty}$. Martingalna transformacija je također martingal u odnosu na filtraciju $(\mathcal{F})_{n=0}^{\infty}$. Najvažniji rezultat ovog poglavlja je teorem reprezentacije martingala $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ obzirom na filtraciju $(\mathcal{F})_{n=0}^{\infty}$ pomoću nekog predvidivog procesa $(H_n)_{n=1}^{\infty}$. Iz tog teorema slijede neke zanimljive činjenice kao što su Itōva formula za diskretan slučaj, prikaz varijable pomoću martingalne transformacije slučajne šetnje i Hinčinova nejednakost. U višedimenzionalnom slučaju dokazujemo analogon jednodimenzionalnog teorema reprezentacije. Za dokaz višedimenzionalnog teorema reprezentacije koristimo prikaze funkcija pomoću takozvanog Haarovog sistema.

Treće poglavlje obuhvaća apstraktni teorem reprezentacije. Tamo smo definirali kvadratnu varijaciju i kovarijaciju te dokazali egzistenciju kvadratne varijacije. Nakon toga pokazujemo da ukoliko imamo dva martingala X i Y obzirom na istu filtraciju $\mathcal{F}$, tada X možemo reprezentirati pomoću Y i dokazujemo na koji način to možemo postići. To nas dovodi do definicije predvidive reprezentacije i činjenice da standardna slučajna šetnja ima svojstvo predvidive reprezentacije. Na kraju poglavlja dokazan je još teorem o konvergenciji martingalne transformacije.

Osobito mi je zadovoljstvo ovom prigodom se zahvaliti svom mentoru doc.dr.sc. Vjekoslavu Kovaču na strpljenju, pomoći, izuzetnom vodstvu i suradnji tijekom izrade ovog diplomskog rada. Zahvaljujem mami i baki na razumijevanju i pruženoj podršci tijekom studiranja. Veliko hvala Ivanu na nesebičnoj potpori, pomoći i motivaciji.

Poglavlje 1

Preliminarni rezultati

1.1 σ-algebra

Definicija 1.1.1. Neka je Ω neki skup i neka je $\mathcal{P}(\Omega)$ partitivni skup skupa Ω. Kažemo da je $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ σ-algebra ako vrijedi:

(1) $\mathcal{F}$ je neprazan skup,

(2) $\mathcal{F}$ je zatvoren na komplementiranje,

(3) $\mathcal{F}$ je zatvoren na prebrojive unije.

Svaki element σ-algebre zvat ćemo *izmjerivim skupom*. Iz definicije i de Morganovih pravila slijedi da je σ-algebra zatvorena i na prebrojive presjeke. Najmanja σ-algebra na nekom skupu Ω je skup koji se sastoji od Ω i $\emptyset$. Neka je Ω neki skup i $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ tada definiramo

$$\sigma(\mathcal{D}) = \bigcap_{\mathcal{F}\ \sigma-\text{algebra},\ \mathcal{D}\subseteq\mathcal{F}} \mathcal{F}.$$

Skup $\sigma(\mathcal{D})$ je najmanja σ-algebra generirana familijom $\mathcal{D}$. Uzmimo da je $\Omega = [0,1\rangle$ i neka je $\mathcal{A}$ zadan kao

$$\mathcal{A} = \left\{ \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right\rangle : k \in \{0, \dots, 2^n\} \right\}.$$

Elementi od $\mathcal{A}$ su takozvani *dijadski intervali* duljine 2^{-n}. Neka je $I = \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$. Pokazat ćemo da je najmanja σ-algebra generirana skupom $\mathcal{A}$ upravo familija svih konačnih unija intervala oblika $[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\rangle$. Preciznije,

$$\sigma(\mathcal{A}) = \left\{ \bigcup_{k\in J} \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right\rangle : J \subseteq I \right\}.$$

Ovako definirana familija zadovoljava prvo i treće svojstvo iz definicije σ-algebre. Pokažimo sada drugo svojstvo. Neka je $A \in \mathcal{F}$ i $A = \bigcup_{k \in J_1} [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\rangle$ za neki $J_1 \subseteq I$. Tada vrijedi da je

$$A^c = \bigcup_{k \in J_1^c} \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right\rangle \in \mathcal{F},$$

te imamo da je $\mathcal{F}$ σ-algebra. Svaka σ-algebra sadrži sve prebrojive unije te mora nužno vrijediti $\mathcal{F} \subseteq \sigma(\mathcal{A})$, čime smo dokazali $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{A})$.

Neka je $\mathcal{I}$ skup svih intervala oblika $\langle a, b\rangle$, gdje su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Definiramo *Borelovu σ-algebru* s

$$\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{I}).$$

Borelovu σ-algebru mogli smo definirati i kao najmanju σ-algebra generiranu otvorenim skupovima u $\mathbb{R}$. Na taj način definiciju možemo poopćiti i na višedimenzionalni slučaj. Borelovu σ-algebru na $\mathbb{R}^d$ označavamo s $\mathcal{B}^d$.

Uzmimo da je $I = \langle a, b\rangle$. S $l(I) = b - a$ definiramo funkciju $l : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$. Neka je dan $E \subseteq \mathbb{R}$. *Lebesgueova vanjska mjera* je zadana s

$$\lambda^*(E) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} l(I_k) : (I_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ je niz otvorenih intervala takvih da vrijedi } E \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \right\}.$$

Dodatno, ako za svaki $A \subseteq \mathbb{R}$ vrijedi

$$\lambda^*(A) = \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \cap E^c),$$

tada kažemo da je E *izmjeriv* i s $\lambda(E) = \lambda^*(E)$ definiramo *Lebesgueovu mjeru*. Na sličan način definiramo Lebesgueovu mjeru λ^d na $\mathbb{R}^d$, samo što umjesto intervala uzimamo otvorene pravokutnike.

1.2 Nezavisnost

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor. Neka su $\mathcal{S}_1, \ldots, \mathcal{S}_k$ σ-podalgebre od $\mathcal{F}$. Kažemo da su $\mathcal{S}_i$ *nezavisne* ako za svaki $A_1 \in \mathcal{S}_1, \ldots, A_k \in \mathcal{S}_k$ vrijedi

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_k) = \mathbb{P}(A_1) \cdots \mathbb{P}(A_k).$$

Slučajne varijable $X_1, \ldots, X_k$ na $\mathcal{F}$ su nezavisne ako su nezavisne σ-algebre $\sigma(X_1), \ldots,$ $\sigma(X_k)$, pri čemu označavamo

$$\sigma(X) = \sigma(X^{-1}(\mathcal{B})).$$

To je ekvivalentno tvrdnji da vrijedi

$$\mathbb{P}(X_1 \in A_1, \ldots, X_k \in A_k) = \mathbb{P}(X_1 \in A_1) \cdots \mathbb{P}(X_k \in A_k)$$

za svake $A_i \in \mathcal{B}$, $i = 1, \ldots, k$.

Događaji $A_1, \ldots, A_k$ su nezavisni ako su slučajne varijable $\mathbf{1}_{A_1} \ldots, \mathbf{1}_{A_k}$ nezavisne. Ubuduće s $\mathbf{1}_A$ označavamo karakterističnu familiju skupa A (tzv. indikator skupa A).

Neka je zadana familija $\{\mathcal{S}_i, i \in I\}$ σ-algebri. Familija $\{\mathcal{S}_i, i \in I\}$ je nezavisna ako za svaki konačan skup $\{i_1, \ldots, i_n\} \subseteq I$ vrijedi da su $\mathcal{S}_{i_1}, \ldots, \mathcal{S}_{i_n}$ nezavisne σ-podalgebre.

Nadalje familija slučajnih varijabli $\{X_i, i \in I\}$ je nezavisna ako je svaki njen konačni podskup nezavisan.

Propozicija 1.2.1. *Neka je $\{X_i : i \in I\}$ familija nezavisnih slučajnih varijabli i neka su $g_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borelove funkcije. Tada je $\{g(X_i) : i \in I\}$ familija nezavisnih slučajnih varijabli.*

Dokaz. Iz činjenice kako kompozicija djeluje na prasliku

$$\{g_i(X_i) \in B_i\} = \{X_i \in g_i^{-1}(B_i)\}$$

i nezavisnosti slučajnih varijabli $X_1, \ldots, X_n$ imamo traženu tvrdnju. □

Teorem 1.2.2. *Neka su X_1 i X_2 nezavisne slučajne varijable. Ako su X_1 i X_2 nenegativne ili ako je $\mathbb{E}|X_1|$ i $\mathbb{E}|X_2|$ konačno, tada postoji $\mathbb{E}[X_1X_2]$ i vrijedi*

$$\mathbb{E}[X_1X_2] = \mathbb{E}[X_1]\,\mathbb{E}[X_2].$$

Dokaz. Pretpostavimo da su X_1, X_2 nenegativne. Tada vrijedi, uz pisanje $X = (X_1, X_2)$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_1X_2] &= \int_{\mathbb{R}^2} x_1x_2 d\mathbb{P}_X(x_1, x_2)\\
&= \int_{\mathbb{R}_+^2} x_1x_2 d\mathbb{P}_X(x_1, x_2)\\
&= \int_{\mathbb{R}_+} x_1\mathbb{P}_{X_1}(x_1) \int_{\mathbb{R}_+} x_2\mathbb{P}_{X_2}(x_2) = \mathbb{E}[X_1]\,\mathbb{E}[X_2].
\end{aligned}$$

Ovdje smo koristili činjenicu $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_{X_1} \times \mathbb{P}_{X_2}$ Neka su sada X_1 i X_2 integrabilne slučajne varijable. Tada je funkcija $(x_1, x_2) \mapsto |x_1x_2|$ nenegativna te po Fubinijevom teoremu kao u prethodnom slučaju vrijedi

$$\underbrace{\int_{\mathbb{R}^2} |x_1x_2| d\mathbb{P}_X(x_1, x_2)}_{\mathbb{E}|X_1x_2|} = \underbrace{\int_{\mathbb{R}} |x_1| d\mathbb{P}_{X_1}(x_1) \int_{\mathbb{R}} |x_2| d\mathbb{P}_{X_2}(x_2)}_{\mathbb{E}|X_1|\mathbb{E}|X_2|}.$$

Ako je bilo koja od X_1, X_2 jednaka nuli gotovo sigurno tada teorem svakako vrijedi. Kako su X_1 i X_2 integrabilne slučajne varijable, prema prethodnoj propoziciji i gornjoj jednakosti imamo

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|X_1X_2| &= \int_{\mathbb{R}^2} |x_1x_2| d\mathbb{P}_X(x_1,x_2) \\ &= \int_{\mathbb{R}} |x_1| d\mathbb{P}_{X_1}(x_1) \int_{\mathbb{R}} |x_2| d\mathbb{P}_{X_2}(x_2) = \mathbb{E}|X_1|\,\mathbb{E}|X_2| < \infty,\end{aligned}$$

čime smo dobili da je funkcija $(x_1, x_2) \mapsto |x_1x_2|$ apsolutno integrabilna. Sada zbog integrabilnosti od X_1 i X_2 te apsolutne integrabilnosti funkcije $(x_1, x_2) \mapsto |x_1x_2|$ imamo

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_1X_2] &= \int_{\mathbb{R}^2} x_1x_2 d\mathbb{P}_X(x_1,x_2) \\ &= \int_{\mathbb{R}} x_1 d\mathbb{P}_{X_1}(x_1) \int_{\mathbb{R}} x_2 d\mathbb{P}_{X_2}(x_2) = \mathbb{E}[X_1]\,\mathbb{E}[X_2].\end{aligned}$$

Time smo dokazali teorem. □

1.3 Slučajna šetnja

Neka je $(Y_n)_{n=0}^{\infty}$ niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli definiranih na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Definiramo $X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_n$ i $X_0 = 0$. Niz $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ nazivamo slučajnom šetnjom. U slučaju da uzmemo slučajne varijable Y_i sa distribucijom

$$Y_i \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

kažemo da je S_n jednostavna simetrična slučajna šetnja na $\mathbb{Z}$. Kako je $\mathbb{E}[Y_n] = 0$, tada zbog linearnosti očekivanja imamo da je $\mathbb{E}[S_n] = 0$.

$(Y_n)_{n=0}^{\infty}$ poprima vrijednost $\pm\mathbf{e}_i$, za $i = 1, \ldots d$ s istom vjerojatnošću $\frac{1}{2^d}$.
Ovdje smo s $e_1, \ldots, e_d$ označili vektore standardne baze od $\mathbb{R}^d$,

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0),\ e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots,\ e_1 = (0, \ldots, 0, 1).$$

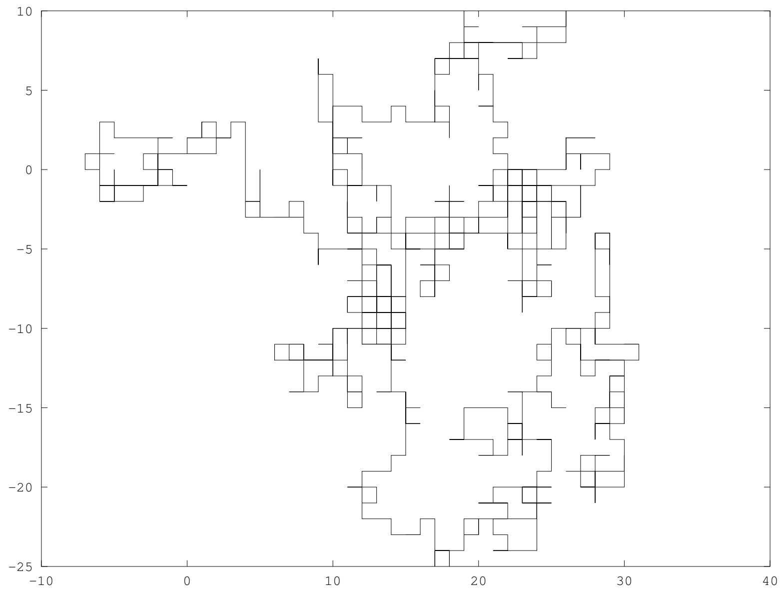
Jednostavna simetrična slučajna šetnja na $\mathbb{Z}^d$ je niz $(S_n)_{n=0}^{\infty}$ gdje je $S_0 = 0$ i $S_n = \sum_{i=1}^{\infty} Y_i$.

Na slici 1.1 prikazan je primjer dvodimenzionalne slučajne šetnje za $n = 1000$.

1.4 Uvjetno matematičko očekivanje

Ako je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor, X slučajna varijabla takva da je $\mathbb{E}|X| < \infty$, te $\mathcal{G}$ σ-podalgebra od $\mathcal{F}$. Ako postoji slučajna varijabla Y takva da vrijedi :

(1) Y je $\mathcal{G}$-izmjeriva,



Slika 1.1: Primjer dvodimenzionalne slučajne šetnje

(2) $\mathbb{E}|Y| < \infty$,

(3) $\int_G Y d\mathbb{P} = \int_G X d\mathbb{P}$, za svaki $G \in \mathcal{G}$.

Slučajnu varijablu Y koja zadovoljava navedene uvjete zovemo verzijom *uvjetnog matematičkog očekivanja* od X uz dano $\mathcal{G}$, u oznaci $Y = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$. Tako zadana slučajna varijabla postoji i jedinstvena je do na jednakost g.s. Iz definicije uvjetnog očekivanja slijedi sljedeća lema

Lema 1.4.1. *Ako je X $\mathcal{G}$-izmjeriva, tada je $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = X$ gotovo sigurno.*

Navedimo neka svojstva uvjetnog matematičkog očekivanja:

Teorem 1.4.1. *(1) Uvjetno matematičko očekivanje je linearno,*

$$\mathbb{E}[aX + Y|\mathcal{F}] = a\mathbb{E}[X|\mathcal{F}] + \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}].$$

(2) Ako je $X \leq Y$ g.s., tada vrijedi

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{F}] \leq \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}] \quad g.s.$$

(3) Ako je X integrabilna slučajna varijabla nezavisna s $\mathcal{G}$ tada vrijedi

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[X].$$

Dokaz. Kako bismo dokazali tvrdnju pod (1), pokazat ćemo da je lijeva strana varijanta desne strane. Iz definicije slijedi da su lijeva i desna strana $\mathcal{F}$-izmjerive funkcije. Neka je $A \in \mathcal{F}$. Zbog linearnosti integrala i definicije uvjetnog matematičkog očekivanja imamo

$$\begin{aligned}\int_A (a\mathbb{E}[X|\mathcal{F}] + \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}])\, d\mathbb{P} &= a\int_A \mathbb{E}[X|\mathcal{F}] + \int_A \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}]\, d\mathbb{P} \\ &= a\int_A Xd\mathbb{P} + \int_A Yd\mathbb{P} = \int_A (aX+Y)d\mathbb{P}.\end{aligned}$$

Time je dokazana prva tvrdnja. Za dokaz druge tvrdnje iskoristimo definiciju uvjetnog matematičkog očekivanja, tj. imamo

$$\int_A \mathbb{E}[X|\mathcal{F}]\, d\mathbb{P} = \int_A Xd\mathbb{P} \leq \int_A Yd\mathbb{P} = \int_A \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}]\, d\mathbb{P}$$

te iz toga slijedi

$$\int_A \mathbb{E}[X|\mathcal{F}] - \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}]\, d\mathbb{P} \leq 0.$$

Za fiksirano $\epsilon > 0$ definiramo skup

$$B = \{\omega \in \Omega : \mathbb{E}[X|\mathcal{F}](\omega) - \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}](\omega) \geq \epsilon\}.$$

Iz gornje relacije za $A = B$ imamo

$$0 \geq \int_B \mathbb{E}[X|\mathcal{F}] - \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}]\, d\mathbb{P} \geq \epsilon \int_B d\mathbb{P} = \epsilon\mathbb{P}(B),$$

tj. $\mathbb{P}(B) = 0$. Dokazali smo da je mjera skupa na kojem vrijedi $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}] \geq \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}]$ jednaka nuli tj. da je $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}] \leq \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}]$ g.s. Preostaje nam još dokazati tvrdnju (3). Neka je $G \in \mathcal{G}$ proizvoljan. Tada su slučajne varijable $\mathbf{1}_G$ i X nezavisne i imamo

$$\begin{aligned}\int_G \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]\, d\mathbb{P} &= \int_G Xd\mathbb{P} = \mathbb{E}[\mathbf{1}_G X] \\ &= \mathbb{E}[\mathbf{1}_G]\,\mathbb{E}[X] = \mathbb{P}(G)\mathbb{E}[X] = \int_G \mathbb{E}[X]\, d\mathbb{P}.\end{aligned}$$

□

Teorem 1.4.2. *Neka je X slučajna varijabla na* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *i neka su* $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ σ*-algebre. Tada vrijedi*

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{H}]|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]|\mathcal{H}] = \mathbb{E}[X|\mathcal{H}].$$

Dokaz. Definiramo $Y = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$. Iz definicije uvjetnog matematičkog očekivanja za proizvoljan $A \in \mathcal{H}$ slijedi da je

$$\int_A \mathbb{E}[Y|\mathcal{H}]\, d\mathbb{P} = \int_A Y d\mathbb{P} = \int_A \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]\, d\mathbb{P} = \int_A X d\mathbb{P}.$$

Dobili smo da vrijedi $\int_A \mathbb{E}[Y|\mathcal{H}]\, d\mathbb{P} = \int_A X d\mathbb{P}$. Kako je slučajna varijabla $\mathbb{E}[Y|\mathcal{H}]$ izmjeriva obzirom na $\mathcal{H}$, po definiciji uvjetnog matematičkog očekivanja imamo $\mathbb{E}[Y|\mathcal{H}] = \mathbb{E}[X|\mathcal{H}]$, tj.

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]|\mathcal{H}] = \mathbb{E}[X|\mathcal{H}].$$

Preostala jednakost je trivijalna jer je $\mathbb{E}[Y|\mathcal{H}]$ izmjeriva u odnosu na $\mathcal{G}$. □

Teoremi o konvergenciji za matematičko očekivanje vrijedit će i za uvjetno matematičko očekivanje. Navodimo te tvrdnje. Svugdje se impicitno pretpostavlja da su integrabilne sve varijable od kojih uzimamo uvjetno matematičko očekivanje.

Teorem 1.4.3. *(1) Neka je* $0 \leq X_1 \leq X_2 \leq \cdots$ *i* $X = \lim_n X_n$. *Tada je* $0 \leq \mathbb{E}[X_1|\mathcal{G}] \leq \mathbb{E}[X_2|\mathcal{G}] \leq \cdots \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ *g.s. i vrijedi* $\lim_n \mathbb{E}[X_n|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$.

(2) Neka je $X_n \geq 0$ *za svaki* $n \in \mathbb{N}$. *Tada vrijedi*

$$\mathbb{E}\Big[\liminf_n X_n \Big| \mathcal{G}\Big] \leq \liminf_n \mathbb{E}[X_n|\mathcal{G}] \quad g.s.$$

(3) Neka je $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ *niz slučajnih varijabli takvih da je* $|X_n| \leq Y$ *za svaki* $n \in \mathbb{N}$, *pretpostavimo* $\mathbb{E}[Y] < \infty$, *te neka je* $X = \lim_n X_n$ *g.s. Tada je* X *integrabilna i vrijedi* $\lim_n \mathbb{E}[X_n|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$.

Dokaz. (1) Znamo da je $X_n \leq X_{n+1} \leq X$ g.s., iz toga slijedi da je i $\mathbb{E}[X_n|\mathcal{G}] \leq \mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{G}] \leq \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ g.s. i to za svaki $n \in \mathbb{N}$. Kako je $\mathcal{G}$-izmjeriva slučajna varijabla $\limsup_n \mathbb{E}[X_n|\mathcal{G}]$ dobro definirana i jer je niz $\mathbb{E}[X_n|\mathcal{G}]$ rastući i ograničen g.s. imamo $Y = \lim_n \mathbb{E}[X_n|\mathcal{G}]$ g.s. Pokazat ćemo da je $Y = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ g.s. Za dobivanje tog rezultata, zbog definicije uvjetnog matematičkog očekivanja dovoljno je pokazati da vrijedi

$$\int_A Y d\mathbb{P} = \int_A X d\mathbb{P}, \ \forall A \in \mathcal{G}.$$

Prema Lebesgueovom teoremu o monotonoj konvergenciji za $A \in \mathcal{G}$ imamo

$$\int_A Y d\mathbb{P} = \int_A \lim_n \mathbb{E}[X_n|\mathcal{G}]\, d\mathbb{P} = \lim_n \int_A \mathbb{E}[X_n|\mathcal{G}]\, d\mathbb{P} = \lim_n \int_A X_n d\mathbb{P} = \int_A X d\mathbb{P}.$$

(2) Niz $\inf_{k\geq n} X_k$ je rastući po n i $\lim_n \inf_{k\geq n} X_k = \liminf_n X_n$. Prema tvrdnji (1) imamo

$$\lim_n \mathbb{E}\left[\inf_{k\geq n} X_k \middle| \mathcal{G}\right] = \mathbb{E}\left[\liminf_n X_k \middle| \mathcal{G}\right].$$

Iz $\int_A \inf_{k\geq n} X_k d\mathbb{P} \leq \inf_{k\geq n} \int_A X_k d\mathbb{P}$ slijedi da je $\mathbb{E}\left[\inf_{k\geq n} X_k|\mathcal{G}\right] \leq \inf_{k\geq n} \mathbb{E}\left[X_k|\mathcal{G}\right]$. Time smo dobili

$$\mathbb{E}\left[\liminf_n X_k \middle| \mathcal{G}\right] = \lim_n \mathbb{E}\left[\inf_{k\geq n} X_k \middle| \mathcal{G}\right] \leq \lim_n \inf_{k\geq n} \mathbb{E}\left[X_k|\mathcal{G}\right] = \liminf_n \mathbb{E}\left[X_k|\mathcal{G}\right].$$

(3) Kako su $X_n + Y$ i $Y - X_n$ nenegativne slučajne varijable za svaki $n \in \mathbb{N}$, primjenjujući tvrdnju pod (2) imamo

$$\mathbb{E}\left[X + Y|\mathcal{G}\right] = \mathbb{E}\left[\liminf_n (X_n + Y) \middle| \mathcal{G}\right] \leq \liminf_n \mathbb{E}\left[X_n + Y|\mathcal{G}\right]$$

$$\mathbb{E}\left[Y - X|\mathcal{G}\right] = \mathbb{E}\left[\liminf_n (Y - X_n) \middle| \mathcal{G}\right] \leq \liminf_n \mathbb{E}\left[Y - X_n|\mathcal{G}\right].$$

Iz linearnosti uvjetnog matematičkog očekivanja te jer je

$$\liminf_n \mathbb{E}\left[-X_n|\mathcal{G}\right] = -\limsup_n \mathbb{E}\left[X_n|\mathcal{G}\right]$$

vrijedi

$$\liminf_n \mathbb{E}\left[X_n|\mathcal{G}\right] \geq \mathbb{E}\left[X|\mathcal{G}\right] \text{ i } \limsup_n \mathbb{E}\left[X_n|\mathcal{G}\right] \leq \mathbb{E}\left[X|\mathcal{G}\right],$$

tj.

$$\lim_n \mathbb{E}\left[X_n|\mathcal{G}\right] = \mathbb{E}\left[X|\mathcal{G}\right].$$

□

Dijelovi teorema 1.4.3 su "uvjetne" varijante poznatih graničnih rezultata iz teorije mjere:

1. teorema o monotonoj konvergenciji,
2. Fatuove leme,
3. Lebesgueovog teorema o dominiranoj konvergenciji.

Iduća propozicija je "uvjetne" varijanta Cauchy-Schwarzove nejednakosti.

Propozicija 1.4.4. *Neka je zadana σ-algebra $\mathcal{F}$ i neka su X, Y $\mathcal{F}$-izmjerive slučajne varijable. Tada vrijedi*

$$\mathbb{E}\left[XY|\mathcal{F}\right]^2 \leq \mathbb{E}\left[X^2|\mathcal{F}\right]\mathbb{E}\left[Y^2|\mathcal{F}\right].$$

Dokaz. Za $t \in \mathbb{R}$ i $\omega \in \Omega$ zbog linearnosti uvjetnog matematičkog očekivanja imamo

$$0 \leq \mathbb{E}\left[(X+tY)^2|\mathcal{F}\right](\omega) = \mathbb{E}\left[X^2|\mathcal{F}\right](\omega) + 2t\mathbb{E}\left[XY|\mathcal{F}\right](\omega) + t^2\mathbb{E}\left[Y^2|\mathcal{F}\right](\omega).$$

Za fiksirani ω gornjom je formulom dana kvadratna funkcija po t.
Zbog nenegativnosti diskriminanta te funkcije je manja ili jednaka 0, tj.

$$4\mathbb{E}\left[XY|\mathcal{F}\right]^2(\omega) - 4\mathbb{E}\left[X^2|\mathcal{F}\right](\omega)\mathbb{E}\left[Y^2|\mathcal{F}\right](\omega).$$

□

1.5 Definicija martingala

Definicija 1.5.1. Neka je $(\Omega, \mathcal{F})$ izmjeriv prostor te neka je za svaki $n \in \mathbb{N}_0$ dana slučajna varijabla X_n na $(\Omega, \mathcal{F})$. Familija $X = (X_n)_{n=0}^{\infty}$ naziva se slučajni proces.

Neka je $(\Omega, \mathcal{F})$ izmjeriv prostor i neka je $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ niz σ-algebri takvih da vrijedi $\mathcal{F}_{n-1} \subseteq \mathcal{F}_n$ za svaki $n \geq 1$. Tada $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ nazivamo filtracijom.

Kažemo da je niz slučajnih varijabli $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ adaptiran s obzirom na filtraciju $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ ako je za svaki $n \in \mathbb{N}$ slučajna varijabla X_n $\mathcal{F}_n$-izmjeriva.

Definicija 1.5.2. Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor i neka je dana filtracija $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$. Adaptirani niz integrabilnih slučajnih varijabli $X = (X_n)_{n=0}^{\infty}$ je martingal ako vrijedi $\mathbb{E}\left[X_{n+1}|\mathcal{F}_n\right] = X_n$ g.s. za svaki $n \in \mathbb{N}_0$. Ako umjesto jednakosti vrijedi $\mathbb{E}\left[X_{n+1}|\mathcal{F}_n\right] \geq X_n$ za svaki $n \in \mathbb{N}_0$ tada kažemo da je X submartingal.

Kažemo da je $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ *prirodna filtracija* procesa $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ ako je

$$\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n).$$

Neka je X martingal i neka su $a, b \in \mathbb{R}$ takvi da je $a < b$. *Prijelazom* nazivamo par (k, t) takav da je

$$X_k \leq a < b \leq X_t.$$

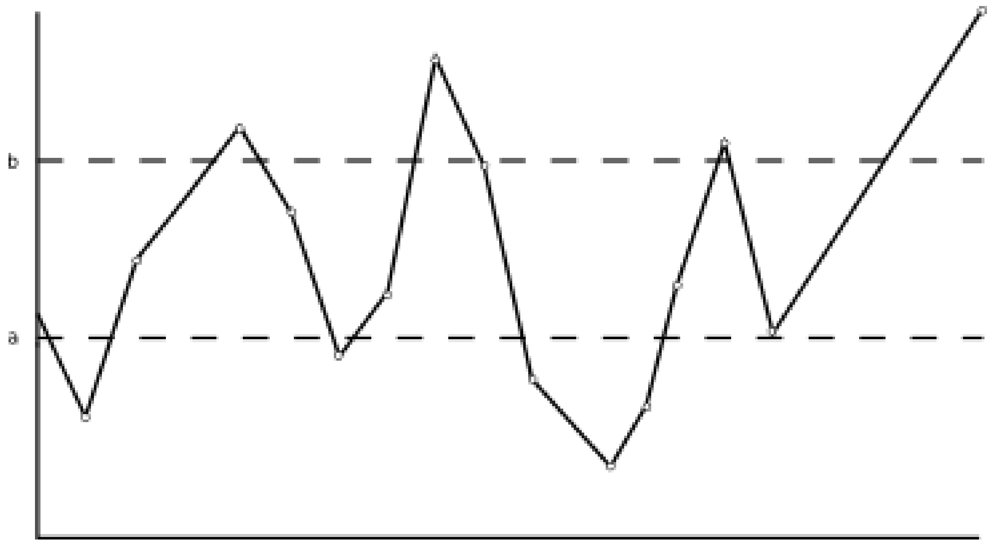
Drugačije rečeno, proces napravi prijelaz ako je u nekom trenutku njegova vrijednost manja od a te mu nakon određenog broja koraka vrijednost bude veća od b. S $U_N([a, b])$ označavamo broj prijelaza intervala $[a, b]$ do vremena N. Preciznije, definiramo niz slučajnih vremena

$$\begin{aligned}
\tau_0 &= 0, \\
\tau_1 &= \inf\{n > 0 : X_n \leq a\}, \\
\tau_1 &= \inf\{n > \tau_1 : X_n \geq b\}, \\
&\vdots \\
\tau_{2k-1} &= \inf\{n > \tau_{2k-2} : X_n \leq a\}, \\
\tau_{2k} &= \inf\{n > \tau_{2k-1} : X_n \geq b\}. \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Za svaki $N \in \mathbb{N}$ definiramo

$$U_N(a, b) = \sup\{m \geq 0 : \tau_{2m} \leq N\}.$$

Slično kao i za slučajne varijable, možemo definirati broj prijelaza intervala $[a, b]$ za niz realnih brojeva. Broj prijelaza intervala $[a, b]$ do trenutka N označit ćemo s $u_N(a, b)$.



Slika 1.2: Primjer martingala s tri prijelaza

Lema 1.5.3. *Neka je zadan niz* $(x_n)_{n=0}^{\infty}$. *Tada postoji* $\lim_n x_n \in [-\infty, +\infty]$ *ako i samo ako za svake* $a, b \in \mathbb{Q}$, $a < b$ *vrijedi da je* $u(a, b) < \infty$. $u(a, b)$ *je broj prijelaza intervala* $[a, b]$ *za niz realnih brojeva.*

Dokaz. Pretpostavimo da limes niza ne postoji, to znači da je $\liminf_n x_n < \limsup_n x_n$. Tada postoje $a, b \in \mathbb{Q}$, $a < b$ takvi da je $\liminf_n x_n \leq a < b \leq \limsup_n x_n$. Dobili smo da niz $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ ima beskonačno mnogo prijelaza intervala $[a, b]$.

Dokažimo suprotan smjer. Pretpostavimo da postoji limes te neka su $a, b \in \mathbb{Q}$ proizvoljni i $a < b$. Neka je $c = \lim_n x_n$. Tada za svaki $\epsilon > 0$ postoji n_ϵ takav da je $x_n \in \langle c - \epsilon, c + \epsilon \rangle$ za $n \geq n_\epsilon$. Ako se c nalazi u $[a, b]$ tada možemo uzeti dovoljno mali ϵ za koji će vrijediti da $\langle c - \epsilon, c + \epsilon \rangle \subseteq \langle a, b \rangle$. U slučaju da je $c \notin [a, b]$ tada možemo naći ϵ za koji vrijedi $\langle c - \epsilon, c + \epsilon \rangle \cap [a, b] = \emptyset$. Time smo dobili da nakon koraka n_ϵ niz više ne može prijeći interval $[a, b]$ te je tvrdnja dokazana.

□

Teorem 1.5.4. *Za svaki $N \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$\mathbb{E}\left[U_N(a, b)\right] \leq \frac{1}{b-a}\mathbb{E}\left[(a - X_n)^+\right] \leq \frac{1}{b-a}\left(|a| + \mathbb{E}\left[X_N\right]\right).$$

Definiramo broj prijelaza za cjelokupni niz s

$$U(a, b) = \lim_N U_N(a, b).$$

tj. to je ukupni broj prijelaza intervala $[a, b]$. Kako niz $(U_n)_{n=0}^\infty$ monotono raste prema U, po teoremu o monotonoj konvergenciji imamo sljedeću tvrdnju.

Korolar 1.5.1. *Ako je U gore definirana slučajna varijabla, tada vrijedi*

$$\mathbb{E}\left[U(a, b)\right] \leq \left(|a| + \sup_n \mathbb{E}\left[X_n\right]\right).$$

Teorem 1.5.5. *Neka je $(X_n)_{n=0}^\infty$ martingal za koji postoji $K > 0$ takav da je*

$$\sup_n \mathbb{E}\left[X_n^+\right] \leq K < \infty.$$

Tada postoji slučajna varijabla X_∞ s konačnim očekivanjem za koju vrijedi

$$\lim_n X_n = X_\infty \ g.s.$$

Dokaz. Neka su $a, b \in \mathbb{R}$ takvi da vrijedi $a < b$. Kako je martingal ograničen u L^1, prema prethodnom korolaru imamo

$$\mathbb{E}\left[U(a, b)\right] \leq |a| + \sup_n \mathbb{E}\left[X_n\right] \leq |a| + K,$$

što povlači da je $U(a, b) < \infty$ g.s., tj.

$$\mathbb{P}(U(a, b) < \infty) = 1$$

te vrijedi

$$\mathbb{P}(U(a,b) < \infty,\ \forall a,b \in \mathbb{Q},\ a < b) = 1.$$

Naime komplement je prebrojiva unija skupova mjere nula. Prema prethodnoj lemi zaključujemo da je

$$\liminf_n X_n = \limsup_n X_n$$

g.s. te definiramo

$$X_\infty(\omega) = \begin{cases} \liminf_n X_n(\omega) & \text{ako } \liminf_n X_n(\omega) = \limsup_n X_n(\omega), \\ 0 & \text{inače.} \end{cases}$$

Vrijedi da je X_∞ slučajna varijabla i $X_\infty = \lim_n X_n$ g.s. Još želimo pokazati da je $X_\infty \in \mathrm{L}^1$. Kako je X martingal, uzimanjem očekivanja dobijemo da je $\mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X_0]$ te vrijedi

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|X_n| &= \mathbb{E}[X_n^+] + \mathbb{E}[X_n^-] \\ &= 2\mathbb{E}[X_n^+] + \mathbb{E}[X_n] \\ &= 2\mathbb{E}[X_n^+] + \mathbb{E}[X_0]. \end{aligned}$$

Korištenjem Fatouove leme i uvjeta da je $\sup_n \mathbb{E}|X_n| \leq K$ zaključujemo

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|X_\infty| &= \mathbb{E}\left[\lim_n |X_n|\right] \\ &\leq \liminf_n \mathbb{E}|X_n| \\ &\leq 2\sup_n \mathbb{E}[X_n^+] - \mathbb{E}[X_0] < \infty, \end{aligned}$$

dobili smo da je $X \in \mathrm{L}^1$. □

Neka je $(X_n)_{n=0}^\infty$ niz slučajnih varijabli. Definiramo slučajnu varijablu S_n sa

$$S_n(\omega) = \sup_{1\leq j\leq n} \left|X_j(\omega)\right|.$$

Teorem 1.5.6 (Doobova nejednakost)**.** *Neka je $(X_n)_{n=0}^\infty$ martingal i neka je niz $(S_n)_{n=0}^\infty$ definiran kao gore. Tada za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$\mathbb{E}[S_n^p] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}[(X_n)^p].$$

Dokaz. Neka je $q = \frac{p}{p-1}$. Primijetimo da za $\tau := \inf\{n \geq 0 : |X_n| \geq \lambda\}$ vrijedi

$$\lambda\mathbb{P}(S_N \geq \lambda) \leq \int_{S_m\geq\lambda} X_{\min\{\tau,n\}} d\mathbb{P} \leq \int_{S_n\geq\lambda} X_n d\mathbb{P}.$$

Zato imamo

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\,[S_n^p] &= p \int_0^\infty \lambda^{p-1} \mathbb{P}(S_n \geq \lambda) d\lambda \\
&\leq \int_0^\infty \lambda^{p-2} \left(\int_{\{S_n \geq \lambda\}} |X_n| d\mathbb{P} \right) d\lambda \\
&= \int_\Omega |X_n| \left(\int_0^{S_n} \lambda^{p-2} d\lambda \right) d\mathbb{P} \\
&= \frac{p}{p-1} \int_\Omega |X_n| |S_n|^{p-1} d\mathbb{P} \\
&\leq \frac{p}{p-1} \left(\mathbb{E}\,[|X_n|^p]^{\frac{1}{p}} \right) \left(\mathbb{E}\,[|S_n|^p]^{\frac{1}{q}} \right).
\end{aligned}
$$

Ako izraz podijelimo sa zadnjim članom na desnoj strani dobijemo traženu nejednakost. □

Teorem 1.5.7. *Neka je X ograničeni martingal u L^p, tj. neka vrijedi*

$$\sup_n \mathbb{E}\,[|X_n|^p] < \infty.$$

Tada postoji slučajna varijabla X_∞ takva da $X_n \to X_\infty$ g.s. i u L^p.

Dokaz. Vjerojatnost je konačna mjera pa omeđenost u L^p povlači omeđenost u L^1 te znamo da postoji slučajna varijabla X_∞ takva da $X_n \to X_\infty$ g.s. Kako je S_n rastući niz, definiramo

$$S(\omega) = \lim_n S_n(\omega) = \sup_n |X_n(\omega)|.$$

Iz konvergencije gotovo sigurno slijedi

$$|X_n - X_\infty| \leq 2 \sup_n |X_n| = 2S.$$

Prema Lebesgueovom teoremu o dominiranoj konvergenciji i koristeći Doobovu nejednakost imamo

$$\mathbb{E}\,[S^p] = \lim_n \mathbb{E}\,[S_n^p] \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \mathbb{E}\,[|X_n|^p] \leq K,$$

gdje K ovisi samo o p i martingalu. Dobili smo da je $2S$ omeđena u L^p te prema Lebesqueovom teoremu o dominiranoj konvergenciji vrijedi

$$\lim_n \mathbb{E}\,[|X_n - X|^p] = \mathbb{E}\left[(\lim_n |X_n - X|)^p \right] = 0.$$

□

1.6 Doobova dekompozicija

Teorem 1.6.1. *Svaki proces* $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ *koji je adaptiran u odnosu na filtraciju* $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ *se može na jedinstveni način zapisati u obliku* $X_n = M_n + A_n$, $n \in \mathbb{N}_0$, *pri čemu je* $(M_n)_{n=0}^{\infty}$ *martingal, a* $(A_n)_{n=0}^{\infty}$ *predvidivi proces s* $A_0 = 0$. *Štoviše, ako je* $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ *submartingal, tada je* $(A_n)_{n=0}^{\infty}$ *rastući.*

Dokaz. Želimo pokazati da je X_n oblika $X_n = M_n + A_n$, pri čemu je $\mathbb{E}[M_n|\mathcal{F}_{n-1}] = M_{n-1}$ i $A_n \in \mathcal{F}_{n-1}$. Kako bismo to imali nužno mora vrijediti sljedeće

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_{n-1}] &= \mathbb{E}[M_n|\mathcal{F}_{n-1}] + \mathbb{E}[A_n|\mathcal{F}_{n-1}] \\ &= M_{n-1} + A_n = X_{n-1} - A_{n-1} + A_n.\end{aligned}$$

Dobili smo da nužno mora vrijediti

$$A_n = \mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_{n-1}] + A_{n-1} - X_{n-1}, \tag{1}$$

$$M_n = X_n - A_n. \tag{2}$$

Kako je $A_0 = X_0$ i $M_0 = 0$ tada imamo dobro definirane nizove $(A_n)_{n=0}^{\infty}$ i $(M_n)_{n=0}^{\infty}$. Indukcijom se pokaže da je $A_n \in \mathcal{F}_{n-1}$. Još nam preostaje pokazati da je $(M_n)_{n=0}^{\infty}$ martingal. Imamo

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[M_n|\mathcal{F}_{n-1}] &= \mathbb{E}[X_n - A_n|\mathcal{F}_{n-1}] \\ &= \mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_{n-1}] - A_n = X_{n-1} - A_{n-1} = M_{n-1}\end{aligned}$$

gdje prva jednakost slijedi iz (2), druga iz toga jer je $A_n \in \mathcal{F}_{n-1}$ a treća iz (1). U slučaju da je $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ submartingal, imamo da je $\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_{n-1}] \geq X_{n-1}$ te po (1) vrijedi $A_n \geq A_{n-1}$. □

1.7 Multinomni teorem

Ovdje iskazujemo i dokazujemo multinomni teorem koji ćemo korisititi za dokazivanje jedne od posljedica teorema reprezentacije. Riječ je *Hinčinovoj* nejednakosti koju ćemo dokazati za sve parne brojeve koji su veći ili jednaki dva.

Teorem 1.7.1. *Neka su* $m, n \in \mathbb{Z}$ *takvi da je* $m \geq 1$ *i* $n \geq 0$. *Tada vrijedi*

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n = \sum_{k_1+k_2+\cdots k_m=n} \binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m} \prod_{1\leq t\leq m} x_t^{k_t}$$

gdje je

$$\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m} = \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_m!}.$$

Dokaz. Teorem ćemo dokazati koristeći binomni teorem i indukciju po m. Za $m = 1$ lako se vidi da baza indukcije vrijedi. Pretpostavimo da teorem vrijedi za proizvoljan m. Tada imamo

$$
\begin{aligned}
&(x_1 + x_2 + \cdots + x_m + x_{m+1})^n = (x_1 + x_2 + \cdots + (x_m + x_{m+1}))^n \\
&= \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_{m-1}+K=n} \binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_{m-1}, K} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_{m-1}^{k_{m-1}} (x_m + x_{m+1})^K \\
&= \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_{m-1}+K=n} \binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_{m-1}, K} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_{m-1}^{k_{m-1}} \sum_{k_m+k_{m+1}=K} \binom{K}{k_m, k_{m+1}} x_m^{k_m} x_{m+1}^{k_{m+1}} \\
&= \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_{m-1}+k_m+k_{m+1}=n} \binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_{m-1}, k_m, k_{m+1}} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_{m-1}^{k_{m-1}} x_m^{k_m} x_{m+1}^{k_{m+1}}, \qquad (1.1)
\end{aligned}
$$

gdje smo treću jednakost dobili pomoću binomnog teorema. Zadnji korak u dokazu slijedi iz

$$\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_{m-1}, K} \binom{K}{k_m, k_{m+1}} = \binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_{m-1}, k_m, k_{m+1}},$$

što se lako može provijeriti ako raspišemo koeficijente na sljedeći način:

$$\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_{m-1}!K!} \frac{K!}{k_m!k_{m+1}!} = \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_{m+1}!}.$$

$\square$

Poglavlje 2

Reprezentacije u odnosu na jednostavnu slučajnu šetnju

2.1 Jednodimenzionalni slučaj

Neka je $(S_n)_{n=0}^{\infty}$ jednodimenzionalna jednostavna simetrična slučajna šetnja na $\mathbb{Z}$. Iz uvodnog poglavlja znamo da to znači

$$S_n = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n,$$

pri čemu su Y_i nezavisne jednako distribuirane slučajne varijable takve da je

$$Y_i \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

i $S_0 = 0$.

Označimo s $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ prirodnu filtraciju od $(S_n)_{n=0}^{\infty}$, tj.

$$\mathcal{F}_n := \sigma(S_1, S_2, \ldots, S_n).$$

Propozicija 2.1.1. *Proces $(S_n)_{n=0}^{\infty}$ je martingal obzirom na prirodnu filtraciju $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$.*

Dokaz. Adaptiranost od $(S_n)_{n=0}^{\infty}$, odnosno činjenica da je slučajna varijabla S_n izmjeriva u odnosu na $\mathcal{F}_n$ slijedi iz definicije prirodne filtracije. Osim toga imamo

$$\mathbb{E}\,|S_n| = \mathbb{E}\left|\sum_{i=1}^{n} Y_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\,|Y_i| < \infty$$

te

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\,[S_{n+1}|\mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}\,[Y_1 + \ldots + Y_n + Y_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}\,[S_n + Y_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \\ &= \mathbb{E}\,[S_n|\mathcal{F}_n] + \mathbb{E}\,[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n] = S_n + 0,\end{aligned}$$

što povlači da je $(S_n)_{n=0}^{\infty}$ martingal. U posljednjem retku smo koristili činjenicu da su slučajna varijabla Y_{n+1} i σ-algebra $\mathcal{F}_n$ međusobno nezavisne te primijenili svojstvo uvjetnog matematičkog očekivanja. □

Definicija 2.1.2. Slučajan proces $(H_n)_{n=0}^{\infty}$ je predvidiv s obzirom na filtraciju $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ ako je za svaki $n \in \mathbb{N}$, $H_n \in \mathcal{F}_{n-1}$ izmjeriva, tj $\sigma(H_n) \subseteq \mathcal{F}_{n-1}$.

Za predvidivi proces $(H_n)_{n=1}^{\infty}$ obzirom na filtraciju $\mathcal{F}$ definiramo *martingalnu transformaciju* slučajne šetnje $(S_n)_{n=0}^{\infty}$ po procesu $(H_n)_{n=0}^{\infty}$ kao

$$(H \cdot S)_n = \sum_{m=1}^{n} H_m(S_m - S_{m-1})$$

za bilo koji prirodni broj n. Pritom se još $(H \cdot S)_0$ interpretira kao konstanta 0. Implicitno se u predvidivosti od H pretpostavlja da je $\mathbb{E}\,|H_n| < \infty$ za svaki n. U našem slučaju je to dovoljna pretpostavka na integrabilnost od H, tj. ne moramo pretpostavljati i omeđenost, kao što se obično radi.

Propozicija 2.1.3. *Proces $((H \cdot S)_n)_{n=0}^{\infty}$ je martingal obzirom na filtraciju $\mathcal{F}$.*

Dokaz. Adaptiranost od $(H \cdot S)_n$ slijedi iz $\mathcal{F}_{n-1}$-izmjerivosti od H_n i $\mathcal{F}_n$-izmjerivosti od S_n pa je i $(H \cdot S)_n$ također $\mathcal{F}_n$-izmjeriva.

$$\mathbb{E}\,|(H \cdot S)_n| = \mathbb{E}\left|\sum_{m=1}^{n} H_m(S_m - S_{m-1})\right| \le \sum_{m=1}^{n} \mathbb{E}\left[\Big(|H_m|\,|S_m - S_{m-1}|\Big)\right] \le \sum_{m=1}^{n} \mathbb{E}\,[|H_m| < \infty]$$

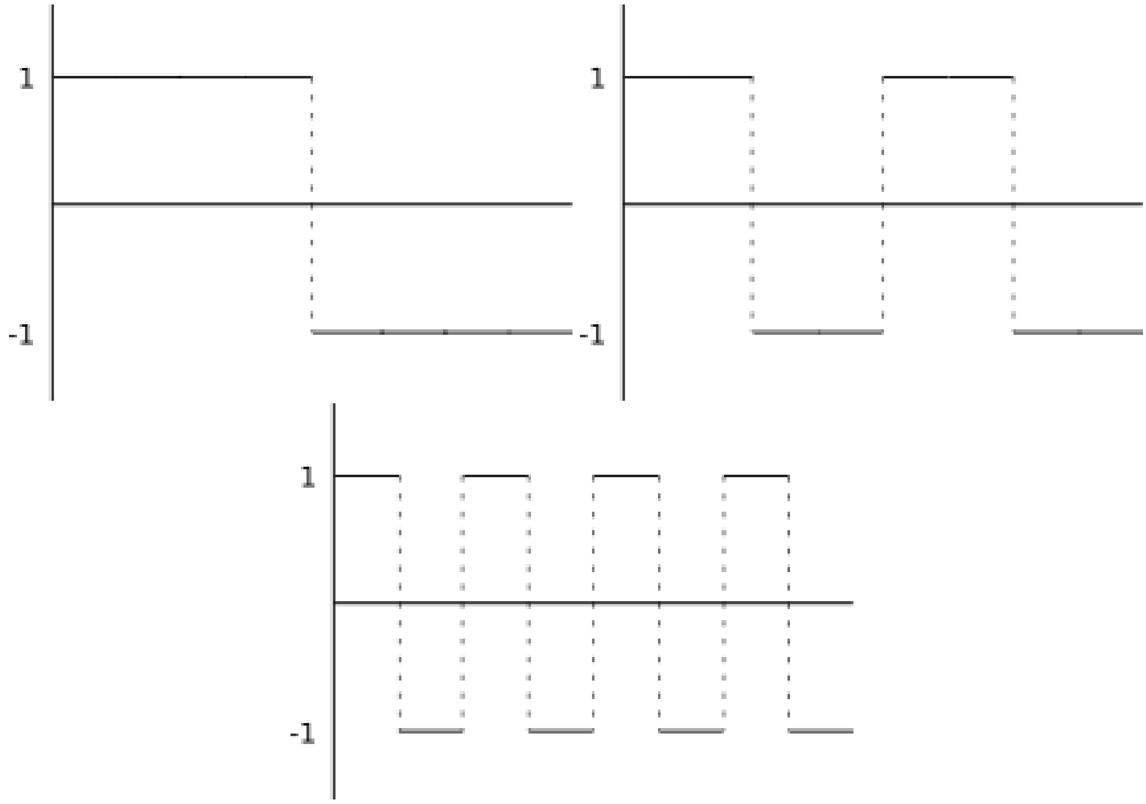
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\,[(H \cdot S)_{n+1}|\mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}\,[(H \cdot S_n) + H_{n+1}(S_{n+1} - S_n)|\mathcal{F}_n] \\
&= \mathbb{E}\,[(H \cdot S)_n|\mathcal{F}_n] + \mathbb{E}\,[H_{n+1}(S_{n+1} - S_n)|\mathcal{F}_n] \\
&= \mathbb{E}\,[(H \cdot S)_n|\mathcal{F}_n] + \mathbb{E}\,[H_{n+1}(S_{n+1} - S_n)|\mathcal{F}_n] \\
&= (H \cdot S)_n + \mathbb{E}\,[H_{n+1}(S_{n+1} - S_n)|\mathcal{F}_n] \qquad . \\
&= (H \cdot S)_n + H_{n+1}\mathbb{E}\,[(S_{n+1} - S_n)|\mathcal{F}_n] \\
&= (H \cdot S)_n + H_{n+1}\left(\mathbb{E}\,[S_{n+1}|\mathcal{F}_n] - S_n\right) \\
&= (H \cdot S)_n + H_{n+1}(S_n - S_n) = (H \cdot S_n)
\end{aligned}$$

Time smo dobili smo da je $(H \cdot S)_n$ martingal. □

Teorem 2.1.4. *Svaki martingal $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ obzirom na filtraciju $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$, $\mathcal{F}_n = \sigma(S_1, \dots, S_n)$ ima reprezentaciju oblika*

$$X_n = X_0 + \sum_{k=1}^{n} H_k(S_k - S_{k-1}),\ n \in \mathbb{N}$$

za neki predvidivi integrabilni proces $(H_k)_{k=1}^{\infty}$.



Slika 2.1: Redom prikaz slučajnih varijabli Y_1, Y_2, Y_3

U nastavku ćemo dokazati gore navedeni teorem. Odaberimo pogodan vjerojatnosni prostor na kojem ćemo konstruirati slučajnu šetnju. Neka je $\Omega = [0, 1\rangle$, $\mathcal{F}$ Borelova σ-algebra, $\mathbb{P}$ Lebesgueova mjera, tj.

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = ([0, 1\rangle, \mathcal{B}([0, 1\rangle), \lambda) .$$

Promatramo niz slučajnih varijabli definiranih s $Y_i(\omega) = (-1)^{\omega_i}$, gdje ω_i označava i-tu binarnu znamenku broja $\omega \in [0, 1\rangle$, tj.

$$\omega = 0.\omega_1\omega_2\omega_3 \ldots .$$

Brojevi oblika $k/2^m$, $k, m \in \mathbb{N}$ imaju dva moguća binarna zapisa pa za njih uvijek uzimamo onaj koji ima konačno mnogo jedinica. Taj odabir i nije previše važan, jer brojeva s nejednoznačnim binarnim zapisom ima prebrojivo mnogo pa posebno čine skup Lebesgueove mjere nula.

Lema 2.1.1. *Slučajne varijable Y_i, $i = 1, 2, \ldots$ su nezavisne.*

Dokaz. Trebamo dokazati da je za svaki $m \in \mathbb{N}$ konačno mnogo slučajnih varijabli $Y_1, \dots, Y_m$ nezavisno. Da bismo to pokazali, dokazujemo da za svaki $m \in \mathbb{N}$ i za svake $B_1, \dots, B_m \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ vrijedi

$$\mathbb{P}(Y_1 \in B_1, \dots, Y_m \in B_m) = \mathbb{P}(Y_1 \in B_1) \dots \mathbb{P}(Y_m \in B_m).$$

Kako Y_i mogu jedino poprimiti vrijednosti -1 i 1, zapravo dokazujemo da za $y_1, \dots, y_m \in \{0, 1\}$ vrijedi

$$\mathbb{P}\left(Y_1 = (-1)^{y_1}, \dots, Y_m = (-1)^{y_m}\right) = \mathbb{P}\left(Y_1 = (-1)^{y_1}\right) \dots \mathbb{P}\left(Y_m = (-1)^{y_m}\right).$$

S jedne strane je

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(Y_1 = (-1)^{y_1}, \dots, Y_m = (-1)^{y_m}) \\
&= \mathbb{P}(\{\omega = 0.x_1x_2 \dots : (-1)^{x_1} = (-1)^{y_1}, \dots (-1)^{x_m} = (-1)^{y_m}\}) \\
&= \mathbb{P}(\{\omega = 0.x_1x_2 \dots : x_1 = y_1, \dots x_m = y_m\}) \\
&= \mathbb{P}(\{0.y_1y_2 \dots y_m x_{m+1}x_{m+2} \dots, : \ x_i \in \{0, 1\}, \ i \geq m + 1\}) \\
&= \mathbb{P}([0.y_1y_2 \dots y_m, 0.y_1y_2 \dots y_m 11 \dots\rangle) \\
&= \mathbb{P}\left(\left[0.y_1y_2 \dots y_m, \ 0.y_1y_2 \dots y_m + \frac{1}{2^m}\right]\right) = \frac{1}{2^m}.
\end{aligned}$$

S druge strane, promotrimo isti izbor od $y_1, \dots, y_m$. Fiksirajmo i-tu znamenku od $\omega = 0.x_1x_2 \dots$, tj. stavimo $x_i = y_i$ i promotrimo dobiveni skup

$$\{Y_i = (-1)^{y_i}\} = \{\omega = 0.x_1x_2 \dots : x_i = y_i\}.$$

Za $y_i = 0$ to je unija intervala

$$\left[0, \frac{1}{2^i}\right\rangle \cup \left[\frac{2}{2^i}, \frac{3}{2^i}\right\rangle \cup \left[\frac{4}{2^i}, \frac{5}{2^i}\right\rangle \cup \dots \cup \left[\frac{2^i - 2}{2^i}, \frac{2^i - 1}{2^i}\right\rangle,$$

a za $y_i = 1$ to je

$$\left[\frac{1}{2^i}, \frac{2}{2^i}\right\rangle \cup \left[\frac{3}{2^i}, \frac{4}{2^i}\right\rangle \cup \left[\frac{5}{2^i}, \frac{6}{2^i}\right\rangle \cup \dots \cup \left[\frac{2^i - 1}{2^i}, 1\right\rangle.$$

Lebesgueova mjera tog skupa je u oba slučaja jednaka $2^{i-1}\frac{1}{2^i} = \frac{1}{2}$. Zato konačno imamo

$$\mathbb{P}\left(Y_1 = (-1)^{y_1}\right) \dots \mathbb{P}\left(Y_m = (-1)^{y_m}\right) = \frac{1}{2} \cdots \frac{1}{2} = \frac{1}{2^m}.$$

Time je završen dokaz nezavisnosti slučajnih varijabli Y_i.

□

Lema 2.1.2. *Vrijedi* $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \dots, Y_n)$.

Dokaz. Prema definiciji s početka odjeljka je

$$\mathcal{F}_n = \sigma(S_1, \dots, S_n),$$

dakle dokazujemo

$$\sigma(S_1, \dots, S_n) = \sigma(Y_1, \dots, Y_n).$$

Kako je $S_n = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$, pri čemu su Y_i, $i = 1, \dots, n$ slučajne varijable, to povlači da je S_n slučajna varijabla (kao zbroj slučajnih varijabli). Budući je $Y_n = S_n - S_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$ svaka od slučajnih varijabli $Y_1, \dots, Y_n$ je $\sigma(S_1, \dots S_n)$-izmjeriva te slijedi da je

$$\sigma(Y_1, \dots Y_n) \subseteq \sigma(S_1, \dots S_n).$$

Obratno, S_n je definiran sa $S_n = Y_1 + \dots + Y_n$, $n \in \mathbb{N}$. Svaka od slučajnih varijabli $S_1, \dots, S_n$ je $\sigma(Y_1, \dots, Y_n)$-izmjeriva. To povlači

$$\sigma(S_1, \dots S_n) \subseteq \sigma(Y_1, \dots Y_n),$$

te imamo

$$\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \dots, Y_n).$$

□

Pokazat ćemo da je $\sigma(Y_1, \dots, Y_n)$ familija svih proizvoljnih unija skupova $[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\rangle$, $k = 0, \dots, 2^n - 1$, gdje ćemo takvu uniju označiti s $\mathcal{E}_n$. Zbog toga jer je

$$Y_n = \sum_{i=0}^{2^n-1} (-1)^i \left[\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}\right\rangle$$

imamo da je Y_n jednostavna izmjeriva funkcija obzirom na $\mathcal{E}_n$ te slijedi da je $\sigma(Y_1, \dots, Y_n) \subseteq \mathcal{E}_n$. Obratno, neka je $0 \le k \le 2^n - 1$. Tada je

$$\frac{k}{2^n} = 0.k_1 \dots k_n.$$

Gledamo skup $\{Y_j = (-1)^{k_j}\}$. Taj se skup nalazi u $\mathcal{F}_n$ za $j = 0, \dots, n$. Jer je $\mathcal{F}_n$ σ-algebra znamo da vrijedi

$$\bigcap_{j=0}^{n} \{\, Y_j = (-1)^{k_j}\} \in \mathcal{F}_n$$

te raspisivanjem dobijemo

$$\bigcap_{j=0}^{n}\{ Y_j = (-1)^{k_j}\} = \{Y_1 = (-1)^{k_1}, \dots, Y_n = (-1)^{k_n}\}$$
$$= \{\omega : \omega_1 = k_1, \dots, \omega_n = k_n\} = [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\rangle.$$

Vratimo se sada na dokaz Teorema 2.1.4. Koristeći $S_n - S_{n-1} = Y_n$ odmah vidimo da vrijedi

$$X_n = X_0 + \sum_{k=1}^{n} H_k(S_k - S_{k-1}) \text{ za svaki } n \in \mathbb{N}$$

ako i samo ako je

$$X_n - X_{n-1} = H_n Y_n \text{ za svaki } n \in \mathbb{N}.$$

Nadalje, H_n je $\mathcal{F}_{n-1}$-izmjeriva ako i samo ako je H_n konstantna funkcija na intervalima oblika $[\frac{k}{2^{n-1}}, \frac{k+1}{2^{n-1}}\rangle$, $k = 0, 1, 2, \dots, 2^{n-1} - 1$. Naime, prema lemi 2.1.2 i diskusiji nakon nje je slučajna varijabla $\mathcal{F}_{n-1}$-izmjeriva ako i samo ako je izmjeriva u odnosu na σ-algebru

$$\sigma\left(\left\{\left[\frac{k}{2^{n-1}}, \frac{k+1}{2^{n-1}}\right\rangle : k = 0, 1, 2, \dots, 2^{n-1} - 1\right\}\right).$$

Iz tog razloga moramo tražiti H_n među linearnim kombinacijama karakterističnih funkcija spomenutih intervala, tj. među funkcijama oblika

$$H_n = \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \alpha_k \mathbf{1}_{[\frac{k}{2^{n-1}}, \frac{k+1}{2^{n-1}}\rangle},$$

za neke (zasad neodređene) koeficijente $\alpha_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, 1, \dots, 2^{n-1} - 1$. Zapišimo Y_n kao u dokazu leme 2.1.1,

$$\begin{aligned} Y_n &= \mathbf{1}_{[\frac{0}{2^n}, \frac{1}{2^n}\rangle} - \mathbf{1}_{[\frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}\rangle} + \mathbf{1}_{[\frac{2}{2^n}, \frac{3}{2^n}\rangle} + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} (\mathbf{1}_{[\frac{2k}{2^n}, \frac{2k+1}{2^n}\rangle} - \mathbf{1}_{[\frac{2k+1}{2^n}, \frac{2k+2}{2^n}\rangle}) = \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} (\mathbf{1}_{[\frac{k}{2^{n-1}}, \frac{2k+1}{2^n}\rangle} - \mathbf{1}_{[\frac{2k+1}{2^n}, \frac{k+1}{2^{n-1}}\rangle}). \end{aligned}$$

Pomnožimo sada izraze za H_n i Y_n. Množenjem dvije karakteristične funkcije dobivamo karakterističnu funkciju presjeka ta dva skupa. Množenjem dviju suma s koeficijentima dobivamo

$$H_n Y_n = \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \alpha_k (\mathbf{1}_{[\frac{k}{2^{n-1}}, \frac{2k+1}{2^n}\rangle} - \mathbf{1}_{[\frac{2k+1}{2^n}, \frac{k+1}{2^{n-1}}\rangle}).$$

Uzmimo $0 \leq k \leq 2^{n-1} - 1$. Provjerimo kako izgleda $X_n - X_{n-1}$ na $[\frac{k}{2^{n-1}}, \frac{k+1}{2^{n-1}}\rangle$. Zbog izmjerivosti slučajnih varijabli X_{n-1} i X_n u σ-algebri $\mathcal{F}_{n-1}$, odnosno $\mathcal{F}_n$ imamo

$$X_{n-1} = \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \beta_k \mathbf{1}_{[\frac{k}{2^{n-1}}, \frac{k+1}{2^{n-1}}\rangle},$$
$$X_n = \sum_{k=0}^{2^n-1} \gamma_k \mathbf{1}_{[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\rangle}.$$

Još X_n možemo zapisati kao

$$X_n = \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \left(\gamma_{2k} \mathbf{1}_{[\frac{2k}{2^n}, \frac{2k+1}{2^n}\rangle} + \gamma_{2k+1} \mathbf{1}_{[\frac{2k+1}{2^n}, \frac{2k+2}{2^n}\rangle}\right)$$

te imamo

$$X_n - X_{n-1} = \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \left((\gamma_{2k} - \beta_k)\mathbf{1}_{[\frac{k}{2^{n-1}}, \frac{2k+1}{2^n}\rangle} + (\gamma_{2k+1} - \beta_k)\mathbf{1}_{[\frac{2k+1}{2^n}, \frac{k+1}{2^{n-1}}\rangle}\right).$$

Kako je X martingal, imamo da je $\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_n] = X_{n-1}$ te vrijedi

$$\int_{[\frac{k}{2^{n-1}}, \frac{k+1}{2^{n-1}}\rangle} X_n \, d\mathbb{P} = \int_{[\frac{k}{2^{n-1}}, \frac{k+1}{2^{n-1}}\rangle} X_{n-1} \, d\mathbb{P},$$

tj. imamo

$$\gamma_{2k}\frac{1}{2^n} + \gamma_{2k+1}\frac{1}{2^n} = \beta_k \frac{1}{2^{n-1}}$$

što daje

$$\frac{\gamma_{2k} + \gamma_{2k+1}}{2} = \beta_k \ . \tag{1}$$

Rješavamo sustav po nepoznanicama α_k

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \gamma_{2k} - \beta_k, \\ -\alpha_k &= \gamma_{2k+1} - \beta_k. \end{aligned}$$

Uvrštavanjem (1) u sustav on postaje

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \tfrac{\gamma_{2k} - \gamma_{2k+1}}{2} \\ -\alpha_k &= -\tfrac{\gamma_{2k} - \gamma_{2k+1}}{2} \end{aligned}$$

za $k = 0, 1, \ldots, 2^{n-1} - 1$. Zaključujemo da sustav ima rješenje po nepoznatim koeficijentima α_k te smo time dokazali teorem.

Više detalja čitatelj može naći u knjizi [6].

2.2 Primjene jednodimenzionalnog teorema reprezentacije

Teorem 2.1.4. ima neke zanimljive posljedice, koje ćemo izvesti primjenjujući ga na pogodno odabrane martingale.

Neka nam u daljnjem tekstu $\mathcal{F}_\infty$ označava σ-algebru svih događaja generiranih slučajnom šetnjom, tj.

$$\mathcal{F}_\infty := \sigma(\{\mathcal{F}_n : n = 0, 1, 2, \ldots\}).$$

Korolar 2.2.1. *Za svaki $X \in L^p$, $1 < p < \infty$, $X \in \mathcal{F}_\infty$ postoji predvidivi proces $(H_k)_{k=1}^\infty$ takav da vrijedi*

$$X = \mathbb{E}[X] + \sum_{k=1}^{\infty} H_k(S_k - S_{k-1}).$$

Pritom red konvergira i g.s. i u L^p.

Dokaz. Definiramo proces $X_n = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n]$. Ovako definiran proces je martingal u L^p. Naime, imamo $X \in \mathrm{L}^1$, što povlači da je $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n] \in \mathrm{L}^1$ te $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n] \in \mathcal{F}_n$. Nadalje,

$$\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_{n+1}]|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n] = X_n$$

te imamo da je X_n martingal.

$$|X_n|^p = |\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n]|^p \leq \mathbb{E}[|X|^p|\mathcal{F}_n]$$

implicira

$$\mathbb{E}|X_n|^p \leq \mathbb{E}[|X|^p] < \infty$$

jer je $X \in \mathrm{L}^p$. Imamo

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}|X_n|^p \leq \mathbb{E}[|X|^p] < \infty.$$

Po Teoremu 1.5.7. iz uvodnog dijela slijedi da $(X_n)_{n=0}^\infty$ konvergira prema X g.s. i u L^p. Ispunjene su pretpostavke teorema 2.1.4. pa po njemu postoji predvidiv proces $(H_k)_{k=1}^\infty$ takav da vrijedi

$$X_n = X_0 + \sum_{k=1}^{n} H_k(S_k - S_{k-1}) = \mathbb{E}[X] + \sum_{k=1}^{n} H_k(S_k - S_{k-1}),$$

pri čemu je $X_0 = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_0] = \mathbb{E}[X]$. Imamo

$$\begin{aligned} X = \lim_{n\to\infty} X_n &= \lim_{n\to\infty}(X_0 + \sum_{k=1}^{n} H_k(S_k - S_{k-1})) \\ &= X_0 + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} H_k(S_k - S_{k-1}) \\ &= X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} H_k(S_k - S_{k-1}) \\ &= \mathbb{E}[X] + \sum_{k=1}^{\infty} H_k(S_k - S_{k-1}). \end{aligned}$$

Pritom limes po n smatramo ili g.s. ili po L^p normi. □

Idúća posljedica se nekad naziva *diskretna Itōva formula*. Radi njene formulacije uvedimo sljedeću oznaku. Za funkciju $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ i $m \in \mathbb{Z}$ stavimo

$$(\delta f)(m) := \frac{1}{2} f(m+1) - \frac{1}{2} f(m-1)$$

te

$$(\delta^2 f)(m) := f(m+1) - 2f(m) + f(m-1).$$

Ova formulacija Itōve formule preuzeta je iz čalanka [3].

Korolar 2.2.1. *Za svaku funkciju $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ i svaki $n \in \mathbb{N}_0$ vrijedi*

$$f(S_n) = f(S_0) + \sum_{k=1}^{n} (\delta f)(S_{k-1})(S_k - S_{k-1}) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (\delta^2 f)(S_{k-1}).$$

Dokaz. Premda postoje i direktniji dokazi, teorem 2.1.4 nam omogućava da do formule dođemo na prirodan način. Iskoristimo Doobovu dekompoziciju (Teorem 1.6.1 u Poglavlju 1) i zapišimo adaptirani proces $(f(S_n))_{n=0}^{\infty}$ kao

$$f(S_n) = M_n + A_n,$$

pri čemu je $(M_n)_{n=0}^{\infty}$ martingal obzirom na filtraciju $\mathcal{F}$, a $(A_n)_{n=0}^{\infty}$ proces koji je predvidiv obzirom na $\mathcal{F}$ i zadovoljava $A_0 = 0$. Odmah vidimo

$$\begin{aligned}
A_n - A_{n-1} &= \mathbb{E}\left[A_n - A_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[f(S_n) - f(S_{n-1}) | \mathcal{F}_{n-1}\right] - \underbrace{\mathbb{E}\left[M_n - M_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}\right]}_{=0} \\
&= \mathbb{E}\left[f(S_{n-1} + Y_n) | \mathcal{F}_{n-1}\right] - f(S_{n-1}) \\
&= \mathbb{E}\left[f(S_{n-1} + 1)\mathbf{1}_{\{Y_n=1\}} + f(S_{n-1} - 1)\mathbf{1}_{\{Y_n=-1\}} | \mathcal{F}_{n-1}\right] - f(S_{n-1}) \\
&= f(S_{n-1} + 1)\mathbb{E}\left|\mathbf{1}_{\{Y_n=1\}}\right| + f(S_{n-1} - 1)\mathbb{E}\left|\mathbf{1}_{\{Y_n=-1\}}\right| - f(S_{n-1}) \\
&= \frac{1}{2}(\delta^2 f)(S_{n-1}),
\end{aligned}$$

iz čega sumiranjem slijedi da mora biti

$$A_n = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(\delta^2 f)(S_{k-1}).$$

Nadalje, iz teorema 2.1.4 dobivamo da martingalni pribrojnik ima reprezentaciju oblika

$$M_n = M_0 + \sum_{k=1}^{n} H_k(S_k - S_{k-1})$$

i odmah je $M_0 = f(S_0)$. Osim toga imamo

$$\begin{aligned}
H_n Y_n = H_n(S_n - S_{n-1}) = M_n - M_{n-1} = f(S_n) - f(S_{n-1}) - (A_n - A_{n-1}) \\
f(S_n) - f(S_{n-1}) - \frac{1}{2}(\delta^2 f)(S_{n-1}) = f(S_{n-1} + Y_n) - \frac{1}{2}f(S_{n-1} + 1) - \frac{1}{2}f(S_{n-1} - 1).
\end{aligned}$$

Na skupu $\{Y_n = 1\}$ ta jednakost postaje

$$H_n = \frac{1}{2}f(S_{n-1} + 1) - \frac{1}{2}f(S_{n-1} - 1) = (\delta f)(S_{n-1}),$$

a na skupu $\{Y_n = -1\}$ dobivamo opet istu jednakost, samo pomnnoženu s -1. Uvrštavanjem dobivenih izraza za M_n, H_n i A_n slijedi tvrdnja korolara. □

Posljednja primjena će nam biti jedna nejednakost koja se koristi u harmonijskoj analizi.

Teorem 2.2.2 (Hinčinova nejednakost)**.** *Ako je $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ martingalna transformacija jednostavne simetrične slučajne šetnje $(S_n)_{n=1}^{\infty}$, a članovi predvidivog procesa su konstante $H_n = a_n$ za svaki n, odnosno*

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} a_k(S_k - S_{k-1}) = a_1 Y_1 + \cdots + a_n Y_n,$$

tada postoji konstanta $0 < C_p < \infty$ *koja ovisi samo o* p *i za koju vrijedi nejednakost*

$$\|X_n\|_p \leq C_p\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\Big) = C_p\|X_n\|_2.$$

Dokaz. Navedenu nejednakost dokazat ćemo za parne prirodne brojeve $p \geq 2$. Za pokazivanje ocjene za sve realne brojeve $p \geq 2$ koristi se tzv. teorija interpolacije, koju ovdje nećemo komentirati.

Neka je $p \geq 2$ paran prirodan broj. Tada je

$$\|X_n\|_p^p = \mathbb{E}\left[X_n^p\right] = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^{n} a_k Y_k\right)^p\right] = \mathbb{E}\left[(a_1Y_1 + \ldots + a_nY_n)^p\right].$$

Primjenom multinomnog teorema na $(\sum_{k=1}^{n} a_k Y_k)^p$ i korištenjem linearnosti matematičkog očekivanja dobivamo

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sum_{k_1+\ldots+k_n=p,\ k_i\geq 0 \text{ cijeli}} \binom{p}{k_1,\ldots,k_n}(a_1Y_1)^{k_1}\ldots(a_nY_n)^{k_n}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{k_1+\ldots+k_n=p,\ k_i\geq 0 \text{ cijeli}} \frac{p!}{k_1!\ldots k_n!} a_1^{k_1}Y_1^{k_1}\ldots a_n^{k_n}Y_n^{k_n}\right] \\
&= \sum_{k_1+\ldots+k_n=p,\ k_i\geq 0 \text{ cijeli}} \frac{p!}{k_1!\ldots k_n!} a_1^{k_1}\ldots a_n^{k_n}\mathbb{E}\left[Y_1^{k_1}\ldots Y_n^{k_n}\right]. \qquad (2)
\end{aligned}$$

Tvrdimo da u ovoj sumi "nestaju" odnosno da su jednaki nuli svi pribrojnici za koji je neki od eksponenata $k_1, \ldots, k_n$ neparan. Znamo da su Y_i nezavisne jednakodistribuirane slučajne varijable takve da je

$$Y_i \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

iz čega slijedi

$$Y_i^k \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{za } k \text{ neparan}$$

i $Y_i^k = 1$ za k paran. Izračunajmo očekivanje produkta takvih potencija:

$$\mathbb{E}\left[Y_1^{k_1}\ldots Y_n^{k_n}\right] = (\text{nezavisnost}) = \mathbb{E}\left[Y_1^{k_1}\right]\ldots\mathbb{E}\left[Y_n^{k_n}\right] = 0,$$

ako je barem jedan od eksponenata neparan, to jest

$$\mathbb{E}\left[Y_1^{k_1}\ldots Y_n^{k_n}\right] = 1$$

u slučaju kada su svi $k_1, \ldots, k_n$ parni brojevi. Kako su u svim preostalim pribrojnicima $k_1, \ldots, k_n$ parni brojevi imamo da je (2) jednaka

$$\sum_{\substack{k_i=2l_i \\ l_1+\ldots+l_n=p/2 \\ l_i\geq 0 \text{ cijeli}}} \frac{p!}{(2l_1!)\ldots(2l_n)} a_1^{2l_1} \ldots a_n^{2l_n}.$$

S druge strane imamo

$$((a_1^2 + \ldots a_n^2)^{\frac{1}{2}})^p = (a_1^2 + \ldots a_n^2)^{\frac{p}{2}}.$$

Ponovno iskoristimo multinomni teorem pa slijedi

$$(a_1^2 + \ldots a_n^2)^{\frac{p}{2}} = \sum_{\substack{l_1+\ldots+l_n=p/2 \\ l_i\geq 0 \text{ cijeli}}} \frac{(p/2)!}{l_1!\ldots l_n!} a_1^{2l_1} \ldots a_n^{2l_n}.$$

Preostaje još dokazati da postoji konstanta $0 < C_p < \infty$ takva da vrijedi

$$\frac{p!}{(2l_1!)\ldots(2l_n)!} < C_p^p \frac{(p/2)!}{l_1!\ldots l_n!}.$$

Kako je $(2l)! \geq l!$ za svaki $l \in \mathbb{N}_0$, dovoljno je uzeti $C_p^p = \frac{p!}{(p/2)!} < \infty$. Prokomentirajmo još jednakost

$$\|X_n\|_2 = \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Primijenom istog postupka za $p = 2$ dobivamo

$$\|X_n\|_2^2 = \sum_{k=1}^n a_k^2 \mathbb{E}\left[Y_k^2\right].$$

Znamo da je $\mathbb{E}\left[Y_k^2\right] = 1$ pa iz toga slijedi da je

$$\|X_n\|_2^2 = \sum_{k=1}^n a_k^2.$$

□

2.3 Višedimenzionalni teorem reprezentacije

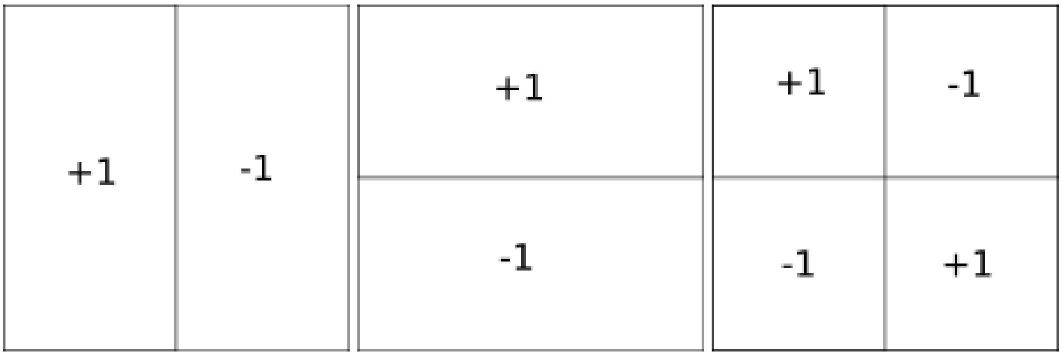
Sada se bavimo reprezentacijom martingala u odnosu na d-dimenzionalnu slučajnu šetnju. Neka je zadana dijadska kocka $Q = [\frac{\mathbf{k}}{2^n}, \frac{\mathbf{k}+1}{2^n}\rangle$. Ovdje kratko pišemo $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_d)$. Imat čemo $\mathbb{Q} \subseteq [0,1\rangle^d$ točno kada je $0 \leq k_j \leq 2^{n-1}$ za svaki j. Sa h^i_Q definiramo funkciju

$$h^i_Q = \mathbf{1}_{[\frac{k_1}{2^n}, \frac{k_1+1}{2^n}\rangle \times \cdots \times [\frac{2k_i}{2^{n+1}}, \frac{2k_i+1}{2^{n+1}}\rangle \times \cdots \times [\frac{k_d}{2^n}, \frac{k_d+1}{2^n}\rangle} - \mathbf{1}_{[\frac{k_1}{2^n}, \frac{k_1+1}{2^n}\rangle \times \cdots \times [\frac{2k_i+1}{2^{n+1}}, \frac{2k_i+2}{2^{n+1}}\rangle \times \cdots \times [\frac{k_d}{2^n}, \frac{k_d+1}{2^n}\rangle}$$

te za $I \subseteq \{1, \ldots, d\}$ definiramo

$$h^I_Q(x_1, \ldots, x_d) = \prod_{i \in I} h^i_Q(x_i) \quad \text{za } (x_1, \ldots, x_d) \in Q.$$

U slučaju $I = \emptyset$ smatramo da je $h^\emptyset_Q$ konstantno jednaka 1 na Q. Na taj način je konstruiran tzv. *Haarov sistem* .



Slika 2.2: Funkcije $h^{\{1\}}$, $h^{\{2\}}$, $h^{\{1,2\}}$

Lema 2.3.1. *Skup*

$$\left\{h^I_Q : I \subseteq \{1, 2, \ldots, d\}\right\}$$

je ortogonalna baza za prostor funkcija

$$V_Q = \{f : Q \to \mathbb{R} : \ f \text{ je konstantna funkcija na svakoj} \\ \text{dijadskoj kocki } Q' \text{ takvoj da je } Q' \subseteq Q \text{ i } l(Q') = \tfrac{1}{2} l(Q)\}.$$

Ovdje $l(Q)$ označava duljinu brida od Q.

Dokaz. Pokazat ćemo da je $\{h^I_Q\}$ ortogonalni sistem u odnosu na standardni skalarni produkt

$$\langle f \mid g \rangle = \int f(x) g(x)\, dx.$$

Funkciju h_Q^I možemo zapisati na sljedeći način

$$h_Q^I(x_1, \dots, x_d) = \prod_{i=1}^{d} \psi_i(x_i),$$

gdje je $\psi_i = h_Q^i$ ako $i \in I$ a inače $\psi_i = 1$. Neka su $I, I' \subseteq \{1, 2, \dots, d\}$ i $I \neq I'$. Bez smanjenja općenitosti postoji $i_0 \in \{1, 2, \dots, d\}$ takav da je $i_0 \in I$ i $i_0 \notin I'$. Ako još

$$h_Q^{I'}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{d} \varphi_i(x_i)$$

tada imamo

$$\begin{aligned}
\langle\, h_Q^I \mid h_Q^{I'} \rangle &= \int h_Q^I(x_1, \dots, x_d) h_Q^{I'}(x_1, \dots, x_d)\, dx_1 \dots dx_d \\
&= \int \left(\prod_{i=1}^{d} \psi_i(x_i) \right) \left(\prod_{i=1}^{d} \varphi_i(x_i) \right) dx_1 \dots dx_d \\
&= \prod_{i=1}^{d} \int \psi_i(x_i) \varphi_i(x_i)\, dx_i \\
&= \left(\prod_{i \leq 1 \leq d,\ i \neq i_0} \int \psi_i(x_i) \varphi_i(x_i)\, dx_i \right) \left(\int \psi_{i_0}(x_{i_0}) 1\, dx_{i_0} \right) = 0.
\end{aligned}$$

Time smo dobili da su funkcije h_Q^I međusobno ortogonalne pa posebno i linearno nezavisne. Dimenzija od V_Q je 2^d, a kardinalitet skupa $\{h_Q^I\}$ je također 2^d, čime smo dobili da je skup h_Q^I ortogonalna baza za V_Q. □

Teorem 2.3.1. *Za svaki kvadratno-integrabilni martingal $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ postoje kvadratno integrabilni predvidivi procesi $(H_k^I)_{k=0}^{\infty}$, $I \subseteq \{1, 2, \dots, d\} \setminus \emptyset$ takvi da vrijedi reprezentacija*

$$X_n = X_0 + \sum_{k=1}^{n} \sum_{I \subseteq \{1,2,\dots,d\}, I \neq \emptyset} H_k^I \prod_{i \in I} (S_k^i - S_{k-1}^i),\ \ n \in \mathbb{N}.$$

Dokaz. Odaberimo pogodan vjerojatnosni prostor na kojem ćemo konstruirati slučajnu šetnju. Neka je $\Omega = [0, 1\rangle^d$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0, 1\rangle^d)$, $\mathbb{P} = \lambda_d = \lambda = d$-dimenzionalna Lebesgueova mjera, tj.

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = \Big([0, 1\rangle^d, \mathcal{B}([0, 1\rangle^d), \lambda_d \Big).$$

Promatramo niz slučajnih vektora $Y_k = (Y_k^1, \dots, Y_k^d)$, gdje je

$$Y_k^i(\omega_1, \dots, \omega_d) = (-1)^{k\text{-ta binarna znamenka od } \omega_i}.$$

Tako zadana slučajna varijabla ima distribuciju

$$Y_k^i \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Slučajnu varijablu Y_k^i možemo zapisati i na sljedeći način

$$Y_k^i = \sum_{i=0}^{2^k-1} (-1)^i \mathbf{1}_{[0,1\rangle \times \cdots \times [\frac{i}{2^k}, \frac{i+1}{2^k}\rangle \times \cdots [0,1\rangle}.$$

Stavimo

$$S_n^i = Y_1^i + Y_2^i + \dots Y_n^i, \quad S_n = (S_n^1, \dots, S_n^d).$$

Jer su $Y_k^1, \dots, Y_k^d$, međusobno nezavisne slučajne varijable tada su i Y_k međusobno nezavisni slučajni vektori. Kako je $(S_n^i)_{n=0}^\infty$ jednostavna slučajna šetnja na $\mathbb{Z}$ i $(S_n^i)_{n=0}^\infty$, $i = 1, \dots, d$ su međusobno nezavisni slučajni procesi, imamo da je $(S_n)_{n=0}^\infty$ jednostavna slučajna šetnja na $\mathbb{Z}^d$. Zanima nas kako izgleda σ-algebra generirana slučajnim vektorima $S_1, \dots, S_n$. Neka je $\bar{\mathcal{F}}_n = \sigma(S_n, \dots, S_n)$. Tada imamo

$$\bar{\mathcal{F}}_n = \sigma(S_n, \dots, S_n) = \sigma(Y_1, \dots, Y_n) = \sigma\left(\left\{Y_k^1 : k \in \{1, \dots, n\}, i \in \{1, \dots, d\}\right\}\right).$$

Definirajmo $\mathcal{F}_0 = \left\{\emptyset, [0,1\rangle^d\right\}$. Iz jednodimenzionalnog slučaja znamo da vrijedi

$$\sigma\left(\left\{Y_k^i : k \in \{1, \dots, n\}\right\}\right) = \mathcal{F}_0 \times \cdots \times \mathcal{F}_n \times \cdots \times \mathcal{F}_0$$

gdje se $\mathcal{F}_n$ nalazi na i-tom mjestu. σ-algebra generirana unijama svih skupova gornjeg oblika je upravo $\mathcal{F}_n \times \cdots \times \mathcal{F}_n$ te imamo

$$\bar{\mathcal{F}}_n = \mathcal{F}_n \times \cdots \times \mathcal{F}_n = \sigma\left(\left\{\left[\frac{\mathbf{k}}{2^n}, \frac{\mathbf{k}+1}{2^n}\right\rangle : \mathbf{k} \in \{0, 1, \dots 2^n - 1\}^d\right\}\right)$$

što je upravo kolekcija koja sadrži sve konačne unije skupova oblika $[\frac{\mathbf{k}}{2^n}, \frac{\mathbf{k}+1}{2^n}\rangle$. Definirajmo

$$Y_n^I = \prod_{i \in I} Y_n^i.$$

Dokazati tvrdnju teorema je ekvivalentno tome da dokažemo da postoje kvadratno integrabilni predvidivi procesi $(H_k^I)_{k=0}^\infty$, $I \subseteq \{1, 2, \dots, d\}$, $I \neq \emptyset$ takvi da vrijedi reprezentacija

$$X_n - X_{n-1} = \sum_{I \subseteq \{1,2,\dots,d\}, I \neq \emptyset} H_n^I Y_n^I, \; n \in \mathbb{N}.$$

Definirali smo pojam dijadske kocke Q kao

$$Q = \left[\frac{\mathbf{k}}{2^n}, \frac{\mathbf{k}+1}{2^n}\right\rangle, \ n \in \mathbb{N}, \ \mathbf{k} \in \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}^d.$$

S $l(Q)$ označimo dulijnu brida dijadske kocke. Kako je $\mathbb{E}\left[X_n - X_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}\right] = 0$ i zbog same definicije uvjetnog matematičkog očekivanja imamo

$$\int_Q (X_n - X_{n-1})\, d\lambda = 0, \quad Q \subseteq [0, 1\rangle^d, \ l(Q) = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Kako je svaka od slučajnih varijabli izmjeriva u u paru σ-algebri $(\bar{\mathcal{F}}_n, \mathcal{B})$, imamo

$$\begin{aligned} X_{n-1} &= \sum_{Q,\, l(Q)=\frac{1}{2^{n-1}}} \beta_Q \mathbf{1}_Q \\ X_n &= \sum_{Q,\, l(Q)=\frac{1}{2^{n-1}}} \ \sum_{Q' \subseteq Q,\, l(Q')=\frac{1}{2^n}} \gamma_{Q'} \mathbf{1}_{Q'}. \end{aligned}$$

Za svaku dijadsku kocku Q takvu da $l(Q) = \frac{1}{2^{n-1}}$ vrijedi

$$\begin{aligned} 0 = \int_Q (X_n - X_{n-1})\, d\lambda &= \left(\sum_{Q' \subseteq Q,\, l(Q')=\frac{1}{2^n}} \gamma_{Q'} \lambda(Q') \right) - \beta_Q \lambda(Q) \\ &= \left(\sum_{Q' \subseteq Q,\, l(Q')=\frac{1}{2^n}} \gamma_{Q'} \left(\frac{1}{2^n}\right)^d \right) - \beta_Q \left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^d, \end{aligned}$$

iz čega slijedi

$$\beta_Q = \frac{1}{2^d} \sum_{Q' \subseteq Q,\, l(Q')=\frac{1}{2} l(Q)} \gamma_{Q'}. \tag{3}$$

Kako je svaki H_n^I, $I \subseteq \{1, \ldots, d\}$ izmjeriv u $\bar{\mathcal{F}}_n$, imamo da je H_n^I oblika

$$H_n^I = \sum_{Q,\, l(Q)=\frac{1}{2^{n-1}}} \alpha_Q^I \mathbf{1}_Q.$$

Ako gledamo restrikciju funkcije Y_n^I na dijadskoj kocki Q takvoj da je $l(Q) = \frac{1}{2^{n-1}}$ imamo

$$Y_n^I\big|_Q = h_Q^I \mathbf{1}_Q,$$

a restrikcija od H_n^I je

$$H_n^I\big|_Q = \alpha_Q^I \mathbf{1}_Q,$$

čime smo dobili da je

$$H_n^I Y_n^I|_Q = \alpha_Q^I h_Q^I \mathbf{1}_Q$$

Promatramo restrikciju jednadžbe

$$X_n - X_{n-1} = \sum_{I \subseteq \{1,2,\ldots,d\}, I \neq \emptyset} H_n^I Y_n^I$$

na dijadskoj kocki Q za koju vrijedi $l(Q) = \frac{1}{2^{n-1}}$, tj.

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{Q' \subseteq Q,\, l(Q') = \frac{1}{2^n}} \gamma_{Q'} \mathbf{1}_{Q'}\Big) - \beta_Q \mathbf{1}_Q &= \sum_{Q' \subseteq Q,\, l(Q') = \frac{1}{2^n}} \gamma_{Q'} \mathbf{1}_{Q'} - \sum_{Q' \subseteq Q,\, l(Q') = \frac{1}{2^n}} \beta_Q \mathbf{1}_{Q'} \\ &= \sum_{Q' \subseteq Q,\, l(Q') = \frac{1}{2^n}} (\gamma_{Q'} - \beta_Q) \mathbf{1}_{Q'} = \sum_{I \subseteq \{1,\ldots,d\}, I \neq \emptyset} \alpha_Q^I h_Q^I.\end{aligned}$$

Prema uvijetu (3) je

$$\sum_{Q' \subseteq Q, l(Q') = \frac{1}{2^n}} (\gamma_{Q'} - \beta_Q) = 0$$

pa je lijeva strana funkcija konstantna na dijadskim kockama Q' duljine brida $\frac{1}{2^n}$, a integral po cijeloj kocki Q joj je jednak 0. Kako skup $\{h_Q^I : I \neq \emptyset\}$ baza za skup svih takvih funkcija, postoje konstante α_Q^I takve da vrijedi jednakost.

$$f_Q = \sum_I \alpha_Q^I h_Q^I.$$

Time smo dobili tvrdnju teorema da postoje slučajne varijable H_n^I takve da je

$$X_n = X_0 + \sum_{k=1}^{n} \sum_{I \subseteq \{1,2,\ldots,d\}, I \neq \emptyset} H_k^I \prod_{i \in I} (S_k^i - S_{k-1}^i)$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$. □

Poglavlje 3

Apstraktni teorem reprezentacije

3.1 Kvadratna varijacija i kovarijacija

Neka su

$$X = (X_n)_{n=0}^{\infty} \quad \text{i} \quad Y = (Y_n)_{n=0}^{\infty}$$

martingali s obzirom na filtraciju $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$. Kvadratna kovarijacija od X i Y je jedinstveni predvidivi proces $\langle X, Y\rangle = (\langle X, Y\rangle_n)_{n=0}^{\infty}$ takav da je $X_n Y_n - \langle X, Y\rangle_n$ martingal. Specijalno, kvadratna varijacija od X je jedinstveni predvidivi proces $\langle X\rangle = (\langle X\rangle_n)_{n=0}^{\infty}$ takav da je $X_n^2 - \langle X\rangle_n$ martingal. Egzistencija kvadratne kovarijacije slijedi iz Dobove dekompozicije (teorem 1.6.1). Ipak, instruktivno je direktno izvesti njenu formulu.

Lema 3.1.1. *Kvadratna kovarijacija postoji i dana je formulom*

$$\langle X, Y\rangle_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[X_k Y_k - X_{k-1} Y_{k-1} | \mathcal{F}_{k-1}\right] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[(X_k - X_{k-1})(Y_k - Y_{k-1}) | \mathcal{F}_{k-1}\right].$$

Dokaz. Pretpostavimo da je zadan predvidiv slučajni proces $\langle X, Y\rangle$ takav da je $X_n Y_n - \langle X, Y\rangle_n$ martingal. Tada mora vrijediti

$$\mathbb{E}\left[X_n Y_n - \langle X, Y\rangle_n | \mathcal{F}_{n-1}\right] = X_{n-1} Y_{n-1} - \langle X, Y\rangle_{n-1}.$$

Kako je $\langle X, Y\rangle_n$ $\mathcal{F}_{n-1}$-izmjeriva tada vrijedi

$$\mathbb{E}\left[X_n Y_n - \langle X, Y\rangle_n | \mathcal{F}_{n-1}\right] = \mathbb{E}\left[X_n Y_n | \mathcal{F}_{n-1}\right] - \langle X, Y\rangle_n$$

čime smo dobili

$$\langle X, Y\rangle_n = \langle X, Y\rangle_{n-1} + \mathbb{E}\left[X_n Y_n | \mathcal{F}_{n-1}\right] - X_{n-1} Y_{n-1}.$$

Rekurzivno dobijemo

$$\langle X, Y \rangle_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\mathbb{E}\left[X_k Y_k | \mathcal{F}_{k-1} \right] - X_{k-1} Y_{k-1} \right).$$

Trebamo još pokazati da je proces $\langle X, Y \rangle$ kvadratna kovarijacija od X i Y, tj. trebamo pokazati da je $X_n Y_n - \langle X, Y \rangle_n$ martingal. Računajmo

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X_n Y_n - \langle X, Y \rangle_n | \mathcal{F}_{n-1} \right] &= \mathbb{E}\left[X_n Y_n - \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[X_k Y_k - X_{k-1} Y_{k-1} | \mathcal{F}_{k-1} \right] | \mathcal{F}_{n-1} \right] \\
&= \mathbb{E}\left[X_n Y_n | \mathcal{F}_{n-1} \right] - \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[X_k Y_k - X_{k-1} Y_{k-1} | \mathcal{F}_{k-1} \right] \\
&= \mathbb{E}\left[X_n Y_n | \mathcal{F}_{n-1} \right] - \mathbb{E}\left[X_n Y_n | \mathcal{F}_{n-1} \right] + \mathbb{E}\left[X_{n-1} Y_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1} \right] \\
&- \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E}\left[X_k Y_k - X_{k-1} Y_{k-1} | \mathcal{F}_{k-1} \right] \\
&= X_{n-1} Y_{n-1} - \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E}\left[X_k Y_k - X_{k-1} Y_{k-1} | \mathcal{F}_{k-1} \right] \\
&= X_{n-1} Y_{n-1} - \langle X, Y \rangle_n,
\end{aligned}$$

gdje zadnja i predzadnja jednakost slijede iz toga da su X_{n-1} i Y_{n-1} $\mathcal{F}_{n-1}$- izmjerive slučajne varijable. □

3.2 Teorem reprezentacije

Neka su X i Y martingali obzirom na istu filtraciju $\mathcal{F}$. Pitamo se: Može li se i na koji način X reprezentirati pomoću Y?

Teorem 3.2.1. *Neka su $X = (X_n)_{n=0}^{\infty}$ i $Y = (Y_n)_{n=0}^{\infty}$ L^2 martingali obzirom na $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$. Tada postoje procesi $H = (H_n)_{n=1}^{\infty}$ i $R = (R_n)_{n=0}^{\infty}$ takvi da vrijedi*

(1) $X_n = X_0 + \sum_{k=1}^{n} H_k (Y_k - Y_{k-1}) + R_n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$,

(2) H je predvidiv obzirom na $\mathcal{F}$,

(3) $\langle R, Y \rangle = 0$, R je L^2 martingal obzirom na $\mathcal{F}$, $R_0 = 0$.

Nadalje taj prikaz je jedinstven u smislu da ako je X predstavljen pomoću H i R, odnosno pomoću H' i R', tada mora biti $R_n = R'_n$ i $H_n(Y_n - Y_{n-1}) = H'_n(Y_n - Y_{n-1})$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Dokaz. Pretpostavimo najprije da H i R zadovoljavaju (1),(2) i (3). iz (1) dobivamo

$$X_n - X_{n-1} = H_n(Y_n - Y_{n-1}) + (R_n - R_{n-1})$$

pa množenjem s $Y_n - Y_{n-1}$ i uzimanjem uvjetnog matematičkog očekivanja slijedi

$$\mathbb{E}\left[(X_n - X_{n-1})(Y_n - Y_{n-1})|\mathcal{F}_{n-1}\right]$$

$$= H_n\mathbb{E}\left[(Y_n - Y_{n-1})^2|\mathcal{F}_{n-1}\right] + \mathbb{E}\left[(R_n - R_{n-1})(Y_n - Y_{n-1})|\mathcal{F}_{n-1}\right],$$

pri čemu smo iskoristili predvidivost od H, tj. (2). Osim toga, zbog (3) imamo

$$\mathbb{E}\left[(R_n - R_{n-1})(Y_n - Y_{n-1})|\mathcal{F}_{n-1}\right] = \langle R, Y\rangle_n - \langle R, Y\rangle_{n-1} = 0.$$

Na taj način dobivamo

$$\mathbb{E}\left[(Y_n - Y_{n-1})^2|\mathcal{F}_{n-1}\right] = H_n\mathbb{E}\left[(X_n - X_{n-1})(Y_n - Y_{n-1})|\mathcal{F}_{n-1}\right]. \tag{4}$$

Dokažimo najprije jedinstvenost prikaza. Za to pretpostavimo da su H i R, odnosno H' i R' kao iz iskaza. Iz (4) slijedi

$$H_n\mathbb{E}\left[(Y_n - Y_{n-1})^2|\mathcal{F}_{n-1}\right] = H'_n\mathbb{E}\left[(Y_n - Y_{n-1})^2|\mathcal{F}_{n-1}\right]$$

tj.

$$(H_n - H'_n)\mathbb{E}\left[(Y_n - Y_{n-1})^2|\mathcal{F}_{n-1}\right] = 0.$$

Množenjem s $H_n - H'_n$ i korištenjem predvidivosti imamo da je

$$\mathbb{E}\left[(H_n - H'_n)^2(Y_n - Y_{n-1})^2|\mathcal{F}_{n-1}\right] = 0,$$

a uzimanjem očekivannja slijedi

$$\|(H_n - H'_n)(Y_n - Y'_{n-1})\|^2_{\mathrm{L}^2} = \mathbb{E}\left[(H_n - H'_n)^2(Y_n - Y'_{n-1})^2\right] = 0,$$

odakle je

$$(H_n - H'_n)(Y_n - Y'_{n-1}) = 0 \ g.s.$$

tj.

$$H_n(Y_n - Y_{n-1}) = H'_n(Y_n - Y_{n-1}),$$

kao što je i trebalo pokazati. Konačno, $R_n = R'_n$ slijedi iz jednakosti (1):

$$R_n = X_n - X_0 - \sum_{k=1}^{n} H_k(Y_k - Y_{k-1}) = X_n - X_0 - \sum_{k=1}^{n} H'_k(Y_k - Y_{k-1}) = R'_n.$$

Sada dokažimo egzistenciju prikaza. Pritom će nam početak dokaza ukazati na kandidata za proces H. Želimo pokazati da za bilo koje L^2 martingale X i Y obzirom na $\mathcal{F}$ postoji proces H takav da vrijedi (4) za svaki $n \in \mathbb{N}$. Iz uvjetne Cauchy-Schwarzove nejednakosti (propozicija 1.4.4) je

$$\mathbb{E}\left[(X_n - X_{n-1})(Y_n - Y_{n-1})|\mathcal{F}_{n-1}\right]^2 \leq \mathbb{E}\left[(X_n - X_{n-1})^2|\mathcal{F}_{n-1}\right]\mathbb{E}\left[(Y_n - Y_{n-1})^2|\mathcal{F}_{n-1}\right],$$

odakle je specijalno

$$\left\{\mathbb{E}\left[(Y_n - Y_{n-1})^2|\mathcal{F}_{n-1}\right] = 0\right\} \subseteq \left\{\mathbb{E}\left[(X_n - X_{n-1})(Y_n - Y_{n-1})|\mathcal{F}_{n-1}\right] = 0\right\}.$$

Zato ako definiramo

$$H_n(\omega) := \begin{cases} \frac{\mathbb{E}[(X_n - X_{n-1})(Y_n - Y_{n-1})|\mathcal{F}_{n-1}]}{\mathbb{E}\left[(Y_n - Y_{n-1})^2|\mathcal{F}_{n-1}\right]}, & \text{za } \omega \in \left\{\mathbb{E}\left[(Y_n - Y_{n-1})^2|\mathcal{F}_{n-1}\right] = 0\right\}, \\ 0, & \text{inače }, \end{cases}$$

tada će H_n svakako zadovoljavati jednakost (4) i očito je H predvidiv. Preostaje definirati $R = (R_n)_n$ kao

$$R_n = X_n - X_0 - \sum_{k=1}^{n} H_k(Y_k - Y_{k-1}),$$

takav da je (1) ispunjeno po samoj konstrukciji. Za provjeru od (3) računamo za $n \in \mathbb{N}$ i $R_n \in \mathcal{F}_n$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[R_n|\mathcal{F}_{n-1}\right] &= \mathbb{E}\left[R_{n-1} + X_n - X_{n-1} - H_n(Y_n - Y_{n-1})|\mathcal{F}_{n-1}\right] \\ &= R_{n-1} + \mathbb{E}\left[X_n|\mathcal{F}_{n-1}\right] - X_{n-1} - H_n\left(\mathbb{E}\left[Y_n|\mathcal{F}_{n-1}\right] - Y_{n-1}\right) = R_{n-1} \end{aligned}$$

te

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[(R_n - R_{n-1})(Y_n - Y_{n-1})|\mathcal{F}_{n-1}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[(R_n - R_{n-1})(Y_n - Y_{n-1}) - H_n(Y_n - Y_{n-1})^2|\mathcal{F}_{n-1}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[(X_n - X_{n-1})(Y_n - Y_{n-1})|\mathcal{F}_{n-1}\right] - H_n\mathbb{E}\left[(Y_n - Y_{n-1})^2|\mathcal{F}_{n-1}\right] \\ &= (4) = 0 \end{aligned}$$

pa je doista

$$\langle R, Y\rangle_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[(R_n - R_{k-1})(Y_k - Y_{k-1})|\mathcal{F}_{k-1}\right] = 0.$$

□

Definicija 3.2.1. Neka je $Y = (Y_n)_{n=0}^{\infty}$ L^2 martingal obzirom na $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$. Kažemo da taj martingal ima *svojstvo predvidive reprezentacije* ako za svaki L^2 martingal $X = (X_n)_{n=0}^{\infty}$ obzirom na $\mathcal{F}$ postoji predvidivi proces $H = (H_n)_{n=0}^{\infty}$ obzirom na $\mathcal{F}$ takav da je

$$X_n = X_0 + \sum_{k=1}^{n} H_k(Y_k - Y_{k-1})$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Napomena 3.2.2. *Iz prethodnog poglavlja, teorema 2.1.4, slijedi da standardna slučajna šetnja ima svojstvo predvidive reprezentacije.*

Korolar 3.2.2. *Za L^2 martingal $Y = (Y_n)_{n=0}^\infty$ obzirom na $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n=0}^\infty$ je ekvivalentno:*

1. *$(Y, \mathcal{F})$ ima svojstvo predvidive reprezentacije.*
2. *Ako je R L^2 martingal takav da je $\langle R, Y\rangle = 0$ i $R_0 = 0$, tada mora biti $R = 0$.*

Dokaz. Da (2) povlači (1) slijedi iz egzistencije u teoremu 3.2.1 jer ostatak mora biti 0. Pokažimo sada da (1) povlači (2). Prikažimo R na dva načina:

$$R_n = \sum_{k=1}^{n} H_k(Y_k - Y_{k-1}) + 0R_n \quad = \sum_{k=1}^{n} 0(Y_k - Y_{k-1}) + R_n.$$

Iz jedinstvenosti u teoremu 3.2.1 slijedi da je $R_n = 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. □

3.3 Konvergencija martingalne transformacije

Neka je zadan kvadratno integrabilni martingal $Y = (Y_n)_{n=0}^\infty$. Definiramo $D_n = Y_n - Y_{n-1}$. Pokažimo da je niz $D = (D_n)_{n=0}^\infty$ ortogonalan. Ako je $m < n$ tada imamo

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[D_m D_n\right] = \mathbb{E}\left[(Y_m - Y_{m-1})(Y_n - Y_{n-1})\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[(Y_m - Y_{m-1})(Y_n - Y_{n-1})|\mathcal{F}_m\right]\right] \\ &= \mathbb{E}\left[(Y_m - Y_{m-1})\mathbb{E}\left[(Y_n - Y_{n-1})|\mathcal{F}_m\right]\right] = 0.\end{aligned}$$

Time smo dobili da je niz ortogonalan.

Propozicija 3.3.1. *Neka je Y L^1 martingal s obzirom na filtraciju $\mathcal{F}$. Tada Y možemo zapisati kao*

$$Y = Y' - Y'',$$

gdje su Y' i Y'' nenegativni martingali. Možemo izabrati Y' i Y'' takve da vrijedi

$$\sup_t \mathbb{E}\left[|Y_t|\right] = \sup_t \mathbb{E}\left[Y_t'\right] + \sup_t \mathbb{E}\left[Y_t''\right].$$

Dokaz. Neka su

$$Y_t' = \lim_n \mathbb{E}\left[Y_n^+|\mathcal{F}_t\right], \quad Y_t'' = \lim_n \mathbb{E}\left[Y_n^-|\mathcal{F}_t\right].$$

Ako uzmemo $s, t \in \mathbb{N}_0$ i $s < t$, teorem o monotonoj konvergenciji nam daje

$$\mathbb{E}\left[Y_t'|\mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[\lim_n \mathbb{E}\left[Y_n^+|\mathcal{F}_s\right]|\mathcal{F}_s\right] = \lim_n \mathbb{E}\left[Y_n^+|\mathcal{F}_s\right] = Y_s'$$

i analogno dobijemo $\mathbb{E}\left[Y_t''|\mathcal{F}_s\right] = Y_s''$. Pokažimo još da vrijedi $Y = Y' - Y''$:

$$\begin{aligned} Y_t' - Y_t'' &= \lim_n \mathbb{E}\left[Y_n^+|\mathcal{F}_t\right] - \lim_n \mathbb{E}\left[Y_n^-|\mathcal{F}_t\right] \\ &= \lim_n \mathbb{E}\left[Y_n^+ - Y_n^-|\mathcal{F}_t\right] = \lim_n \mathbb{E}\left[Y_n|\mathcal{F}_t\right] = Y_t. \end{aligned}$$

□

Teorem 3.3.1. *Neka je $Y = (Y_n)_{n=0}^\infty$ L^1-omeđeni martingal i neka je $H \cdot Y$ martingalna transformacija po predvidivom procesu $H = (H_n)_{n=0}^\infty$. Tada $H \cdot Y$ konvergira gotovo sigurno na skupu $A = \{H^* < \infty\}$, gdje je $H^* = \sup_n |(H \cdot Y)_n|$.*

Dokaz. Neka je Y uniformno ograničeni submartingal i $H^* \leq 1$. Definiramo $X_n = (H \cdot Y)_n - (H \cdot Y)_{n-1}$ i $D_n = Y_n - Y_{n-1}$ te imamo

$$|X_n| = |(H \cdot Y)_n - (H \cdot Y)_{n-1}| = |H_n(Y_n - Y_{n-1})| \leq |Y_n - Y_{n-1}| = |D_n|.$$

Zbog ortogonalnosti nizova $(D_n)_{n=0}^\infty$ i $(X_n)_{n=0}^\infty$ imamo

$$\mathbb{E}\left[(Y_n - Y_0)^2\right] = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^n D_k\right)^2\right] = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}\left[D_k^2\right] \geq \sum_{k=1}^n \mathbb{E}\left[X_k^2\right] = \mathbb{E}\left[(H \cdot Y)_n^2\right].$$

Dobili smo da je $(H \cdot Y)_n$ L^2-omeđeni martingal te prema teoremu o konvergenciji martingala $(H \cdot Y)_n$ konvergira g.s.

Svakom elementu iz Y možemo dodati isti proizvoljni broj bez da se $(D_n)_{n=0}^\infty$ promijeni. Zbog uniformne ograničenosti od Y možemo uzeti dovoljno veliki broj takav da vrijedi $Y_n \geq 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Kako je

$$\mathbb{E}\left[Y_{n-1}D_n\right] = \mathbb{E}\left[Y_{n-1}\mathbb{E}\left[D_n|\mathcal{F}_{n-1}\right]\right] \geq 0$$

imamo

$$\mathbb{E}\left[Y_n^2\right] = \mathbb{E}\left[(Y_{n-1} + D_n)^2\right] = \mathbb{E}\left[Y_{n-1}^2\right] + 2\mathbb{E}\left[Y_{n-1}D_n\right] + \mathbb{E}\left[D_n^2\right] \leq \mathbb{E}\left[Y_{n-1}^2\right] + \mathbb{E}\left[D_n^2\right]$$

te rekurzivno dobijemo

$$\mathbb{E}\left[Y_n^2\right] \geq \sum_{k=1}^n \mathbb{E}\left[D_n^2\right].$$

Neka je

$$\tilde{Y}_n = \sum_{k=1}^n \tilde{D}_k,$$

gdje je $\tilde{D}_1 = D_1$ i

$$\tilde{D}_n = D_n - \mathbb{E}\left[D_n|\mathcal{F}_{n-1}\right], \quad n \geq 2.$$

Tako definirani $\tilde{Y} = (\tilde{Y}_n)_{n=0}^{\infty}$ je martingal i njegova martingalna transformacija je

$$(H \cdot \tilde{Y})_n = \sum_{k=1}^{n} H_k \tilde{D}_k.$$

Kako je $\mathbb{E}\left[D_n | \mathcal{F}_{n-1}\right] \geq 0$, imamo

$$\mathbb{E}\left[\tilde{D}_n^2\right] = \mathbb{E}\left[(D_n - \mathbb{E}\left[D_n|\mathcal{F}_{n-1}\right])^2\right] \leq \mathbb{E}\left[D_n^2\right]$$

te vrijedi

$$\mathbb{E}\left[\tilde{Y}_n^2\right] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[D_k^2\right] \leq \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[\tilde{D}_k^2\right] \leq \mathbb{E}\left[Y_n^2\right].$$

Dobivamo da je $\tilde{Y} \in \mathrm{L}^2$ i zbog teorema o konvergenciji martingala (odnosno submartingala) znamo da $\tilde{Y}$, $(H \cdot \tilde{Y})$ i Y konvergiraju g.s. Kako je

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[D_k|\mathcal{F}_{k-1}\right] = Y_n - \tilde{Y}_n$$

znamo da i $\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[D_k|\mathcal{F}_{k-1}\right]$ konvergira g.s. Zbog nenegativnosti svakog sumanda tada konvergira i $\sum_{k=1}^{n} H_n \mathbb{E}\left[D_k|\mathcal{F}_{k-1}\right]$ g.s. Martingalnu transformaciju $H \cdot Y$ možemo zapisati kao

$$(H \cdot Y)_n = (H \cdot \tilde{Y})_n + \sum_{k=1}^{n} H_k \mathbb{E}\left[D_k|\mathcal{F}_{k-1}\right], \ n \geq 2$$

te imamo da i $(H \cdot Y)$ konvergira g.s.

Pretpostavimo sada da je $Y \in \mathrm{L}^1$. Prema prethodnoj propoziciji možemo Y rastaviti na $Y = Y' - Y''$, gdje su Y' i Y'' nenegativni martingali. Štoviše vrijedi i

$$H \cdot Y = H \cdot Y' - H \cdot Y''.$$

Nadalje, možemo pretpostaviti da je $Y \geq 0$. Ako je $c > 0$, tada $\bar{Y}_n = -\min(Y_n, c)$ definira uniformno ograničeni submartingal. Uzmimo proces $-H$ i promatramo martingalnu transformaciju od $\bar{Y}$ po $-H$. Prema ranije pokazanom vrijedi da $((-H) \cdot \bar{Y})$ konvergira g.s. Neka je

$$A_c = \{\omega \in \Omega : \sup_n Y(\omega) < \infty\}.$$

Tada za svaki $\omega \in A$ vrijedi

$$\begin{aligned}((-H)\cdot\bar{Y})_n(\omega) &= \sum_{m=1}^{n}(-H_m)(\bar{Y}_m - \bar{Y}_{m-1})(\omega)\\ &= \sum_{m=1}^{n}(-H_m)(-Y_m + Y_{m-1})(\omega)\\ &= \sum_{m=1}^{n}(H_m)(Y_m - Y_{m-1})(\omega) = (H\cdot Y)_n(\omega).\end{aligned}$$

Dobili smo da $(H \cdot Y)$ konvergira g.s. na skupu A_c. Zbog konvergencije martingala Y g.s. vrijedi $\mathbb{P}(\sup_n Y_n = \infty) = 0$ te uzimanjem da c teži prema beskonačno dobivamo da $(H \cdot Y)$ konvergira g.s.

Za dokazati teorem teorem uzmimo $c > 0$ i definiramo $\bar{H}_n = \mathbf{1}_{H_n<c}H$. Promatramo sada martingalnu transformaciju $(\bar{H} \cdot Y)$. Znamo da $(\bar{H} \cdot Y)$ konvergira g.s. te kako je $(\bar{H}\cdot Y) = (H\cdot Y)$ na skupu $B_c = \{\omega : \sup_n H_n(\omega) < c\}$ imamo da $(H\cdot Y)$ konvergira g.s. na B_c. Uzimanjem da $c \to \infty$ dobijemo da $(H \cdot Y)$ konvergira g.s. na skupu $\{\omega : \sup_n H_n(\omega) < \infty\}$.

□

Bibliografija

[1] N. Antonić, M. Vrdoljak, *Mjera i Integral*, PMF-Matematički odjel, Zagreb, 2001.

[2] R. Durett, *Probability: Theory and Examples*, četvrto izdanje, Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

[3] R. Kudžma, *Itō's formula for a random walk*, Litovski Matematicheski Sbornik 22 (1982), 122–127.

[4] R. Long, *Martingales Spaces and Inequalities*, Springer, Wiesbaden, 1993.

[5] P. E. Protter, *Stochastic integration and differential equations*, drugo izdanje, Stochastic Modelling and Applied Probability, Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[6] D. Revuz, M. Yor *Continuous martingales and Brownian motion*, treće izdanje, Fundamental Principles of Mathematical Sciences, Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[7] N. Sarapa, *Teorija vjerojatnosti*, Školska Knjiga, Zagreb, 2002.

Sažetak

U ovom diplomskom radu iskazani su i dokazani teoremi reprezentacije martingala s diskretnim vremenom. Glavni rezultati su jednodimenzionalni i višedimenzionalni teorem reprezentacije te apstraktni teorem reprezentacije. Dokazane su i neke od posljedica tih teorema kao što su: diskretna Itōva formula, prikaz varijable pomoću martingalne transformacije slučajne šetnje, Hinčinova nejednakost i konvergencija martingalne transformacije.

Summary

This thesis states and proves the discrete time martingale representation theorems. The main results are one-dimensional and multidimensional representation theorems and an abstract representation theorem. We also demonstrated some of the consequences of these theorems such as: discrete Itō's formula, representation of variables using martingale transforms of random walks, Hinčin's inequality and the convergence of the martingale transform.

Životopis

Zovem se Marija Vukić. Rođena sam 31. svibnja 1987. godine u Vinkovcima. Osnovnu školu sam završila u Štitatu, a srednju obrtničko-industrijsku u Županji. Akademske godine 2007./2008. upisala sam Preddiplomski sveučilišni studij *Matematika*, smjer nastavničnki na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Akademske godine 2011./2012. upisala sam Diplomski sveučilišni studij *Matematička statistika*, također na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu.