Hahn-Mazurkiewiczev teorem

Vukić, Slavica

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Slavica Vukić

HAHN-MAZURKIEWICZEV TEOREM

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc.dr.sc. Zvonko Iljazović

Zagreb, srpanj, 2015.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Cilj ovog rada je dokaz poznatog Hahn-Mazurkiewiczevog teorema koji daje karakterizaciju Peanovih kontinuuma, te istovremeno u potpunosti rješava problem nužnih i dovoljnih uvjeta koje topološki prostor mora zadovoljavati da bi bio neprekidna slika segmenta. Taj značajan rezultat u povijesti opće topologije paralelno su dokazali austrijski matematičar Hans Hahn i poljski matematičar Stefan Mazurkiewicz 1913. godine. Ovaj pristup dokazu preuzet je iz udžbenika za topologiju [1], te je ta knjiga osnovna literatura korištena u ovom radu.

U radu se podrazumijeva poznavanje osnova teorije skupova, matematičke analize, metričkih prostora i opće topologije. Pojmovi i rezultati koje ovdje koristimo, a ne navodimo, kao i dokazi nekih navedenih činjenica mogu se pronaći u bilo kojem udžbeniku za kolegije s preddiplomskog i diplomskog studija matematike, kao što su [2], [3], [4] i [5].

Rad je podjeljen u četiri poglavlja u kojima prezentiramo motivaciju za početak istraživanja u ovom smjeru, te pregledno iznosimo sve potrebno da bismo na kraju dokazali Hahn-Mazurkiewiczev teorem.

U prvom poglavlju spomenut ćemo neka matematička otkića s kraja 19.st. koja su bila od izuzetne važnosti za razvoj moderne topologije i između ostalog pokrenula zanimanje za problem karakterizacije prostora koji su neprekidna slika segmenta.

U prvom dijelu drugog poglavlja ponavljamo neke klasične rezulate iz opće topologije i dokazujemo Urysonov teorem metrizacije. Drugi dio posvećen je analizi svojstava Hausdorffovih kontinuuma. Prezentiramo jednu karakterizaciju segmenta, te pokazujemo da je Peanov kontinuum lukovima povezan prostor.

Naš pristup dokazu Hahn-Mazurkiewiczevog teorema uvelike ovisi o svojstvima Cantorovog skupa i bazira se na poznatom Aleksandrov-Hausdorffovom teoremu o tzv. univerzalnoj surjektivnosti Cantorovog skupa. Zato ćemo posebnu pažnju u trećem poglavlju posvetiti definiciji Cantorovog skupa i dokazu njegovih topoloških svojstava. Ovdje, a kasnije i za dokaz Aleksandrov-Hausdorffovog teorema treba nam pojam inverznog niza topoloških prostora i inverznog limesa, pa jedan odjeljak posvećujemo definiranju tih pojmova i dokazima činjenica koje kasnije koristimo. Na kraju dokazujemo karakterizaciju Cantorovog skupa.

U četvrtom poglavlju napokon dolazimo do iskaza i dokaza Hahn-Mazurkiewiczevog teorema. Prvo dokazujemo da je neprekidna slika segmenta Peanov kontinuum. Zatim ćemo dokazati Aleksandrov-Hausdorffov teorem, koji na kraju koristimo kao svojevrstan *ad hoc* trik u dokazu da je svaki Peanov kontinuum neprekidna slika segmenta.

Na kraju uvoda željela bih se zahvaliti mentoru, prof.dr.sc. Šimi Ungaru, na pomoći, strpljenju i pozitivnim komentarima prilikom izrade ovog diplomskog rada. Također bih se zahvalila i doc.dr.sc. Zvonku Iljazoviću, koji je ljubazno pristao voditi ovaj rad 2015. godine, unatoč ostalim obavezama.

1. Kriza intuicije (kratka povijest)

Zadnja dva desetljeća 19. stoljeća mogli bismo nazvati početkom nove matematičke ere. Cantorove kreativne ideje u formulaciji teorije skupova pokrenule su lavinu protuintuitivnih rezultata.

1878. godine Cantor je pokazao da su svake dvije konačnodimenzionalne mnogostrukosti ekvipotentne, što posebno znači da postoji bijekcija segmenta $[0,1]$ na hiperkocku $[0,1]^n$ proizvoljne konačne dimenzije. U svom pismu Dedekindu, Cantor kaže :

"Je le vois, mais je ne le crois pas!" (*"Vidim, ali ne vjerujem!"*)

Cantorovi rezultati potakli su brojne matematičare na dublje razmatranje vlastitih intuitivnih ideja, te se uviđala potreba za formalnom definicijom do tada neprecizno ili nikako formuliranih matematičkih koncepata. U tom smislu je pojam *krivulje* predstavljao značajnu poteškoću. Intuitivno bi krivulja bila "neprekidna putanja točke u prostoru". U to vrijeme, kad se opća topologija tek počela razvijati, bilo je uobičajeno promatrati krivulje "unutar" euklidskih prostora. Tako bi preciznije, krivulja u $\mathbb{R}^2$ bila slika neke funkcije $f = (f_1, f_2)\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$. Pitanje je bilo samo koje uvjete postaviti na koordinatne funkcije f_1 i f_2 kako bi definirali upravo onaj pojam koji se intuitivno veže uz pojam krivulje. 1882. godine francuski matematičar Camille Jordan predlaže zahtjev za neprekidnošću koordinatnih funkcija.

Međutim, Jordanov pokušaj definicije krivulje, iako na prvi pogled i intuitivno sasvim logičan, propao je nakon Peanovog genijalnog otkrića neprekidne surjekcije segmenta na čitav kvadrat, 1890. godine. Nakon Cantorovog otkrića bijekcije segmenta na kvadrat, Peanov rezultat bio je prirodna posljedica potrage za egzistencijom takvog neprekidnog preslikavanja. Peanova "krivulja koja ispunjava kvadrat" bila je svojevrstan šok za matematičku javnost u to vrijeme, kad se činilo očitim da neprekidna slika segmenta treba biti nešto "tanko" (jednodimenzionalno).

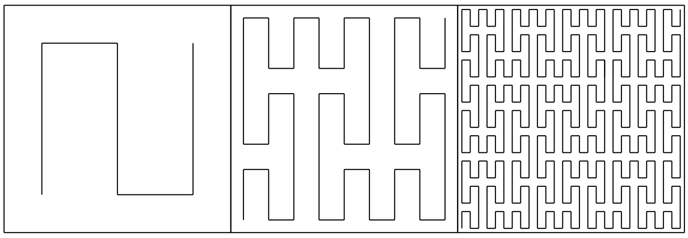
Danas surjektivna preslikavanja segmenta na višedimenzionalne topološke prostore zovemo Peanovim krivuljama.

Peanov rad ne uključuje ilustraciju konstrukcije takve "krivulje", već je on definira u smislu trijadskog zapisa brojeva iz segmenta [0,1], na sljedeći način:

Neka je $\sigma\colon \{0,1,2\} \to \{0,1,2\}$ permutacija definirana sa $\sigma(x) := 2 - x$.
Definiramo preslikavanje $f\colon [0,1] \to [0,1]^2$ s $f(0.x_1x_2x_3\ldots) := (y_1, y_2)$,
pri čemu je $x = 0.x_1x_2x_3\ldots$ trijadski zapis elementa $x \in [0,1]$, a trijadski zapis elemenata y_1 i y_2 iz $[0,1]$ je definiran na sljedeći način:
$y_1 := 0.x_1\sigma^{x_2}(x_3)\sigma^{x_2+x_4}(x_5)\ldots\sigma^{x_2+x_4+\cdots+x_{2n}}(x_{2n+1})\ldots$
$y_2 := 0.\sigma^{x_1}(x_2)\sigma^{x_1+x_3}(x_4)\ldots\sigma^{x_1+x_3+\cdots+x_{2n-1}}(x_{2n})\ldots$

Moguće je da Peano izabire ovakav pristup kako bi se ogradio od vlastite (eventualno krive) intuitivne procjene, a sigurno s namjerom da prezentira jedan takav dokaz u vrijeme kad su se grafički argumenti sustavno koristili u dokazima geometrijskih činjenica i smatrali se više ili manje prihvatljivima.

Ovako definirana Peanova krivulja, kao i sve kasnije definirane Peanove krivulje, može se dobiti kao limes nekog niza $(f_n)_n$ po dijelovima linearnih neprekidnih preslikavanja. Slika prikazuje prva tri preslikavanja u nizu za originalnu Peanovu krivulju.



U dokazu da niz $(f_n)_n$ teži neprekidnoj funkciji koristi se potpunost prostora $\mathcal{C}(I, I^2)$ neprekidnih preslikavanja segmenta u kvadrat. Vidimo da su prva tri preslikavanja u nizu i injekcije. Pokazuje se da su sva preslikavanja f_n u nizu injektivna, pa su i homeomorfizmi na svoju sliku, s obzirom da se radi o neprekidnim bijekcijama kompaktnog prostora na Hausdorffov prostor. Međutim, limes tog niza preslikavanja ne može biti homeomorfizam, s obzirom da kvadrat nema prereznih točaka, a sve točke segmenta, osim rubnih točaka su prerezne točke segmenta.

Nakon Peana, slične konstrukcije dali su D. Hilbert (1891.g.), E.H. Moore (1900.g.), H. Lebesgue (1904.g.), W. Sierpinski (1912.g.) i G.Poyla(1913.g).

Pokazuje se da su originalna Peanova krivulja i Hilbertova krivulja nigdje diferencijabilna preslikavanja. To je još jedno protuintuitivno svojstvo, s obzirom da je većina "korisnih" krivulja po dijelovima glatka. Lebesgueova krivulja je u tom smislu još čudnija, jer je diferencijabilna skoro svuda. Točnije, ta je krivulja diferencijabilna svuda, osim na Cantorovom skupu (koji je Lebesgueove mjere nula).

Detaljnije informacije o konstrukciji ovih krivulja, kao i dokazi navedenih svojstava mogu se pronaći u [6].

Iz Peanovog primjera jednostavno slijedi egzistencija neprekidnih preslikavanja segmenta na hiperkocku proizvoljne konačne dimenzije. Postojanje opisanih neprekidnih preslikavanja prirodno je pobudilo pitanje granica takvih "patoloških" primjera, tj. pitanje nužnih i dovoljnih uvjeta koje prostor mora zadovoljavati da bi bio neprekidna slika segmenta. 1908.g., A. Schoenflies daje karakterizaciju koja se mogla primijeniti samo na podskupove ravnine, pa kao takva nije bila zadovoljavajuća. Daljnja potraga za rješenjem ovog problema dovela je do novog topološkog koncepta lokalne povezanosti, a konačno rješenje neovisno pronalaze Hans Hahn i Stephan Mazurkiewicz 1913.g.

Da bi Hausdorffov prostor bio neprekidna slika segmenta nužno je i dovoljno da je on kompaktan, povezan i lokalno povezan metrički prostor.

Hahn-Mazurkiewiczev teorem pojavljuje se u mnogim matematičkim situacijama kao upozorenje da stvari nisu tako trivijalne kao što možda na prvi pogled izgledaju, i tu je prava vrijednost ovog teorema. Kao što Hahn kaže u svojim predavanja o "krizi intuicije" iz 1920. godine:

"Konstantno se uvjeravamo da je za odgovor i na najjednostvanija geometrijska pitanja, intuicija potpuno nesiguran vodič. Nemoguće je dopustiti da tako nepouzdano sredstvo bude baza bilo koje matematičke discipline..."

2. Kompaktnost i povezanost

U ovom poglavlju ponovit ćemo neke osnovne pojmove i klasične rezultate iz opće topologije. Dokazat ćemo Urysonov teorem metrizacije koji koristimo u poglavlju 4, kako bi pokazali da je neprekidna slika segmenta metrizabilan prostor. Nadalje, proučavamo strukturu kompaktnih povezanih prostora, te dokazujemo jednu korisnu karakterizaciju segmenta. Uvodimo pojmove lokalne povezanosti i povezanosti lukovima topološkog prostora, te koristimo dokazanu karakterizaciju segmenta da bismo pokazali da je kompaktan povezan i lokalno povezan metrički prostor lukovima povezan.

2.1 Neke činjenice o kompaktnim prostorima

Topološki prostor X je ***kompaktan*** ako svaki otvoren pokrivač prostora X sadrži konačan potpokrivač za X. Poznata je karakterizacija kompaktnih prostora pomoću centriranih familija zatvorenih skupova. Familija $\mathcal{F}$ podskupova od X je ***centrirana*** ako svaka konačna potfamilija od $\mathcal{F}$ ima neprazan presjek. Vrijedi da je prostor X kompaktan ako i samo ako svaka centrirana familija zatvorenih podskupova od X ima neprazan presjek.

Ponovimo nekoliko činjenica o kompaktnim prostorima, koje učestalo koristimo kroz čitav rad.

Teorem 2.1. *Zatvoren potprostor kompaktnog prostora je kompaktan.*

Teorem 2.2. *Kompaktan potprostor Hausdorffovog prostora je zatvoren.*

Teorem 2.3. *Neprekidna slika kompaktnog prostora je kompaktan prostor.*

Definicija 1. Neka je $f\colon X \to Y$ preslikavanje topoloških prostora. Kažemo da je f ***zatvoreno*** ako je za svaki zatvoren podskup A od X, $f(A)$ zatvoren u Y. Analogno, f je ***otvoreno*** ako je za svaki otvoren podskup U od X, $f(U)$ otvoren u Y.

Lema 2.4. *Neka je X kompaktan, Y Hausdorffov prostor i $f\colon X \to Y$ neprekidno preslikavanje. Tada je f zatvoreno. Ako je preslikavanje f k tome i bijekcija, onda je f homeomorfizam.*

Dokaz. Neka je $A \subseteq X$ zatvoren. Prema teoremu 2.1 A je kompaktan, pa je prema teoremu 2.3 $f(A)$ kompaktan. $f(A)$ je, dakle, kompaktan potprostor Hausdorffovog prostora Y, pa je zatvoren prema teoremu 2.2. Druga tvrdnja je očita.

■

Teorem 2.5. *Svaki kompaktan metrizabilan prostor ima prebrojivu bazu.*

Dokaz. Neka je (X, d) kompaktan metrički prostor. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ definiramo pokrivač $\mathcal{U}_n$ za X s $\mathcal{U}_n := \{B_d(x, \frac{1}{n}) : x \in X\}$ i neka je $\mathcal{V}_n := \{B_d(x_n^1, \frac{1}{n}), B_d(x_n^2, \frac{1}{n}), \ldots, B_d(x_n^{k_n}, \frac{1}{n})\}$ konačan potpokrivač od $\mathcal{U}_n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Pokažimo da je $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{V}_n$ prebrojiva baza za X. Neka je $x \in X$ i U okolina od x. Tada postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $B_d(x, \frac{1}{n}) \subseteq U$. $\mathcal{V}_{2n}$ pokriva X, pa postoji $i \in 1, \ldots, k_{2n}$ takav da je $x \in B_d(x_{2n}^i, \frac{1}{2n})$. Za proizvoljan $y \in B_d(x_{2n}^i, \frac{1}{2n})$ je $d(x, y) \leq d(x, x_{2n}^i) + d(x_{2n}^i, y) < \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}$, pa je $B_d(x_{2n}^i, \frac{1}{2n}) \subseteq B_d(x, \frac{1}{n}) \subseteq U$. ∎

Prisjetimo se aksioma separacije.

Definicija 2. Neka je X topološki prostor. X je ***T*₁** prostor ako su jednočlani skupovi zatvoreni u X. X je ***Hausdorffov*** ako za svake dvije različite točke $x, y \in X$ postoje disjunktni otvoreni skupovi U i V takvi da je $x \in U$ i $y \in V$. T_1 prostor X je ***regularan*** ako za svaku točku $x \in X$ i zatvoren skup A koji ne sadrži x, postoje disjunktni otvoreni skupovi U i V takvi da je $x \in U$ i $A \subseteq V$. T_1 prostor X je ***normalan*** ako za svaka dva disjunktna zatvorena skupa A i B u X postoje disjunktni otvoreni skupovi U i V takvi da je $A \subseteq U$ i $B \subseteq V$.

Lako se dokazuje sljedeća karakterizacija regularnih prostora.

Lema 2.6. *Neka je X T_1 prostor. X je regularan ako i samo ako za svaki $x \in X$ i okolinu U od x postoji okolina V od x takva da je $\overline{V} \subseteq U$.*

Sljedeće dvije leme daju neke uvjete koji osiguravaju normalnost prostora.

Lema 2.7. *Svaki kompaktan Hausdorffov prostor je normalan.*

Lema 2.8. *Regularan prostor s prebrojivom bazom je normalan.*

Dokaz. Neka je X regularan prostor s prebrojivom bazom $\mathcal{B}$ i A, B disjunktni, zatvoreni podskupovi od X. Za svaki $x \in A$ postoji okolina U od x koja ne siječe B. Prema lemi 2.6 postoji okolina V od x takva da je $\overline{V} \subseteq U$. Neka je $U_x \in \mathcal{B}$ takav da je $x \in U_x \subseteq V$. Familija $\mathcal{U} := \{U_x : x \in A\}$ pokriva A i prebrojiva je, pa neka je $\mathcal{U} = \{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Za svaki $x \in A$ je $\overline{U_n} \subseteq \overline{V} \subseteq U$, pa $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{U_n}$ ne siječe B. Analogno izaberemo prebrojivu familiju $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ otvorenih podskupova od X koja pokriva B, a $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{V_n}$ ne siječe A. $U := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$ i $V := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$ su otvoreni skupovi koji sadrže A i B respektivno, ali oni ne moraju biti disjunktni.

U slučaju da U i V nisu disjunktni, za svaki $n \in \mathbb{N}$ definiramo otvorene skupove $U'_n := U_n \setminus \bigcup_{i=1}^n \overline{V_n}$ i $V'_n := V_n \setminus \bigcup_{i=1}^n \overline{U_n}$. Familija $\{U'_n\}_n$ pokriva A i familija $\{V'_n\}_n$ pokriva B. Pokažimo da su skupovi $U' := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U'_n$ i $V' := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V'_n$ disjunktni. Pretpostavimo suprotno, tj. pretpostavimo da postoji $x \in U' \cap V'$. Tada je $x \in U'_j \cap V'_k$ za neke $j, k \in \mathbb{N}$, pa je $x \in U_j \cap V_k$. No, u slučaju da je $j \leq k$, $x \in V'_k$ povlači $x \notin U_j$, a u slučaju da je $j \geq k$, $x \in U'_k$ povlači $x \notin V_k$. U oba slučaja dobivamo kontradikciju.

Dakle, U' i V' su disjunktni, otvoreni skupovi koji sadrže A i B respektivno. ∎

Urysonova lema poznata je karakterizacija normalnih prostora.

Teorem 2.9 (**Urysonova lema**)**.** *Neka je X normalan prostor i A, B zatvoreni podskupovi od X. Tada postoji neprekidno preslikavanje $f : X \to [0, 1]$ takvo da je $f(A) = \{0\}$ i $f(B) = \{1\}$.*

Teorem 2.10 (**Urysonov teorem metrizacije**). *Svaki regularan prostor s prebrojivom bazom je metrizabilan.*

Dokaz. Pokazuje se da je produktna topologija na $\mathbb{R}^\omega$ inducirana metrikom $D\colon \mathbb{R}^\omega \times \mathbb{R}^\omega \to \mathbb{R}$ definiranom s $D(x,y) := \sup\{\frac{1}{n}\overline{d}(x_n, y_n) : n \in \mathbb{N}\}$, gdje je $x = (x_n)$, $y = (y_n)$, a $\overline{d}(a,b) := \min\{|a-b|, 1\}$ je standardna ograničena metrika na $\mathbb{R}$. Zato je $\mathbb{R}^\omega$ metrizabilan prostor.

Neka je X regularan prostor s prebrojivom bazom. Pokazat ćemo da X možemo smjestiti u $\mathbb{R}^\omega$ s produktnom topologijom.

Prema lemi 2.8, X je normalan. Dokažimo da postoji prebrojiva familija neprekidnih preslikavanja $f_n\colon X \to [0,1]$ sa svojstvom da za svaki $x_0 \in X$ i okolinu U od x_0 postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $f_n(x_0) > 0$ i $f_n(x) = 0$ za svaki $x \in X \setminus U$.

Neka je $\mathcal{B} := \{B_n\}_n$ prebrojiva baza za X. Za svaki par $n, m \in \mathbb{N}$ za koji vrijedi $\overline{B_n} \subseteq B_m$ koristeći Urysonovu lemu izaberimo neprekidno preslikavanje $g_{n,m}\colon X \to [0,1]$ takvo da je $g_{n,m}(\overline{B_n}) = 1$ i $g_{n,m}(X \setminus B_m) = \{0\}$. Prebrojiva familija $\mathcal{F} := \{g_{n,m}\}$ zadovoljava traženi uvjet. Neka je $x_0 \in X$, U okolina od x_0 i $B_m \in \mathcal{B}$ takav da je $x_0 \in B_m \subseteq U$. Prema lemi 2.6 postoji $B_n \in \mathcal{B}$ takav da je $x_0 \in B_n$ i $\overline{B_n} \subseteq B_m$. Tada za $g_{n,m} \in \mathcal{F}$ vrijedi $g_{n,m}(x_0) = 1$ i $g_{n,m}$ iščezava izvan U. Radi jednostavnijeg zapisa, nanižimo elemente familije $\mathcal{F}$, tj. neka je $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Definiramo preslikavanje $F\colon X \to \mathbb{R}^\omega$ s $F(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots)$. Dokažimo da je F smještenje. S obzirom da su sve koordinatne funkcije f_n neprekidne, a $\mathbb{R}^\omega$ ima produktnu topologiju, F je neprekidno. F je injekcija. Za $x, y \in X$, $x \neq y$, postoji okolina U od x koja ne sadrži y. Prema tome, postoji $f_n \in \mathcal{F}$ takav da je $f_n(x) > 0$ i $f_n(y) = 0$, pa je $F(x) \neq F(y)$.

Kako bi dokazali da je F homeomorfizam prostora X i slike $Z = F(X)$, pokažimo da je korestrikcija $F\colon X \to Z$ otvoreno preslikavanje. Neka je skup U otvoren u X, $z_0 \in F(U)$, te $x_0 \in U$ takav da je $F(x_0) = z_0$. Neka je $n \in \mathbb{N}$ takav da je $f_n(x_0) > 0$ i $f_n(X \setminus U) = \{0\}$. Definiramo $V := \pi_n^{-1}(\langle 0, \infty\rangle) \subseteq \mathbb{R}^\omega$, gdje je $\pi_n\colon \mathbb{R}^\omega \to \mathbb{R}$ standardna projekcija na n-tu koordinatu. Skup $W := V \cap Z$ je otvoren u Z i vrijedi $\pi_n(z_0) = \pi_n(F(x_0)) = f_n(x_0) > 0$, pa je $z_0 \in W$. Za svaki $z \in W$ je $\pi_n(z) \in \langle 0, \infty\rangle$ i postoji $x \in X$ takav da je $F(x) = z$. Tada je $f_n(x) = \pi_n(F(x)) = \pi_n(z) > 0$, a kako f_n iščezava izvan U, mora biti $x \in U$, odnosno $z = F(x) \in F(U)$. Dakle je $W \subseteq F(U)$. Pokazali smo da za svaku točku $z_0 \in F(U)$ postoji ovoren skup W u Z takav da je $z_0 \in W \subseteq F(U)$, odnosno $F(U)$ je otvoren u Z. ∎

2.2 Hausdorffovi kontinuumi

Kompaktan povezan Hausdorffov prostor zovemo ***kontinuum***. U ovom dijelu ponavljamo neke činjenice o povezanim prostorima. Dokazat ćemo nekoliko rezultata koji prirodno dolaze na ovom mjestu, iako neke od njih koristimo tek u poglavlju 3. Od sad nadalje zanimaju nas samo Hausdorffovi prostori, pa kad kažemo prostor, mislimo: Hausdorffov prostor.

Separacija topološkog prostora X je par {A, B} disjunktnih, nepraznih, otvorenih podskupova od X koji u uniji daju čitav prostor X. Rabit ćemo oznaku $X = A \sqcup B$. Prostor X je ***povezan*** ako ne postoji njegova separacija.

Teorem 2.11. *Neka je $X = C \sqcup D$ separacija prostora X i Y povezan potprostor od X. Tada je ili $Y \subseteq C$ ili $Y \subseteq D$.*

Teorem 2.12. *Unija povezanih potprostora prostora X koji imaju zajedničku točku je povezana.*

Teorem 2.13. *Neka je Y povezan potprostor prostora X. Ako je $Y \subseteq Z \subseteq \overline{Y}$, onda je Z povezan.*

Definirajmo relaciju $\sim$ na prostoru X na sljedeći način: za $x, y \in X$ je $x \sim y$ ako i samo ako postoji povezan potprostor Y od X koji sadrži a i b.

Lako se provjerava da je $\sim$ relacija ekvivalencije. Klase ekvivalencije s obzirom na relaciju $\sim$ zovemo ***komponente povezanosti*** (kratko: ***komponente***) prostora X.

Komponente povezanosti čine, dakle, particiju skupa X, pa su međusobno disjunktne i u uniji daju čitav X, a lako se pokaže da su one i povezane.

Definirajmo još jednu relaciju na prostoru X na sljedeći način: za $x, y \in X$ je $x \simeq y$ ako i samo ne postoji separacija $X = A \sqcup B$ takva da je $x \in A$ i $y \in B$. Relacija $\simeq$ je također relacija ekvivalencije. Pripadne klase ekvivalencije zovemo ***kvazikomponente*** prostora X. Prema tome, kvazikomponente čine particiju skupa X. One ne moraju biti povezane. Međutim, vrijedi sljedeće.

Teorem 2.14. *Komponente i kvazikomponente prostora X su zatvorene u X. Svaka komponenta prostora X sadržana je u nekoj kvazikomponenti prostora X.*

Dokaz. Ako je C komponenta prostora X, ona je nužno zatvorena, jer je $\overline{C}$ povezan i prema tome je čitav sadržan u C. Neka je Q kvazikomponenta prostora X, $x \in Q$ i $y \in \overline{Q}$. Pretpostavimo da vrijedi $x \not\simeq y$, tj. postoji separacija $X = U \sqcup V$ takva da je $x \in U$ i $y \in V$. Tada je $Q \subseteq U$, pa je V otvorena okolina točke y koja ne siječe Q, što je u kontradikciji s pretpostavkom da je $y \in \overline{Q}$. Dakle, $Q = \overline{Q}$, pa je skup Q zatvoren u X. Kvazikomponente su disjunktni zatvoreni podskupovi od X, pa svaka komponenta, jer je povezana, mora biti sadržana u nekoj od kvazikomponenata. ■

Očito je da se općenito skup komponenata nekog prostora X ne mora podudarati sa skupom njegovih kvazikomponenata. Međutim, pokazat ćemo da u kompaktnom Hausdorffovom prostoru to vrijedi. Ta činjenica i sljedeća lema važni su argumenti u dokazu da je svaki Peanov kontinuum lukovima povezan, u što ćemo se uskoro uvjeriti.

Lema 2.15. *Neka su a i b različite točke kompaktnog prostora X i neka je $\{F_\alpha\}_{\alpha \in I}$ familija zatvorenih potprostora od X, linearno uređena inkluzijom. Ako za svaki $\alpha \in I$, a i b leže u istoj kvazikomponenti od F_α, tada a i b leže u istoj kvazikomponenti potprostora $\bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha$ od X.*

Dokaz. Neka je $F = \bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha$ i pretpostavimo suprotno, tj. postoji separacija $F = A \sqcup B$ takva da je $a \in A$ i $b \in B$. F je zatvoren i A i B su zatvoreni u F, pa su zatvoreni i u X. Prema lemi 2.7, X je normalan, pa postoje disjunktni otvoreni poskupovi U i V od X takvi da je $A \subseteq U$ i $B \subseteq V$.
$G_\alpha := F_\alpha \cap (X \backslash (U \cup V))$ je neprazan. U protivnom bi vrijedilo $F_\alpha = F_\alpha \cap (U \cup V) = (F_\alpha \cap U) \cup (F_\alpha \cap V)$, pa bi $F_\alpha \cap U$ i $F_\alpha \cap V$ separirali a i b u F_α.

Familija $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$ je linearno uređena inkluzijom, pa je to centrirana familija zatvorenih podskupova od X. Zato je $\bigcap_{\alpha \in I} G_\alpha$ neprazan i vrijedi $\bigcap_{\alpha \in I} G_\alpha \subseteq F$. Iz toga slijedi da $X \backslash (U \cup V)$ siječe F, a to je u kontradikciji s činjenicom da je $F \subseteq U \cup V$. ■

Lema 2.16. *Neka je X kompaktan prostor, a i b točke u X koje leže u istoj kvazikomponenti prostora X. Tada postoji kontinuum $K \subseteq X$ koji sadrži a i b.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{F} := \{F_\alpha\}_{\alpha \in I}$ familija svih zatvorenih potprostora od X takvih da a i b leže u istoj kvazikomponenti od F_α. $X \in \mathcal{F}$, pa je familija $\mathcal{F}$ neprazna. Parcijalno uredimo $\mathcal{F}$ inkluzijom i prema Hausdorffovom principu maksimalnosti izaberemo neki maksimalan lanac $\mathcal{K} = \{K_\beta\}_{\beta \in J} \subseteq \mathcal{F}$. Prema prethodnoj lemi, točke a i b leže u istoj kvazikomponenti zatvorenog potprostora $K := \bigcap_{\beta \in J} K_\beta$, pa je $K \in \mathcal{F}$. K je očito minimum lanca $\mathcal{K}$. Pretpostavimo da K nije povezan i neka je $K = K_1 \sqcup K_2$ neka separacija od K. Skup $\{a, b\}$ mora biti sadržan ili u K_1 ili u K_2, pa neka je, na primjer, $\{a, b\} \subseteq K_1$. Kad bi postojala separacija $K_1 = H_1 \sqcup H_2$ takva da je $a \in H_1$ i $b \in H_2$, onda bi $\{H_1 \cup K_2, H_2\}$ bila separacija od K, $a \in H_1 \cup K_2$ i $b \in H_2$, suprotno činjenici da je $K \in \mathcal{F}$. Dakle, $K_1 \in \mathcal{F}$, a kao podskup od K je usporediv sa svakim elementom lanca $\mathcal{K}$. Međutim, K_1 je pravi podskup od K, pa je lanac $\mathcal{K}_1 := \mathcal{K} \cup \{K_1\} \subseteq \mathcal{F}$ strogo veći od lanca $\mathcal{K}$, što je u kontradikciji s maksimalnošću od $\mathcal{K}$. Dakle, K je povezan, a kao presjek zatvorenih skupova je K zatvoren, pa je kompaktan. ■

Teorem 2.17. *U kompaktnom prostoru X svaka kvazikomponenta je komponenta.*

Dokaz. Neka je Q kvazikomponenta prostora X i $a \in Q$. Prema lemi 2.16, za svaku točku $b \in Q$ postoji kontinuum $K_b \subseteq X$ takav da je $\{a, b\} \subseteq K_b$. Prema teoremu 2.11 K_b je sadržan u nekoj komponenti povezanosti C_b prostora X, a prema teoremu 2.14 je tada $C_b \subseteq Q$. Kako je $a \in \bigcap_{b \in Q} K_b$, prema teoremu 2.12 je kvazikomponenta $Q = \bigcup_{b \in Q} K_b$ povezana, pa je očito $Q = C_b$ za svaki $b \in Q$. ■

Dolazimo do krajnjeg cilja u ovom dijelu, a to je pokazati da "između" komponente kompaktnog prostora i otvorenog skupa koji sadrži tu komponentu postoji neki otvoren i zatvoren skup. Taj rezultat bit će od koristi u poglavlju 3 za dokaz karakterizacije Cantorovog skupa. Dokažimo prvo dvije pomoćne leme.

Lema 2.18. *Neka je X kompaktan prostor, C komponenta povezanosti od X i $p \in X \backslash C$. Tada postoji separacija $X = U \sqcup V$ takva da je $p \in U$ i $C \subseteq V$.*

Dokaz. Neka je $p \in X \setminus C$. C je i kvazikomponenta od X, pa za svaki $q \in C$ postoji separacija $X = U_q \sqcup V_q$ takva da je $p \in U_q$ i $q \in V_q$. C je zatvoren podskup od X pa je kompaktan. Familija $\{V_q : q \in C\}$ pokriva C, pa postoji konačan potpokrivač $\{V_{q_1}, \ldots, V_{q_n}\}$ za C. $U := \bigcap_{i=1}^n U_{q_i}$ i $V := \bigcup_{i=1}^n V_{q_i}$ su disjunktni otvoreni podskupovi od X, $p \in U$, $C \subseteq V$ i $U \cup V = X$. ■

Lema 2.19. *Neka je X kompaktan prostor, C komponenta povezanosti od X i F zatvoren podskup od $X \setminus C$. Tada postoji separacija $X = U \sqcup V$ takva da je $F \subseteq U$ i $C \subseteq V$.*

Dokaz. Prema prethodnoj lemi, za svaku točku $p \in F$ postoji separacija $X = U_p \sqcup V_p$ takva da je $p \in U_p$ i $C \subseteq V_p$. F je kompaktan i familija $\{U_p : p \in F\}$ pokriva F, pa postoji konačan potpokrivač $\{U_{p_1}, \ldots, U_{p_n}\}$ za F. $U := \bigcup_{i=1}^{n} U_{p_i}$ i $V := \bigcap_{i=1}^{n} V_{p_i}$ su disjunktni otvoreni podskupovi od X, $F \subseteq U$, $C \subseteq V$ i $U \cup V = X$. ■

Napokon, vrijedi:

Teorem 2.20. *Neka je C komponenta povezanosti kompaktnog prostora X i U otvoren podskup od X koji sadrži C. Tada postoji skup V, otvoren i zatvoren u X, takav da je $C \subseteq V \subseteq U$.*

Dokaz. $X \setminus U$ je zatvoren, pa prema prethodnoj lemi, postoji separacija $X = U_1 \sqcup V$ takva da je $X \setminus U \subseteq U_1$ i $C \subseteq V$. V i U_1 su disjunktni, pa je V disjunktan s $X \setminus U$, tj. $V \subseteq U$. Kako je $\{U_1, V\}$ separacija od X, V je i otvoren i zatvoren u X. ■

2.3 Strukturna svojstva kontinuuma

Često se struktura topološkog prostora opisuje pomoću kontinuuma koje prostor sadrži. U ovom dijelu, cilj je pronaći dovoljne uvjete koje Hausdorffov prostor, odnosno njegova struktura u vidu potkontinuuma, mora zadovoljavati da bi on bio homeomorfan segmentu u $\mathbb{R}$.

Definicija 3. Neka je X povezan prostor. Točka $x \in X$ je ***prerezna točka*** prostora X ako prostor $X \setminus \{x\}$ nije povezan.

Sve točke segmenta u $\mathbb{R}$, osim rubnih točaka, su prerezne točke tog kontinuuma. Pokazat ćemo da je svaki metrizabilan kontinuum sa samo dvije "neprerezne" točke topološki ekvivalentan segmentu. U tome će nam pomoći sljedeći rezultati.

Lema 2.21. *Svaki nedegeneriran kontinuum X ima najmanje dvije točke koje nisu prerezne.*

Dokaz. Neka je N skup svih točaka prostora X koje nisu prerezne. Pretpostavimo suprotno, tj. $|N| \leq 1$. Neka je $x_0 \in X \setminus N$ i $X \setminus \{x_0\} = U_{x_0} \sqcup V_{x_0}$ neka separacija. U skupu N je najviše jedna točka, pa je on čitav sadržan ili u U_{x_0} ili u V_{x_0}, pa recimo da je $N \subseteq V_{x_0}$. Za svaki $x \in U_{x_0}$ fiksirajmo separaciju $X \setminus \{x\} = U_x \sqcup V_x$ tako da je $x_0 \in V_x$.

Pokažimo da je $U_x \cup \{x\}$ povezan potprostor od X. $X \setminus \{x\}$ je otvoren u X, pa su skupovi U_x i V_x, koji su otvoreni u $X \setminus \{x\}$, otvoreni i u X, odnosno $U_x \cup \{x\}$ i $V_x \cup \{x\}$ su zatvoreni u X. Kad bi postojala separacija $U_x \cup \{x\} = U \sqcup V$ i recimo da je $x \in U$, onda bi $\{V_x \cup \{x\} \cup U, V\}$ bila separacija od X, s obzirom da su $V_x \cup \{x\} \cup U$ i V zatvoreni u X. Dakle, $U_x \cup \{x\}$ je povezan. Na sličan način se pokaže da je $V_x \cup \{x\}$ povezan potprostor od X.

$x_0 \in V_x$, a $X \setminus \{x_0\}$ je otvoren u X, pa je $U_x \cup \{x\}$ povezan i kao potprostor od $X \setminus \{x_0\}$. Slično se pokaže da je za proizvoljan $y \in U_x$, $V_x \cup \{x\}$ povezan potprostor od $X \setminus \{y\}$.

Kako je $U_x \cup \{x\}$ povezan potprostor od $X \setminus \{x_0\}$ koji siječe U_{x_0}, mora biti $U_x \cup \{x\} \subseteq U_{x_0}$. Dakle, za svaki $x \in U_{x_0}$ je $U_x \subseteq U_{x_0}$

Parcijalno uredimo familiju $\mathcal{F} := \{U_x : x \in U_{x_0}\}$ inkluzijom i koristeći Hausdorffov princip maksimalnosti izaberemo neki maksimalan lanac $\{U_{x_\alpha} : \alpha \in I\}$ u $\mathcal{F}$.

Vrijedi $\bigcap_{\alpha \in I} U_{x_\alpha} = \bigcap_{\alpha \in I}(U_{x_\alpha} \cup \{x_\alpha\})$. Pretpostavimo suprotno, tj. postoji $y \in \bigcap_{\alpha \in I}(U_{x_\alpha} \cup \{x_\alpha\}) \setminus \bigcap_{\alpha \in I} U_{x_\alpha}$. Tada je $y = x_\beta$ za neki $\beta \in I$ i $x_\beta \in U_{x_\alpha}$ za svaki $\alpha \in I$, $\alpha \neq \beta$. U_{x_β} je minimalni element linearno uređenog skupa $\{U_{x_\alpha} : \alpha \in I\}$, jer kad bi postojao element U_{x_α} tog skupa manji od U_{x_β}, onda bi vrijedilo $x_\beta \in U_{x_\alpha} \subseteq U_{x_\beta}$. Ako je $b \in U_{x_\beta}$, onda je $b \in U_{x_0}$ jer je $U_{x_\beta} \subseteq U_{x_0}$. Tada je $V_{x_\beta} \cup \{x_\beta\}$ povezan potprostor od $X \setminus \{b\}$ i $x_0 \in V_{x_\beta} \cap V_b$, pa je $V_{x_\beta} \cup \{x_\beta\} \subseteq V_b$. No, tada je $U_b \cup \{b\} \subseteq U_{x_\beta}$, odnosno U_b je strogo manji od U_{x_β}, što je u kontradikciji s minimalnošću od U_{x_β}. Dakle, ne postoji $y \in \bigcap_{\alpha \in I}(U_{x_\alpha} \cup \{x_\alpha\}) \setminus \bigcap_{\alpha \in I} U_{x_\alpha}$.

$\{U_{x_\alpha} : \alpha \in I\}$ je linearno uređena familija skupova, pa je centrirana. Zato je $\{U_{x_\alpha} \cup \{x_\alpha\} : \alpha \in I\}$ centrirana familija zatvorenih skupova, pa postoji točka $p \in \bigcap_{\alpha \in I}(U_{x_\alpha} \cup \{x_\alpha\}) = \bigcap_{\alpha \in I} U_{x_\alpha}$. Vrijedi $p \in U_{x_0}$, pa postoji separacija $X \setminus \{p\} = U_p \sqcup V_p$ i za svaki $\alpha \in I$ je $V_{x_\alpha} \cup \{x_\alpha\} \subseteq V_p$. Posebno je $x_\alpha \in V_p$, pa je $U_p \cup \{p\} \subseteq U_{x_\alpha}$. Dakle, U_p je usporediv s U_{x_α} za svaki $\alpha \in I$, ali $p \notin U_p$, pa je familija $\{U_p\} \cup \{U_{x_\alpha} : \alpha \in I\}$ lanac koji je strogo veći od lanca $\{U_{x_\alpha} : \alpha \in I\}$, što je u kontradikciji s maksimalnošću od $\{U_{x_\alpha} : \alpha \in I\}$. Dakle, mora biti $|N| \geq 2$. ■

Teorem 2.22. *Neka je X nedegeneriran kontinuum i N skup svih točaka iz X koje nisu prerezne. Tada niti jedan pravi potkontinuum od X ne sadrži N.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. postoji pravi potkontinuum $Y \subset X$, takav da je $N \subseteq Y$. Neka je $x \in X \setminus Y$. Točka x je prerezna točka prostora X, pa postoji separacija $\{U, V\}$ od $X \setminus \{x\}$ i neka je npr. $Y \subseteq U$. Tada je $N \subseteq U$, pa su sve točke iz V prerezne točke od X. Potprostor $V \cup \{x\}$ je povezan i zatvoren, pa je $V \cup \{x\}$ kontinuum, a kako je V neprazan, $V \cup \{x\}$ sadrži barem dvije točke. Prema lemi 2.21 $V \cup \{x\}$ ima bar dvije točke koje nisu prerezne za $V \cup \{x\}$ i neka je $y \in V$ jedna takva točka. Tada je $(V \cup \{x\}) \setminus \{y\}$ povezan. Potprostor $U \cup \{x\}$ je povezan, pa je, prema teoremu 2.12, $X \setminus \{y\} = (U \cup \{x\}) \cup ((V \cup \{x\}) \setminus \{y\})$ povezan potprostor od X, što je u kontradikciji s činjenicom da su sve točke iz V prerezne točke prostora X. ■

Korolar 2.23. *Neka je x prerezna točka nedegeneriranog kontinuuma X i $X \setminus \{x\} = U \sqcup V$ neka separacija potprostora $X \setminus \{x\}$. Tada svaki od skupova U i V sadrži barem jednu točku koja nije prerezna točka skupa X.*

Kažemo da prerezna točka x prostora X ***separira točke*** p i q iz X, ako p i q leže u različitim kvazikomponentama potprostora $X \setminus \{x\}$.

Neka su p i q točke povezanog prostora X. Označimo s $E(p, q)$ podskup od X koji se sastoji od točaka p i q i svih prereznih točaka od X koje separiraju p i q. Možda takve i ne postoje, u kom slučaju je $E(p, q) = \{p, q\}$. Definiramo relaciju $\prec$ na $E(p, q)$ na sljedeći način: Za različite točke $x, y \in E(p, q)$ vrijedi $x \prec y$ ako je ili $x = p$ ili x separira p i y u X. Pokazat ćemo da je $\prec$ linearni uređaj na $E(p, q)$, pa je iz definicije očito da je

p minimum, a q maksimum skupa $E(p,q)$. Uređaj $\prec$ na $E(p,q)$ zovemo ***separacijski uređaj***.

Teorem 2.24. *Neka je X povezan prostor. Za svake dvije različite točke $p, q \in X$ je relacija $\prec$ linearan uređaj na skupu $E(p,q)$.*

Dokaz. Antirefleksivnost relacije $\prec$ je očita.

Neka su $x, y \in E(p,q) \setminus \{p\}$ takvi da je $x \prec y$ i $\{U_x, V_x\}$ neka separacija prostora $X \setminus \{x\}$ takva da je $p \in U_x$, a $y \in V_x$. Kao u dokazu leme 2.21 pokazuje se da su $U_x \cup \{x\}$ i $V_x \cup \{x\}$ povezani potprostori od X.

Neka su sad x i y različite točke skupa $E(p,q) \setminus \{p,q\}$, $\{U_x, V_x\}$ separacija prostora $X \setminus \{x\}$ i $\{U_y, V_y\}$ separacija prostora $X \setminus \{y\}$. Ako je $y \in V_x$, onda je $U_x \cup \{x\}$ povezan potprostor od $X \setminus \{y\}$, jer kad bi postojala separacija $\{U, V\}$ od $U_x \cup \{x\}$ u $X \setminus \{y\}$, onda bi, s obzirom da je potprostor $X \setminus \{y\}$ otvoren u X, $\{U, V\}$ bila separacija od $U_x \cup \{x\}$ u X, a to ne može biti. Ako je $y \in U_x$, slično se pokaže da je $V_x \cup \{x\}$ povezan potprostor od $X \setminus \{y\}$.

Neka su x i y različiti elementi skupa $E(p,q) \setminus \{p,q\}$ i $\{U_x, V_x\}$ separacija prostora $X \setminus \{x\}$ takva da je $p \in U_x$, a $q \in V_x$. Ako je $y \in V_x$, onda x separira točke p i y u X, tj. vrijedi $x \prec y$. Ako je pak $y \in U_x$ i $\{U_y, V_y\}$ separacija prostora $X \setminus \{y\}$ takva da je $p \in U_y$, a $q \in V_y$. $V_x \cup \{x\}$ je povezan potprostor od $X \setminus \{y\}$ i kao takav je u potpunosti sadržan u V_y, s obzirom da je $q \in (V_x \cup \{x\}) \cap V_y$. Posebno je $x \in V_y$, tj. $y \prec x$. Dakle, svaka dva različita elementa od $E(p,q) \setminus \{p,q\}$ su usporediva.

Ostaje pokazati tranzitivnost. Neka su $x, y, z \in E(p,q) \setminus \{p,q\}$, $x \prec y$ i $y \prec z$. Neka je $\{U_x, V_x\}$ separacija prostora $X \setminus \{x\}$ takva da je $p \in U_x$ i $y \in V_x$ i $\{U_y, V_y\}$ separacija prostora $X \setminus \{y\}$ takva da je $p \in U_y$ i $z \in V_y$. $U_x \cup \{x\}$ je povezan potprostor od $X \setminus \{y\}$ i kao takav je u potpunosti sadržan u U_y, jer je $p \in (U_x \cup \{x\}) \cap U_y$. Posebno je $x \in U_y$, pa je $V_y \cup \{y\}$ povezan potprostor od $X \setminus \{x\}$, a kako je $y \in (V_y \cup \{y\}) \cap V_x$, vrijedi da je $V_y \cup \{y\} \subseteq V_x$. Zato je $z \in V_x$, pa x separira p i z u X, tj. vrijedi $x \prec z$. ■

Prije nego nastavimo, ponovimo neke pojmove iz teorije skupova, koje koristimo u daljnjem tekstu.

Neka su $(A, \leq)$ i $(B, \preceq)$ parcijalno uređeni skupovi. Kažemo da funkcija $f \colon A \to B$ ***čuva uređaj*** ako za sve $x, y \in A$ takve da je $x \leq y$ vrijedi da je $f(x) \preceq f(y)$. Bijekciju $f \colon A \to B$ koja čuva uređaj zovemo ***sličnost***. Lako se pokaže da, ako je preslikavanje f sličnost, tada i f^{-1} čuva uređaj. Ako postoji sličnost $f \colon A \to B$, kažemo da su $(A, \leq)$ i $(B, \preceq)$ ***istog uređajnog tipa*** ili da su ***slični***.

Ako linearno uređene skupove $(A, \leq)$ i $(B, \preceq)$ promatramo kao topološke prostore s pripadnim uređajnim topologijama i ako je $f \colon A \to B$ sličnost, tada f i f^{-1} preslikavaju interval u interval i zraku u zraku, pa su f i f^{-1} neprekidna preslikavanja, odnosno f je homeomorfizam.

Linearno uređen skup $(A, <)$ je ***gust*** ako sadrži barem dva elementa, i za sve $x, y \in A$ takve da je $x < y$ postoji $z \in A$ takav da je $x < z < y$. Ovaj pojam koristi se neovisno o topologiji na skupu i valja ga razlikovati od pojma gustoće nekog podskupa topološkog prostora, koja ovisi o topologiji tog prostora.

Neka je $(S, <)$ linearno uređen skup. Particiju (A, B) skupa S koja ima svojstvo da za sve $a \in A$ i $b \in B$ vrijedi da je $a < b$, nazivamo ***prerez*** skupa S. Prerez skupa S je ***Dedekindov prerez***, ako vrijedi:
a) skup A ima najveći element, a B nema najmanji element ili
b) skup A nema najveći element, a B ima najmanji element.

Za linearno uređen skup S takav da je svaki prerez od S Dedekindov, kažemo da je ***neprekidan u Dedekindovom smislu***.

Skup $\mathbb{R}$ realnih brojeva je neprekidan u Dedekindovom smislu. Pokazuje se da je, uz ostale aksiome, Cantorov aksiom potpunosti ekvivalentan aksiomu da je svaki prerez u $\mathbb{R}$ Dedekindov, pa se skup realnih brojeva može definirati i na taj način.

Trebat će nam i sljedeći teorem o uređajnoj karakterizaciji skupa $\mathbb{Q}$.

Teorem 2.25. *Neka je $(A, <)$ prebrojiv, gust linearno uređen skup koji nema ni najmanji ni najveći element. Tada postoji sličnost $f : A \to \mathbb{Q}$.*

Sljedeći rezultati daju koristan opis strukture kontinuuma i vode nas korak dalje k željenoj karakterizaciji segmenta.

Lema 2.26. *Neka je X povezan prostor i p i q različite točke iz X. Tada je relativna topologija $\mathcal{R}$ na $E(p, q)$ finija od uređajne topologije $\mathcal{S}$ na $E(p, q)$.*

Dokaz. Ako je $E(p, q) = \{p, q\}$, onda je $\mathcal{R}$ diskretna topologija na $E(p, q)$, pa vrijedi $\mathcal{S} = \{E(p, q), \langle p, q\rangle, [p, q\rangle, \langle p, q]\} = \{E(p, q), \emptyset, \{p\}, \{q\}\} = \mathcal{R}$.

Neka je $E(p, q) \setminus \{p, q\} \neq \emptyset$. $E(p, q)$ je očito u $\mathcal{R}$. Pokazat ćemo da je svaki element podbaze za $\mathcal{S}$ u $\mathcal{R}$, tj. da su zrake u $E(p, q)$ u $\mathcal{R}$. Zrake u $E(p, q)$ su oblika $[p, x\rangle$ ili $\langle x, q]$, gdje je x proizvoljan element skupa $E(p, q) \setminus \{p, q\}$. Neka je $x \in E(p, q) \setminus \{p, q\}$ i $\{U_x, V_x\}$ neka separacija prostora $X \setminus \{x\}$ takva da je $p \in U_x$ i $q \in V_x$. U_x i V_x su otvoreni u X, jer je skup $X \setminus \{x\}$ otvoren u X. Pokažimo da je $[p, x\rangle = U_x \cap E(p, q)$.
Ako je $y \in [p, x\rangle$, odnosno $y \prec x$, onda postoji separacija $\{U_y, V_y\}$ prostora $X \setminus \{y\}$ takva da je $p \in U_y$ i $x \in V_y$. Kao u dokazu teorema 2.24, vrijedi da je $U_y \cup \{y\} \subseteq U_x$, pa je posebno $y \in U_x \cap E(p, q)$. Dakle, vrijedi $[p, x\rangle \subseteq U_x \cap E(p, q)$. Pokažimo obratnu inkluziju. Neka je $y \in U_x \cap E(p, q)$ i $\{U_y, V_y\}$ separacija prostora $X \setminus \{y\}$ takva da je $p \in U_y$ i $q \in V_y$, onda je $V_x \cup \{x\} \subseteq V_y$, pa y separira p i x u X, tj. $y \prec x$, odnosno $y \in [p, x\rangle$. Dakle, vrijedi $U_x \cap E(p, q) \subseteq [p, x\rangle$, pa je $[p, x\rangle = U_x \cap E(p, q)$.
Također vrijedi $\langle x, q] = V_x \cap E(p, q)$. Ako je $y \in \langle x, q]$, onda postoji separacija $\{U_x^y, V_x^y\}$ prostora $X \setminus \{x\}$ takva da je $p \in U_x^y$ i $y \in V_x^y$. Neka je $\{U_y, V_y\}$ separacija prostora $X \setminus \{y\}$ takva da je $p \in U_y$ i $q \in V_y$. Tada je $U_x^y \cup \{x\} \subseteq U_y$, iz čega slijedi da je $V_y \cup \{y\} \subseteq V_x$, pa je $y \in V_x \cap E(p, q)$. Obratno, ako je $y \in V_x \cap E(p, q)$, onda je očito $x \prec y$, odnosno $y \in \langle x, q]$. ■

Teorem 2.27. *Neka je* $(X, \mathcal{T})$ *kontinuum u kojem samo dvije točke* a *i* b *nisu prerezne. Tada je* $X = E(a, b)$ *i topologija* $\mathcal{T}$ *se podudara sa topologijom* $\mathcal{S}$ *na* X*, dobivenom od separacijskog uređaja na* $E(a, b)$*.*

Dokaz. Pretpostavimo da postoji $x \in X \setminus E(a, b)$. Točka x je prerezna točka skupa X, pa postoji separacija $\{U, V\}$ prostora $X \setminus \{x\}$. Kako x ne separira a i b u X, vrijedi $\{a, b\} \subseteq U$ ili $\{a, b\} \subseteq V$, a to je u kontradikciji s korolarom 2.23, jer su a i b jedine točke u X koje nisu prerezne. Dakle, vrijedi $X = E(a, b)$.

Prethodni teorem kaže da je $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$. Pokažimo da je svaki skup $U \in \mathcal{T}$ unija elemenata baze uređajne topologije $\mathcal{S}$, tj. da za svaki $U \in \mathcal{T}$ i točku $x \in U$ postoje $y_0 \prec x$ i $z_0 \succ x$ takvi da je $\langle y_0, z_0 \rangle \subseteq U$, tj. $\langle y_0, x] \subseteq U$ i $[x, z_0\rangle \subseteq U$.

Pogledajmo najprije slučaj kada je $x \in X \setminus \{a, b\} = E(a, b) \setminus \{a, b\}$, i pretpostavimo suprotno, tj. da za sve y, z takve da je $y \prec x \prec z$, vrijedi ili $\langle y, x] \nsubseteq U$ ili $[x, z\rangle \nsubseteq U$, ili oboje.

Promotrimo familiju svih poluotvorenih intervala $\langle y, x]$, $y \prec x$, i pretpostavimo da $\langle y, x]$ nije sadržan u U niti za jedan y. Zbog Hausdorffovog principa maksimalnosti, postoji maksimalna inkluzijom linearno uređena familija poluotvorenih intervala $\mathcal{F} = \{\langle y_\alpha, x]\}_{\alpha \in J}$. Zbog maksimalnosti je $\bigcap_{\alpha \in J} \langle y_\alpha, x] = \{x\}$. Naime, kada bi postojao neki $y' \in \bigcap_{\alpha \in J} \langle y_\alpha, x]$ takav da je $y' \neq x$, onda bi familija $\mathcal{F} \cup \{\langle y', x]\}$ bila linearno uređena familija poluotvorenih intervala veća od $\mathcal{F}$, protivno maksimalnosti od $\mathcal{F}$.

Familija zatvorenih intervala $[y_\alpha, x] = \langle y_\alpha, x] \cup \{y_\alpha\}$, $\alpha \in J$, je linearno uređena familija zatvorenih skupova takvih da je $\bigcap_{\alpha \in J} [y_\alpha, x] = \{x\}$. Skupovi $[y_\alpha, x]$ nisu sadržani u U (jer bi inače i skupovi $\langle y_\alpha, x]$ bili sadržani u U) pa je $[y_\alpha, x] \cap (X \setminus U)$, $\alpha \in J$, familija nepraznih zatvorenih skupova linearno uređena inkluzijom, dakle i centrirana. Kako je X kompaktan, presjek $\bigcap_{\alpha \in J} \big([y_\alpha, x] \cap (X \setminus U)\big) = \big(\bigcap_{\alpha \in J} [y_\alpha, x]\big) \cap (X \setminus U)$ je neprazan, pa sadrži neku točku w. No tada je i $w \in \bigcap_{\alpha \in J} [y_\alpha, x]$, a zbog $w \in X \setminus U$ i $x \in U$ je $w \neq x$, čime je dobivena kontradikcija s ranijom tvrdnjom da je $\bigcap_{\alpha \in J} [y_\alpha, x] = \{x\}$, što pokazuje da postoji $y_0 \prec x$ takav da je $\langle y_0, x] \subseteq U$.

Analogno se dokazuje da postoji $z_0 \succ x$ takav da je $[x, z_0\rangle \subseteq U$, pa je $x \in \langle y_0, z_0 \rangle \subseteq U$, tj. $U \in \mathcal{S}$.

Slučajevi $x = a$ i $x = b$ dokazuju se slično, s tim da su dokazi jednostavniji utoliko, što je u svakom od tih slučajeva dovoljno razmatrati samo jednu vrstu poluotvorenih intervala, tj. zrake $[a, z_\alpha\rangle$ odnosno $\langle y_\alpha, b]$. ■

Teorem 2.28. *Neka je* X *povezan prostor, takav da je* $X = E(a, b)$*. Tada je* X *neprekidan u Dedekindovom smislu.*

Dokaz. Skup $X = E(a, b)$ je linearno uređen separacijskim uređajem. Neka je (L, R) prerez skupa X. Pretpostavimo da L nema najveći element i R nema najmanji element. Tada je $L = \bigcup_{l \in L} [a, l\rangle$ i $R = \bigcup_{r \in R} \langle r, b]$. Prema lemi 2.26, L i R su otvoreni u X, pa je $\{L, R\}$ separacija prostora X, suprotno pretpostavci da je X povezan. Ako pak pretpostavimo da L ima najveći element M i R ima najmanji element m, onda je $L = [a, m\rangle$ i $R = \langle M, b]$, pa je i u tom slučaju $\{L, R\}$ separacija prostora X. Dakle, svaki prerez skupa X je Dedekindov. ■

Napokon možemo dokazati:

Teorem 2.29. *Neka je* X *metrički kontinuum u kojem samo dvije točke* a *i* b *nisu prerezne. Tada je* X *homeomorfan s* $[0, 1]$*.*

Dokaz. Prema teoremu 2.5 X ima prebrojivu bazu, pa je i separabilan. Neka je C prebrojiv gust podskup od X. Možemo pretpostaviti da a i b nisu u C (ako jesu, tada je i $C \setminus \{a, b\}$ prebrojiv gust podskup od X). Prema teoremu 2.27 $X = E(a, b)$ i metrička topologija na X se podudara sa topologijom dobivenom od uređaja na $E(a, b)$.

Promatramo C s topologijom dobivenom od restrikcije tog uređaja na C. C je gust. Naime, ako su x i y različite točke skupa C, one su i u X, pa postoji $z \in X$ takav da je $z \in \langle x, y\rangle$. Kako je C gust u X, a $\langle x, y\rangle$ okolina točke z u X, postoji $c \in C \cap \langle x, y\rangle$.

Kad bi u C postojao najmanji element m, tada u skupu $[a, m\rangle$, koji je otvorena okolina točke a ne bi bilo elemenata od C, što je u kontradikciji s gustoćom od C u X. Slično, kad bi C imao najveći element M, tada u otvorenoj okolini $\langle M, b]$ od b ne bi bilo elemenata skupa C. Dakle, C ima uređaj koji zadovoljava uvjete teorema 2.25, pa postoji sličnost $f : C \to \mathbb{Q}$. Skup $\mathbb{Q} \cap \langle 0, 1\rangle$ sa standardnim uređajem je prebrojiv, gust, te nema ni najmanji ni najveći element, pa postoji sličnost $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \cap \langle 0, 1\rangle$. Preslikavanje $h := g \circ f : C \to \mathbb{Q} \cap \langle 0, 1\rangle$ je sličnost, a C i $\mathbb{Q} \cap \langle 0, 1\rangle$ imaju uređajnu topologiju, pa je h i homeomorfizam.

Definirajmo preslikavanje $H : X \to [0, 1]$ sa $H|_C := h$, $H(a) = 0$, $H(b) = 1$, a za $x \in X \setminus (\{a, b\} \cup C)$ definiramo H na sljedeći način:

Neka je $C_L := \{y \in C : y < x\}$ i $C_R := \{y \in C : y > x\}$. C_L i C_R su neprazni, jer je C gust u X. (C_L, C_R) je prerez skupa C, pa je $(h(C_L), h(C_R))$ prerez skupa $\mathbb{Q} \cap \langle 0, 1\rangle$. $h(C_L)$ i $h(C_R)$ su neprazni, pa je $h(C_L)$ odozgo ograničen svakim elementom skupa $h(C_R)$. Zbog potpunosti skupa $\mathbb{R}$, skup $h(C_L)$ ima supremum i on je jedinstven. Definiramo $H(x) := \sup h(C_L)$. Preslikavanje H je proširenje preslikavanja h na čitav skup X. Pokazat ćemo da je H bijekcija koja čuva uređaj, pa je H i homeomorfizam, jer se metričke topologije na prostorima X i $[0, 1]$ poklapaju s uređajnim topologijama na tim prostorima.

H je injekcija i čuva uređaj. Neka su x_1 i x_2 različite točke prostora X. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $x_1 < x_2$. Ako su x_1 i x_2 u C, tada je $H(x_1) = h(x_1) < h(x_2) = H(x_2)$. Ako je $x_1 \in C$, a $x_2 \in X \setminus C$, postoji $c \in C \cap \langle x_1, x_2\rangle$, te je $H(x_1) = h(x_1) < h(c) \leq \sup h(\{x \in C : x < x_2\}) = H(x_2)$. Ako je pak $x_1 \in X \setminus C$, a $x_2 \in C$ i $c \in C \cap \langle x_1, x_2\rangle$, tada je $H(x_1) = \sup h(\{x \in C : x < x_1\}) \leq h(c) < h(x_2) = H(x_2)$. Napokon, ako su x_1 i x_2 u $X \setminus C$, postoje točke c, c_1 i c_2 iz C takve da je $x_1 < c_1 < c < c_2 < x_2$, pa vrijedi $H(x_1) = \sup h(\{x \in C : x < x_1\}) \leq h(c_1) < h(c) < h(c_2) \leq \sup h(\{x \in C : x < x_2\}) = H(x_2)$.

H je surjekcija. Ako je $y \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$, tada očito postoji $x \in C \cup \{a, b\}$ takav da je $H(x) = y$. Neka je $y \in \langle 0, 1\rangle \setminus \mathbb{Q}$. Definiramo $D_L := \langle 0, y\rangle \cap \mathbb{Q}$ i $D_R := \langle y, 1\rangle \cap \mathbb{Q}$. (D_L, D_R) je prerez skupa $\langle 0, 1\rangle \cap \mathbb{Q}$, D_L nema najveći element i D_R nema najmanji element. Kako je h^{-1} sličnost, to je $(h^{-1}(D_L), h^{-1}(D_R))$ prerez skupa C, takav da $h^{-1}(D_L)$ nema najveći element i $h^{-1}(D_R)$ nema najmanji element. Tada postoji $x \in X$ takav da je $x > c_1$, za svaki $c_1 \in h^{-1}(D_L)$ i $x < c_2$, za svaki $c_2 \in h^{-1}(D_R)$. U suprotnom bi $(h^{-1}(D_L), h^{-1}(D_R))$ bio prerez skupa X koji nije Dedekindov.

Takav $x \in X$ je jedinstven, jer ako pretpostavimo da su x_1 i x_2 različiti elementi skupa X s tim svojstvom i recimo da je $x_1 < x_2$, tada postoji $c \in C$ takav da je $x_1 < c < x_2$, pa je $c \in C \setminus (h^{-1}(D_L) \cup h^{-1}(D_R)) = \emptyset$.

To znači da je $h^{-1}(D_L) = \{c \in C : c < x\}$ i $h^{-1}(D_R) = \{c \in C : c > x\}$, pa je $H(x) = \sup h(h^{-1}(D_L)) = \sup D_L = y$, jer je $\mathbb{Q}$ gust u $\mathbb{R}$. ■

2.4 Lokalna povezanost. Povezanost lukovima.

Definiramo lokalnu povezanost, svojstvo topološkog prostora koje se pokazalo korisnim za karakterizaciju neprekidne slike segmenta.

Definicija 4. Neka je X topološki prostor. X je ***lokalno povezan u točki*** x ako svaka okolina U točke x sadrži povezanu okolinu V od x. X je ***lokalno povezan*** ako je lokalno povezan u svakoj točki $x \in X$.

Povezanost topološkog prostora općenito ne implicira njegovu lokalnu povezenost. *Topološka sinusna krivulja* primjer je povezanog prostora koji nije lokalno povezan.

Lokalna povezanost nije nasljedno svojstvo, ali vrijedi sljedeće.

Lema 2.30. *Otvoren potprostor lokalno povezanog topološkog prostora je lokalno povezan.*

Dokaz. Neka je X lokalno povezan prostor i S otvoren potprostor od X. Neka je $x \in S$ i U otvorena okolina od x u S. U je otvoren i u X, pa postoji otvoren povezan podskup V od X takav da je $x \in V \subseteq U \subseteq S$. No, V je otvoren i u S, pa je S lokalno povezan. ■

Korisna je sljedeća karakterizacija lokalne povezanosti.

Lema 2.31. *Prostor X je lokalno povezan ako i samo ako je svaka komponenta povezanosti otvorenog potprostora od X otvorena u X.*

Dokaz. ($\Rightarrow$) Neka je S otvoren potprostor od X, C komponenta povezanosti od S i $x \in C$. Prema prethodnoj lemi, S je lokalno povezan, pa postoji otvorena povezana okolina V_x od x takva da je $x \in V_x \subseteq S$. V_x siječe C, pa vrijedi $V_x \subseteq C$. Dakle, vrijedi da je $C = \bigcup_{x \in C} V_x$ i V_x je otvoren u X za svaki $x \in C$, pa je komponenta C otvorena u X.

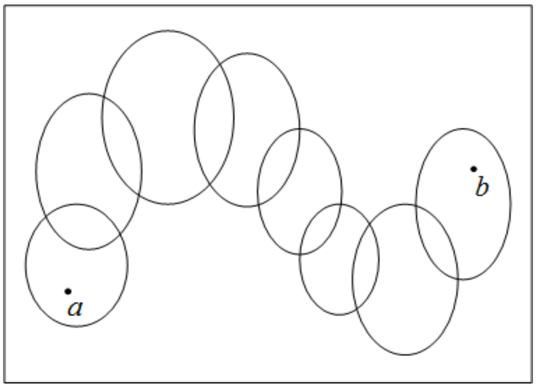
($\Leftarrow$) Neka je U otvorena okolina točke $x \in X$ i C komponenta povezanosti od U koja sadrži x. Prema pretpostavci, skup C je otvoren u X, pa je X lokalno povezan. ■

Definicija 5. Metrički prostor X je ***uniformno lokalno povezan*** ako za svaki realan broj $\epsilon > 0$ postoji realan broj $\delta > 0$ takav da za sve $x, y \in X$ takve da je $d(x, y) < \delta$ postoji povezan skup koji sadrži x i y i dijametra je manjeg od ϵ.

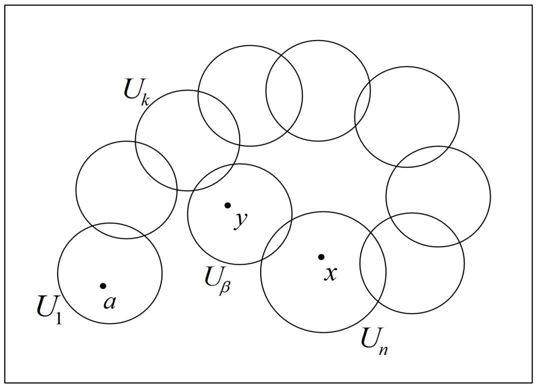
Općenito snažnije svojstvo od lokalne povezanosti, u kompaktnom metričkom prostoru uniformna lokalna povezanost podudara se s lokalnom povezanošću.

Teorem 2.32. *Neka je X kompaktan lokalno povezan metrički prostor. Tada je X uniformno lokalno povezan.*

Dokaz. Neka je $\epsilon > 0$ realan broj, $x \in X$. Kako je X lokalno povezan, postoji povezana okolina V_x od x dijametra manjeg od ϵ. $\{V_x : x \in X\}$ je pokrivač za X, te neka je $\{V_1, \ldots, V_n\}$ konačan potpokrivač. Neka je δ Lebesgueov broj tog pokrivača. Tada za sve $x, y \in X$ takve da je $d(x, y) < \delta$ postoji $j \in \{1, \ldots, n\}$ takav da su $x, y \in V_j$. ■



Slika 2.1



Slika 2.2

Za proučavanje strukture lokalno povezanih kontinuuma koristan je pojam jednostavnog lanca.

Definicija 6. Neka je X topološki prostor, $a, b \in X$. Familija $\{A_1, \ldots, A_n\}$ podskupova od X je ***jednostavan lanac*** od a do b ako vrijedi:

i) $a \in A_1$ i $a \notin A_i$ za $i > 1$.

ii) $b \in A_n$ i $b \notin A_j$ za $j < n$.

iii) $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ ako i samo ako je $|i - j| \leq 1$, tj. *karika* u lancu siječe onu prije nje i onu poslije nje (i samu sebe) i niti jednu drugu kariku u lancu.

Slika 2.1 prikazuje jednostavan lanac područja od točke a do točke b.

Teorem 2.33. *Neka je X povezan prostor, $a, b \in X$, te $\mathcal{U}$ otvoren pokrivač za X. Tada postoji jednostavan lanac od a do b sastavljen od elemenata pokrivača $\mathcal{U}$.*

Dokaz. Definirajmo $Y := \{x \in X :$ postoji jednostavan lanac od a do x sastavljen od elemenata pokrivača $\mathcal{U}\}$. Pokazat ćemo da je Y otvoren i zatvoren u X, pa kako je X povezan, to mora biti $Y = X$.

Y je otvoren. Neka je $x \in Y$ i $\{U_1, \ldots, U_n\}$ jednostavan lanac elemenata pokrivača $\mathcal{U}$ od a do x. U_n je otvorena okolina od x u X, pa je dovoljno pokazati da je $U_n \subseteq Y$. Neka je $y \in U_n$. Ako je $y \in U_n \setminus U_{n-1}$ onda je $\{U_1, \ldots, U_n\}$ jednostavan lanac od a do y. Ako je pak $y \in U_n \cap U_{n-1}$ onda je $\{U_1, \ldots, U_{n-1}\}$ jednostavan lanac od a do y. Dakle je $y \in Y$.

Y je zatvoren. Pokazujemo da je $\overline{Y} \subseteq Y$. Neka je $y \in \overline{Y}$, $U_\beta \in \mathcal{U}$ takav da je $y \in U_\beta$. Postoji $x \in U_\beta \cap Y$, te neka je $\{U_1, \ldots, U_n\}$ jednostavan lanac elemenata od $\mathcal{U}$ od a do x. Neka je $k := \min\{j \in \{1, \ldots, n\} : U_\beta \cap U_j \neq \emptyset\}$. Tada je $\{U_1, \ldots, U_k, U_\beta\}$ jednostavan lanac od a do y (vidi sliku 2.2). ∎

Definicija 7. Neka je X topološki prostor, $a, b \in X$. Ako je $f \colon [0, 1] \to X$ put u X od a do b koji je smještenje od $[0, 1]$ u X, tj. f je homeomorfizam sa $[0, 1]$ na $f([0, 1])$, onda f zovemo ***luk*** u X od točke a do točke b. Kažemo da je X ***lukovima povezan*** ako za svaki par točaka $a, b \in X$ postoji luk u X od točke a do točke b.

Napomena. Ponekad se u literaturi luk izjednačava sa svojom slikom. I ovdje ćemo, kad tako bude zgodnije, sliku luka nazvati lukom. ***Dijametar luka*** f je dijametar njegove slike $f([0, 1])$.

2.5 Povezanost lukovima Peanovog kontinuuma

Kompaktan, povezan, lokalno povezan metrički prostor zovemo ***Peanov kontinuum***. Želimo dokazati da je svaki Peanov kontinuum lukovima povezan. Očito je da lokalno povezan prostor možemo pokriti povezanim otvorenim skupovima, pa se, prema teoremu 2.33, svake dvije točke lokalno povezanog, povezanog prostora mogu spojiti jednostavnim lancem područja. Smanjujući karike tog lanca, intuitivno bi trebali dobiti luk od a do b. Međutim, ako ti "silazni" lanci nisu na neki način međusobno povezani, njihov "limes" može biti gotovo bilo kakav kontinuum. Kako bi to izbjegli, zahtijevamo da je svaka karika manjeg lanca sadržana u nekoj karici većeg. Čak i uz taj oprez, pokazuje se da presjek tih profinjenja ne mora biti luk (može se raditi o tzv. pseudoluku). I to moramo na neki način izbjeći. Konačno, kad smo i to napravili, još uvijek se može dogoditi da presjeku nedostaju neke točke potrebne za formiranje luka. Uz dodatan zahtjev za kompaktnošću i metrizabilnošću prostora, dobivamo potrebne uvjete da ti (sve finiji) lanci teže luku.

Kako bi izbjegli prve dvije od gore navedenih neželjenih situacija, definiramo sljedeće:

Definicija 8. Neka su $C_1 = \{U_1, \ldots, U_n\}$ i $C_2 = \{V_1, \ldots, V_m\}$ jednostavni lanci od točke a do točke b u prostoru X. Kažemo da C_2 ***profinjuje*** C_1 ako je svaka karika V_j lanca C_2 sadržana u nekoj karici U_i lanca C_1. Kažemo da C_2 ***direktno profinjuje*** C_1 ako C_2 profinjuje C_1 i vrijedi da ako V_i i V_k leže u nekoj karici U_l lanca C_1, tada za svaki j takav da je $i < j < k$, V_j također leži u U_l.

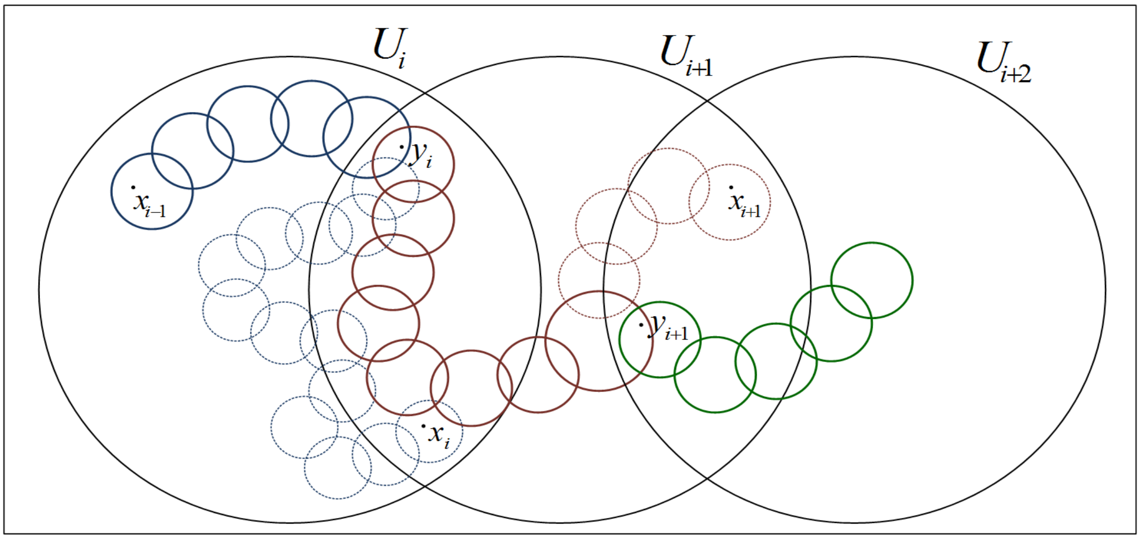
Teorem 2.34. *Neka je X lokalno povezan prostor i $C = \{U_1, \ldots, U_n\}$ jednostavan lanac povezanih otvorenih skupova od točke a do točke b. Neka je $\mathcal{V}$ familija otvorenih skupova takva da je svaka karika $U_i \in C$ unija elemenata od $\mathcal{V}$. Tada postoji jednostavan lanac od a do b koji je sastavljen od elemenata familije $\mathcal{V}$ i direktno profinjuje C.*

Dokaz. Neka je $x_0 = a$, $x_n = b$ i za sve $i = 1, \ldots, n-1$, neka je x_i točka u presjeku $U_i \cap U_{i+1}$. Indukcijom ćemo pokazati da za svaki $i \in \{2, \ldots, n\}$ postoji jednostavan lanac od točke a do točke x_i koji je sastavljen od elemenata familije $\mathcal{V}$ i direktno profinjuje lanac $\{U_1, U_2, \ldots, U_i\}$.

Skup U_1 je povezan i unija je elemenata familije $\mathcal{V}$. Prema teoremu 2.33, postoji jednostavan lanac $C_1 = \{V_1^1, \ldots, V_1^{n_1}\}$ od a do x_1 sastavljen od elemenata familije $\mathcal{V}$ koji leže unutar U_1. Neka je $V_1^{j_1}$ "prva" karika lanca C_1 koja siječe U_2, te neka je $y_1 \in V_1^{j_1} \cap U_2$. U_2 je povezan i unija je elemenata familije $\mathcal{V}$, pa postoji jednostavan lanac C_2' od y_1 do x_2 sastavljen od elemenata familije $\mathcal{V}$ koji leže unutar U_2. $C_2 := \{V_1^1, \ldots, V_1^{j_1}\} \cup C_2'$ je jednostavan lanac od a do x_2 koji je sastavljen od elemenata familije $\mathcal{V}$ i direktno profinjuje lanac $\{U_1, U_2\}$.

Pretpostavimo induktivno da za neki $i \in \{2, \ldots, n-1\}$, postoji jednostavan lanac $C_i = \{V_i^1, \ldots, V_i^{n_i}\}$ od točke a do točke x_i koji je sastavljen od elemenata familije $\mathcal{V}$ i direktno profinjuje lanac $\{U_1, U_2, \ldots, U_i\}$. Neka je $V_i^{j_i}$ prva karika toga lanca koja siječe U_{i+1} i neka je $y_i \in V_i^{j_i} \cap U_{i+1}$. Tada postoji jednostavan lanac C_{i+1}' od y_i do x_{i+1} sastavljen od elemenata familije $\mathcal{V}$ koji leže unutar U_{i+1}. Tada je $C_{i+1} := \{V_i^1, \ldots, V_i^{j_i}\} \cup C_{i+1}'$ jednostavan lanac od a do x_{i+1} koji direktno profinjuje lanac $\{U_1, U_2, \ldots, U_{i+1}\}$.

Ova indukcija pokazuje da postoji jednostavan lanac od a do $x_n = b$ koji je sastavljen od elemenata familije $\mathcal{V}$ i direktno profinjuje lanac C. Za vizualizaciju koraka indukcije vidi sliku 2.3. ∎



Slika 2.3. Punom linijom označen je dio rezultirajućeg lanca iz teorema 2.34. Plavom bojom istaknute su karike lanca C_i, smeđom bojom karike lanca C'_{i+1}, a zelenom bojom karike lanca C'_{i+2}. Isprekidanom linijom označene su karike koje izbacujemo.

Prethodni teorem omogućuje konstrukciju luka od točke a do točke b Peanovog kontinuuma, te napokon možemo dokazati sljedeće:

Teorem 2.35. *Svaki Peanov kontinuum je lukovima povezan.*

Dokaz. Neka je X Peanov kontinuum i $a, b \in X$. Jer je X lokalno povezan metrički prostor, postoji pokrivač za X povezanim otvorenim skupovima dijametra manjeg od 1. Prema teoremu 2.33, postoji jednostavan lanac povezanih otvorenih skupova $C_1 = \{U_1^1, \dots, U_1^{n_1}\}$ od a do b, takav da je U_1^i dijametra manjeg od 1 za sve $i = 1, \dots, n_1$. Neka je $i \in \{1, \dots, n_1\}$ i $x \in U_1^i$. Postoji povezana otvorena okolina $V_1^{i(x)}$ od x, dijametra manjeg od $\frac{1}{2}$ čiji zatvarač leži u U_1^i. Ako definiramo $d := \min\{d(x, X \setminus U_1^i), \frac{1}{2}\}$, onda kugla $B(x, \frac{d}{4})$ sadrži neku takvu okolinu točke x. Vrijedi $U_1^i = \bigcup_{x \in U_1^i} V_1^{i(x)}$, pa prema teoremu 2.34, postoji jednostavan lanac $C_2 = \{U_2^1, \dots, U_2^{n_2}\}$ od a do b koji direktno profinjuje C_1, a sastavljen je od elemenata skupa $\{V_1^{i(x)} : x \in U_1^i,\ i = 1, \dots, n_1\}$.

Neka je $C_k = \{U_k^1, \dots\ , U_k^{n_k}\}$ jednostavan lanac od a do b sastavljen od povezanih otvorenih skupova dijametra manjeg od $\frac{1}{k}$. Neka je $i \in \{1, \dots, n_k\}$ i $x \in U_k^i$. Postoji povezana otvorena okolina $V_k^{i(x)}$ od x, dijametra manjeg od $\frac{1}{k+1}$ čiji zatvarač leži u U_k^i. $U_k^i = \bigcup_{x \in U_k^i} V_k^{i(x)}$, pa prema teoremu 2.34, postoji jednostavan lanac $C_{k+1} = \{U_{k+1}^1, \dots, U_{k+1}^{n_{k+1}}\}$ od a do b koji direktno profinjuje C_k, a sastavljen je od elemenata skupa $\{V_k^{i(x)} : x \in U_k^i,\ i = 1, \dots, n_k\}$.

Na taj način smo definirali niz jednostavih lanaca $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, takav da dijametri karika u lancu teže k 0, a C_{k+1} direktno profinjuje C_k, za sve $k \in \mathbb{N}$.

Neka je $K_j = \bigcup_{i=1}^{n_j} \overline{U_j^i}$. Za svaki $j \in \mathbb{N}$, K_j je kontinuum koji sadrži $\{a, b\}$ i $K_{j+1} \subset K_j$. Prema tome, familija $\{K_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ je linearno uređena familija zatvorenih potprostora od X. $K := \bigcap_{j=1}^{\infty} K_j$ je očito neprazan kompaktan potprostor od X.

Pokažimo da je K i povezan. Neka su $x, y \in K$. Tada su $x, y \in K_j$, za svaki $j \in \mathbb{N}$, a kako je K_j povezan, to su posebno x i y unutar iste kvazikomponente prostora K_j. Prema lemi 2.15, x i y leže unutar iste kvazikomponente prostora K. No tada su, prema teoremu 2.17, x i y unutar iste komponente povezanosti prostora K, pa je K povezan. Prema tome, K je kontinuum, a K očito sadrži $\{a, b\}$.

Primijetimo da je K također podskup od $\bigcap_{j=1}^{\infty}(\bigcup_{i=1}^{n_j} U_j^i)$. Jer, ako je $x \in K$, tada je za svaki $j \in \mathbb{N}$ takav da je $j > 2$, $x \in K_j$, pa postoji $i \in \{1, \ldots n_j\}$ takav da je $x \in \overline{U_j^i}$ i karika U_{j-1}^l lanca C_{j-1}, takva da je $x \in \overline{U_j^i} \subset U_{j-1}^l$. Dakle, za svaki $j > 2$, x je u $\bigcup_{i=1}^{n_j} U_j^i$, pa je $x \in \bigcap_{j=2}^{\infty}(\bigcup_{i=1}^{n_j} U_j^i) = \bigcap_{j=1}^{\infty}(\bigcup_{i=1}^{n_j} U_j^i)$.

Neka je $x \in K \setminus \{a, b\}$. Za svaki $j \in \mathbb{N}$ definiramo $P_j := \bigcup U_j^i$, gdje uzimamo uniju po svim $i \in \{1, \ldots, n_j\}$ takvim da je karika U_j^i u lancu C_j ispred jedne ili dvije karike koje sadrže x i definiramo $S_j := \bigcup U_j^k$, gdje uzimamo uniju po svim $k \in \{1, \ldots, n_j\}$ takvim da je karika U_j^k u lancu C_j iza jedne ili dvije karike koje sadrže x.

Neka je $P := \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j \cap K$ i $S := \bigcup_{j=1}^{\infty} S_j \cap K$. Skupovi P i S su neprazni otvoreni podskupovi od $K \setminus \{x\}$. P i S su disjunktni, jer lanac C_{n+1} direktno profinjuje lanac C_n za svaki $n \in \mathbb{N}$, pa se ne može dogoditi da neka karika finijeg lanca koja je "iza x" siječe neku od karika grubljeg lanca koja je "ispred x".

Svaka točka y iz $K \setminus \{x\}$ leži ili u P ili u S, jer ako uzmemo $n \in \mathbb{N}$, takav da je $\frac{1}{n} < d(x, y)$, tada je y sigurno u nekoj karici lanca C_n koja ne sadrži x, tako da je $y \in P_n$ ili je $y \in S_n$. Dakle, $\{P, N\}$ je separacija od $K \setminus \{x\}$. Slijedi da je svaka točka $x \in K \setminus \{a, b\}$ prerezna točka skupa K, pa prema lemi 2.21, a i b nisu prerezne točke skupa K. Prema teoremu 2.29, K je luk od a do b. ■

Primijetimo da, ako je neki od skupova K_j iz dokaza prethodnog teorema kompaktan, tada je i K_i kompaktan, za sve i veće od j (kao zatvoren potprostor od K_j). To znači da je, da bi prethodni teorem vrijedio, dovoljno zahtijevati lokalnu kompaktnost prostora X. Posebno, otvoren podskup kompaktnog Hausdorffovog prostora je lokalno kompaktan, pa vrijedi sljedeća generalizacija teorema 2.35.

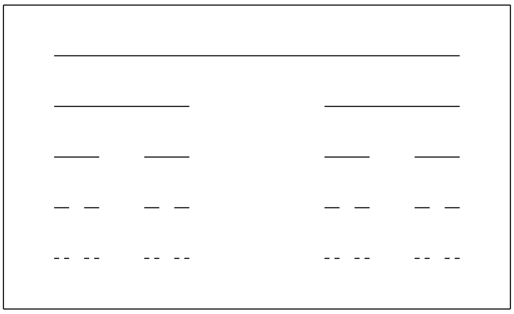
Teorem 2.36. *Povezan otvoren podskup Peanovog prostora je lukovima povezan.*

3. Cantorov skup

U ovom poglavlju definiramo Cantorov trijadski skup, te navodimo i dokazujemo njegova osnovna topološka svojstva. Zatim uvodimo pojam inverznog niza topoloških prostora i invernog limesa, što koristimo na kraju poglavlja da dokažemo da je svaki kompaktan potpuno nepovezan savršen metrički prostor homeomorfan Cantorovom skupu.

3.1 Definicija i topološka svojstva Cantorovog skupa

Definiramo Cantorov trijadski skup, te navodimo i dokazujemo njegova osnovna topološka svojstva. Cantorov skup je zanimljiv, jer su neka od tih svojstava u potpunosti u neskladu s intuicijom. Na primjer, on je neprebrojiv, ali nigdje gust, potpuno nepovezan, ali savršen. Zato ga se često koristi kao primjer (ili kontraprimjer) u raznim granama matematike. U ovom radu je od posebne važnosti, jer njegovo poznato svojstvo univerzalne surjektivnosti koristimo kao svojevrstan *ad hoc* trik u dokazu Hahn-Mazurkiewiczevog teorema. Postoji nekoliko različitih pristupa definiciji Cantorovog skupa. Danas je najpopularniji iterativni (geometrijski) postupak koji ćemo i ovdje iskoristiti. Zatim ćemo pokazati alternativni pristup koji je pogodniji za dokaz nekih od svojstava.



Prvih pet koraka u konstrukciji Cantorovog skupa

Neka je $E_1 = \langle \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \rangle$ srednja trećina segmenta $I = [0,1]$, $E_2 := \langle \frac{1}{9}, \frac{2}{9} \rangle \cup \langle \frac{7}{9}, \frac{8}{9} \rangle$ unija srednjih trećina komponenata skupa $I \setminus E_1$, $E_3 := \langle \frac{1}{27}, \frac{2}{27} \rangle \cup \langle \frac{7}{27}, \frac{8}{27} \rangle \cup \langle \frac{19}{27}, \frac{20}{27} \rangle \cup \langle \frac{25}{26}, \frac{26}{27} \rangle$ unija srednjih trećina komponenata skupa $I \setminus (E_1 \cup E_2)$ itd. Skup $\mathsf{C} := I \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n \subseteq [0,1]$ zovemo ***Cantorov trijadski skup***.
Primijetimo da za svaki $n \in \mathbb{N}$, E_n ima samo konačno mnogo komponenata povezanosti.

Zato $I \setminus \mathsf{C}$ ima samo prebrojivo mnogo komponenata povezanosti. Odmah je vidljivo da je C zatvoren, pa je kompaktan, kao podskup segmenta $[0,1]$. Također se lagano vidi da je C neprazan, jer sadrži krajeve izbačenih intervala.Tih rubova intervala je prebrojivo, pa se na prvi pogled može činiti da je C prebrojiv. Međutim, koliko god to čudno izgledalo, pokazuje se da C sadrži jednak broj točaka kao i segment $[0,1]$, tj. neprebrojivo mnogo. Kako bi dokazali to, kao i druga svojstva, koristimo sljedeću karakterizaciju Cantorovog skupa.

Teorem 3.1. *Cantorov skup* C *jednak je skupu svih brojeva* x *iz segmenta* $[0,1]$ *koji imaju (bar jedan) trijadski zapis* $x = 0.x_1x_2x_3...$ *takav da je* $x_n \in \{0,2\}$ *za svaki* $n \in \mathbb{N}$.

Napomena. Znamo da mnogi realni brojevi imaju dva moguća zapisa u sustavu s bilo kojom bazom. Međutim, u sustavu s bazom 3, svaki realan broj ima najviše jedan zapis u kojem nema znamenke 1.

Dokaz. Promatrajmo paralelno intervale koje izbacujemo u n-tom koraku i segmente koji ostaju nakon toga. Na početku imamo segment $I_0 := [0,1] = [0,(0.\overline{2})_3]$.

U prvom koraku izbacujemo "srednju trećinu" $E_1 = \langle \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \rangle$ segmenta I_0. Primijetimo da su krajnje točke intervala E_1 dobivene dodavanjem $\frac{1}{3}$, odnosno $\frac{2}{3}$ lijevom rubu segmenta I_0. Vrijedi $E_1 = \langle \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \rangle = \langle (0.1)_3, (0.2)_3 \rangle = \langle (0.0\overline{2})_3, (0.2)_3 \rangle$. Nakon što smo izbacili E_1, unutar segmenta I_0 ostaje

$$I_1 := I_0 \setminus E_1 = [0, \tfrac{1}{3}] \cup [\tfrac{2}{3}, 1] = [0, 0.0\overline{2}] \cup [0.2, 0.\overline{2}].$$

U drugom koraku izbacujemo srednje trećine komponenata skupa I_1. Za svaku komponentu C_1^i skupa I_1, rubove srednje trećine komponente C_1^i dobivamo dodavanjem $\frac{1}{3^2}$, odnosno $\frac{2}{3^2}$ lijevom rubu komponente C_1^i. Izbacujemo, dakle, skup $E_2 = \langle 0+\frac{1}{3^2}, 0+\frac{2}{3^2} \rangle \cup \langle \frac{2}{3}+\frac{1}{3^2}, \frac{2}{3}+\frac{2}{3^2} \rangle = \langle (0.01)_3, (0.02)_3 \rangle \cup \langle (0.21)_3, (0.22)_3 \rangle = \langle (0.00\overline{2})_3, (0.02)_3 \rangle \cup \langle (0.20\overline{2})_3, (0.22)_3 \rangle$, te nakon toga preostaje skup

$$I_2 = I_1 \setminus F_2 = [0, (0.00\overline{2})_3] \cup [(0.02)_3, (0.0\overline{2})_3] \cup [(0.2)_3, (0.20\overline{2})_3] \cup [(0.22)_3, (0.\overline{2})_3]$$

Za svaki $n \in \mathbb{N}$ označimo s I_n uniju segmenata koja preostaje nakon n-tog koraka i promotrimo niz $(I_n)_n$. Pretpostavimo induktivno da je svaka komponenta C_{n-1}^k skupa I_{n-1} oblika $C_{n-1}^k = [(0.x_1x_2\ldots x_{n-1})_3,\ (0.x_1x_2\ldots x_{n-1}\overline{2})_3]$, gdje je $x_i \in \{0,2\}$ za svaki $i \in \{1,\ldots,n-1\}$. Takvih komponenata ima 2^{n-1}. U n-tom koraku izbacujemo srednje trećine tih komponenata. Srednja trećina komponente $C_{n-1}^k = [(0.x_1x_2\ldots x_{n-1})_3,$ $(0.x_1x_2\ldots x_{n-1}\overline{2})_3]$ je oblika $D_n^k = \langle (0.x_1x_2\ldots x_{n-1})_3 + \frac{1}{3^n},\ (0.x_1x_2\ldots x_{n-1})_3 + \frac{2}{3^n} \rangle = \langle (0.x_1x_2\ldots x_{n-1}1)_3,\ (0.x_1x_2\ldots x_{n-1}2)_3 \rangle$, te izbacivanjem tih srednjih trećina dobivamo skupove $C_{n-1}^k \setminus D_n^k = [(0.x_1x_2\ldots x_{n-1})_3, (0.x_1x_2\ldots x_{n-1}1)_3] \cup [(0.x_1x_2\ldots x_{n-1}2)_3, (0.x_1x_2 \ldots x_{n-1}\overline{2})_3]$. Vrijedi $I_n = \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} (C_{n-1}^k \setminus D_n^k)$. Vidimo da je svaka komponenta skupa I_n oblika $[(0.x_1x_2\ldots x_n)_3, (0.x_1x_2\ldots x_n\overline{2})_3]$, gdje je $x_i \in \{0,2\}$ za svaki $i \in \{1,\ldots,n\}$.
Tako smo indukcijom pokazali da su za svaki $n \in \mathbb{N}_0$ komponente skupa I_n oblika $[(0.x_1x_2\ldots x_n)_3, (0.x_1x_2\ldots x_n\overline{2})_3]$, gdje je $x_i \in \{0,2\}$ za svaki $i \in \{1,\ldots,n\}$.
Slijedi da su za svaki $n \in \mathbb{N}$ komponente skupa E_n koje izbacujemo u n-tom koraku oblika $\langle (0.x_1x_2\ldots x_{n-1})_3 + \frac{1}{3^n}\,,\ (0.x_1x_2\ldots x_{n-1})_3 + \frac{2}{3^n} \rangle = \langle (0.x_1x_2\ldots x_{n-1}1)_3\,,\ (0.x_1x_2\ldots x_{n-1}2)_3 \rangle$, gdje je $x_i \in \{0,2\}$ za svaki $i \in \{1,\ldots,n-1\}$.

Neka je sad $D_n := \langle (0.x_1x_2\ldots x_{n-1}1)_3\,,\ (0.x_1x_2\ldots x_{n-1}2)_3 \rangle$ neka komponenta skupa E_n i $y = (0.y_1y_2\ldots)_3$ proizvoljan trijadski zapis elementa $y \in D_n$. $y_i = x_i$ za svaki $i \in \{1,\ldots,n-1\}$ i $y > (0.x_1x_2\ldots x_{n-1}1)_3$, pa mora biti $y_n \geq 1$. S druge strane, $y < (0.x_1x_2\ldots x_{n-1}2)_3$, pa mora biti $y_n < 2$. Dakle, za svaki trijadski zapis $y = (0.y_1y_2\ldots)_3$ elementa $y \in E_n$ vrijedi $y_n = 1$.

Obratno, neka je $y \in I_{n-1}$ i pretpostavimo da je $y_n = 1$ za svaki trijadski zapis $y = (0.y_1y_2\ldots)_3$. y je unutar neke od komponenata $C^k_{n-1} = [(0.x_1x_2\ldots x_{n-1})_3, (0.x_1x_2 \ldots x_{n-1}\overline{2})_3]$ skupa I_{n-1}. Tada je $y_i = x_i$ za svaki $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Međutim, y ne može biti unutar skupa $C^k_{n-1} \backslash D^k_n = [(0.x_1x_2\ldots x_{n-1})_3, (0.x_1x_2\ldots x_{n-1}1)_3] \cup [(0.x_1x_2\ldots x_{n-1}2)_3, (0.x_1x_2\ldots x_{n-1}\overline{2})_3]$. Dakle, y izbacujemo u n-tom koraku, pa je $y \in E_n$.

Pokazali smo da za $y \in I$ vrijedi da je $y \in E_n$ ako i samo ako je u svakom trijadskom zapisu $y = (0.y_1y_2\ldots)_3$ znamenka y_n jednaka 1. Budući da je $\mathsf{C} = I \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Dakle, vrijedi da je $y \in \mathsf{C}$ ako i samo ako postoji trijadski zapis od y u kojem su sve znamenke 0 ili 2. ■

Definiramo preslikavanje $f \colon \mathsf{C} \to I$ s $f(\sum_{k=1}^{\infty} a_k 3^{-k}) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2} 2^{-k}$. $\sum \frac{a_k}{2} 2^{-k}$ predstavlja binarni zapis realnog broja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2} 2^{-k}$ iz segmenta $[0, 1]$, a zadano pravilo pridruživanja nam govori da je $f(x) \in I$ dobiven iz $x \in \mathsf{C}$, tako da su sve znamenke 2 u ternarnom prikazu od x zamijenjene znamenkama 1.

Jasno je da svaki $y \in I$ ima prikaz u bazi 2. Neka je $y = \sum_{k=1}^{\infty} b_k 2^{-k}$, gdje je $b_k \in \{0, 1\}$ za svaki $k \in \mathbb{N}$. Tada za $x = \sum_{k=1}^{\infty} 2b_k 3^{-k}$ vrijedi da je $x \in \mathsf{C}$ i $f(x) = y$. Dakle, f je surjekcija, pa je C neprebrojiv.

Podskup Y topološkog prostora X je ***savršen*** ako je Y zatvoren i svaka točka iz Y je gomilište od Y. Savršen skup jednak je skupu svojih gomilišta, te takav skup nema izoliranih točaka.

Pokažimo da je svaka točka Cantorovog skupa C gomilište od C, tj. da je Cantorov skup savršen, i da je njegov komplement $I \setminus \mathsf{C}$ gust u I, tj. da je C nigdje gust u I.

Neka je $x = (0.x_1x_2\ldots)_3 \in \mathsf{C}$, pri čemu su $x_j \in \{0, 2\}$ za sve j. Neka je J proizvoljan interval oko točke x. Odaberimo n dovoljno velik da je $\langle x - \frac{1}{3^n}, x + \frac{1}{3^n} \rangle \subseteq J$, i neka je $y_{n+2} = \begin{cases} 0, & \text{ako je } x_{n+2} = 2 \\ 2, & \text{ako je } x_{n+2} = 0 \end{cases}$. Tada su točke $y := (0.x_1\ldots x_{n+1}y_{n+2}x_{n+3}x_{n+4}\ldots)_3$ i $z := (0.x_1\ldots x_{n+1}111\ldots)_3$ u intervalu $\langle x - \frac{1}{3^n}, x + \frac{1}{3^n} \rangle \subseteq J$, pri čemu je $y \in \mathsf{C}$, $y \neq x$, i $z \notin \mathsf{C}$.

Topološki prostor X je ***potpuno nepovezan*** ako su jedini povezani potprostori od X jednočlani podskupovi od X.

Kao topološki potprostor od $[0, 1]$, Cantorov skup je potpuno nepovezan. Naime, neka su $a, b \in \mathsf{C}$, $a \neq b$. Tada postoji $r \in I \setminus \mathsf{C}$ takav da je $a < r < b$. Tada su $[0, r\rangle \cap \mathsf{C}$ i $\langle r, 1] \cap \mathsf{C}$ disjunktni otvoreni podskupovi od C, $a \in [0, r\rangle \cap \mathsf{C}$ i $b \in \langle r, 1] \cap \mathsf{C}$. Dakle, a i b leže u različitim komponentama povezanosti od C.

3.2 Inverzni nizovi topoloških prostora

Inverzni niz topoloških prostora specijalan je slučaj općenitijeg koncepta inverznog sustava. Taj koncept od izuzetne je važnosti u modernoj topologiji i ima brojne primjene. U daljnjim razmatranjima moći ćemo se uvjeriti u korisnost ovog matematičkog koncepta. Pomoći će nam u karakterizaciji Cantorovog skupa, kao i u dokazu Aleksandrov-Hausdorffovog teorema.

Definicija 9. Neka je $\{X_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ prebrojiva familija topoloških prostora, $\{f_n \colon X_n \to X_{n-1} \mid n \in \mathbb{N}\}$ familija neprekidnih preslikavanja. Niz parova $\{X_n, f_n\}_n$ zovemo ***inverzni niz*** topoloških prostora i pišemo

$$\cdots \xrightarrow{f_{n+1}} X_n \xrightarrow{f_n} X_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \cdots \xrightarrow{f_3} X_2 \xrightarrow{f_2} X_1 \xrightarrow{f_1} X_0 \,.$$

Inverzni limes inverznog niza $\{X_n, f_n\}_n$ (topoloških prostora) je potprostor produkta $\prod_{n\in\mathbb{N}_0} X_n$, koji se sastoji od onih nizova $(x_n)_n \in \prod_{n\in\mathbb{N}_0} X_n$ za koje vrijedi $x_{n-1} = f_n(x_n)$ za sve $n \in \mathbb{N}$ i označavamo ga s $X_\infty = \lim_{\longleftarrow}\{X_n, f_n\}$.

Inverzni niz kompaktnih Hausdorffovih prostora ima sljedeće važno svojstvo:

Teorem 3.2. *Neka je $\{X_n, f_n\}_n$ inverzni niz nepraznih kompaktnih Hausdorffovih prostora. Tada je X_∞ neprazan kompaktan Hausdorffov prostor.*

Dokaz. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ definiramo $Y_n := \{(x_0, x_1, \ldots) \in \prod_{n=0}^{\infty} X_n : x_{j-1} = f_j(x_j)$ za svaki $j \in \{1, \ldots, n\}\}$. Pokazat ćemo da je Y_n zatvoren u produktu $\prod_{n=0}^{\infty} X_n$.

Neka je $n \in \mathbb{N}$ i $(y_0, y_1, \ldots) \in Z_n = (\prod_{n=0}^{\infty} X_n) \setminus Y_n$. Tada postoji $j \in \{1, \ldots, n\}$ takav da je $y_{j-1} \neq f_j(y_j)$. Dakle, y_{j-1} i $f_j(y_j)$ su različite točke Hausdorffovog prostora X_{j-1}, pa postoje disjunktni otvoreni podskupovi U_{j-1} i V_{j-1} od X_{j-1} takvi da je $y_{j-1} \in U_{j-1}$ i $f_j(y_j) \in V_{j-1}$. Neka je $V_j := f_j^{-1}(V_{j-1})$. V_j je otvoren podskup prostora X_j. Definiramo $U_y := U_y^0 \times U_y^1 \times \cdots \times U_y^{j-2} \times U_{j-1} \times V_j \times U_y^{j+1} \times U_y^{j+2} \times \cdots \times U_y^m \times X_{m+1} \times X_{m+2} \times \cdots$, gdje je U_y^i otvoren podskup od X_i koji sadrži y_i za sve $i \in \{0, \ldots, j-2, j+1, \ldots m\}$.

Pretpostavimo da je $x = (x_0, x_1, \ldots) \in Y_n \cap U_y$. x je u U_y, pa je $x_j \in V_j$ i $x_{j-1} \in U_{j-1}$. x je također u Y_n, pa je $x_{j-1} = f_j(x_j)$, iz čega slijedi da je $x_{j-1} \in V_{j-1}$, jer je $x_j \in V_j$ i $f(V_j) \subseteq V_{j-1}$. To je kontradikcija, jer je $U_{j-1} \cap V_{j-1} = \emptyset$. Dakle, $U_y \cap Y_n = \emptyset$, tj. $U_y \subseteq Z_n$. Pokazali smo da svaka točka skupa Z_n ima otvorenu okolinu sadržanu u Z_n, što znači da je skup Z_n otvoren u $\prod_{n=0}^{\infty} X_n$, tj. Y_n je zatvoren u $\prod_{n=0}^{\infty} X_n$.

$(Y_n)_n$ je silazan niz nepraznih zatvorenih skupova, pa je familija $\{Y_n\}_n$ centrirana. Prema Tihonovljevu teoremu je $\prod_{n=0}^{\infty} X_n$ kompaktan, pa je $\bigcap_{n=0}^{\infty} Y_n \neq \emptyset$.

Vrijedi $X_\infty = \bigcap_{n=0}^{\infty} Y_n$, jer ako je $y = (y_0, y_1, \ldots) \in \bigcap_{n=0}^{\infty} Y_n$, onda za svaki $n \in \mathbb{N}$ i $j \in \{1, \ldots, n\}$ vrijedi $x_{j-1} = f_j(x_j)$, pa je posebno za svaki $n \in \mathbb{N}$, $x_{n-1} = f_n(x_n)$, tj. $y \in X_\infty$, a obratna inkluzija je očita. Dakle, X_∞ je neprazan i kompaktan kao zatvoren potprostor od $\prod_{n=0}^{\infty} X_n$. $\prod_{n=0}^{\infty} X_n$ je Hausdorffov kao produkt Hausdorffovih prostora, pa je X_∞ Haudorffov kao potprostor od $\prod_{n=0}^{\infty} X_n$. ■

Na prirodan način definiramo preslikavanje inverznih nizova. Neka su $\{X_n, f_n\}_n$, $\{Y_n, g_n\}_n$ inverzni nizovi topoloških prostora. Preslikavanje $\Phi \colon \{X_n, f_n\} \to \{Y_n, g_n\}$ je familija $\{\varphi_n\}_n$ neprekidnih preslikavanja $\varphi_n \colon X_n \to Y_n$ takvih da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $g_n\varphi_n = \varphi_{n-1}f_n$, tj. sljedeći dijagram komutira:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "f_{n+1}"] & X_n \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "\varphi_n"] & X_{n-1} \arrow[r, "f_{n-1}"] \arrow[d, "\varphi_{n-1}"] & X_{n-2} \arrow[r, "f_{n-2}"] \arrow[d, "\varphi_{n-2}"] & \cdots \arrow[r, "f_2"] & X_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\varphi_1"] & X_0 \arrow[d, "\varphi_0"] \\
\cdots \arrow[r, "g_{n+1}"] & Y_n \arrow[r, "g_n"] & Y_{n-1} \arrow[r, "g_{n-1}"] & Y_{n-2} \arrow[r, "g_{n-2}"] & \cdots \arrow[r, "g_2"] & Y_1 \arrow[r, "g_1"] & Y_0 \,.
\end{tikzcd}$$

Φ iducira preslikavanje $\varphi\colon X_\infty \to Y_\infty$ inverznih limesa. Za svaki $x := (x_0, x_1, \ldots) \in X_\infty$ definiramo $\varphi(x) := (\varphi_0(x_0), \varphi_1(x_1), \ldots)$. Preslikavanje φ je dobro definirano, jer za svaki $x := (x_0, x_1, \ldots) \in X_\infty$ i $n \in \mathbb{N}$ vrijedi da je $\varphi_n(x_n) \in Y_n$ i $g_n(\varphi_n(x_n)) = \varphi_{n-1}(f_n(x_n)) = \varphi_{n-1}(x_{n-1})$, iz čega slijedi da je $\varphi(x) \in Y_\infty$.

Kako se radi o produktnoj topologiji, očito vrijedi:

Teorem 3.3. *Preslikavanje $\varphi\colon X_\infty \to Y_\infty$ inverznih limesa inducirano preslikavanjem $\Phi\colon \{X_n, f_n\} \to \{Y_n, g_n\}$ inverznih nizova je neprekidno.*

U nekoliko navrata trebat ćemo sljedeći rezultat:

Teorem 3.4. *Neka su $\{X_n, f_n\}_n$ i $\{Y_n, g_n\}_n$ inverzni nizovi kompaktnih prostora, $\Phi := \{\varphi_n\}\colon \{X_n, f_n\} \to \{Y_n, g_n\}$ preslikavanje inverznih nizova takvo da je $\varphi_n\colon X_n \to Y_n$ surjekcija za svaki $n \in \mathbb{N}$. Tada je i inducirano preslikavanje $\varphi\colon X_\infty \to Y_\infty$ surjekcija.*

Dokaz. Neka je $(y_0, y_1, \ldots) \in Y_\infty$. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ definiramo $X'_n := \varphi_n^{-1}(y_n)$ i neka je preslikavanje $f'_n\colon X'_n \to X_{n-1}$ restrikcija preslikavanja f_n na X'_n. $X'_n = \varphi_n^{-1}(y_n)$ je zatvoren podskup od X_n, pa je X'_n kompaktan, a kao potprostor Hausdorffovog prostora je X'_n i Hausdorffov. Ako je $x_n \in X'_n$, onda je $\varphi_{n-1}(f'_n(x_n)) = g_n(\varphi_n(x_n))$, pa je $f'_n(x_n) \in \varphi_{n-1}^{-1}(g_n(\varphi_n(x_n))) = \varphi_{n-1}^{-1}(g_n(y_n)) = \varphi_{n-1}^{-1}(y_{n-1}) = X'_{n-1}$. Dakle, $\{X'_n, f'_n\}_n$ je inverzni niz kompaktnih Hausdorffovih prostora, pa je X'_∞ neprazan i za svaki $x \in X'_\infty$ vrijedi $\varphi(x) = (\varphi_0(x_0), \varphi_1(x_1), \ldots) = (y_0, y_1, \ldots)$. Dakle, preslikavanje φ je surjektivno. ■

Za preslikavanje Φ iz prethodnog teorema kažemo da je surjektivno. Ako je svako od preslikavanja $\varphi_n\colon X_n \to Y_n$ bijekcija, kažemo da je preslikavanje $\Phi := \{\varphi_n\}\colon \{X_n, f_n\} \to \{Y_n, g_n\}$ inverznih nizova bijektivno.

3.3 Karakterizacija Cantorovog skupa

Znamo da je Cantorov skup kao topološki potprostor od $[0, 1]$ potpuno nepovezan kompaktan savršen metrički prostor. Ovdje ćemo pokazati da je on zapravo, u topološkom smislu, jedini takav.

Lema 3.5. *Neka je $\mathcal{U}$ otvoren pokrivač metričkog prostora X. Tada za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji profinjenje $\mathcal{V}$ od $\mathcal{U}$ sastavljeno od otvorenih skupova dijametra manjeg od $\frac{1}{n}$. Ako je X uz to kompaktan, onda postoji takvo konačno profinjenje.*

Teorem 3.6. *Neka je X kompaktan, potpuno nepovezan metrički prostor. Tada postoji niz $(\mathcal{U}_n)_n$ konačnih pokrivača za X takav da je svaki $\mathcal{U}_n$ familija disjunktnih skupova dijametra manjeg od $\frac{1}{n}$ koji su i otvoreni i zatvoreni u X, a $\mathcal{U}_{n+1}$ profinjuje $\mathcal{U}_n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.*

Dokaz. Komponente povezanosti od X su jednočlani podskupovi od X, pa prema lemi 2.20, za svaki $x \in X$ i otvorenu okolinu U od x, postoji skup V, otvoren i zatvoren u X takav da je $x \in V \subseteq U$. Neka je $\mathcal{W}_0$ otvoren pokrivač za X skupovima dijametra manjeg od 1. Svaki $x \in X$ leži u nekom $W_x \in \mathcal{W}_0$, te postoji otvoren i zatvoren podskup $V_x \subseteq X$ takav da je $x \in V_x \subseteq W_x$.

$\mathcal{V}_0 := \{V_x : x \in X\}$ pokriva X, pa postoji konačan potpokrivač $\{V_0^1, \dots, V_0^{k_1}\}$ od $\mathcal{V}$ za X. Skupovi $V_0^1, \dots, V_0^{k_1}$ su očito dijametra manjeg od 1, ali ne moraju biti disjunktni. U slučaju da nisu disjunktni, neka je $U_1^1 := V_0^1$ i za svaki $j = 2, \dots, k_1$ definiramo $U_1^j := V_0^j \setminus (\bigcup_{i=1}^{j-1} V_0^i)$. Skupovi $U_1^1, \dots, U_1^{k_1}$ su u parovima disjunktni, otvoreni (kao konačan presjek otvorenih skupova) i zatvoreni (kao presjek zatvorenih skupova). Kako je za svaki $j \in \{1, \dots, k_1\}$, $U_1^j \subseteq V_0^j$, dijametri tih skupova su manji od 1. Također je $\bigcup_{j=1}^{k_1} U_1^j = \bigcup_{j=1}^{k_1} V_0^j$, pa je $\mathcal{U}_1 := \{U_1^1, \dots, U_1^{k_1}\}$ pokrivač za X disjunktnim, otvorenim i zatvorenim skupovima čiji su dijametri manji od 1.

Neka je $\mathcal{U}_n := U_n^1, \dots, U_n^{k_n}$ konačan pokrivač za X međusobno disjunktnim, otvorenim i zatvorenim skupovima čiji su dijametri manji od $\frac{1}{n}$. Prema lemi 3.5 postoji profinjenje $\mathcal{W}_n$ od $\mathcal{U}_n$ sastavljeno od otvorenih skupova dijametra manjeg od $\frac{1}{n+1}$. Svaki $x \in X$ leži u nekom $W_{n(x)} \in \mathcal{W}_n$, te postoji otvoren i zatvoren podskup $V_{n(x)} \subseteq X$ takav da je $x \in V_{n(x)} \subseteq W_{n(x)}$. $\mathcal{V}_n := \{V_{n(x)} : x \in X\}$ pokriva X, pa postoji konačan potpokrivač $\{V_n^1, \dots, V_n^{k_{n+1}}\}$ od $\mathcal{V}_n$ za X. Skupovi $V_n^1, \dots, V_n^{k_{n+1}}$ su očito dijametra manjeg od $\frac{1}{n+1}$. U slučaju da $V_n^1, \dots, V_n^{k_{n+1}}$ nisu disjunktni, definiramo skupove $U_{n+1}^1 := V_n^1$ i za svaki $j = 2, \dots, k_{n+1}$, $U_{n+1}^j := V_n^j \setminus (\bigcup_{i=1}^{j-1} V_n^i)$. Skupovi $U_{n+1}^1, \dots, U_{n+1}^{k_{n+1}}$ su u parovima disjunktni, otvoreni i zatvoreni u X, njihovi dijametri su manji od $\frac{1}{n+1}$, te je $\mathcal{U}_{n+1} := \{U_{n+1}^1, \dots, U_{n+1}^{k_{n+1}}\}$ pokrivač za X koji profinjuje $\mathcal{U}_n$. Tako smo induktivno definirali traženi niz konačnih pokrivača za X. ■

Familiju $\mathcal{U}$ podskupova topološkog prostora možemo "opskrbiti" diskretnom topologijom i u tom smislu možemo promatrati $\mathcal{U}$ kao diskretan topološki prostor. Ako je $(\mathcal{U}_n)_n$ familija pokrivača kompaktog potpuno nepovezanog metričkog prostora X kao u prethodnom teoremu i ako svaki $\mathcal{U}_n$ opskrbimo diskretnom topologijom, možemo formirati inverzni niz topoloških prostora $\{\mathcal{U}_n, f_n\}_n$ čiji će inverzni limes biti homeomorfan s X, tj. vrijedi sljedeće:

Teorem 3.7. *Neka je X kompaktan, potpuno nepovezan metrički prostor. Tada je X homeomorfan inverznom limesu nekog inverznog niza konačnih diskretnih prostora.*

Dokaz. Neka je $(\mathcal{U}_n)_n$ niz pokrivača za X iz teorema 3.6 i neka je za svaki $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{U}_n := \{U_n^1, \dots, U_n^{k_n}\}$ topološki prostor s diskretnom topologijom. Za svaki $n \in \mathbb{N}$, prostor $\mathcal{U}_n$ je konačan, pa je kompaktan, a kako je diskretan, to je $\mathcal{U}_n$ i Hausdorffov. Za $n > 1$ definirajmo neprekidno preslikavanje $f_n \colon \mathcal{U}_n \to \mathcal{U}_{n-1}$ na sljedeći način. Ako je $U_n^i \in \mathcal{U}_n$, onda postoji jedinstven element U_{n-1}^j od $\mathcal{U}_{n-1}$ koji sadrži U_n^i, jer $\mathcal{U}_n$ profinjuje $\mathcal{U}_{n-1}$, a skupovi $U_{n-1}^1, \dots, U_{n-1}^{k_{n-1}}$ su disjunktni. Definiramo $f_n(U_n^i) := U_{n-1}^j$. Preslikavanje f_n je trivijalno neprekidno, jer su svi podskupovi prostora $\mathcal{U}_n$ otvoreni.

Tako smo dobili inverzni niz $\{\mathcal{U}_n, f_n\}_n$ kompaktnih Hausdorffovih prostora. Prema teoremu 3.2, inverzni limes $\mathcal{U}_\infty$ tog niza je neprazan, kompaktan Hausdorffov prostor.

Definirajmo preslikavanje $h \colon \mathcal{U}_\infty \to X$ na sljedeći način: Neka je $p = (U_1^{i_1}, U_2^{i_2}, \dots) \in \mathcal{U}_\infty$. Niz $(U_n^{i_n})_n$ je silazan niz nepraznih zatvorenih podskupova od X. X je kompaktan, pa je presjek $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n^{i_n}$ neprazan. Kako je za svaki $n \in \mathbb{N}$ $\operatorname{diam}(U_n^{i_n}) < \frac{1}{n}$, u presjeku $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n^{i_n}$ je samo jedna točka. Naime, pretpostavimo da su $x, y \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n^{i_n}$. Vrijedi da je $d(x, y) < \operatorname{diam} U_n^{i_n} < \frac{1}{n}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, iz čega slijedi da je $d(x, y) = 0$, tj. $x = y$. Definirajmo $h(p) = x$, gdje je $x \in X$ jedinstvena točka iz $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n^{i_n}$.

Pokažimo da je preslikavanje h bijekcija. Neka je $x \in X$. Za sve $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{U}_n$ je pokrivač za X disjunktnim skupovima, pa postoji jedinstven $U_n^{i_n} \in \mathcal{U}_n$ koji sadrži x. Dakle, postoji jedinstven silazan niz $(U_n^{i_n})_n$ skupova takav da je $U_n^{i_n} \in \mathcal{U}_n$ i $x \in U_n^{i_n}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Tada je $p := (U_1^{i_1}, U_2^{i_2}, \ldots)$ jedinstvena točka iz $\mathcal{U}_\infty$, takva da je $h(p) = x$.

Primijetimo da je familija $\mathcal{B} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{U}_n$ baza za topologiju na X. Naime, neka je U otvoren podskup od X i $x \in U$. Neka je $d := d(x, X \setminus U)$. Izaberemo $j \in \mathbb{N}$ takav da je $\frac{1}{j} < d$ i neka je $U_j^{i_j}$ onaj element od $\mathcal{U}_j$ koji sadrži x. Tada je $x \in U_j^{i_j} \subseteq U$.

Zato je, da bi dokazali da je preslikavanje h neprekidno, dovoljno provjeriti da je za svaki $j \in \mathbb{N}$ i $U_j^i \in \mathcal{U}_j$, skup $h^{-1}(U_j^i)$ otvoren u $\mathcal{U}_\infty$. $h^{-1}(U_j^i)$ se sastoji od svih točaka iz $\mathcal{U}_\infty$ čija je j-ta koordinata skup U_j^i. Skup $\{U_j^i\}$ je otvoren u $\mathcal{U}_j$, pa je skup $U_j := \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \times \cdots \times \mathcal{U}_{j-1} \times \{U_j^i\} \times \mathcal{U}_{j+1} \times \cdots$ otvoren u $\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{U}_n$. $\mathcal{U}_\infty$ ima relativnu topologiju kao potprostor produkta $\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{U}_n$, pa je skup $h^{-1}(U_j^i) = \mathcal{U}_\infty \cap U_j$ otvoren u $\mathcal{U}_\infty$. Dakle, preslikavanje h je neprekidno, pa je h homeomorfizam, prema lemi 2.4. ∎

Sad smo spremni dokazati karakterizaciju Cantorovog skupa. Vidjeli smo da je kompaktan, potpuno nepovezan metrički prostor topološki ekvivalentan inverznom limesu nekog inverznog niza konačnih diskretnih prostora. Primijetimo da dokaz prethodnog teorema ne daje samo egzistenciju, već i konstrukciju jednog takvog inverznog niza i homeomorfizma. Pokazat ćemo da, ako su X i Y kompaktni potpuno nepovezani metrički prostori koji su k tome i savršeni, onda pripadne inverzne nizove možemo izabrati tako da njihovi inverzni limesi budu homeomorfni. Dokažimo prvo sljedeću lemu.

Lema 3.8. *Neka je X potpuno nepovezan savršen topološki prostor i U neprazan, otvoren podskup od X. Tada za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoje disjunktni, neprazni, otvoreni podskupovi $U_1, \ldots, U_n$ od X takvi da je $U = \bigcup_{i=1}^n U_i$.*

Dokaz. Indukcijom po $n \in \mathbb{N}$. Za $n = 1$ tvrdnja je očito ispunjena, jer je sam U neprazan otvoren podskup od X. Pretpostavimo da je, za neki $n \in \mathbb{N}$, $U = \bigcup_{i=1}^n U_i$, gdje su $U_1, \ldots, U_n$ disjunktni, neprazni, otvoreni podskupovi od X. U_n nije povezan, jer su jedini povezani podskupovi od X jednočlani skupovi, a takvi nisu otvoreni u X, jer je X savršen. Neka je $U_n = U_n^1 \sqcup U_n^2$. Tada su U_n^1 i U_n^2 disjunktni, neprazni, otvoreni podskupovi od U_n. Kako je U_n otvoren u X, to su U_n^1 i U_n^2 otvoreni i u X i vrijedi $U = (\bigcup_{i=1}^{n-1} U_i) \cup U_n^1 \cup U_n^2$, tj. U je unija $n+1$ disjunktnih, nepraznih otvorenih podskupova od X. ∎

Teorem 3.9. *Neka su X i Y potpuno nepovezani kompaktni savršeni metrički prostori. Tada je X homeomorfan s Y.*

Dokaz. Neka je $\{\mathcal{U}_n\}_n$ niz pokrivača za X iz teorema 3.6 i $\{\mathcal{V}_n\}_n$ niz pokrivača za Y iz istog teorema. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ neka je $\mathcal{U}_n = \{U_n^1, \ldots, U_n^{k_n}\}$ i $\mathcal{V}_n = \{V_n^1, \ldots, V_n^{l_n}\}$. Ako su $\mathcal{U}_1$ i $\mathcal{V}_1$ ekvipotentni, neka je $\mathcal{U}_1' := \mathcal{U}_1$ i $\mathcal{V}_1' := \mathcal{V}_1$. Ako je $k_1 > l_1$, definiramo ekvipotentne pokrivače $\mathcal{U}_1'$ za X i $\mathcal{V}_1'$ za Y na sljedeći način. Prema lemi 3.8 postoje disjunktni neprazni otvoreni skupovi $W_1, \ldots, W_{k_1-l_1+1}$ takvi da je $V_1^1 = W_1 \cup \ldots \cup W_{k_1-l_1+1}$. Definirajmo $\mathcal{U}_1' := \mathcal{U}_1$ i $\mathcal{V}_1' := \{W_1, \ldots, W_{k_1-l_1+1}, V_1^2, \ldots, V_1^{l_1}\}$. Primijetimo da su skupovi $W_1, \ldots, W_{k_1-l_1+1}$ iz dekompozicije od V_1^1 također zatvoreni u Y. Svaki od tih skupova je komplement unije otvorenih skupova u V_1^1, pa je zatvoren u V_1^1, a kako je V_1^1 zatvoren u X, to je svaki od skupova $W_1, \ldots, W_{k_1-l_1+1}$ zatvoren u X.

Ako je pak $k_1 < l_1$, definiramo $\mathcal{V}'_1 := \mathcal{V}_1$ i $\mathcal{U}'_1 := \{Y_1, \ldots, Y_{l_1-k_1+1}, U_1^2, \ldots, U_1^{l_1}\}$, gdje su $Y_1, \ldots, Y_{l_1-k_1+1}$ neki disjunktni, neprazni otvoreni podskupovi od X takvi da je $U_1^1 = Y_1 \cup \ldots \cup Y_{l_1-k_1+1}$. Skupovi $Y_1, \ldots, Y_{l_1-k_1+1}$ iz dekompozicije od U_1^1 su također zatvoreni u X.

Dijametri elemenata pokrivača $\mathcal{U}'_1$ i $\mathcal{V}'_1$ su očito manji od 1.

Pretpostavimo da smo definirali ekvipotentne pokrivače $\mathcal{U}'_n := \{U'_{n1}, \ldots, U'_{nj_n}\}$ za X i $\mathcal{V}'_n := \{V'_{n1}, \ldots, V'_{nj_n}\}$ za Y takve da su elementi od $\mathcal{U}'_n$ međusobno disjunktni, otvoreni i zatvoreni podskupovi od X i njihovi dijametri su manji od $\frac{1}{n}$ u X, a elementi od $\mathcal{V}'_n$ su međusobno disjunktni, otvoreni i zatvoreni podskupovi od Y i njihovi dijametri su manji od $\frac{1}{n}$ u Y.

Neka je $m' \in \mathbb{N}$, $m' > n$, takav da svaki skup dijametra manjeg od $\frac{1}{m'}$ siječe najviše jedan od skupova $U'_{n1}, \ldots, U'_{nj_n}$. Možemo, na primjer, uzeti $m' \in \mathbb{N}$ takav da je $\frac{1}{m'} < d := \min\{d_X(U'_{ni}, U'_{nk}) : \ i, k \in \{1, \ldots, j_n\}, \ i \neq k\}$. Tada i za svaki prirodan broj n' veći od m' vrijedi $\frac{1}{n'} < d$, pa m' možemo izabrati tako da bude veći od n.

Analogno izaberemo $m'' \in \mathbb{N}$, $m'' > n$ takav da svaki skup dijametra manjeg od $\frac{1}{m''}$ siječe najviše jedan od skupova $V'_{n1}, \ldots, V'_{nj_n}$.

Neka je $m := \max\{m', m''\}$. Tada $\mathcal{U}_m$ profinjuje $\mathcal{U}'_n$. Naime, svaki element U_m od $\mathcal{U}_m$ je dijemetra manjeg od $\frac{1}{m'}$, pa čak i ako je U_m prvotno bio sadržan u U_n^1 kojeg smo, moguće, rastavili, on opet siječe najviše jedan od disjunktnih skupova $U'_{n1}, \ldots, U'_{nj_n}$. $\mathcal{U}'_n$ pokriva X, pa je U_m u potpunosti sadržan u nekom od skupova $U'_{n1}, \ldots, U'_{nj_n}$. Analogno se pokaže da $\mathcal{V}_m$ profinjuje $\mathcal{V}'_n$.

Neka je $i \in \{1, \ldots, j_n\}$ proizvoljan. Neka su $U_{mi}^1, \ldots, U_{mi}^{p_{mi}}$ oni elementi od $\mathcal{U}_m$ koji leže unutar U'_{ni}, a $V_{mi}^1, \ldots, V_{mi}^{r_{mi}}$ neka su oni elementi od $\mathcal{V}_m$ koji leže unutar V'_{ni}. Ako su familije $\mathcal{U} := \{U_{mi}^1, \ldots, U_{mi}^{p_{mi}}\}$ i $\mathcal{V} := \{V_{mi}^1, \ldots, V_{mi}^{r_{mi}}\}$ ekvipotentne, definiramo $\mathcal{U}''_{mi} := \mathcal{U}$ i $\mathcal{V}''_{mi} := \mathcal{V}$. Ako je $p_{mi} > r_{mi}$, koristeći lemu 3.8 rastavljamo V_{mi}^1 na $s_{mi} := p_{mi} - r_{mi} + 1$ disjunktnih, nepraznih, otvorenih (pa onda i zatvorenih) skupova $W_{mi}^1, \ldots, W_{mi}^{s_{mi}}$, tako da dobijemo ekvipotentne skupove $\mathcal{V}''_{mi} := \{W_{mi}^1, \ldots, W_{mi}^{s_{mi}}, V_{mi}^2, \ldots, V_{mi}^{r_{mi}}\}$ i $\mathcal{U}''_{mi} := \mathcal{U}$.

Ako je pak $p_{mi} < r_{mi}$, rastavimo U_{mi}^1 na $t_{mi} := r_{mi} - p_{mi} + 1$ disjunktnih, nepraznih, otvorenih i zatvorenih skupova $Y_{mi}^1, \ldots, Y_{mi}^{t_{mi}}$ tako da dobijemo ekvipotentne skupove $\mathcal{U}''_{mi} := \{Y_{mi}^1, \ldots, Y_{mi}^{t_{mi}}, U_{mi}^2, \ldots, U_{mi}^{p_{mi}}\}$ i $\mathcal{V}''_{mi} := \mathcal{V}$.

U bilo kojem od tih slučajeva je svaki element od $\mathcal{U}''_{mi}$ unutar U'_{ni}, a svaki element od $\mathcal{V}''_{mi}$ je unutar V'_{ni}.

Definiramo $\mathcal{U}'_{n+1} := \bigcup_{i=1}^{j_n} \mathcal{U}''_{mi}$ i $\mathcal{V}'_{n+1} := \bigcup_{i=1}^{j_n} \mathcal{V}''_{mi}$. Familija $\mathcal{U}'_{n+1}$ pokriva X i profinjuje $\mathcal{U}'_n$, a elementi od $\mathcal{U}'_{n+1}$ su disjunktni skupovi, otvoreni i zatvoreni u X, te je njihov dijametar manji od $\frac{1}{n+1}$ u X (m je strogo veći od n). Jednako tako, $\mathcal{V}'_{n+1}$ pokriva Y i profinjuje $\mathcal{V}'_n$, a elementi od $\mathcal{V}'_{n+1}$ su disjunktni skupovi, otvoreni i zatvoreni u Y, te je njihov dijametar manji od $\frac{1}{n+1}$ u Y.

Par $\{\mathcal{U}'_{n+1}, \mathcal{V}'_{n+1}\}$ još ima svojstvo da za svaki $i \in \{1, \ldots j_n\}$, U'_{ni} i V'_{ni} sadrže jednak broj elemenata pokrivača $\mathcal{U}'_{n+1}$ i $\mathcal{V}'_{n+1}$.

Na taj način smo induktivno definirali niz parova $\{\mathcal{U}'_n, \mathcal{V}'_n\}_n$ takav da vrijedi:

i) $\{\mathcal{U}'_n\}_n$ je niz pokrivača za X takav da su za svaki $n \in \mathbb{N}$ elementi od $\mathcal{U}'_n$ disjunktni skupovi dijametra manjeg od $\frac{1}{n}$ koji su i otvoreni i zatvoreni u X i $\mathcal{U}'_{n+1}$ profinjuje $\mathcal{U}'_n$.

ii) $\{\mathcal{V}'_n\}_n$ je niz pokrivača za X takav da su za svaki $n \in \mathbb{N}$ elementi od $\mathcal{V}'_n$ disjunktni skupovi dijametra manjeg od $\frac{1}{n}$ koji su i otvoreni i zatvoreni u X i $\mathcal{V}'_{n+1}$ profinjuje $\mathcal{V}'_n$.

iii) za svaki $n \in \mathbb{N}$ familije $\mathcal{U}'_n := \{U_n^1, \ldots, U_n^{k_n}\}$ i $\mathcal{V}'_n := \{V_n^1, \ldots, V_n^{k_n}\}$ su ekvipotentne, a njihovi elementi uređeni na taj način da za svaki $i \in \{1, \ldots, k_n\}$, U_n^i i V_n^i sadrže jednak broj elemenata pokrivača $\mathcal{U}'_{n+1}$, odnosno $\mathcal{V}'_{n+1}$.

Za svaki $n \in \mathbb{N}$ promatrajmo familije $\mathcal{U}'_n$ i $\mathcal{V}'_n$ kao diskretne topološke prostore i neka su $\{\mathcal{U}'_n, f_n\}$ i $\{\mathcal{V}'_n, g_n\}$ inverzni nizovi, pri čemu su $f_n \colon \mathcal{U}'_n \to \mathcal{U}'_{n-1}$ i $g_n \colon \mathcal{V}'_n \to \mathcal{V}'_{n-1}$ preslikavanja definirana kao u dokazu teorema 3.7. Induktivno definiramo bijektivno preslikavanje $\Phi := \{\varphi_n\}_n \colon \{\mathcal{U}'_n, f_n\} \to \{\mathcal{V}'_n, g_n\}$ inverznih nizova. Definiramo $\varphi_1 \colon \mathcal{U}'_1 \to \mathcal{V}'_1$ s $\varphi_1(U_1^i) := V_1^i$, za svaki $i \in \{1, \ldots, k_1\}$. Pretpostavimo da smo definirali $\varphi_{n-1} \colon \mathcal{U}'_{n-1} \to \mathcal{V}'_{n-1}$ s $\varphi_{n-1}(U_{n-1}^i) := V_{n-1}^i$, za svaki $i \in \{1, \ldots, k_{n-1}\}$. Definiramo $\varphi_n \colon \mathcal{U}'_n \to \mathcal{V}'_n$ tako da φ_n za svaki $i \in \{1, \ldots, k_{n-1}\}$ elementima familije $\mathcal{U}'_n$ koji se nalaze unutar U_{n-1}^i bijektivno pridruži elemente familije $\mathcal{V}'_n$ koji se nalaze unutar V_{n-1}^i. Neka je $n \in \mathbb{N}$, $j \in \{1, \ldots, k_{n-1}\}$ i $U_n^i \subset U_{n-1}^j$ iz $\mathcal{U}'_n$. Vrijedi $g_n(\varphi_n(U_n^i)) = g_n(V_n^i) = V_{n-1}^j = \varphi_{n-1}(U_{n-1}^j) = \varphi_{n-1}(f_n(U_n^i))$ i φ_n je trivijalno neprekidno za svaki $n \in \mathbb{N}$, jer je prostor $\mathcal{U}'_n$ diskretan, pa je $\Phi \colon \{\mathcal{U}'_n, f_n\} \to \{\mathcal{V}'_n, g_n\}$ preslikavanje inverznih nizova. Kako je Φ bijektivno preslikavanje, to je prema teoremu 3.4 inducirano preslikavanje $\varphi \colon \mathcal{U}'_\infty \to \mathcal{V}'_\infty$ inverznih limesa surjekcija, a očito je φ i injekcija. Prema teoremu 3.3 φ je neprekidno preslikavanje, pa je homeomorfizam. Prema teoremu 3.7, $\mathcal{U}'_\infty$ je homeomorfan s X i $\mathcal{V}'_\infty$ je homeomorfan s Y, pa su X i Y homeomorfni. ■

Iz prethodnog teorema odmah slijedi:

Korolar 3.10. *Neka je X potpuno nepovezan kompaktan savršen metrički prostor. Tada je X homeomorfan Cantorovom skupu.*

4. Hahn-Mazurkiewiczev teorem

Napokon dolazimo do iskaza i dokaza Hahn-Mazurkiewiczevog teorema. Prvo dokazujemo da je neprekidna slika segmenta Peanov kontinuum. Ovaj smjer jednostavna je posljedica Urysonovog teorema metrizacije i činjenice da neprekidna zatvorena preslikavanja čuvaju lokalnu povezanost. Nakon toga, dokazat ćemo Aleksandrov-Hausdorffov teorem, koji zajedno s činjenicom da je Peanov kontinuum uniformno lokalno lukovima povezan, koristimo u dokazu da je svaki Peanov kontinuum neprekidna slika segmenta.

4.1 Preslikavanja segmenta

Iako je lokalna povezanost očito topološko svojstvo, za razliku od kompaktnosti i povezanosti, ona nije invarijanta neprekidnog preslikavanja. Pokazat ćemo da zatvorena neprekidna preslikavanja čuvaju lokalnu povezanost.

Lema 4.1. *Neka je $f\colon X \to Y$ neprekidno preslikavanje topoloških prostora, C komponenta povezanosti od Y. Ako je $f^{-1}(C)$ neprazan, tada je $f^{-1}(C)$ unija komponenata povezanosti od X.*

Dokaz. Neka je $B \subseteq X$ komponenta povezanosti od X. $f(B)$ je povezan potprostor od Y, pa je ili $f(B) \cap C = \emptyset$ ili je $f(B) \subseteq C$. To znači da je ili $f^{-1}(C) \cap B = \emptyset$ ili je $B \subseteq f^{-1}(C)$. ■

Lema 4.2. *Neka je X lokalno povezan prostor, $f\colon X \to Z$ neprekidno zatvoreno preslikavanje. Tada je slika od f lokalno povezan prostor.*

Dokaz. Neka je $Y = f(X)$, U otvoren potprostor od Y i C komponenta povezanosti od U. Preslikavanje f je neprekidno, pa je skup $f^{-1}(U)$ otvoren u X. Prema lemi 4.1 $f^{-1}(C)$ je unija komponenata povezanosti od $f^{-1}(U)$. Komponente povezanosti od $f^{-1}(U)$ su otvorene prema lemi 2.31, tako da je $f^{-1}(C)$ otvoren u X, odnosno $X \setminus f^{-1}(C)$ je zatvoren u X. Vrijedi $f(X \setminus f^{-1}(C)) = f(f^{-1}(Y \setminus C)) = Y \setminus C$, jer je Y slika od f. f je zatvoreno pa je $Y \setminus C$ zatvoren u Y, tj. C je otvoren u Y. Ponovno, prema lemi 2.31 vrijedi da je Y lokalno povezan. ■

Iz lema 2.4 i 4.2 odmah slijedi sljedeći teorem.

Teorem 4.3. *Neka je X kompaktan, lokalno povezan prostor, Y Hausdorffov prostor, te neka je $f\colon X \to Y$ neprekidno preslikavanje. Tada je slika od f kompaktan lokalno povezan prostor.*

Sljedeći teorem posljednji je korak u dokazu ključnog rezultata ovog odjeljka, koji je zapravo jedan smjer Hahn-Mazurkiewiczevog teorema.

Teorem 4.4. *Neka je X kompaktan metrički prostor, Z Hausdorffov prostor, te neka je $f\colon X \to Z$ neprekidno preslikavanje. Tada je slika od f kompaktan metrizabilan prostor.*

Dokaz. Neka je $Y = f(X)$. Y je kompaktan Hausdorffov prostor, pa je prema lemi 2.7 normalan. Ako pokažemo da Y k tome zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti, onda je on metrizabilan prema teoremu 2.10. Dokazujemo da Y ima prebrojivu bazu. X je kompaktan metrički prostor i kao takav ima prebrojivu bazu prema teoremu 2.5 , te neka je to $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Neka je U otvoren u X. $X\backslash U$ je zatvoren, pa je i $f(X\backslash U)$ zatvoren, jer je f zatvoreno prema lemi 2.4. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ definirajmo familiju $\mathcal{B}_n := \{Y \setminus f(X \setminus U)$: postoji konačan podskup $K \subseteq \mathbb{N}$ t.d. je $|K| = n$ i za koji je $U = \bigcup_{j\in K} U_j\}$. Pokazat ćemo da je familija $\mathcal{B} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_n$ prebrojiva baza za Y. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ je familija $\mathcal{B}_n$ prebrojiva, jer je $|\mathcal{B}_n|$ jednak broju konačnih podskupova prebrojivog skupa, a takvih je prebrojivo. Familija $\mathcal{B}$ je, dakle, prebrojiva unija prebrojivih familija, pa je prebrojiva.

Neka je $y \in Y$, a V otvorena okolina od y u Y. $f^{-1}(y)$ je zatvoren podskup od X i sadržan je u otvorenom podskupu $f^{-1}(V)$ od X. $f^{-1}(y)$ je kompaktan, pa se pokrivač za $f^{-1}(y)$ koji se sastoji od svih U_j takvih da je $f^{-1}(V) = \bigcup_{j\in I} U_j$, za neki $I \subseteq \mathbb{N}$, reducira do konačnog potpokrivača $\{U_1, \dots U_n\}$.

Neka je $U := \bigcup_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{B}$. Vrijedi $f^{-1}(y) \subseteq U \subseteq f^{-1}(V)$, iz čega odmah slijedi $X \setminus f^{-1}(V) \subseteq X \setminus U \subseteq X \setminus f^{-1}(y)$, a iz toga lako dobivamo $f^{-1}(Y \setminus V) \subseteq X \setminus U \subseteq f^{-1}(Y \setminus \{y\})$. f preslikava X *na* Y, tako da vrijedi $Y \setminus V \subseteq f(X \setminus U) \subseteq Y \setminus \{y\}$, tj. $y \in Y \setminus f(X \setminus U) \subseteq V$. ■

Napokon, kao posljedicu teorema 4.3 i 4.4 imamo:

Teorem 4.5. *Neka je Y Hausdorffov prostor, $f\colon [0,1] \to Y$ neprekidno preslikavanje. Tada je slika od f Peanov kontinuum.*

4.2 Preslikavanja Cantorovog skupa

Cilj nam je dokazati jedno od osnovnih svojstava Cantorovog skupa, poznati Aleksandrov-Hausdorffov teorem koji kaže da je svaki kompaktan metrički prostor neprekidna slika Cantorovog skupa. Taj rezultat ima brojne primjene, posebno u analizi, geometriji i topologiji. Nama će biti od koristi kao ključna ideja u dokazu Hahn-Mazurkiewiczevog teorema.

Ideja dokaza Aleksandrov-Hausdorffovog teorema vrlo je zanimljiva i originalna, te pokazuje još jednu od brojnih primjena inverznih nizova u topologiji. Trebat će nam sljedeća lema.

Lema 4.6. *Inverzni limes X_∞ niza $\{X, id\}_{n\in\mathbb{N}}$ je homeomorfan s X .*

Dokaz. Očito je $X_\infty = \{(x, x, x, \dots) : x \in X\}$. Definiramo preslikavanje $f\colon X_\infty \to X$ s $f(x, x, x, \dots) := x$. f je očito bijekcija.

Neka je U otvoren podskup od X. $f^{-1}(U) = \{(x,x,x,\dots) : x \in U\}$, a lako se provjerava da je $\{(x,x,x,\dots) : x \in U\} = X_\infty \cap U \times X \times X \times X \times \cdots$, pa je $f^{-1}(U)$ otvoren u X_∞. Dakle, f je neprekidno preslikavanje.

Neka je $U = X_\infty \cap U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n \times X \times X \times X \times \cdots$ proizvoljan otvoren podskup od X_∞ (U_i je otvoren podskup od X_i, za sve $i \in \{1,\dots,n\}$). Definiramo $V := \bigcap_{i=1}^{n} U_i$. Vrijedi $f(U) = f(X_\infty \cap V \times V \times V \times \cdots) = f(\{(x,x,x,\dots) : x \in V\}) = V$, pa je f otvoreno preslikavanje. Dakle, f je homeomorfizam. ∎

Teorem 4.7 (Aleksandrov-Hausdorff). *Neka je X kompaktan metrički prostor. Postoji neprekidna surjekcija Cantorovog skupa na X.*

Dokaz. Neka je $\{\mathcal{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ familija konačnih pokrivača za X, takva da se svaki $\mathcal{U}_n$ sastoji od zatvarača otvorenih skupova dijametra manjeg od $\frac{1}{n+1}$, te je $\mathcal{U}_n$ profinjenje od $\mathcal{U}_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Ideja dokaza je formirati inverzni niz $\{V_n, f_n\}$ kompaktnih Hausdorffovih prostora na neki način povezanih s danim nizom pokrivača, tako da inverzni limes V_∞ toga niza bude potpuno nepovezan, te paralelno formirati surjektivno preslikavanje $\Phi := \{\varphi_n\}$ nizova $\{V_n, f_n\}$ i $\{X, id\}_{n\in\mathbb{N}}$. Zatim možemo primijeniti prethodne rezultate.

$\mathcal{U}_1 = \{U_1^1, U_1^2, \dots, U_1^{j_1}\}$. Definirajmo disjunktne kompaktne skupove $V_1^{i_1} := \{(u, i_1) : u \in U_1^{i_1}\}$, $i_1 = 1,\dots,j_1$. Definirajmo topologiju na $V_1 := \bigcup_{i_1=1}^{j_1} V_1^{i_1}$ tako da su skupovi $V_1^1,\dots,V_1^{j_1}$ otvoreni, a preslikavanja $h_1^{i_1} \colon V_1^{i_1} \to U_1^{i_1}$, definirana s $h_1^{i_1}(u,i_1) := u$, $u \in U_1^{i_1}$, $i_1 = 1,\dots,j_1$, homeomorfizmi. Definirajmo preslikavanje $\varphi_1 \colon V_1 \to X$ s $\varphi_1|_{V_1^{i_1}} := h_1^{i_1}$.

$\mathcal{U}_2 = \{U_2^1, U_2^2, \dots, U_2^{j_2}\}$. Svaki element $U_2^{i_1}$ od $\mathcal{U}_2$ leži u nekom $U_1^{i_2} \in \mathcal{U}_1$. Za svaki $U_1^{i_2} \in \mathcal{U}_1$ definirajmo $V_2^{(i_1,i_2)} := \{(u, i_1, i_2) : U_2^{i_1} \subseteq U_1^{i_2}, u \in U_2^{i_1}\}$. Definirajmo topologiju na $V_2 := \bigcup_{i_1,i_2} V_2^{(i_1,i_2)}$ tako da su skupovi $V_2^{(i_1,i_2)}$ otvoreni, a preslikavanja $h_2^{(i_1,i_2)} \colon V_2^{(i_1,i_2)} \to U_2^{i_1}$, definirana s $h_2^{(i_1,i_2)}(u,i_1,i_2) := u$, homeomorfizmi.
Definirajmo preslikavanja $\varphi_2 \colon V_2 \to X$ s $\varphi_2|_{V_2^{(i_1,i_2)}} := h_2^{(i_1,i_2)}$ i $f_2 \colon V_2 \to V_1$ s $f_2((u,i_1,i_2)) := (u, i_2)$. Vrijedi $\varphi_1 f_2 = \varphi_2 = id \circ \varphi_2$, tj. sljedeći dijagram komutira:

$$\begin{tikzcd} V_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\varphi_2"] & V_1 \arrow[d, "\varphi_1"] \\ X \arrow[r, "id"] & X \end{tikzcd}$$

Pretpostavimo da smo definirali $\{V_{k-1}, \varphi_{k-1}, f_{k-1}\}$ za neki $k \geq 3$. Svaki element $U_k^{i_1}$ od $\mathcal{U}_k$ leži u nekom $U_{k-1}^{i_2} \in \mathcal{U}_{k-1}$, koji pak leži u nekom $U_{k-2}^{i_3} \in \mathcal{U}_{k-2}$ itd. Na kraju, svaki element $U_2^{i_{k-1}}$ od $\mathcal{U}_2$ leži u nekom $U_1^{i_k} \in \mathcal{U}_1$. Za svaki izbor $(i_2, i_3, \dots, i_k)$ definirajmo

$$V_k^{(i_1,i_2,\dots,i_k)} := \{(u, i_1, i_2, \dots, i_k) : U_k^{i_1} \subseteq U_{k-1}^{i_2} \subseteq U_{k-2}^{i_3} \subseteq \cdots \subseteq U_2^{i_{k-1}} \subseteq U_1^{i_k}, u \in U_k^{i_1}\}.$$

Ovdje koristimo činjenicu da je $\mathcal{U}_n$ profinjenje od $\mathcal{U}_{n-1}$, za sve $n \in \mathbb{N}$ kako bismo mogli definirati funkcije f_n za sve $n \in \mathbb{N}$.

Definirajmo topologiju na $V_k := \bigcup_{i_1,\dots,i_k} V_k^{(i_1,\dots,i_k)}$ tako da su skupovi $V_k^{(i_1,\dots,i_k)}$ otvoreni, a preslikavanja $h_k^{(i_1,\dots,i_k)}\colon V_k^{(i_1,\dots,i_k)} \to U_k^{i_1}$, definirana s $h_k^{(i_1,\dots,i_k)}(u, i_1, \dots, i_k) := u$ homeomorfizmi. Konačno, definirajmo preslikavanja $\varphi_k\colon V_k \to X$ sa $\varphi_k|_{V_k^{(i_1,\dots,i_k)}} := h_k^{(i_1,\dots,i_k)}$ i $f_k\colon V_k \to V_{k-1}$ sa
$f_k((u, i_1, i_2, \dots, i_k)) := (u, i_2, \dots, i_k)$. Vrijedi $\varphi_{k-1} f_k = \varphi_k = id \circ \varphi_k$.

Time smo rekurzivno definirali $\{V_n, \varphi_n, f_n\}$ za sve $n \in \mathbb{N}$ tako da komutira sljedeći dijagram:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "f_{n+1}"] & V_n \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "\varphi_n"] & V_{n-1} \arrow[r, "f_{n-1}"] \arrow[d, "\varphi_{n-1}"] & \cdots \arrow[r, "f_2"] & V_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\varphi_2"] & V_1 \arrow[d, "\varphi_1"] \\
\cdots \arrow[r, "id"] & X \arrow[r, "id"] & X \arrow[r, "id"] & \cdots \arrow[r, "id"] & X \arrow[r, "id"] & X.
\end{tikzcd}$$

Za svaki $n \in \mathbb{N}$, φ_n je neprekidna surjekcija, jer su $h_n^{(i_1,\dots,i_n)}\colon V_n^{(i_1,\dots,i_k)} \to U_n^{i_1}$ homeomorfizmi, $\mathcal{U}_n$ pokriva X, a V_n^i su disjunktni zatvoreni skupovi.

V_n^i je homeomorfan s U_n^i za svako i, pa je kao takav kompaktan metrički prostor (U_n^i je kompaktan za svaki i, jer je zatvoren potprostor od X). Prema tome, za svaki $n \in \mathbb{N}$ je V_n kompaktan (kao konačna unija kompaktnih skupova) i metrički.

Prema teoremu 3.2 inverzni limes V_∞ inverznog niza $\{V_n, f_n\}$ je neprazan kompaktan Hausdorffov prostor. S obzirom da je $\Phi := \{\varphi_n\}\colon \{V_n, f_n\} \to \{X, id\}$ surjekcija, prema teoremu 3.4 je inducirano neprekidno preslikavanje $\varphi\colon V_\infty \to X_\infty$ također surjekcija. Prema lemi 4.6 postoji homeomorfizam $h\colon X_\infty \to X$.

Pokazat ćemo da je V_∞ potpuno nepovezan, ali ne mora nužno biti savršen. Međutim, i u slučaju da V_∞ nije savršen, produkt $V_\infty \times \mathsf{C}$ će biti potpuno nepovezan i savršen, pa će postoji homeomorfizam $h'\colon \mathsf{C} \to V_\infty \times \mathsf{C}$. Označimo li s $\pi\colon V_\infty \times \mathsf{C} \to V_\infty$ projekciju, tada će $h \circ \varphi \circ \pi \circ h'\colon \mathsf{C} \to X$ biti tražena neprekidna surjekcija Cantorovog skupa na X.

Ostaje još pokazati da je V_∞ potpuno nepovezan. Skup točaka prostora V_∞ koje imaju n-tu koordinatu u skupu $V_n^{(i_1,\dots,i_n)}$ je otvoren i zatvoren u V_∞:

V_∞ ima topologiju potprostora od $\prod_{n\in\mathbb{N}} V_n$, skup $V_n^{(i_1,\dots,i_n)}$ je otvoren i zatvoren u V_n, pa je $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_{n-1} \times V_n^{(i_1,\dots,i_n)} \times V_{n+1} \times \cdots$ otvoren i zatvoren u $\prod_{n\in\mathbb{N}} V_n$, te je njegov presjek s V_∞ otvoren i zatvoren u V_∞ .

Neka su $x = (x_1, x_2, \dots)$ i $y = (y_1, y_2, \dots)$ dvije različite točke prostora V_∞. Ako pokažemo da za neki $n \in \mathbb{N}$ x_n i y_n leže u različitim podskupovima $V_n^{(i_1,\dots,i_n)}$ i $V_n^{(i'_1,\dots,i'_n)}$ od V_n tada x i y leže u različitim komponentama povezanosti od V_∞. Neka je $x = ((u, i_1), (u, i_1, i_2), \dots)$, $y = ((v, i'_1), (v, i'_1, i'_2), \dots)$, $x \neq y$. Ako je $u \neq v$, postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da niti jedan element pokrivača $\mathcal{U}_n$ ne sadrži u i v (npr. možemo uzeti n takav da je $\frac{1}{n} < \frac{1}{2} d(u, v)$). U tom slučaju, x_n i y_n leže u različitim podskupovima $V_n^{(i_1,\dots,i_n)}$ i $V_n^{(i'_1,\dots,i'_n)}$ od V_n (i_1 je nužno različit od i'_1). Ako je pak $u = v$, onda postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $x_n \neq y_n$, što znači da x_n i y_n leže u različitim podskupovima $V_n^{(i_1,\dots,i_n)}$ i $V_n^{(i'_1,\dots,i'_n)}$ od V_n. ■

Prethodni teorem omogućuje jednostavnu konstrukciju neprekidne surjekcije segmenta $I := [0, 1]$ na kvadrat I^2. Neka je $f := (f_1, f_2) : \mathsf{C} \to I^2$ neprekidna surjekcija Cantorovog skupa na kvadrat I^2. Definiramo proširenje $F := (F_1, F_2)\colon I \to I^2$ preslikavanja f na sljedeći način: Neka je $\langle a, b\rangle$ proizvoljna komponenta skupa $I \setminus \mathsf{C}$. Definiramo F na $[a, b]$ tako da su koordinatne funkcije $F_1|_{[a,b]}$ i $F_2|_{[a,b]}$ afina preslikavanja određena svojim vrijednostima u točkama a i b. Jednostavno se pokaže da je preslikavanje F neprekidno. U prvom poglavlju spomenuli smo da surjekcija segmenta na kvadrat može biti skoro svuda diferencijabilna. F je primjer jednog takvog preslikavanja. Preslikavanje F je očito diferencijabilno u svakoj točki skupa $I \setminus \mathsf{C}$, a to je skoro svuda, jer je Cantorov skup C mjere nula.

4.3 Hahn-Mazuriewiczev teorem

Kao što smo najavili, cilj nam je dobiti karaktrizaciju Peanovih kontinuuma. Pokazali smo da je, da bi topološki prostor bio Peanov kontinuum, dovoljno da je Hausdorffov i da je neprekidna slika segmenta. U ovom poglavlju dokazujemo obrat: ako je prostor Peanov kontinuum, onda je on (nužno) neprekidna slika segmenta. Iskoristit ćemo rezultat prethodnog poglavlja da formiramo neprekidnu surjekciju Cantorovog skupa na Peanov kontinuum i svojstvo Peanovog kontinuuma koje zovemo uniformna lokalna povezanost lukovima, kako bi tu funkciju neprekidno proširili na čitav segment. Motivaciju za ovakav pristup nalazimo u prethodnom primjeru. Dokažimo prvo da Peanov kontinuum ima spomenuto svojstvo.

Lema 4.8. *Neka je X Peanov kontinnum, $\epsilon > 0$ realan broj. Tada postoji realan broj $\delta > 0$ takav da za sve $x, y \in X$ takve da je $d(x, y) < \delta$ postoji luk od x do y dijametra manjeg od ϵ. Kažemo da je X* ***uniformno lokalno lukovima povezan****.*

Dokaz. Prema teoremu 2.32 je X uniformno lokalno povezan. Iz dokaza tog teorema vidimo da vrijedi i više, tj. za svaki $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da čim je $d(x, y) < \delta$ postoji *otvoren* povezan skup U dijametra manjeg od ϵ koji sadrži x i y. Prema teoremu 2.36 u U postoji luk od x do y. Njegov dijametar je manji od ϵ. ■

Napokon smo u poziciji gdje možemo dokazati naš krajnji cilj:

Teorem 4.9 (**Hahn-Mazuriewicz**). *Hausdorffov prostor X je Peanov kontinuum ako i samo ako postoji neprekidna surjekcija $F\colon [0, 1] \to X$.*

Dokaz. ($\Leftarrow$) smo pokazali (teorem 4.5).

($\Rightarrow$) Neka je $\mathsf{C} \subset I := [0, 1]$ Cantorov skup. Komplement $I \setminus \mathsf{C}$ ima prebrojivo mnogo komponenti povezanosti. Neka su to $I_n = \langle p_n, q_n\rangle$, $n \in \mathbb{N}$. Prema teoremu 4.7 postoji neprekidna surjekcija $f\colon \mathsf{C} \to X$. Definiramo proširenje $F\colon I \to X$ preslikavanja f na sljedeći način:

Ako je za neki $n \in \mathbb{N}$ $f(p_n) = f(q_n)$ definirajmo $F(x) := f(p_n)$, za sve $x \in I_n$.

Nadalje, neka je $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz pozitivnih realnih brojeva takav da $(\epsilon_n)_n \to 0$. Jer je X uniformno lokalno lukovima povezan, postoji realan broj $\eta_1 > 0$, $\eta_1 < \epsilon_1$, takav da za sve $a, b \in X$ takve da je $d(a,b) < \eta_1$ postoji luk od a do b dijametra manjeg od ϵ_1.

f je neprekidno preslikavanje kompaktnog prostora u metrički prostor, pa je f uniformno neprekidno. Zato postoji realan broj $\delta_1 > 0$ takav da za sve $x, y \in \mathsf{C}$, takve da je $|x-y| < \delta_1$, vrijedi da je $d(f(x), f(y)) < \eta_1$. Zaključujemo da je skup $\{n \in \mathbb{N} : d(f(p_n), f(q_n)) \geq \eta_1\}$ konačan, te neka je to skup $\{n_{11}, n_{12}, \ldots, n_{1k_1}\}$. X je lukovima povezan, pa za sve $i = 1, \ldots, k_1$ postoji luk od $f(p_{n_{1i}})$ do $f(q_{n_{1i}})$ sa slikom $A_{n_{1i}}$. Zato za sve $i = 1, \ldots, k_1$ postoji homeomorfizam s $[p_{n_{1i}}, q_{n_{1i}}]$ na $A_{n_{1i}}$ i definirajmo F na $[p_{n_{1i}}, q_{n_{1i}}]$ da bude upravo taj homeomorfizam. Tako smo dodefinirali F na onih konačno mnogo intervala $\langle p_n, q_n \rangle$ za koje je $d(f(p_n), f(q_n)) \geq \eta_1$.

Postoji $\eta_2 > 0$ takav da svake dvije točke u X udaljene za manje od η_2 možemo spojiti lukom dijametra manjeg od ϵ_2. Ponovno, zbog uniformne neprekidnosti od f, vrijedi da postoji $\delta_2 > 0$ takav da za sve $x, y \in \mathsf{C}$, takve da je $|x-y| < \delta_2$, vrijedi da je $d(f(x), f(y)) < \eta_2$. Također vrijedi da je skup $\{n \in \mathbb{N} : \eta_1 > d(f(p_n), f(q_n)) \geq \eta_2\}$ konačan, te neka je to skup $\{n_{21}, n_{22}, \ldots, n_{2k_2}\}$. η_1 smo izabrali tako da $(f(p_{n_{2i}})$ i $f(q_{n_{2i}})$ možemo spojiti lukom dijametra manjeg od ϵ_1, za sve $i = 1, \ldots, k_2$, te neka je $A_{n_{2i}}$ slika tog luka. Postoji homeomorfizam s $[p_{n_{2i}}, q_{n_{2i}}]$ na $A_{n_{2i}}$ i definirajmo F na $[p_{n_{2i}}, q_{n_{2i}}]$ da bude taj homeomorfizam. Tako smo dodefinirali F na onih konačno mnogo intervala $\langle p_n, q_n \rangle$ za koje je $\eta_1 > d(f(p_n), f(q_n)) \geq \eta_2$.

Ovaj postupak možemo ponoviti za svaki $m \in \mathbb{N}$. Točnije, za svaki $m \in \mathbb{N}$ postoji $\eta_m > 0$ takav da svake dvije točke u X udaljene za manje od $\eta_m > 0$ možemo spojiti lukom dijametra manjeg od ϵ_m. Postoji $\delta_m > 0$ takav da za sve $x, y \in \mathsf{C}$, takve da je $|x-y| < \delta_m$, vrijedi da je $d(f(x), f(y)) < \eta_m$. Skup $\{n \in \mathbb{N} : \eta_{m-1} > d(f(p_n), f(q_n)) \geq \eta_m\}$ je konačan, te neka je to skup $\{n_{m1}, n_{m2}, \ldots, n_{mk_m}\}$. $(f(p_{n_{mi}})$ i $f(q_{n_{mi}})$ možemo spojiti lukom dijametra manjeg od ϵ_{m-1}, za sve $i = 1, \ldots, k_m$, te neka je $A_{n_{mi}}$ slika tog luka. Definirajmo F na $[p_{n_{mi}}, q_{n_{mi}}]$ da bude homeomorfizam s $[p_{n_{mi}}, q_{n_{mi}}]$ na $A_{n_{mi}}$. Tako smo dodefinirali F na onih konačno intervala $\langle p_n, q_n \rangle$ za koje je $\eta_{m-1} > d(f(p_n), f(q_n)) \geq \eta_m$.

Na taj način smo induktivno definirali F na čitavom segmentu I. F je surjekcija jer proširuje surjektivno preslikavanje f. Ostaje pokazati da je F neprekidno.

F je homeomorfizam s $[p_n, q_n]$ na A_n pa je preslikavanje F neprekidno u svakoj točki otvorenog intervala I_n, tj. F je neprekidno na $I \setminus \mathsf{C}$. Neka je sad $x \in \mathsf{C}$, $\epsilon > 0$ proizvoljan. Treba pronaći okolinu točke x koja se čitava preslika u kuglu $B_X(f(x), \epsilon)$. Kao prvo, postoji $\epsilon_n < \epsilon$, te pripadni η_n takav da čim je $a \in B_X(f(x), \eta_n)$, postoji luk od $f(x)$ do a dijametra manjeg od ϵ_n, pa njegova slika čitava leži u $B_X(f(x), \epsilon)$. Kako je f neprekidna funkcija, postoji $\delta > 0$ takav da, za svaki $y \in C$, ako je $|x-y| < \delta$ vrijedi da je $d(f(x), f(y)) < \eta_n$. Preslikavanje F je homeomorfizam segmenta $[x, y]$ na sliku luka od $f(x)$ do $f(y)$ koja je očito čitava u $B_X(f(x), \epsilon)$. Dakle je $F(\langle x-\delta, x+\delta \rangle) \subseteq B_X(f(x), \epsilon)$. ■

Bibliografija

[1] J. G. Hocking, G. S. Young, *Topology*, Addison-Wesley Publishing Company, Massachusetts, 1961.

[2] Š. Ungar, *Matematička analiza u* $\mathbb{R}^n$, Golden marketing-Tehnička knjiga, Zagreb, 2004.

[3] W. Sutherland, *Introduction to Metric and Topological Spaces*, Oxford University Press, 1975.

[4] J. R. Munkres, *Topology*, Prentice Hall, 2000.

[5] A. Hajnal, P. Hamburger, *Set theory*, Cambridge University Press, 1999.

[6] H. Sagan, *Space Filling Curves*, Springer Verlag, New York, 1994.

Abstract

The Hahn-Mazurkiewicz theorem is one of the most important results in the history of point-set topology, because it completely solves the problem of “space-filling” curves. It states that a Hausdorff space is a continuous image of a line segment if and only if it is a Peano continuum, that is, compact, connected and locally connected metric space. In this B.sc. thesis we give a short description of the problem and present a proof of this theorem. The fact that a continuous image of a line segment is a Peano continuum is a simple consequence of the Urysohn metrization theorem combined with the fact that local connectedness is preserved by a continuous closed map. To prove the other direction of our theorem we use the Aleksandroff-Hausdorff theorem about the existence of continuous mapping of the Cantor set onto an arbitrary compact metric space and we continuously extend this mapping over the line segment.

Sažetak

Hahn-Mazuriewiczev teorem jedan je od najvažnijih rezulata u povijesti opće topologije, jer u potpunosti rješava problem Peanovih krivulja. Teorem kaže da je Hausdorffov prostor neprekidna slika segmenta ako i samo ako je Peanov kontinuum, odnosno kompaktan, povezan i lokalno povezan metrički prostor. U ovom radu dajemo kratak opis spomenutog problema i predstavljamo jedan dokaz Hahn-Mazurkiewiczevog teorema. Činjenica da je neprekidna slika segmenta Peanov kontinuum jednostavna je posljedica Urysonovog teorema metrizacije i činjenice da je lokalna povezanost očuvana neprekidnim zatvorenim preslikavanjem. Za dokaz drugog smjera Hahn-Mazurkiewiczevog teorema iskoristit ćemo Aleksandrov-Hausdorffov teorem o postojanju neprekidne surjekcije Cantorovog skupa na proizvoljan kompaktan metrički prostor, te ćemo jedno takvo preslikavanje neprekidno proširiti na čitav segment.

Životopis

Rođena sam 1.6.1983. u Karlovcu. Odrasla sam u malom selu Koritinji kraj Karlovca s roditeljima Vjekoslavom i Jelicom i dva brata, Josipom i Ivanom. 1989. godine upisujem osnovnu školu Braće Seljan u Karlovcu, a od 1997. do 2001. pohađam Gimnaziju Karlovac, opći smjer. Osnovnu i srednju školu završila sam s odličnim uspjehom, te sam često sudjelovala na županijskim natjecanjima iz matematike, kemije i hrvatskog jezika. 2001. godine upisujem studij matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu i odlučujem se za inženjerski teorijski smjer. Tijekom studija položila sam i nekoliko pedagoških kolegija. Zanima me opća topologija, teorija skupova i matematička logika, a osim matematike volim i filozofiju, psihologiju, standardne plesove i moderne društvene igre.