Geometrija kubičnih polinoma

Kukec, Petra

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Petra Kukec

GEOMETRIJA KUBIČNIH POLINOMA

Diplomski rad

Voditelj rada:
izv. prof. dr. sc. Rajna Rajić
Suvoditelj rada:
prof. dr. sc. Damir Bakić

Zagreb, rujan, 2015

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Zahvaljujem se izv. prof. dr. sc. Rajni Rajić na vodstvu, strpljenju i korisnim diskusijama pri nastajanju ovog rada. Posebno se zahvaljujem svojoj obitelji na ukazanom razumijevanju i podršci tijekom studija.

Sadržaj

Uvod

Poznavanje polinoma je vrlo značajno kako u teorijskoj tako i u primijenjenoj matematici. Iako mnogi od nas toga nisu svjesni, ljudi u raznim vrstama zanimanja koriste polinome svakodnevno, budući da se polinomi koriste za opisivanje krivulja različitih vrsta. Planeti, mehaničke sile, kemijski i biološki procesi, itd. mijenjaju se kroz prostor i vrijeme, tj. promjenjivi su pa ih možemo opisati krivuljama. Također, televizori, računala, telefoni, glazba primaju signale koji se opisuju krivuljama. Te i druge promjene, kao što su promjene u gospodarstvu, mogu se opisati krivuljama. Polinomi su jednostavne funkcije, te se mogu lako analizirati. Pomoću njih možemo aproksimirati razne složenije funkcije do željene točnosti, stoga je nužno dobro poznavati njihova svojstva. Položaj nultočaka polinoma vrlo je važan i čest zadatak u matematici i primjenama. Budući da ne postoje opće formule za izračunavanje nultočaka polinoma čiji je stupanj veći od četiri, potrebno je do nultočaka doći na neki drugi način. Postoje razne numeričke metode za određivanje nultočaka polinoma do željene točnosti; no, da bismo ih uopće mogli primijeniti, moramo najprije locirati nultočke, tj. približno odrediti njihov položaj unutar kompleksne ravnine. Odredimo li nultočke polinoma, u stanju smo locirati i njegove stacionarne točke. Prema Rolleovom teoremu, između svake dvije različite realne nultočke polinoma s realnim koeficijentima, leži barem jedna stacionarna točka tog polinoma. Postoje mnoge interesantne generalizacije ovog teorema na slučaj kompleksnih polinoma. Zasigurno jedan od najznačajnijih rezultata tog tipa, koji govori o položaju stacionarnih točaka polinoma u odnosu na njegove nultočke, je Gauss–Lucasov teorem. Teorem kaže da konveksna ljuska skupa nultočaka polinoma sadrži sve njegove stacionarne točke.

U ovom radu obrađujemo nekoliko kompleksnih analogona Rolleovog teorema i to najprije za polinome proizvoljnog stupnja, a zatim posebnu pažnju posvećujemo kubičnim polinomima. Geometrija nultočaka i stacionarnih točaka kubičnih polinoma posebno je interesantna. Ako su nultočke polinoma vrhovi trokuta, tada su njegove stacionarne točke fokusi Steinerove elipse, tj. jedinstvene elipse koja stranice tog trokuta dira u njihovim polovištima. Osim ovog važnog rezultata, koji je dokazao Marden, iznosimo još neke zanimljive rezulate o položaju stacionarnih točaka kompleksnog kubičnog polinoma s obzirom na njegove nultočke.

Poglavlje 1

Nultočke polinoma

1.1 Pojam polinoma

U ovom poglavlju uvest ćemo pojam polinoma, te izložiti osnovne pojmove i rezultate o polinomima koje ćemo koristiti u daljnjem radu.

Neka je $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ polje koje ćemo kraće označavati s $\mathbb{K}$, te neka su 0 i 1 neutralni elementi u odnosu na + i $\cdot$, redom. Za $a, b \in \mathbb{K}$, umjesto $a \cdot b$ pišemo kraće ab.

Definicija 1.1.1. *Polinom n-tog stupnja nad poljem $\mathbb{K}$ je funkcija $p : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ definirana s*

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \tag{1.1}$$

gdje su $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$, $a_n \neq 0$. Brojeve $a_0, \ldots, a_n$ nazivamo koeficijentima polinoma. Koeficijent a_n nazivamo vodećim ili najstarijim koeficijentom, a koeficijent a_0 slobodnim članom polinoma p. Zapis (1.1) *nazivamo kanonskim zapisom polinoma. Ako je n stupanj polinoma p, tada pišemo* $\operatorname{st} p = n$. *Ako je $a_n = 1$, kažemo da je p normiran polinom.*

U ovom radu promatrat ćemo polinome s kompleksnim koeficijentima, odnosno kao funkcije $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Skup svih polinoma nad poljem $\mathbb{C}$ označavamo sa $\mathbb{C}[z]$. Posebno, ako su koeficijenti polinoma realni brojevi, tada se polinom promatra i kao funkcija $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Ako je $a_0 = a_1 \cdots = a_n = 0$, onda se polinom p koji je prema (1.1) oblika

$$p(z) = 0z^n + 0z^{n-1} + \cdots + 0z + 0$$

naziva *nulpolinom*. Ako je p nulpolinom, pišemo $p = 0$. Nulpolinom je jedini polinom za koji se stupanj ne definira.

Polinomi stupnja 0 nazivaju se *konstante*.

Sada ćemo u skup $\mathbb{C}[z]$ uvesti operaciju zbrajanja, množenja i relaciju jednakosti. Kako su polinome koje promatramo kompleksne funkcije, njihov ćemo zbroj definirati kao zbroj funkcija. Isto tako, njihov produkt se definira kao produkt komplesknih funkcija.

Definicija 1.1.2. *Za polinome $p, q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiramo $p + q$ formulom:*

$$(p + q)(z) = p(z) + q(z), \text{ za svaki } z \in \mathbb{C}.$$

Pokazati ćemo sada da je i $p + q$ polinom ako su p i q polinomi.

Pretpostavimo da su polinomi p i q zadani svojim kanonskim zapisima. Neka je p zadan kanonskim zapisom (1.1), a q sa:

$$q(z) = b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0 \tag{1.2}$$

i neka je određenosti radi $n \geq m$. Neka je z_0 bilo koji kompleksan broj. Prema definiciji zbrajanja i svojstvima zbrajanja u skupu kompleksnih brojeva, imamo:

$$\begin{aligned}(p + q)(z_0) &= (a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + \cdots + a_1 z_0 + a_0) + (b_m z_0^m + b_{m-1} z_0^{m-1} + \cdots + b_1 z_0 + b_0) \\ &= a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + \cdots + (a_m + b_m) z_0^m + \cdots + (a_1 + b_1) z_0 + (a_0 + b_0).\end{aligned}$$

Jednakost vrijedi za svaki $z_0 \in \mathbb{C}$. Slijedi da je zbroj dvaju polinoma opet polinom. Dva se polinoma zbrajaju tako da se zbroje njihovi članovi istog stupnja.

Uočimo, ako p, q i $p + q$ nisu nulpolinomi, onda je $\operatorname{st}(p + q) \leq \max\{\operatorname{st} p, \operatorname{st} q\}$.

Definicija 1.1.3. *Za polinome $p, q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiramo $p \cdot q$ formulom:*

$$(p \cdot q)(z) = p(z) \cdot q(z), \text{ za svaki } z \in \mathbb{C}.$$

Ako polinomi p i q imaju kanonske zapise (1.1) i (1.2), onda za svaki $z_0 \in \mathbb{C}$, prema svojstvima zbrajanja i množenja u skupu $\mathbb{C}$ imamo:

$$\begin{aligned}(p \cdot q)(z_0) &= (a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + \cdots + a_1 z_0 + a_0) \cdot (b_m z_0^m + b_{m-1} z_0^{m-1} + \cdots + b_1 z_0 + b_0) \\ &= a_n b_m z_0^{n+m} + (a_n b_{m-1} + a_{n-1} b_m) z_0^{n+m-1} + \cdots + (a_0 b_1 + a_1 b_0) z_0 + (a_0 + b_0).\end{aligned}$$

Slijedi da je produkt $p \cdot q$ dvaju polinoma p i q opet polinom iz $\mathbb{C}[z]$, odnosno, dva polinoma se množe tako da se svaki član jednog polinoma pomnoži sa svakim članom drugog polinoma, a dobiveni produkti se zbroje.

Uočimo, ako p i q nisu nulpolinomi, onda je $\operatorname{st}(pq) = \operatorname{st} p + \operatorname{st} q$.

Kao kompleksne funkcije kompleksne varijable, polinomi p i q su *jednaki* ako i samo ako za svaki $z \in \mathbb{C}$ vrijedi $p(z) = q(z)$.

Kriterij jednakosti dvaju polinoma može se iskazati u terminima njihovih koeficijenata. Taj kriterij nalazimo pomoću teorema o nulpolinomu.

Teorem 1.1.4 (teorem o nulpolinomu)**.** *Polinom* $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$, $a_i \in \mathbb{C}$ *za* $i = 1, \ldots, n$, *je nulpolinom ako i samo ako je* $a_i = 0$ *za svaki* $i = 0, \ldots, n$.

Dokaz. Ako je $a_i = 0$ za $i = 0, \ldots, n$, onda je $p(z) = 0$ za svaki $z \in \mathbb{C}$.

Dokažimo sada obrat. Pretpostavimo da je $p(z) = 0$ za svaki $z \in \mathbb{C}$ i da nisu svi koeficijenti a_i jednaki nula. Neka je $m \geq 0$ takav da je $a_0 = a_1 = \cdots = a_{m-1} = 0$ i $a_m \neq 0$. Stavimo li $k = n - m$ i $b_0 = a_m, b_1 = a_{m+1}, \ldots, b_k = a_{m+k} = a_n$, dobivamo

$$p(z) = b_0 z^m + b_1 z^{m+1} + \cdots + b_k z^{m+k} = 0, \text{ za svaki } z \in \mathbb{C}.$$

Podijelimo li izraz sa z^m, pri čemu je $z \neq 0$, slijedi da je

$$b_0 + b_1 z + \cdots + b_k z^k = 0, \text{ za svaki } z \in \mathbb{C} \backslash \{0\}.$$

Neka je $M = \max\{|b_1|, |b_2|, \ldots, |b_k|\} > 0$. Tada za $z \in \langle 0, \frac{1}{2} \rangle$ imamo

$$\begin{aligned}
|b_0| &= |b_1 z + b_2 z^2 + \cdots + b_k z^k| \leq |b_1| z + |b_2| z^2 + \cdots + |b_k| z^k \\
&\leq Mz(1 + z + \cdots + z^{k-1}) \leq Mz\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{k-1}}\right) \\
&= Mz \frac{1 - \frac{1}{2^k}}{1 - \frac{1}{2}} = 2Mz\left(1 - \frac{1}{2^k}\right) \leq 2Mz.
\end{aligned}$$

Zaključujemo da je

$$\frac{|b_0|}{2M} \leq z, \text{ za svaki } z \in \left\langle 0, \frac{1}{2} \right\rangle.$$

Uzmemo li za z redom $z = \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \ldots, \frac{1}{2^j}, \ldots$ slijedi

$$\frac{|b_0|}{2M} \leq \frac{1}{2^j}, \quad j = 2, 3, \ldots$$

Prema tome, zaključujemo da je $b_0 = 0$, što je u kontradikciji s početnom pretpostavkom da je $b_0 = a_m \neq 0$. □

Teorem 1.1.5 (teorem o jednakosti polinoma)**.** *Polinomi* $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ *i* $q(z) = b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0$, $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$, *jednaki su ako i samo ako vrijedi* $m = n$ *i* $a_i = b_i$ *za svaki* $i = 0, \ldots, n$.

Dokaz. Ako je $m = n$ i $a_i = b_i$ za svaki $i = 0, \ldots, n$, onda je očito i $p(z) = q(z)$ za svaki $z \in \mathbb{C}$.

Pretpostavimo sada da je $p = q$. Treba pokazati da je tada $m = n$ i $a_i = b_i$ za svaki $i = 0, \dots, n$. Pretpostavimo suprotno, tj. da je $m \neq n$. Neka je bez smanjenja općenitosti $n > m$. Tada za svaki $z \in \mathbb{C}$ vrijedi

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0.$$

Iz te jednakosti slijedi

$$a_n z^n + \cdots + (a_m - b_m) z^m + (a_{m-1} - b_{m-1}) z^{m-1} + \cdots + (a_1 - b_1) z + (a_0 - b_0) = 0$$

za svaki $z \in \mathbb{C}$. Prema teoremu o nulpolinomu, dobivamo

$$a_n = a_{n-1} = \cdots = a_{m+1} = 0, \quad a_m = b_m, \quad a_{m-1} = b_{m-1}, \quad \ldots, \quad a_1 = b_1, \quad a_0 = b_0,$$

što je u kontradikciji sa $a_n \neq 0$. Dakle, vrijedi $n = m$. Tada iz $p = q$ slijedi $(a_n - b_n) z^n + \cdots + (a_0 - b_0) = 0$, odakle je $a_n = b_n, \dots, a_0 = b_0$. □

Sada ćemo uvesti pojam djeljivosti polinoma, te navesti teorem o djeljivosti.

Definicija 1.1.6. *Za polinom p kažemo da je djeljiv polinomom $q \neq 0$ ako postoji polinom p_1, $\operatorname{st} p_1 > 0$, takav da vrijedi $p = p_1 \cdot q$, tj. ako za svaki $z \in \mathbb{C}$ vrijedi $p(z) = p_1(z) \cdot q(z)$.*

Teorem 1.1.7 (teorem o djeljivosti polinoma)**.** *Za svaka dva polinoma p i $q \neq 0$ postoje jedinstveni polinomi p_1 i $r \in \mathbb{C}$ takvi da za svaki $z \in \mathbb{C}$ vrijedi*

$$p(z) = p_1(z) \cdot q(z) + r(z).$$

Ako je $\operatorname{st} p = n \geq m = \operatorname{st} q$, onda je p_1 polinom stupnja $n - m$. Polinom r je ostatak dijeljenja. Ako je $r \neq 0$, onda je $\operatorname{st} r < m$.

1.2 Nultočke i faktorizacija polinoma

Definicija 1.2.1. *Kompleksna nultočka polinoma $p \in \mathbb{C}[z]$ zove se svaki kompleksan broj z_1 takav da je $p(z_1) = 0$. Ako je z_1 realan broj, kaže se još da je z_1 realna nultočka polinoma p.*

Sada ćemo navesti teorem koji nam govori o svojstvu nultočke polinoma.

Teorem 1.2.2 (Bezout)**.** *Broj z_1 je nultočka polinoma p ako i samo ako je p djeljiv polinomom $q(z) = z - z_1$.*

Dokaz. Ako je polinom p djeljiv polinomom $q(z) = z - z_1$, onda po definiciji djeljivosti, postoji polinom p_1 takav da je $p(z) = (z - z_1)p_1(z)$. Kako jednakost mora biti istinita za svaki $z \in \mathbb{C}$, ona mora biti istinita i za $z = z_1$, pa uvrštavanjem $z = z_1$ dobivamo $p(z_1) = 0$, te je z_1 nultočka od p.

Obratno, ako je z_1 nultočka od p, onda je $p(z_1) = 0$. Prema teoremu o djeljivosti s ostatkom, postoje jedinstveni polinomi p_1 i r (=konstanta) takvi da je $p(z) = (z - z_1)p_1(z) + r$. Kako jednakost vrijedi za svaki $z \in \mathbb{C}$, ona posebno vrijedi i za $z = z_1$, pa uvrštavanjem $z = z_1$ u tu jednakost dobivamo $p(z_1) = r$. Po pretpostavci je $p(z_1) = 0$, pa iz prethodne jednakosti slijedi $r = 0$, što znači da je $p(z) = (z - z_1)p_1(z)$, tj. p je djeljiv polinomom $q(z) = z - z_1$. □

Definicija 1.2.3. *Za nultočku z_1 polinoma $p \in \mathbb{C}[z]$ kažemo da je višestruka reda $k \in \mathbb{N}$, ili kraće k-struka, ako postoji polinom $q \in \mathbb{C}[z]$ takav da je*

$$p(z) = (z - z_1)^k q(z), \quad q(z_1) \neq 0.$$

Još se kaže da je kratnost (višestrukost) nultočke z_1 jednaka k. Ako je $k = 1$, kažemo da je nultočka jednostruka.

Teorem 1.2.4. *Ako je z_1 nultočka polinoma p kratnosti $k \geq 2$, onda je z_1 nultočka od p', i to kratnosti $k - 1$.*

Dokaz. Ako je z_1 nultočka polinoma p kratnosti k, tada polinom p možemo prikazati u obliku $p(z) = (z - z_1)^k \cdot q(z)$, gdje je q polinom koji nije djeljiv sa $z - z_1$, odnosno $q(z_1) \neq 0$. Tada je

$$p'(z) = k(z - z_1)^{k-1} q(z) + (z - z_1)^k q'(z) = (z - z_1)^{k-1}[kq(z) + (z - z_1)q'(z)],$$

pa je z_1 zaista nultočka od p' kratnosti $k - 1$, jer z_1 nije nultočka polinoma $z \mapsto kq(z) + (z - z_1)q'(z)$. □

Teorem 1.2.5. *Komplekan broj z_1 je k-struka nultočka polinoma p ako i samo ako je*

$$p(z_1) = p'(z_1) = \cdots = p^{(k-1)}(z_1) = 0, \quad p^{(k)}(z_1) \neq 0. \tag{1.3}$$

Dokaz. Neka je z_1 nultočka polinoma p kratnosti k. Uzastopnom primjenom teorema 1.2.4 na polinome $p, p', \ldots, p^{(k-1)}$ dobije se (1.3).

Obrnuto, pretpostavimo da vrijedi (1.3). Iz Taylorovog razvoja polinoma p u točki z_1 dobivamo

$$p(z) = p(z_1) + \frac{p'(z_1)}{1!}(z - z_1) + \frac{p''(z_1)}{2!}(z - z_1)^2 + \cdots + \frac{p^{(n)}(z_1)}{n!}(z - z_1)^n$$

pa je prema (1.3)

$$p(z) = (z - z_1)^k \left[\frac{p^{(k)}(z_1)}{k!} + \frac{p^{(k+1)}(z_1)}{(k+1)!}(z - z_1) + \cdots + \frac{p^{(n)}(z_1)}{n!}(z - z_1)^{n-k} \right],$$

tj. $p(z) = (z - z_1)^k q(z)$, gdje je $q(z_1) = \frac{p^{(k)}(z_1)}{k!} \neq 0$, iz čega slijedi da je z_1 k-struka nultočka polinoma p. $\square$

Postavimo pitanje, ima li svaki polinom nultočku? Odgovor će bit negativan ukoliko nultočke tražimo među realnim brojevima: polinom $z \mapsto z^2 + 4$ nema realnih nultočki.

Osnovni je razlog promatranja skupa kompleksnih brojeva upravo potreba da se pronađe skup brojeva u kojem se može pronaći rješenje svake algebarske jednadžbe, tj. u kojem svaki polinom ima nultočku. Iz gornjeg primjera, npr. jedna nultočka polinoma $z \mapsto z^2 + 4$ bit će $z = 2i$. Osnovni teorem algebre daje nam odgovor na postavljeno pitanje.

Teorem 1.2.6 (osnovni teorem algebre)**.** *Svaki polinom $p \in \mathbb{C}[z]$ stupnja $n \geq 1$ ima nultočku u skupu kompleksnih brojeva.*

Ovu je tvrdnju prvi formulirao Alber de Girard 1629. godine, naravno, bez dokaza. d'Alembert (1746), Euler (1749), Lagrange (1771) pokušali su dokazati taj teorem, ali njihovi objavljeni dokazi sadrže nepreciznosti ili nisu potpuni. Prvi potpuni dokaz učinio je Gauss 1799. u dobi od 22 godine, a zatim je 1815., 1816. i 1849. punudio još tri drukčija dokaza ove tvrdnje. Niti jedan od ovih dokaza nije elementaran već se koriste tehnike koje su sastavni dio teorije funkcija kompleksne varijable.

Navesti ćemo neke posljedice osnovnog teorema algebre.

Teorem 1.2.7. *Svaki polinom $p \in \mathbb{C}[z]$ n-tog stupnja može se na jedinstveni način prikazati u obliku produkata n linearnih faktora nad $\mathbb{C}$.*

Dokaz. Neka su $z_1, \ldots, z_n$ nultočke polinoma (1.1). Pokazat ćemo da vrijedi

$$p(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n). \tag{1.4}$$

Prema osnovnom teoremu algebre, polinom p ima barem jednu nultočku. Označimo ju sa z_1. Prema teoremu 1.2.2, polinom p djeljiv je sa $g_1(z) = z - z_1$, odnosno, postoji polinom p_1 takav da vrijedi

$$p(z) = (z - z_1)p_1(z). \tag{1.5}$$

Ako je p_1 konstantni polinom, onda je $p_1(z) = a_n$, a ako je p_1 bar prvog stupnja, onda opet na temelju osnovnog teorema algebre polinom p_1 ima bar jednu nultočku. Označimo ju sa z_2. Zatim opet, prema teoremu 1.2.2 postoji rastav: $p_1(z) = (z - z_2)p_2(z)$. Uvrstimo li p_1 u (1.5), dobivamo

$$p(z) = (z - z_1)(z - z_2)p_2(z).$$

Nastavimo li ovaj postupak, vidjet ćemo da se p može napisati kao produkt polinoma $g_1(z) = z - z_1, g_2(z) = z - z_2, \dots, g_n(z) = z - z_n$, odnosno

$$p(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n),$$

čime smo dokazali postojanje rastava.

Sada ćemo pokazati da je rastav jedinstven. Pretpostavimo da osim prikaza (1.4), postoji i prikaz:

$$p(z) = a_n(z - v_1)(z - v_2) \cdots (z - v_n). \tag{1.6}$$

Iz (1.4) slijedi:

$$a_n(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n) = a_n(z - v_1)(z - v_2) \cdots (z - v_n). \tag{1.7}$$

Pretpostavimo da je za neki $i \in \{1, \dots, n\}$ nultočka z_i različita od v_j za svaki $j = 1, \dots, n$. Tada bi u (1.7) za $z = z_i$ lijeva strana jednakosti bila jednaka nuli, a desna različita od nule. Prema tome, svaki z_i jednak je nekom v_j i obratno.

Trebamo još pokazati da ako je z_i k- struka nultočka polinoma (1.4), onda je i pripadni v_j k-stuka nultočka polinoma (1.6). Prepostavimo da je z_i k-struka nultočka od (1.4), a pripadni v_j l-struka nultočka od (1.6). U slučaju $k > l$, dijeljenjem jednakosti (1.7) sa $(z - z_i)^l$ dobili bismo jednakost u kojoj je lijeva strana djeljiva sa $z - z_i$, dok desna nije. Na isti način, u slučaju $k < l$, dijeljenjem jednakosti (1.7) sa $(z - z_i)^k$ dobili bismo jednakost u kojoj je desna strana djeljiva sa $z - z_i$ dok lijeva nije. Prema tome, $k = l$, te smo time dokazali jedinstvenost rastava. □

Teorem 1.2.8. *Svaki polinom $p \in \mathbb{C}[z]$ stupnja $n \geq 1$ ima točno n nultočaka, ako svaku od njih brojimo onoliko puta kolika je njezina kratnost, tj.*

$$p(z) = a_n(z - z_1)^{k_1}(z - z_2)^{k_2} \cdots (z - z_p)^{k_p},$$

gdje je a_n vodeći koeficijent polinoma p, a z_i, $i = 1, \dots, p$, međusobno različite k_i-struke nultočke polinoma p, te vrijedi $k_1 + \cdots + k_p = n$.

Dokaz. Neka je z_1 k_1-struka nultočka, z_2 k_2-struka nultočka, ..., z_p k_p-struka nultočka. Neka je $z_i \neq z_j$, za $i \neq j$. Tada polinom p oblika (1.1) prema teoremu 1.2.7 možemo zapisati kao

$$p(z) = a_n(z - z_1)^{k_1}(z - z_2)^{k_2} \cdots (z - z_p)^{k_p} \tag{1.8}$$

pri čemu je $k_1 + k_2 + \cdots + k_p = n$. Pokazat ćemo da je svaki od brojeva $k_i, i = 1, \dots, p$, jednak kratnosti nultočke z_i. Pretpostavimo da je kratnost nultočke z_i jednaka m_i. Tada je $k_i \leq m_i$. U slučaju $k_i < m_i$ imali bismo $p(z) = (z - z_i)^{m_i} q(z)$, gdje q ne sadrži faktor $p_i(z) = z - z_i$. Rastavimo li polinom q na linearne faktore te uvrstimo u prethodnu jednakost, dobiti ćemo rastav različit od rastava u (1.8), što je u suprotnosti s teoremom 1.2.7. Prema tome, $k_i = m_i$. □

Teorem 1.2.9. *Ako su polinomi* $p, q \in \mathbb{C}[z]$ *stupnja koji nije veći od* n *i ako oni imaju jednake vrijednosti u više od* n *točaka, tada je* $p = q$.

Dokaz. Ako su p i q stupnja koji nije veći od n, onda je njihova razlika $h(z) = p(z) - q(z)$ polinom čiji stupanj nije veći od n. Kako postoji $m > n$ i točke $z_1, z_2, \ldots, z_m$ za koje vrijedi $p(z_1) = q(z_1), \ldots, p(z_m) = q(z_m)$, to su brojevi z_i, $i = 1, \ldots, m$, nultočke polinoma h, pa bi h imao više od n nultočaka. Tada je, prema teoremu 1.2.8, $\operatorname{st} h = 0$, tj. h konstanta. Kako je osim toga $h(z_i) = 0$ za $i = 1, \ldots, m$, zaključujemo da je h nulpolinom pa je stoga $p = q$. □

Vièteove formule

Promotrimo polinom p stupnja n dan u obliku (1.1). Neka su njegove nultočke $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Polinom p možemo zapisati i u obliku (1.4). Izjednačimo li oba prikaza dobivamo jednakost:

$$a_n(z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_n) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0.$$

Pomnožimo li faktore s lijeve strane i izjednačimo koeficijente uz istovjetne potencije, dobiti ćemo sljedeće jednakosti koje moraju zadovoljavati nultočke polinoma:

$$\begin{aligned}
z_1 + z_2 + \cdots + z_n &= -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \\
z_1z_2 + \cdots + z_1z_n + z_2z_3 + \cdots + z_2z_n + \cdots + z_{n-1}z_n &= \frac{a_{n-2}}{a_n}, \\
z_1z_2z_3 + \cdots + z_1z_{n-1}z_n + z_2z_3z_4 + \cdots + z_2z_{n-1}z_n + \cdots + z_{n-2}z_{n-1}z_n &= -\frac{a_{n-3}}{a_n}, \\
&\ \vdots \\
z_1z_2z_3\cdots z_n &= (-1)^n\frac{a_0}{a_n}.
\end{aligned}$$

Ove formule nazivaju se *Viéteove formule*. U drugom retku nalazi se zbroj svih umnožaka po dviju nultočaka z_iz_j, $i < j$, u trećem retku zbroj svih umnožaka po tri nultočke $z_iz_jz_k$, $i < j < k$, itd.

Polinomi s realnim koeficijentima

Promatramo sada polinom $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ oblika

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0,$$

gdje su koeficijenti $a_0, \ldots, a_n$ realni brojevi i $a_n \neq 0$. Prema osnovnom teoremu algebre, polinom p ima n kompleksnih nultočaka brojeći njihove kratnosti. Pokazat ćemo da se one nultočke polinoma koje nisu realni brojevi javljaju kao parovi konjugirano-kompleksnih brojeva.

Teorem 1.2.10. *Ako je z_0 k-struka nultočka polinoma p s realnim koeficijentima, onda je $\overline{z}_0$ također k-struka nultočka polinoma p.*

Dokaz. Neka je
$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0,$$
gdje su koeficijenti $a_0, \ldots, a_n$ realni brojevi i $a_n \neq 0$. Tada je

$$\overline{p(z)} = a_n(\overline{z})^n + a_{n-1}(\overline{z})^{n-1} + \cdots + a_1\overline{z} + a_0 = p(\overline{z}).$$

Također, prema teoremu 1.2.8 je

$$p(z) = a_n(z - z_1)^{k_1}(z - z_2)^{k_2} \cdots (z - z_p)^{k_p}, \tag{1.9}$$

gdje su z_i, $i = 1, \ldots, p$, međusobno različite k_i-struke nultočke polinoma p, te vrijedi $k_1 + \cdots + k_p = n$. Stoga je

$$\overline{p(z)} = p(\overline{z}) = a_n(\overline{z} - z_1)^{k_1}(\overline{z} - z_2)^{k_2} \cdots (\overline{z} - z_p)^{k_p},$$

odnosno
$$p(z) = a_n(z - \overline{z}_1)^{k_1}(z - \overline{z}_2)^{k_2} \cdots (z - \overline{z}_p)^{k_p}. \tag{1.10}$$
Usporedimo li rastave (1.9) i (1.10), vidimo da ako je za neki $i \in \{1, \ldots, n\}$, broj z_i nultočka polinoma p kratnosti k_i, onda je $\overline{z}_i$ također nultočka kratnosti k_i. Time je teorem dokazan. □

Rolleov teorem je jedan od osnovnih teorema diferencijalnog računa, a kaže da za funkciju $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, neprekidnu na segmentu $[a, b] \subset \mathbb{R}$, derivabilnu na $\langle a, b\rangle$, te takvu da je $f(a) = f(b) = 0$, postoji točka $c \in \langle a, b\rangle$ za koju je $f'(c) = 0$.

Posebno, ako je $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ polinom s realnim koeficijentima, tada p u realnim točkama poprima realne vrijednosti, pa se na njega može primijeniti Rolleov teorem.

Teorem 1.2.11. *Između dvije uzastopne realne nultočke x_1 i x_2 ($x_1 < x_2$) polinoma $p \in \mathbb{C}[z]$ s realnim koeficijentima nalazi se bar jedna nultočka polinoma p'.*

Navedimo još neke interesantne posljedice Rolleovog teorema i teorema 1.2.5 koje ćemo koristiti u daljnjem radu.

Teorem 1.2.12. *Neka je $p \in \mathbb{C}[z]$ polinom s realnim koeficijentima.*

(i) *Između dvije uzastopne realne nultočke x_1' i x_2' ($x_1' < x_2'$) polinoma p' nalazi se najviše jedna nultočka polinoma p.*

(ii) *Ako su sve nultočke polinoma p realne, tada su i sve nultočke polinoma p' realne. Pritom, ako su nultočke od p međusobno različite, tada nultočke od p' razdvajaju nultočke polinoma p.*

(iii) *Polinom p ne može imati više od $k+1$ realnih nultočaka, ako polinom p' ima k realnih nultočaka.*

Ako je p polinom čije su sve nultočke realne, pogledajmo kako se mijenjaju stacionarne točke polinoma p, ako nultočke od p pomičemo udesno.

Teorem 1.2.13. *Neka je $p(z) = (z-x_1)(z-x_2)\cdots(z-x_n)$, gdje su $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ realne nultočke. Ako neku nultočku zamijenimo s $x_i' \in \langle x_i, x_{i+1}\rangle$, tada sve nultočke od p' povećaju svoju vrijednost.*

Dokaz. Prema tvrdnji (ii) teorema 1.2.12, sve nultočke polinoma p' su realne i razdvajaju nultočke od p. Neka su $z_1 < z_2 < \cdots < z_{n-1}$ nultočke od p'. Tada je

$$x_1 < z_1 < x_2 < z_2 < \cdots < x_{n-1} < z_{n-1} < x_n.$$

Neka su $x_1' = x_1, \ldots, x_{i-1}' = x_{i-1}$, x_i', $x_{i+1}' = x_{i+1}, \ldots, x_n' = x_n$ nultočke polinoma q, za kojeg bez smanjenje općenitosti pretpostavimo da je normiran, a $z_1', \ldots, z_{n-1}'$ nultočke od q'. Prema teoremu 1.2.12 (ii), sve nultočke od q' su realne i vrijedi

$$x_1' < z_1' < x_2' < z_2' < \cdots < x_{n-1}' < z_{n-1}' < x_n'.$$

Kako je $\ln p(z) = \sum_{j=1}^n \ln(z-x_j)$ i $\ln q(z) = \sum_{j=1}^n \ln(z-x_j')$, deriviranjem ovih izraza dobije se

$$\frac{p'(z)}{p(z)} = \frac{1}{z-x_1} + \cdots + \frac{1}{z-x_n}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{x_1, \ldots, x_n\},$$
$$\frac{q'(z)}{q(z)} = \frac{1}{z-x_1'} + \cdots + \frac{1}{z-x_n'}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{x_1', \ldots, x_n'\},$$

odakle je

$$\frac{p'(z_k)}{p(z_k)} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{z_k - x_j} = 0, \quad \frac{q'(z_k')}{q(z_k')} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{z_k' - x_j'} = 0, \quad k = 1, \ldots, n-1. \tag{1.11}$$

Pretpostavimo da tvrdnja teorema ne vrijedi, tj. da postoji $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ takav da je $z_k' \le z_k$. Tada je $z_k' - x_j' \le z_k - x_j$ za $j \in \{1, \ldots, n-1\} \setminus \{i\}$ i $z_k' - x_i' < z_k - x_i$. Uočimo da su, za svaki $j = 1, \ldots, n$, razlike $z_k - x_j$ i $z_k' - x_j'$ istog predznaka, pa je

$$\frac{1}{z_k - x_j} \le \frac{1}{z_k' - x_j'} \quad j \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i\},$$

$$\frac{1}{z_k - x_i} < \frac{1}{z'_k - x'_i}.$$

Tada je

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{z_k - x_j} < \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{z'_k - x'_j}$$

što je u kontradikciji s (1.11). Prema tome, $z'_k > z_k$ za svaki $k = 1, \ldots, n-1$. □

1.3 Nultočke kubičnog polinoma

Jednadžba oblika

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0, \tag{1.12}$$

$a_n \neq 0$, $a_i \in \mathbb{C}$, zove se *algebarska jednadžba n-tog stupnja*. Brojevi $a_0, a_1, \ldots, a_n$ zovu se *koeficijenti* jednadžbe, Ako je $a_n = 1$, onda za jednadžbu (1.12) kažemo da je *normirana*.

Broj z_0 naziva se *korijen jednadžbe* (1.12) ako je

$$a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + \cdots + a_1 z_0 + a_0 = 0.$$

Korijen jednadžbe zove se i *rješenje* te jednadžbe. Riješiti jednadžbu znači naći sve njene korijene i njihove kratnosti. Korisno je algebarskoj jednadžbi (1.12) pridružiti polinom

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0.$$

Svaki korijen te jednadžbe jest nultočka tog polinoma, i obratno. k-struku nultočku polinoma p zovemo k-strukim korijenom pripadne algebarske jednadžbe. Prema teoremu 1.2.8, slijedi da svaka algebarska jednadžba n-tog stupnja ima točno n korijena, računajući svaki od korijena onoliko puta kolika je njegova višestrukost.

Posebno ćemo promatrati algebarske jednadžbe trećeg stupnja. Opći oblik takve jednadžbe glasi:

$$z^3 + az^2 + bz + c = 0.$$

Supstitucijom $z = x - \frac{a}{3}$ ona poprima oblik:

$$x^3 + px + q = 0 \tag{1.13}$$

gdje su

$$p = b - \frac{1}{3}a^3, \quad q = \frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c.$$

Jednadžba u kojoj nema kvadratnog člana naziva se *kanonski oblik* jednadžbe trećeg stupnja. Primijetimo da se svaka jednadžba trećeg stupnja može svesti na kanonski oblik. Rješenje jednadžbe (1.13) tražimo u obliku

$$x = u + v, \tag{1.14}$$

gdje su u i v neki brojevi. Ako je (1.14) korijen jednadžbe (1.13), onda mora zadovoljavati

$$(u+v)^3 + p(u+v) + q = 0,$$

odnosno

$$(3uv + p)(u+v) + (u^3 + v^3 + q) = 0.$$

Odaberimo sada onaj od rastava (1.14) za koji vrijedi

$$3uv + p = 0.$$

Ako to uvrstimo u prethodnu jednadžbu, dobivamo

$$u^3 + v^3 = -q.$$

Problem rješavanja jednadžbe (1.13) svodi se na rješavanje sustava

$$\begin{aligned} u^3 + v^3 &= -q \\ uv &= -\frac{p}{3}. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Umjesto gornjeg sustava, promotrimo sustav

$$\begin{aligned} u^3 + v^3 &= -q \\ u^3v^3 &= -\left(\frac{p}{3}\right)^3. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Ako su u, v rješenja od (1.15), onda je $u + v$ rješenje od (1.13). Uočimo da sustavi (1.15) i (1.16) nisu ekvivalentni. Svako rješenje sustava (1.15) je rješenje sustava (1.16), ali svako rješenje sustava (1.16) ne mora biti rješenje sustava (1.15). Stoga možemo riješiti (1.16) te uzeti ona rješenja koja su ujedno i rješenja od (1.15), tj. ona koja zadovoljavaju drugu jednadžbu u (1.15).

Prema Viéteovim formulama, iz (1.16), vidimo da su u^3 i v^3 korijeni jednadžbe

$$t^2 + qt - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0. \tag{1.17}$$

Odavde dobivamo

$$t_{1,2} = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3},$$

odnosno

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}, \quad v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Rješenje jednadžbe (1.13) tada izgleda

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \tag{1.18}$$

Formula (1.18) naziva se *Cardanova formula*. Zbog toga što u i v moraju zadovoljiti uvjet $3uv + p = 0$, jednadžba (1.13) ima samo tri rješenja, što je u skladu s činjenicom da algebarska jednadžba n-tog supnja ima točno n korijena.

Navesti ćemo primjer u kojem ćemo vidjeti primjenu Cardanove formule.

Primjer 1.3.1. *Pomoću Cardanove formule riješiti jednadžbu* $z^3 + 15z + 124 = 0$.

Rješenje. Kao što vidimo, jednadžba je u kanonskom obliku, pa možemo primijeniti Cardanovu formulu. U ovom slučaju, $p = 15, q = 124$, pa imamo

$$u = \sqrt[3]{-62 + \sqrt{62^2 + 5^3}} = \sqrt[3]{1}.$$

Treći korijen ima tri vrijednosti. Označimo ih sa u_1, u_2, u_3. Pomoću Moivreove formule dobivamo:

$$u_1 = 1, \quad u_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad u_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Pripadne v_i određujemo iz uvjeta $3u_iv_i + p = 0$, tj. iz $u_iv_i = -5$, $i = 1, 2, 3$. Dobivamo:

$$v_1 = -5, \quad v_2 = \frac{5}{2}(1 + \sqrt{3}\,i), \quad v_3 = \frac{5}{2}(1 - \sqrt{3}\,i).$$

Zbog (1.14) sijedi $z_i = u_i + v_i$, $i = 1, 2, 3$, tj.

$$z_1 = -4, \quad z_2 = 2 + 3\sqrt{3}\,i, \quad z_3 = 2 - 3\sqrt{3}\,i$$

su rješenja zadane jednadžbe.

Cardanova formula je nespretna za računanje, pa ćemo postupak rješavanja malo modificirati. Neka je

$$u_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

bilo koja vrijednost trećeg korijena i

$$v_1 = -\frac{p}{3u_1}.$$

Ako je

$$\varepsilon = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2},$$

onda je

$$\varepsilon^2 = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, \quad \varepsilon^3 = 1, \quad \varepsilon^4 = \varepsilon, \quad \varepsilon^5 = \varepsilon^2, \quad \varepsilon^6 = 1, \quad \text{itd.}$$

Tvrdimo da se onda rješenja jednadžbe (1.13) mogu napisati ovako:

$$x_1 = u_1 + v_1, \quad x_2 = u_1\varepsilon + v_1\varepsilon^2, \quad x_3 = u_1\varepsilon^2 + v_1\varepsilon. \tag{1.19}$$

Da je $x_1 = u_1 + v_1$ jedno od rješenja jednadžbe, očito je iz samog postupka pomoću kojeg smo izveli Cardanovu formulu. Treba provjeriti da su x_2 i x_3 također rješenja te jednadžbe.

Za $x_2 = u_1\varepsilon + v_1\varepsilon^2$, uvrštavanjem u (1.13) dobivamo:

$$(u_1\varepsilon + v_1\varepsilon^2)^3 + p(u_1\varepsilon + v_1\varepsilon^2) + q = u_1^3 + v_1^3 + \varepsilon(u_1 + v_1\varepsilon)(3u_1v_1 + p) + q = 0,$$

jer u_1 i v_1 zadovoljavaju sustav (1.15). Dakle, i x_2 je rješenje jednadžbe (1.13). Na isti način pokaže se da je i $x_3 = u_1\varepsilon^2 + v_1\varepsilon$ rješenje te jednadžbe.

Ako sada u (1.19) uvrstimo $\varepsilon = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$, rješenja možemo napisati u obliku

$$x_1 = u_1 + v_1, \;\; x_2 = -\frac{1}{2}(u_1 + v_1) + \frac{i\sqrt{3}}{2}(v_1 - u_1), \;\; x_3 = -\frac{1}{2}(u_1 + v_1) - \frac{i\sqrt{3}}{2}(v_1 - u_1). \tag{1.20}$$

Ove formule znatno nam pojednostavljuju rješavanje jednadžba trećeg stupnja.

U Cardanovoj formuli pojavljuje se izraz $\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$, koji ima istu ulogu kao i diskriminanta kod kvadratne jednadžbe, pa zato Δ nazivamo *diskriminantom* jednadžbe (1.13). Sljedeći teorem govori o tome kako narav rješenja jednadžbe (1.13), čiji su koeficijenti realni, ovisi o Δ.

Teorem 1.3.2. *Neka je Δ diskriminanta jednadžbe trećeg stupnja s realnim koeficijentima. Tada vrijedie sljedeće tvrdnje.*

(i) *Ako je $\Delta > 0$, onda jednadžba* (1.13) *ima jedno realno i dva konjugirano-kompleksna rješenja.*

(ii) *Ako je $\Delta = 0$, onda su sva rješenja jednadžbe* (1.13) *realna i bar jedno od njih je višestruko.*

(iii) *Ako je $\Delta < 0$, onda su sva rješenja jednadžbe* (1.13) *realna i različita.*

Dokaz. (i) Neka je $\Delta > 0$. U tom slučaju rješenja t_1 i t_2 jednadžbe (1.17) realna su i različita, pa je bar jedno od njih različito od nule. Neka je to npr. t_1. Neka je $u_1 = \sqrt[3]{t_1}$ ona vrijednost trećeg korijena koja je realna. Tada je v_1 realan broj jer je $3u_1v_1 + p = 0$. Kako je $t_1 \neq t_2$, to je i $u_1^3 \neq v_1^3$, pa je i $u_1 \neq v_1$. Iz formule (1.20) slijedi da je rješenje x_1 realano, a x_2 i x_3 su konjugirano-kompleksna rješenja.

(ii) Ako je $\Delta = 0$ i $q \neq 0$, onda je $t_1 = t_2 = -\frac{q}{2} \neq 0$. Neka je $u_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$ realna vrijednost trećeg korijena. Kako je $u_1 v_1 = -\frac{p}{3}$ realan broj, to je i $v_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$ realna vrijednost trećeg korijena, pa je $u_1 = v_1 \neq 0$. Prema (1.20), zaključujemo da su rješenja:

$$x_1 = 2u_1 \neq 0, \quad x_2 = x_3 = -u_1,$$

tj. jednadžba (1.13) ima tri realna rješenja i jedno od njih je dvostruko.

Ako je pak $\Delta = 0$ i $q = 0$, tada je i $p = 0$. U tom slučaju jednadžba (1.13) ima oblik $x^3 = 0$, pa je $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

(iii) Ako je $\Delta < 0$, onda su brojevi $t_1 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}, t_2 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}$ konjugirano-kompleksni, pa je stoga $|t_1| = |t_2| \neq 0$ i $t_1 \neq t_2$. Neka su u_1 i v_1 brojevi takvi da je

$$u_1^3 = t_1, \quad u_1 v_1 = -\frac{p}{3}, \quad v_1^3 = t_2. \tag{1.21}$$

Kako su $t_1 \neq 0$ i $t_2 \neq 0$ po modulu jednaki brojevi, iz (1.21) slijedi da je $|u_1|^3 = |v_1|^3 \neq 0$ i

$$|u_1| = |v_1| \neq 0. \tag{1.22}$$

Budući da je $t_1 \neq t_2$, slijedi $u_1 \neq v_1$. Iz (1.21) slijedi

$$\overline{u}_1 \overline{v}_1 = -\frac{\overline{p}}{3} = -\frac{p}{3} = u_1 v_1,$$

pa je prema (1.22)

$$u_1 (\overline{u}_1)^2 = u_1 \overline{u}_1 \overline{u}_1 = |u_1|^2 \overline{u}_1 = |v_1|^2 \overline{u}_1 = (\overline{u}_1 \overline{v}_1) v_1 = (u_1 v_1) v_1 = u_1 v_1^2,$$

odnosno $(\overline{u}_1)^2 = v_1^2$. Odavde i prema (1.21) vrijedi

$$(\overline{u}_1)^3 = \overline{t}_1 = t_2 = v_1^3 = v_1^2 v_1 = (\overline{u}_1)^2 v_1,$$

pa je $\overline{u}_1 = v_1$. Kako je $u_1 \neq v_1$, slijedi da su u_1 i v_1 konjugirano-kompleksni brojevi, pa iz (1.20) zaključujemo da su sva tri rješenja x_1, x_2 i x_3 realna. Treba još pokazati da su rješenja različita. Iz (1.20) slijedi da je $x_2 \neq x_3$. Pretpostavimo da je $x_1 = x_2$. Tada iz (1.19) slijedi $u_1 + v_1 = u_1 \varepsilon + v_1 \varepsilon^2$, odnosno $u_1(1 - \varepsilon) = v_1(\varepsilon^2 - 1) = v_1(\varepsilon - 1)(\varepsilon + 1)$, pa je $u_1 = -v_1(\varepsilon + 1) = v_1 \varepsilon^2$. Odavde slijedi da je $t_1 = t_2$ i $\Delta = 0$, a to je u kontradikciji s uvjetom $\Delta < 0$. Prema tome, $x_1 \neq x_2$. Na isti način se dokazuje da je $x_1 \neq x_3$. □

Poglavlje 2

Položaj stacionarnih točaka polinoma u odnosu na njegove nultočke

2.1 Gauss–Lucasov i Jensenov teorem

Postoji više interesantnih rezultata koji govore o vezi nultočaka polinoma

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0,$$

gdje je $a_n \neq 0$, i nultočaka njegove derivacije

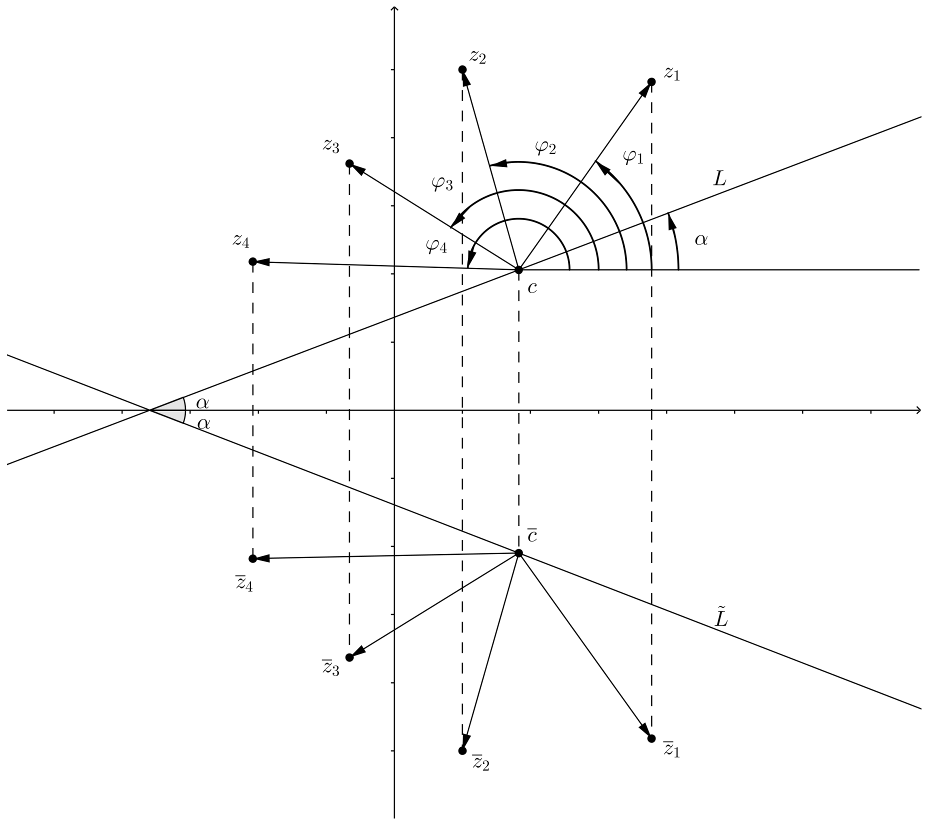
$$p'(z) = n a_n z^{n-1} + (n-1) a_{n-1} z^{n-2} + \cdots + a_1.$$

U uvodnom poglavlju spomenuli smo Rolleov teorem koji nam govori o položaju stacionarnih točaka polinoma realne varijable u odnosu na njegove nultočke. Jedan od najznačajnijih kompleksnih analogona ovog teorema zasigurno je Gauss–Lucasov teorem, koji kaže da stacionarne točke polinoma kompleksne varijable leže u konveksnoj ljusci njegovih nultočaka. Još jedna važna generalizacija Rolleovog teorema koja se odnosi na polinome kompleksne varijable s realnim koeficijentima je Jensenov teorem. Prije nego što dokažemo ove teoreme, upoznat ćemo se s pojmovima konveksne ljuske skupa i Jensenovih krugova.

Skup $S \subseteq \mathbb{C}$ je konveksan ako sadrži svaki segment čiji rubovi su elementi tog skupa. *Konveksna ljuska* skupa S, u oznaci $\operatorname{co} S$ je najmanji konveksni skup koji sadrži S. Uočimo da je konveksna ljuska konačnog skupa S najmanji konveksni poligon koji sadrži S.

Neka je p polinom kompleksne varijable s realnim koeficijentima. Ne-realne nultočke takvih polinoma javljaju se kao parovi konjugirano-kompleksnih brojeva. Za svaki konjugirano- kompleksni par $z = x+iy$ i $\overline{z} = x-iy$ nultočaka od p, konstruiramo krug sa središtem u točki x i polumjerom $|y|$, tj. krug čiji dijametar spaja točke z i $\overline{z}$. Tako konstruirani krugovi nazivaju se *Jensenovi krugovi* polinoma p.

Teorem 2.1.1 (Gauss–Lucas)**.** *Stacionarne točke polinoma p pripadaju konveksnoj ljusci njegovih nultočaka.*



Slika 2.1 : Pravac L ne siječe $\mathrm{co}\{z_1, \ldots, z_n\}$

Dokaz. Neka je $p(z) = (z - z_1) \cdots (z - z_n)$ polinom n-tog stupnja. Budući da je $\ln p(z) = \sum_{j=1}^{n} \ln(z - z_j)$, deriviranjem se dobije

$$\frac{p'(z)}{p(z)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{z - z_j}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_n\}.$$

Neka je c stacionarna točka polinoma p. Ako je $p(c) = 0$, onda je $c = z_j$ za neki $j \in \{1, \ldots, n\}$, pa $c \in \mathrm{co}\{z_1, \ldots, z_n\}$. Stoga pretpostavimo da je $p(c) \neq 0$.

Prepostavimo $c \notin \mathrm{co}\{z_1, \ldots, z_n\}$. Tada možemo povući pravac L kroz točku c koji ne siječe skup $\mathrm{co}\{z_1, \ldots, z_n\}$. Neka je α kut koji pravac L zatvara s pozitivnim dijelom x-osi (slika 2.1).

Neka je $\tilde{L}$ pravac kroz $\overline{c}$ koji s pozitivnim dijelom x-osi zatvara kut $\pi - \alpha$. Zapišimo brojeve $z_j - c$ u polarnoj formi: $z_j - c = r_j e^{i\varphi_j}$, $j = 1, \ldots, n$. Tada je $\alpha < \varphi_j < \alpha + \pi$, $j = 1, \ldots, n$. Također, $\overline{z}_j - \overline{c} = r_j e^{i(2\pi - \varphi_j)}$, pa je

$$\frac{1}{z_j - c} = \frac{\overline{z}_j - \overline{c}}{|z_j - c|^2} = \frac{1}{r_j^2} r_j e^{i(2\pi-\varphi_j)} = \frac{1}{r_j} e^{i(2\pi-\varphi_j)}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Pritom je $\pi - \alpha < 2\pi - \varphi_j < 2\pi - \alpha$, $j = 1, \ldots, n$. To znači da vektori $\frac{1}{r_1^2}\overrightarrow{\overline{c}\,\overline{z}_1}, \ldots, \frac{1}{r_n^2}\overrightarrow{\overline{c}\,\overline{z}_n}$ leže svi u istoj od dviju otvorenih poluravnina na koje pravac $\tilde{L}$ dijeli kompleksnu ravninu, pa suma tih vektora ne može biti nul-vektor (slika 2.1). Drugim riječima, $\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{z_j - c} \neq 0$. Odavde slijedi

$$\frac{p'(c)}{p(c)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{c - z_j} \neq 0$$

tj. $p'(c) \neq 0$ što je u kontradikciji s pretpostavkom. Zaključujemo da $c \in \mathrm{co}\{z_1, \ldots, z_n\}$. □

Teorem 2.1.2 (Jensen). *Neka je p polinom s realnim koeficijentima. Tada svaka ne-realna stacionarna točka polinoma p leži u nekom od Jensenovih krugova polinoma p.*

Dokaz. Neka je p polinom n-tog stupnja s nultočkama $z_1, \ldots, z_n$. Već smo prethodno vidjeli da vrijedi

$$\frac{p'(z)}{p(z)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{z - z_j}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_n\}. \tag{2.1}$$

Neka je c ne-realna stacionarna točka od p. Ako je $p(c) = 0$, onda je $c = z_j$ za neki $j \in \{1, \ldots, n\}$, pa c pripada Jensenovom krugu određenom dijametrom $\overline{c\overline{c}}$.

Neka je sada $p(c) \neq 0$. Pretpostavimo da c ne pripada niti jednom Jensenovoma krugu polinoma p. Neka je $c = u + iv$, $v \neq 0$, te $z_j = a_j + ib_j$, $j = 1, \ldots, n$.

Ako je z_j ne-realna nultočka od p, tj. $b_j \neq 0$, onda je $\overline{z}_j$ također nultočka od p. Tada je

$$\frac{1}{c - z_j} + \frac{1}{c - \overline{z}_j} = \frac{1}{c - a_j - ib_j} + \frac{1}{c - a_j + ib_j} = \frac{2(c - a_j)}{(c - a_j)^2 + b_j^2} = \frac{2(c - a_j)[(\overline{c} - a_j)^2 + b_j^2]}{|(c - a_j)^2 + b_j^2|^2} \tag{2.2}$$

Zanima nas kojeg je predznaka $\mathrm{Im}\left(\frac{1}{c - z_j} + \frac{1}{c - \overline{z}_j}\right)$.

Uočimo, prema (2.2) je predznak od $\mathrm{Im}\left(\frac{1}{c - z_j} + \frac{1}{c - \overline{z}_j}\right)$ jednak predznaku od

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}((c - a_j)[(\overline{c} - a_j)^2 + b_j^2]) &= \mathrm{Im}((u - iv - a_j)|c - a_j|^2 + (u + iv - a_j)b_j^2) \\ &= v(b_j^2 - |c - a_j|^2). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Kako po pretpostavci c ne pripada Jensenovom krugu određenom dijametrom $\overline{z_j\bar{z}_j}$, tj. krugu polumjera $|b_j|$ sa središtem u a_j, to je $|c - a_j|^2 > b_j^2$. Stoga iz (2.3) slijedi da je predznak broja $\mathrm{Im}\left(\frac{1}{c-z_j} + \frac{1}{c-\bar{z}_j}\right)$ suprotan predznaku broja v.

Uzmimo sada da je z_j realna nultočka od p, tj. $z_j = a_j$. Tada je

$$\frac{1}{c - z_j} = \frac{1}{c - a_j} = \frac{1}{c - a_j} \cdot \frac{\bar{c} - a_j}{\bar{c} - a_j} = \frac{u - iv - a_j}{|c - a_j|^2},$$

pa je predznak od $\mathrm{Im}\left(\frac{1}{c-z_j}\right)$ suprotan predznaku od v.

Kako se u sumi $\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{c-z_j}$ pojavljuju dvije vrste nultočaka od p: ne-realni z_j koji dolaze u kompleksno-konjugiranim parovima, te realni z_j, zaključujemo da i $\mathrm{Im}\left(\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{c-z_j}\right)$ ima predznak suprotan broju v, pa je stoga $\mathrm{Im}\left(\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{c-z_j}\right) \neq 0$. No, tada je prema (2.1)

$$\frac{p'(c)}{p(c)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{c - z_j} \neq 0,$$

odnosno $p'(c) \neq 0$ što je u suprotnosti s pretpostavkom. Prema tome, c leži u nekom od Jensenovih krugova polinoma p. □

2.2 Sendov–Ilieffova slutnja

Poznata Sendov–Ilieffova slutnja govori o položaju stacionarnih točaka polinoma p stupnja većeg od jedan u odnosu na njegove nultočke. Slutnja kaže da ako sve nultočke polinoma p leže u krugu $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$, tada je svaka nultočka polinoma p udaljena za najviše 1 od barem jedne stacionarne točke polinoma p. Slutnju je postavio bugarski matematičar B. Sendov, ali se često pripisuje L. Ilieffu. Slutnja je dokazana za sve polinome stupnja najviše osam (v. [1]), te za još neke posebne polinome. U ovoj ćemo točki pokazati da je tvrdnja istinita za polinome oblika

$$p(z) = (z - z_1)^{n_1}(z - z_2)^{n_2}(z - z_3)^{n_3},$$

gdje su $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$. Tvrdnju su dokazali Cohen i Smith u [3].

Teorem 2.2.1. *Neka je* $p(z) = (z - z_1)^{n_1}(z - z_2)^{n_2}(z - z_3)^{n_3}$, *gdje je* $n_i \in \mathbb{N}$ *te* $|z_i| \leq 1$ *za* $i = 1, 2, 3$. *Tada svaki od krugova*

$$\mathcal{K}_i := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_i| \leq 1\}, \quad i = 1, 2, 3,$$

sadrži barem jednu stacionarnu točku polinoma p.

Sada ćemo navesti lemu koja će nam koristiti u dokazu Sendov–Ilieffove slutnje.

Lema 2.2.2. *Neka je p polinom stupnja n, gdje je $n \geq 2$. Ako je*

$$|p''(z_0)| \geq (n-1)|p'(z_0)|,$$

tada barem jedna stacionarna točka od p leži unutar kruga $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq 1\}$.

Dokaz. Neka su $c_1, \ldots, c_{n-1}$ nultočke polinoma p'. Možemo pretpostaviti da je najveći koeficijenta polinoma p jednak 1. U tom je slučaju $p'(z) = n \prod\limits_{i=1}^{n-1}(z - c_i)$. Ako je $p'(z) \neq 0$, tada se deriviranjem izraza $\ln p'(z) = \ln n + \sum_{i=1}^{n} \ln(z - c_i)$ dobije

$$\frac{p''(z)}{p'(z)} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{z - c_i}.$$

Jasno je da tvrdnja vrijedi ako je $p'(z_0) = 0$, pa stoga pretpostavimo da je $p'(z_0) \neq 0$. Pretpostavimo da je $|z_0 - c_i| > 1$ za $i = 1, \ldots, n-1$. Tada iz nejednakosti $|p''(z_0)| \geq (n-1)|p'(z_0)|$ slijedi

$$n - 1 \leq \left| \frac{p''(z_0)}{p'(z_0)} \right| \leq \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{|z_0 - c_i|} < n - 1$$

što vodi do kontradikcije. Dakle, postoji $i \in \{1, \ldots, n\}$ za koji je $|z_0 - c_i| \leq 1$. □

Dokaz teorema 2.2.1. Ako je $z_1 = z_2 = z_3$, onda je $z_i \in \mathcal{K}_i$, $i = 1, 2, 3$, stacionarna točka polinoma p.

Ako je $z_1 \neq z_2 = z_3$, onda je $p(z) = (z - z_1)^{n_1}(z - z_2)^{n_2+n_3}$, pa je

$$p'(z) = (z - z_1)^{n_1-1}(z - z_2)^{n_2+n_3-1}[(n_1 + n_2 + n_3)z - (n_2 + n_3)z_1 - n_1 z_2)].$$

Uočimo da je $p'(z_2) = 0$, tj. $z_2 \in \mathcal{K}_2$ je stacionana točka polinoma p. Ako je $n_1 > 1$, onda je $p'(z_1) = 0$ pa je $z_1 \in \mathcal{K}_1$ također stacionarna točka od p. U slučaju $n_1 = 1$ je

$$p'(z) = (z - z_2)^{n_2+n_3-1}[(1 + n_2 + n_3)z - (n_2 + n_3)z_1 - z_2)]$$

pa je

$$c = \frac{(n_2 + n_3)z_1 + z_2}{1 + n_2 + n_3}$$

druga stacionarna točka polinoma p. Tada je

$$|c - z_1| = \left| \frac{(n_2 + n_3)z_1 + z_2}{1 + n_2 + n_3} - z_1 \right| = \frac{|z_2 - z_1|}{1 + n_2 + n_3} \leq \frac{|z_1| + |z_2|}{1 + n_2 + n_3} \leq \frac{2}{1 + n_2 + n_3} < 1$$

pa $c \in \mathcal{K}_1$.

Preostaje dokazati teorem u slučaju kad su sve tri nultočke polinoma p međusobno različite. Neka je $n = n_1 + n_2 + n_3$. Tada je prema teoremu 1.2.4

$$p'(z) = n(z - z_1)^{n_1 - 1}(z - z_2)^{n_2 - 1}(z - z_3)^{n_3 - 1}(z - c_1)(z - c_2) \tag{2.4}$$

za neke $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. Pokazat ćemo da tada p ima stacionarnu točku u krugu $\mathcal{K}_1$. (Zbog simetrije, na isti način se pokaže da tada p ima stacionarnu točku i u krugu $\mathcal{K}_2$ i u $\mathcal{K}_3$.)

Ako je $n_1 > 1$, onda je z_1 stacionarna točka od p i očito $z_1 \in \mathcal{K}_1$.

Pretpostavimo da je $n_1 = 1$. Zapišimo p u obliku $p(z) = (z - z_1)q(z)$. Tada je

$$p'(z) = q(z) + (z - z_1)q'(z),$$

pa je

$$p'(z_1) = q(z_1) = (z_1 - z_2)^{n_2}(z_1 - z_3)^{n_3}. \tag{2.5}$$

Iz (2.4) i (2.5) slijedi

$$n(z_1 - c_1)(z_1 - c_2) = (z_1 - z_2)(z_1 - z_3). \tag{2.6}$$

Kako je $|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2| \leq 2$ i $|z_1 - z_3| \leq |z_1| + |z_3| \leq 2$, dobivamo

$$|z_1 - c_1||z_1 - c_2| = \frac{1}{n}|z_1 - z_2||z_1 - z_3| \leq \frac{4}{n}.$$

Stoga za $n \geq 4$ vrijedi $|z_1 - c_1||z_1 - c_2|$ pa je $|z_1 - c_1| \leq 1$ ili $|z_1 - c_2| \leq 1$, odnosno $c_1 \in \mathcal{K}_1$ ili $c_2 \in \mathcal{K}_1$.

Preostaje razmotriti slučaj $n = 3$, tj. $n_1 = n_2 = n_3 = 1$. Tada je

$$p(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3).$$

Neka je $q(z) = (z - z_2)(z - z_3)$, tj. $p(z) = (z - z_1)q(z)$. Vrijedi

$$\begin{aligned} p'(z) &= q(z) + (z - z_1)q'(z), \\ p''(z) &= 2q'(z) + (z - z_1)q''(z), \end{aligned}$$

pa je

$$p'(z_1) = q(z_1), \quad p''(z_1) = 2q'(z_1),$$

odakle slijedi

$$\frac{p''(z_1)}{p'(z_1)}) = 2\frac{q'(z_1)}{q(z_1)} = 2\left(\frac{1}{z_1 - z_2} + \frac{1}{z_1 - z_3}\right) = \frac{2(2z_1 - z_2 - z_3)}{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)}. \tag{2.7}$$

Pretpostavimo najprije da točke z_1, z_2, z_3 leže sve na istom pravcu te neka je z_2 unutar segmenta s krajevima z_1 i z_3. Tada je $|z_1 - z_3| \geq |z_1 - z_2|$ pa je

$$|2z_1 - z_2 - z_3| = |(z_1 - z_2) + (z_1 - z_3)| = |z_1 - z_2| + |z_1 - z_3| \geq 2|z_1 - z_2| \geq |z_1 - z_2||z_1 - z_3|.$$

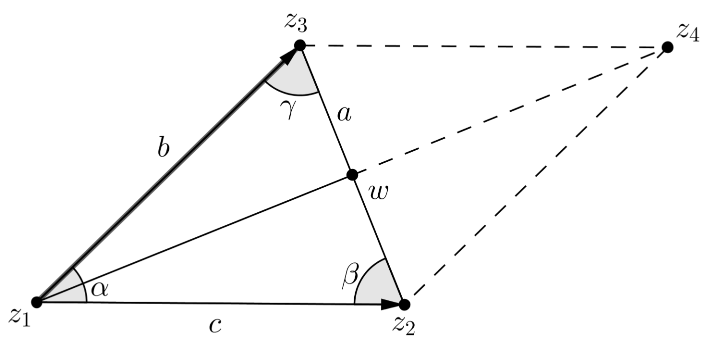
Odavde prema (2.7) slijedi

$$\left|\frac{p''(z_1)}{p'(z_1)}\right| = \frac{2|2z_1 - z_2 - z_3|}{|z_1 - z_2||z_1 - z_3|} \geq 2 = n - 1$$

pa prema lemi 2.2.2 barem jedna nultočka od p' leži u krugu $\mathcal{K}_1$. Na isti se način pokaže da barem jedna nultočka od p' leži u krugu $\mathcal{K}_1$ ako točka z_3 pripada segmentu s krajevima z_1 i z_2. Pretpostavimo stoga da z_1 pripada segmentu s krajevima z_2 i z_3.Tada postoji $t \in \langle 0, 1\rangle$ tako da je $z_1 = tz_2 + (1 - t)z_3$. Slijedi $z_1 - z_2 = (1 - t)(z_3 - z_2)$, $z_1 - z_3 = t(z_2 - z_3)$ pa je

$$|z_1 - z_2||z_1 - z_3| = t(1 - t)|z_2 - z_3| \leq 2t(1 - t) \leq 2.$$

Stoga prema (2.6) vrijedi $3|z_1 - c_1||z_1 - c_2| = |z_1 - z_2||z_1 - z_3| \leq 2$, tj. $|z_1 - c_1||z_1 - c_2| \leq \frac{2}{3}$ pa mora biti $|z_1 - c_1| \leq 1$ ili $|z_1 - c_2| \leq 1$. Dakle $c_1 \in \mathcal{K}_1$ ili $c_2 \in \mathcal{K}_1$.



Slika 2.2: Točke z_1, z_2 i z_3 ne leže na istom pravcu.

Preostaje razmotriti slučaj kada točke z_1, z_2, z_3 ne leže sve na istom pravcu, odnosno z_1, z_2 i z_3 su vrhovi trokuta $\triangle z_1z_2z_3$ (slika 2.2). Neka je $a = |z_2 - z_3|$, $b = |z_1 - z_3|$, $c = |z_1 - z_2|$, a m_{z_1} duljina težišnice trokuta $\triangle z_1z_2z_3$ povučene iz vrha z_1. Neka je z_4 četvrti vrh paralelograma razapetog sa $\overrightarrow{z_1z_2}$ i $\overrightarrow{z_1z_3}$, a w polovište dužine $\overline{z_2z_3}$. Tada je $2\overrightarrow{z_1w} = \overrightarrow{z_1z_4} = \overrightarrow{z_1z_2} + \overrightarrow{z_1z_3}$, pa je

$$2m_{z_1} = 2|\vec{z_1w}| = |z_2 - z_1 + z_3 - z_1| = |2z_1 - z_2 - z_3|.$$

Pretpostavimo da je $2m_{z_1} \geq bc$. Tada je prema (2.7)

$$\left|\frac{p''(z_1)}{p'(z_1)}\right| = \frac{2|2z_1 - z_2 - z_3|}{|z_1 - z_2||z_1 - z_3|} = \frac{2 \cdot 2m_{z_1}}{bc} \geq 2 = n - 1,$$

pa prema lemi 2.2.2 barem jedna nultočka od p' leži u krugu $\mathcal{K}_1$.

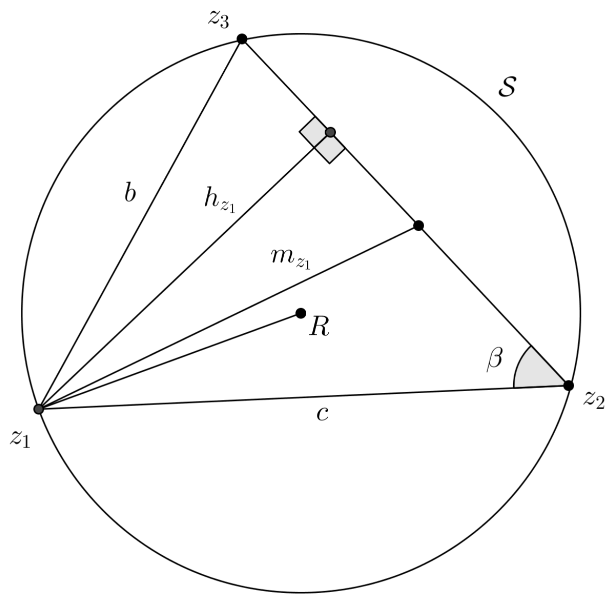
Uočimo, $b = |z_1 - z_3| \leq |z_1| + |z_3| \leq 2$, $c = |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2| \leq 2$, pa stoga u slučaju $m_{z_1} \geq b$ imamo $2m_{z_1} \geq 2b \geq cb$, dok u slučaju $m_{z_1} \geq c$ vrijedi $2m_{z_1} \geq 2c \geq bc$. Prema tome, tvrdnja teorema vrijedi ako je $m_{z_1} \geq b$ ili $m_{z_1} \geq c$.

Preostaje razmotriti slučaj kada je $m_{z_1} < b$ i $m_{z_1} < c$. Ovdje razlikujemo sljedeće podslučajeve: $bc \leq 3$, odnosno $bc > 3$.

Ako je $bc \leq 3$, onda je prema (2.6)

$$3|z_1 - c_1||z_1 - c_2| = |z_1 - z_2||z_1 - z_3| = bc \leq 3,$$

pa je $|z_1 - c_1||z_1 - c_2| \leq 1$, što povlači $|z_1 - c_1| \leq 1$ ili $|z_1 - c_2| \leq 1$, tj. $c_1 \in \mathcal{K}_1$ ili $c_2 \in \mathcal{K}_1$.



Slika 2.3: Kružnica $\mathcal{S}$ opisana $\triangle z_1z_2z_3$, gdje je h_{z_1} visina trokuta iz vrha z_1.

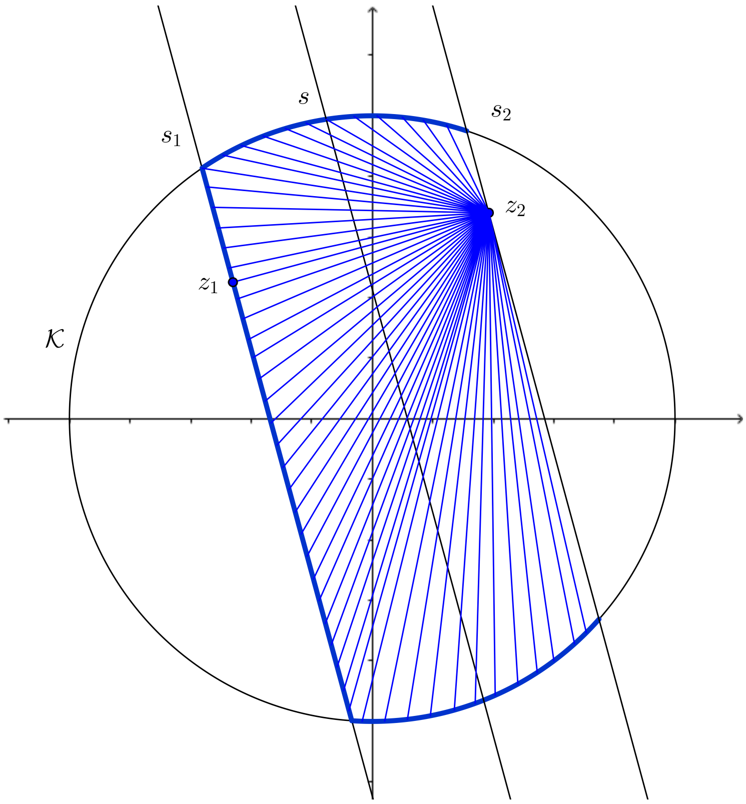
Pretpostavimo stoga $bc > 3$. Tada je $b^2 + c^2 = (b - c)^2 + 2bc > 6$, pa kako je $a \leq 2$, slijedi

$$b^2 + c^2 - a^2 > 6 - 4 > 0. \tag{2.8}$$

Neka je $\alpha = \angle z_3 z_1 z_2$. Tada je $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$, pa iz (2.8) slijedi $\cos\alpha > 0$, odnosno $\alpha < 90°$.

Stavimo $\beta = \angle z_1 z_2 z_3$, $\gamma = \angle z_1 z_3 z_2$. Kako je $m_{z_1} < b$, slijedi $\gamma < 90°$. Također, iz $m_{z_1} < c$ slijedi $\beta < 90°$. Prema tome, $\triangle z_1 z_2 z_3$ je oštrokutan. Označimo s R polumjer kružnice $\mathcal{S}$ opisane trokutu $\triangle z_1 z_2 z_3$, a s h_{z_1} visinu trokuta iz vrha z_1 (slika 2.3).

Tada je $\sin\beta = \frac{h_{z_1}}{c}$, te $\sin\beta = \frac{b}{2R}$, pa slijedi $bc = 2Rh_{z_1} \leq 2Rm_{z_1}$. Ako pokažemo da je $R \leq 1$, imat ćemo $bc \leq 2m_{z_1}$, čime će tvrdnja teorema biti dokazana.



Slika 2.4: Mogući položaji vrha z_3 ako su vrhovi z_1 i z_2 fiksirani.

Kako je $|z_i| \leq 1$, $i = 1, 2, 3$, to vrhovi trokuta $\triangle z_1 z_2 z_3$ leže unutar ili na jediničnoj kružnici $\mathcal{K}$ sa središtem u ishodištu. Pokazat ćemo sada da polumjer R postiže maksimalnu vrijednost u slučaju $\mathcal{S} = \mathcal{K}$ i tada je $R = 1$.

Fiksirajmo vrhove z_1 i z_2 unutar ili na kružnici $\mathcal{K}$ i pogledajmo kako smjestiti treći vrh z_3 tako da polumjer R kružnice $\mathcal{S}$ bude najveći mogući.

Neka je s simetrala dužine $\overline{z_1 z_2}$, a s_1 i s_2 pravci paralelni sa s kroz točke z_1 i z_2, redom. Kako su $\alpha < 90°$ i $\beta < 90°$, z_3 mora ležati unutar područja omeđenog pravcima s_1 i s_2 i kružnicom $\mathcal{K}$ (iscrtkano na slici 2.4). Središte opisane kružnice trokuta $\triangle z_1 z_2 z_3$ leži na simetrali s. Područje unutar kojeg leži z_3 možemo prekriti dužinama čiji je jedan kraj točka z_2, dok drugi kraj leži na rubu područja iscrtkanog na slici 2.4. Pomičemo li se duž proizvoljne dužine od točke z_2 prema rubu iscrtkanog područja, birajući položaj točke z_3 na toj dužini, jasno je da će polumjer R opisane kružnice $\mathcal{S}$ rasti, pa će $\mathcal{S}$ imati najveći mogući polumjer ako je vrh z_3 rubna točka te dužine. Prema tome, želimo li da R bude najveći mogući, vrh z_3 treba birati na rubu iscrtkanog područja na slici 2.4, označeno plavom bojom. Također, krećemo li se od točke z_1 duž pravca s_1 prema kružnici $\mathcal{K}$, birajući na toj dužini položaj točke z_3, jasno je da će polumjer R opisane kružnice rasti, pa će R biti najveći mogući ako z_3 leži na kružnici $\mathcal{K}$. Time smo pokazali da za dane vrhove z_1 i z_2, vrh z_3 treba birati na kružnici $\mathcal{K}$ ako želimo da polumjer R opisane kružnice $\mathcal{S}$ trokuta $\triangle z_1z_2z_3$ bude najveći mogući.

Prema tome, sad možemo smatrati da je jedan vrh, recimo z_1, na kružnici $\mathcal{K}$, dok je vrh z_2 unutar ili na kružnici $\mathcal{K}$. Prema opisanom postupku, da bi polumjer R bio najveći mogući, vrh z_3 mora pripadati kružnici $\mathcal{K}$.

Konačno, sad znamo da dva vrha, recimo z_1 i z_2, leže na kružnici $\mathcal{K}$, te želimo li da R bude najveći mogući, prema opisanom postupku i treći vrh z_3 mora ležati na $\mathcal{K}$.

Time smo zapravo dokazali da će polumjer R opisane kružnice trokuta $\triangle z_1z_2z_3$ biti najveći mogući u slučaju kada sva tri vrha leže na jediničnoj kružnici $\mathcal{K}$, tj. u slučaju $\mathcal{S} = \mathcal{K}$. Tada je $R = 1$. Prema tome, za bilo koji položaj točaka z_1, z_2, z_3 koje leže unutar ili na kružnici $\mathcal{K}$, vrijedi $R \leq 1$. □

2.3 Mardenov teorem o položaju stacionarnih točaka kubičnog polinoma

Neka je

$$p(z) = a_nz^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1z + a_0,$$

gdje je $a_n \neq 0$, polinom n-tog stupnja s nultočkama $z_1, \ldots, z_n$. Označimo s $c_1, \ldots, c_{n-1}$ nultočke njegove derivacije

$$p'(z) = na_nz^{n-1} + (n-1)a_{n-1}z^{n-2} + \cdots + a_1.$$

Tada je

$$z_1 + \cdots + z_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \quad c_1 + \cdots + c_{n-1} = -\frac{(n-1)a_{n-1}}{na_n},$$

odakle slijedi

$$\frac{1}{n}(z_1 + \cdots + z_n) = \frac{1}{n-1}(c_1 + \cdots + c_{n-1}).$$

Prema tome, težište lika čiji su vrhovi nultočke polinoma p podudara se s težištem lika čiji su vrhovi stacionarne točke polinoma p. Posebno, stacionarna točka kvadratnog polinoma je polovište dužine čiji krajevi su nultočke tog polinoma.

U ovoj točki razmotrit ćemo vezu između nultočaka kubičnog polinoma i njegovih stacionarnih točaka. Pritom pretpostavljamo da nultočke z_1, z_2, z_3 polinoma p ne leže sve na istom pravcu u kompleksnoj ravnini. Također, bez smanjenja općenitosti, neka je vodeći koeficijent polinoma p jednak jedan, budući da dijeljenje s konstantom različitom od nule ne mijenja nultočke polinoma p, odnosno nultočke njegove derivacije p'. Dakle,

$$p(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3),$$

odnosno

$$p(z) = z^3 - (z_1 + z_2 + z_3)z^2 + (z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3)z - z_1z_2z_3.$$

Deriviranjem se dobije

$$p'(z) = 3z^2 - 2(z_1 + z_2 + z_3)z + z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3.$$

Označimo s

$$g = \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3)$$

težište trokuta $\triangle z_1z_2z_3$ s vrhovima z_1, z_2, z_3. Tada su

$$c_{1,2} = g \pm \sqrt{g^2 - \frac{1}{3}(z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3)} \tag{2.9}$$

nultočke polinoma p'. Uočimo da su točke c_1 i c_2 smještene simetrično u odnosu na težište g. Prema Gauss–Lucasovom teoremu c_1 i c_2 leže unutar trokuta $\triangle z_1z_2z_3$ ili na njegovim stranicama. Zapravo, te točke leže unutar trokuta, što se jednostavno provjeri. Naime, ako je c nultočka od p', tada je $c \neq z_j$, $j = 1, 2, 3$, budući da p po pretpostavci nema višestrukih nultočaka. Kako je

$$\ln p(z) = \ln(z - z_1) + \ln(z - z_2) + \ln(z - z_3),$$

to se deriviranjem dobije

$$\frac{p'(z)}{p(z)} = \sum_{j=1}^{3} \frac{1}{z - z_j}, \quad z \neq z_1, z_2, z_3,$$

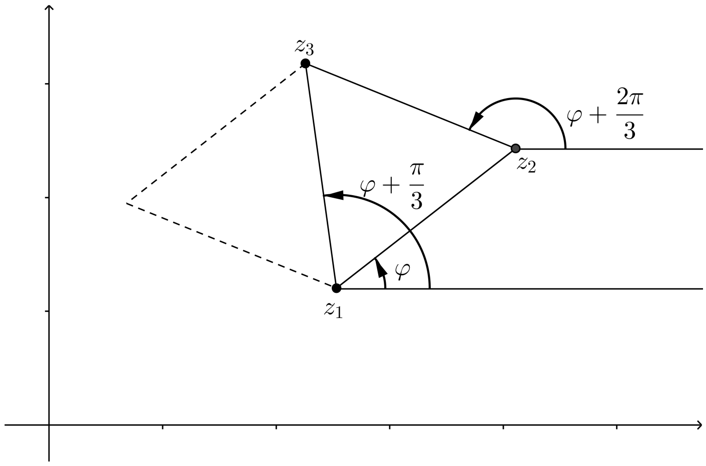
odakle slijedi

$$0 = \overline{\left(\frac{p'(c)}{p(c)}\right)} = \sum_{j=1}^{3} \frac{1}{\overline{c} - \overline{z_j}} = \sum_{j=1}^{3} \frac{c - z_j}{|c - z_j|^2}.$$

Tada je $c = \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \alpha_3 z_3$, gdje je

$$\alpha_j = \frac{|c - z_j|^{-2}}{\sum_{j=1}^{3} |c - z_j|^{-2}} > 0, \quad j = 1, 2, 3$$

i $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$. To pokazuje da c leži unutar trokuta $\triangle z_1 z_2 z_3$.



Slika 2.5: Jednakostraničan trokut $\triangle z_1 z_2 z_3$.

Dalje, pokažimo da p' ima dvostruku nultočku ako i samo ako je trokut $\triangle z_1 z_2 z_3$ jednakostraničan. Prema (2.9), p' ima dvostruku nultočku ako i samo ako je

$$3g^2 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3, \tag{2.10}$$

što je ekvivalentno s

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3,$$

odnosno s

$$(z_1 - z_2)(z_3 - z_1) = (z_3 - z_2)^2. \tag{2.11}$$

Dakle, ako p' ima dvostruku nultočku, onda prema (2.10) vrijedi

$$p(z) = z^3 - 3gz^2 + 3g^2 z - z_1 z_2 z_3 = (z - g)^3 - z_1 z_2 z_3 + g^3.$$

Neka je $v := \sqrt[3]{z_2 z_2 z_3 - g^3}$. Tada je $p(z) = (z - g)^3 - v^3$, pa su nultočke polinoma p :

$$z_1 = g + v, \quad z_2 = g + \omega v, \quad z_3 = g + \omega^2 v,$$

gdje je $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$. Jasno je da su tada z_1, z_2, z_3 vrhovi jednakostraničnog trokuta. Obratno, ako su z_1, z_2, z_3 vrhovi jednakostraničnog trokuta, tada postoji $\varphi \in [0, 2\pi\rangle$, tako da je

$$z_2 - z_1 = re^{i\varphi}, \quad z_3 - z_1 = re^{i(\varphi + \frac{\pi}{3})}, \quad z_3 - z_2 = re^{i(\varphi + \frac{2\pi}{3})},$$

gdje je $r = |z_2 - z_1| = |z_3 - z_1| = |z_3 - z_2|$ (v. sliku 2.5). Tada je

$$(z_1 - z_2)(z_3 - z_1) = re^{i(\varphi+\pi)} re^{i(\varphi+\frac{\pi}{3})} = r^2 e^{i(2\varphi+\frac{4\pi}{3})} = (z_3 - z_2)^2,$$

odnosno vrijedi (2.11), pa stoga p' ima dvostruku nultočku.

Puno finija veza između nultočaka kubičnog polinoma i njegovih stacionarnih točaka, počiva na jednom geometrijskom rezultatu koji dugujemo Steineru [12]. Steiner je pokazao da je u dani trokut uvijek moguće upisati jedinstvenu elipsu koja dodiruje stranice tog trokuta u njihovim polovištima. Ako su vrhovi trokuta nultočke kubičnog polinoma p, tada su njegove stacionarne točke fokusi *Steinerove elipse*. Ovaj vrlo važan rezultat dokazao je Marden [7] (v. također [8]). Mi ćemo izložiti pojednostavljen dokaz Mardenovog teorema prema Kalmanovom radu [6].

Teorem 2.3.1 (Marden)**.** *Neka je $p(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$ polinom trećeg stupnja s kompleksnim koeficijentima, čije su nultočke z_1, z_2 i z_3 nekolinearne točke u komplesnoj ravnini. Neka je $\mathcal{T}$ trokut s vrhovima z_1, z_2 i z_3. Tada postoji jedinstvena elipsa upisana u $\mathcal{T}$ koja dodiruje stranice trokuta u njihovim polovištima. Fokusi elipse su nultočke od p' :*

$$c_{1,2} = g \pm \sqrt{g^2 - \frac{1}{3}(z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3)},$$

gdje je $g = \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3)$ težište trokuta $\mathcal{T}$.

Prije nego započnemo s dokazom navest ćemo neka opažanja. Prvo, moguće je da je elipsa spomenuta u teoremu ustvari kružnica. U ovom slučaju fokusi se podudaraju, što znači da p' ima dvostruku nultočku, a opisani trokut je jednakostraničan.

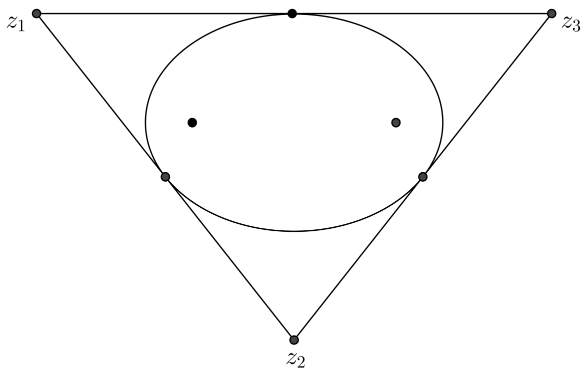
Jedinstvenost Steinerove elipse je važan podatak želimo li Mardenov teorem iskoristiti za konstruiranje nultočaka od p' : počevši sa trokutom, potom upisanom elipsom, a naposljetku s pronalaskom fokusa. Ovakva konceptualizacija ne bi imala smisla bez jedinstvenosti elipse.

Bez smanjenja općenitosti, možemo rotirati, translatirati i skalirati trokut na pogodan način. Takve transformacije možemo prikazati linearnom funkcijom $M : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Neka je $M(z) = \alpha z + \beta$, gdje su $\alpha \neq 0$ i β fiksni kompleksni brojevi. α možemo izraziti u polarnom obliku kao $re^{i\theta}$. Transformacija z u $M(z)$ ima sljedeću geometrijsku interpretaciju: skaliraj z za r, rotiraj oko ishodišta za kut θ, translatiraj za β. Kako bismo opravdali tvrdnju da ovakve transformacije možemo bez smanjenja općenitosti provoditi u dokazu Mardenovog teorema, treba pokazati da teorem vrijedi za $\{z_1, z_2, z_3\}$ ako i samo ako vrijedi i za transformiranu trojku $\{M(z_1), M(z_2), M(z_3)\}$. Zbog invertibilnosti linearne funkcije, dovoljno je pokazati samo jednu od ovih dviju implikacija. Ako znamo da Mardenov teorem vrijedi za $\{z_1, z_2, z_3\}$, pokažimo da mora vrijediti i za $\{M(z_1), M(z_2), M(z_3)\}$.

Propozicija 2.3.2. *Neka je $M(z) = \alpha z + \beta$ linearna transformacija u kompleksnoj ravnini, gdje su $\alpha \neq 0$ i β proizvoljni kompleksni brojevi. Neka je $p(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$, te neka su c_1 i c_2 nultočke polinoma p'. Ako je*

$$p_M(z) = (z - M(z_1))(z - M(z_2))(z - M(z_3)),$$

tada su $M(c_1)$ i $M(c_2)$ nultočke polinoma p'_M.



Slika 2.6: Steinerova elipsa upisana u trokut.

Dokaz. Na slici 2.6 prikazan je trokut s vrhovima z_1, z_2, z_3, te upisanom Steinerovom elipsom. Prikazani su fokusi elipse, koji moraju biti nultočke od p'. Gledajući na M geometrijski, primijetimo da ćemo transformacijom sve sačuvati. Naime, slika trokuta biti će njemu sličan trokut, slika Steinerove elipse će i dalje biti Steinerova elipsa transformiranog trokuta, a slike fokusa orginalne elipse su fokusi transformirane elipse. Prilikom transformacije novi polinom će biti oblika

$$P_M(z) = (z - M(z_1))(z - M(z_2))(z - M(z_3)).$$

Trebamo pokazati da transformacija M preslikava nultočke od p' u nultočke od p'_M. Zamijenimo z s $M(z)$ u definiciji polinoma p_M. Tada je

$$p_M(M(z)) = (M(z) - M(z_1))(M(z) - M(z_3))(M(z) - M(z_3)). \tag{2.12}$$

Primijetimo da je $M(z) - M(z_j) = \alpha(z - z_j)$. Dakle, iz (2.12) dobivamo

$$p_M(M(z)) = \alpha^3 p(z).$$

Derivirajući obje strane jednakosti i uzimajući u obzir $M'(z) = \alpha$ dobivamo

$$\alpha p'_M(M(z)) = \alpha^3 p'(z)$$

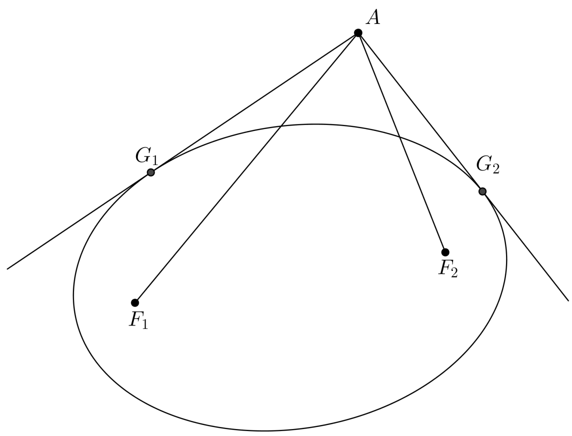
i stoga

$$p'_M(M(z)) = \alpha^2 p'(z).$$

Ovo nam pokazuje da ako je z nultočka od p', tada je $M(z)$ nultočka od p'_M. □

Prethodna propozicija nam omogućava da izaberemo odgovarajuću transformaciju M pomoću koje nultočke od p skaliramo, rotiramo i translatiramo u pogodnije položaje u kompleksnoj ravnini, što će nam pojednostavniti dokaz Mardenovog teorema. Naime, bit će dovoljno dokazati teorem s "jednostavnijim" polinomom p_M.

Ranije smo uočili poseban slučaj u kojem p' ima dvostruku nultočku ako i samo ako su nultočke polinoma p vrhovi jednakostraničnog trokuta. U tom je slučaju Steinerova elipsa zapravo upisana kružnica tom trokutu. Budući da je linearna transformacija M bijektivna funkcija, to će p' imati dvostruku nultočku ako i samo ako p'_M ima dvostruku nultočku. Prema tome, Steinerova elipsa transformiranog trokuta je kružnica točno tada kad je i Steinerova elipsa originalnog trokuta kružnica.



Slika 2.7: Elipsa s fokusima F_1 i F_2, vanjskom točkom A i tangentama AG_1 i AG_2.

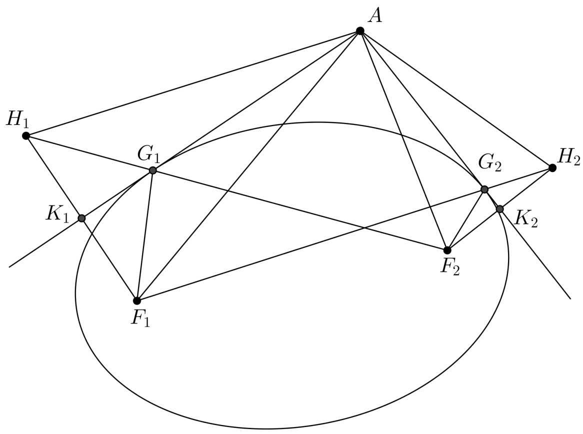
Drugi važan pojam je odnos koeficijenata i nultočaka kvadratnog polinoma. Kvadratnoj jednadžbi $z^2 + bz + c = 0$ koja ima nultočke z_1 i z_2, možemo lako izračunati koeficijente Vièteovim formulama $b = -(z_1 + z_2)$ i $c = z_1 z_2$. Ovo ćemo često koristiti u dokazima koji slijede.

Posljednji pojam tiče se optičkog svojstva elipse: *tangenta povučena u bilo kojoj točki elipse zatvara iste oštre kutove s pravcima koji prolaze kroz fokuse elipse i tu točku.* Za dokaz Mardenovog teorema trebat će nam manje poznata, iako zapravo ekvivalentna, varijanta ove činjenice koju dokazujemo u sljedećoj lemi.

Lema 2.3.3. *Neka je zadana elipsa s fokusima F_1 i F_2, te neka se točka A nalazi izvan elipse. Postoje dva pravca iz točke A koji su tangencijalni na elipsu. Neka su G_1 i G_2 točke u kojima ti pravci dodiruju elipsu. Tada je $\angle F_1AG_1 = \angle F_2AG_2$ (slika 2.7).*

Dokaz. Konfiguracija opisana u lemi prikazana je na slici 2.8, s jednom od dvije moguće dodjele oznaka točaka G_1 i G_2.

Označimo s H_1 osnosimetričnu sliku točke F_1 s obzirom na pravac AG_1. Neka je točka K_1 polovište dužine $\overline{H_1F_1}$. Trokuti $\triangle AK_1F_1$ i $\triangle AK_1H_1$ su sukladni, pa vrijedi $d(A, F_1) = d(A, H_1)$, te $\angle F_1AK_1 = \angle H_1AK_1$. Analognu konstrukciju možemo napraviti i za G_2. Dakle, neka je H_2 osnosimetrična slika točke F_2 s obzirom na pravac AG_2, a točka K_2 polovište dužine $\overline{H_2F_2}$. Trokuti $\triangle AK_2F_2$ i $\triangle AK_2H_2$ su sukladni, pa vrijedi $d(A, F_2) = d(A, H_2)$, te $\angle F_2AK_2 = \angle H_2AK_2$.



Slika 2.8: Konfiguracija opisana u lemi 2.3.3.

Naš je cilj pokazati $\angle F_1AG_1 = \angle F_2AG_2$. Zbog uočene sukladnosti trokuta, dovoljno je pokazati $\angle F_1AH_1 = \angle F_2AH_2$.

Konstruirajmo dužine $\overline{F_1G_1}, \overline{G_1H_1}$, te $\overline{F_2G_1}$. Primijetimo da je $\angle F_1G_1K_1 = \angle H_1G_1K_1$ jer je pravac AK_1 simetrala dužine $\overline{H_1F_1}$. Osim toga, zbog optičkog svojstva elipse je $\angle F_1G_1K_1 = \angle F_2G_1A$. Slijedi $\angle F_2G_1A = \angle H_1G_1K_1$, što pokazuke da točke F_2, G_1 i H_1 leže na istom pravcu. Analognu konstrukciju provedemo za G_2, te zaključujemo da točke F_1, G_2 i H_2 leže na istom pravcu.

Sada ćemo pokazati da su trokuti $\triangle AH_1F_2$ i $\triangle AF_1H_2$ sukladni, tako da pokažemo da su im odgovarajuće stranice jednakih duljina. Ranije smo pokazali da je $d(A, F_1) = d(A, H_1)$, te $d(A, F_2) = d(A, H_2)$. Nadalje, imamo $d(H_1, F_2) = d(F_1, G_1) + d(G_1, F_2) = d(F_1, G_2) + d(G_2, F_2) = d(F_1, H_2)$, gdje smo iskoristili svojstvo elipse koje nam govori da je suma udaljenosti bilo koje točke elipse do njenih fokusa konstantna.

Iz sukladnosti trokuta $\triangle AH_1F_2$ i $\triangle AF_1H_2$ slijedi $\angle H_1AF_2 = \angle F_1AH_2$. Ovim kutovima je kut $\angle F_1AF_2$ zajednički, pa slijedi $\angle F_1AH_1 = \angle F_2AH_2$. Zaključujemo da je $\angle F_1AG_1 = \angle F_2AG_2$. □

Napomena 2.3.4. *Lema 2.3.3 potječe još od starih Grka. Iako se čini da se radi o proširenju optičkog svojstva elipse, ova dva svojstva su zapravo ekvivalentna. Kao što se vidi iz dokaza leme 2.3.3, rezultat za točku A izvan elipse slijedi iz optičkog svojstva elipse. Međutim, ako pretpostavimo da elipsa ima svojstvo koje opisuje lema 2.3.3, tada se optičko svojstvo elipse dobije kao granični slučaj kada se točka A približava elipsi.*

Lema 2.3.5. *Neka je p polinom s nultočkama z_1, z_2, z_3, te neka je $\mathcal{T}$ trokut s vrhovima z_1, z_2 i z_3. Neka je $\mathcal{E}$ elipsa čiji su fokusi nultočke od p', te koja prolazi kroz polovište jedne stranice trokuta $\mathcal{T}$. Tada je ta stranica trokuta $\mathcal{T}$ tangencijalna na elipsu $\mathcal{E}$.*

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti, možemo rotirati, skalirati i translatirati trokut na način koji želimo. Neka jedna stranica trokuta leži na x-osi s polovištem u ishodištu koodinatnog sustava i neka joj je duljina jednaka 2, dok suprotan vrh trokuta leži iznad x-osi. Dakle, vrhovi trokuta (odnosno nultočke polinoma p) su $1, -1$ te $w = a + bi$, gdje je $b > 0$.

Promatrat ćemo elipsu koja prolazi kroz ishodište O, koje je polovište stranice trokuta koja leži na x-osi. Kako bismo dokazali da je ta stranica trokuta tangencijalna na elipsu, pokazat ćemo da pravci iz ishodišta koordinatnog sustava koji prolaze kroz fokuse elipse zatvaraju iste kutove s x-osi.

Polinom p je oblika

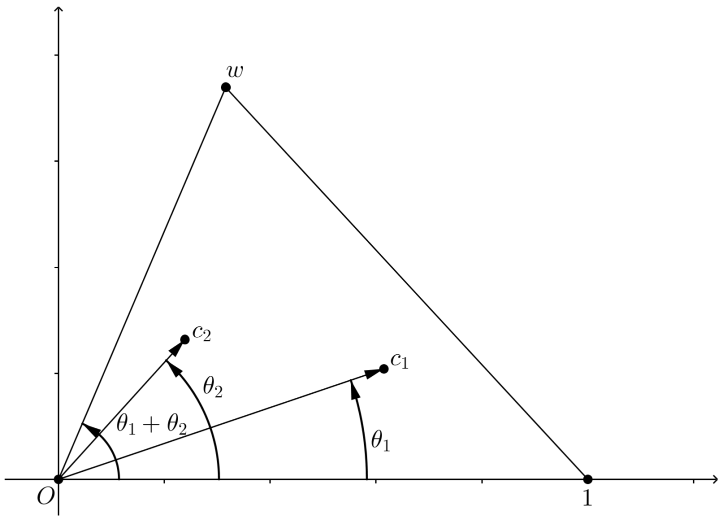
$$p(z) = (z-1)(z+1)(z-w) = z^3 - wz^2 - z + w.$$

Deriviranjem polinoma p dobivamo

$$p'(z) = 3z^2 - 2wz - 1 = 3\left(z^3 - \frac{2w}{3}z - \frac{1}{3}\right).$$

Ako su nultočke od p' oblika $c_1 = r_1e^{i\theta_1}$ i $c_2 = r_2e^{i\theta_2}$, gdje je $0 \leq \theta_1, \theta_2 < 2\pi$, tada iz Viéteovih formula dobivamo $c_1 + c_2 = \frac{2}{3}w$ i $c_1c_2 = -\frac{1}{3}$. Prva jednakost nam govori da će barem jedna nultočka od p' ležati u gornjoj poluravnini, dok nam druga jednakost govori da je $\theta_1 + \theta_2 = \pi$, što znači da će obadvije nultočke ležati u gornjoj poluravnini. Stoga su kutovi koje vektori $\overrightarrow{Oc_1}$ i $\overrightarrow{Oc_2}$ zatvaraju s pozitivnim dijelom x-osi suplementarni. To znači da ili obje točke c_1 i c_2 leže na y-osi, ili jedan od vektora $\overrightarrow{Oc_1}$ ili $\overrightarrow{Oc_2}$ zatvara oštri kut s pozitivnim dijelom x-osi, dok drugi vektor zatvara kut iste mjere s negativnim dijelom x-osi. U oba slučaja, pravci koji prolaze kroz ishodište i fokuse elipse zatvaraju iste kutove s x-osi, koja je stoga tangenta elipse. □

Lema 2.3.6. *Neka je p polinom s nultočkama z_1, z_2, z_3, te neka je $\mathcal{T}$ trokut s vrhovima z_1, z_2 i z_3. Neka je $\mathcal{E}$ elipsa s fokusima u nultočkama od p', koja dodiruje polovište jedne stranice trokuta $\mathcal{T}$. Tada su preostale dvije stranice trokuta $\mathcal{T}$ također tangencijalne na elipsu $\mathcal{E}$.*



Slika 2.9: Kut između Oc_2 i Ow jednak θ_1.

Dokaz. Kao što smo već prethodno rekli, možemo smjestiti trokut u koordinatnom sustavu na način koji želimo. Jedna stanica trokuta $\mathcal{T}$ je tangencijalna na elipsu $\mathcal{E}$, pa pretpostavimo da ta stranica leži na x-osi. Neka se jedan vrh trokuta, označen s O, nalazi u ishodištu koordinatnog sustava, te neka je drugi vrh trokuta točka 1. Preostali vrh označimo s $w = a + bi$, gdje je $b > 0$ (v. sliku 2.9). Uz ovakvu konfiguraciju, pokazat ćemo da je stranica trokuta $\overline{Ow}$ tangencijalna na elipsu $\mathcal{E}$.

Polinom p je oblika

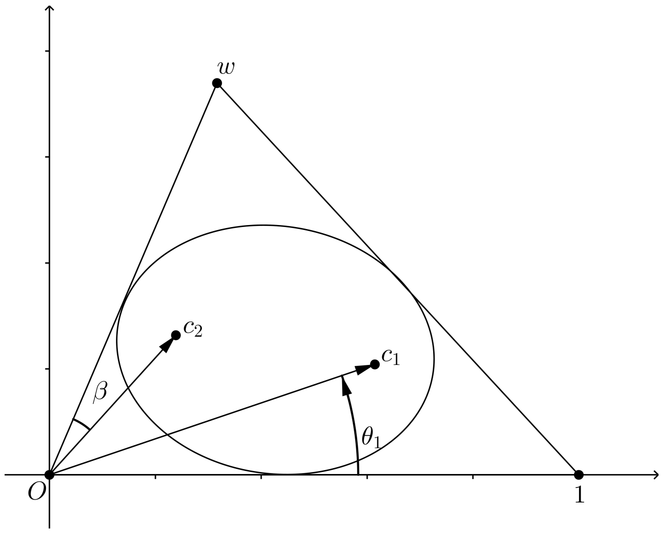
$$p(z) = z(z-1)(z-w) = z^3 - (1+w)z^2 + wz.$$

Deriviranjem polinoma p dobivamo

$$p'(z) = 3z^2 - 2(1+w)z + w.$$

Neka su nultočke od p' oblika $c_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ i $c_2 = r_2 e^{i\theta_2}$. Prema Vièteovim formulama dobivamo $c_1 + c_2 = \frac{2}{3}(1+w)$, što nam govori da barem jedna nultočka od p' mora ležati u gornjoj poluravnini. Isto tako, znamo da su nultočke od p' fokusi elipse $\mathcal{E}$, kojoj je x-os tangenta, pa se obje nultočke nalaze u gornjoj poluravnini, tj. vrijedi $0 < \theta_1 \leq \theta_2 < \pi$.

Iz Vièteovih formula imamo $c_1 c_2 = \frac{w}{3}$, što nam govori da je zbroj kutova $\theta_1 + \theta_2$ jednak kutu između pozitivnog dijela x-osi i Ow. Slijedi da je kut između Oc_2 i Ow jednak θ_1 (v. sliku 2.9).



Slika 2.10: Ow je tangenta na elipsu $\mathcal{E}$ jer je $\beta = \theta_1$.

Primijenimo sada lemu 2.3.3, pri čemu ishodište O koordinatnog sustava ima ulogu vanjske točke A. Kako znamo da se ishodište nalazi izvan elipse? To je očito, s obzirom da je x-os tangenta na elipsu $\mathcal{E}$, koju dodiruje u točki $x = \frac{1}{2}$. Zaista, x-os je jedna od dvije tangente na elipsu $\mathcal{E}$ iz ishodišta (v. sliku 2.10). Označimo drugu tangentu s L. Primjenom leme 2.3.3, kut β između Oc_2 i L jednak je kutu između x-osi i Oc_1 što je jednako θ_1. Isti kut zatvaraju Oc_2 i Ow, pa je stoga Ow tangenta na elipsu $\mathcal{E}$. Preostaje nam pokazati da je stranica trokuta $\overline{1w}$ također tangencijalna na elipsu $\mathcal{E}$. Ovo možemo dokazati na isti način, tako da trokut translatiramo horizontalno tako da su vrhovi -1 i 0, umjesto 0 i 1. $\square$

Koristeći prethodne tri leme, sada smo u mogućnosti dokazati Mardenov teorem. U dokazu teorema koristit ćemo kao poznati rezultat sljedeću činjenicu (v. [2]): *ako su F_1 i F_2 dvije različite točke u kompleksnoj ravnini, a L proizvoljan pravac koji ne presijeca dužinu $\overline{F_1F_2}$, tada postoji jedinstvena elipsa $\mathcal{E}$ s fokusima F_1 i F_2 kojoj je pravac L tangenta.*

Dokaz teorema 2.3.1. Pretpostavimo da je p polinom s kompleksnim koeficijentima. Neka su z_1, z_2 i z_3 njegove nultočke, te neka je $\mathcal{T}$ trokut s vrhovima z_1, z_2 i z_3. Neka su nultočke od p' fokusi elipse $\mathcal{E}$ koja prolazi kroz polovište jedne stranice trokuta $\mathcal{T}$. Prema lemi 2.3.5, ta stranica trokuta je tangencijalna na elipsu $\mathcal{E}$. Prema lemi 2.3.6, preostale dvije stranice trokuta $\mathcal{T}$ također su tangencijalne na elipsu $\mathcal{E}$. Tvrdimo da su točke u kojima elipsa $\mathcal{E}$ dodiruje preostale dvije stranice trokuta $\mathcal{T}$ zapravo polovišta tih dviju stranica. Ako nisu, ponovimo opisanu konstrukciju tako da odaberemo drugu stranicu trokuta i konstruiramo elipsu $\mathcal{E}'$ s fokusima u nultočkama od p', tako da je ta stranica trokuta tangencijalna na elipsu $\mathcal{E}'$. S obzirom da elipse $\mathcal{E}$ i $\mathcal{E}'$ imaju iste fokuse, te da je ista stranica trokuta tangencijalna na obje elipse, one se moraju podudarati. To znači da tada svaka od ovih dviju elipsa dodiruje i drugu stranicu trokuta $\mathcal{T}$ u polovištu te stranice. Simetrijom, isti zaključak dobivamo i za preostalu stranicu trokuta. Stoga, elipsa $\mathcal{E}$ dodiruje sve tri stranice trokuta u njihovim polovištima. □

2.4 Saff–Twomeyev teorem

Za $a \in \mathbb{C}$, $|a| \leq 1$, označimo s $\mathcal{P}(a)$ skup svih kubičnih polinoma čije nultočke leže unutar zatvorenog kruga polumjera 1 sa središtem u ishodištu, s tim da je barem jedna nultočka jednaka a. Teorem 2.2.1 kaže da će barem jedna stacionarna točka svakog takvog polinoma ležati u zatvorenom krugu polumjera 1 sa središtem u nultočki a. U ovom dijelu opisat ćemo još jedno područje $\mathcal{D}(a)$ sa svojstvom da svaki polinom $p \in \mathcal{P}(a)$ ima barem jednu stacionarnu točku u $\mathcal{D}(a)$ (v. sliku 2.11). Za rezultate koji slijede pretpostavit ćemo da je $0 \leq a \leq 1$, jer se ostali skupovi mogu dobiti rotacijom.

Uvedimo oznake

$$\Delta(a) := \left\{\left|z - \frac{a}{2}\right| \leq A\right\}, \quad C(a) := \left\{\left|z - \frac{a}{2}\right| = A\right\},$$

gdje je

$$A = \sqrt{\frac{4 - a^2}{12}}.$$

Prema Gauss–Lucasovom teoremu znamo da stacionarne točke svakog polinoma $p \in \mathcal{P}(a)$ leže unutar zatvorenog kruga $\mathcal{K}$ polumjera 1 sa središtem u ishodištu. Uočimo da je $\Delta(a) \subseteq \mathcal{K}$. Zaista, kako je $0 \leq a \leq 1$, to je $a^2 - 3a + 2 = (a-1)(a-2) \geq 0$, pa je stoga $\frac{4-a^2}{12} \leq \frac{(2-a)^2}{4}$, odnosno $A \leq 1 - \frac{a}{2}$. Zato za $z \in \Delta(a)$ imamo

$$|z| = \left|z - \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\right| \leq \left|z - \frac{a}{2}\right| + \frac{a}{2} \leq A + \frac{a}{2} \leq 1,$$

tj. $z \in \mathcal{K}$. Nadalje, uočimo da je

$$1 \geq a^2 \Leftrightarrow 4 \geq 4a^2 \Leftrightarrow 4 - a^2 \geq 3a^2 \Leftrightarrow \frac{4 - a^2}{12} \geq \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow A \geq \frac{a}{2},$$

odakle slijedi da je za $0 \leq a \leq 1$ uvijek

$$A \geq \frac{a}{2}, \quad A = \frac{a}{2} \Leftrightarrow a = 1. \tag{2.13}$$

Sljedeći rezultat o položaju stacionarnih točaka polinoma $p \in \mathcal{P}(a)$ dokazali su Saff i Twomey u radu [11].

Teorem 2.4.1. *Neka je $p(z) = (z-a)(z-z_1)(z-z_2)$, gdje je $0 \le a \le 1$, $|z_1| \le 1$ i $|z_2| \le 1$. Tada polinom p ima barem jednu stacionarnu točku u skupu $\mathcal{D}(a)$ definiranom kao*

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(a) &= \Delta(a) \setminus [C(a) \cap \{z : \mathrm{Im}(z) > 0\}], \quad a > 0; \\ \mathcal{D}(0) &= \Delta(0). \end{aligned}$$

U dokazu teorema koristit ćemo sljedeće leme.

Lema 2.4.2. *Ako polinom $p(z) = b_2 z^2 + b_1 z + b_0$ nema nultočku u otvorenom krugu polumjera 1 sa središtem u ishodištu, tada je*

$$|b_0|^2 - |b_2|^2 \ge |\overline{b}_1 b_2 - \overline{b}_0 b_1|. \tag{2.14}$$

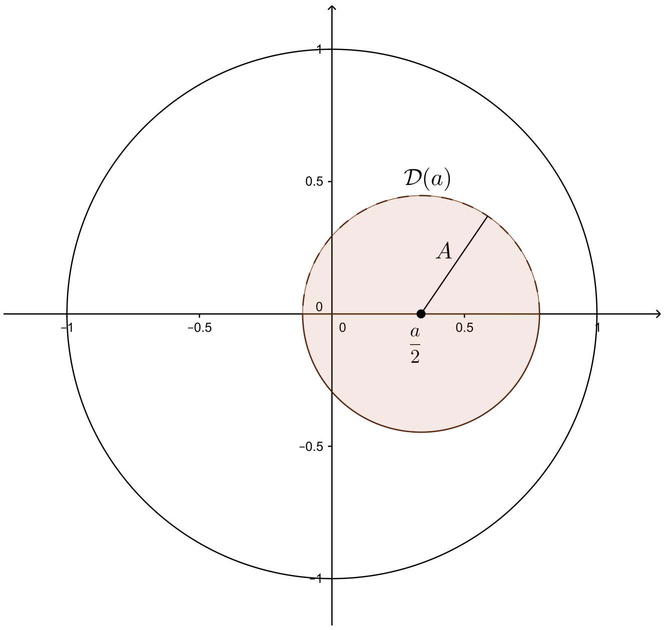
Dokaz. Slučaj kada je $b_2 = 0$ je trivijalan. Naime, ako je tada i $b_1 = 0$, onda (2.14) vrijedi, pa stoga pretpostavimo da je $b_1 \neq 0$. Tada je $p(z) = b_1 z + b_0 = 0$ ako i samo ako je $z = -\frac{b_0}{b_1}$. Prema pretpostavci, iz $p(z) = 0$ slijedi $|z| \ge 1$, tj. $\left| -\frac{b_0}{b_1} \right| \ge 1$, odnosno $|b_0| \ge |b_1|$. Jasno je da tada vrijedi (2.14).

Slučaj $b_2 \neq 0$ možemo reducirati na $b_2 = 1$.

Neka su z_1 i z_2 nultočke od p, tj. vrijedi $z_j^2 + b_1 z_j + b_0 = 0$ za $j = 1, 2$. Tada je prema pretpostavci $|z_1| \ge 1$, $|z_2| \ge 1$, odakle slijedi $(|z_1| - 1)(|z_2| - 1) \ge 0$, te $|z_1 z_2| + 1 \ge |z_1| + |z_2|$. Prema Vièteovim formulama imamo $z_1 z_2 = b_0$, $z_1 + z_2 = -b_1$. Stoga, množeći obje strane zadnje nejednakosti sa $|z_1 z_2| - 1 = |b_0| - 1 (\ge 0)$ dobivamo

$$\begin{aligned} |b_0|^2 - 1 &\ge |z_1|^2 |z_2| + |z_1||z_2|^2 - |z_1| - |z_2| \\ &= (|z_1|^2 - 1)|z_2| + (|z_2|^2 - 1)|z_1| \\ &\ge |(|z_1|^2 - 1)\overline{z}_2 + (|z_2|^2 - 1)\overline{z}_1| = |\overline{b}_1 - \overline{b}_0 b_1|. \end{aligned}$$

□



Slika 2.11: Skup $\mathcal{D}(a)$ za $0 < a \leq 1$.

Lema 2.4.3. *Neka je $p(z) = (z - a)(z - z_1)(z - z_2)$, gdje je $0 < a \leq 1$, $|z_1| = 1$ i $|z_2| \leq 1$. Ako polinom p nema stacionarnih točaka unutar kružnice $C(a)$, tada je $z_2 = \overline{z}_1$ ili $a = z_1 = 1$ ili $a = z_2 = 1$.*

Štoviše, ako je $p_\alpha(z) = (z - a)(z - e^{i\alpha})(z - e^{-i\alpha})$ i

$$0 \leq \alpha_1 = \arccos\left(\frac{a + 6A}{4}\right) \leq \alpha \leq \arccos\left(\frac{a - 6A}{4}\right) = \alpha_2 \leq \pi,$$

gdje je $A = \sqrt{\frac{4-a^2}{12}}$, tada p_α ima par kompleksno-konjugiranih stacionarnih točaka i kako α prolazi segmentom $[\alpha_1, \alpha_2]$, tako te stacionarne točke opisuju kružnicu $C(a)$. Međutim, ako je $0 \leq \alpha < \alpha_1$ ili $\alpha_2 < \alpha \leq \pi$, tada p_α ima stacionarnu točku unutar $C(a)$.

Dokaz. Neka je $z_1 = e^{i\varphi_1}$ i $z_2 = re^{i\varphi_2}$, gdje su $\varphi_1, \varphi_2 \in [0, 2\pi\rangle$ i $0 \leq r \leq 1$. Neka je

$$P(z) := p'\left(Az + \frac{a}{2}\right) = 3A^2z^2 + A(a - 2z_1 - 2z_2)z + z_1z_2 - \frac{a^2}{4}.$$

Ako je $|z| < 1$, onda je $\left|Az + \frac{a}{2} - \frac{a}{2}\right| < A$, pa $Az + \frac{a}{2}$ leži unutar kružnice $C(a)$. Stoga je po pretpostavci $p'(Az + \frac{a}{2}) \neq 0$, tj. $P(z) \neq 0$. Stoga, kao posljedicu leme 2.4.2, imamo

$$|b_0|^2 - |b_2|^2 \geq |\overline{b}_1 b_2 - \overline{b}_0 b_1| \geq |\mathrm{Re}(\overline{b}_1 b_2 - \overline{b}_0 b_1)| \geq \mathrm{Re}(\overline{b}_1 b_2 - \overline{b}_0 b_1) \qquad (2.15)$$

gdje je

$$
\begin{aligned}
b_0 &:= z_1 z_2 - \frac{a^2}{4} \\
b_1 &:= A(a - 2z_1 - 2z_2) \\
b_2 &:= 3A^2 = 1 - \frac{1}{4}a^2.
\end{aligned}
$$

Kako je

$$
\begin{aligned}
\overline{b}_1 b_2 - \overline{b}_0 b_1 &= A(a - 2\overline{z}_1 - 2\overline{z}_2)\left(1 - \frac{1}{4}a^2\right) - \left(\overline{z}_1\overline{z}_2 - \frac{a^2}{4}\right)A(a - 2z_1 - 2z_2) \\
&= A\Big[a - 2(\overline{z}_1 + \overline{z}_2) + \frac{1}{2}a^2(\overline{z}_1 - z_1 + \overline{z}_2 - z_2) - a\overline{z}_1\overline{z}_2 + 2\overline{z}_2 + 2\overline{z}_1|z_2|^2\Big],
\end{aligned} \tag{2.16}
$$

slijedi

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Re}(\overline{b}_1 b_2 - \overline{b}_0 b_1) &= A[a - 2(\cos\varphi_1 + r\cos\varphi_2) - ar\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + 2r\cos\varphi_2 + 2r^2\cos\varphi_1] \\
&= A[a(1 - r\cos(\varphi_1 + \varphi_2)) - 2(1 - r^2)\cos\varphi_1].
\end{aligned} \tag{2.17}
$$

Također je

$$
|b_0|^2 - |b_2|^2 = \left(z_1 z_2 - \frac{a^2}{4}\right)\left(\overline{z}_1\overline{z}_2 - \frac{a^2}{4}\right) - \left(1 - \frac{a^2}{4}\right)^2 = \frac{a^2}{2}\left[1 - r\cos(\varphi_1 + \varphi_2)\right] + r^2 - 1. \tag{2.18}
$$

Tada (2.15), (2.17), (2.18) i $A \geq \frac{a}{2}$ daju

$$
\begin{aligned}
\frac{a^2}{2}\left[1 - r\cos(\varphi_1 + \varphi_2)\right] + r^2 - 1 \quad &\geq \quad A\Big|a(1 - r\cos(\varphi_1 + \varphi_2)) - 2(1 - r^2)\cos\varphi_1\Big| \\
&\geq \quad \frac{a}{2}\Big|a(1 - r\cos(\varphi_1 + \varphi_2)) - 2(1 - r^2)\cos\varphi_1\Big| \\
&\geq \quad \frac{a}{2}\Big|a(1 - r\cos(\varphi_1 + \varphi_2))\Big| - \frac{a}{2}\Big|2(1 - r^2)\cos\varphi_1\Big| \\
&= \quad \frac{a^2}{2}\left[1 - r\cos(\varphi_1 + \varphi_2)\right] - a(1 - r^2)|\cos\varphi_1|,
\end{aligned}
$$

što je ekvivalentno s

$$
r^2 - 1 \geq -a(1 - r^2)|\cos\varphi_1|,
$$

odnosno

$$
(1 - r^2)(a|\cos\varphi_1| - 1) \geq 0.
$$

Kako je $1 - r^2 \geq 0$ i $a|\cos\varphi_1| - 1 \leq |a\cos\varphi_1| - 1 \leq 0$, to je također

$$
(1 - r^2)(a|\cos\varphi_1| - 1) \leq 0.
$$

Prema tome, $(1-r^2)(a|\cos\varphi_1|-1)=0$, pa slijedi $r=1$ ili $a|\cos\varphi_1|=1$. Uočimo, $a|\cos\varphi_1|=1$ ako i samo ako je $a=|\cos\varphi_1|=1$. Međutim, za $a=1$ je, prema (2.13), $A=\frac{a}{2}=\frac{1}{2}$, pa je prema (2.15), (2.17) i (2.18)

$$\frac{1}{2}\left[1-r\cos(\varphi_1+\varphi_2)\right]+r^2-1 \quad \geq \quad \frac{1}{2}[(1-r\cos(\varphi_1+\varphi_2))-2(1-r^2)\cos\varphi_1]$$

odnosno

$$(1-r^2)(\cos\varphi_1-1)\geq 0.$$

Osim toga je $1-r^2\geq 0$ i $\cos\varphi_1-1\leq 0$, pa je $(1-r^2)(\cos\varphi_1-1)\leq 0$. Prema tome, $(1-r^2)(\cos\varphi_1-1)=0$, što je moguće ako i samo ako je $r=1$ ili $\cos\varphi_1=0$, tj. $\varphi_1=0$, odnosno $z_1=1$. Time smo pokazali da mogu nastupiti dva slučaja, a to su $r=1$ ili $a=z_1=1$.

Razmotrimo slučaj $r=1$. Tada (2.18) daje

$$|b_0|^2-|b_2|^2=\frac{a^2}{2}\left[1-\cos(\varphi_1+\varphi_2)\right], \tag{2.19}$$

dok je prema (2.17)

$$\mathrm{Re}(\overline{b}_1b_2-\overline{b}_0b_1)=Aa[1-\cos(\varphi_1+\varphi_2)], \tag{2.20}$$

pa stoga (2.15) povlači

$$\frac{a^2}{2}\left[1-\cos(\varphi_1+\varphi_2)\right]\geq Aa[1-\cos(\varphi_1+\varphi_2)]$$

tj.

$$\left(\frac{a}{2}-A\right)[1-\cos(\varphi_1+\varphi_2)]\geq 0.$$

Kako je, prema (2.13), $\frac{a}{2}-A\leq 0$ i vrijedi $1-\cos(\varphi_1+\varphi_2)\geq 0$, to je

$$\left(\frac{a}{2}-A\right)[1-\cos(\varphi_1+\varphi_2)]\leq 0$$

pa zaključujemo da je $\left(\frac{a}{2}-A\right)[1-\cos(\varphi_1+\varphi_2)]=0$. Prema tome, $\frac{a}{2}-A=0$, tj. $a=1$, ili $\cos(\varphi_1+\varphi_2)=1$, tj. $z_1z_2=r=1$, odnosno $z_2=\overline{z}_1$.

Konačno, ako je $r=a=1$, tada iz (2.16) slijedi

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(\overline{b}_1b_2-\overline{b}_0b_1)&=\frac{1}{2}[2\sin\varphi_1+2\sin\varphi_2-\sin\varphi_1-\sin\varphi_2+\sin(\varphi_1+\varphi_2)-2\sin\varphi_1-2\sin\varphi_2]\\&=\frac{1}{2}[\sin(\varphi_1+\varphi_2)-\sin\varphi_1-\sin\varphi_2].\end{aligned} \tag{2.21}$$

Također, prema (2.19) i (2.20) slijedi $|b_0|^2 - |b_2|^2 = \mathrm{Re}(\overline{b}_1 b_2 - \overline{b}_0 b_1)$, pa je stoga prema (2.15), $|\overline{b}_1 b_2 - \overline{b}_0 b_1| = \mathrm{Re}(\overline{b}_1 b_2 - \overline{b}_0 b_1)$. Dakle, $\mathrm{Im}(\overline{b}_1 b_2 - \overline{b}_0 b_1) = 0$. Sada iz (2.21) slijedi

$$\sin(\varphi_1 + \varphi_2) = \sin\varphi_1 + \sin\varphi_2,$$

odnosno

$$2\sin\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\cos\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = 2\sin\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\cos\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}.$$

Odavde zaključujemo

$$\sin\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = 0 \quad \text{ili} \quad \cos\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = \cos\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}.$$

U slučaju $\sin\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2} = 0$ imamo $\varphi_1 + \varphi_2 = 2k\pi$ za neki $k \in \mathbb{Z}$, pa je $z_1 z_2 = e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} = e^{2k\pi i} = 1$, odnosno $z_2 = \overline{z}_1$.

Ako je pak $\cos\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2} = \cos\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}$, onda je

$$0 = \cos\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} - \cos\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} = -2\sin\frac{\varphi_1}{2}\sin\frac{\varphi_2}{2},$$

pa je $\sin\frac{\varphi_1}{2} = 0$ ili $\sin\frac{\varphi_2}{2} = 0$. Dakle, $\varphi_1 = 2k\pi$ za neki $k \in \mathbb{Z}$ ili $\varphi_2 = 2k\pi$ za neki $k \in \mathbb{Z}$.

Ako je $\varphi_1 = 2k\pi$ za neki $k \in \mathbb{Z}$, onda je $z_1 = e^{i\varphi_1} = e^{2k\pi i} = 1$, a ako je $\varphi_2 = 2k\pi$ za neki $k \in \mathbb{Z}$, onda je $z_2 = e^{i\varphi_2} = e^{2k\pi i} = 1$. Prema tome, $a = z_1 = 1$ ili $a = z_2 = 1$.

Time smo dokazali prvi dio leme 2.4.3.

Neka je sada $p_\alpha(z) = (z-a)(z-e^{i\alpha})(z-e^{-i\alpha})$, $\alpha \in [0,\pi]$. Stavimo $t_\alpha := a - 4\cos\alpha$. Tada je

$$\begin{aligned} P_\alpha(z) = p'_\alpha\left(Az + \frac{a}{2}\right) &= 3A^2z^2 + A(a - 2z_1 - 2z_2)z + z_1 z_2 - \frac{a^2}{4} \\ &= 3A^2z^2 + A(a - 4\cos\alpha)z + 1 - \frac{a^2}{4} \\ &= 3A^2z^2 + At_\alpha z + 3A^2 \end{aligned}$$

pa su

$$v_1^{(\alpha)} = \frac{-t_\alpha + \sqrt{t_\alpha^2 - 36A^2}}{6A}, \quad v_2^{(\alpha)} = \frac{-t_\alpha - \sqrt{t_\alpha^2 - 36A^2}}{6A}$$

nultočke polinoma P_α.

Pretpostavimo najprije da je

$$0 \le \alpha_1 = \arccos\left(\frac{a + 6A}{4}\right) \le \alpha \le \arccos\left(\frac{a - 6A}{4}\right) = \alpha_2 \le \pi.$$

Tada je

$$\cos 0 \ge \cos\alpha_1 \ge \cos\alpha \ge \cos\alpha_2 \ge \cos\pi,$$

tj.

$$-1 \leq \frac{a-6A}{4} \leq \cos\alpha \leq \frac{a+6A}{4} \leq 1,$$

pa je

$$a - 6A - 4\cos\alpha \leq 0, \quad a + 6A - 4\cos\alpha \geq 0.$$

Stoga je

$$t_\alpha^2 - 36A^2 = (a - 4\cos\alpha)^2 - 36A^2 = (a - 4\cos\alpha - 6A)(a - 4\cos\alpha + 6A) \leq 0,$$

pa je

$$v_1^{(\alpha)} = \frac{-t_\alpha + i\sqrt{36A^2 - t_\alpha^2}}{6A}, \quad v_2^{(\alpha)} = \frac{-t_\alpha - i\sqrt{36A^2 - t_\alpha^2}}{6A}$$

odakle slijedi

$$|v_1^{(\alpha)}| = |v_2^{(\alpha)}| = \frac{1}{36A^2}[t_\alpha^2 + (36A^2 - t_\alpha^2)] = 1.$$

Pokažimo sada da kako α varira od α_1 do α_2, tako točke $v_1^{(\alpha)}$ i $v_2^{(\alpha)}$ opisuju jediničnu kružnicu sa središtem u ishodištu. Dakle, uzmimo $z = e^{i\varphi}$ za neki $\varphi \in [0, 2\pi\rangle$ i pokažimo da je tada $z = v_1^{(\alpha)}$ ili $z = v_2^{(\alpha)}$ za neki $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$.

Stavimo $s := -6A\cos\varphi$. Tada je

$$-1 \leq \frac{a-6A}{4} \leq \frac{a-s}{4} = \frac{a+6A\cos\varphi}{4} \leq \frac{a+6A}{4} \leq 1,$$

pa je dobro definirano $\alpha := \arccos\frac{a-s}{4}$, te vrijedi $\alpha_1 = \arccos\frac{a+6A}{4} \leq \alpha \leq \arccos\frac{a-6A}{4} = \alpha_2$. Također, iz $\cos\alpha = \frac{a-s}{4}$ slijedi $s = a - 4\cos\alpha = t_\alpha$.

Ako je $\varphi \in [0, \pi]$, onda je

$$\sqrt{36A^2 - t_\alpha^2} = \sqrt{36A^2 - s^2} = \sqrt{36A^2 - 36A^2\cos^2\varphi} = 6A\sqrt{\sin^2\varphi} = 6A\sin\varphi,$$

pa je

$$z = e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi = -\frac{t_\alpha}{6A} + i\frac{\sqrt{36A^2 - t_\alpha^2}}{6A} = v_1^{(\alpha)}.$$

Ako je $\varphi \in \langle\pi, 2\pi\rangle$, onda je

$$\sqrt{36A^2 - t_\alpha^2} = \sqrt{36A^2 - s^2} = \sqrt{36A^2 - 36A^2\cos^2\varphi} = 6A\sqrt{\sin^2\varphi} = -6A\sin\varphi,$$

pa je

$$z = e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi = -\frac{t_\alpha}{6A} - i\frac{\sqrt{36A^2 - t_\alpha^2}}{6A} = v_2^{(\alpha)}.$$

Prema tome, pokazali smo da za $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ vrijedi $p'_\alpha(Av_1^{(\alpha)} + \frac{a}{2}) = p'_\alpha(Av_2^{(\alpha)} + \frac{a}{2}) = 0$ te da, kako α prolazi intervalom $[\alpha_1, \alpha_2]$, tako točke $v_1^{(\alpha)}$ i $v_2^{(\alpha)}$ opisuju jediničnu kružnicu sa središtem u ishodištu.

Stavimo
$$w_1^{(\alpha)} = Av_1^{(\alpha)} + \frac{a}{2}, \quad w_2^{(\alpha)} = Av_2^{(\alpha)} + \frac{a}{2}, \quad \alpha \in [0, \pi].$$
Tada je $p'_\alpha(w_1^{(\alpha)}) = p'_\alpha(w_2^{(\alpha)}) = 0$, te za $i = 1, 2$ i $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$ vrijedi
$$\left|w_i^{(\alpha)} - \frac{a}{2}\right| = |Av_i^{(\alpha)})| = A|v_i^{(\alpha)}| = A,$$
tj. $w_1^{(\alpha)}, w_2^{(\alpha)} \in C(a)$. Također, kako α prolazi intervalom $[\alpha_1, \alpha_2]$, tako točke $w_1^{(\alpha)}$ i $w_2^{(\alpha)}$ opisuju kružnicu $C(a)$. Uočimo da pritom vrijedi $\overline{w_2^{(\alpha)}} = \overline{Av_2^{(\alpha)}} + \frac{a}{2} = Av_1^{(\alpha)} + \frac{a}{2} = w_1^{(\alpha)}$.

Konačno, ako je $0 \leq \alpha < \alpha_1$, onda je $\cos\alpha > \cos\alpha_1 = \frac{a+6A}{4}$, pa je $a + 6A - 4\cos\alpha < 0$. Stoga je $t_\alpha^2 - 36A^2 = (a - 4\cos\alpha)^2 - 36A^2 = (a + 6A - 4\cos\alpha)(a - 6A - 4\cos\alpha) > 0$. Također, ako je $\alpha_2 < \alpha \leq \pi$, onda je $\cos\alpha < \cos\alpha_2 = \frac{a-6A}{4}$, pa je $a - 6A - 4\cos\alpha > 0$. Stoga je $t_\alpha^2 - 36A^2 = (a - 4\cos\alpha)^2 - 36A^2 = (a + 6A - 4\cos\alpha)(a - 6A - 4\cos\alpha) > 0$. Prema tome, u slučaju $0 \leq \alpha < \alpha_1$ ili $\alpha_2 < \alpha \leq \pi$, vrijedi $v_1^{(\alpha)}, v_2^{(\alpha)} \in \mathbb{R}$, $v_1^{(\alpha)} \neq v_2^{(\alpha)}$. Osim toga, kako je $v_1^{(\alpha)} \cdot v_2^{(\alpha)} = 1$, to je $|v_1^{(\alpha)}| < 1$ ili $|v_2^{(\alpha)}| < 1$. Odavde slijedi $|w_1^{(\alpha)} - \frac{a}{2}| = |Av_1^{(\alpha)}| = A|v_1^{(\alpha)}| < A$ ili $|w_2^{(\alpha)} - \frac{a}{2}| = |Av_2^{(\alpha)}| = A|v_2^{(\alpha)}| < A$, tj. barem jedna od nultočaka polinoma p'_α leži unutar kružnice $C(a)$. □

Kao očitu posljedicu leme 2.4.3 imamo sljedeći rezultat.

Korolar 2.4.4. *Neka je $p(z) = (z - a)(z - z_1)(z - z_2)$, gdje je $0 < a \leq 1$, $|z_1| = 1$ i $|z_2| \leq 1$. Tada p ima barem jednu stacionarnu točku u $\Delta(a)$.*

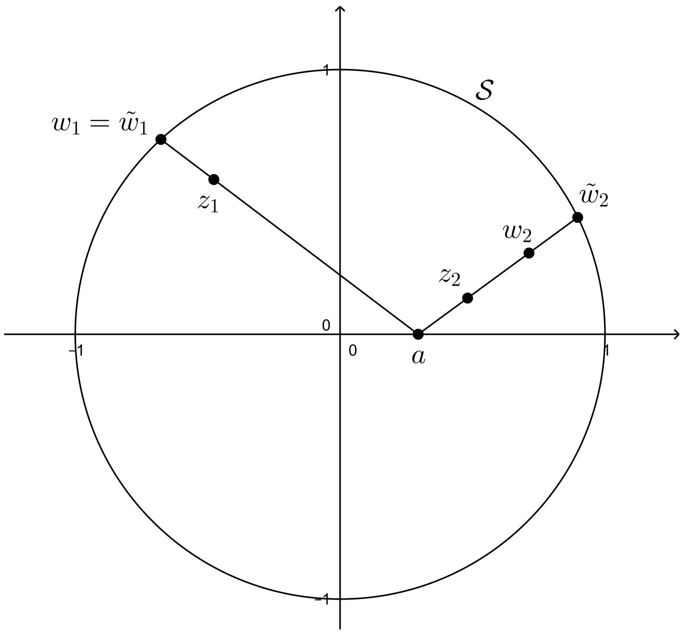
Dokaz. Ako polinom p nema stacionarnu točku unutar kružnice $C(a)$ tada je, po lemi 2.4.3, $a = z_1 = 1$, ili $a = z_2 = 1$, ili $z_2 = \overline{z}_1$ pri čemu $z_1, z_2 \in C(a)$. Ako je $a = z_1 = 1$ ili $a = z_2 = 1$, tada je $a = 1$ stacionarna točka polinoma p za koju vrijedi $a \in C(a)$. Prema tome, p ima barem jednu stacionarnu točku u $\Delta(a)$. □

Lema 2.4.5. *Neka je $p(z) = (z - a)(z - z_1)(z - z_2)$, gdje je $0 < a \leq 1$, $|z_1| < 1$ i $|z_2| < 1$. Tada p ima barem jednu stacionarnu točku unutar kružnice $C(a)$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $z_1 = a$ ili $z_2 = a$. Tada iz $|z_1| < 1$ i $|z_2| < 1$ slijedi $a < 1$. Također, a je dvostruka nultočka polinoma p, pa je stoga $p'(a) = 0$. Nadalje, budući da je prema (2.13), $\frac{a}{2} \leq A$, te $\frac{a}{2} = A$ samo za $a = 1$, to vrijedi $|a - \frac{a}{2}| = \frac{a}{2} < A$. Dakle, a je stacionarna točka polinoma p koja leži unutar kružnice $C(a)$.

Pretpostavimo sada da je $z_1 \neq a$ i $z_2 \neq a$. Povučemo pravac kroz točke z_1 i a, te s $\tilde{w}_1$ označimo presjek tog pravca i jedinične kružnice S sa središtem u ishodištu, i to tako da z_1 pripada segmentu s krajevima $\tilde{w}_1$ i a. Zatim povučemo pravac kroz točke z_2 i a, te s $\tilde{w}_2$

označimo presjek tog pravca i kružnice $\mathcal{S}$ i to tako da z_2 pripada segmentu s krajevima $\tilde{w}_2$ i a (v. sliku 2.12).



Slika 2.12: Slučaj kada $z_1 \neq a$ i $z_2 \neq a$.

Bez smanjenja općenitosti, neka je

$$\frac{|\tilde{w}_1 - z_1|}{|z_1 - a|} \leq \frac{|\tilde{w}_2 - z_2|}{|z_2 - a|}. \tag{2.22}$$

Stavimo $w_1 := \tilde{w}_1$. Uočimo $|w_1| = 1$. Kako z_1 pripada segmentu s krajevima $\tilde{w}_1 = w_1$ i a, postoji $\rho \in [0, 1]$ tako da je $z_1 = \rho w_1 + (1 - \rho)a$. Uočimo $\rho \neq 0$, jer bismo za $\rho = 0$ imali $z_1 = a$ što je u kontradikciji s pretpostavkom. Također, $\rho \neq 1$, jer bismo za $\rho = 1$ imali $z_1 = w_1$ što je nemoguće jer je $|z_1| < 1$, $|w_1| = 1$.

Stavimo $w_2 := \frac{1}{\rho}(z_2 - (1-\rho)a)$. Tada je $z_2 = \rho w_2 + (1-\rho)a$, pa stoga z_2 pripada segmentu s krajevima w_2 i a. Tvrdimo $|w_2| \leq 1$. Kako z_2 pripada segmentu s krajevima $\tilde{w}_2$ i a, postoji $\tilde{\rho} \in [0, 1]$ tako da je $z_2 = \tilde{\rho}\tilde{w}_2 + (1 - \tilde{\rho})a$. Uočimo, $\tilde{\rho} \neq 0$ budući da je $z_2 \neq a$, te $\tilde{\rho} \neq 1$ budući da je $|z_2| < 1$, $|\tilde{w}_2| = 1$. Vrijedi

$$\begin{aligned}
\tilde{w}_1 - z_1 &= w_1 - z_1 = w_1 - \rho w_1 - (1-\rho)a = (1-\rho)(w_1 - a) \\
\tilde{w}_2 - z_2 &= \tilde{w}_2 - \tilde{\rho}\tilde{w}_2 - (1-\tilde{\rho})a = (1-\tilde{\rho})(\tilde{w}_2 - a) \\
z_1 - a &= \rho w_1 + (1-\rho)a - a = \rho(w_1 - a) \\
z_2 - a &= \tilde{\rho}\tilde{w}_2 + (1-\tilde{\rho})a - a = \tilde{\rho}(\tilde{w}_2 - a),
\end{aligned}$$

pa iz (2.22) slijedi
$$\frac{(1-\rho)|w_1-a|}{\rho|w_1-a|} \leq \frac{(1-\tilde{\rho})|\tilde{w}_2-a|}{\tilde{\rho}|\tilde{w}_2-a|},$$
tj. $\tilde{\rho} \leq \rho$. Nadalje, iz $z_2 = \rho w_2 + (1-\rho)a = \tilde{\rho}\tilde{w}_2 + (1-\tilde{\rho})a$ slijedi $\rho(w_2 - a) = \tilde{\rho}(\tilde{w}_2 - a)$, pa je $\rho w_2 = \tilde{\rho}\tilde{w}_2 + (\rho - \tilde{\rho})a$, tj. $w_2 = \frac{1}{\rho}(\tilde{\rho}\tilde{w}_2 + (\rho-\tilde{\rho})a)$. Prema tome,

$$|w_2| = \frac{1}{\rho}|\tilde{\rho}\tilde{w}_2 + (\rho-\tilde{\rho})a| \leq \frac{1}{\rho}\tilde{\rho}|\tilde{w}_2| + \frac{1}{\rho}|\rho-\tilde{\rho}||a| \leq \frac{1}{\rho}\tilde{\rho} + \frac{1}{\rho}(\rho-\tilde{\rho}) = 1.$$

Neka je
$$q(w) := p(\rho w + (1-\rho)a) = \rho^3(w-a)(w-w_1)(w-w_2).$$
Prema korolaru 2.4.4, postoji $u \in \Delta(a)$ tako da je $q'(u) = 0$. Stavimo $v_1 := \rho u + (1-\rho)a$. Neka je $g(w) := \rho w + (1-\rho)a$. Tada je $q = p \circ g$, pa je

$$q'(w) = (p \circ g)'(w) = p'(g(w)).g'(w) = p'(\rho w + (1-\rho)a)) \cdot \rho.$$

Dakle,
$$q'(w) = 0 \iff p'(\rho w + (1-\rho)a) = 0.$$
Stoga iz $q'(u) = 0$ slijedi $p'(v_1) = p'(\rho u + (1-\rho)a) = 0$.

Pretpostavimo $v_1 = 1$. Tada 1 pripada segmentu s krajevima u i a. Ali, $0 < a \leq 1$, $|u| \leq 1$ pa je to moguće samo ako je $u = a = 1$. Međutim, ako je $a = 1$, onda je $p'(1) = p'(a) \neq 0$, jer bi u protivnom $a = 1$ bila dvostruka nultočka polinoma p, tj. vrijedilo bi $z_1 = 1$ ili $z_2 = 1$ što je u kontradikciji s pretpostavkom. Time smo pokazali da je $v_1 \neq 1$.

Nadalje, imamo

$$\begin{aligned}
\left|v_1 - \frac{a}{2}\right| &= \left|v_1 - \frac{a}{2} - (1-\rho)\frac{a}{2} + (1-\rho)\frac{a}{2}\right| \\
&\leq \left|v_1 - \frac{a}{2} - (1-\rho)\frac{a}{2}\right| + (1-\rho)\frac{a}{2} \\
&= \left|\rho u + (1-\rho)a - \frac{a}{2} - (1-\rho)\frac{a}{2}\right| + (1-\rho)\frac{a}{2} \\
&= \rho\left|u - \frac{a}{2}\right| + (1-\rho)\frac{a}{2} \\
&\leq \rho A + (1-\rho)\frac{a}{2}.
\end{aligned}$$

Ako je $a \neq 1$, tj. $0 < a < 1$, tada je $\frac{a}{2} < A$, pa je prema gornjoj nejednakosti

$$\left|v_1 - \frac{a}{2}\right| \leq \rho A + (1-\rho)\frac{a}{2} < \rho A + (1-\rho)A = A,$$

tj. v_1 leži unutar kružnice $C(a)$.

Neka je sada $a = 1$. Tada je $A = \frac{a}{2} = \frac{1}{2}$ pa je

$$\left|v_1 - \frac{a}{2}\right| \leq \rho A + (1-\rho)\frac{a}{2} = \rho A + (1-\rho)A = A.$$

Pretpostavimo $\left|v_1 - \frac{a}{2}\right| = A$, tj. $\left|v_1 - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$. Znamo da $u \in \Delta(a) = \Delta(1)$, tj. $\left|u - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{2}$ i da v_1 leži na segmentu s krajevima u i $a = 1$. To je moguće samo ako je $v_1 = u = 1$, a pokazali smo da je $v_1 \neq 1$. Prema tome, $\left|v_1 - \frac{a}{2}\right| < A$, tj. v_1 leži unutar kružnice $C(a)$.

Prema tome, p ima stacionarnu točku $v_1 \neq 1$ koja leži unutar $C(a)$. □

Koristeći prethodne leme u mogućnosti smo dokazati teorem 2.4.1.

Dokaz teorema 2.4.1. Kako bismo dokazali teorem, treba razmotriti slučajeve $a > 0$ te $a = 0$. Za $a > 0$, dokaz slijedi primjenom lema 2.4.3 i 2.4.5. Za $a = 0$, polinom p je oblika $p(z) = z(z - z_1)(z - z_2)$, gdje je $|z_1| \leq 1$, $|z_2| \leq 1$. Deriviranjem polinoma p dobivamo $p'(z) = 3z^2 - 2(z_1 + z_2)z + z_1z_2$. Neka su c_1 i c_2 nultočke polinoma p', tj. neka je $p'(c_1) = p'(c_2) = 0$. Slijedi $c_1c_2 = \frac{z_1z_2}{3}$ pa je $|c_1c_2| = \left|\frac{z_1z_2}{3}\right| \leq \frac{1}{3}$. Tada je $|c_1| \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$ ili $|c_2| \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$. Prema tome, barem jedna stacionarna točka polinoma p pripada krugu $\Delta(0)$. □

2.5 Frayer–Kwon–Schafhauser–Swensonovi rezultati

Ako je dan kompleksan kubični polinom $p(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - 1)$, pri čemu je $|z_1| = |z_2| = 1$, gdje se nalaze stacionarne točke? Mardenov teorem nam govori da su stacionarne točke fokusi Steinerove elipse trokuta $\triangle 1z_1z_2$. Prije ovog rezultata, jedino što smo znali o stacionarnim točkama kompleksnog polinoma je Gauss–Lucasov teorem koji tvrdi da stacionarne točke bilo kojeg polinoma leže u kompleksnoj ljusci njegovih nultočaka. U ovoj točki istražit ćemo strukturu stacionarnih točaka kubičnog polinoma. Preciznije, zanima nas što se događa sa stacionarnim točkama kompleksnog kubičnog polinoma kada njegove nultočke pomičemo. Poznato je da za bilo koje tri točke z_1, z_2, z_3 u kompleksnoj ravnini koje ne leže na istom pravcu, postoji jedinstvena kružnica koja ih sadrži. Za rezultate koji slijede, bez smanjenja općenitosti možemo smatrati da se radi o jediničnoj kružnici sa $z_3 = 1$, $|z_1| = |z_2| = 1$. Pustit ćemo z_1 i z_2 da se gibaju duž ove kružnice i pratiti kako se mijenja položaj stacionarnih točaka kubičnog polinoma.

Središte kubičnog polinoma

Neka je p kompleksni kubični polinom s nultočkama na jediničnoj kružnici sa središtem u ishodištu kompleksne ravnine. Nultočke polinoma p i njegovih derivacija sačuvane su kada polinom množimo s konstantom, pa možemo pretpostaviti da je $p(z) = (z-z_1)(z-z_2)(z-1)$ za neke $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gdje je $|z_1| = |z_2| = 1$.

Označimo sa Γ familiju kubičnih polinoma $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ takvih da je

$$p(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - 1)$$

za neke z_1, z_2 gdje je $|z_1| = |z_2| = 1$.

Prije proučavanja nultočaka polinoma p', promatrajmo prvo nultočke od p''. Za dani $p \in \Gamma$ i $g \in \mathbb{C}$, kažemo da je g *središte* polinoma p ako je $p''(g) = 0$. Naravno, svaki $p \in \Gamma$ ima jedinstveno središte. Prema Mardenovom teoremu, to je težište trokuta $\triangle 1 z_1 z_2$. Naime, iz

$$\begin{aligned} p(z) &= (z - z_1)(z - z_2)(z - 1) \\ &= z^3 - (z_1 + z_2 + 1)z^2 + (z_1 z_2 + z_1 + z_2)z - z_1 z_2 \end{aligned}$$

slijedi

$$\begin{aligned} p'(z) &= 3z^2 - 2(z_1 + z_2 + 1)z + (z_1 z_2 + z_1 + z_2), \\ p''(z) &= 6z - 2(z_1 + z_2 + 1), \end{aligned}$$

pa je $p''(z) = 0$ ako i samo ako je $z = \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + 1)$. Prema tome, težište trokuta $\triangle 1 z_1 z_2$, tj. točka

$$g = \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + 1)$$

je središte polinoma p.

Zanimljivo je što možemo dokazati i neku vrstu obrata ove činjenice, o čemu govori sljedeći teorem. Također, taj će nam teorem dati nagovještaj na koji način razmišljati o stacionarnim točkama polinoma p.

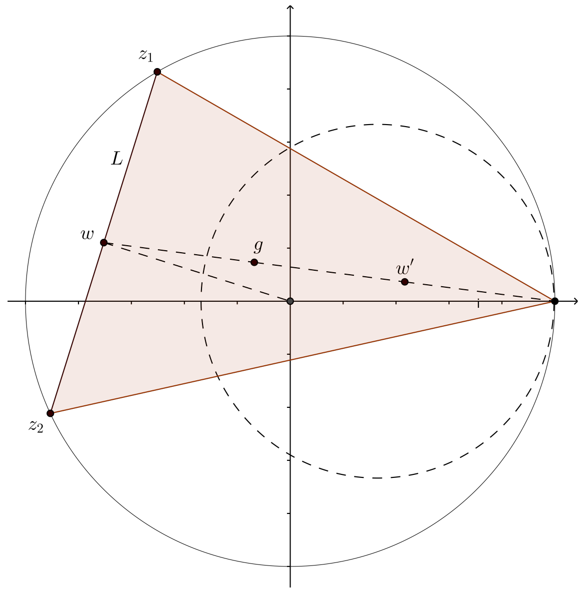
Teorem 2.5.1. *Neka je* $g \in \mathbb{C}$.

(i) $p \in \Gamma$ *ima središte* $\frac{1}{3}$ *ako i samo ako je* $p(z) = (z-1)(z^2 - a^2)$ *za neki* a, *gdje je* $|a| = 1$.

(ii) *Ako je* $0 < |g - \frac{1}{3}| \leq \frac{2}{3}$, *tada postoji jedinstveni polinom* $p \in \Gamma$ *sa središtem* g.

(iii) *Ako je* $|g - \frac{1}{3}| > \frac{2}{3}$, *tada ne postoji* $p \in \Gamma$ *sa središtem* g.

Riječima: središte bilo kojeg polinoma $p \in \Gamma$ mora ležati u zatvorenom krugu polumjera $\frac{2}{3}$ sa središtem u točki $\frac{1}{3}$ (v. sliku 2.13). Obratno, svaka točka koja se nalazi unutar ovog zatvorenog kruga, osim njegovog središta, je središte jedinstvenog polinoma $p \in \Gamma$. Središte ovog zatvorenog kruga je središte svakog polinoma $p(z) = (z - 1)(z^2 - a^2)$, gdje je $|a| = 1$.



Slika 2.13: Konstrukcija $\triangle 1 z_1 z_2$ sa središtem g.

Dokaz. Prema Mardenovom teoremu, ova tvrdnja povezana je s konstrukcijom trokuta određenog vrhom, težištem i opisanom kružnicom.

Pretpostavimo da je g središte polinoma $p \in \Gamma$. Tada je g težište trokuta $\triangle 1 z_1 z_2$, gdje z_1 i z_2 treba konstruirati. Iako ne znamo gdje se z_1 i z_2 nalaze, označimo polovište dužine $\overline{z_1 z_2}$ sa w. Naravno, w se nalazi u zatvorenom jediničnom krugu, tj. $|w| \leq 1$. Dužina $\overline{1w}$ je težišnica trokuta $\triangle 1 z_1 z_2$, pa je $g - w = \frac{1}{3}(1 - w)$, odnosno $g = \frac{2}{3}(w) + \frac{1}{3}(1)$. Odavde slijedi $|g - \frac{1}{3}| \leq \frac{2}{3}$. Stoga, da bi započeli konstrukciju, treba riješiti jednadžbu za w, gdje je $w = \frac{3g-1}{2}$. (Geometrijski gledano, ako nam je dan g, možemo konstruirati polovište w' dužine $\overline{1g}$; tada je w refleksija točke w' preko g.)

Pretpostavimo najprije da je $g \neq \frac{1}{3}$. Tada je $w \neq 0$. Znamo da je dužina $\overline{z_1 z_2}$ tetiva jedinične kružnice sa središtem u ishodištu, pa simetrala dužine $\overline{z_1 z_2}$ prolazi kroz 0, te kroz središnju točku w. Dakle, konstruiramo pravac L kroz w okomit na dužinu $\overline{0w}$. Obzirom da se w nalazi u zatvorenom jediničnom krugu, L siječe jediničnu kružnicu u dvije točke: z_1 i z_2. Pritom je $z_1 = z_2$ u slučaju da je $|w| = 1$.

S druge strane, ako je $g = \frac{1}{3}$ i stoga $w = 0$ tada, s obzirom da je $w = 0$ polovište dužine $\overline{z_1 z_2}$, imamo $z_2 = -z_1$, pa je $p(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - 1) = (z - 1)(z^2 - z_1^2)$ za neki $z_1 \in \mathbb{C}$, $|z_1| \leq 1$. Obratno, ako je $p(z) = (z - 1)(z^2 - z_1^2)$ za neki $z_1 \in \mathbb{C}$, $|z_1| \leq 1$, tada se lako pokaže da je $p''(\frac{1}{3}) = 0$. $\square$

Stacionarne točke kubičnog polinoma

U daljnjem razmatramo stacionarne točke polinoma $p \in \Gamma$. Slično, kao što smo to učinili za središte polinoma $p \in \Gamma$, sada bismo željeli odrediti moguće položaje stacionarnih točaka polinoma $p \in \Gamma$ te proučiti do koje mjere stacionarne točke određuju polinom p.

Saff i Twomey su u radu [11] pokazali da polinom p ima barem jednu stacionarnu točku koja se nalazi u zatvorenom krugu $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{2}\}$. Štoviše, ako su c_1 i c_2 stacionarne točke polinoma p, te ako se $c_1 \neq 1$ nalazi na rubu kruga Δ, tada je c_2 kompleksno konjugiran od c_1 pa se stoga također nalazi na rubu tog kruga.

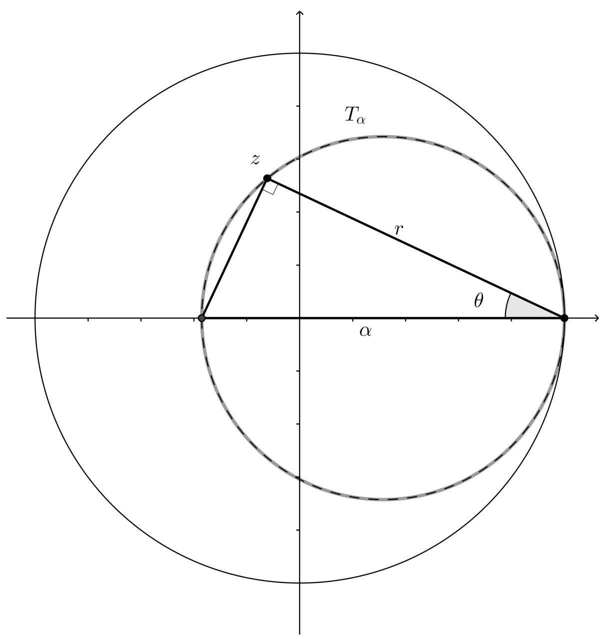
Saff–Twomeyev rezultat proširili su Frayer, Kwon, Schafhauser i Swenson u radu [5]. Prije nego iznesemo njihove rezultate, uvest ćemo sljedeću notaciju.

Definicija 2.5.2. *Neka je $\alpha > 0$. Označimo sa T_α kružnicu promjera α koja prolazi kroz 1 i $1 - \alpha$ u kompleksnoj ravnini, tj.*

$$T_\alpha = \left\{z \in \mathbb{C} : \left|z - \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\right| = \frac{\alpha}{2}\right\}. \tag{2.23}$$

Uočimo da kompleksan broj $z \neq 1$ leži u zatvorenom jediničnom krugu sa središtem u ishodištu ako i samo ako postoji jedinstven $\alpha \in \langle 0, 2]$ takav da $z \in T_\alpha$.

Na slici 2.14 vidimo da prema teoremu 2.5.1 središte polinoma $p \in \Gamma$ ne može ležati izvan $T_{\frac{4}{3}}$.



Slika 2.14: z leži na jedinstvenom T_α.

Teorem 2.5.3. *Neka je $z \in \mathbb{C}$ takav da je* $\mathrm{Re}(z) < 1$. *Tada je $z \in T_\alpha$ ako i samo ako je*

$$\frac{1}{\alpha} = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-z}\right).$$

Dokaz. Kao na slici 2.14, neka θ označava mjeru kuta $\angle 01z$ ($\theta > 0$ ako i samo ako $\mathrm{Im}(z) > 0$) i neka je $r = |z-1|$. Tada je $1 - z = re^{-i\theta}$, odakle slijedi $\frac{1}{1-z} = \frac{1}{r}e^{i\theta}$, pa je stoga

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-z}\right) = \frac{\cos\theta}{r}.$$

Kut $\angle(1-\alpha)z1$ upisan u T_α s vrhom z je pravi. Stoga je $\cos\theta = \frac{r}{\alpha}$ iz čega slijedi tvrdnja. □

Navedimo nekoliko primjera.

Primjer 2.5.4. *Pretpostavimo da je* 1 *stacionarna točka polinoma $p \in \Gamma$. Tada je, prema teoremu 1.2.5,* 1 *barem dvostruka nultočka polinoma p. Eksplicitno, postoji $a \in \mathbb{C}$, $|a| = 1$, tako da je*

$$p(z) = (z-1)^2(z-a).$$

Tada je

$$p'(z) = 3z^2 - (2a+4)z + (2a+1) = 3(z-1)\left(z - \frac{2a+1}{3}\right).$$

Prema tome, 1 *je stacionarna točka polinoma $p \in \Gamma$ ako i samo ako je $p(z) = (z-1)^2(z-a)$ za neki $a \in \mathbb{C}$, $|a| = 1$. U ovom slučaju druga stacionarna točka je $\frac{1}{3} + \frac{2}{3}a \in T_{\frac{4}{3}}$.*

Primjer 2.5.5. *Pretpostavimo da $p \in \Gamma$ ima stacionarnu točku $c \neq 1$, $|c| = 1$. Prema Gauss–Lucasovom teoremu, c leži u konveksnoj ljusci nultočaka polinoma p, iz čega slijedi da c mora biti nultočka polinoma p. Prema teoremu 1.2.5, c je dvostruka nultočka polinoma p, pa je*

$$p(z) = (z-c)^2(z-1)$$

i stoga

$$p'(z) = 3z^2 - (4c+2)z + (c^2+2c) = 3(z-c)\left(z - \frac{c+2}{3}\right).$$

Dakle, $p \in \Gamma$ ima stacionarnu točku $c \neq 1$, $|c| = 1$, ako i samo ako je $p(z) = (z-c)^2(z-1)$. U ovom je slučaju druga stacionarna točka $\frac{2}{3} + \frac{1}{3}c \in T_{\frac{2}{3}}$.

Razmotrimo sada kompleksni polinom p proizvoljnog stupnja, za čije nultočke pretpostavljamo da leže na jediničnoj kružnici sa središtem u ishodištu. Prema Gauss–Lucasovom teoremu, stacionarne točke polinoma p leže u zatvorenom jediničnom krugu sa središtem u ishodištu. Sljedeći rezultat govori o vezi između stacionarnih točaka polinoma p i njegovih nultočaka.

Teorem 2.5.6. *Neka je $p(z) = (z-1)(z-z_1)\cdots(z-z_n)$, gdje je $z_k = e^{i\theta_k}$ za svaki $k = 1, \ldots, n$. Označimo sa $c_1, \ldots, c_n$ stacionarne točke polinoma p, te pretpostavimo da $1 \neq c_k \in T_{\alpha_k}$ za svaki $k = 1, \ldots, n$. Tada vrijedi*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1-c_k} = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1-z_k}$$

i

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\alpha_k} = n. \tag{2.24}$$

Dokaz. Dokazujemo (2.24) izračunavajući $\mathrm{Re}\left(\frac{p''(1)}{p'(1)}\right)$ na dva različita načina. Iz

$$p'(z) = (n+1)\prod_{k=1}^{n}(z-c_k)$$

slijedi

$$\ln p'(z) = \ln(n+1) + \sum_{k=1}^{n} \ln(z-c_k),$$

odakle se deriviranjem dobije

$$\frac{p''(z)}{p'(z)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z-c_k}.$$

Uvrštavanjem $z := 1$ imamo

$$\frac{p''(1)}{p'(1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1-c_k} \tag{2.25}$$

odakle, prema teoremu 2.5.3, slijedi

$$\mathrm{Re}\left(\frac{p''(1)}{p'(1)}\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1-c_k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\alpha_k}. \tag{2.26}$$

S druge strane, ako zapišemo $p(z) = (z-1)g(z)$, tada se deriviranjem dobije

$$\begin{aligned} p'(z) &= (z-1)g'(z) + g(z), \\ p''(z) &= g'(z) + (z-1)g''(z) + g'(z) = (z-1)g''(z) + 2g'(z), \end{aligned}$$

odakle slijedi

$$\frac{p''(1)}{p'(1)} = \frac{2g'(1)}{g(1)}. \tag{2.27}$$

Iz $g(z) = (z - z_1) \cdots (z - z_n)$ slijedi

$$\ln g(z) = \sum_{k=1}^{n} (z - z_k),$$

odakle se deriviranjem dobije

$$\frac{g'(z)}{g(z)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z - z_k}.$$

Odavde je

$$\frac{g'(1)}{g(1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - z_k},$$

što zajedno s (2.27) daje

$$\frac{p''(1)}{p'(1)} = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - z_k}. \tag{2.28}$$

Prema (2.25) i (2.28) slijedi

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - c_k} = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - z_k}.$$

Budući da je $z_k \in T_2$, prema teoremu 2.5.3 i (2.28) imamo

$$\mathrm{Re}\left(\frac{p''(1)}{p'(1)}\right) = 2\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1 - z_k}\right) = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} = n. \tag{2.29}$$

Konačno, (2.26) i (2.29) daju

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\alpha_k} = n.$$

□

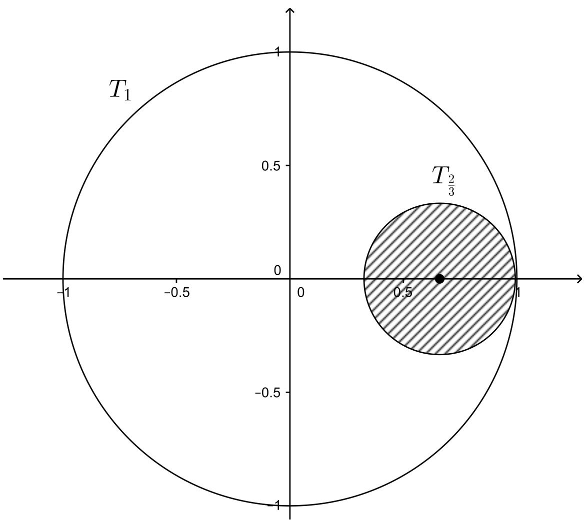
Korolar 2.5.7. *Neka je $p \in \Gamma$ i neka su $c_1 \neq 1$ i $c_2 \neq 1$ stacionarne točke polinoma p. Ako $c_1 \in T_\alpha$ i $c_2 \in T_\beta$, tada je*

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 2. \tag{2.30}$$

U primjeru 2.5.4 vidjeli smo što se događa kada su stacionarne točke $c_1 = 1$ ili $c_2 = 1$. Uočimo da (2.30) vrijedi za primjer 2.5.5, gdje su $\{\alpha, \beta\} = \{2, \frac{2}{3}\}$.

Relacija (2.30) nam govori da je polumjer jedinične kružnice jednak harmonijskoj sredini promjera kružnica T_α i T_β. Ovako izrečena, tvrdnja se može generalizirati na proizvoljan koordinatni sustav. Ako je zadan trokut $\triangle ABC$ u kompleksnoj ravnini, te ako su T_α i T_β kružnice koje kružnicu opisanu trokutu $\triangle ABC$ dodiruju u točki A te koje prolaze redom kroz fokuse Steinerove elipse trokuta $\triangle ABC$, tada je polumjer kružnice opisane trokutu $\triangle ABC$ jednak harmonijskoj sredini promjera kružnica T_α i T_β.

Korolar 2.5.7 je jako koristan, jer nam omogućuje da pokažemo da postoji praznina u jediničnom krugu, a to je otvoren krug $\{z \in \mathbb{C} : |z - \frac{2}{3}| < \frac{1}{3}\}$, u kojem se stacionarne točke ne mogu pojaviti.



Slika 2.15: Unutar otvornog kruga s rubom $T_{\frac{2}{3}}$ ne pojavljuju se stacionarne točke.

Teorem 2.5.8. *Niti jedan polinom $p \in \Gamma$ nema stacionarnu točku unutar otvorenog kruga s rubom $T_{\frac{2}{3}}$ (v. sliku 2.15).*

Dokaz. Ako je c_1 unutar otvorenog kruga s rubom $T_{\frac{2}{3}}$, tada c_1 leži na T_α za neki $\alpha \in \langle 0, \frac{2}{3} \rangle$. Pretpostavimo da je c_1 stacionarna točka nekog polinoma $p \in \Gamma$. Tada druga stacionarna točka c_2 polinoma p leži na T_β gdje, prema korolaru 2.5.7, vrijedi $\frac{1}{\beta} = 2 - \frac{1}{\alpha} < 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$. Tada je $\beta > 2$, što je moguće samo za $c_2 = 1$, jer je $|c_2| \leq 1$. Međutim, za $c_2 = 1$, prema primjeru 2.5.4, imamo $c_1 \in T_{\frac{4}{3}}$ što je nemoguće budući da c_1 leži unutar otvorenog kruga s rubom $T_{\frac{2}{3}}$. Prema tome, c_1 nije stacionarna točka niti jednog polinoma $p \in \Gamma$. $\square$

Saff i Twomey su pokazali da svaki polinom $p \in \Gamma$ ima barem jednu stacionarnu točku na ili unutar T_1. Korolar 2.5.7 nam govori nešto više.

Teorem 2.5.9. *Neka su $c_1 \neq 1$ i $c_2 \neq 1$ stacionarne točke polinoma $p \in \Gamma$. Ako $c_1 \in T_1$, tada $c_2 \in T_1$. Inače, jedna od točaka c_1 ili c_2 leži unutar kružnice T_1, dok druga leži izvan kružnice T_1.*

Dokaz. Neka je $1 \neq c_1 \in T_\alpha$ i $1 \neq c_2 \in T_\beta$. Tada je, prema korolaru 2.5.7, $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 2$. Stoga je $\alpha = 1$ ako i samo ako je $\beta = 1$, te $\alpha < 1$ ako i samo ako je $\beta > 1$. □

Stacionarna točka (gotovo uvijek) određuje polinom $p \in \Gamma$

Pretpostavimo da je $p \in \Gamma$ s nultočkama z_1, z_2 i 1, te neka je c stacionarna točka polinoma p. Tada je

$$\begin{aligned} p(z) &= (z - z_1)(z - z_2)(z - 1) \\ &= z^3 - (z_1 + z_2 + 1)z^2 + (z_1 + z_2 + z_1 z_2)z - z_1 z_2 \end{aligned}$$

pa je

$$p'(z) = 3z^2 - 2(z_1 + z_2 + 1)z + (z_1 + z_2 + z_1 z_2)$$

i

$$0 = 3c^2 - 2c(z_1 + r_z + 1) + (z_1 + z_2 + z_1 z_2).$$

Uz pretpostavku $z_1 \neq 2c - 1$ dobivamo

$$z_2 = \frac{(2c-1)z_1 + (2c - 3c^2)}{z_1 + (1 - 2c)} \tag{2.31}$$

što nam je motivacija za sljedeću definiciju.

Definicija 2.5.10. *Neka je $c \in \mathbb{C}$. Definiramo Möbiusovu transformaciju kao*

$$f_c(z) = \frac{(2c-1)z + (2c - 3c^2)}{z + (1 - 2c)}. \tag{2.32}$$

Označimo

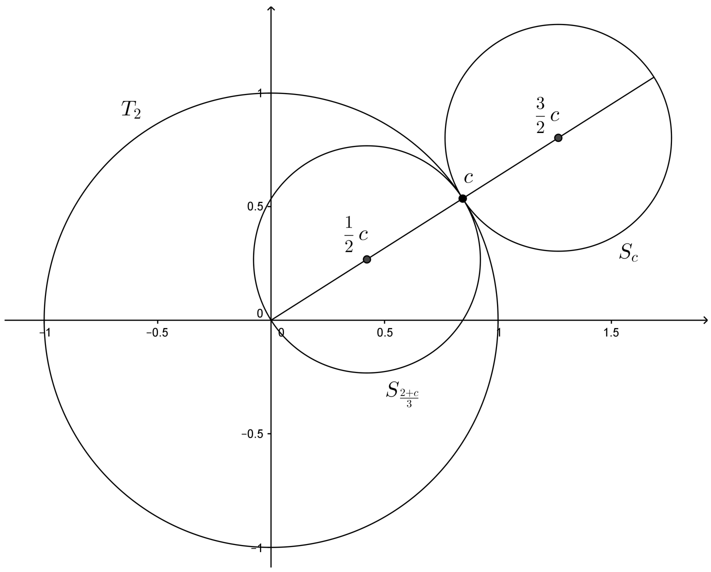
$$S_c = \{f_c(z) : z \in T_2\}$$

gdje T_2, prema (2.23), označava jediničnu kružnicu sa središtem u ishodištu.

Möbiusova transormacija je funkcija oblika $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Kada je $ad - bc \neq 0$, tada f ima inverznu funkciju i vrijedi $f^{-1}(z) = \frac{dz-b}{-cz+a}$. U slučaju f_c, imamo $ad - bc = -(c-1)^2$, pa kada je $c \neq 1$, $f_c^{-1} = f_c$. (U posebnom slučaju, $f_1(z) = \frac{z-1}{z-1} = 1$ za $z \neq 1$ i tada f_1^{-1} ne postoji.)

Dobro znamo da svaka (invertibilna) Möbiusova transformacija preslikava kružnice (i pravce) u kružnice (i pravce), pa je S_c kružnica, odnosno pravac kada za neki $z \in T_2$ vrijedi $z + (1 - 2c) = 0$. Drugim rječima, S_c je pravac kada

$$|1 - 2c| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{1}{2} - c\right| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow c \in T_1.$$



Slika 2.16: Kružnice S_c i $S_{\frac{2+c}{3}}$ za $c \in T_2 \backslash \{1\}$.

Lema 2.5.11. *Neka je $1 \neq c \in T_2$. Tada je S_c kružnica radijusa $\frac{1}{2}$ koja izvana dodiruje kružnicu T_2 u točki c, dok je $S_{\frac{2+c}{3}}$ kružnica radijusa $\frac{1}{2}$ koja iznutra dodiruje kružnicu T_2 u točki c.*

Dokaz. Već znamo da je S_c kružnica. Pretpostavimo najprije da je $c \neq -1$. Vrijedi

$$f_c(c) = c, \quad f_c(1) = \frac{3c - 1}{2}, \quad f_c(-1) = \frac{3c^2 - 1}{2c}.$$

Stoga za $z \in \{1, -1, c\}$ imamo

$$\left|f_c(z) - \frac{3}{2}c\right| = \frac{1}{2}$$

pa je S_c kružnica radijusa $\frac{1}{2}$ sa središtem u $\frac{3}{2}c$. Slično se pokaže da je

$$f_{\frac{2+c}{3}}(c) = c, \quad f_{\frac{2+c}{3}}(1) = \frac{c + 1}{2}, \quad f_{\frac{2+c}{3}}(-1) = \frac{2c + 1}{2(c + 2)},$$

pa za $z \in \{1, -1, c\}$ imamo

$$\left| f_{\frac{2+c}{3}}(z) - \frac{c}{2} \right| = \frac{1}{2},$$

što pokazuje da je $S_{\frac{2+c}{3}}$ kružnica radijusa $\frac{1}{2}$ sa središtem u $\frac{1}{2}c$.

Prema tome, ako je $c \neq \pm 1$ i $c \in T_2$, tada je S_c kružnica radijusa $\frac{1}{2}$ koja izvana dodiruje kružnicu T_2 u točki c, dok je $S_{\frac{2+c}{3}}$ kružnica radijusa $\frac{1}{2}$ koja iznutra dodiruje kružnicu T_2 u točki c (v. sliku 2.16).

U slučaju $c = -1$ imamo

$$f_{-1}(1) = -2, \quad f_{-1}(-1) = -1, \quad f_{-1}(i) = \frac{-9 - 2i}{5},$$

pa je

$$\left| f_{-1}(z) + \frac{3}{2} \right| = \frac{1}{2}$$

za $z \in \{1, -1, i\}$. Time je pokazano da je S_{-1} kružnica radijusa $\frac{1}{2}$ sa središtemu u $-\frac{3}{2}$, pa S_{-1} izvana dodiruje kružnicu T_2 u točki -1.

Za $c = -1$ je $\frac{2+c}{3} = \frac{1}{3}$. Tada imamo

$$f_{\frac{1}{3}}(1) = 0, \quad f_{\frac{1}{3}}(-1) = -1, \quad f_{\frac{1}{3}}(i) = \frac{-1 - 2i}{5}$$

pa je

$$\left| f_{\frac{1}{3}}(z) + \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2},$$

što pokazuje da je $S_{\frac{1}{3}}$ kružnica radijusa $\frac{1}{2}$ sa središtem u $-\frac{1}{2}$. Stoga $S_{\frac{1}{3}}$ iznutra dodiruje kružnicu T_2 u točki -1. □

Propozicija 2.5.12. *Pretpostavimo da je $p(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - 1) \in \Gamma$ i $1 \neq c \in \mathbb{C}$. Tada je c stacionarna točka polinoma p ako i samo ako je $f_c(z_1) = z_2$. U tom slučaju je $\{z_1, z_2\} \subseteq S_c \cap T_2$.*

Dokaz. Neka je c stacionarna točka polinoma p. Kada bi bilo $z_1 = 2c - 1$, tada bi iz $p'(c) = 0$ slijedilo $c = 1$. Prema tome, $z_1 \neq 2c - 1$. Sada prema (2.31) i (2.32) slijedi $f_c(z_1) = z_2$. Obratno, ako je $f_c(z_1) = z_2$, tada prema (2.31) i (2.32) slijedi $p'(c) = 0$, čime je prva tvrdnja dokazana.

Funkcija f_c preslikava T_2 na S_c i, jer je $f_c^{-1} = f_c$, f_c također preslikava S_c na T_2. Dakle, $f_c(S_c \cap T_2) = S_c \cap T_2$. Ako je $c \neq 1$ stacionarna točka od p, tada je $f_c(z_1) = z_2$, pa iz $z_1 \in T_2$ slijedi $z_2 = f_c(z_1) \in S_c$; odnosno iz $z_2 \in T_2$ slijedi $z_1 = f_c(z_2) \in S_c$. Prema tome, $\{z_1, z_2\} \subseteq S_c \cap T_2$. □

Uzimajući u obzir prethodni rezultat, za bilo koji $c \neq 1$ u zatvorenom jediničnom krugu, možemo klasificirati polinome $p \in \Gamma$ koji imaju stacionarnu točku c. Budući da su T_2 i S_c kružnice (ili pravci), imamo četiri slučaja:

1. S_c i T_2 su disjunktni;
2. S_c i T_2 se dodiruju;
3. S_c i T_2 se sijeku u dvije različite točke;
4. $S_c = T_2$.

Propozicija 2.5.13. *Neka su* $a, u, v, c \in \mathbb{C}$, $u \neq v$, $|u| = |v| = |a| = 1$, $c \neq 1$, $|c| \leq 1$. *Tada vrijede sljedeće tvrdnje.*

(i) $S_c \cap T_2 = \emptyset$ *ako i samo ako ne postoji* $p \in \Gamma$ *sa stacionarnom točkom* c.

(ii) *Ako je* $S_c \cap T_2 = \{a\}$, *onda je* $p(z) = (z-a)^2(z-1)$ *jedini polinom iz* Γ *sa stacionarnom točkom* c. *Obratno, ako je* c *stacionarna točka polinoma* $p(z) = (z-a)^2(z-1)$, *onda je* $S_c \cap T_2 = \{a\}$.

(iii) *Ako je* $S_c \cap T_2 = \{u, v\}$, *onda je* $p(z) = (z-u)(z-v)(z-1)$ *jedini polinom iz* Γ *sa stacionarnom točkom* c.

(iv) $S_c = T_2$ *ako i samo ako je* $c = -\frac{1}{3}$. *U tom je slučaju* c *stacionarna točka polinoma* $p(z) = (z-1)(z-a)\left(z + \frac{5a+3}{3a+5}\right)$.

Dokaz. (ii) Ako je $S_c \cap T_2 = \{a\}$, tada je prema propoziciji 2.5.12 nužno $z_1 = a = z_2$ i $p(z) = (z-1)(z-a)^2$ je jedini polinom iz Γ sa stacionarnom točkom c. Obratno, ako je p takvog oblika i c njegova stacionarna točka, onda je $c = a$ ili $c = \frac{2+a}{3}$. Uočimo da je tada $a \neq 1$. Ako je $c = a$, onda prema lemi 2.5.11 vrijedi $S_c \cap T_2 = S_a \cap T_2 = \{a\}$, dok u slučaju $c = \frac{2+a}{3}$ ponovo prema lemi 2.5.11 vrijedi $S_c \cap T_2 = S_{\frac{2+a}{3}} \cap T_2 = \{a\}$.

(iii) U trećem slučaju, pretpostavimo da je $S_c \cap T_2 = \{u, v\}$, za neke $u \neq v$. Pretpostavimo da je $f_c(u) = u$. Kako je f_c bijekcija na skupu $S_c \cap T_2$, imamo $f_c(v) = v$. Prema propoziciji 2.5.12, c je stacionarna točka polinoma $p_u(z) = (z-u)^2(z-1)$ i $p_v(z) = (z-v)^2(z-1)$. Tada je $c \in \{u, \frac{2+u}{3}\} \cap \{v, \frac{2+v}{3}\}$. Međutim, $\frac{2+u}{3}$ se nalazi na segmentu $\overline{1u}$, a $\frac{2+v}{3}$ na segmentu $\overline{1v}$. Pošto je $u \neq v$, to je $\{u, \frac{2+u}{3}\} \cap \{v, \frac{2+v}{3}\} = \emptyset$ što vodi do kontradikcije. Slijedi $f_c(u) = v$ i $f_c(v) = u$, pa je $p(z) = (z-1)(z-u)(z-v)$ jedini polinom iz Γ sa stacionarnom točkom c.

(iv) U posljednjem slučaju, pretpostavimo $S_c = T_2$. Tada za $|a| = 1$, imamo $|f_c(a)| = 1$. Posebno, $|f_c(1)| = 1 = |f_c(-1)|$. Imamo

$$f_c(1) = \frac{-3c^2 + 4c - 1}{2 - 2c} = \frac{(3c-1)(c-1)}{2(c-1)} = \frac{3c-1}{2}$$

gdje zadnja jednakost vrijedi zbog pretpostavke $c \neq 1$. Stavimo li $c = x + iy$ u

$$\left|\frac{3c-1}{2}\right| = |f_c(1)| = 1$$

dobivamo

$$y^2 = \frac{4}{9} - \left(x - \frac{1}{3}\right)^2. \tag{2.33}$$

Slično, $f_c(-1) = \frac{3c^2-1}{2c}$. Opet, uvrštavamo $c = x + iy$ u jednakost $|f_c(-1)| = 1$ te dobivamo

$$\left|\frac{(3(x+iy)^2-1)(x-iy)}{2(x+iy)(x-iy)}\right| = 1,$$

odakle slijedi

$$\begin{aligned}
\left|3(x+iy)(x^2+y^2) - (x-iy)\right| &= 2(x^2+y^2)\\
\left|x(3(x^2+y^2)-1) + iy(3(x^2+y^2)+1)\right| &= 2(x^2+y^2)\\
x^2[9(x^2+y^2)^2 - 6(x^2+y^2)+1] + y^2[9(x^2+y^2)^2 + 6(x^2+y^2)+1] &= 4(x^2+y^2)^2\\
9(x^2+y^2)^3 - 6(x^2+y^2)(x^2-y^2) + (x^2+y^2) &= 4(x^2+y^2)^2. \qquad (2.34)
\end{aligned}$$

Uočimo da je $c \neq 0$ pa je stoga $x^2 + y^2 \neq 0$. Naime, $0 \in T_1$ pa je S_0 pravac i zato ne može biti $S_0 = T_2$. Podijelimo li jednakost (2.34) s $x^2 + y^2$, dobije se

$$9(x^2+y^2)^2 - 6(x^2-y^2) + 1 = 4(x^2+y^2). \tag{2.35}$$

Koristeći (2.33) dobivamo $9y^2 = 4 - (3x-1)^2 = -9x^2 + 6x + 3$, tj. $9x^2 + 9y^2 = 6x + 3$, odnosno

$$x^2 + y^2 = \frac{2x+1}{3}.$$

Odavde je

$$x^2 - y^2 = 2x^2 - (x^2+y^2) = \frac{6x^2-2x-1}{3}$$

pa iz (2.35) slijedi

$$\begin{aligned}
(2x+1)^2 - 2(6x^2-2x-1) + 1 &= \frac{4}{3}(2x+1)\\
3(4x^2+4x+1) - 6(6x^2-2x-1) + 3 &= 4(2x+1)\\
-24x^2 + 16x + 8 &= 0,
\end{aligned}$$

odnosno

$$0 = 3x^2 - 2x - 1 = (3x+1)(x-1). \tag{2.36}$$

Zbog $c \neq 1$ po pretpostavci, slijedi $x = -\frac{1}{3}$ pa je prema (2.33) $y = 0$ i stoga $c = -\frac{1}{3}$. Prema tome, pokazali smo da u slučaju $S_c = T_2$ mora biti $c = -\frac{1}{3}$.

Obratno, tvrdimo $S_{-\frac{1}{3}} = T_2$. Iz $f_{-\frac{1}{3}}(z) = \frac{-5z-3}{3z+5}$ dobije se

$$f_{-\frac{1}{3}}(1) = -1, \quad f_{-\frac{1}{3}}(-1) = 1, \quad f_{-\frac{1}{3}}(i) = -\frac{15}{17} - \frac{8}{17}i.$$

Kako je $S_{-\frac{1}{3}}$ kružnica koja sadrži $f_{-\frac{1}{3}}(1)$, $f_{-\frac{1}{3}}(-1)$ i $f_{-\frac{1}{3}}(i)$, pri čemu je $|f_{-\frac{1}{3}}(1)| = |f_{-\frac{1}{3}}(-1)| = |f_{-\frac{1}{3}}(i)| = 1$, to mora biti $S_{-\frac{1}{3}} = T_2$.

Ako je $c = -\frac{1}{3}$ stacionarna točka polinoma $p \in \Gamma$, tada prema propoziciji 2.5.12 postoji neki $a \in \mathbb{C}$, $|a| = 1$, takav da je

$$\begin{aligned} p(z) &= (z-1)(z-a)(z - f_{-\frac{1}{3}}(a)) \\ &= (z-1)(z-a)\left(z + \frac{5a+3}{3a+5}\right). \end{aligned}$$

S druge strane, lako se provjeri da je $c = -\frac{1}{3}$ stacionarna točka svakog takvog polinoma.

(i) Ako je $S_c \cap T_2 = \emptyset$, tada ne postoji polinom $p \in \Gamma$ sa stacionarnom točkom c jer zbog $\{z_1, z_2\} \subseteq S_c \cap T_2 = \emptyset$ niti jedna točka u $\mathbb{C}$ ne može biti z_1 (ili z_2). Obratno, ako ne postoji polinom $p \in \Gamma$ sa stacionarnom točkom c, tada tvrdnje (ii), (iii) i (iv) ove propozicije povlače da su skupovi T_2 i S_c disjunktni. □

Uzevši u obzir sva provedena razmatranja, dokazali smo sljedeći rezultat.

Teorem 2.5.14. *Neka je $c \in \mathbb{C}$.*

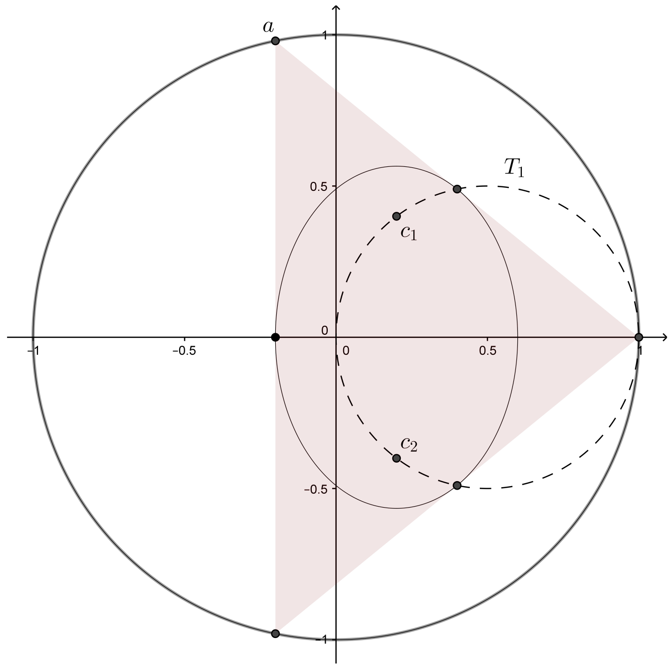
(i) *Ako $c \notin \{1, -\frac{1}{3}\}$, tada postoji najviše jedan $p \in \Gamma$ sa stacionarnom točkom c.*

(ii) *Ako c leži strogo unutar $T_{\frac{2}{3}}$ ili strogo izvan T_2, tada ne postoji $p \in \Gamma$ sa stacionarnom točkom c.*

(iii) *$p \in \Gamma$ ima stacionarnu točku 1 ako i samo ako je $p(z) = (z-1)^2(z-a)$ za neki $a \in \mathbb{C}$, $|a| = 1$.*

(iv) *$p \in \Gamma$ ima stacionarnu točku $-\frac{1}{3}$ ako i samo ako je $p(z) = (z-1)(z-a)\left(z + \frac{5a+3}{3a+5}\right)$ za neki $a \in \mathbb{C}$, $|a| = 1$.*

Dokaz. Tvrdnja (i) je posljedica propozicije 2.5.13. Tvrdnja (ii) je posljedica teorema 2.5.8 i Gauss–Lucasovog teorema. Tvrdnja (iii) slijedi iz primjera 2.5.4, a (iv) iz propozicija 2.5.12 i 2.5.13. □



Slika 2.17: Ako $1 \neq c_1 \in T_1$, onda $c_2 = \overline{c}_1$.

Prvi dio teorema 2.5.14 može se poboljšati, o čemu govori sljedeći rezultat.

Teorem 2.5.15. *Ako $c \notin \{1, -\frac{1}{3}\}$ leži na T_α za neki $\alpha \in [\frac{2}{3}, 2]$, tada postoji jedinstven polinom $p \in \Gamma$ sa stacionarnom točkom c.*

Dokaz. Pretpostavimo da ne postoji $p \in \Gamma$ sa stacionarnom točkom c. Prema propoziciji 2.5.13, $T_2 \cap S_c = \emptyset$. To znači da S_c leži ili unutar ili izvan kružnice T_2. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da S_c leži unutar kružnice T_2. Pogledajmo kako se S_c mijenja kada točku c "povlačimo" kroz skup

$$X := \left\{ z : z \in T_\alpha, \ \alpha \in \left[\frac{2}{3}, 2\right] \right\}.$$

Definiramo put $\gamma : [0,1] \to X$ tako da je $\gamma(0) = c$, $\gamma(1) \in T_2 \setminus \{1\}$ i $\gamma(t) \in \mathrm{Int}(X)$ za $t \in \langle 0, 1\rangle$. Budući da $S_{\gamma(1)}$ izvana dodiruje T_2 (vidi lemu 2.5.11) dok $S_{\gamma(0)}$ leži unutar T_2, to zbog neprekidnosti postoji $t_0 \in \langle 0,1\rangle$ za koji $S_{\gamma(t_0)}$ iznutra dodiruje kružnicu T_2, tj. $S_{\gamma(t_0)} \cap T_2 = \{a\}$ za neki $a \in \mathbb{C}$. Prema propoziciji 2.5.13 (ii), $\gamma(t_0)$ je stacionarna točka polinoma $p(z) = (z-a)^2(z-1)$, pa je stoga $\gamma(t_0) = a$ ili $\gamma(t_0) = \frac{2+a}{3}$. Međutim, slučaj $\gamma(t_0) = a$ ne može nastupiti, jer bi tada bilo $\gamma(t_0) \in T_2$ što je u kontradikciji s $\gamma(t_0) \in \mathrm{Int}(X)$. Također, ako je $\gamma(t_0) = \frac{2+a}{3}$, onda je $|\gamma(t_0) - \frac{2}{3}| = \frac{1}{3}$, tj. $\gamma(t_0) \in T_{\frac{2}{3}}$ što je opet u kontradikciji s $\gamma(t_0) \in \mathrm{Int}(X)$. Time smo pokazali da postoji $p \in \Gamma$ sa stacionarnom točkom c. Prema teoremu 2.5.14 (i), takav je polinom jedinstven. $\square$

Kao jednu primjenu teorema 2.5.14, dat ćemo alternativni dokaz rezultata koji su dokazali Saff i Twomey u [11].

Teorem 2.5.16. *Neka su c_1 i c_2 stacionarne točke polinoma $p \in \Gamma$. Ako je $1 \neq c_1 \in T_1$, tada je $c_2 = \overline{c}_1$.*

Dokaz. Neka je $c_1 = x + iy \in T_1$. Neka je $a = e^{i\theta}$, gdje je $\cos\theta = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$. Neka je $q(z) = (z-1)(z-a)(z-\overline{a}) \in \Gamma$. Tada je

$$\begin{aligned} q(z) &= (z-1)(z^2 - (a+\overline{a})z + 1) \\ &= (z-1)(z^2 - 2(\operatorname{Re} a)z + 1) \\ &= z^3 - (1 + 2\operatorname{Re} a)z^2 + (1 + 2\operatorname{Re} a)z - 1 \\ &= z^3 - (1 + 2\cos\theta)z^2 + (1 + 2\cos\theta)z - 1 \\ &= z^3 - 3xz^2 + 3xz - 1. \end{aligned}$$

Deriviranjem dobivamo $q'(z) = 3(z^2 - 2xz + x)$. Budući da $c_1 \in T_1$, imamo $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$, pa je $c_1\overline{c}_1 = x^2 + y^2 = x$, dok je $c_1 + \overline{c}_1 = 2x$. Stoga je $q'(z) = 3(z - c_1)(z - \overline{c}_1)$. Zaključujemo da $q \in \Gamma$ ima stacionarne točke c_1 i $c_2 = \overline{c}_1$ (v. sliku 2.17). Tada, prema teoremu 2.5.14 (i), imamo $q = p$, čime smo dokazali tvrdnju. □

Bibliografija

[1] J. E. Brown i G. Xiang, *Proof of the Sendov conjecture for polynomials of degree at most eight*, J. Math. Anal. Appl. 232 (2) (1999), 272–292.

[2] J. S.-C. Cheng, *On the distribution of the critical points of a polynomial*, `http://www.math.washington.edu/~morrow/336_12/papers/jerry.pdf`

[3] G. L. Cohen i G. H. Smith, *A simple verification of Ilieff's conjecture for polynomials with three zeros*, Amer. Math. Monthly 95 (8) (1988), 734–737.

[4] B. Dakić i B. Pavković, *Polinomi*, Školska knjiga, Zagreb, 1987.

[5] C. Frayer, M. Kwon, C. Schafhauser i J. A. Swenson, *The geometry of cubic polynomials*, `http://www.uwplatt.edu/~swensonj/gocp/GOCPv11-js.pdf`

[6] D. Kalman, *An elementary proof of Marden's theorem*, Amer. Math. Monthly 115 (4) (2008), 330–338.

[7] M. Marden, *A note on the zeros of the sections of a partial fraction*, Bull. Amer. Math. Soc. 51 (1945), 935–940.

[8] M. Marden, *Geometry of Polynomials*, 2nd edition, Math. Surveys no. 3, American Mathematical Society, Providence, RI, 1966.

[9] D. Minda i S. Phelps, *Triangles, ellipses, and cubic polynomials*, Amer. Math. Monthly 115 (2008), 679–689.

[10] V. V. Prasolov, *Polynomials*, 2nd edition, Moscow Center for Continuous Math. Education, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2004.

[11] E. B. Saff, J. B. Twomey, *A note on the location of critical points of polynomials*, Proc. Amer. Math. Soc. 27 (2) (1971), 303–308.

[12] J. Steiner, *Gesammelte Werke*, vol. 2, Prussian Academy of Sciences, Berlin, 1881–1882.

Sažetak

U ovom radu opisujemo vezu između nultočaka kompleksnog kubičnog polinoma i nultočaka njegove derivacije. U prvom poglavlju prezentiramo osnovne rezultate o polinomima s realnim i kompleksnim koeficijentima. Drugo poglavlje započinje prezentiranjem dvaju kompleksnih analogona Rolleovog teorema za polinome proizvoljnog stupnja: Gauss–Lucasov teorem koji kaže da stacionarne točke polinoma leže u konveksnoj ljusci njegovih nultočaka; te Jensenov teorem o raspodjeli ne-realnih stacionarnih točaka komplesnog polinoma s realnim koeficijentima. Zatim dokazujemo Sendov–Iliefovu slutnju o vezi između nultočaka nekih posebnih vrsta kompleksnih polinoma i njihovih stacionarnih točaka. U radu je posebna pažnja posvećena kubičnim polinomima. Fina veza između nultočaka kubičnog polinoma i nultočaka njegove derivacije slijedi iz Steinerovog geometrijskog rezultata: postoji jedinstvena elipsa upisana trokutu koja dira stranice tog trokuta u njihovim polovištima. Dokazujemo Mardenov teorem koji kaže: ako su nultočke kubičnog polinoma vrhovi trokuta, onda su njegove stacionarne točke fokusi Steinerove elipse upisane tom trokutu. Prezentiramo Saff i Twomeyev rezultat o položaju stacionarnih točaka familije kubičnih polinoma $\mathcal{P}(a)$, ($|a| \leq 1$), koji imaju sve nultočke u zatvorenom jediničnom krugu i barem jednu nultočku u točki a. Proučavamo strukturu stacionarnih točaka familije kubičnih polinoma s nultočkom 1, kada ostale dvije nultočke pomičemo duž jedinične kružnice. Pokazujemo da stacionarna točka svakog takvog polinoma gotovo uvijek određuje polinom jedinstveno.

Summary

In this thesis, we describe a relationship between the roots of a complex cubic polynomial and the roots of its derivative. In the first chapter, we present basic results on polynomials with real and complex coefficients. The second chapter begins by presenting two complex analogues of Rolle's theorem for polynomial of arbitrary degree: Gauss–Lucas theorem which states that the critical points of any polynomial lie in the convex hull of its roots; and Jensen's theorem on the distribution of non-real critical points of a complex polynomial with real coefficients. Then we prove the Sendov–Ilieff conjecture on a relationship between the roots of some special types of complex polynomials and their critical points. In this work, special attention is paid to cubic polynomials. A sophisticated connection between the roots of a cubic polynomial and those of a derivative follows from a lovely geometric result of Steiner: there is the unique ellipse that is inscribed in the triangle and tangent to the sides at their midpoints. We prove Marden's theorem which states: if the roots of a cubic polynomial are the vertices of the triangle, then its critical points are foci of the Steiner ellipse that is inscribed in the triangle. We present Saff and Twomey's result on the location of the critical points of the family of cubic polynomials $\mathcal{P}(a)$, ($|a| \leq 1$), which have all of their roots in the closed unit disk and at least one root at the point a. We study the structure of the critical points of the family of cubic polynomials with a root 1, when the other two roots move around the unit circle. We show that a critical point of each such polynomial almost always determines the polynomial uniquely.

Životopis

Rođena sam 04.03.1988. u Zagrebu. Osnovnoškolsko obrazovanje stekla sam u osnovnoj školi kralja Tomislava u Zagrebu. 2002. godine upisala sam XI. opću gimnaziju u Zagrebu, u kojoj sam maturirala 2006. godine. Iste godine upisala sam Preddiplomski sveučilišni studij Matematika na Prirodoslovno - matematičkom fakultetu u Zagrebu. Nakon završenog preddiplomskog studija, 2012. godine upisujem diplomski sveučilišni studij Matematika, smjer Računarstvo i matematika.