

# Strukture izračunljivosti

---

**Kulović, Edita**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2016**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:301021>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2020-10-21**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Edita Kulović

**STRUKTURE IZRAČUNLJIVOSTI**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
doc. dr. sc. Zvonko Iljazović

Zagreb, rujan 2016.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

# Sadržaj

<b>Sadržaj</b>	<b>iii</b>
<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>1 Rekurzivne funkcije s realnim vrijednostima</b>	<b>3</b>
1.1 Klasična izračunljivost . . . . .	3
1.2 Rekurzivne funkcije s cjelobrojnim vrijednostima . . . . .	6
1.3 Rekurzivne funkcije s racionalnim vrijednostima . . . . .	8
1.4 Rekurzivne funkcije s realnim vrijednostima . . . . .	10
<b>2 Rekurzivno prebrojivi skupovi</b>	<b>15</b>
<b>3 Izračunljivi metrički prostori</b>	<b>23</b>
<b>4 Strukture izračunljivosti</b>	<b>29</b>
4.1 Kardinalnost skupa rekurzivnih brojeva . . . . .	33
4.2 Separabilne strukture izračunljivost . . . . .	34
4.3 Efektivna potpuna omeđenost . . . . .	41
<b>Bibliografija</b>	<b>47</b>

# Uvod

S pojmom izračunljivosti susreli smo se na istoimenom kolegiju gdje smo se bavili s rekurzivnim funkcijama oblika  $f: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ , za neki  $k \geq 1$ . U ovom radu proširujemo pojam rekurzivnosti na funkcije s realnim vrijednostima. Također nas zanima na koji način proširiti pojam izračunljivosti na metričke prostore.

U prvom poglavlju se prisjećamo pojma rekurzivne funkcije  $f: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$  te dajemo neke primjere takvih funkcija. Dan je pregled teorema i propozicija koji se rade na kolegiju Izračunljivost, a koji su potrebni za daljnje razumijevanje građe u ovom radu. Pojam rekurzivne funkcije proširujemo na funkcije s kodomenama u  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$ . Dokazujemo da su zbroj, apsolutna vrijednost i umnožak takvih funkcija također rekurzivne funkcije.

Pojam rekurzivno prebrojivih skupova definiramo u drugom poglavlju. Dokazujemo na koji način djelovanje rekurzivne funkcije utječe na rekurzivno prebrojive skupove. Tako je dokazano da su praslika i slika, po rekurzivnoj funkciji, rekurzivno prebrojivog skupa također rekurzivno prebrojivi skupovi.

Pojmove izračunljivog metričkog prostora, izračunljive točke i izračunljivog niza uvodimo u trećem poglavlju. Promatramo euklidsku metriku  $d$  na  $\mathbb{R}$  te na prirodan način uvodimo niz  $\alpha$  takav da je  $(\mathbb{R}, d, \alpha)$  izračunljiv metrički prostor. Dokazujemo da je  $x$  izračunljiva točka u  $(\mathbb{R}, d, \alpha)$  ako i samo ako je  $x$  rekurzivan broj.

U četvrtom poglavlju razrađujemo pojam iz naslova diplomskog rada, dakle definiramo što su strukture izračunljivosti, efektivni separirajući nizovi, separabilne strukture izračunljivosti i sl. Dokazujemo da je skup svih rekurzivnih brojeva prebrojiv, a također i da je skup svih rekurzivnih funkcija  $f: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{R}$  prebrojiv. Centralno mjesto u ovom poglavlju ima teorem u kojem se tvrdi da postoji jedinstvena separabilna struktura izračunljivosti na metričkom prostoru  $([0, 1], d)$ , pri čemu je  $d$  euklidska metrika. Na kraju se dotičemo pojma omeđenosti u metričkim prostorima te definiramo kada je izračunljiv metrički prostor efektivno potpuno omeđen.



# Poglavlje 1

## Rekurzivne funkcije s realnim vrijednostima

### 1.1 Klasična izračunljivost

**Definicija 1.1.1.** Funkciju  $Z: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  definiranu sa  $Z(x) = 0$  nazivamo **nul-funkcija**.

Funkciju  $Sc: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  definiranu sa  $Sc(x) = x + 1$  nazivamo **funkcija sljedbenika** (eng. *successor*).

Neka je  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  i  $k \in \{1, \dots, n\}$ . Funkciju  $I_k^n: \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$  definiranu sa  $I_k^n(x_1, \dots, x_n) = x_k$  nazivamo **projekcija na k-tu koordinatu**.

Funkcije  $Z$ ,  $Sc$  i  $I_k^n$  ( $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, k \leq n$ ) nazivamo **inicijalne funkcije**.

**Definicija 1.1.2.** Neka su  $k, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , te  $S_1, \dots, S_n \subseteq \mathbb{N}^k$ . Neka su  $g_1: S_1 \rightarrow \mathbb{N}, \dots, g_n: S_n \rightarrow \mathbb{N}$ . Neka je  $T \subseteq \mathbb{N}^k$ , te  $f: T \rightarrow \mathbb{N}$ .

Definiramo  $k$ -mjesnu funkciju  $h$  sa:

$$h(\vec{x}) \simeq f(g_1(\vec{x}), \dots, g_n(\vec{x})). \quad (1.1)$$

Tada kažemo da je funkcija  $h$  definirana pomoću **kompozicije** funkcija  $f, g_1, \dots, g_n$ .

**Napomena 1.1.3.** Za funkciju kažemo da je mjesnosti  $k$ ,  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  ukoliko za njezinu domenu  $S$  vrijedi  $S \subseteq \mathbb{N}^k$ .

Oznaka  $\simeq$  koju smo koristili u (1.1) nam znači da je funkcija  $h$  definirana na svim onim  $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$  za koje definicija ima smisla, odnosno domena te funkcije je

$$S = \{\vec{x} \in S_1 \cap \dots \cap S_n \mid (g_1(\vec{x}), \dots, g_n(\vec{x})) \in T\}.$$

**Definicija 1.1.4.** Neka je  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ,  $S \subseteq \mathbb{N}^n$ ,  $T \subseteq \mathbb{N}^{n+2}$ ,  $f: S \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $g: T \rightarrow \mathbb{N}$ . Definiramo  $(n+1)$ -mjesnu funkciju  $h$  sa:

$$h(0, x_1, \dots, x_n) \simeq f(x_1, \dots, x_n) \quad (1.2)$$

$$h(y + 1, x_1, \dots, x_n) \simeq g(h(y, x_1, \dots, x_n), y, x_1, \dots, x_n) \quad (1.3)$$

Za funkciju  $h$  kažemo da je dobivena **primitivnom rekurzijom** funkcija  $f$  i  $g$ .

**Definicija 1.1.5.** Neka je  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  te  $g: \mathbb{N}^{n+1} \rightarrow \mathbb{N}$ . Definiramo

$$S = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n \mid \exists y \in \mathbb{N} \text{ tako da je } g(x_1, \dots, x_n, y) = 0\}$$

Neka je  $f: S \rightarrow \mathbb{N}$  funkcija definirana sa:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \mu y [g(x_1, \dots, x_n, y) = 0].$$

Pišemo i

$$f(x_1, \dots, x_n) \simeq \mu y [g(x_1, \dots, x_n, y) = 0], \vec{x} \in \mathbb{N}^n. \quad (1.4)$$

Pri tome  $\mu y [g(\vec{x}, y) = 0]$  označava najmanji  $y$  takav da vrijedi  $g(\vec{x}, y) = 0$ . Za funkciju  $f$  kažemo da je dobivena primjenom  **$\mu$ -operatora** na funkciju  $g$ .

**Napomena 1.1.6.** Funkcija  $g$  iz prethodne definicije ne mora biti totalna, naime u (1.4) smo koristili oznaku  $\simeq$  koja znači da je funkcija  $f$  definirana na svim onim  $\vec{x} \in \mathbb{N}^n$  za koje definicija ima smisla. Konkretno, kada je  $g: S_g \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $S_g \subsetneq \mathbb{N}^{k+1}$ , tada je skup  $S$  na kojem je funkcija  $f$  definirana jednak

$$S = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n \mid \exists y \in \mathbb{N} \text{ tako da je } g(x_1, \dots, x_n, y) = 0, \\ g(x_1, \dots, x_n, z) \text{ je definirano za sve } z \leq y\}$$

**Definicija 1.1.7.** Najmanja klasa funkcija koja sadrži inicijalne funkcije, te je zatvorena za kompoziciju, primitivnu rekurziju i primjenu  $\mu$ -operatora naziva se klasa **parcijalno rekurzivnih funkcija**.

Za funkciju  $f: S \rightarrow \mathbb{N}$  kažemo da je totalna ukoliko je  $S = \mathbb{N}^k$  za neki  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Kažemo da je funkcija **rekurzivna** ukoliko je parcijalno rekurzivna i totalna.

**Primjer 1.1.8.** Sljedeće funkcije su rekurzivne (dokaz se može naći u [1]):

1.  $\mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $(x, y) \mapsto x + y$ ,

2.  $\mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $(x, y) \mapsto x \cdot y$ ,

3.  $\mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $(x, y) \mapsto x - y = \begin{cases} 0, & x \leq y \\ x - y, & x > y \end{cases}$ , ovu funkciju nazivamo modificirano oduzimanje



$$4. \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}, (x, y) \mapsto \begin{cases} \lfloor \frac{x}{y} \rfloor, & y \neq 0 \\ x, & y = 0 \end{cases},$$

5.  $\mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}, (x, y) \mapsto \text{ost}(x, y)$ , tj. funkcijska vrijednost u  $(x, y)$  je ostatak pri dijeljenju  $x$  sa  $y$ ,

6.  $p: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, i \mapsto (i + 1)$ -vi prost broj,

$$7. E: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}, E(x, i) = \begin{cases} \text{eksponent s kojim broj } p_i \text{ ulazi u rastav od} \\ x \text{ na proste faktore, } x \geq 1 \\ 0, x = 0 \end{cases},$$

$$8. \text{sg}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \text{sg}(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases},$$

$$9. \overline{\text{sg}}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \overline{\text{sg}}(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \geq 1 \end{cases},$$

$$10. \varphi: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}, \varphi(a, b) = a^b.$$

**Definicija 1.1.9.** Za skup  $S \subseteq \mathbb{N}^k$  kažemo da je **rekurzivan skup** ako je njegova karakteristična funkcija rekurzivna.

**Propozicija 1.1.10.** Neka je  $k \geq 1$ , te neka su  $S$  i  $T$  rekurzivni podskupovi od  $\mathbb{N}^k$ . Tada su i  $S^c$ ,  $S \cap T$  i  $S \cup T$  također rekurzivni skupovi.

**Propozicija 1.1.11.** Neka su  $f, g: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$  rekurzivne funkcije. Tada su rekurzivne i funkcije

$$f + g, f \cdot g: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$$

**Propozicija 1.1.12.** Neka su  $n, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Neka su  $F_1, \dots, F_n: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$  rekurzivne funkcije. Neka su  $S_1, \dots, S_n \subseteq \mathbb{N}^k$  rekurzivni skupovi tako da za svaki  $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$  postoji točno jedan  $i \in \{1, \dots, n\}$  tako da je  $\vec{x} \in S_i$ .

Neka je  $f: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$  funkcija definirana sa:

$$f(\vec{x}) = \begin{cases} F_1(\vec{x}), & \text{ako je } \vec{x} \in S_1 \\ \dots \\ F_n(\vec{x}), & \text{ako je } \vec{x} \in S_n \end{cases}$$

Tada je  $f$  rekurzivna funkcija.

Dokazi navedenih propozicija se mogu naći u [1].

## 1.2 Rekurzivne funkcije s cjelobrojnim vrijednostima

**Propozicija 1.2.1.** *Neka je  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  te neka je  $f: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{Z}$ . Tada postoje rekurzivne funkcije  $a, b: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$  tako da je*

$$f(\vec{x}) = (-1)^{a(\vec{x})} b(\vec{x}), \forall \vec{x} \in \mathbb{N}^k \quad (1.5)$$

*ako i samo ako postoje rekurzivne funkcije  $g, h: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$  tako da je*

$$f(\vec{x}) = g(\vec{x}) - h(\vec{x}), \forall \vec{x} \in \mathbb{N}^k. \quad (1.6)$$

*Dokaz.* Pretpostavimo da postoje rekurzivne funkcije  $a, b: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$  tako da vrijedi (1.5). Definiramo funkcije  $g$  i  $h$  na sljedeći način:

$$g(\vec{x}) = \begin{cases} b(\vec{x}), & \text{ako je } a(\vec{x}) \text{ paran} \\ 0, & \text{ako je } a(\vec{x}) \text{ neparan} \end{cases}$$

$$h(\vec{x}) = \begin{cases} 0, & \text{ako je } a(\vec{x}) \text{ paran} \\ b(\vec{x}), & \text{ako je } a(\vec{x}) \text{ neparan} \end{cases}$$

Trivijalno se vidi da je funkcija  $f'(\vec{x}) = g(\vec{x}) - h(\vec{x})$  jednaka funkciji  $f$ .

Prema propoziciji 1.1.12 dovoljno je pokazati da je skup  $A = \{\vec{x} \in \mathbb{N}^k \mid a(\vec{x}) \text{ je neparan}\}$  rekurzivan da bi funkcije  $g$  i  $h$  bile rekurzivne. Karakteristična funkcija skupa  $A$  je

$$\chi_A(\vec{x}) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } a(\vec{x}) \text{ neparan} \\ 0, & \text{ako je } a(\vec{x}) \text{ paran} \end{cases}$$

odnosno,

$$\chi_A(\vec{x}) = \text{ost}(a(\vec{x}), c_2(I_1^n(\vec{x}))), \quad (1.7)$$

gdje je  $c_2$  konstantna funkcija s vrijednošću 2. Iz jednakosti (1.7) se lako vidi da je karakteristična funkcija skupa  $A$  rekurzivna jer je dobivena primjenom kompozicije na rekurzivne funkcije  $\text{ost}$ ,  $a$ ,  $c_2 \circ I_1^n$ . Dakle, funkcije  $g$  i  $h$  su rekurzivne.

Pretpostavimo sada da postoje rekurzivne funkcije  $g, h: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$  tako da je

$$f(\vec{x}) = g(\vec{x}) - h(\vec{x}).$$

Želimo iskazati funkcije  $a$  i  $b$  pomoću funkcija  $g$  i  $h$ , a također i pokazati da su rekurzivne. Definirajmo skup  $S = \{\vec{x} \in \mathbb{N}^k \mid g(\vec{x}) \geq h(\vec{x})\}$ , i funkcije  $a$  i  $b$  na sljedeći način:

$$a(\vec{x}) = \begin{cases} 0, & \text{ako je } \vec{x} \in S \\ 1, & \text{inače} \end{cases}$$

$$b(\vec{x}) = \begin{cases} g(\vec{x}) \dot{-} h(\vec{x}), & \text{ako je } \vec{x} \in S \\ h(\vec{x}) \dot{-} g(\vec{x}), & \text{inače} \end{cases}$$

Prema propoziciji 1.1.12 dovoljno je pokazati da je skup  $S$  rekurzivan da bi funkcije  $a$  i  $b$  bile rekurzivne. Karakteristična funkcija skupa  $S$  izgleda ovako:

$$\chi_S(\vec{x}) = \overline{sg}(h(\vec{x}) \div g(\vec{x})),$$

tj. ona je nastala primjenom kompozicije na rekurzivne funkcije  $\overline{sg}$  i  $B$ , gdje je  $B$  nastala kompozicijom modificiranog oduzimanja,  $h$  i  $g$ . Dakle  $\chi_S$  je rekurzivna funkcija i  $S$  je rekurzivan skup. Za tako definirane funkcije  $a$  i  $b$  vrijedi (1.5).  $\square$

**Definicija 1.2.2.** Neka je  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Za funkciju  $f: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{Z}$  kažemo da je **rekurzivna** ako postoje  $a, b: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$  rekurzivne funkcije tako da se  $f$  može zapisati u obliku:

$$f(\vec{x}) = (-1)^{a(\vec{x})} b(\vec{x}), \forall \vec{x} \in \mathbb{N}^k.$$

Uočimo da je prema propoziciji 1.2.1 funkcija  $f$  rekurzivna ako i samo ako postoje funkcije  $g, h: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$  koje su rekurzivne tako da je

$$f(\vec{x}) = g(\vec{x}) - h(\vec{x}), \forall \vec{x} \in \mathbb{N}^k.$$

**Propozicija 1.2.3.** Neka su  $f_1, f_2: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{Z}$  rekurzivne funkcije. Tada su rekurzivne i sljedeće funkcije

$$f_1 + f_2: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{Z} \tag{1.8}$$

$$f_1 \cdot f_2: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{Z} \tag{1.9}$$

*Dokaz.* Budući su zapisi (1.5) i (1.6) ekvivalentni koristiti ćemo onaj koji je pogodniji za dokazivanje ove propozicije.

Funkcije  $f_1$  i  $f_2$  su rekurzivne pa prema propoziciji 1.2.1 postoje  $g_1, h_1: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$  i  $g_2, h_2: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$  koje su rekurzivne tako da je:

$$f_1 = g_1 - h_1, \quad f_2 = g_2 - h_2.$$

Dalje raspisujemo:

$$\begin{aligned} (f_1 + f_2)(\vec{x}) &= f_1(\vec{x}) + f_2(\vec{x}) \\ &= g_1(\vec{x}) - h_1(\vec{x}) + g_2(\vec{x}) - h_2(\vec{x}) \\ &= (g_1(\vec{x}) + g_2(\vec{x})) - (h_1(\vec{x}) + h_2(\vec{x})) \end{aligned}$$

Kako su  $g_1, g_2$  rekurzivne, tako je i njihov zbroj  $g_1 + g_2: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$  rekurzivna funkcija. Analogno, zaključujemo da je  $h_1 + h_2: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$  rekurzivna funkcija. Označimo sa  $g(\vec{x}) = g_1(\vec{x}) + g_2(\vec{x})$ , i  $h(\vec{x}) = h_1(\vec{x}) + h_2(\vec{x})$ . Tada je  $f_1 + f_2 = g - h$ .

Zapisali smo  $f_1 + f_2$  u obliku (1.6), pri čemu su  $g$  i  $h$  rekurzivne, prema tome  $f_1 + f_2$  je rekurzivna funkcija.

Za drugi dio tvrdnje koristit ćemo zapis (1.5). Dakle,

$$f_1(\vec{x}) = (-1)^{a_1(\vec{x})} b_1(\vec{x})$$

$$f_2(\vec{x}) = (-1)^{a_2(\vec{x})} b_2(\vec{x}),$$

gdje su  $a_1, b_1, a_2, b_2: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$  rekurzivne funkcije. Raspisujemo,

$$\begin{aligned} (f_1 \cdot f_2)(\vec{x}) &= (-1)^{a_1(\vec{x})} b_1(\vec{x}) \cdot (-1)^{a_2(\vec{x})} b_2(\vec{x}) \\ &= (-1)^{a_1(\vec{x})+a_2(\vec{x})} b_1(\vec{x}) b_2(\vec{x}) \end{aligned}$$

Funkcija  $a: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $a(\vec{x}) = a_1(\vec{x}) + a_2(\vec{x})$  je rekurzivna, a također i  $b: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $b(\vec{x}) = b_1(\vec{x}) \cdot b_2(\vec{x})$ . Dakle,

$$(f_1 \cdot f_2)(\vec{x}) = (-1)^{a(\vec{x})} b(\vec{x})$$

je rekurzivna funkcija. □

### 1.3 Rekurzivne funkcije s racionalnim vrijednostima

**Definicija 1.3.1.** Neka je  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Za funkciju  $f: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{Q}$  kažemo da je **rekurzivna** ako postoje rekurzivne funkcije  $a, b, c: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ , pri čemu je  $c(\vec{x}) \neq 0, \forall \vec{x} \in \mathbb{N}^k$ , tako da se  $f$  može zapisati u obliku:

$$f(\vec{x}) = (-1)^{a(\vec{x})} \frac{b(\vec{x})}{c(\vec{x})}, \forall \vec{x} \in \mathbb{N}^k. \quad (1.10)$$

**Propozicija 1.3.2.** Neka su  $f_1, f_2: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{Q}$  rekurzivne funkcije. Tada su rekurzivne i sljedeće funkcije

$$\begin{aligned} f_1 + f_2: \mathbb{N}^k &\rightarrow \mathbb{Q} \\ f_1 \cdot f_2: \mathbb{N}^k &\rightarrow \mathbb{Q} \end{aligned}$$

*Dokaz.* Kako je  $f_1$  rekurzivna funkcija, postoje rekurzivne funkcije  $a_1, b_1, c_1: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$  takve da je  $c_1(\vec{x}) \neq 0$ , i

$$f_1(\vec{x}) = (-1)^{a_1(\vec{x})} \frac{b_1(\vec{x})}{c_1(\vec{x})}, \forall \vec{x} \in \mathbb{N}^k.$$

Jednako zaključujemo i za funkciju  $f_2$  i zapisujemo je u obliku:

$$f_2(\vec{x}) = (-1)^{a_2(\vec{x})} \frac{b_2(\vec{x})}{c_2(\vec{x})}, \forall \vec{x} \in \mathbb{N}^k.$$

Neka su definirane funkcije  $P_1, P_2: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{Z}$  na sljedeći način:

$$\begin{aligned} P_1(\vec{x}) &= (-1)^{a_1(\vec{x})} b_1(\vec{x}) \cdot c_2(\vec{x}), \\ P_2(\vec{x}) &= (-1)^{a_2(\vec{x})} b_2(\vec{x}) \cdot c_1(\vec{x}). \end{aligned}$$

Prema propoziciji 1.2.3  $P_1$  je rekurzivna funkcija kao umnožak  $(-1)^{a_1(\vec{x})} b_1(\vec{x})$  i  $c_2(\vec{x})$ . Analogno zaključujemo da je  $P_2$  rekurzivna. Pišemo,

$$(f_1 + f_2)(\vec{x}) = \frac{P_1(\vec{x}) + P_2(\vec{x})}{c_1(\vec{x}) \cdot c_2(\vec{x})},$$

Dakle, u brojniku se nalazi zbroj rekurzivnih funkcija  $\mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{Z}$ , i prema 1.2.3 to je rekurzivna funkcija. Prema propoziciji 1.1.11 zaključujemo da se u nazivniku nalazi rekurzivna funkcija kao umnožak dviju rekurzivnih funkcija  $c_1, c_2: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ . Sve zajedno  $f_1 + f_2: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{Q}$  je rekurzivna funkcija.

Pogledajmo raspis funkcije za drugu tvrdnju:

$$(f_1 \cdot f_2)(\vec{x}) = (-1)^{a_1(\vec{x})} \frac{b_1(\vec{x})}{c_1(\vec{x})} \cdot (-1)^{a_2(\vec{x})} \frac{b_2(\vec{x})}{c_2(\vec{x})} \quad (1.11)$$

$$= (-1)^{(a_1(\vec{x}) + a_2(\vec{x}))} \frac{b_1(\vec{x}) \cdot b_2(\vec{x})}{c_1(\vec{x}) \cdot c_2(\vec{x})} \quad (1.12)$$

Definirajmo

$$a(\vec{x}) = a_1(\vec{x}) + a_2(\vec{x}),$$

$$b(\vec{x}) = b_1(\vec{x}) \cdot b_2(\vec{x}),$$

$$c(\vec{x}) = c_1(\vec{x}) \cdot c_2(\vec{x}).$$

Prema propoziciji 1.1.11 su navedene funkcije rekurzivne kao funkcije  $\mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ . Dakle, zaključujemo da je funkcija  $f_1 \cdot f_2: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{Q}$ ,

$$(f_1 \cdot f_2)(\vec{x}) = (-1)^{a(\vec{x})} \frac{b(\vec{x})}{c(\vec{x})}, \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{N}^k.$$

rekurzivna. □

Sljedeća propozicija je dana bez dokaza jer se njezina istinitost lako vidi.

**Propozicija 1.3.3.** *Ako je  $f: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{Q}$  rekurzivna, tada su rekurzivne i funkcije  $-f, |f|: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{Q}$ .*

## 1.4 Rekurzivne funkcije s realnim vrijednostima

**Definicija 1.4.1.** Za  $x \in \mathbb{R}$  kažemo da je **rekurzivan broj** ako postoji  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$  rekurzivna funkcija tako da vrijedi

$$|x - f(x)| < 2^{-k}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Za niz  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$  realnih brojeva kažemo da je **rekurzivan** ako postoji rekurzivna funkcija  $F: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{Q}$  tako da je

$$|x_i - F(i, k)| < 2^{-k}, \forall (i, k) \in \mathbb{N}^2.$$

**Primjer 1.4.2.** Neka je  $x \in \mathbb{R}$  rekurzivan broj. Tada je i broj  $-x$  rekurzivan.

Naime, iz  $|x - f(x)| < 2^{-k}$  slijedi  $|(-x) - (-f(x))| < 2^{-k}$  odakle direktno slijedi tvrdnja.

**Definicija 1.4.3.** Neka je  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Za  $f: \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{R}$  kažemo da je **rekurzivna funkcija** ako postoji rekurzivna funkcija  $F: \mathbb{N}^{n+1} \rightarrow \mathbb{Q}$  tako da je

$$|f(\vec{x}) - F(\vec{x}, k)| < 2^{-k}, \forall \vec{x} \in \mathbb{N}^n, \forall k \in \mathbb{N}. \quad (1.13)$$

Za funkciju  $F$  kažemo da je **rekurzivna aproksimacija funkcije  $f$** .

**Primjer 1.4.4.** Svaka rekurzivna funkcija  $\mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{Q}$ ,  $k \geq 1$  je rekurzivna i kao funkcija  $\mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{R}$ .

Naime, stavimo  $F(\vec{x}, i) = f(x)$ . Dobili smo  $|f(x) - F(x, i)| = 0 < 2^{-i}$ . Slobodnijim riječima bismo rekli: kada bismo rekurzivnu funkciju  $\mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{Q}$  gledali kao funkciju  $\mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{R}$  njezina rekurzivna aproksimacija je ona sama.

**Primjer 1.4.5.** Ako je  $f: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{R}$  rekurzivna funkcija tada je  $f(\vec{x})$  rekurzivan broj za svaki  $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ .

Naime, neka je  $F: \mathbb{N}^{k+1} \rightarrow \mathbb{Q}$  rekurzivna aproksimacija funkcije  $f$ . Neka je za svaki  $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$  definirana funkcija  $H: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ ,  $H(i) = F(x, i), \forall i \in \mathbb{N}$ . Funkcija  $H$  je rekurzivna i vrijedi

$$|f(\vec{x}) - H(i)| < 2^{-i}.$$

Time je tvrdnja dokazana.

**Definicija 1.4.6.** Neka je  $f: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}^n$  funkcija takva da vrijedi

$$f(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), \dots, f_n(\vec{x})), \forall \vec{x} \in \mathbb{N}^k.$$

Za  $f_1, \dots, f_n: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$  kažemo da su **komponentne funkcije** od  $f$ . Funkcija  $f$  je **rekurzivna** ukoliko su rekurzivne njezine komponentne funkcije  $f_1, \dots, f_n$ .

**Napomena 1.4.7.** Neke od činjenica koje direktno proizlaze iz gornje definicije su nabrojene u ovoj napomeni, a biti će nam od koristi pri dokazivanju nekih budućih propozicija.

1. Ako su  $g: \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$  i  $f: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}^n$  rekurzivne, tada je rekurzivna i njihova kompozicija  $g \circ f: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$

$$(g \circ f)(\vec{x}) = g(f(\vec{x})) = g(f_1(\vec{x}), \dots, f_n(\vec{x})), \quad (1.14)$$

gdje su  $f_1, \dots, f_n$  rekurzivne kao komponentne funkcije od  $f$ .

2. Ako su  $g: \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}^m$  i  $f: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}^n$  rekurzivne, tada je rekurzivna i njihova kompozicija  $g \circ f: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}^m$

$$\begin{aligned} (g \circ f)(\vec{x}) &= g(f(\vec{x})) \\ &= (g_1(f(\vec{x})), \dots, g_m(f(\vec{x}))) \\ &= ((g_1 \circ f)(\vec{x}), \dots, (g_m \circ f)(\vec{x})), \end{aligned}$$

gdje su  $g_1, \dots, g_m$  rekurzivne kao komponentne funkcije od  $g$ .

3. Ako su  $g: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{Q}$  i  $f: \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}^k$  rekurzivne, tada je rekurzivna i njihova kompozicija  $g \circ f: \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{Q}$ . Naime,  $g$  se može napisati u obliku

$$g(\vec{x}) = (-1)^{a(\vec{x})} \frac{b(\vec{x})}{c(\vec{x})}, \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{N}^k.$$

$$\text{Za } \vec{x} \in \mathbb{N}^n, \text{ slijedi } (g \circ f)(\vec{x}) = (-1)^{a(f(\vec{x}))} \frac{b(f(\vec{x}))}{c(f(\vec{x}))}$$

**Propozicija 1.4.8.** Neka je  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  te neka su  $f_1, f_2: \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{R}$  dvije rekurzivne funkcije. Tada je i funkcija  $f_1 + f_2: \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{R}$  rekurzivna. Nadalje, funkcije  $-f_1, |f_1|: \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{R}$  su rekurzivne.

*Dokaz.* Prema definiciji 1.4.1 postoje rekurzivne funkcije  $F_1, F_2: \mathbb{N}^{n+1} \rightarrow \mathbb{Q}$  tako da vrijedi

$$|f_1(\vec{x}) - F_1(\vec{x}, k)| < 2^{-k}, \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{N}^n, \forall k \in \mathbb{N}.$$

$$|f_2(\vec{x}) - F_2(\vec{x}, k)| < 2^{-k}, \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{N}^n, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Definirajmo funkciju  $\hat{F}(\vec{x}, k) = F_1(\vec{x}, k) + F_2(\vec{x}, k)$ . Računamo

$$\begin{aligned} |(f_1 + f_2)(\vec{x}) - \hat{F}(\vec{x}, k)| &= |f_1(\vec{x}) - F_1(\vec{x}, k) + f_2(\vec{x}) - F_2(\vec{x}, k)| \\ &\leq |f_1(\vec{x}) - F_1(\vec{x}, k)| + |f_2(\vec{x}) - F_2(\vec{x}, k)| \\ &\leq 2 \cdot 2^{-k} \end{aligned}$$

Skoro smo dobili ono što se po definiciji 1.4.1 traži za realnu funkciju da bi bila rekurzivna. Još samo da malo "naštimo". Neka je

$$F(\vec{x}, k) = \hat{F}(\vec{x}, k + 1).$$

Da dokažemo da je ova funkcija rekurzivna koristit ćemo pomoćnu funkciju

$$g: \mathbb{N}^{n+1} \rightarrow \mathbb{N}^{n+1}, g(\vec{x}, k) = (\vec{x}, k + 1).$$

Funkcija  $g$  je rekurzivna u smislu definicije 1.4.6, naime njezine su komponentne funkcije ili inicijalne  $(I_1^{n+1}, \dots, I_n^{n+1})$ , ili kompozicije inicijalnih  $(Sc \circ I_{n+1}^{n+1})$  pa time i rekurzivne. Prema napomeni 1.4.7 je  $F(\vec{x}, k) = (\hat{F} \circ g)(\vec{x}, k)$  rekurzivna kao kompozicija dviju rekurzivnih funkcija. Uvjerimo se još da vrijedi nejednakost (1.13):

$$\begin{aligned} |(f_1 + f_2)(\vec{x}) - F(\vec{x}, k)| &= |(f_1 + f_2)(\vec{x}) - \hat{F}(\vec{x}, k + 1)| \\ &= |f_1(\vec{x}) - F_1(\vec{x}, k + 1) + f_2(\vec{x}) - F_2(\vec{x}, k + 1)| \\ &\leq |f_1(\vec{x}) - F_1(\vec{x}, k + 1)| + |f_2(\vec{x}) - F_2(\vec{x}, k + 1)| \\ &\leq 2 \cdot 2^{-(k+1)} \\ &= 2^{-k} \end{aligned}$$

Našli smo rekurzivnu aproksimaciju funkcije  $f_1 + f_2$ , odnosno pokazali smo da je rekurzivna.

Neka je  $F_1$  rekurzivna aproksimacija od  $f_1$ , tada vrijedi

$$|f_1(\vec{x}) - F_1(\vec{x}, k)| < 2^{-k}, \forall k \in \mathbb{N}, \forall \vec{x} \in \mathbb{N}^k,$$

što je ekvivalentno s

$$|(-f_1(\vec{x})) - (-F_1(\vec{x}, k))| < 2^{-k}, \forall k \in \mathbb{N}, \forall \vec{x} \in \mathbb{N}^k.$$

Funkcija  $-F_1$  je rekurzivna prema 1.3.3, odnosno  $-F_1$  je rekurzivna aproksimacija od  $-f_1$ . Dakle,  $-f_1$  je rekurzivna funkcija. Nadalje, vrijedi

$$||f_1(\vec{x})| - |F_1(\vec{x}, k)|| \leq |f_1(\vec{x}) - F_1(\vec{x}, k)| < 2^{-k}, \forall k \in \mathbb{N}, \forall \vec{x} \in \mathbb{N}^k,$$

odnosno  $|F_1|$  je rekurzivna aproksimacija od  $|f_1|$ . □

**Propozicija 1.4.9.** *Neka su  $f: \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g: \mathbb{N}^m \rightarrow \mathbb{N}^n$  rekurzivne funkcije. Tada je  $f \circ g: \mathbb{N}^m \rightarrow \mathbb{R}$  rekurzivna funkcija.*



*Dokaz.* Prema definiciji realne rekurzivne funkcije slijedi da postoji rekurzivna funkcija  $F: \mathbb{N}^{n+1} \rightarrow \mathbb{Q}$  tako da vrijedi

$$|f(\vec{x}) - F(\vec{x}, k)| < 2^{-k}, \forall \vec{x} \in \mathbb{N}^n, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Dakle, za svaki  $\vec{x} \in \mathbb{N}^m$  i svaki  $k \in \mathbb{N}$  vrijedi

$$|f(g(\vec{x})) - F(g(\vec{x}), k)| < 2^{-k}.$$

Definiramo funkciju  $H: \mathbb{N}^{m+1} \rightarrow \mathbb{Q}$ , na sljedeći način:

$$H(\vec{x}, k) = F(g(\vec{x}), k), \forall \vec{x} \in \mathbb{N}^m, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Dovoljno je pokazati da je  $H$  rekurzivna da bi funkcija  $f \circ g$  bila rekurzivna. Funkcija  $g$  je rekurzivna, pa po definiciji 1.4.6 postoje rekurzivne funkcije  $g_1, \dots, g_n: \mathbb{N}^m \rightarrow \mathbb{N}$  tako da je  $g(\vec{x}) = (g_1(\vec{x}), \dots, g_n(\vec{x}))$ . Sada možemo pisati

$$H = F \circ \Gamma, \Gamma: \mathbb{N}^{m+1} \rightarrow \mathbb{N}^{n+1}, \Gamma(\vec{x}, k) = (g(\vec{x}), k) = (g_1(\vec{x}), \dots, g_n(\vec{x}), k).$$

Funkcija  $\Gamma$  je rekurzivna jer su njezine komponentne funkcije rekurzivne ( $g_1 \circ \Pi, \dots, g_n \circ \Pi$ , gdje je  $\Pi: \mathbb{N}^{m+1} \rightarrow \mathbb{N}^m$  projekcija na prvih  $m$  koordinata, i projekcija na  $m+1$ -koordinatu  $I_{m+1}^{m+1}$ ). Dakle,  $H$  je kompozicija dviju rekurzivnih funkcija, prema napomeni 1.4.7 zaključujemo da je rekurzivna.  $\square$

Do sada smo dokazali neka lijepa svojstva rekurzivnih funkcija, kao npr. zbroj dviju rekurzivnih funkcija nam daje rekurzivnu funkciju. Možemo tako dalje postavljati pitanja vezana uz rekurzivnost. Npr. ako je  $(x_i)$  rekurzivan niz u  $\mathbb{R}$ , mora li skup  $\{i \in \mathbb{N} \mid x_i = 0\}$  biti rekurzivan? Ne mora. Ipak nećemo konstruirati protuprimjer jer nije baš jednostavno. Ako je  $f: \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{R}$  rekurzivna funkcija skup  $\{\vec{x} \in \mathbb{N}^n \mid f(\vec{x}) = 0\}$  ipak ne mora biti rekurzivan. U sljedećem primjeru ćemo pokazati da je za neke rekurzivne funkcije skup svih argumenata za koje je funkcijska vrijednost jednaka nuli, ipak rekurzivan.

**Primjer 1.4.10.** Neka je  $f: \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{Q}$  rekurzivna, tada je i skup  $S = \{\vec{x} \in \mathbb{N}^n \mid f(\vec{x}) = 0\}$  rekurzivan.

Prema definiciji racionalne rekurzivne funkcije,  $f$  zapisujemo u obliku

$$f(\vec{x}) = (-1)^{a(\vec{x})} \frac{b(\vec{x})}{c(\vec{x})}, \forall \vec{x} \in \mathbb{N}^n$$

gdje su  $a, b, c$  rekurzivne funkcije. Tada je

$$S = \{\vec{x} \in \mathbb{N}^n \mid b(\vec{x}) = 0\},$$

odnosno karakteristična funkcija tog skupa je  $\chi_S(\vec{x}) = \overline{sg}(b(\vec{x}))$  kompozicija rekurzivnih funkcija  $\overline{sg}$ ,  $b$ . Dakle, skup  $S$  je rekurzivan skup.



## Poglavlje 2

# Rekurzivno prebrojivi skupovi

**Definicija 2.0.11.** Neka je  $S \subseteq \mathbb{N}^k$ . Kažemo da je  $S$  **rekurzivno prebrojiv skup** ako je  $S = \emptyset$  ili ako postoji rekurzivna funkcija  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^k$  tako da je  $S = f(\mathbb{N})$ .

**Primjer 2.0.12.**  $\mathbb{N}^k$  je rekurzivno prebrojiv skup.

Konstruirajmo rekurzivnu funkciju  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^k$  tako da vrijedi  $f(\mathbb{N}) = \mathbb{N}^k$ . Neka je

$$f(x) = (E(x, 1), \dots, E(x, k)).$$

Ta funkcija je rekurzivna jer su njezine komponentne funkcije rekurzivne (vidi primjer 1.1.8). Pokažimo da je surjekcija. Neka je  $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^k$  proizvoljan. Neka je  $x = p_1^{a_1} \cdot \dots \cdot p_k^{a_k}$ . Tada je  $f(x) = a$ .

**Propozicija 2.0.13.** Neka je  $S \subseteq \mathbb{N}^k$  rekurzivan. Tada je  $S$  rekurzivno prebrojiv.

*Dokaz.* Ako je  $S = \emptyset$  tada je tvrdnja trivijalno ispunjena. Neka je sada  $S \neq \emptyset$ . Tada postoji  $s_0 \in S$ . Neka je  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^k$  rekurzivna surjekcija (postoji prema primjeru 2.0.12). Definirajmo funkciju  $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^k$  sa:

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ako je } x \in T \\ s_0, & \text{inače,} \end{cases}$$

gdje je  $T = \{x \in \mathbb{N} \mid f(x) \in S\}$ . Karakteristična funkcija skupa  $T$  jednaka je  $\chi_T(x) = \chi_S(f(x))$ , dakle rekurzivna kao kompozicija rekurzivnih funkcija. Stoga je  $T$  rekurzivan skup. Nadalje, komponente funkcije od  $g$  su rekurzivne prema propoziciji 1.1.12, a tada je rekurzivna i funkcija  $g$ . Očito je  $g(\mathbb{N}) = S$ . Slijedi da je  $S$  rekurzivno prebrojiv skup.  $\square$

**Propozicija 2.0.14.** Neka su  $k, n \geq 1$ , neka je  $S$  rekurzivno prebrojiv skup u  $\mathbb{N}^k$  te neka je  $h: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}^n$  rekurzivna funkcija. Tada je  $h(S)$  rekurzivno prebrojiv skup.

*Dokaz.* Ako je  $S = \emptyset$  tada je i  $h(S) = \emptyset$ , dakle tvrdnja trivijalno vrijedi.

Neka je sada  $S \neq \emptyset$ . Tada postoji rekurzivna funkcija  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^k$  tako da je  $f(\mathbb{N}) = S$ . Funkcija  $h \circ f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^n$  je rekurzivna i vrijedi  $(h \circ f)(\mathbb{N}) = h(S)$ . Dakle  $h(S)$  je rekurzivno prebrojiv skup.  $\square$

**Teorem 2.0.15.** *Neka su  $k, n \geq 1$ ,  $T \subseteq \mathbb{N}^{k+n}$  rekurzivno prebrojiv skup i  $S \subseteq \mathbb{N}^k$  skup koji ima sljedeće svojstvo: za svaki  $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$  vrijedi*

$$\vec{x} \in S \Leftrightarrow \exists \vec{y} \in \mathbb{N}^n \text{ tako da je } (\vec{x}, \vec{y}) \in T.$$

*Tada je  $S$  rekurzivno prebrojiv.*

*Dokaz.* Definirajmo funkciju  $p$  na sljedeći način

$$p: \mathbb{N}^{k+n} \rightarrow \mathbb{N}^k, p(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+n}) = (x_1, \dots, x_k).$$

Vrijedi:  $S = p(T)$ . Skup  $T$  je rekurzivno prebrojiv, funkcija  $p$  je rekurzivna jer su njezine komponentne funkcije rekurzivne (projekcije na prvih  $n$  koordinata). Prema propoziciji 2.0.14 skup  $S$  je rekurzivno prebrojiv.  $\square$

Iz primjera 1.4.10 smo vidjeli da ako je funkcija  $f: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{Q}$  rekurzivna da je tada nužno rekurzivan i skup  $\{\vec{x} \in \mathbb{N}^k \mid f(\vec{x}) = 0\}$ . Neke od posljedica su

1.  $g, f: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{Q}$  rekurzivne  $\Rightarrow \{\vec{x} \in \mathbb{N}^k \mid f(\vec{x}) = g(\vec{x})\}$  je rekurzivan skup.
2.  $g, f: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$  rekurzivne  $\Rightarrow \{\vec{x} \in \mathbb{N}^k \mid f(\vec{x}) = g(\vec{x})\}$  je rekurzivan skup.

Naime, u prvom slučaju traženi skup možemo zapisati u obliku  $\{\vec{x} \in \mathbb{N}^k \mid f(\vec{x}) - g(\vec{x}) = 0\}$ . Kako je funkcija  $f - g: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{Q}$  rekurzivna kao zbroj dvije rekurzivne funkcije, tada se možemo pozvati na primjer 1.4.10 i reći da je traženi skup rekurzivan.

U drugom slučaju funkciju  $f$  možemo zapisati u obliku  $f(\vec{x}) = (-1)^0 \frac{f(\vec{x})}{1}$  i promatrati kao funkciju  $\mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{Q}$ . Jednako tako promatramo i funkciju  $g$ . Tada za skup iz 2 upotrijebimo tvrdnju 1.

**Lema 2.0.16.** *Neka su  $f, g: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}^n$  rekurzivne funkcije. Tada je*

$$S = \{\vec{x} \in \mathbb{N}^k \mid f(\vec{x}) = g(\vec{x})\}$$

*rekurzivan skup.*

*Dokaz.* Neka su  $f_1, \dots, f_n$  komponentne funkcije od  $f$ , a  $g_1, \dots, g_n$  komponentne funkcije od  $g$ . Tada skup  $S$  možemo prikazati kao presjek konačno mnogo rekurzivnih skupova:

$$S = \{\vec{x} \in \mathbb{N}^k \mid f_1(\vec{x}) = g_1(\vec{x})\} \cap \dots \cap \{\vec{x} \in \mathbb{N}^k \mid f_n(\vec{x}) = g_n(\vec{x})\}.$$

Znamo da je presjek rekurzivnih skupova također rekurzivan prema propoziciji 1.1.10, dakle  $S$  je rekurzivan skup.  $\square$

**Propozicija 2.0.17.** *Neka su  $S$  i  $T$  rekurzivno prebrojivi skupovi. Tada su skupovi  $S \cup T, S \cap T$  rekurzivno prebrojivi.*

*Dokaz.* Ako je barem jedan od skupova  $S$  i  $T$  prazan skup, tada je  $S \cap T = \emptyset$ . Tada je  $S \cap T$  rekurzivno prebrojiv po definiciji.

Neka su  $f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^k$  rekurzivne funkcije tako da vrijedi  $f(\mathbb{N}) = S$  i  $g(\mathbb{N}) = T$ . Definirajmo funkcije  $\alpha, \beta_1, \beta_2: \mathbb{N}^{k+2} \rightarrow \mathbb{N}^k$  sa

$$\begin{aligned}\alpha(\vec{x}, i, j) &= \vec{x} \\ \beta_1(\vec{x}, i, j) &= f(i) \\ \beta_2(\vec{x}, i, j) &= g(j).\end{aligned}$$

Definiramo skupove  $\Gamma_1$  i  $\Gamma_2$  sa

$$\begin{aligned}\Gamma_1 &= \{(\vec{x}, i, j) \in \mathbb{N}^{k+2} \mid \alpha(\vec{x}, i, j) = \beta_1(\vec{x}, i, j)\}, \\ \Gamma_2 &= \{(\vec{x}, i, j) \in \mathbb{N}^{k+2} \mid \alpha(\vec{x}, i, j) = \beta_2(\vec{x}, i, j)\}.\end{aligned}$$

Funkcije  $\alpha, \beta_1, \beta_2$  su rekurzivne, pa prema lemi 2.0.16 slijedi da su skupovi  $\Gamma_1$  i  $\Gamma_2$  rekurzivni. Nadalje, definiramo skup

$$\Gamma = \{(\vec{x}, i, j) \in \mathbb{N}^{k+2} \mid \vec{x} = f(i), \vec{x} = g(j)\}.$$

Vrijedi  $\Gamma = \Gamma_1 \cap \Gamma_2$ , pa je  $\Gamma$  rekurzivan skup kao presjek dva rekurzivna skupa. Dalje zaključujemo

$$\vec{x} \in S \cap T \Leftrightarrow \exists i, j \in \mathbb{N} \text{ takvi da je } (x, i, j) \in \Gamma$$

Skup  $\Gamma$  je rekurzivan, pa je prema 2.0.13 rekurzivno prebrojiv. Dakle, prema teoremu 2.0.15 skup  $S \cap T$  je rekurzivno prebrojiv.

Tvrđnju za  $S \cup T$  dobivamo analogno.  $\square$

**Propozicija 2.0.18.** *Neka su  $k, n \geq 1$ ,  $f: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}^n$  rekurzivna funkcija,  $S \subseteq \mathbb{N}^n$  rekurzivno prebrojiv. Tada je  $f^{-1}(S)$  rekurzivno prebrojiv skup.*

*Dokaz.* Ako je  $S = \emptyset$  tvrdnja je jasna. Pretpostavimo zato  $S \neq \emptyset$ . Kako je  $S$  rekurzivno prebrojiv tada postoji rekurzivna funkcija  $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^n$  tako da je  $S = g(\mathbb{N})$ . Uzmimo proizvoljan  $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ . Vrijedi

$$\vec{x} \in f^{-1}(S) \Leftrightarrow f(\vec{x}) \in S \Leftrightarrow \exists y \in \mathbb{N}, f(\vec{x}) = g(y).$$

Dakle,  $\vec{x} \in f^{-1}(S)$  ako i samo ako postoji  $y \in \mathbb{N}$  tako da je  $f(\vec{x}) = g(y)$ . Definiramo skup  $T = \{(\vec{x}, y) \in \mathbb{N}^{k+n} \mid f(\vec{x}) = g(y)\}$ . Sada tvrdnju možemo zapisati ovako :

$$\vec{x} \in f^{-1}(S) \Leftrightarrow \exists y \in \mathbb{N} \text{ tako da je } (\vec{x}, y) \in T.$$

Želimo pokazati da je skup  $T$  rekurzivno prebrojiv, jer tada ćemo prema teoremu 2.0.15 dobiti da je skup  $f^{-1}(S)$  rekurzivno prebrojiv. No, skup  $T$  je i više od toga, on je rekurzivan. Naime,

$$\begin{aligned} T &= \{(\vec{x}, y) \in \mathbb{N}^{n+1} \mid f(\vec{x}) = g(y)\} \\ &= \{(\vec{x}, y) \in \mathbb{N}^{n+1} \mid F(\vec{x}, y) = G(\vec{x}, y)\}, \end{aligned}$$

gdje su  $F, G: \mathbb{N}^{k+1} \rightarrow \mathbb{N}^n$  definirane sa  $F(\vec{x}, y) = f(\vec{x})$ ,  $G(\vec{x}, y) = g(y)$ . Funkcija  $f$  je rekurzivna pa postoje komponentne funkcije  $f_1, \dots, f_n$  koje su rekurzivne. Također je funkcija  $g$  rekurzivna pa postoje komponentne funkcije  $g_1, \dots, g_n$  koje su rekurzivne. Dakle, možemo pisati

$$F(\vec{x}, y) = (f_1(p(\vec{x}, y)), \dots, f_n(p(\vec{x}, y))),$$

gdje je  $p: \mathbb{N}^{k+1} \rightarrow \mathbb{N}^k$  projekcija na prvih  $k$  koordinata. Dakle,  $F$  je rekurzivna funkcija. Zapišimo sada kako izgleda funkcija  $G$

$$G(\vec{x}, y) = (g_1(I_{k+1}^{k+1}(\vec{x}, y)), \dots, g_n(I_{k+1}^{k+1}(\vec{x}, y))).$$

Zaključujemo da je i  $G$  rekurzivna funkcija. Dakle, skup  $T$  je rekurzivan, pa je i rekurzivno prebrojiv. Prema teoremu 2.0.15 skup  $f^{-1}(S)$  je rekurzivno prebrojiv.  $\square$

Najprije dajemo iskaz i dokaz pomoćne leme koja će nam biti od koristi u dokazu sljedećeg teorema.

**Lema 2.0.19.** *Neka je skup  $T \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$  rekurzivan takav da vrijedi:*

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{N}^k \exists y \in \mathbb{N} \text{ takav da je } (\vec{x}, y) \in T. \quad (2.1)$$

*Tada postoji rekurzivna funkcija  $h: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$  takva da vrijedi*

$$(\vec{x}, h(\vec{x})) \in T, \forall \vec{x} \in \mathbb{N}^k. \quad (2.2)$$

*Dokaz.* Definirajmo funkciju  $h$  na sljedeći način:

$$h(\vec{x}) = \mu y [(\vec{x}, y) \in T].$$

Uočimo da je zbog (2.1) funkcija  $h$  totalna. Nadalje, pripadnost skupu  $T$  možemo izraziti pomoću njegove karakteristične funkcije  $\chi_T$ . Funkciju  $h$  zapisujemo na sljedeći način:

$$h(\vec{x}) = \mu y [\overline{sg}(\chi_T(\vec{x}, y)) = 0].$$

Odavde se jasno vidi da je funkcija  $h$  rekurzivna i da vrijedi (2.2).  $\square$

**Teorem 2.0.20.** *Neka su  $k, n \geq 1$  te  $S \subseteq \mathbb{N}^{k+n}$  rekurzivno prebrojiv skup takav da za svaki  $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$  postoji  $\vec{y} \in \mathbb{N}^n$  tako da je  $(\vec{x}, \vec{y}) \in S$ . Tada postoji rekurzivna funkcija  $f: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}^n$  takva da vrijedi*

$$(\vec{x}, f(\vec{x})) \in S, \forall \vec{x} \in \mathbb{N}^k.$$

*Dokaz.* Jer je  $S$  rekurzivno prebrojiv skup, postoji rekurzivna funkcija  $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^{k+n}$  takva da je  $S = g(\mathbb{N})$ .

Neka je  $p: \mathbb{N}^{k+n} \rightarrow \mathbb{N}^k$  projekcija na prvih  $k$ -koordinata, i  $q: \mathbb{N}^{k+n} \rightarrow \mathbb{N}^n$  projekcija na zadnjih  $n$ -koordinata.

Vrijedi:

$$\begin{aligned} \vec{x} \in \mathbb{N}^k &\Rightarrow \exists \vec{y} \in \mathbb{N}^n \text{ takav da je } (\vec{x}, \vec{y}) \in S \\ &\Rightarrow \exists z \in \mathbb{N} \text{ takav da je } (\vec{x}, \vec{y}) = g(z) \\ &\Rightarrow \vec{x} = p(g(z)). \end{aligned}$$

Dakle,

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{N}^k \exists z \in \mathbb{N} \text{ takav da je } \vec{x} = p(g(z)). \quad (2.3)$$

Definiramo skup  $T = \{(\vec{x}, z) \in \mathbb{N}^{k+1} \mid \vec{x} = p(g(z))\}$ . Prema lemi 2.0.16 taj skup je rekurzivan. Iz (2.3) slijedi:

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{N}^k \exists z \in \mathbb{N} \text{ takav da je } (\vec{x}, z) \in T.$$

Iz pomoćne leme slijedi da postoji rekurzivna funkcija  $h: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$  takva da vrijedi  $(\vec{x}, h(\vec{x})) \in T, \forall \vec{x} \in \mathbb{N}^k$ . Slijedi,

$$\begin{aligned} \vec{x} &= p(g(h(\vec{x}))), \forall \vec{x} \in \mathbb{N}^k \\ \Rightarrow (\vec{x}, q(g(h(\vec{x})))) &= g(h(\vec{x})), \forall \vec{x} \in \mathbb{N}^k \\ \Rightarrow (\vec{x}, q(g(h(\vec{x})))) &\in S, \forall \vec{x} \in \mathbb{N}^k \end{aligned}$$

Definiramo traženu funkciju  $f: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}^n$ , sa  $f(\vec{x}) = q(g(h(\vec{x})))$ . Funkcije  $q, g$  i  $h$  su rekurzivne, pa je i  $f$  rekurzivna.  $\square$

**Lema 2.0.21.** *Neka je  $f: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{Q}$  rekurzivna. Tada je skup  $S = \{\vec{x} \in \mathbb{N}^k \mid f(\vec{x}) > 0\}$  rekurzivan.*

*Dokaz.* Funkcija  $f$  se može zapisati na sljedeći način

$$f(\vec{x}) = (-1)^{a(\vec{x})} \frac{b(\vec{x})}{c(\vec{x})}, \forall \vec{x} \in \mathbb{N}^k,$$

pri čemu su funkcije  $a, b, c: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$  rekurzivne i vrijedi  $c(\vec{x}) \neq 0, \forall \vec{x} \in \mathbb{N}^k$ . Tada vrijedi

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) > 0 &\Leftrightarrow a(\vec{x}) \in 2\mathbb{N}, b(\vec{x}) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow A(\vec{x}) := \overline{sg}(\chi_{2\mathbb{N}}(a(\vec{x}))) = 0, B(\vec{x}) := \overline{sg}(b(\vec{x})) = 0 \end{aligned}$$

Sada skup  $S$  možemo zapisati na ovaj način:

$$S = \{\vec{x} \in \mathbb{N}^k \mid A(\vec{x}) = 0\} \cap \{\vec{x} \in \mathbb{N}^k \mid B(\vec{x}) = 0\}.$$

Funkcija  $A$  je rekurzivna kao kompozicija funkcija  $\overline{sg}$  i  $\chi_{2\mathbb{N}} \circ a$  koje su rekurzivne, a  $B$  je rekurzivna kao kompozicija rekurzivnih funkcija  $\overline{sg}$  i  $b$ . Prema primjeru 1.4.10 skup  $S$  je presjek dva rekurzivna skupa, a prema 1.1.10 takav skup je također rekurzivan.  $\square$

**Teorem 2.0.22.** *Neka je  $f: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{R}$  rekurzivna funkcija. Tada je  $\Omega = \{\vec{x} \in \mathbb{N}^k \mid f(\vec{x}) > 0\}$  rekurzivno prebrojiv skup.*

*Dokaz.* Ako je  $f(\vec{x}) \leq 0, \forall \vec{x} \in \mathbb{N}^k$  tada je  $\Omega$  prazan skup pa je rekurzivno prebrojiv po definiciji.

Funkcija  $f$  je rekurzivna, pa postoji rekurzivna aproksimacija  $F: \mathbb{N}^{k+1} \rightarrow \mathbb{Q}$  takva da je

$$|f(\vec{x}) - F(\vec{x}, l)| < 2^{-l}, \forall \vec{x} \in \mathbb{N}^k, \forall l \in \mathbb{N}. \quad (2.4)$$

Neka je  $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$  takav da vrijedi  $f(\vec{x}) > 0$ . Tada postoji  $l \in \mathbb{N}$  takav da je

$$f(\vec{x}) > 2 \cdot 2^{-l}. \quad (2.5)$$

Iz (2.4) slijedi

$$F(\vec{x}, l) - f(\vec{x}) > -2^{-l}. \quad (2.6)$$

Zbrojimo li nejednakosti (2.5) i (2.6) dobijamo

$$F(\vec{x}, l) > 2^{-l}. \quad (2.7)$$

Obratno, pretpostavimo da vrijedi (2.7) za neke  $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$  i  $l \in \mathbb{N}$ . Iz (2.4) slijedi nejednakost

$$f(\vec{x}) - F(\vec{x}, l) > -2^{-l}. \quad (2.8)$$

Zbrojimo li sada nejednakosti (2.7) i (2.8) dobijamo da je  $f(\vec{x}) > 0$ . Zaključujemo sljedeće

$$\vec{x} \in \Omega \Leftrightarrow f(\vec{x}) > 0 \Leftrightarrow \exists l \in \mathbb{N} \text{ takav da je } F(\vec{x}, l) > 2^{-l} \quad (2.9)$$

Kako je  $F$  rekurzivna funkcija, tada je prema lemi 2.0.21 skup

$$\{(\vec{x}, l) \in \mathbb{N}^{k+1} \mid F(\vec{x}, l) - 2^{-l} > 0\}$$

rekurzivan pa prema tome i rekurzivno prebrojiv. Dakle, iz (2.9) slijedi da je  $\Omega$  rekurzivno prebrojiv skup.  $\square$

**Korolar 2.0.23.** *Neka su  $f, g: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{R}$  rekurzivne funkcije.*

*Tada je skup  $\Omega = \{\vec{x} \in \mathbb{N}^k \mid f(\vec{x}) < g(\vec{x})\}$  rekurzivno prebrojiv.*



*Dokaz.* Definiramo funkciju  $h: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{R}$  sa  $h(\vec{x}) = g(\vec{x}) - f(\vec{x})$ . Dakle,  $h = g + (-1) \cdot f$ . Očito za svaki  $\vec{x}$  vrijedi

$$f(\vec{x}) < g(\vec{x}) \iff h(\vec{x}) > 0.$$

Stoga je

$$\Omega = \{\vec{x} \in \mathbb{N}^k \mid h(\vec{x}) > 0\}.$$

Prema teoremu 2.0.22 skup  $\Omega$  je rekurzivno prebrojiv.

□



## Poglavlje 3

# Izračunljivi metrički prostori

**Definicija 3.0.24.** Neka je  $X$  neprazan skup te  $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija tako da vrijedi sljedeće:

- 1)  $d(x, y) \geq 0, \forall x, y \in X$   
 $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- 2)  $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X$
- 3)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \forall x, y, z \in X.$

Tada za  $d$  kažemo da je **metrika** na skupu  $X$ , a za uređeni par  $(X, d)$  kažemo da je **metrički prostor**.

**Primjer 3.0.25.** 1. Neka je  $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, d(x, y) = |x - y|$ . Tada je  $d$  metrika na  $\mathbb{R}$ .

- a)  $d(x, y) \geq 0$   
 $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow |x - y| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$
- b)  $d(x, y) = |x - y| = |y - x| = d(y, x)$
- c)  $d(x, y) = |x - y| = |x - z + z - y| \leq |x - z| + |z - y| = d(x, z) + d(z, y).$

Za  $d$  kažemo da je **euklidska metrika** na  $\mathbb{R}$ .

2. Neka je  $n \in \mathbb{N}$  te  $d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija definirana sa:

$$d((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

Može se dokazati da je  $d$  metrika na  $\mathbb{R}^n$  (za dokaz vidi [8]). Za  $d$  kažemo da je **euklidska metrika** na  $\mathbb{R}^n$ .

**Definicija 3.0.26.** Neka je  $(X, d)$  metrički prostor,  $x_0 \in X$  i  $r > 0$ . Definiramo

$$K(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) < r\}.$$

Za  $K(x_0, r)$  kažemo da je **otvorena kugla** oko  $x_0$  radijusa  $r$  u metričkom prostoru  $(X, d)$ .

**Primjer 3.0.27.** Neka je  $d$  euklidska metrika na  $\mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$  i  $r > 0$ . Tada je

$$K(x_0, r) = \langle x_0 - r, x_0 + r \rangle.$$

*Naime, za svaki  $x \in \mathbb{R}$  vrijedi*

$$d(x, x_0) < r \Leftrightarrow |x - x_0| < r \Leftrightarrow -r < x - x_0 < r \Leftrightarrow x_0 - r < x < x_0 + r.$$

**Definicija 3.0.28.** Neka je  $(X, d)$  metrički prostor te  $S \subseteq X$ . Kažemo da je  $S$  **gust skup** u metričkom prostoru  $(X, d)$  ako za svaki  $x \in X$  i za svaki  $\epsilon > 0$  postoji  $s \in S$  tako da je  $d(x, s) < \epsilon$ .

Uočimo: ako je  $(X, d)$  metrički prostor, onda je  $X$  gust skup u  $(X, d)$ .

**Primjer 3.0.29.** 1.  $\mathbb{Q}$  je gust skup u metričkom prostoru  $(\mathbb{R}, d)$ , gdje je  $d$  euklidska metrika na  $\mathbb{R}$ . Naime, neka su  $x \in \mathbb{R}$  i  $\epsilon > 0$ . Tada postoji  $q \in \mathbb{Q}$  tako da je  $x < q < x + \epsilon$ , slijedi  $q \in \langle x - \epsilon, x + \epsilon \rangle$ , prema primjeru 3.0.27 je  $d(q, x) < \epsilon$ .

2. Neka je  $n \in \mathbb{N}$  te  $d$  euklidska metrika na  $\mathbb{R}^n$ . Tada je  $\mathbb{Q}^n$  gust skup u metričkom prostoru  $(\mathbb{R}^n, d)$ . Uzmimo  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $\epsilon > 0$ . Slijedi,

$$\text{postoje } q_1, \dots, q_n \in \mathbb{Q} \text{ tako da je } |x_1 - q_1| < \frac{\epsilon}{\sqrt{n}}, \dots, |x_n - q_n| < \frac{\epsilon}{\sqrt{n}}.$$

Neka je  $q = (q_1, \dots, q_n)$ . Tada je  $d(x, q) < \epsilon$ .

**Definicija 3.0.30.** Za metrički prostor  $(X, d)$  kažemo da je **separabilan** ako postoji prebrojiv skup gust u  $(X, d)$ .

Neka je  $(X, d)$  metrički prostor te  $(x_n)$  niz u  $X$ . Kažemo da je  $(x_n)$  **gust niz** u  $(X, d)$  ako je skup  $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  gust u  $(X, d)$ .

Očito vrijedi: metrički prostor  $(X, d)$  je separabilan ako i samo ako postoji gust niz u  $(X, d)$ .

**Definicija 3.0.31.** Neka je  $(X, d)$  metrički prostor te neka je  $\alpha = (\alpha_n)$  gust niz u  $(X, d)$ . Za uređenu trojku  $(X, d, \alpha)$  kažemo da je **izračunljiv metrički prostor** ako je funkcija  $\mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(i, j) \mapsto d(\alpha_i, \alpha_j)$  rekurzivna.

Neka je  $(X, d, \alpha)$  izračunljiv metrički prostor. Neka je  $x \in X$ . Kažemo da je  $x$  **izračunljiva točka** u  $(X, d, \alpha)$  ako postoji rekurzivna funkcija  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  tako da je

$$d(x, \alpha_{f(k)}) < 2^{-k}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Neka je  $(x_i)$  niz u  $X$ . Kažemo da je  $(x_i)$  **izračunljiv niz** u  $(X, d, \alpha)$  ako postoji rekurzivna funkcija  $f: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  tako da je

$$d(x_i, \alpha_{f(i,k)}) < 2^{-k}, \forall (i, k) \in \mathbb{N}^2.$$

Neka je  $(X, d, \alpha)$  izračunljiv metrički prostor. Tada je  $\alpha$  očito izračunljiv niz u  $(X, d, \alpha)$ .

**Primjer 3.0.32.** Neka je  $(\mathbb{R}, d)$  metrički prostor gdje je  $d$  euklidska metrika. Definirajmo funkciju  $\alpha: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$  sa

$$\alpha(i) = (-1)^{E(i,2)} \frac{E(i,0)}{E(i,1)+1}, \forall i \in \mathbb{N}.$$

Funkcija  $\alpha$  je rekurzivna. Pokažimo da je  $\alpha$  surjekcija.

Neka je  $q \in \mathbb{Q}$  proizvoljan. Možemo ga zapisati u obliku

$$q = (-1)^c \frac{a}{b+1}, \text{ za neke } a, b, c \in \mathbb{N}.$$

Tada je  $\alpha(x) = q$  za  $x = 2^a 3^b 5^c$ . Dakle,  $\mathbb{Q} = \text{Im}(\alpha)$ . Skup  $\mathbb{Q}$  je gust u  $(\mathbb{R}, d)$  prema primjeru 3.0.29, odnosno niz  $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$  je gust u  $(\mathbb{R}, d)$ .

Funkcija  $H: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{Q}$ ,  $H(i, j) = \alpha_i - \alpha_j$  je rekurzivna kao zbroj rekurzivnih funkcija  $\alpha \circ I_1^2$  i  $-\alpha \circ I_2^2$ . Tada je funkcija  $\mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{Q}$ ,  $(i, j) \mapsto d(\alpha_i, \alpha_j) = |H(i, j)|$  rekurzivna prema propoziciji 1.3.3, a prema primjeru 1.4.4 je rekurzivna i kao funkcija  $\mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

Dakle,  $(\mathbb{R}, d, \alpha)$  je izračunljiv metrički prostor.

**Propozicija 3.0.33.** Neka je  $(\mathbb{R}, d, \alpha)$  izračunljiv metrički prostor iz primjera 3.0.32. Neka je  $(x_i)$  niz u  $\mathbb{R}$ .

Tada je  $(x_i)$  izračunljiv niz u  $(\mathbb{R}, d, \alpha)$  ako i samo ako je  $(x_i)$  rekurzivan niz u  $\mathbb{R}$ , tj. rekurzivan kao funkcija  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ .

*Dokaz.* Pretpostavimo da je  $(x_i)$  izračunljiv niz u  $(\mathbb{R}, d, \alpha)$ , tada postoji rekurzivna funkcija  $f: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  takva da je

$$d(x_i, \alpha_{f(i,k)}) < 2^{-k}, \forall i, k \in \mathbb{N}.$$

Po definiciji funkcije  $d$  to znači

$$|x_i - \alpha_{f(i,k)}| < 2^{-k}, \forall i, k \in \mathbb{N}. \quad (3.1)$$

Tada je funkcija  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i \mapsto x_i$  rekurzivna.

Pretpostavimo sada da je  $(x_i)$  rekurzivan niz u  $\mathbb{R}$ , tj. da postoji rekurzivna funkcija  $F: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{Q}$  takva da je

$$|x_i - F(i, k)| < 2^{-k}, \forall i, k \in \mathbb{N}. \quad (3.2)$$

Želimo naći rekurzivnu funkciju  $f: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  takvu da vrijedi (3.1). Za sve  $i, k$  postoji  $j \in \mathbb{N}$  takav da je  $F(i, k) = \alpha_j$ . Skup  $\Gamma = \{(i, j, k) \mid F(i, k) = \alpha_j\}$  je rekurzivan.

Znamo: za svaki  $i, k \in \mathbb{N}$  postoji  $j \in \mathbb{N}$  takav da je  $(i, k, j) \in \Gamma$ . Prema teoremu 2.0.20 postoji rekurzivna funkcija  $f: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  takva da vrijedi

$$(i, k, f(i, k)) \in \Gamma, \forall i, k \in \mathbb{N}.$$

Slijedi,  $F(i, k) = \alpha_{f(i, k)}, \forall i, k \in \mathbb{N}$ . Iz (3.2) slijedi (3.1). □

**Napomena 3.0.34.** Neka je  $(X, d, \alpha)$  izračunljiv metrički prostor i  $(x_i)$  izračunljiv niz u  $(X, d, \alpha)$ . Tada je  $x_i$  izračunljiva točka u  $(X, d, \alpha)$  za svaki  $i \in \mathbb{N}$ .

Uočimo i sljedeće:

Ako je  $x \in X$ , onda je  $x$  izračunljiva točka u  $(X, d, \alpha)$  ako i samo ako je niz  $(x, x, x, \dots)$  izračunljiv u  $(X, d, \alpha)$ .

Isto tako, ako je  $x \in \mathbb{R}$ , onda je  $x$  rekurzivan broj ako i samo ako je konstantna funkcija  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i \mapsto x$  rekurzivna.

**Korolar 3.0.35.** Neka je  $(\mathbb{R}, d, \alpha)$  izračunljiv metrički prostor iz primjera 3.0.32. Neka je  $x \in \mathbb{R}$ .

Tada je  $x$  izračunljiva točka u  $(\mathbb{R}, d, \alpha)$  ako i samo ako je  $x$  rekurzivan broj.

**Lema 3.0.36.** Neka je  $f: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija,  $M > 0$  te  $g: \mathbb{N}^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}$  rekurzivna funkcija takva da je  $|f(x) - g(x, i)| < M \cdot 2^{-i}, \forall \vec{x} \in \mathbb{N}^k, \forall i \in \mathbb{N}$ .

Tada je funkcija  $f$  rekurzivna.

*Dokaz.* Kako je  $M > 0$  postoji  $i_0 \in \mathbb{N}$  takav da je  $M \cdot 2^{-i_0} < 1$ . Definiramo funkciju  $g': \mathbb{N}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  sa  $g'(\vec{x}, i) = g(\vec{x}, i + i_0)$ . Tada je

$$|f(\vec{x}) - g'(\vec{x}, i)| = |f(\vec{x}) - g(\vec{x}, i + i_0)| < M \cdot 2^{-(i+i_0)} < 2^{-i}, \forall \vec{x} \in \mathbb{N}^k, \forall i \in \mathbb{N}. \quad (3.3)$$

Prema propoziciji 1.4.9 funkcija  $g'$  je rekurzivna pa postoji rekurzivna funkcija  $G: \mathbb{N}^{n+2} \rightarrow \mathbb{Q}$  takva da vrijedi

$$|g'(\vec{x}, i) - G(\vec{x}, i, j)| < 2^{-j}, \forall \vec{x} \in \mathbb{N}^k, \forall i, j \in \mathbb{N}. \quad (3.4)$$

Zbrojimo li nejednakosti (3.3) i (3.4), po nejednakosti trokuta možemo zaključiti:

$$|f(\vec{x}) - G(\vec{x}, i, j)| < 2^{-j} + 2^{-i}, \forall \vec{x} \in \mathbb{N}^k, \forall i, j \in \mathbb{N}.$$

Definirajmo funkciju  $F: \mathbb{N}^{k+1} \rightarrow \mathbb{Q}$  na sljedeći način:  $F(\vec{x}, i) = G(\vec{x}, i + 1, i + 1)$ . To je rekurzivna aproksimacija funkcije  $f$ , naime

$$\begin{aligned} |f(\vec{x}) - F(\vec{x}, i)| &= |f(\vec{x}) - G(\vec{x}, i + 1, i + 1)| \\ &< 2^{-i+1} + 2^{-i+1} = 2^{-i}, \forall \vec{x} \in \mathbb{N}^k, \forall i \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Dakle, funkcija  $f$  je rekurzivna. □

**Propozicija 3.0.37.** *Neka je  $(X, d, \alpha)$  izračunljiv metrički prostor te neka su  $(x_i)$  i  $(y_j)$  izračunljivi nizovi u  $(X, d, \alpha)$ .*

*Tada je funkcija  $\mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (i, j) \mapsto d(x_i, y_j)$  rekurzivna.*

Iskažimo najprije lemu koja će nam biti od koristi u dokazu ove propozicije.

**Lema 3.0.38.** *Neka je  $(X, d)$  metrički prostor te neka su  $a, a', b, b' \in X$ . Tada vrijedi:*

$$|d(a, b) - d(a', b')| \leq d(a, a') + d(b, b').$$

*Dokaz.* Koristeći nejednakost trokuta dobivamo:

$$\begin{aligned} d(a, b) &\leq d(a, a') + d(a', b) \\ &\leq d(a, a') + d(a', b') + d(b, b') \end{aligned}$$

Iz toga slijedi,

$$d(a, b) - d(a', b') \leq d(a, a') + d(b, b').$$

Zamijenimo li uloge  $a$  i  $a'$  te  $b$  i  $b'$  dobivamo:

$$d(a', b') - d(a, b) \leq d(a, a') + d(b, b').$$

Sve zajedno, vrijedi  $|d(a', b') - d(a, b)| \leq d(a, a') + d(b, b')$ . □

*Dokaz.* propozicije 3.0.37

Nizovi  $(x_i)$ ,  $(y_j)$  su izračunljivi u  $(X, d, \alpha)$ , što znači da postoje rekurzivne funkcije  $f_1, f_2: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  takve da vrijedi

$$\begin{aligned} d(x_i, \alpha_{f_1(i,k)}) &< 2^{-k}, \\ d(y_j, \alpha_{f_2(j,k)}) &< 2^{-k}, \forall i, j, k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Neka su  $i, j, k \in \mathbb{N}$ . Iz leme 3.0.38 slijedi:

$$|d(x_i, y_j) - d(\alpha_{f_1(i,k)}, \alpha_{f_2(j,k)})| < 2 \cdot 2^{-k}.$$

Prema lemi 3.0.36 dovoljno je dokazati da je funkcija

$$\mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (i, j, k) \mapsto d(\alpha_{f_1(i,k)}, \alpha_{f_2(j,k)})$$

rekurzivna. No ova funkcija je rekurzivna prema propoziciji 1.4.9 jer je kompozicija funkcije  $\mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}^2, (i, j, k) \mapsto (f_1(i, k), f_2(j, k))$  i funkcije  $\mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (i, j) \mapsto d(\alpha_i, \alpha_j)$  (koja je rekurzivna po definiciji izračunljivog metričkog prostora).  $\square$

**Propozicija 3.0.39.** *Neka je  $(X, d, \alpha)$  izračunljiv metrički prostor te  $(x_i)$  niz u  $X$ .*

*Tada je  $(x_i)$  izračunljiv niz u  $(X, d, \alpha)$  ako i samo ako je funkcija  $h: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{R}, h(i, j) = d(x_i, \alpha_j)$  rekurzivna.*

*Dokaz.* Ako je  $(x_i)$  izračunljiv niz, onda je funkcija  $h$  rekurzivna prema propoziciji 3.0.37.

Obratno, pretpostavimo da je  $h$  rekurzivna funkcija. Neka su  $i, k \in \mathbb{N}$ . Tada postoji  $j \in \mathbb{N}$  takav da vrijedi  $d(x_i, \alpha_j) < 2^{-k}$ . Dakle, za svake  $i, k \in \mathbb{N}$  postoji  $j \in \mathbb{N}$  takav da je  $(i, k, j) \in S$ , pri čemu je

$$S = \{(i, k, j) \in \mathbb{N}^3 \mid d(x_i, \alpha_j) < 2^{-k}\}.$$

Neka su  $f, g: \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  funkcije definirane s:

$$\begin{aligned} f(i, k, j) &= h(i, j) \\ g(i, k, j) &= 2^{-k} \end{aligned}$$

Funkcija  $f$  je rekurzivna po pretpostavci, a  $g$  je čak rekurzivna kao funkcija  $\mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{Q}$  (jer je  $\mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}, (a, b) \mapsto a^b$  rekurzivna). Prema tome je  $g$  rekurzivna i kao funkcija  $\mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ . Skup  $S$  sada možemo zapisati u ovom obliku

$$S = \{(i, k, j) \in \mathbb{N}^3 \mid f(i, k, j) < g(i, k, j)\},$$

pa iz korolara 2.0.23 slijedi da je  $S$  rekurzivno prebrojiv. Prema teoremu 2.0.20 postoji rekurzivna funkcija  $F: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  takva da je

$$(i, k, F(i, k)) \in S, \forall i, k \in \mathbb{N}.$$

Dakle,

$$d(x_i, \alpha_{f(i,k)}) < 2^{-k}, \forall i, k \in \mathbb{N},$$

odnosno  $(x_i)$  je izračunljiv niz.  $\square$

**Korolar 3.0.40.** *Neka je  $(X, d, \alpha)$  izračunljiv metrički prostor, a izračunljiva točka  $a$  u  $(X, d, \alpha)$  te  $(x_i)$  izračunljiv nizu  $(X, d, \alpha)$ . Tada je funkcija  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, i \mapsto d(a, x_i)$  rekurzivna.*

*Dokaz.* Neka je niz  $(y_j)$  definiran s  $y_j = a, \forall j \in \mathbb{N}$ . Tada je  $(y_j)$  izračunljiv niz pa je funkcija  $\mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (i, j) \mapsto d(y_j, x_i)$  rekurzivna prema propoziciji 3.0.37. Kompozicija ove funkcije s funkcijom  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^2, i \mapsto (i, 0)$  je tražena funkcija. Time je tvrdnja korolara dokazana.  $\square$



## Poglavlje 4

# Strukture izračunljivosti

**Definicija 4.0.41.** Neka je  $(X, d)$  metrički prostor te neka je  $\mathcal{S}$  skup nizova u  $X$  koji ima sljedeća svojstva:

1.  $(x_i), (y_j) \in \mathcal{S}$  povlači da je funkcija  $\mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (i, j) \mapsto d(x_i, y_j)$  rekurzivna.
2. ako je  $(x_j) \in \mathcal{S}$ ,  $f: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  rekurzivna funkcija te  $(y_i)$  niz u  $X$  takav da je

$$d(y_i, x_{f(i,k)}) < 2^{-k}, \forall i, k \in \mathbb{N},$$

onda je  $(y_i) \in \mathcal{S}$ .

Tada za  $\mathcal{S}$  kažemo da je **struktura izračunljivosti** na metričkom prostoru  $(X, d)$ .

**Definicija 4.0.42.** Neka je  $(X, d, \alpha)$  izračunljiv metrički prostor. Označimo sa  $\mathcal{S}_\alpha$  skup svih nizova koji su izračunljivi u  $(X, d, \alpha)$ .

**Propozicija 4.0.43.** Neka je  $(X, d, \alpha)$  izračunljiv metrički prostor.

Tada je  $\mathcal{S}_\alpha$  struktura izračunljivosti na  $(X, d)$ .

*Dokaz.* Svojstvo 1. iz definicije strukture izračunljivosti slijedi iz propozicije 3.0.37. Dokažimo svojstvo 2.

Neka je  $(x_j) \in \mathcal{S}_\alpha$  i neka je  $f: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  rekurzivna funkcija. Pretpostavimo da je  $(y_i)$  niz u  $X$  tako da vrijedi

$$d(y_i, x_{f(i,k)}) < 2^{-k}, \forall i, k \in \mathbb{N}. \quad (4.1)$$

Budući da je  $(x_j)$  izračunljiv niz u  $(X, d, \alpha)$  postoji rekurzivna funkcija  $F: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  takva da vrijedi:

$$d(x_j, \alpha_{F(j,k)}) < 2^{-k}, \forall j, k \in \mathbb{N}.$$

Posebno, za sve  $i, k \in \mathbb{N}$  vrijedi

$$d(x_{f(i,k)}, \alpha_{F(f(i,k),k)}) < 2^{-k}. \quad (4.2)$$

Iz (4.1) i (4.2) slijedi

$$d(y_i, \alpha_{F(f(i,k),k)}) < 2 \cdot 2^{-k}, \forall i, k \in \mathbb{N}. \quad (4.3)$$

Definiramo  $F'$  ovako:

$$F'(i, k) = F(f(i, k + 1), k + 1).$$

Očito je  $F'$  rekurzivna funkcija, a prema (4.3) vrijedi:

$$d(y_i, \alpha_{F'(i,k)}) < 2^{-k}, \forall i, k \in \mathbb{N}.$$

Dakle,  $(y_i) \in \mathcal{S}_\alpha$ . Dokazali smo da je  $\mathcal{S}_\alpha$  struktura izračunljivosti.  $\square$

**Propozicija 4.0.44.** *Neka je  $\mathcal{S}$  struktura izračunljivosti na metričkom prostoru  $(X, d)$ . Neka je  $(x_i) \in \mathcal{S}$ , te neka je  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  rekurzivna funkcija.*

*Tada je  $(x_{f(i)})_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}$ .*

*Dokaz.* Želimo pokazati da postoji  $F: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  rekurzivna funkcija tako da vrijedi

$$d(x_{f(i)}, x_{F(i,k)}) < 2^{-k}, \forall i, k \in \mathbb{N}.$$

Tada će po 2. iz definicije strukture izračunljivosti slijediti da je  $(x_{f(i)})_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}$ . Definiramo  $F$  ovako:

$$F(i, k) = f(i).$$

$F$  je rekurzivna i vrijedi

$$d(x_{f(i)}, x_{F(i,k)}) = 0 < 2^{-k}, \forall i, k \in \mathbb{N}.$$

$\square$

**Definicija 4.0.45.** *Neka je  $(X, d)$  metrički prostor te neka je  $\alpha$  niz u  $X$ . Kažemo da je  $\alpha$  **efektivan separirajući niz** u  $(X, d)$  ako je  $\alpha$  gust u  $(X, d)$  te ako je funkcija  $\mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(i, j) \mapsto d(\alpha_i, \alpha_j)$  rekurzivna.*

*Dakle,  $\alpha$  je efektivan separirajući niz u  $(X, d)$  ako i samo ako je  $(X, d, \alpha)$  izračunljiv metrički prostor.*

**Definicija 4.0.46.** *Neka je  $(X, d)$  metrički prostor te neka su  $\alpha, \beta$  efektivni separirajući nizovi u  $(X, d)$ . Kažemo da su  $\alpha$  i  $\beta$  **ekvivalentni** i pišemo  $\alpha \sim \beta$  ako je  $\alpha$  izračunljiv niz u izračunljivom metričkom prostoru  $(X, d, \beta)$ .*

**Propozicija 4.0.47.** *Neka je  $(X, d)$  metrički prostor te neka su  $\alpha$  i  $\beta$  efektivni separirajući nizovi takvi da je  $\alpha \sim \beta$ .*

*Tada je  $\beta \sim \alpha$ .*

*Dokaz.* Iz pretpostavke da su  $\alpha$  i  $\beta$  izračunljivi nizovi u  $(X, d, \beta)$  slijedi da je funkcija  $\mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $(i, j) \mapsto d(\beta_i, \alpha_j)$  rekurzivna. Prema propoziciji 3.0.39 je  $\beta$  izračunljiv niz u  $(X, d, \alpha)$ . Dakle, vrijedi  $\beta \sim \alpha$ .  $\square$

**Propozicija 4.0.48.** *Neka je  $(X, d)$  metrički prostor te neka su  $\alpha$  i  $\beta$  efektivni separirajući nizovi u  $(X, d)$ .*

*Tada je  $\alpha \sim \beta$  ako i samo ako je  $\mathcal{S}_\alpha = \mathcal{S}_\beta$ .*

*Dokaz.* Pretpostavimo da vrijedi  $\alpha \sim \beta$ . Neka je  $(x_i) \in \mathcal{S}_\alpha$ . Tada je  $(x_i)$  izračunljiv niz u  $(X, d, \alpha)$ , pa postoji rekurzivna funkcija  $F_1: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  takva da je

$$d(x_i, \alpha_{F_1(i,k)}) < 2^{-k}, \forall i, k \in \mathbb{N}.$$

Nadalje,  $\alpha \in \mathcal{S}_\beta$ , a znamo da je  $\mathcal{S}_\beta$  struktura izračunljivosti. Prema svojstvu 2. iz definicije strukture izračunljivosti je  $(x_i) \in \mathcal{S}_\beta$ , tj.  $\mathcal{S}_\alpha \subseteq \mathcal{S}_\beta$ . Zbog prethodne propozicije je  $\beta \sim \alpha$ , odnosno prema upravo dokazanom  $\mathcal{S}_\beta \subseteq \mathcal{S}_\alpha$ , pa slijedi  $\mathcal{S}_\alpha = \mathcal{S}_\beta$ .

Obratno, neka je  $\mathcal{S}_\alpha = \mathcal{S}_\beta$ . Niz  $\alpha$  je izračunljiv u  $(X, d, \alpha)$ , odnosno  $\alpha \in \mathcal{S}_\alpha$ , tj.  $\alpha \in \mathcal{S}_\beta$  a to upravo znači da je  $\alpha$  izračunljiv u  $(X, d, \beta)$ . Dakle  $\alpha \sim \beta$ .  $\square$

**Korolar 4.0.49.** *Neka je  $(X, d)$  metrički prostor. Relacija  $\sim$  je relacija ekvivalencije na skupu svih efektivnih separirajućih nizova u  $(X, d)$ .*

*Dokaz.* Refleksivnost relacije je očita. Simetričnost slijedi iz dokazane propozicije 4.0.47, a tranzitivnost dobijemo iz sljedećeg:

$$\alpha \sim \beta \Rightarrow \mathcal{S}_\alpha = \mathcal{S}_\beta$$

$$\beta \sim \gamma \Rightarrow \mathcal{S}_\beta = \mathcal{S}_\gamma$$

$$\Rightarrow \mathcal{S}_\alpha = \mathcal{S}_\gamma \Rightarrow \alpha \sim \gamma.$$

Zapravo smo sva tri svojstva mogli dobiti iz zadnje propozicije.  $\square$

**Primjer 4.0.50.** *Neka je  $(X, d)$  metrički prostor te neka je  $a \in X$ . Neka je  $(x_i)$  niz u  $X$  definiran s  $x_i = a$  za svaki  $i \in \mathbb{N}$ . Neka je  $\mathcal{S} = \{(x_i)\}$ . Tada je  $\mathcal{S}$  struktura izračunljivosti na  $(X, d)$ .*

*Očito je svojstvo 1. iz definicije strukture izračunljivosti zadovoljeno.*

*Pretpostavimo da je  $(y_i)$  niz u  $X$  te  $f: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  rekurzivna funkcija takva da vrijedi*

$$d(y_i, x_{f(i,k)}) < 2^{-k}, \forall i, k \in \mathbb{N}.$$

*Fiksirajmo  $i \in \mathbb{N}$ . Tada vrijedi*

$$d(y_i, a) < 2^{-k}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

*Stoga je  $d(y_i, a) = 0$ , pa je  $y_i = a$ . Dakle,  $(y_i) = (x_i)$ , pa je  $(y_i) \in \mathcal{S}$ . Time smo dokazali svojstvo 2.*

**Definicija 4.0.51.** Neka je  $(X, d)$  metrički prostor te neka je  $\mathcal{S}$  struktura izračunljivosti na  $(X, d)$ . Kažemo da je  $\mathcal{S}$  **separabilna struktura izračunljivosti** na  $(X, d)$  ako postoji gust niz  $(x_i)$  u  $(X, d)$  takav da je  $(x_i) \in \mathcal{S}$ .

**Propozicija 4.0.52.** Neka je  $(X, d)$  metrički prostor te  $\mathcal{S}$  struktura izračunljivosti na  $(X, d)$ . Tada je  $\mathcal{S}$  separabilna struktura izračunljivosti na  $(X, d)$  ako i samo ako postoji efektivan separirajući niz  $\alpha$  u  $(X, d)$  tako da je  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_\alpha$ .

*Dokaz.* Ako je  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_\alpha$  za neki efektivan separirajući niz  $\alpha$ , onda je  $\alpha \in \mathcal{S}$ , pa je  $\mathcal{S}$  separabilna struktura izračunljivosti.

Obratno, pretpostavimo da je  $\mathcal{S}$  separabilna struktura izračunljivosti, tj. da postoji  $\alpha = (\alpha_i) \in \mathcal{S}$  takav da je  $\alpha$  gust u  $(X, d)$ . Niz  $\alpha$  je efektivan separirajući jer je gust i  $\alpha \in \mathcal{S}$ , pa prema svojstvu 1. iz definicije vrijedi da je funkcija  $\mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (i, j) \mapsto d(\alpha_i, \alpha_j)$  rekurzivna. (Stavili smo  $(x_i) = (\alpha_i), (y_j) = (\alpha_j)$ ).

Dokažimo da je  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_\alpha$ . Neka je  $(x_i) \in \mathcal{S}$ . Znamo da je  $\alpha \in \mathcal{S}$ , pa prema 1. iz definicije strukture izračunljivosti vrijedi da je funkcija

$$\mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (i, j) \mapsto d(x_i, \alpha_j)$$

rekurzivna. Prema propoziciji 3.0.39 slijedi da je  $(x_i)$  izračunljiv niz u  $(X, d, \alpha)$ . Prema to je  $(x_i) \in \mathcal{S}_\alpha$ . Neka je  $(x_i) \in \mathcal{S}_\alpha$ . Tada je  $(x_i)$  izračunljiv niz u  $(X, d, \alpha)$ , tj. postoji rekurzivna funkcija

$$F: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N} \text{ takva da je } d(x_i, \alpha_{F(i,k)}) < 2^{-k}.$$

Kako je  $\alpha \in \mathcal{S}$ , slijedi  $(x_i) \in \mathcal{S}$ . □

**Definicija 4.0.53.** Neka je  $(X, d)$  metrički prostor te neka su  $(x_i), (y_j)$  nizovi u  $X$ . Pišemo  $(x_i) \diamond (y_j)$  ako je funkcija  $\mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (i, j) \mapsto d(x_i, y_j)$  rekurzivna.

Uočimo da je gust niz  $\alpha$  u metričkom prostoru  $(X, d)$  efektivan separirajući ako i samo ako vrijedi  $\alpha \diamond \alpha$ .

Pišemo  $(y_i) \leq (x_i)$  ako postoji rekurzivna funkcija  $F: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  tako da je  $d(y_i, \alpha_{F(i,k)}) < 2^{-k}, \forall i, k \in \mathbb{N}$ .

Uz ovakve oznake, strukturu izračunljivosti  $\mathcal{S}$  na metričkom prostoru  $(X, d)$  možemo definirati kao skup nizova u  $X$  sa sljedećim svojstvima:

1.  $(x_i) \diamond (y_j)$  za sve  $(x_i), (y_j) \in \mathcal{S}$ ,
2.  $(x_i) \in \mathcal{S}$  i  $(y_i) \leq (x_i)$  povlači  $(y_i) \in \mathcal{S}$ .

Nadalje, ako je  $\alpha$  efektivan separirajući niz u metričkom prostoru  $(X, d)$ , onda je  $\mathcal{S}_\alpha = \{(x_i) \mid (x_i) \leq \alpha\}$ .

Ako je  $(X, d)$  metrički prostor koji ima separabilnu strukturu izračunljivosti, onda je  $(X, d)$  separabilan metrički prostor. Naime, ako je  $\mathcal{S}$  separabilna struktura izračunljivosti na  $(X, d)$  onda postoji niz  $(x_i) \in \mathcal{S}$  tako da je  $(x_i)$  gust u  $(X, d)$ .

**Primjer 4.0.54.** Neka je  $X \neq \emptyset$ , te neka je  $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija definirana sa

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}.$$

Tvrdimo da je  $d$  metrika na  $X$ . Lako se provjere svojstva 1. i 2. iz definicije metrike. Provjerimo svojstvo 3.

Neka su  $x, y, z \in X$ . Ako je  $x = y$ , tada je  $d(x, y) = 0$ , pa nejednakost  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  očito vrijedi.

Ako je  $x \neq y$  onda je  $d(x, y) = 1$ , no u tom slučaju vrijedi  $x \neq z$  ili  $y \neq z$ , pa je desna strana nejednakosti sigurno veća ili jednaka od 1.

Za  $d$  kažemo da je **diskretna metrika** na skupu  $X$ .

Pretpostavimo da je  $A$  gust skup u metričkom prostoru  $(X, d)$ . Tvrdimo da je tada  $A = X$ .

Naime, neka je  $x \in X$ . Tada za svaki  $\varepsilon > 0$  postoji  $a \in A$  takav da je  $d(x, a) < \varepsilon$ , posebno i za  $\varepsilon = \frac{1}{2} < 1$  postoji takav  $a$ , ali zbog definicije metrike  $d$  to je istina samo ako je  $a = x$ .

Neka je  $X$  neprebrojiv skup te neka je  $d$  diskretna metrika na  $X$ . Tada, prema prethodnom primjeru, metrički prostor  $(X, d)$  nije separabilan. Posebno,  $(X, d)$  nema separabilnu strukturu izračunljivosti.

Dakle, metrički prostor općenito ne mora imati separabilnu strukturu izračunljivosti, iako prema primjeru 4.0.50 svaki metrički prostor ima strukturu izračunljivosti.

## 4.1 Kardinalnost skupa rekurzivnih brojeva

Za  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  označimo sa  $\mathcal{R}(\mathbb{N}^k, \mathbb{N})$  skup svih rekurzivnih funkcija  $\mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ . Analogno definiramo oznake  $\mathcal{R}(\mathbb{N}^k, \mathbb{Q})$ ,  $\mathcal{R}(\mathbb{N}^k, \mathbb{R})$ . Znamo da je skup svih rekurzivnih funkcija prebrojiv, dakle  $\mathcal{R}(\mathbb{N}^k, \mathbb{N})$  je prebrojiv skup.

Za svaki  $f \in \mathcal{R}(\mathbb{N}^k, \mathbb{Q})$  postoje  $a_f, b_f, c_f \in \mathcal{R}(\mathbb{N}^k, \mathbb{N})$  takvi da je

$$f(x) = (-1)^{a_f(x)} \frac{b_f(x)}{c_f(x)}, \forall x \in \mathbb{N}^k.$$

Funkcija  $\mathcal{R}(\mathbb{N}^k, \mathbb{Q}) \rightarrow \underbrace{\mathcal{R}(\mathbb{N}^k, \mathbb{N}) \times \mathcal{R}(\mathbb{N}^k, \mathbb{N}) \times \mathcal{R}(\mathbb{N}^k, \mathbb{N})}_{(*)}, f \mapsto (a_f, b_f, c_f)$

je očito injekcija. Skup  $(*)$  je prebrojiv, pa je i  $\mathcal{R}(\mathbb{N}^k, \mathbb{Q})$  prebrojiv.

Za svaku  $f \in \mathcal{R}(\mathbb{N}^k, \mathbb{R})$  odaberemo neku rekurzivnu aproksimaciju od  $f$  i označimo je s  $F_f$ . Jasno je da je  $F_f \in \mathcal{R}(\mathbb{N}^{k+1}, \mathbb{Q})$ . Pokažimo da je funkcija

$$\mathcal{R}(\mathbb{N}^k, \mathbb{R}) \mapsto \mathcal{R}(\mathbb{N}^{k+1}, \mathbb{Q}), f \mapsto F_f \quad (4.4)$$

injekcija. Naime, neka je  $f \in \mathcal{R}(\mathbb{N}^k, \mathbb{R})$  i  $x \in \mathbb{N}^k$ . Tada za svaki  $i \in \mathbb{N}$  vrijedi

$$|f(x) - F_f(x, i)| < 2^{-i}.$$

Neka je  $\varepsilon > 0$ . Tada postoji  $i_0 \in \mathbb{N}$  takav da je  $2^{-i_0} < \varepsilon$ . Tada za svaki  $i \geq i_0$  vrijedi

$$|f(x) - F_f(x, i)| < 2^{-i} \leq 2^{-i_0} < \varepsilon.$$

Prema tome zaključujemo  $\lim_{i \rightarrow \infty} F_f(x, i) = f(x)$ .

Uzmimo  $f, g \in \mathcal{R}(\mathbb{N}^k, \mathbb{R})$  takve da vrijedi  $F_f = F_g$ . Tada za svaki  $x \in \mathbb{N}^k$  imamo

$$f(x) = \lim_i F_f(x, i) = \lim_i F_g(x, i) = g(x),$$

dakle  $f(x) = g(x)$ . Prema tome  $f = g$ . Time smo dokazali da je funkcija (4.4) injekcija. Iz toga slijedi da je skup  $\mathcal{R}(\mathbb{N}^k, \mathbb{R})$  prebrojiv.

Neka je  $\mathcal{R}$  skup svih rekurzivnih brojeva. Ako je  $x \in \mathcal{R}$ , onda je funkcija  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i \mapsto x$  (tj. niz  $(x, x, \dots)$ ) rekurzivna prema napomeni 3.0.34. Funkcija  $\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ ,  $x \mapsto (x, x, \dots)$  je očito injekcija, pa slijedi da je  $\mathcal{R}$  prebrojiv skup.

## 4.2 Separabilne strukture izračunljivost

**Definicija 4.2.1.** Neka je  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , neka je  $d$  euklidska metrika na  $\mathbb{R}^n$  te neka je  $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $X \neq \emptyset$ . Tada je  $d|_{X \times X}$  očito metrika na  $X$ . Za  $d|_{X \times X}$  kažemo da je euklidska metrika na  $X$ .

**Primjer 4.2.2.** Skup  $\mathbb{R}$  je neprebrojiv, a  $\mathcal{R}$  prebrojiv. Stoga postoji  $\gamma \in \mathbb{R}$  takav da  $\gamma \notin \mathcal{R}$ . Znamo da je  $x \in \mathcal{R}$  ako i samo ako je  $-x \in \mathcal{R}$ , pa slijedi  $-\gamma \notin \mathcal{R}$ . Stoga možemo pretpostaviti  $\gamma > 0$ .

Neka je  $X = \{0, \gamma\}$  te neka je  $d$  euklidska metrika na  $X$ . Metrički prostor  $(X, d)$  je očito separabilan, no ne postoji separabilna struktura izračunljivosti na  $(X, d)$ . Dokažimo to.

Pretpostavimo suprotno. Tada postoji efektivan separirajući niz  $\alpha$  u  $(X, d)$ . Slijedi

$$Im\alpha = \{0, \gamma\} \quad (4.5)$$

Funkcija  $\mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(i, j) \mapsto d(\alpha_i, \alpha_j)$  je rekurzivna, pa je prema primjeru 1.4.5  $d(\alpha_i, \alpha_j)$  rekurzivan broj za sve  $i, j \in \mathbb{N}$ . Specijalno, to vrijedi i za  $i, j$  takve da je  $\alpha_i = 0$ ,  $\alpha_j = \gamma$  (oni postoje zbog (4.5)). Slijedi,

$$d(0, \gamma) = |0 - \gamma| = \gamma,$$

ali uzeli smo  $\gamma \notin \mathcal{R}$ , odnosno  $d(\alpha_i, \alpha_j)$  nije rekurzivan broj. Kontradikcija.

Dakle, ne postoji separabilna struktura izračunljivosti.

**Primjer 4.2.3.** Neka je  $d$  euklidska metrika na  $\mathbb{R}$ , neka je  $\alpha$  niz iz primjera 3.0.32 te neka je  $\gamma \in \mathbb{R}$  broj koji nije rekurzivan. Definirajmo  $\beta: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  sa  $\beta_i = \alpha_i + \gamma$ . Za sve  $i, j \in \mathbb{N}$  vrijedi

$$d(\beta_i, \beta_j) = |\beta_i - \beta_j| = |\alpha_i - \alpha_j| = d(\alpha_i, \alpha_j).$$

Dakle funkcija  $\mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(i, j) \mapsto d(\beta_i, \beta_j)$  je rekurzivna.

Neka je  $x \in \mathbb{R}$  te  $\varepsilon > 0$ . Budući da je  $\alpha$  gust niz u  $(\mathbb{R}, d)$  postoji  $i \in \mathbb{N}$  tako da vrijedi

$$|(x - \gamma) - \alpha_i| < \varepsilon.$$

Dakle,

$$\begin{aligned} |x - (\alpha_i + \gamma)| &< \varepsilon, \\ \text{tj. } |x - \beta_i| &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Prema tome  $\beta$  je gust niz u  $(\mathbb{R}, d)$ . Pokazali smo da je  $(\mathbb{R}, d, \beta)$  izračunljiv metrički prostor. Imamo da su  $\mathcal{S}_\alpha$  i  $\mathcal{S}_\beta$  dvije separabilne strukture izračunljivosti na  $(\mathbb{R}, d)$ . Pitamo se da li su one jednake.

Budući da je  $\text{Im } \alpha = \mathbb{Q}$  postoji  $i \in \mathbb{N}$  tako da je  $\alpha_i = 0$ . Slijedi da je  $\beta_i = \gamma$ , pa zaključujemo da je  $\gamma$  izračunljiva točka u  $(\mathbb{R}, d, \beta)$ . Stoga je  $(\gamma, \gamma, \dots)$  izračunljiv niz u  $(\mathbb{R}, d, \beta)$ , pa je  $(\gamma, \gamma, \dots) \in \mathcal{S}_\beta$ . No, ovaj niz nije element od  $\mathcal{S}_\alpha$ . Naime, kada bi vrijedilo  $(\gamma, \gamma, \dots) \in \mathcal{S}_\alpha$ , tada bi  $\gamma$  bila izračunljiva točka u  $(\mathbb{R}, d, \alpha)$  pa bi prema korolaru 3.0.35 slijedilo da je  $\gamma$  rekurzivan broj, što je u kontradikciji s izborom od  $\gamma$ . Dakle,  $\mathcal{S}_\alpha \neq \mathcal{S}_\beta$ .

**Definicija 4.2.4.** Neka je  $(X, d)$  metrički prostor te neka je  $\mathcal{S}$  struktura izračunljivosti na  $(X, d)$ . Neka je  $x_0 \in X$ . Kažemo da je  $x_0$  **izračunljiva točka u  $\mathcal{S}$**  ako je konstantan niz  $(x_0, x_0, \dots) \in \mathcal{S}$ .

Neka je  $(X, d, \alpha)$  izračunljiv metrički prostor te  $x_0 \in X$ . Pretpostavimo da je  $x_0$  izračunljiva točka u  $(X, d, \alpha)$ . Tada je  $(x_0, x_0, \dots)$  izračunljiv niz u  $(X, d, \alpha)$ , što znači da je  $(x_0, x_0, \dots) \in \mathcal{S}_\alpha$  pa je  $x_0$  izračunljiva točka u  $\mathcal{S}_\alpha$ .

Obratno, ako je  $x_0$  izračunljiva točka u  $\mathcal{S}_\alpha$ , onda na sličan način zaključujemo da je  $x_0$  izračunljiva točka u  $(X, d, \alpha)$ .

**Propozicija 4.2.5.** Neka je  $\mathcal{S}$  struktura izračunljivosti na metričkom prostoru  $(X, d)$  te neka je  $a \in X$ . Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:

1.  $a$  je izračunljiva točka u  $\mathcal{S}$ ,
2. postoji  $(x_i) \in \mathcal{S}$  tako da je  $a = x_{i_0}$  za neki  $i_0 \in \mathbb{N}$ ,

3. postoje  $(x_i) \in \mathcal{S}$  i rekurzivna funkcija  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  tako da je  $d(a, x_{f(k)}) < 2^{-k}$ , za svaki  $k \in \mathbb{N}$

*Dokaz.* Pretpostavimo da vrijedi 1. Budući da je  $a$  izračunljiva točka u  $\mathcal{S}$  za niz definiran s  $x_i = a, \forall i \in \mathbb{N}$  vrijedi  $(x_i) \in \mathcal{S}$ . Iz ovoga je očito da vrijedi tvrdnja 2.

Pretpostavimo da vrijedi 2. Definirajmo funkciju  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  s  $f(k) = i_0, \forall k \in \mathbb{N}$ . Funkcija  $f$  je rekurzivna te za svaki  $k \in \mathbb{N}$  vrijedi:

$$d(a, x_{f(k)}) = 0 < 2^{-k}.$$

Pretpostavimo da vrijedi 3. Neka je  $(y_i)$  niz u  $X$  definiran s  $y_i = a$ , za svaki  $n \in \mathbb{N}$ . Definiramo funkciju  $F: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  s  $F(i, k) = f(k)$  za sve  $i, k \in \mathbb{N}$ . Očito je  $F$  rekurzivna funkcija. Iz 3. slijedi

$$d(y_i, x_{F(i,k)}) < 2^{-k}, \forall i, k \in \mathbb{N}.$$

Prema svojstvu 2. iz definicije strukture izračunljivosti, slijedi da je  $(y_i) \in \mathcal{S}$ , odnosno  $a$  je izračunljiva točka u  $\mathcal{S}$ .  $\square$

**Definicija 4.2.6.** Ako je  $\mathcal{S}$  struktura izračunljivosti na metričkom prostoru  $(X, d)$  onda sa  $\mathcal{S}^0$  označavamo skup svih izračunljivih točaka u  $\mathcal{S}$ .

**Primjer 4.2.7.** Neka je  $X$  neprebrojiv skup te  $d$  diskretna metrika na  $X$ . Definiramo

$$\mathcal{S} = \{(a, a, \dots) \mid a \in X\}.$$

Tvrdimo da je  $\mathcal{S}$  struktura izračunljivosti na  $(X, d)$ .

Ako su  $(x_i), (y_j) \in \mathcal{S}$  onda je  $\mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (i, j) \mapsto d(x_i, y_j)$  konstantna funkcija s vrijednošću 0 ili 1, pa je stoga rekurzivna.

Nadalje, neka je  $(x_i) \in \mathcal{S}$ ,  $f: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  rekurzivna funkcija te  $(y_i)$  niz u  $X$  takav da je

$$d(y_i, x_{f(i,k)}) < 2^{-k}, \forall i, k \in \mathbb{N}.$$

Tada je

$$y_i = x_{f(i,k)}, \forall i, k \in \mathbb{N},$$

tj.  $(y_i)$  je konstantan niz u  $X$  pa slijedi da je  $(y_i) \in \mathcal{S}$ .

Dakle,  $\mathcal{S}$  je struktura izračunljivosti na  $(X, d)$ . Uočimo da je  $\mathcal{S}$  neprebrojiv skup. Nadalje,  $\mathcal{S}^0 = X$ , dakle i  $\mathcal{S}^0$  je neprebrojiv skup.

**Definicija 4.2.8.** Neka je  $(X, d)$  metrički prostor,  $(x_n)$  niz u  $X$  i  $a \in X$ . Kažemo da niz  $(x_n)$  **konvergira** (ili **teži**) prema  $a$  u metričkom prostoru  $(X, d)$  ako za svaki  $\varepsilon > 0$  postoji  $n_0 \in \mathbb{N}$  tako da je

$$d(x_n, a) < \varepsilon, \forall n \geq n_0.$$

Kažemo još da je  $a$  **limes niza**  $(x_n)$  i pišemo  $x_n \rightarrow a$ .



**Propozicija 4.2.9** (Jedinstvenost limesa niza). *Neka je  $(X, d)$  metrički prostor, neka je  $(x_n)$  niz u  $X$  te neka su  $a, b \in X$  tako da vrijedi  $x_n \rightarrow a$  i  $x_n \rightarrow b$ . Tada je  $a = b$ .*

*Dokaz.* Pretpostavimo suprotno, tj.  $a \neq b$ . Tada je  $d(a, b) > 0$ . Definiramo  $\varepsilon = \frac{d(a, b)}{2}$ . Zbog  $x_n \rightarrow a$  postoji  $n_1 \in \mathbb{N}$  tako da je  $d(x_n, a) < \varepsilon, \forall n \geq n_1$ . Zbog  $x_n \rightarrow b$  postoji  $n_2 \in \mathbb{N}$  tako da je  $d(x_n, b) < \varepsilon, \forall n \geq n_2$ .

Neka je  $n = \max\{n_1, n_2\}$ . Tada vrijedi

$$d(a, b) \leq d(x_n, a) + d(x_n, b) < \varepsilon + \varepsilon = d(a, b).$$

Došli smo do kontradikcije. Prema tome je  $a = b$ . □

**Napomena 4.2.10.** *Neka je  $(X, d)$  metrički prostor,  $(x_n)$  niz u  $X$  te  $a \in X$  točka takva da je  $d(a, x_j) < 2^{-j}, \forall j \in \mathbb{N}$ . Tada  $x_j \rightarrow a$ .*

*Naime, ako je  $\varepsilon > 0$  onda postoji  $j_0 \in \mathbb{N}$  tako da vrijedi  $2^{-j_0} < \varepsilon$ . Tada za svaki  $j \in \mathbb{N}$ ,  $j \geq j_0$  vrijedi*

$$2^{-j} \leq 2^{-j_0} \text{ pa je } 2^{-j} < \varepsilon.$$

*Slijedi  $d(a, x_j) < \varepsilon$ , za svaki  $j \geq j_0$ .*

**Propozicija 4.2.11.** *Neka je  $\mathcal{S}$  separabilna struktura izračunljivosti na metričkom prostoru  $(X, d)$ . Tada je  $\mathcal{S}$  prebrojiv skup. Posebno,  $\mathcal{S}^0$  je prebrojiv skup.*

*Dokaz.* Prema propoziciji 4.0.52 postoji efektivni separirajući niz  $\alpha$  u  $(X, d)$  takav da je  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_\alpha$ . Neka je  $x \in \mathcal{S}$ ,  $x = (x_i)$ . Tada je  $x$  izračunljiv niz u  $(X, d, \alpha)$  pa postoji  $F_x \in \mathcal{R}(\mathbb{N}^2, \mathbb{N})$  takva da je

$$d(x_i, \alpha_{F_x(i, j)}) < 2^{-j}, \forall i, j \in \mathbb{N}.$$

Tvrdimo da je funkcija  $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{R}(\mathbb{N}^2, \mathbb{N})$ ,  $x \mapsto F_x$  injekcija.

Pretpostavimo da su  $x, y \in \mathcal{S}$  takvi da je  $F_x = F_y$ . Neka je  $i \in \mathbb{N}$ . Tada za svaki  $j \in \mathbb{N}$  vrijedi:

$$d(x_i, \alpha_{F_x(i, j)}) < 2^{-j}$$

$$d(y_i, \alpha_{F_y(i, j)}) < 2^{-j}.$$

Prema napomeni niz  $(\alpha_{F_x(i, j)})_{j \in \mathbb{N}}$  teži prema  $x_i$ , analogno  $(\alpha_{F_y(i, j)})_{j \in \mathbb{N}}$  teži prema  $y_i$ . No, ovi nizovi su jednaki pa zbog jedinstvenosti limesa niza slijedi da je  $x_i = y_i$ .

Dakle,  $x_i = y_i$ , za sve  $i \in \mathbb{N}$ , prema tome je  $x = y$ . Time smo dokazali da je funkcija  $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{R}(\mathbb{N}^2, \mathbb{N})$ ,  $x \mapsto F_x$  injekcija.

Skup  $\mathcal{R}(\mathbb{N}^2, \mathbb{N})$  je prebrojiv, pa je i  $\mathcal{S}$  prebrojiv.

Nadalje, funkcija  $\mathcal{S}^0 \rightarrow \mathcal{S}$ ,  $x \mapsto (x, x, \dots)$  je očito injekcija, pa slijedi da je  $\mathcal{S}^0$  prebrojiv skup.

Alternativno,  $\mathcal{S}^0 = \bigcup_{(x_i) \in \mathcal{S}} \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ , pa je  $\mathcal{S}^0$  prebrojiv kao prebrojiva unija prebrojivih skupova. □

**Primjer 4.2.12.** Neka je  $(\mathbb{R}, d)$  metrički prostor gdje je  $d$  euklidska metrika. Neka je  $x \in \mathbb{R}$ . Tada postoji separabilna struktura izračunljivosti  $\mathcal{S}$  na  $(\mathbb{R}, d)$  takva da vrijedi  $x \in \mathcal{S}^0$ .

Neka je  $\alpha$  niz definiran u primjeru 3.0.32. Definiramo niz  $\beta: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  sa  $\beta_i = \alpha_i + x$ . Tada je  $(\mathbb{R}, d, \beta)$  izračunljiv metrički prostor (dokazujemo na isti način kao u primjeru 4.2.3), odnosno  $\mathcal{S}_\beta$  je separabilna struktura izračunljivosti. Kako je  $\alpha_1 = 0$ , tako je  $\beta_1 = x$ . Dakle,  $x \in (\mathcal{S}_\beta)^0$ .

**Primjer 4.2.13.** Neka je  $d$  euklidska metrika na  $[0, 1]$ . Neka je  $\alpha: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$  funkcija definirana s

$$\alpha(i) = \frac{E(i, 0)}{l(E(i, 0) + E(i, 1))},$$

pri čemu je  $l: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $l(x) = \begin{cases} x, & x \geq 1 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ .

Primijetimo da je  $\text{Im } \alpha = \{q \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq q \leq 1\} = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ . Očito je  $\alpha$  rekurzivna funkcija, pa zaključujemo da je  $\alpha$  efektivan separirajući niz u  $([0, 1], d)$ . Stoga je  $\mathcal{S}_\alpha$  separabilna struktura izračunljivosti na  $([0, 1], d)$ .

**Teorem 4.2.14.** Neka je  $d$  euklidska metrika na  $[0, 1]$ . Tada postoji jedinstvena separabilna struktura izračunljivosti na  $([0, 1], d)$ .

*Dokaz.* Neka je  $\alpha$  niz iz primjera 4.2.13. Znamo da je  $\mathcal{S}_\alpha$  separabilna struktura izračunljivosti. Dokažimo da je to jedina separabilna struktura izračunljivosti na  $([0, 1], d)$ .

Pretpostavimo da je  $\mathcal{S}$  separabilna struktura izračunljivosti na  $([0, 1], d)$ . Tada je  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_\beta$  gdje je  $\beta$  efektivan separirajući niz u  $([0, 1], d)$ . Budući da je  $\beta$  gust niz u  $([0, 1], d)$  postoji  $i_0 \in \mathbb{N}$  takav da je

$$d(0, \beta_{i_0}) < \frac{1}{4}, \quad \text{tj.} \quad \beta_{i_0} < \frac{1}{4}.$$

Neka je  $k \in \mathbb{N}$ . Tada postoje  $i, j \in \mathbb{N}$  takvi da je

$$d(0, \beta_i) < \frac{2^{-k}}{4},$$

$$d(1, \beta_j) < \frac{2^{-k}}{4}.$$

Slijedi

$$\beta_i < \frac{2^{-k}}{4}, \tag{4.6}$$

$$1 - \beta_j < \frac{2^{-k}}{4}, \tag{4.7}$$

pa zbrajanjem ovih nejednakosti dobivamo

$$1 + \beta_i - \beta_j < \frac{2^{-k}}{2}$$

iz čega slijedi

$$1 - \frac{2^{-k}}{2} < \beta_j - \beta_i.$$

Stoga je

$$d(\beta_i, \beta_j) = |\beta_i - \beta_j| = \beta_j - \beta_i > 1 - \frac{2^{-k}}{2}.$$

Dakle,  $d(\beta_i, \beta_j) > 1 - \frac{2^{-k}}{2}$ .

Nadalje, iz (4.6) slijedi  $\beta_i \in [0, \frac{1}{4}]$  pa zbog  $\beta_{i_0} \in [0, \frac{1}{4}]$  imamo  $|\beta_i - \beta_{i_0}| < \frac{1}{4}$ , tj.  $(\beta_i - \beta_{i_0}) < \frac{1}{4}$ . Dakle, za svaki  $k \in \mathbb{N}$  postoje  $i, j \in \mathbb{N}$  takvi da je

$$d(\beta_i, \beta_j) > 1 - \frac{2^{-k}}{2} \quad (4.8)$$

$$d(\beta_i, \beta_{i_0}) < \frac{1}{4}. \quad (4.9)$$

Pretpostavimo sada da su  $i, j \in \mathbb{N}$  takvi da vrijedi (4.8) i (4.9).

Tvrdimo da je tada  $d(0, \beta_i) < 2^{-k}$ . Očito ne može vrijediti  $\beta_i, \beta_j \in [0, 1 - \frac{2^{-k}}{2}]$  jer bi u tom slučaju vrijedilo  $d(\beta_i, \beta_j) \leq 1 - \frac{2^{-k}}{2}$ . Stoga se bar jedan od brojeva  $\beta_i$  i  $\beta_j$  nalazi u  $[1 - \frac{2^{-k}}{2}, 1]$ . No,  $\beta_i \notin [1 - \frac{2^{-k}}{2}, 1]$  jer bi u suprotnom slučaju vrijedilo  $\beta_{i_0} < \frac{1}{4} < \frac{1}{2} \leq 1 - \frac{2^{-k}}{2} \leq \beta_i$  što bi povlačilo da je  $d(\beta_{i_0}, \beta_i) \geq \frac{1}{4}$ . Stoga je

$$\beta_j \in [1 - \frac{2^{-k}}{2}, 1]. \quad (4.10)$$

Analogno zaključujemo da ne vrijedi  $\beta_i, \beta_j \in [\frac{2^{-k}}{2}, 1]$ , pa slijedi da se bar jedan od brojeva  $\beta_i, \beta_j$  nalazi u  $[0, \frac{2^{-k}}{2}]$ . No to ne može biti  $\beta_j$  zbog (4.10). Prema tome  $\beta_i \in [0, \frac{2^{-k}}{2}]$ , dakle  $\beta_i < \frac{2^{-k}}{2}$  pa je  $d(0, \beta_i) < 2^{-k}$ .

Definirajmo skup

$$\omega = \{(k, i, j) \mid d(\beta_i, \beta_j) > 1 - \frac{2^{-k}}{2}, d(\beta_i, \beta_{i_0}) < \frac{1}{4}\}.$$

Neka su

$$\omega_1 = \{(k, i, j) \mid d(\beta_i, \beta_j) > 1 - \frac{2^{-k}}{2}\}$$

$$\omega_2 = \{(k, i, j) \mid d(\beta_i, \beta_{i_0}) < \frac{1}{4}\}.$$

Tada je  $\omega = \omega_1 \cap \omega_2$ . Funkcija

$$\mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (k, i, j) \mapsto d(\beta_i, \beta_j)$$

je rekurzivna, a također je rekurzivna i funkcija

$$\mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (k, i, j) \mapsto 1 - \frac{2^{-k}}{2}.$$

Prema korolaru 2.0.23 skup  $\omega_1$  je rekurzivno prebrojiv. Analogno zaključujemo da je  $\omega_2$  rekurzivno prebrojiv. Skup  $\omega$  je rekurzivno prebrojiv kao presjek  $\omega_1$  i  $\omega_2$ .

Za svaki  $k \in \mathbb{N}$  postoje  $i, j \in \mathbb{N}$  takvi da vrijedi (4.8) i (4.9), odnosno za svaki  $k \in \mathbb{N}$  postoje  $i, j \in \mathbb{N}$  takvi da je  $(k, i, j) \in \omega$ . Iz teorema 2.0.20 slijedi da postoje rekurzivne funkcije  $f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  takve da vrijedi

$$(k, f(k), g(k)) \in \omega, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Dokazali smo ranije da (4.8) i (4.9), tj.  $(k, i, j) \in \omega$  povlači  $d(0, \beta_i) < 2^{-k}$ . Stoga vrijedi

$$(k, f(k), g(k)) \in \omega \Rightarrow d(0, \beta_{f(k)}) < 2^{-k}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Dakle, 0 je izračunljiva točka u  $([0, 1], d, \beta)$ . Iz korolara 3.0.40 slijedi da je funkcija

$$\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, i \mapsto d(0, \beta_i)$$

rekurzivna, odnosno  $(\beta_i)$  je rekurzivan niz. Iz ovoga i propozicije 1.4.8 slijedi da je funkcija  $\mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (i, j) \mapsto d(\beta_i, \alpha_j)$  rekurzivna.

Prema korolaru 2.0.23 skup

$$\gamma = \{(i, k, j) \mid d(\beta_i, \alpha_j) < 2^{-k}\}$$

je rekurzivno prebrojiv. Za sve  $i, k \in \mathbb{N}$  postoji  $j \in \mathbb{N}$  takav da je  $(i, k, j) \in \gamma$  (zbog gustoće niza  $\alpha$ ). Prema teoremu 2.0.20 postoji rekurzivna funkcija  $F: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  takva je

$$(i, k, F(i, k)) \in \gamma, \forall i, k \in \mathbb{N}.$$

Tada je  $d(\beta_i, \alpha_{F(i, k)}) < 2^{-k}, \forall i, k \in \mathbb{N}$ , odnosno  $\beta \leq \alpha$ . Stoga je  $\beta \sim \alpha$ , pa iz propozicije 4.0.48 slijedi  $\mathcal{S}_\alpha = \mathcal{S}_\beta$ .

Dakle,  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_\alpha$  i time je tvrdnja dokazana. □

### 4.3 Efektivna potpuna omeđenost

**Definicija 4.3.1.** Neka je  $(X, d)$  metrički prostor te  $S \subseteq X$ . Kažemo da je  $S$  omeđen u metričkom prostoru  $(X, d)$  ako postoje  $x_0 \in X$  i  $r > 0$  takav da je  $S \subseteq K(x_0, r)$ .

Uočimo sljedeće: ako je  $S$  omeđen skup u metričkom prostoru  $(X, d)$  onda za svaki  $x \in X$  postoji  $r > 0$  takav da vrijedi  $S \subseteq K(x, r)$ .

Naime, imamo  $S \subseteq K(x_0, r)$  za neke  $x_0 \in X$  i  $r > 0$ . Ako je  $x \in X$  onda definiramo  $s = d(x, x_0) + r$  te tada vrijedi  $K(x_0, r) \subseteq K(x, s)$ , jer ako je  $a \in K(x_0, r)$  onda je

$$d(a, x) \leq d(a, x_0) + d(x_0, x) < r + d(x_0, x) = s$$

pa je  $a \in K(x, s)$ .

**Propozicija 4.3.2.** Neka je  $(X, d)$  metrički prostor te neka su  $S_1, \dots, S_n$  omeđeni skupovi u  $(X, d)$ . Tada je  $S_1 \cup \dots \cup S_n$  omeđen skup u  $(X, d)$ .

*Dokaz.* Odaberemo  $x_0 \in X$ . Skupovi  $S_1, \dots, S_n$  su omeđeni pa vrijedi

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \exists r_i > 0 \text{ takav da je } S_i \subseteq K(x_0, r_i).$$

Odaberemo  $r = \max\{r_1, \dots, r_n\}$ . Tada je  $S_1 \cup \dots \cup S_n \subseteq K(x_0, r)$ . □

**Definicija 4.3.3.** Za metrički prostor kažemo da je **omeđen** ako je  $X$  omeđen skup u  $(X, d)$ .

**Definicija 4.3.4.** Za metrički prostor  $(X, d)$  kažemo da je **potpuno omeđen** ako za svaki  $\varepsilon > 0$  postoje  $n \in \mathbb{N}$  i  $x_0, \dots, x_n \in X$  takvi da je

$$X = K(x_0, \varepsilon) \cup \dots \cup K(x_n, \varepsilon). \quad (4.11)$$

Uočimo sljedeće: ako je metrički prostor potpuno omeđen, onda je i omeđen. Naime, ako odaberemo bilo koji  $\varepsilon > 0$  onda postoje  $x_0, \dots, x_n \in X$  takvi da vrijedi (4.11) pa prema prethodnoj propoziciji slijedi da je  $X$  omeđen skup.

**Primjer 4.3.5.** Neka je  $X \neq \emptyset$  te neka je  $d$  diskretna metrika na  $X$ . Metrički prostor  $(X, d)$  je omeđen, naime za  $r = 2$  i proizvoljnu točku  $x_0 \in X$  je  $X = K(x_0, 2)$ .

Pretpostavimo sada da je  $X$  beskonačan. Tada  $(X, d)$  nije potpuno omeđen. U suprotnom bi za  $\varepsilon = 1$  postojali  $x_0, \dots, x_n \in X$  takvi da vrijedi

$$X = K(x_0, \varepsilon) \cup \dots \cup K(x_n, \varepsilon) = \{x_0\} \cup \dots \cup \{x_n\}$$

ali to bi značilo da je  $X$  konačan skup, što je nemoguće.

**Lema 4.3.6.** *Neka je  $(X, d)$  metrički prostor,  $x, y \in X$  te  $r > 0$ . Pretpostavimo da je  $y \in K(x, r)$ . Tada je  $K(x, r) \subseteq K(y, 2r)$ .*

*Dokaz.* Neka je  $z \in K(x, r)$  proizvoljna točka. Tada je

$$\begin{aligned} d(z, y) &\leq d(z, x) + d(x, y) < r + r < 2r \\ &\Rightarrow z \in K(y, 2r), \end{aligned}$$

odnosno  $K(x, r) \subseteq K(y, 2r)$ . □

**Propozicija 4.3.7.** *Neka je  $(X, d)$  metrički prostor te  $\alpha = (\alpha_i)$  gust niz u  $(X, d)$ . Tada je  $(X, d)$  potpuno omeđen ako i samo ako za svaki  $\varepsilon > 0$  postoji  $N \in \mathbb{N}$  takav da je  $X = K(\alpha_0, \varepsilon) \cup \dots \cup K(\alpha_N, \varepsilon)$ .*

*Dokaz.* Ako za svaki  $\varepsilon > 0$  postoji takav  $N$  onda je  $(X, d)$  potpuno omeđen.

Obratno, pretpostavimo da je  $(X, d)$  potpuno omeđen. Neka je  $\varepsilon > 0$ . Tada postoje  $n \in \mathbb{N}$  i  $x_0, \dots, x_n \in X$  takvi da je

$$X = K(x_0, \frac{\varepsilon}{2}) \cup \dots \cup K(x_n, \frac{\varepsilon}{2}).$$

Zbog gustoće niza  $\alpha$  postoje  $i_0, \dots, i_n \in \mathbb{N}$  takvi da je

$$\alpha_{i_0} \in K(x_0, \frac{\varepsilon}{2}), \dots, \alpha_{i_n} \in K(x_n, \frac{\varepsilon}{2}),$$

a zbog leme vrijedi

$$K(x_0, \frac{\varepsilon}{2}) \subseteq K(\alpha_{i_0}, \varepsilon), \dots, K(x_n, \frac{\varepsilon}{2}) \subseteq K(\alpha_{i_n}, \varepsilon).$$

Neka je  $N = \max\{i_0, \dots, i_n\}$ . Tada je

$$X = K(\alpha_0, \varepsilon) \cup \dots \cup K(\alpha_N, \varepsilon).$$

□

**Napomena 4.3.8.** *Neka je  $(X, d)$  metrički prostor te niz  $\alpha$  gust u  $(X, d)$ . Tada je  $(X, d)$  potpuno omeđen ako i samo ako za svaki  $k \in \mathbb{N}$  postoji  $N \in \mathbb{N}$  takav da vrijedi*

$$X = K(\alpha_0, 2^{-k}) \cup \dots \cup K(\alpha_N, 2^{-k}).$$

*Ako je  $(X, d)$  potpuno omeđen onda iz prethodne propozicije slijedi da za svaki  $k > 0$  postoji takav  $N$  (uzmemo  $\varepsilon = 2^{-k}$ ).*

Obratno, ako za svaki  $k$  postoji takav  $N$  onda za  $\varepsilon > 0$  odaberemo  $k \in \mathbb{N}$  takav da je  $2^{-k} < \varepsilon$ . Postoji  $N$  takav da je

$$X = K(\alpha_0, 2^{-k}) \cup \dots \cup K(\alpha_N, 2^{-k})$$

pa slijedi

$$X = K(\alpha_0, \varepsilon) \cup \dots \cup K(\alpha_N, \varepsilon),$$

stoga je  $(X, d)$  potpuno omeđen.

Pretpostavimo da je  $(X, d, \alpha)$  izračunljiv metrički prostor takav da je metrički prostor  $(X, d)$  potpuno omeđen. Znamo:

$$\forall k \in \mathbb{N} \exists N \in \mathbb{N} \text{ takav da vrijedi } X = K(\alpha_0, 2^{-k}) \cup \dots \cup K(\alpha_N, 2^{-k}).$$

Pitanje koje se prirodno postavlja je postoji li rekurzivna funkcija  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  takva da je

$$X = K(\alpha_0, 2^{-k}) \cup \dots \cup K(\alpha_{f(k)}, 2^{-k}), \forall k \in \mathbb{N}. \quad (4.12)$$

Ako takva funkcija postoji, onda za izračunljiv metrički prostor  $(X, d, \alpha)$  kažemo da je **efektivno potpuno omeđen**.

**Teorem 4.3.9.** *Neka je  $(X, d)$  metrički prostor te  $\alpha$  i  $\beta$  efektivni separirajući nizovi u  $(X, d)$  takvi da vrijedi  $\alpha \sim \beta$ . Neka je  $(X, d, \alpha)$  efektivno potpuno omeđen. Tada je i  $(X, d, \beta)$  efektivno potpuno omeđen.*

*Dokaz.* Postoji rekurzivna funkcija  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  takva da vrijedi (4.12). Tada je

$$X = K(\alpha_0, \frac{2^{-k}}{2}) \cup \dots \cup K(\alpha_{f(k+1)}, \frac{2^{-k}}{2}), \forall k \in \mathbb{N}.$$

Jer su  $\alpha$  i  $\beta$  efektivni separirajući nizovi slijedi da za svaki  $k \in \mathbb{N}$  postoje  $i_0, \dots, i_{f(k)} \in \mathbb{N}$  takvi da vrijedi

$$\begin{aligned} d(\alpha_0, \beta_{i_0}) &< \frac{2^{-k}}{2} \\ &\dots \\ d(\alpha_{f(k)}, \beta_{i_{f(k)}}) &< \frac{2^{-k}}{2}. \end{aligned}$$

Odnosno, prema lemi 4.3.6 vrijedi

$$\begin{aligned} K(\alpha_0, \frac{2^{-k}}{2}) &\subseteq K(\beta_{i_0}, 2^{-k}) \\ &\dots \\ K(\alpha_{f(k)}, \frac{2^{-k}}{2}) &\subseteq K(\beta_{i_{f(k)}}, 2^{-k}). \end{aligned}$$

Definirajmo  $N = \max\{i_0, \dots, i_{f(k)}\}$ . Slijedi

$$X = K(\beta_0, 2^{-k}) \cup \dots \cup K(\beta_N, 2^{-k}).$$

Iz pretpostavke teorema je  $\alpha \sim \beta$ , odnosno  $\alpha$  je izračunljiv niz u  $(X, d, \beta)$  što povlači postojanje rekurzivne funkcije

$$F: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N} \text{ takve da je } d(\alpha_i, \beta_{F(i,k)}) < 2^{-k}.$$

Neka je definirana funkcija  $g: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $g(i, k) = F(i, k + 1)$ . Ta funkcija je rekurzivna i vrijedi

$$d(\alpha_i, \beta_{g(i,k)}) < \frac{2^{-k}}{2}.$$

Vrijedi

$$\begin{aligned} K(\alpha_0, \frac{2^{-k}}{2}) &\subseteq K(\beta_{g(0,k)}, 2^{-k}) \\ &\vdots \\ K(\alpha_i, \frac{2^{-k}}{2}) &\subseteq K(\beta_{g(i,k)}, 2^{-k}) \\ &\vdots \\ K(\alpha_{f(k+1)}, \frac{2^{-k}}{2}) &\subseteq K(\beta_{g(f(k+1),k)}, 2^{-k}). \end{aligned}$$

Definiramo funkciju  $H: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  sa

$$H(k) = \max\{g(i, k) \mid 0 \leq i \leq f(k + 1)\}.$$

Tada je

$$X = K(\beta_0, 2^{-k}) \cup \dots \cup K(\beta_{H(k)}, 2^{-k}), \forall k \in \mathbb{N}.$$

Treba još pokazati da je funkcija  $H$  rekurzivna. U tu svrhu definiramo funkciju  $\tilde{H}: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  sa

$$\tilde{H}(j, k) = \max\{g(i, k) \mid 0 \leq i \leq j\},$$

a tada je  $H(k) = \tilde{H}(f(k + 1), k)$ . Vrijedi

$$\begin{aligned} \tilde{H}(0, k) &= g(0, k) \\ \tilde{H}(j + 1, k) &= \max\{g(0, k), \dots, g(j + 1, k)\} \\ &= \max\{\tilde{H}(j, k), g(j + 1, k)\} \\ &= G(\tilde{H}(j, k), j, k), \end{aligned}$$



gdje je funkcija  $G: \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}$  definirana sa

$$G(a, j, k) = \max\{a, g(j + 1, k)\}.$$

Dakle,  $\tilde{H}$  je dobivena primitivnom rekurzijom od funkcije  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $k \mapsto g(0, k)$  i funkcije  $G$ . Stoga je  $\tilde{H}$  rekurzivna, odnosno funkcija  $H$  je rekurzivna. Dakle, izračunljiv metrički prostor  $(X, d, \beta)$  je efektivno potpuno omeđen.  $\square$



# Bibliografija

- [1] M. Vuković, *Izračunljivost*, skripta, PMF-MO, Zagreb, 2009.
- [2] Z. Iljazović, *Rekurzivnost lančastih i cirkularno lančastih kontinuuma*, doktorska disertacija, PMF-MO, Zagreb, 2009.
- [3] Z. Iljazović, *Isometries and Computability Structures*, Journal of Universal Computer Science, 16(2010.), 2569-2596.
- [4] Z. Iljazović, L. Validžić *Maximal Computability Structures*, The Bulletin of Symbolic Logic, prihvaćeno za objavu.
- [5] M. B. Pour-El, I. Richards, *Computability in Analysis and Physics*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1989.
- [6] K. Weihrauch, *Computable Analysis*, Springer, Berlin, 2000.
- [7] M. Yasugi, T. Mori, Y. Tsujji, *Effective properties of sets and functions in metric spaces with computability structure*, Theoretical Computer Science, 66:127-138, 1999.
- [8] W. A. Sutherland, *Introduction to metric and topological spaces*, Oxford University Press, 1975.



# Sažetak

U ovom radu smo pojam rekurzivne funkcije proširili na funkcije s realnim vrijednostima. Dokazali smo da su zbroj, apsolutna vrijednost i umnožak rekurzivnih funkcija također rekurzivne funkcije. Definirali smo rekurzivno prebrojive skupove i dokazali na koji način djeluju rekurzivne funkcije na takve skupove. Pojmove izračunljivog metričkog prostora, izračunljive točke i izračunljivog niza smo uveli u trećem poglavlju. Promatrali smo euklidsku metriku  $d$  na  $\mathbb{R}$  te na prirodan način uveli niz  $\alpha$  takav da je  $(\mathbb{R}, d, \alpha)$  izračunljiv metrički prostor. Dokazali smo da je  $x$  izračunljiva točka u  $(\mathbb{R}, d, \alpha)$  ako i samo ako je  $x$  rekurzivan broj.

U četvrtom poglavlju smo definirali što su strukture izračunljivosti, efektivni separirajući nizovi, separabilne strukture izračunljivosti i sl. Dokazali smo da je skup svih rekurzivnih brojeva prebrojiv. Glavni rezultat je teorem u kojem tvrdimo da postoji jedinstvena separabilna struktura izračunljivosti na metričkom prostoru  $([0, 1], d)$ , pri čemu je  $d$  euklidska metrika. Na kraju se smo se dotaknuli pojma omeđenosti u metričkim prostorima te definirali kada je izračunljiv metrički prostor efektivno potpuno omeđen.



# Summary

In this paper, we expanded the notion of a recursive function to the function with real values. We have proven that the sum, the absolute value and the product of the recursive functions is also a recursive function. We introduced the notion of a recursively enumerable set. The preimage and image of a recursively enumerable set under the recursive function is a recursively enumerable set.

In the third chapter we introduced the notions of a computable metric space, a computable point and a computable sequence.

Let  $d$  be the euclidean metric on  $\mathbb{R}$  and  $\alpha$  sequence introduced naturally such that  $(\mathbb{R}, d, \alpha)$  is a computable metric space. We proved that  $x$  is a computable point in  $(\mathbb{R}, d, \alpha)$  if and only if  $x$  is a recursive number.

In the fourth chapter we defined the notion of a computability structure, a effective separating sequence, a separable computability structure etc. We have shown that the set of all recursive numbers is countable. The main result is a theorem in which we claim that there is a unique separable computability structure on the metric space  $([0, 1], d)$ , where  $d$  is the euclidean metric.

Finally we examined boundedness in metric space and defined when a computable metric space is effectively totally bounded.





# Životopis

Zovem se Edita Kulović, rođena sam 08.07.1991. u Doboju, BiH. Osnovnu školu sam završila u Splitu, a također i 3. gimnaziju Split, prirodoslovno – matematičkog programa. Školovanje nastavljam u Zagrebu gdje sam 2014. godine završila Preddiplomski sveučilišni studij matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu. Pri istom fakultetu upisujem Diplomski sveučilišni studij Računarstvo i matematika.