SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Edita Kulović

STRUKTURE IZRAČUNLJIVOSTI

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Zvonko Iljazović

Zagreb, rujan 2016.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

S pojmom izračunljivosti susreli smo se na istoimenom kolegiju gdje smo se bavili s rekurzivnim funkcijama oblika $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, za neki $k \geqslant 1$. U ovom radu proširujemo pojam rekurzivnosti na funkcije s realnim vrijednostima. Također nas zanima na koji način proširiti pojam izračunljivosti na metričke prostore.

U prvom poglavlju se prisjećamo pojma rekurzivne funkcije $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ te dajemo neke primjere takvih funkcija. Dan je pregled teorema i propozicija koji se rade na kolegiju Izračunljivost, a koji su potrebni za daljnje razumijevanje građe u ovom radu. Pojam rekurzivne funkcije proširujemo na funkcije s kodomenama u $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$. Dokazujemo da su zbroj, apsolutna vrijednost i umnožak takvih funkcija također rekurzivne funkcije.

Pojam rekurzivno prebrojivih skupova definiramo u drugom poglavlju. Dokazujemo na koji način djelovanje rekurzivne funkcije utječe na rekurzivno prebrojive skupove. Tako je dokazano da su praslika i slika, po rekurzivnoj funkciji, rekurzivno prebrojivog skupa također rekurzivno prebrojivi skupovi.

Pojmove izračunljivog metričkog prostora, izračunljive točke i izračunljivog niza uvodimo u trećem poglavlju. Promatramo euklidsku metriku d na $\mathbb{R}$ te na prirodan način uvodimo niz α takav da je $(\mathbb{R}, d, \alpha)$ izračunljiv metrički prostor. Dokazujemo da je x izračunljiva točka u $(\mathbb{R}, d, \alpha)$ ako i samo ako je x rekurzivan broj.

U četvrtom poglavlju razrađujemo pojam iz naslova diplomskog rada, dakle definiramo što su strukture izračunljivosti, efektivni separirajući nizovi, separabilne strukture izračunljivosti i sl. Dokazujemo da je skup svih rekurzivnih brojeva prebrojiv, a također i da je skup svih rekurzivnih funkcija $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ prebrojiv. Centralno mjesto u ovom poglavlju ima teorem u kojem se tvrdi da postoji jedinstvena separabilna struktura izračunljivosti na metričkom prostoru $([0,1], d)$, pri čemu je d euklidska metrika. Na kraju se dotičemo pojma omeđenosti u metričkim prostorima te definiramo kada je izračunljiv metrički prostor efektivno potpuno omeđen.

Poglavlje 1

Rekurzivne funkcije s realnim vrijednostima

1.1 Klasična izračunljivost

Definicija 1.1.1. *Funkciju $Z\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiranu sa $Z(x) = 0$ nazivamo **nul-funkcija**.*

*Funkciju $Sc\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiranu sa $Sc(x) = x+1$ nazivamo **funkcija sljedbenika** (eng. successor).*

*Neka je $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ i $k \in \{1,\ldots,n\}$. Funkciju $I^n_k\colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ definiranu sa $I^n_k(x_1,\ldots,x_n) = x_k$ nazivamo **projekcija na k-tu koordinatu**.*

*Funkcije Z, Sc i I^n_k ($n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, k \leqslant n$) nazivamo **inicijalne funkcije**.*

Definicija 1.1.2. *Neka su $k, n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, te $S_1,\ldots,S_n \subseteq \mathbb{N}^k$. Neka su $g_1\colon S_1 \to \mathbb{N},\ldots,g_n\colon S_n \to \mathbb{N}$. Neka je $T \subseteq \mathbb{N}^n$, te $f\colon T \to \mathbb{N}$.*
Definiramo k-mjesnu funkciju h sa:

$$h(\vec{x}) \simeq f(g_1(\vec{x}),\ldots,g_n(\vec{x})). \tag{1.1}$$

*Tada kažemo da je funkcija h definirana pomoću **kompozicije** funkcija $f, g_1,\ldots,g_n$.*

Napomena 1.1.3. *Za funkciju kažemo da je mjesnosti k, $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ ukoliko za njezinu domenu S vrijedi $S \subseteq \mathbb{N}^k$.*

Oznaka $\simeq$ koju smo koristili u (1.1) nam znači da je funkcija h definirana na svim onim $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ za koje definicija ima smisla, odnosno domena te funkcije je

$$S = \{\vec{x} \in S_1 \cap \ldots \cap S_n \mid (g_1(\vec{x}),\ldots,g_n(\vec{x})) \in T\}.$$

Definicija 1.1.4. *Neka je $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $S \subseteq \mathbb{N}^n$, $T \subseteq \mathbb{N}^{n+2}$, $f \colon S \to \mathbb{N}$, $g \colon T \to \mathbb{N}$. Definiramo (n+1)-mjesnu funkciju h sa:*

$$h(0, x_1, \ldots, x_n) \simeq f(x_1, \ldots, x_n) \tag{1.2}$$
$$h(y + 1, x_1, \ldots, x_n) \simeq g(h(y, x_1, \ldots, x_n), y, x_1, \ldots, x_n) \tag{1.3}$$

Za funkciju h kažemo da je dobivena ***primitivnom rekurzijom*** *funkcija f i g.*

Definicija 1.1.5. *Neka je $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te $g \colon \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$. Definiramo*

$$S = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{N}^n \mid \exists y \in \mathbb{N} \text{ tako da je } g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0\}$$

Neka je $f \colon S \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \mu y[\, g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0\,].$$

Pišemo i

$$f(x_1, \ldots, x_n) \simeq \mu y[\, g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0\,]\,,\ \vec{x} \in \mathbb{N}^n. \tag{1.4}$$

Pri tome $\mu y[g(\vec{x}, y) = 0]$ označava najmanji y takav da vrijedi $g(\vec{x}, y) = 0$. Za funkciju f kažemo da je dobivena primjenom ***μ -operatora*** *na funkciju g.*

Napomena 1.1.6. *Funkcija g iz prethodne definicije ne mora biti totalna, naime u (1.4) smo koristili oznaku $\simeq$ koja znači da je funkcija f definirana na svim onim $\vec{x} \in \mathbb{N}^n$ za koje definicija ima smisla. Konkretno, kada je $g \colon S_g \to \mathbb{N}$, $S_g \subsetneq \mathbb{N}^{k+1}$, tada je skup S na kojem je funkcija f definirana jednak*

$$\begin{aligned} S = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{N}^n \mid \exists y \in \mathbb{N} \text{ tako da je } & g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0, \\ & g(x_1, \ldots, x_n, z) \text{ je definirano za sve } z \leqslant y\} \end{aligned}$$

Definicija 1.1.7. *Najmanja klasa funkcija koja sadrži inicijalne funkcije, te je zatvorena za kompoziciju, primitivnu rekurziju i primjenu μ-operatora naziva se klasa* ***parcijalno rekurzivnih funkcija****.*

Za funkciju $f \colon S \to \mathbb{N}$ kažemo da je totalna ukoliko je $S = \mathbb{N}^k$ za neki $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Kažemo da je funkcija ***rekurzivna*** *ukoliko je parcijalno rekurzivna i totalna.*

Primjer 1.1.8. *Sljedeće funkcije su rekurzivne (dokaz se može naći u [1]):*

1. $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $(x, y) \mapsto x + y$,
2. $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $(x, y) \mapsto x \cdot y$,
3. $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $(x, y) \mapsto x \dot{-} y = \begin{cases} 0, & x \leqslant y \\ x - y, & x > y \end{cases}$, *ovu funkciju nazivamo modificirano oduzimanje*

4. $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $(x, y) \mapsto \begin{cases} \lfloor \frac{x}{y} \rfloor, \ y \neq 0 \\ x, \ y = 0 \end{cases}$,

5. $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $(x, y) \mapsto ost(x, y)$, *tj. funkcijska vrijednost u* (x, y) *je ostatak pri dijeljenju* x *sa* y,

6. $p\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $i \mapsto (i+1)$*-vi prost broj,*

7. $E\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $E(x, i) = \begin{cases} \text{eksponent s kojim broj } p_i \text{ ulazi u rastav od} \\ x \text{ na proste faktore, } x \geqslant 1 \\ 0, \ x = 0 \end{cases}$,

8. $sg\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $sg(x) = \begin{cases} 0, \ x = 0 \\ 1, \ x \geqslant 1 \end{cases}$,

9. $\overline{sg}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\overline{sg}(x) = \begin{cases} 1, \ x = 0 \\ 0, \ x \geqslant 1 \end{cases}$,

10. $\varphi\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $\varphi(a, b) = a^b$.

Definicija 1.1.9. *Za skup* $S \subseteq \mathbb{N}^k$ *kažemo da je* ***rekurzivan skup*** *ako je njegova karakteristična funkcija rekurzivna.*

Propozicija 1.1.10. *Neka je* $k \geqslant 1$, *te neka su* S *i* T *rekurzivni podskupovi od* $\mathbb{N}^k$. *Tada su i* S^c, $S \cap T$ *i* $S \cup T$ *također rekurzivni skupovi.*

Propozicija 1.1.11. *Neka su* f, $g\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ *rekurzivne funkcije.*
Tada su rekurzivne i funkcije

$$f + g, f \cdot g\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$$

Propozicija 1.1.12. *Neka su* $n, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. *Neka su* $F_1, \ldots, F_n\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ *rekurzivne funkcije. Neka su* $S_1, \ldots, S_n \subseteq \mathbb{N}^k$ *rekurzivni skupovi tako da za svaki* $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ *postoji točno jedan* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *tako da je* $\vec{x} \in S_i$.
Neka je $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ *funkcija definirana sa:*

$$f(\vec{x}) = \begin{cases} F_1(\vec{x}), \text{ ako je } \vec{x} \in S_1 \\ \quad \ldots \\ F_n(\vec{x}), \text{ ako je } \vec{x} \in S_n \end{cases}$$

Tada je f rekurzivna funkcija.

Dokazi navedenih propozicija se mogu naći u [1].

1.2 Rekurzivne funkcije s cjelobrojnim vrijednostima

Propozicija 1.2.1. *Neka je $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ te neka je $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$. Tada postoje rekurzivne funkcije $a, b\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ tako da je*

$$f(\vec{x}) = (-1)^{a(\vec{x})} b(\vec{x}), \forall \vec{x} \in \mathbb{N}^k \tag{1.5}$$

ako i samo ako postoje rekurzivne funkcije $g, h\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ tako da je

$$f(\vec{x}) = g(\vec{x}) - h(\vec{x}), \forall \vec{x} \in \mathbb{N}^k. \tag{1.6}$$

Dokaz. Pretpostavimo da postoje rekurzivne funkcije $a, b\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ tako da vrijedi (1.5). Definiramo funkcije g i h na sljedeći način:

$$g(\vec{x}) = \begin{cases} b(\vec{x}), & \text{ako je } a(\vec{x}) \text{ paran} \\ 0, & \text{ako je } a(\vec{x}) \text{ neparan} \end{cases}$$

$$h(\vec{x}) = \begin{cases} 0, & \text{ako je } a(\vec{x}) \text{ paran} \\ b(\vec{x}), & \text{ako je } a(\vec{x}) \text{ neparan} \end{cases}$$

Trivijalno se vidi da je funkcija $f'(\vec{x}) = g(\vec{x}) - h(\vec{x})$ jednaka funkciji f.

Prema propoziciji 1.1.12 dovoljno je pokazati da je skup $A = \{\vec{x} \in \mathbb{N}^k \mid a(\vec{x}) \text{ je neparan}\}$ rekurzivan da bi funkcije g i h bile rekurzivne. Karakteristična funkcija skupa A je

$$\chi_A(\vec{x}) = \begin{cases} 1\,, & \text{ako je } a(\vec{x}) \text{ neparan} \\ 0\,, & \text{ako je } a(\vec{x}) \text{ paran} \end{cases}$$

odnosno,

$$\chi_A(\vec{x}) = ost(\, a(\vec{x})\,,\, c_2(I_1^n(\vec{x}))\,), \tag{1.7}$$

gdje je c_2 konstantna funkcija s vrijednošću 2. Iz jednakosti (1.7) se lako vidi da je karakteristična funkcija skupa A rekurzivna jer je dobivena primjenom kompozicije na rekurzivne funkcije ost, a, $c_2 \circ I_1^n$. Dakle, funkcije g i h su rekurzivne.

Pretpostavimo sada da postoje rekurzivne funkcije g, $h\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ tako da je

$$f(\vec{x}) = g(\vec{x}) - h(\vec{x}).$$

Želimo iskazati funkcije a i b pomoću funkcija g i h, a također i pokazati da su rekurzivne. Definirajmo skup $S = \{\vec{x} \in \mathbb{N}^k \mid g(\vec{x}) \geqslant h(\vec{x})\}$, i funkcije a i b na sljedeći način:

$$a(\vec{x}) = \begin{cases} 0\,, & \text{ako je } \vec{x} \in S \\ 1\,, & \text{inače} \end{cases}$$

$$b(\vec{x}) = \begin{cases} g(\vec{x}) \dot{-} h(\vec{x})\,, & \text{ako je } \vec{x} \in S \\ h(\vec{x}) \dot{-} g(\vec{x})\,, & \text{inače} \end{cases}$$

Prema propoziciji 1.1.12 dovoljno je pokazati da je skup S rekurzivan da bi funkcije a i b bile rekurzivne. Karakteristična funkcija skupa S izgleda ovako:

$$\chi_S(\vec{x}) = \overline{sg}(h(\vec{x}) \dot{-} g(\vec{x})),$$

tj. ona je nastala primjenom kompozicije na rekurzivne funkcije $\overline{sg}$ i B, gdje je B nastala kompozicijom modificiranog oduzimanja, h i g. Dakle χ_S je rekurzivna funkcija i S je rekurzivan skup. Za tako definirane funkcije a i b vrijedi (1.5). □

Definicija 1.2.2. *Neka je $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. Za funkciju $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ kažemo da je* ***rekurzivna*** *ako postoje $a, b\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije tako da se f može zapisati u obliku:*

$$f(\vec{x}) = (-1)^{a(\vec{x})} b(\vec{x}),\ \forall \vec{x} \in \mathbb{N}^k.$$

Uočimo da je prema propoziciji 1.2.1 funkcija f rekurzivna ako i samo ako postoje funkcije $g, h\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ koje su rekurzivne tako da je

$$f(\vec{x}) = g(\vec{x}) - h(\vec{x}), \forall \vec{x} \in \mathbb{N}^k.$$

Propozicija 1.2.3. *Neka su $f_1, f_2\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ rekurzivne funkcije. Tada su rekurzivne i sljedeće funkcije*

$$f_1 + f_2\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z} \tag{1.8}$$

$$f_1 \cdot f_2\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z} \tag{1.9}$$

Dokaz. Budući su zapisi (1.5) i (1.6) ekvivalentni koristiti ćemo onaj koji je pogodniji za dokazivanje ove propozicije.

Funkcije f_1 i f_2 su rekurzivne pa prema propoziciji 1.2.1 postoje $g_1, h_1\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ i $g_2, h_2\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ koje su rekurzivne tako da je:

$$f_1 = g_1 - h_1, \qquad f_2 = g_2 - h_2.$$

Dalje raspisujemo:

$$\begin{aligned}(f_1 + f_2)(\vec{x}) &= f_1(\vec{x}) + f_2(\vec{x})\\ &= g_1(\vec{x}) - h_1(\vec{x}) + g_2(\vec{x}) - h_2(\vec{x})\\ &= (g_1(\vec{x}) + g_2(\vec{x})) - (h_1(\vec{x}) + h_2(\vec{x}))\end{aligned}$$

Kako su g_1, g_2 rekurzivne, tako je i njihov zbroj $g_1 + g_2\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija. Analogno, zaključujemo da je $h_1 + h_2\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija.
Označimo sa $g(\vec{x}) = g_1(\vec{x}) + g_2(\vec{x})$, i $h(\vec{x}) = h_1(\vec{x}) + h_2(\vec{x})$. Tada je $f_1 + f_2 = g - h$.

Zapisali smo $f_1 + f_2$ u obliku (1.6), pri čemu su g i h rekurzivne, prema tome $f_1 + f_2$ je rekurzivna funkcija.

Za drugi dio tvrdnje koristit ćemo zapis (1.5). Dakle,

$$f_1(\vec{x}) = (-1)^{a_1(\vec{x})} b_1(\vec{x})$$

$$f_2(\vec{x}) = (-1)^{a_2(\vec{x})} b_2(\vec{x}),$$

gdje su $a_1, b_1, a_2, b_2 \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije. Raspisujemo,

$$\begin{aligned}(f_1 \cdot f_2)(\vec{x}) &= (-1)^{a_1(\vec{x})} b_1(\vec{x}) \cdot (-1)^{a_2(\vec{x})} b_2(\vec{x}) \\ &= (-1)^{a_1(\vec{x})+a_2(\vec{x})} b_1(\vec{x}) b_2(\vec{x})\end{aligned}$$

Funkcija $a : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, $a(\vec{x}) = a_1(\vec{x}) + a_2(\vec{x})$ je rekurzivna, a također i $b : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, $b(\vec{x}) = b_1(\vec{x}) \cdot b_2(\vec{x})$. Dakle,

$$(f_1 \cdot f_2)(\vec{x}) = (-1)^{a(\vec{x})} b(\vec{x})$$

je rekurzivna funkcija. □

1.3 Rekurzivne funkcije s racionalnim vrijednostima

Definicija 1.3.1. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Za funkciju $f \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ kažemo da je* ***rekurzivna*** *ako postoje rekurzivne funkcije $a, b, c \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, pri čemu je $c(\vec{x}) \neq 0$, $\forall \vec{x} \in \mathbb{N}^k$, tako da se f može zapisati u obliku:*

$$f(\vec{x}) = (-1)^{a(\vec{x})} \frac{b(\vec{x})}{c(\vec{x})}, \ \forall \vec{x} \in \mathbb{N}^k. \tag{1.10}$$

Propozicija 1.3.2. *Neka su $f_1, f_2 \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivne funkcije. Tada su rekurzivne i sljedeće funkcije*

$$\begin{aligned} f_1 + f_2 &\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q} \\ f_1 \cdot f_2 &\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}\end{aligned}$$

Dokaz. Kako je f_1 rekurzivna funkcija, postoje rekurzivne funkcije $a_1, b_1, c_1 \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je $c_1(\vec{x}) \neq 0$, i

$$f_1(\vec{x}) = (-1)^{a_1(\vec{x})} \frac{b_1(\vec{x})}{c_1(\vec{x})}, \ \forall \vec{x} \in \mathbb{N}^k.$$

Jednako zaključujemo i za funkciju f_2 i zapisujemo je u obliku:

$$f_2(\vec{x}) = (-1)^{a_2(\vec{x})} \frac{b_2(\vec{x})}{c_2(\vec{x})}, \ \forall \vec{x} \in \mathbb{N}^k.$$

Neka su definirane funkcije $P_1, P_2 \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ na sljedeći način:

$$P_1(\vec{x}) = (-1)^{a_1(\vec{x})} b_1(\vec{x}) \cdot c_2(\vec{x}),$$
$$P_2(\vec{x}) = (-1)^{a_2(\vec{x})} b_2(\vec{x}) \cdot c_1(\vec{x}).$$

Prema propoziciji 1.2.3 P_1 je rekurzivna funkcija kao umnožak $(-1)^{a_1(\vec{x})} b_1(\vec{x})$ i $c_2(\vec{x})$. Analogno zaključujemo da je P_2 rekurzivna. Pišemo,

$$(f_1 + f_2)(\vec{x}) = \tfrac{P_1(\vec{x}) + P_2(\vec{x})}{c_1(\vec{x}) \cdot c_2(\vec{x})},$$

Dakle, u brojniku se nalazi zbroj rekurzivnih funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$, i prema 1.2.3 to je rekurzivna funkcija. Prema propoziciji 1.1.11 zaključujemo da se u nazivniku nalazi rekurzivna funkcija kao umnožak dviju rekurzivnih funkcija $c_1, c_2 \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$. Sve zajedno $f_1 + f_2 \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ je rekurzivna funkcija.

Pogledajmo raspis funkcije za drugu tvrdnju:

$$(f_1 \cdot f_2)(\vec{x}) = (-1)^{a_1(\vec{x})} \tfrac{b_1(\vec{x})}{c_1(\vec{x})} \cdot (-1)^{a_2(\vec{x})} \tfrac{b_2(\vec{x})}{c_2(\vec{x})} \tag{1.11}$$
$$= (-1)^{(a_1(\vec{x}) + a_2(\vec{x}))} \tfrac{b_1(\vec{x}) \cdot b_2(\vec{x})}{c_1(\vec{x}) \cdot c_2(\vec{x})} \tag{1.12}$$

Definirajmo

$$a(\vec{x}) = a_1(\vec{x}) + a_2(\vec{x}),$$
$$b(\vec{x}) = b_1(\vec{x}) \cdot b_2(\vec{x}),$$
$$c(\vec{x}) = c_1(\vec{x}) \cdot c_2(\vec{x}).$$

Prema propoziciji 1.1.11 su navedene funkcije rekurzivne kao funkcije $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$. Dakle, zaključujemo da je funkcija $f_1 \cdot f_2 \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$,

$$(f_1 \cdot f_2)(\vec{x}) = (-1)^{a(\vec{x})} \tfrac{b(\vec{x})}{c(\vec{x})}, \ \forall \vec{x} \in \mathbb{N}^k.$$

rekurzivna. □

Sljedeća propozicija je dana bez dokaza jer se njezina istinitost lako vidi.

Propozicija 1.3.3. *Ako je $f \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivna, tada su rekurzivne i funkcije $-f$, $|f| \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$.*

1.4 Rekurzivne funkcije s realnim vrijednostima

Definicija 1.4.1. *Za $x \in \mathbb{R}$ kažemo da je **rekurzivan broj** ako postoji $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ rekurzivna funkcija tako da vrijedi*

$$|x - f(x)| < 2^{-k}, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

*Za niz $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ realnih brojeva kažemo da je **rekurzivan** ako postoji rekurzivna funkcija $F\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{Q}$ tako da je*

$$|x_i - F(i,k)| < 2^{-k}, \ \forall (i,k) \in \mathbb{N}^2.$$

Primjer 1.4.2. *Neka je $x \in \mathbb{R}$ rekurzivan broj. Tada je i broj $-x$ rekurzivan.*

Naime, iz $|x - f(x)| < 2^{-k}$ slijedi $|(-x) - (-f(x))| < 2^{-k}$ odakle direktno slijedi tvrdnja.

Definicija 1.4.3. *Neka je $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. Za $f\colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{R}$ kažemo da je **rekurzivna funkcija** ako postoji rekurzivna funkcija $F\colon \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{Q}$ tako da je*

$$|f(\vec{x}) - F(\vec{x},k)| < 2^{-k}, \ \forall \vec{x} \in \mathbb{N}^n, \ \forall k \in \mathbb{N}. \tag{1.13}$$

*Za funkciju F kažemo da je **rekurzivna aproksimacija funkcije** f.*

Primjer 1.4.4. *Svaka rekurzivna funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$, $k \geqslant 1$ je rekurzivna i kao funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$.*

Naime, stavimo $F(\vec{x},i) = f(x)$. Dobili smo $|\ f(x) - F(x,i)\ | = 0 < 2^{-i}$. Slobodnijim riječima bismo rekli: kada bismo rekurzivnu funkciju $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ gledali kao funkciju $\mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ njezina rekurzivna aproksimacija je ona sama.

Primjer 1.4.5. *Ako je $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ rekurzivna funkcija tada je $f(\vec{x})$ rekurzivan broj za svaki $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$.*

Naime, neka je $F\colon \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ rekurzivna aproksimacija funkcije f. Neka je za svaki $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ definirana funkcija $H\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, $H(i) = F(x,i), \forall i \in \mathbb{N}$. Funkcija H je rekurzivna i vrijedi

$$|f(\vec{x}) - H(i)| < 2^{-i}.$$

Time je tvrdnja dokazana.

Definicija 1.4.6. *Neka je $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ funkcija takva da vrijedi*

$$f(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), \dots, f_n(\vec{x}))\,, \ \forall \vec{x} \in \mathbb{N}^k.$$

*Za $f_1, \dots, f_n\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ kažemo da su **komponentne funkcije** od f. Funkcija f je **rekurzivna** ukoliko su rekurzivne njezine komponentne funkcije $f_1, \dots, f_n$.*

Napomena 1.4.7. *Neke od činjenica koje direktno proizlaze iz gornje definicije su nabrojene u ovoj napomeni, a biti će nam od koristi pri dokazivanju nekih budućih propozicija.*

1. *Ako su* $g\colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ *i* $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ *rekurzivne, tada je rekurzivna i njihova kompozicija* $g \circ f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$

$$(g \circ f)(\vec{x}) = g(f(\vec{x})) = g(f_1(\vec{x}), \dots, f_n(\vec{x})), \tag{1.14}$$

   gdje su $f_1, \dots, f_n$ *rekurzivne kao komponentne funkcije od* f.

2. *Ako su* $g\colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}^m$ *i* $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ *rekurzivne, tada je rekurzivna i njihova kompozicija* $g \circ f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^m$

$$\begin{aligned}(g \circ f)(\vec{x}) &= g(f(\vec{x})) \\ &= (g_1(f(\vec{x})), \dots, g_m(f(\vec{x}))) \\ &= ((g_1 \circ f)(\vec{x}), \dots, (g_m \circ f)(\vec{x}))\,,\end{aligned}$$

   gdje su $g_1, \dots, g_m$ *rekurzivne kao komponentne funkcije od* g.

3. *Ako su* $g\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ *i* $f\colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}^k$ *rekurzivne, tada je rekurzivna i njihova kompozicija* $g \circ f\colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{Q}$*. Naime,* g *se može napisati u obliku*

$$g(\vec{x}) = (-1)^{a(\vec{x})} \frac{b(\vec{x})}{c(\vec{x})}, \ \forall \vec{x} \in \mathbb{N}^k.$$

   Za $\vec{x} \in \mathbb{N}^n$*, slijedi* $(g \circ f)(\vec{x}) = (-1)^{a(f(\vec{x}))} \frac{b(f(\vec{x}))}{c(f(\vec{x}))}$

Propozicija 1.4.8. *Neka je* $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ *te neka su* $f_1,\ f_2\colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{R}$ *dvije rekurzivne funkcije. Tada je i funkcija* $f_1 + f_2\colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{R}$ *rekurzivna. Nadalje, funkcije* $-f_1, |f_1|\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$ *su rekurzivne.*

Dokaz. Prema definiciji 1.4.1 postoje rekurzivne funkcije $F_1,\ F_2\colon \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{Q}$ tako da vrijedi

$$|f_1(\vec{x}) - F_1(\vec{x}, k)| < 2^{-k}, \ \forall \vec{x} \in \mathbb{N}^n, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$
$$|f_2(\vec{x}) - F_2(\vec{x}, k)| < 2^{-k}, \ \forall \vec{x} \in \mathbb{N}^n, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Definirajmo funkciju $\hat{F}(\vec{x}, k) = F_1(\vec{x}, k) + F_2(\vec{x}, k)$. Računamo

$$\begin{aligned}|(f_1 + f_2)(\vec{x}) - \hat{F}(\vec{x}, k)| &= |f_1(\vec{x}) - F_1(\vec{x}, k) + f_2(\vec{x}) - F_2(\vec{x}, k)| \\ &\leqslant |f_1(\vec{x}) - F_1(\vec{x}, k)| + |f_2(\vec{x}) - F_2(\vec{x}, k)| \\ &\leqslant 2 \cdot 2^{-k}\end{aligned}$$

Skoro smo dobili ono što se po definiciji 1.4.1 traži za realnu funkciju da bi bila rekurzivna. Još samo da malo "naštimamo". Neka je

$$F(\vec{x}, k) = \hat{F}(\vec{x}, k + 1).$$

Da dokažemo da je ova funkcija rekurzivna koristit ćemo pomoćnu funkciju

$$g\colon \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}^{n+1},\ g(\vec{x}, k) = (\vec{x}, k + 1).$$

Funkcija g je rekurzivna u smislu definicije 1.4.6, naime njezine su komponentne funkcije ili inicijalne ($I_1^{n+1}, \dots, I_n^{n+1}$), ili kompozicije inicijalnih ($Sc \circ I_{n+1}^{n+1}$) pa time i rekurzivne. Prema napomeni 1.4.7 je $F(\vec{x}, k) = (\hat{F} \circ g)(\vec{x}, k)$ rekurzivna kao kompozicija dviju rekurzivnih funkcija. Uvjerimo se još da vrijedi nejednakost (1.13):

$$\begin{aligned}
|(f_1 + f_2)(\vec{x}) - F(\vec{x}, k)| &= |(f_1 + f_2)(\vec{x}) - \hat{F}(\vec{x}, k + 1)| \\
&= |f_1(\vec{x}) - F_1(\vec{x}, k + 1) + f_2(\vec{x}) - F_2(\vec{x}, k + 1)| \\
&\leqslant |f_1(\vec{x}) - F_1(\vec{x}, k + 1)| + |f_2(\vec{x}) - F_2(\vec{x}, k + 1)| \\
&\leqslant 2 \cdot 2^{-(k+1)} \\
&= 2^{-k}
\end{aligned}$$

Našli smo rekurzivnu aproksimaciju funkcije $f_1 + f_2$, odnosno pokazali smo da je rekurzivna.

Neka je F_1 rekurzivna aproksimacija od f_1, tada vrijedi

$$|f_1(\vec{x}) - F_1(\vec{x}, k)| < 2^{-k},\ \forall k \in \mathbb{N}, \forall \vec{x} \in \mathbb{N}^k,$$

što je ekvivalentno s

$$|(-f_1(\vec{x})) - (-F_1(\vec{x}, k))| < 2^{-k},\ \forall k \in \mathbb{N}, \forall \vec{x} \in \mathbb{N}^k.$$

Funkcija $-F_1$ je rekurzivna prema 1.3.3, odnosno $-F_1$ je rekurzivna aproksimacija od $-f_1$. Dakle, $-f_1$ je rekurzivna funkcija. Nadalje, vrijedi

$$||f_1(\vec{x})| - |F_1(\vec{x}, k)|| \leqslant |f_1(\vec{x}) - F_1(\vec{x}, k)| < 2^{-k},\ \forall k \in \mathbb{N}, \forall \vec{x} \in \mathbb{N}^k,$$

odnosno $|F_1|$ je rekurzivna aproksimacija od $|f_1|$. □

Propozicija 1.4.9. *Neka su $f\colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{R}$, $g\colon \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}^n$ rekurzivne funkcije. Tada je $f \circ g\colon \mathbb{N}^m \to \mathbb{R}$ rekurzivna funkcija.*

Dokaz. Prema definiciji realne rekurzivne funkcije slijedi da postoji rekurzivna funkcija $F\colon \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{Q}$ tako da vrijedi

$$|f(\vec{x}) - F(\vec{x}, k)| < 2^{-k}, \forall \vec{x} \in \mathbb{N}^n,\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Dakle, za svaki $\vec{x} \in \mathbb{N}^m$ i svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$|f(g(\vec{x})) - F(g(\vec{x}), k)| < 2^{-k}.$$

Definiramo funkciju $H\colon \mathbb{N}^{m+1} \to \mathbb{Q}$, na sljedeći način:

$$H(\vec{x}, k) = F(g(\vec{x}), k),\ \forall \vec{x} \in \mathbb{N}^m,\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Dovoljno je pokazati da je H rekurzivna da bi funkcija $f \circ g$ bila rekurzivna. Funkcija g je rekurzivna, pa po definiciji 1.4.6 postoje rekurzivne funkcije $g_1, \dots, g_n\colon \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$ tako da je $g(\vec{x}) = (g_1(\vec{x}), \dots, g_n(\vec{x}))$. Sada možemo pisati

$$H = F \circ \Gamma,\ \Gamma\colon \mathbb{N}^{m+1} \to \mathbb{N}^{n+1},\ \Gamma(\vec{x}, k) = (g(\vec{x}), k) = (g_1(\vec{x}), \dots, g_n(\vec{x}), k).$$

Funkcija Γ je rekurzivna jer su njezine komponentne funkcije rekurzivne ($g_1 \circ \Pi, \dots, g_n \circ \Pi$, gdje je $\Pi\colon \mathbb{N}^{m+1} \to \mathbb{N}^m$ projekcija na prvih m koordinata, i projekcija na m+1-koordinatu I^{m+1}_{m+1}). Dakle, H je kompozicija dviju rekurzivnih funkcija, prema napomeni 1.4.7 zaključujemo da je rekurzivna. □

Do sada smo dokazali neka lijepa svojstva rekurzivnih funkcija, kao npr. zbroj dviju rekurzivnih funkcija nam daje rekurzivnu funkciju. Možemo tako dalje postavljati pitanja vezana uz rekurzivnost. Npr. ako je (x_i) rekurzivan niz u $\mathbb{R}$, mora li skup $\{i \in \mathbb{N} \mid x_i = 0\}$ biti rekurzivan? Ne mora. Ipak nećemo konstruirati protuprimjer jer nije baš jednostavno. Ako je $f\colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{R}$ rekurzivna funkcija skup $\{\vec{x} \in \mathbb{N}^n \mid f(\vec{x}) = 0\}$ ipak ne mora biti rekurzivan. U sljedećem primjeru ćemo pokazati da je za neke rekurzivne funkcije skup svih argumenata za koje je funkcijska vrijednost jednaka nuli, ipak rekurzivan.

Primjer 1.4.10. *Neka je $f\colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{Q}$ rekurzivna, tada je i skup $S = \{\vec{x} \in \mathbb{N}^n \mid f(\vec{x}) = 0\}$ rekurzivan.*

Prema definiciji racionalne rekurzivne funkcije, f zapisujemo u obliku

$$f(\vec{x}) = (-1)^{a(\vec{x})} \frac{b(\vec{x})}{c(\vec{x})},\ \forall \vec{x} \in \mathbb{N}^n$$

gdje su a, b, c rekurzivne funkcije. Tada je

$$S = \{\vec{x} \in \mathbb{N}^n \mid b(\vec{x}) = 0\},$$

odnosno karakteristična funkcija tog skupa je $\chi_S(\vec{x}) = \overline{sg}(b(\vec{x}))$ kompozicija rekurzivnih funkcija $\overline{sg}$, b. Dakle, skup S je rekurzivan skup.

Poglavlje 2

Rekurzivno prebrojivi skupovi

Definicija 2.0.11. *Neka je $S \subseteq \mathbb{N}^k$. Kažemo da je S* ***rekurzivno prebrojiv skup*** *ako je $S = \emptyset$ ili ako postoji rekurzivna funkcija $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^k$ tako da je $S = f(\mathbb{N})$.*

Primjer 2.0.12. *$\mathbb{N}^k$ je rekurzivno prebrojiv skup.*

Konstruirajmo rekurzivnu funkciju $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^k$ tako da vrijedi $f(\mathbb{N}) = \mathbb{N}^k$. Neka je

$$f(x) = (E(x, 1), \ldots, E(x, k)).$$

Ta funkcija je rekurzivna jer su njezine komponentne funkcije rekurzivne (vidi primjer 1.1.8*). Pokažimo da je surjekcija. Neka je $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}^k$ proizvoljan. Neka je $x = p_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{a_k}$. Tada je $f(x) = a$.*

Propozicija 2.0.13. *Neka je $S \subseteq \mathbb{N}^k$ rekurzivan. Tada je S rekurzivno prebrojiv.*

Dokaz. Ako je $S = \emptyset$ tada je tvrdnja trivijalno ispunjena. Neka je sada $S \neq \emptyset$. Tada postoji $s_0 \in S$. Neka je $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^k$ rekurzivna surjekcija (postoji prema primjeru 2.0.12). Definirajmo funkciju $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^k$ sa:

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ako je } x \in T \\ s_0, & \text{inače,} \end{cases}$$

gdje je $T = \{x \in \mathbb{N} \mid f(x) \in S\}$. Karakteristična funkcija skupa T jednaka je $\chi_T(x) = \chi_S(f(x))$, dakle rekurzivna kao kompozicija rekurzivnih funkcija. Stoga je T rekurzivan skup. Nadalje, komponente funkcije od g su rekurzivne prema propoziciji 1.1.12, a tada je rekurzivna i funkcija g. Očito je $g(\mathbb{N}) = S$. Slijedi da je S rekurzivno prebrojiv skup. □

Propozicija 2.0.14. *Neka su $k, n \geqslant 1$, neka je S rekurzivno prebrojiv skup u $\mathbb{N}^k$ te neka je $h\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ rekurzivna funkcija. Tada je $h(S)$ rekurzivno prebrojiv skup.*

Dokaz. Ako je $S = \emptyset$ tada je i $h(S) = \emptyset$, dakle tvrdnja trivijalno vrijedi.

Neka je sada $S \neq \emptyset$. Tada postoji rekurzivna funkcija $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^k$ tako da je $f(\mathbb{N}) = S$. Funkcija $h \circ f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^n$ je rekurzivna i vrijedi $(h \circ f)(\mathbb{N}) = h(S)$. Dakle $h(S)$ je rekurzivno prebrojiv skup. □

Teorem 2.0.15. *Neka su $k, n \geqslant 1$, $T \subseteq \mathbb{N}^{k+n}$ rekurzivno prebrojiv skup i $S \subseteq \mathbb{N}^k$ skup koji ima sljedeće svojstvo: za svaki $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ vrijedi*

$$\vec{x} \in S \Leftrightarrow \exists \vec{y} \in \mathbb{N}^n \text{ tako da je } (\vec{x}, \vec{y}) \in T.$$

Tada je S rekurzivno prebrojiv.

Dokaz. Definirajmo funkciju p na sljedeći način

$$p\colon \mathbb{N}^{k+n} \to \mathbb{N}^k,\ p(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+n}) = (x_1, \dots, x_n).$$

Vrijedi: $S = p(T)$. Skup T je rekurzivno prebrojiv, funkcija p je rekurzivna jer su njezine komponentne funkcije rekurzivne (projekcije na prvih n koordinata). Prema propoziciji 2.0.14 skup S je rekurzivno prebrojiv. □

Iz primjera 1.4.10 smo vidjeli da ako je funkcija $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivna da je tada nužno rekurzivan i skup $\{\vec{x} \in \mathbb{N}^k \mid f(\vec{x}) = 0\}$. Neke od posljedica su

1. $g, f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivne $\Rightarrow \{\vec{x} \in \mathbb{N}^k \mid f(\vec{x}) = g(\vec{x})\}$ je rekurzivan skup.
2. $g, f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne $\Rightarrow \{\vec{x} \in \mathbb{N}^k \mid f(\vec{x}) = g(\vec{x})\}$ je rekurzivan skup.

Naime, u prvom slučaju traženi skup možemo zapisati u obliku $\{\vec{x} \in \mathbb{N}^k \mid f(\vec{x}) - g(\vec{x}) = 0\}$. Kako je funkcija $f - g\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivna kao zbroj dvije rekurzivne funkcije, tada se možemo pozvati na primjer 1.4.10 i reći da je traženi skup rekurzivan.
U drugom slučaju funkciju f možemo zapisati u obliku $f(\vec{x}) = (-1)^0 \frac{f(\vec{x})}{1}$ i promatrati kao funkciju $\mathbb{N}^k \longrightarrow \mathbb{Q}$. Jednako tako promatramo i funkciju g. Tada za skup iz 2 upotrijebimo tvrdnju 1.

Lema 2.0.16. *Neka su $f, g\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ rekurzivne funkcije. Tada je*

$$S = \{\vec{x} \in \mathbb{N}^k \mid f(\vec{x}) = g(\vec{x})\}$$

rekurzivan skup.

Dokaz. Neka su $f_1, \dots, f_n$ komponentne funkcije od f, a $g_1, \dots, g_n$ komponentne funkcije od g. Tada skup S možemo prikazati kao presjek konačno mnogo rekurzivnih skupova:

$$S = \{\vec{x} \in \mathbb{N}^k \mid f_1(\vec{x}) = g_1(\vec{x})\} \cap \dots \cap \{\vec{x} \in \mathbb{N}^k \mid f_n(\vec{x}) = g_n(\vec{x})\}.$$

Znamo da je presjek rekurzivnih skupova također rekurzivan prema propoziciji 1.1.10, dakle S je rekurzivan skup. □

Propozicija 2.0.17. *Neka su S i T rekurzivno prebrojivi skupovi. Tada su skupovi $S \cup T, S \cap T$ rekurzivno prebrojivi.*

Dokaz. Ako je barem jedan od skupova S i T prazan skup, tada je $S \cap T = \emptyset$. Tada je $S \cap T$ rekurzivno prebrojiv po definiciji.

Neka su $f, g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^k$ rekurzivne funkcije tako da vrijedi $f(\mathbb{N}) = S$ i $g(\mathbb{N}) = T$. Definirajmo funkcije $\alpha, \beta_1, \beta_2 \colon \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N}^k$ sa

$$\begin{aligned} \alpha(\vec{x}, i, j) &= \vec{x} \\ \beta_1(\vec{x}, i, j) &= f(i) \\ \beta_2(\vec{x}, i, j) &= g(j). \end{aligned}$$

Definiramo skupove Γ_1 i Γ_2 sa

$$\Gamma_1 = \{(\vec{x}, i, j) \in \mathbb{N}^{k+2} \mid \alpha(\vec{x}, i, j) = \beta_1(\vec{x}, i, j)\},$$

$$\Gamma_2 = \{(\vec{x}, i, j) \in \mathbb{N}^{k+2} \mid \alpha(\vec{x}, i, j) = \beta_2(\vec{x}, i, j)\}.$$

Funkcije α, β_1, β_2 su rekurzivne, pa prema lemi 2.0.16 slijedi da su skupovi Γ_1 i Γ_2 rekurzivni. Nadalje, definiramo skup

$$\Gamma = \{(\vec{x}, i, j) \in \mathbb{N}^{k+2} \mid \vec{x} = f(i), \vec{x} = g(j)\}.$$

Vrijedi $\Gamma = \Gamma_1 \cap \Gamma_2$, pa je Γ rekurzivan skup kao presjek dva rekurzivna skupa. Dalje zaključujemo

$$\vec{x} \in S \cap T \Leftrightarrow \exists i, j \in \mathbb{N} \text{ takvi da je } (x, \vec{i}, j) \in \Gamma$$

Skup Γ je rekurzivan, pa je prema 2.0.13 rekurzivno prebrojiv. Dakle, prema teoremu 2.0.15 skup $S \cap T$ je rekurzivno prebrojiv.

Tvrdnju za $S \cup T$ dobivamo analogno. □

Propozicija 2.0.18. *Neka su $k, n \geqslant 1$, $f \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ rekurzivna funkcija, $S \subseteq \mathbb{N}^n$ rekurzivno prebrojiv. Tada je $f^{-1}(S)$ rekurzivno prebrojiv skup.*

Dokaz. Ako je $S = \emptyset$ tvrdnja je jasna. Pretpostavimo zato $S \neq \emptyset$. Kako je S rekurzivno prebrojiv tada postoji rekurzivna funkcija $g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^n$ tako da je $S = g(\mathbb{N})$. Uzmimo proizvoljan $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$. Vrijedi

$$\vec{x} \in f^{-1}(S) \Leftrightarrow f(\vec{x}) \in S \Leftrightarrow \exists y \in \mathbb{N},\ f(\vec{x}) = g(y).$$

Dakle, $\vec{x} \in f^{-1}(S)$ ako i samo ako postoji $y \in \mathbb{N}$ tako da je $f(\vec{x}) = g(y)$. Definiramo skup $T = \{(\vec{x}, y) \in \mathbb{N}^{n+1} \mid f(\vec{x}) = g(y)\}$. Sada tvrdnju možemo zapisati ovako :

$$\vec{x} \in f^{-1}(S) \Leftrightarrow \exists y \in \mathbb{N} \text{ tako da je } (\vec{x}, y) \in T.$$

Želimo pokazati da je skup T rekurzivno prebrojiv, jer tada ćemo prema teoremu 2.0.15 dobiti da je skup $f^{-1}(S)$ rekurzivno prebrojiv. No, skup T je i više od toga, on je rekurzivan. Naime,

$$\begin{aligned} T &= \{(\vec{x}, y) \in \mathbb{N}^{n+1} \mid f(\vec{x}) = g(y)\} \\ &= \{(\vec{x}, y) \in \mathbb{N}^{n+1} \mid F(\vec{x}, y) = G(\vec{x}, y)\}, \end{aligned}$$

gdje su $F, G \colon \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}^n$ definirane sa $F(\vec{x}, y) = f(\vec{x})$, $G(\vec{x}, y) = g(y)$. Funkcija f je rekurzivna pa postoje komponentne funkcije $f_1, \dots f_n$ koje su rekurzivne. Također je funkcija g rekurzivna pa postoje komponentne funkcije $g_1, \dots, g_n$ koje su rekurzivne. Dakle, možemo pisati

$$F(\vec{x}, y) = (f_1(p(\vec{x}, y)), \dots, f_n(p(\vec{x}, y))),$$

gdje je $p \colon \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}^k$ projekcija na prvih k koordinata. Dakle, F je rekurzivna funkcija. Zapišimo sada kako izgleda funkcija G

$$G(\vec{x}, y) = (g_1(I^{k+1}_{k+1}(\vec{x}, y)), \dots, g_n(I^{k+1}_{k+1}(\vec{x}, y))).$$

Zaključujemo da je i G rekurzivna funkcija. Dakle, skup T je rekurzivan, pa je i rekurzivno prebrojiv. Prema teoremu 2.0.15 skup $f^{-1}(S)$ je rekurzivno prebrojiv. □

Najprije dajemo iskaz i dokaz pomoćne leme koja će nam biti od koristi u dokazu sljedećeg teorema.

Lema 2.0.19. *Neka je skup $T \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$ rekurzivan takav da vrijedi:*

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{N}^k \; \exists y \in \mathbb{N} \text{ takav da je } (\vec{x}, y) \in T. \tag{2.1}$$

Tada postoji rekurzivna funkcija $h \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takva da vrijedi

$$(\vec{x}, h(\vec{x})) \in T, \; \forall \vec{x} \in \mathbb{N}^k. \tag{2.2}$$

Dokaz. Definirajmo funkciju h na sljedeći način:

$$h(\vec{x}) = \mu y[\, (\vec{x}, y) \in T \,].$$

Uočimo da je zbog (2.1) funkcija h totalna. Nadalje, pripadnost skupu T možemo izraziti pomoću njegove karakteristične funkcije χ_T. Funkciju h zapisujemo na sljedeći način:

$$h(\vec{x}) = \mu y[\, \overline{sg}(\chi_T(\vec{x}, y)) = 0 \,].$$

Odavde se jasno vidi da je funkcija h rekurzivna i da vrijedi (2.2). □

Teorem 2.0.20. *Neka su $k, n \geqslant 1$ te $S \subseteq \mathbb{N}^{k+n}$ rekurzivno prebrojiv skup takav da za svaki $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ postoji $\vec{y} \in \mathbb{N}^n$ tako da je $(\vec{x}, \vec{y}) \in S$. Tada postoji rekurzivna funkcija $f \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ takva da vrijedi*

$$(\vec{x}, f(\vec{x})) \in S, \ \forall \vec{x} \in \mathbb{N}^k.$$

Dokaz. Jer je S rekurzivno prebrojiv skup, postoji rekurzivna funkcija $g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^{k+n}$ takva da je $S = g(\mathbb{N})$.

Neka je $p \colon \mathbb{N}^{k+n} \to \mathbb{N}^k$ projekcija na prvih k-koordinata, i $q \colon \mathbb{N}^{k+n} \to \mathbb{N}^n$ projekcija na zadnjih n-koordinata.

Vrijedi:

$$\begin{aligned} \vec{x} \in \mathbb{N}^k &\Rightarrow \exists \vec{y} \in \mathbb{N}^n \text{ takav da je } (\vec{x}, \vec{y}) \in S \\ &\Rightarrow \exists z \in \mathbb{N} \text{ takav da je } (\vec{x}, \vec{y}) = g(z) \\ &\Rightarrow \vec{x} = p(g(z)). \end{aligned}$$

Dakle,

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{N}^k \ \exists z \in \mathbb{N} \text{ takav da je } \vec{x} = p(g(z)). \tag{2.3}$$

Definiramo skup $T = \{(\vec{x}, z) \in \mathbb{N}^{k+1} \mid \vec{x} = p(g(z))\}$. Prema lemi 2.0.16 taj skup je rekurzivan. Iz (2.3) slijedi:

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{N}^k \ \exists z \in \mathbb{N} \text{ takav da je } (\vec{x}, z) \in T.$$

Iz pomoćne leme slijedi da postoji rekurzivna funkcija $h \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takva da vrijedi $(\vec{x}, h(\vec{x})) \in T$, $\forall \vec{x} \in \mathbb{N}^k$. Slijedi,

$$\begin{aligned} & \vec{x} = p(g(h(\vec{x}))), \ \forall \vec{x} \in \mathbb{N}^k \\ \Rightarrow \quad & (\vec{x}, q(g(h(\vec{x})))) = g(h(\vec{x})), \ \forall \vec{x} \in \mathbb{N}^k \\ \Rightarrow \quad & (\vec{x}, q(g(h(\vec{x})))) \in S, \ \forall \vec{x} \in \mathbb{N}^k \end{aligned}$$

Definiramo traženu funkciju $f \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$, sa $f(\vec{x}) = q(g(h(\vec{x})))$. Funkcije q, g i h su rekurzivne, pa je i f rekurzivna. □

Lema 2.0.21. *Neka je $f \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivna. Tada je skup $S = \{\vec{x} \in \mathbb{N}^k \mid f(\vec{x}) > 0\}$ rekurzivan.*

Dokaz. Funkcija f se može zapisati na sljedeći način

$$f(\vec{x}) = (-1)^{a(\vec{x})} \frac{b(\vec{x})}{c(\vec{x})}, \ \forall \vec{x} \in \mathbb{N}^k,$$

pri čemu su funkcije a, b, $c \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne i vrijedi $c(\vec{x}) \neq 0$, $\forall \vec{x} \in \mathbb{N}^k$. Tada vrijedi

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad a(\vec{x}) \in 2\mathbb{N}, \ b(\vec{x}) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad A(\vec{x}) := \overline{sg}(\chi_{2\mathbb{N}}(a(\vec{x}))) = 0, \ B(\vec{x}) := \overline{sg}(b(\vec{x})) = 0 \end{aligned}$$

Sada skup S možemo zapisati na ovaj način:

$$S = \{\vec{x} \in \mathbb{N}^k \mid A(\vec{x}) = 0\} \cap \{\vec{x} \in \mathbb{N}^k \mid B(\vec{x}) = 0\}.$$

Funkcija A je rekurzivna kao kompozicija funkcija $\overline{sg}$ i $\chi_{2\mathbb{N}} \circ a$ koje su rekurzivne, a B je rekurzivna kao kompozicija rekurzivnih funkcija $\overline{sg}$ i b. Prema primjeru 1.4.10 skup S je presjek dva rekurzivna skupa, a prema 1.1.10 takav skup je također rekurzivan. □

Teorem 2.0.22. *Neka je $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ rekurzivna funkcija. Tada je $\Omega = \{\vec{x} \in \mathbb{N}^k \mid f(\vec{x}) > 0\}$ rekurzivno prebrojiv skup.*

Dokaz. Ako je $f(\vec{x}) \leqslant 0, \forall \vec{x} \in \mathbb{N}^k$ tada je Ω prazan skup pa je rekurzivno prebrojiv po definiciji.

Funkcija f je rekurzivna, pa postoji rekurzivna aproksimacija $F\colon \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ takva da je

$$|f(\vec{x}) - F(\vec{x}, l)| < 2^{-l},\ \forall \vec{x} \in \mathbb{N}^k,\ \forall l \in \mathbb{N}. \tag{2.4}$$

Neka je $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ takav da vrijedi $f(\vec{x}) > 0$. Tada postoji $l \in \mathbb{N}$ takav da je

$$f(\vec{x}) > 2 \cdot 2^{-l}. \tag{2.5}$$

Iz (2.4) slijedi

$$F(\vec{x}, l) - f(\vec{x}) > -2^{-l}. \tag{2.6}$$

Zbrojimo li nejednakosti (2.5) i (2.6) dobijamo

$$F(\vec{x}, l) > 2^{-l}. \tag{2.7}$$

Obratno, pretpostavimo da vrijedi (2.7) za neke $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ i $l \in \mathbb{N}$. Iz (2.4) slijedi nejednakost

$$f(\vec{x}) - F(\vec{x}, l) > -2^{-l}. \tag{2.8}$$

Zbrojimo li sada nejednakosti (2.7) i (2.8) dobijamo da je $f(\vec{x}) > 0$. Zaključujemo sljedeće

$$\vec{x} \in \Omega \Leftrightarrow f(\vec{x}) > 0 \Leftrightarrow \exists l \in \mathbb{N} \text{ takav da je } F(\vec{x}, l) > 2^{-l} \tag{2.9}$$

Kako je F rekurzivna funkcija, tada je prema lemi 2.0.21 skup

$$\{(\vec{x}, l) \in \mathbb{N}^{k+1} \mid F(\vec{x}, l) - 2^{-l} > 0\}$$

rekurzivan pa prema tome i rekurzivno prebrojiv. Dakle, iz (2.9) slijedi da je Ω rekurzivno prebrojiv skup. □

Korolar 2.0.23. *Neka su f, $g\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ rekurzivne funkcije.*

Tada je skup $\Omega = \{\vec{x} \in \mathbb{N}^k \mid f(\vec{x}) < g(\vec{x})\}$ rekurzivno prebrojiv.

Dokaz. Definiramo funkciju $h \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ sa $h(\vec{x}) = g(\vec{x}) - f(\vec{x})$. Dakle, $h = g + (-1) \cdot f$. Očito za svaki $\vec{x}$ vrijedi

$$f(\vec{x}) < g(\vec{x}) \quad \Leftrightarrow \quad h(\vec{x}) > 0.$$

Stoga je

$$\Omega = \{\vec{x} \in \mathbb{N}^k \mid h(\vec{x}) > 0\}.$$

Prema teoremu 2.0.22 skup Ω je rekurzivno prebrojiv. $\square$

Poglavlje 3

Izračunljivi metrički prostori

Definicija 3.0.24. *Neka je X neprazan skup te $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ funkcija tako da vrijedi sljedeće:*

$$
\begin{aligned}
1)\, & d(x,y) \geqslant 0,\ \forall x,y \in X \\
& d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y \\
2)\, & d(x,y) = d(y,x),\ \forall x,y \in X \\
3)\, & d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y),\ \forall x,y,z \in X.
\end{aligned}
$$

Tada za d kažemo da je ***metrika*** *na skupu X, a za uređeni par (X, d) kažemo da je* ***metrički prostor***.

Primjer 3.0.25. *1. Neka je $d\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $d(x,y) = |x-y|$. Tada je d metrika na $\mathbb{R}$.*

a) $d(x,y) \geqslant 0$
$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow |x-y| = 0 \Leftrightarrow x-y = 0 \Leftrightarrow x = y$

b) $d(x,y) = |x-y| = |y-x| = d(y,x)$

c) $d(x,y) = |x-y| = |x-z+z-y| \leqslant |x-z| + |z-y| = d(x,z) + d(z,y)$.

Za d kažemo da je ***euklidska metrika*** *na $\mathbb{R}$.*

2. Neka je $n \in \mathbb{N}$ te $d\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa:

$$d((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \ldots + (x_n-x_n)^2}.$$

Može se dokazati da je d metrika na $\mathbb{R}^n$ (za dokaz vidi [8]). Za d kažemo da je ***euklidska metrika*** *na $\mathbb{R}^n$.*

Definicija 3.0.26. *Neka je (X, d) metrički prostor, $x_0 \in X$ i $r > 0$. Definiramo*

$$K(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) < r\}.$$

Za $K(x_0, r)$ kažemo da je ***otvorena kugla*** *oko x_0 radijusa r u metričkom prostoru (X, d).*

Primjer 3.0.27. *Neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ i $r > 0$. Tada je*

$$K(x_0, r) = \langle x_0 - r, x_0 + r\rangle.$$

Naime, za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$d(x, x_0) < r \Leftrightarrow |x - x_0| < r \Leftrightarrow -r < x - x_0 < r \Leftrightarrow x_0 - r < x < x_0 + r.$$

Definicija 3.0.28. *Neka je (X, d) metrički prostor te $S \subseteq X$. Kažemo da je S* ***gust skup*** *u metričkom prostoru (X, d) ako za svaki $x \in X$ i za svaki $\epsilon > 0$ postoji $s \in S$ tako da je $d(x, s) < \epsilon$.*

Uočimo: ako je (X, d) metrički prostor, onda je X gust skup u (X, d).

Primjer 3.0.29.

1. *$\mathbb{Q}$ je gust skup u metričkom prostoru $(\mathbb{R}, d)$, gdje je d euklidska metrika na $\mathbb{R}$. Naime, neka su $x \in \mathbb{R}$ i $\epsilon > 0$. Tada postoji $q \in \mathbb{Q}$ tako da je $x < q < x + \epsilon$, slijedi $q \in \langle x - \epsilon, x + \epsilon\rangle$, prema primjeru 3.0.27 je $d(q, x) < \epsilon$.*

2. *Neka je $n \in \mathbb{N}$ te d euklidska metrika na $\mathbb{R}^n$. Tada je $\mathbb{Q}^n$ gust skup u metričkom prostoru $(\mathbb{R}^n, d)$. Uzmimo $x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, i $\epsilon > 0$. Slijedi,*

$$\textit{postoje } q_1, \ldots, q_n \in Q \textit{ tako da je } |x_1 - q_1| < \frac{\epsilon}{\sqrt{n}}, \ldots, |x_n - q_n| < \frac{\epsilon}{\sqrt{n}}.$$

Neka je $q = (q_1, \ldots, q_n)$. Tada je $d(x, q) < \epsilon$.

Definicija 3.0.30. *Za metrički prostor (X, d) kažemo da je* ***separabilan*** *ako postoji prebrojiv skup gust u (X, d).*

Neka je je (X, d) metrički prostor te (x_n) niz u X. Kažemo da je (x_n) ***gust niz*** *u (X, d) ako je skup $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ gust u (X, d).*

Očito vrijedi: metrički prostor (X, d) je separabilan ako i samo ako postoji gust niz u (X, d).

Definicija 3.0.31. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je $\alpha = (\alpha_n)$ gust niz u (X, d). Za uređenu trojku (X, d, α) kažemo da je* ***izračunljiv metrički prostor*** *ako je funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$, $(i, j) \mapsto d(\alpha_i, \alpha_j)$ rekurzivna.*

Neka je (X,d,α) izračunljiv metrički prostor. Neka je $x \in X$. Kažemo da je x ***izračunljiva točka*** *u (X,d,α) ako postoji rekurzivna funkcija $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tako da je*

$$d(x,\alpha_{f(k)}) < 2^{-k},\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Neka je (x_i) niz u X. Kažemo da je (x_i) ***izračunljiv niz*** *u (X,d,α) ako postoji rekurzivna funkcija $f\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ tako da je*

$$d(x_i,\alpha_{f(i,k)}) < 2^{-k},\ \forall (i,k) \in \mathbb{N}^2.$$

Neka je (X,d,α) izračunljiv metrički prostor. Tada je α očito izračunljiv niz u (X,d,α).

Primjer 3.0.32. *Neka je $(\mathbb{R},d)$ metrički prostor gdje je d euklidska metrika. Definirajmo funkciju $\alpha\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ sa*

$$\alpha(i) = (-1)^{E(i,2)}\frac{E(i,0)}{E(i,1)+1}, \forall i \in \mathbb{N}.$$

Funkcija α je rekurzivna. Pokažimo da je i surjekcija.

Neka je $q \in \mathbb{Q}$ proizvoljan. Možemo ga zapisati u obliku

$$q = (-1)^c\frac{a}{b+1}, \text{ za neke } a,b,c \in \mathbb{N}.$$

Tada je $\alpha(x) = q$ za $x = 2^a3^b5^c$. Dakle, $\mathbb{Q} = \mathrm{Im}(\alpha)$. Skup $\mathbb{Q}$ je gust u $(\mathbb{R},d)$ prema primjeru 3.0.29, odnosno niz $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ je gust u $(\mathbb{R},d)$.

Funkcija $H\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{Q}$, $H(i,j) = \alpha_i - \alpha_j$ je rekurzivna kao zbroj rekurzivnih funkcija $\alpha \circ I_1^2$ i $-\alpha \circ I_2^2$. Tada je funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{Q}$, $(i,j) \mapsto d(\alpha_i,\alpha_j) = |H(i,j)|$ rekurzivna prema propoziciji 1.3.3, a prema primjeru 1.4.4 je rekurzivna i kao funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$.

Dakle, $(\mathbb{R},d,\alpha)$ je izračunljiv metrički prostor.

Propozicija 3.0.33. *Neka je $(\mathbb{R},d,\alpha)$ izračunljiv metrički prostor iz primjera 3.0.32. Neka je (x_i) niz u $\mathbb{R}$.*

Tada je (x_i) izračunljiv niz u $(\mathbb{R},d,\alpha)$ ako i samo ako je (x_i) rekurzivan niz u $\mathbb{R}$, tj. rekurzivan kao funkcija $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Dokaz. Pretpostavimo da je (x_i) izračunljiv niz u $(\mathbb{R},d,\alpha)$, tada postoji rekurzivna funkcija $f\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da je

$$d(x_i,\alpha_{f(i,k)}) < 2^{-k}, \forall i,\ k \in \mathbb{N}.$$

Po definiciji funkcije d to znači

$$|x_i - \alpha_{f(i,k)}| < 2^{-k}, \forall i,\ k \in \mathbb{N}. \tag{3.1}$$

Tada je funkcija $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $i \mapsto x_i$ rekurzivna.

Pretpostavimo sada da je (x_i) rekurzivan niz u $\mathbb{R}$, tj. da postoji rekurzivna funkcija $F\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{Q}$ takva da je

$$|x_i - F(i,k)| < 2^{-k}, \forall i,\ k \in \mathbb{N}. \tag{3.2}$$

Želimo naći rekurzivnu funkciju $f\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takvu da vrijedi (3.1). Za sve i, k postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je $F(i,k) = \alpha_j$. Skup $\Gamma = \{(i,j,k) \mid F(i,k) = \alpha_j\}$ je rekurzivan.

Znamo: za svaki i, $k \in \mathbb{N}$ postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je $(i,k,j) \in \Gamma$. Prema teoremu 2.0.20 postoji rekurzivna funkcija $f\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da vrijedi

$$(i,k,f(i,k)) \in \Gamma, \forall i,\ k \in \mathbb{N}.$$

Slijedi, $F(i,k) = \alpha_{f(i,k)}, \forall i,\ k \in \mathbb{N}$. Iz (3.2) slijedi (3.1). □

Napomena 3.0.34. *Neka je (X,d,α) izračunljiv metrički prostor i (x_i) izračunljiv niz u (X,d,α). Tada je x_i izračunljiva točka u (X,d,α) za svaki $i \in \mathbb{N}$.*

Uočimo i sljedeće:

Ako je $x \in X$, onda je x izračunljiva točka u (X,d,α) ako i samo ako je niz $(x,x,x,\dots)$ izračunljiv u (X,d,α).

Isto tako, ako je $x \in \mathbb{R}$, onda je x rekurzivan broj ako i samo ako je konstantna funkcija $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $i \mapsto x$ rekurzivna.

Korolar 3.0.35. *Neka je $(\mathbb{R},d,\alpha)$ izračunljiv metrički prostor iz primjera* 3.0.32. *Neka je $x \in \mathbb{R}$.*

Tada je x izračunljiva točka u $(\mathbb{R},d,\alpha)$ ako i samo ako je x rekurzivan broj.

Lema 3.0.36. *Neka je $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ funkcija, $M > 0$ te $g\colon \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{R}$ rekurzivna funkcija takva da je $|f(x) - g(x,i)| < M \cdot 2^{-i}, \forall \vec{x} \in \mathbb{N}^k, \forall i \in N$.*

Tada je funkcija f rekurzivna.

Dokaz. Kako je $M > 0$ postoji $i_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $M \cdot 2^{-i_0} < 1$. Definiramo funkciju $g'\colon \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{R}$ sa $g'(\vec{x},i) = g(\vec{x},i+i_0)$. Tada je

$$\mid f(\vec{x}) - g'(\vec{x},i) \mid = \mid f(\vec{x}) - g(\vec{x},i+i_0) \mid < M \cdot 2^{-(i+i_0)} < 2^{-i}, \forall \vec{x} \in \mathbb{N}^k, \forall i \in \mathbb{N}. \tag{3.3}$$

Prema propoziciji 1.4.9 funkcija g' je rekurzivna pa postoji rekurzivna funkcija $G\colon \mathbb{N}^{n+2} \to \mathbb{Q}$ takva da vrijedi

$$\mid g'(\vec{x},i) - G(\vec{x},i,j) \mid < 2^{-j}, \forall \vec{x} \in \mathbb{N}^k, \forall i,\ j \in \mathbb{N}. \tag{3.4}$$

Zbrojimo li nejednakosti (3.3) i (3.4), po nejednakosti trokuta možemo zaključiti:

$$\mid f(\vec{x}) - G(\vec{x},i,j) \mid < 2^{-j} + 2^{-i}, \forall \vec{x} \in \mathbb{N}^k, \forall i,\ j \in \mathbb{N}.$$

Definirajmo funkciju $F\colon \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ na sljedeći način: $F(\vec{x}, i) = G(\vec{x}, i+1, i+1)$. To je rekurzivna aproksimacija funkcije f, naime

$$\begin{aligned} | f(\vec{x}) - F(\vec{x}, i) | &= | f(\vec{x}) - G(\vec{x}, i+1, i+1) | \\ &< 2^{-i+1} + 2^{-i+1} = 2^{-i}, \forall \vec{x} \in \mathbb{N}^k, \forall i \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Dakle, funkcija f je rekurzivna. □

Propozicija 3.0.37. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor te neka su (x_i) i (y_j) izračunljivi nizovi u (X, d, α).*

Tada je funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$, $(i, j) \mapsto d(x_i, y_j)$ rekurzivna.

Iskažimo najprije lemu koja će nam biti od koristi u dokazu ove propozicije.

Lema 3.0.38. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka su $a, a', b, b' \in X$. Tada vrijedi:*

$$|d(a, b) - d(a', b')| \leqslant d(a, a') + d(b, b').$$

Dokaz. Koristeći nejednakost trokuta dobivamo:

$$\begin{aligned} d(a, b) &\leqslant d(a, a') + d(a', b) \\ &\leqslant d(a, a') + d(a', b') + d(b, b') \end{aligned}$$

Iz toga slijedi,

$$d(a, b) - d(a', b') \leqslant d(a, a') + d(b, b').$$

Zamijenimo li uloge a i a' te b i b' dobivamo:

$$d(a', b') - d(a, b) \leqslant d(a, a') + d(b, b').$$

Sve zajedno, vrijedi $|d(a', b') - d(a, b)| \leqslant d(a, a') + d(b, b')$. □

Dokaz. propozicije 3.0.37

Nizovi (x_i), (y_j) su izračunljivi u (X, d, α), što znači da postoje rekurzivne funkcije $f_1,\ f_2\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takve da vrijedi

$$\begin{aligned} &d(x_i, \alpha_{f_1(i,k)}) < 2^{-k}, \\ &d(y_j, \alpha_{f_2(j,k)}) < 2^{-k}, \forall i,\ j,\ k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Neka su $i,\ j,\ k \in \mathbb{N}$. Iz leme 3.0.38 slijedi:

$$|d(x_i, y_j) - d(\alpha_{f_1(i,k)}, \alpha_{f_2(j,k)})| < 2 \cdot 2^{-k}.$$

Prema lemi 3.0.36 dovoljno je dokazati da je funkcija

$$\mathbb{N}^3 \to \mathbb{R},\ (i, j, k) \mapsto d(\alpha_{f_1(i,k)}, \alpha_{f_2(j,k)})$$

rekurzivna. No ova funkcija je rekurzivna prema propoziciji 1.4.9 jer je kompozicija funkcije $\mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}^2$, $(i, j, k) \mapsto (f_1(i, k), f_2(j, k))$ i funkcije $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$, $(i, j) \mapsto d(\alpha_i, \alpha_j)$ (koja je rekurzivna po definiciji izračunljivog metričkog prostora). □

Propozicija 3.0.39. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor te (x_i) niz u X.*

Tada je (x_i) izračunljiv niz u (X, d, α) ako i samo ako je funkcija $h\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$, $h(i, j) = d(x_i, \alpha_j)$ rekurzivna.

Dokaz. Ako je (x_i) izračunljiv niz, onda je funkcija h rekurzivna prema propoziciji 3.0.37.

Obratno, pretpostavimo da je h rekurzivna funkcija. Neka su $i,\ k \in \mathbb{N}$. Tada postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $d(x_i, \alpha_j) < 2^{-k}$. Dakle, za svake $i,\ k \in \mathbb{N}$ postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je $(i, k, j) \in S$, pri čemu je

$$S = \{(i, k, j) \in \mathbb{N}^3 \mid d(x_i, \alpha_j) < 2^{-k}\}.$$

Neka su $f, g\colon \mathbb{N}^3 \to \mathbb{R}$ funkcije definirane s:

$$f(i, k, j) = h(i, j)$$
$$g(i, k, j) = 2^{-k}$$

Funkcija f je rekurzivna po pretpostavci, a g je čak rekurzivna kao funkcija $\mathbb{N}^3 \to \mathbb{Q}$ (jer je $\mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$, $(a, b) \mapsto a^b$ rekurzivna). Prema tome je g rekurzivna i kao funkcija $\mathbb{N}^3 \to \mathbb{R}$. Skup S sada možemo zapisati u ovom obliku

$$S = \{(i, k, j) \in \mathbb{N}^3 \mid f(i, k, j) < g(i, k, j)\},$$

pa iz korolara 2.0.23 slijedi da je S rekurzivno prebrojiv. Prema teoremu 2.0.20 postoji rekurzivna funkcija $F\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da je

$$(i, k, F(i, k)) \in S,\ \forall i,\ k \in \mathbb{N}.$$

Dakle,

$$d(x_i, \alpha_{f(i,k)}) < 2^{-k},\ \forall i,\ k \in \mathbb{N},$$

odnosno (x_i) je izračunljiv niz. □

Korolar 3.0.40. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor, a izračunljiva točka u (X, d, α) te (x_i) izračunljiv nizu (X, d, α). Tada je funkcija $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $i \mapsto d(a, x_i)$ rekurzivna.*

Dokaz. Neka je niz (y_j) definiran s $y_j = a$, $\forall j \in \mathbb{N}$. Tada je (y_j) izračunljiv niz pa je funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$, $(i, j) \mapsto d(y_j, x_i)$ rekurzivna prema propoziciji 3.0.37. Kompozicija ove funkcije s funkcijom $\mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$, $i \mapsto (i, 0)$ je tražena funkcija. Time je tvrdnja korolara dokazana. □

Poglavlje 4

Strukture izračunljivosti

Definicija 4.0.41. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je $\mathcal{S}$ skup nizova u X koji ima sljedeća svojstva:*

1. *(x_i), $(y_j) \in \mathcal{S}$ povlači da je funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$, $(i, j) \mapsto d(x_i, y_j)$ rekurzivna.*
2. *ako je $(x_j) \in \mathcal{S}$, $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija te (y_i) niz u X takav da je*

$$d(y_i, x_{f(i,k)}) < 2^{-k}, \ \forall i,\ k \in \mathbb{N},$$

onda je $(y_i) \in \mathcal{S}$.

*Tada za $\mathcal{S}$ kažemo da je **struktura izračunljivosti** na metričkom prostoru (X, d).*

Definicija 4.0.42. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Označimo sa $\mathcal{S}_\alpha$ skup svih nizova koji su izračunljivi u (X, d, α).*

Propozicija 4.0.43. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor.*
Tada je $\mathcal{S}_\alpha$ struktura izračunljivosti na (X, d).

Dokaz. Svojstvo 1. iz definicije strukture izračunljivosti slijedi iz propozicije 3.0.37. Dokažimo svojstvo 2.

Neka je $(x_j) \in \mathcal{S}_\alpha$ i neka je $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija. Pretpostavimo da je (y_i) niz u X tako da vrijedi

$$d(y_i, x_{f(i,k)}) < 2^{-k}, \ \forall i,\ k \in \mathbb{N}. \tag{4.1}$$

Budući da je (x_j) izračunljiv niz u (X, d, α) postoji rekurzivna funkcija $F : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da vrijedi:

$$d(x_j, \alpha_{F(j,k)}) < 2^{-k}, \ \forall j,\ k \in \mathbb{N}.$$

Posebno, za sve i, $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$d(x_{f(i,k)}, \alpha_{F(f(i,k),k)}) < 2^{-k}. \tag{4.2}$$

Iz (4.1) i (4.2) slijedi
$$d(y_i, \alpha_{F(f(i,k),k)}) < 2 \cdot 2^{-k}, \forall i,\ k \in \mathbb{N}. \tag{4.3}$$
Definiramo F' ovako:
$$F'(i,k) = F(f(i,k+1),k+1).$$
Očito je F' rekurzivna funkcija, a prema (4.3) vrijedi:
$$d(y_i, \alpha_{F'(i,k)}) < 2^{-k},\ \forall i,\ k \in \mathbb{N}.$$
Dakle, $(y_i) \in \mathcal{S}_\alpha$. Dokazali smo da je $\mathcal{S}_\alpha$ struktura izračunljivosti. □

Propozicija 4.0.44. *Neka je $\mathcal{S}$ struktura izračunljivosti na metričkom prostoru (X, d). Neka je $(x_i) \in \mathcal{S}$, te neka je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija.*

Tada je $(x_{f(i)})_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}$.

Dokaz. Želimo pokazati da postoji $F : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija tako da vrijedi
$$d(x_{f(i)}, x_{F(i,k)}) < 2^{-k},\ \forall i,\ k \in \mathbb{N}.$$
Tada će po 2. iz definicije strukture izračunljivosti slijediti da je $(x_{f(i)})_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}$. Definiramo F ovako:
$$F(i,k) = f(i).$$
F je rekurzivna i vrijedi
$$d(x_{f(i)}, x_{F(i,k)}) = 0 < 2^{-k},\ \forall i,\ k \in \mathbb{N}.$$
□

Definicija 4.0.45. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je α niz u X. Kažemo da je α* ***efektivan separirajući niz*** *u (X, d) ako je α gust u (X, d) te ako je funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$, $(i, j) \mapsto d(\alpha_i, \alpha_j)$ rekurzivna.*

Dakle, α je efektivan separirajući niz u (X, d) ako i samo ako je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor.

Definicija 4.0.46. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka su α, β efektivni separirajući nizovi u (X, d). Kažemo da su α i β* ***ekvivalentni*** *i pišemo $\alpha \sim \beta$ ako je α izračunljiv niz u izračunljivom metričkom prostoru (X, d, β).*

Propozicija 4.0.47. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka su α i β efektivni separirajući nizovi takvi da je $\alpha \sim \beta$.*
Tada je $\beta \sim \alpha$.

Dokaz. Iz pretpostavke da su α i β izračunljivi nizovi u (X, d, β) slijedi da je funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $(i, j) \mapsto d(\beta_i, \alpha_j)$ rekurzivna. Prema propoziciji 3.0.39 je β izračunljiv niz u (X, d, α). Dakle, vrijedi $\beta \sim \alpha$. □

Propozicija 4.0.48. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka su α i β efektivni separirajući nizovi u (X, d).*
Tada je $\alpha \sim \beta$ ako i samo ako je $\mathcal{S}_\alpha = \mathcal{S}_\beta$.

Dokaz. Pretpostavimo da vrijedi $\alpha \sim \beta$. Neka je $(x_i) \in \mathcal{S}_\alpha$. Tada je (x_i) izračunljiv niz u (X, d, α), pa postoji rekurzivna funkcija $F_1 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da je

$$d(x_i, \alpha_{F_1(i,k)}) < 2^{-k}, \forall i, k \in \mathbb{N}.$$

Nadalje, $\alpha \in \mathcal{S}_\beta$, a znamo da je $\mathcal{S}_\beta$ struktura izračunljivosti. Prema svojstvu 2. iz definicije strukture izračunljivosti je $(x_i) \in \mathcal{S}_\beta$, tj. $\mathcal{S}_\alpha \subseteq \mathcal{S}_\beta$. Zbog prethodne propozicije je $\beta \sim \alpha$, odnosno prema upravo dokazanom $\mathcal{S}_\beta \subseteq \mathcal{S}_\alpha$, pa slijedi $\mathcal{S}_\alpha = \mathcal{S}_\beta$.

Obratno, neka je $\mathcal{S}_\alpha = \mathcal{S}_\beta$. Niz α je izračunljiv u (X, d, α), odnosno $\alpha \in \mathcal{S}_\alpha$, tj. $\alpha \in \mathcal{S}_\beta$ a to upravo znači da je α izračunljiv u (X, d, β). Dakle $\alpha \sim \beta$. □

Korolar 4.0.49. *Neka je (X, d) metrički prostor. Relacija $\sim$ je relacija ekvivalencije na skupu svih efektivnih separirajućih nizova u (X, d).*

Dokaz. Refleksivnost relacije je očita. Simetričnost slijedi iz dokazane propozicije 4.0.47, a trazitivnost dobijemo iz sljedećeg:
$\alpha \sim \beta \Rightarrow \mathcal{S}_\alpha = \mathcal{S}_\beta$
$\beta \sim \gamma \Rightarrow \mathcal{S}_\beta = \mathcal{S}_\gamma$
$\Rightarrow \mathcal{S}_\alpha = \mathcal{S}_\gamma \Rightarrow \alpha \sim \gamma$.

Zapravo smo sva tri svojstva mogli dobiti iz zadnje propozicije. □

Primjer 4.0.50. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je $a \in X$. Neka je (x_i) niz u X definiran s $x_i = a$ za svaki $i \in \mathbb{N}$. Neka je $\mathcal{S} = \{(x_i)\}$. Tada je $\mathcal{S}$ struktura izračunljivosti na (X, d).*

Očito je svojstvo 1. iz definicije strukture izračunljivosti zadovoljeno.

Pretpostavimo da je (y_i) niz u X te $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija takva da vrijedi

$$d(y_i, x_{f(i,k)}) < 2^{-k}, \forall i, k \in \mathbb{N}.$$

Fiksirajmo $i \in \mathbb{N}$. Tada vrijedi

$$d(y_i, a) < 2^{-k}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Stoga je $d(y_i, a) = 0$, pa je $y_i = a$. Dakle, $(y_i) = (x_i)$, pa je $(y_i) \in \mathcal{S}$. Time smo dokazali svojstvo 2.

Definicija 4.0.51. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je $\mathcal{S}$ struktura izračunljivosti na (X, d). Kažemo da je $\mathcal{S}$* ***separabilna struktura izračunljivosti*** *na (X, d) ako postoji gust niz (x_i) u (X, d) takav da je $(x_i) \in \mathcal{S}$.*

Propozicija 4.0.52. *Neka je (X, d) metrički prostor te $\mathcal{S}$ struktura izračunljivosti na (X, d). Tada je $\mathcal{S}$ separabilna struktura izračunljivosti na (X, d) ako i samo ako postoji efektivan separirajući niz α u (X, d) tako da je $\mathcal{S} = \mathcal{S}_\alpha$.*

Dokaz. Ako je $\mathcal{S} = \mathcal{S}_\alpha$ za neki efektivan separirajući niz α, onda je $\alpha \in \mathcal{S}$, pa je $\mathcal{S}$ separabilna struktura izračunljivosti.

Obratno, pretpostavimo da je $\mathcal{S}$ separabilna struktura izračunljivosti, tj. da postoji $\alpha = (\alpha_i) \in \mathcal{S}$ takav da je α gust u (X, d). Niz α je efektivan separirajući jer je gust i $\alpha \in \mathcal{S}$, pa prema svojstvu 1. iz definicije vrijedi da je funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$, $(i, j) \mapsto d(\alpha_i, \alpha_j)$ rekurzivna. (Stavili smo $(x_i) = (\alpha_i)$, $(y_j) = (\alpha_j)$).

Dokažimo da je $\mathcal{S} = \mathcal{S}_\alpha$. Neka je $(x_i) \in \mathcal{S}$. Znamo da je $\alpha \in \mathcal{S}$, pa prema 1. iz definicije strukture izračunljivosti vrijedi da je funkcija

$$\mathbb{N}^2 \to \mathbb{R},\ (i, j) \mapsto d(x_i, \alpha_j)$$

rekurzivna. Prema propoziciji 3.0.39 slijedi da je (x_i) izračunljiv niz u (X, d, α). Prema to je $(x_i) \in \mathcal{S}_\alpha$. Neka je $(x_i) \in \mathcal{S}_\alpha$. Tada je (x_i) izračunljiv niz u (X, d, α), tj. postoji rekurzivna funkcija

$$F \colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} \text{ takva da je } d(x_i, \alpha_{F(i,k)}) < 2^{-k}.$$

Kako je $\alpha \in \mathcal{S}$, slijedi $(x_i) \in \mathcal{S}$. □

Definicija 4.0.53. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka su (x_i), (y_j) nizovi u X. Pišemo $(x_i) \diamond (y_j)$ ako je funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$, $(i, j) \mapsto d(x_i, y_j)$ rekurzivna.*
Uočimo da je gust niz α u metričkom prostoru (X, d) efektivan separirajući ako i samo ako vrijedi $\alpha \diamond \alpha$.
Pišemo $(y_i) \preceq (x_i)$ ako postoji rekurzivna funkcija $F \colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ tako da je $d(y_i, x_{F(i,k)}) < 2^{-k}$, $\forall i, k \in \mathbb{N}$.

Uz ovakve oznake, strukturu izračunljivosti $\mathcal{S}$ na metričkom prostoru (X, d) možemo definirati kao skup nizova u X sa sljedećim svojstvima:

1. *$(x_i) \diamond (y_j)$ za sve (x_i), $(y_j) \in \mathcal{S}$,*

2. *$(x_i) \in \mathcal{S}$ i $(y_i) \preceq (x_i)$ povlači $(y_i) \in \mathcal{S}$.*

Nadalje, ako je α efektivan separirajući niz u metričkom prostoru (X, d), onda je $S_\alpha = \{(x_i) \mid (x_i) \preceq \alpha\}$.

Ako je (X, d) metrički prostor koji ima separabilnu strukturu izračunljivosti, onda je (X, d) separabilan metrički prostor. Naime, ako je $\mathcal{S}$ separabilna struktura izračunljivosti na (X, d) onda postoji niz $(x_i) \in \mathcal{S}$ tako da je (x_i) gust u (X, d).

Primjer 4.0.54. *Neka je $X \neq \emptyset$, te neka je $d \colon X \times X \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa*

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases} .$$

Tvrdimo da je d metrika na X. Lako se provjere svojstva 1. i 2. iz definicije metrike. Provjerimo svojstvo 3.

Neka su $x, y, z \in X$. Ako je $x = y$, tada je $d(x, y) = 0$, pa nejednakost $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$ očito vrijedi.

Ako je $x \neq y$ onda je $d(x, y) = 1$, no u tom slučaju vrijedi $x \neq z$ ili $y \neq z$, pa je desna strana nejednakosti sigurno veća ili jednaka od 1.

Za d kažemo da je ***diskretna metrika*** *na skupu X.*

Pretpostavimo da je A gust skup u metričkom prostoru (X, d). Tvrdimo da je tada $A = X$.

Naime, neka je $x \in X$. Tada za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $a \in A$ takav da je $d(x, a) < \varepsilon$, posebno i za $\varepsilon = \frac{1}{2} < 1$ postoji takav a, ali zbog definicije metrike d to je istina samo ako je $a = x$.

Neka je X neprebrojiv skup te neka je d diskretna metrika na X. Tada, prema prethodnom primjeru, metrički prostor (X, d) nije separabilan. Posebno, (X, d) nema separabilnu strukturu izračunljivosti.

Dakle, metrički prostor općenito ne mora imati separabilnu strukturu izračunljivosti, iako prema primjeru 4.0.50 svaki metrički prostor ima strukturu izračunljivosti.

4.1 Kardinalnost skupa rekurzivnih brojeva

Za $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ označimo sa $\mathcal{R}(\mathbb{N}^k, \mathbb{N})$ skup svih rekurzivnih funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$. Analogno definiramo oznake $\mathcal{R}(\mathbb{N}^k, \mathbb{Q})$, $\mathcal{R}(\mathbb{N}^k, \mathbb{R})$. Znamo da je skup svih rekurzivnih funkcija prebrojiv, dakle $\mathcal{R}(\mathbb{N}^k, \mathbb{N})$ je prebrojiv skup.

Za svaki $f \in \mathcal{R}(\mathbb{N}^k, \mathbb{Q})$ postoje $a_f, b_f, c_f \in \mathcal{R}(\mathbb{N}^k, \mathbb{N})$ takvi da je

$$f(x) = (-1)^{a_f(x)} \frac{b_f(x)}{c_f(x)}, \forall x \in \mathbb{N}^k.$$

Funkcija $\mathcal{R}(\mathbb{N}^k, \mathbb{Q}) \to \underbrace{\mathcal{R}(\mathbb{N}^k, \mathbb{N}) \times \mathcal{R}(\mathbb{N}^k, \mathbb{N}) \times \mathcal{R}(\mathbb{N}^k, \mathbb{N})}_{(*)}$, $f \mapsto (a_f, b_f, c_f)$

je očito injekcija. Skup $(*)$ je prebrojiv, pa je i $\mathcal{R}(\mathbb{N}^k, \mathbb{Q})$ prebrojiv.

Za svaku $f \in \mathcal{R}(\mathbb{N}^k, \mathbb{R})$ odaberemo neku rekurzivnu aproksimaciju od f i označimo je s F_f. Jasno je da je $F_f \in \mathcal{R}(\mathbb{N}^{k+1}, \mathbb{Q})$. Pokažimo da je funkcija

$$\mathcal{R}(\mathbb{N}^k, \mathbb{R}) \mapsto \mathcal{R}(\mathbb{N}^{k+1}, \mathbb{Q}),\ f \mapsto F_f \tag{4.4}$$

injekcija. Naime, neka je $f \in \mathcal{R}(\mathbb{N}^k, \mathbb{R})$ i $x \in \mathbb{N}^k$. Tada za svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$| f(x) - F_f(x,i) | < 2^{-i}.$$

Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji $i_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $2^{-i_0} < \varepsilon$. Tada za svaki $i \geqslant i_0$ vrijedi

$$| f(x) - F_f(x,i) | < 2^{-i} \leqslant 2^{-i_0} < \varepsilon.$$

Prema tome zaključujemo $\lim_{i\to\infty} F_f(x,i) = f(x)$.

Uzmimo $f, g \in \mathcal{R}(\mathbb{N}^k, \mathbb{R})$ takve da vrijedi $F_f = F_g$. Tada za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ imamo

$$f(x) = \lim_i F_f(x,i) = \lim_i F_g(x,i) = g(x),$$

dakle $f(x) = g(x)$. Prema tome $f = g$. Time smo dokazali da je funkcija (4.4) injekcija. Iz toga slijedi da je skup $\mathcal{R}(\mathbb{N}^k, \mathbb{R})$ prebrojiv.

Neka je $\mathcal{R}$ skup svih rekurzivnih brojeva. Ako je $x \in \mathcal{R}$, onda je funkcija $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $i \mapsto x$ (tj. niz $(x, x, \ldots)$) rekurzivna prema napomeni 3.0.34. Funkcija $\mathcal{R} \to \mathcal{R}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, $x \mapsto (x, x, \ldots)$ je očito injekcija, pa slijedi da je $\mathcal{R}$ prebrojiv skup.

4.2 Separabilne strukture izračunljivost

Definicija 4.2.1. *Neka je $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}^n$ te neka je $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $X \neq \emptyset$. Tada je $d\restriction_{X\times X}$ očito metrika na X. Za $d\restriction_{X\times X}$ kažemo da je euklidska metrika na X.*

Primjer 4.2.2. *Skup $\mathbb{R}$ je neprebrojiv, a $\mathcal{R}$ prebrojiv. Stoga postoji $\gamma \in \mathbb{R}$ takav da $\gamma \notin \mathcal{R}$. Znamo da je $x \in \mathcal{R}$ ako i samo ako je $-x \in \mathcal{R}$, pa slijedi $-\gamma \notin \mathcal{R}$. Stoga možemo pretpostaviti $\gamma > 0$.*

Neka je $X = \{0, \gamma\}$ te neka je d euklidska metrika na X. Metrički prostor (X, d) je očito separabilan, no ne postoji separabilna struktura izračunljivosti na (X, d). Dokažimo to.

Pretpostavimo suprotno. Tada postoji efektivan separirajući niz α u (X, d). Slijedi

$$Im\alpha = \{0, \gamma\} \tag{4.5}$$

Funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$, $(i, j) \mapsto d(\alpha_i, \alpha_j)$ je rekurzivna, pa je prema primjeru 1.4.5 $d(\alpha_i, \alpha_j)$ rekurzivan broj za sve $i, j \in \mathbb{N}$. Specijalno, to vrijedi i za i, j takve da je $\alpha_i = 0$, $\alpha_j = \gamma$ (oni postoje zbog (4.5)). Slijedi,

$$d(0, \gamma) = | 0 - \gamma | = \gamma,$$

ali uzeli smo $\gamma \notin \mathcal{R}$, odnosno $d(\alpha_i, \alpha_j)$ nije rekurzivan broj. Kontradikcija.
Dakle, ne postoji separabilna struktura izračunljivosti.

Primjer 4.2.3. *Neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}$, neka je α niz iz primjera* 3.0.32 *te neka je $\gamma \in \mathbb{R}$ broj koji nije rekurzivan. Definirajmo $\beta \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sa $\beta_i = \alpha_i + \gamma$. Za sve $i, j \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$d(\beta_i, \beta_j) = \mid \beta_i - \beta_j \mid = \mid \alpha_i - \alpha_j \mid = d(\alpha_i, \alpha_j).$$

Dakle funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$, $(i, j) \mapsto d(\beta_i, \beta_j)$ je rekurzivna.
Neka je $x \in \mathbb{R}$ te $\varepsilon > 0$. Budući da je α gust niz u $(\mathbb{R}, d)$ postoji $i \in \mathbb{N}$ tako da vrijedi

$$\mid (x - \gamma) - \alpha_i \mid < \varepsilon.$$

Dakle,

$$\begin{aligned} &\mid x - (\alpha_i + \gamma) \mid < \varepsilon, \\ \text{tj.} \quad &\mid x - \beta_i \mid < \varepsilon. \end{aligned}$$

Prema tome β je gust niz u $(\mathbb{R}, d)$. Pokazali smo da je $(\mathbb{R}, d, \beta)$ izračunljiv metrički prostor. Imamo da su $\mathcal{S}_\alpha$ i $\mathcal{S}_\beta$ dvije separabilne strukture izračunljivosti na $(\mathbb{R}, d)$. Pitamo se da li su one jednake.
Budući da je $\operatorname{Im} \alpha = \mathbb{Q}$ postoji $i \in \mathbb{N}$ tako da je $\alpha_i = 0$. Slijedi da je $\beta_i = \gamma$, pa zaključujemo da je γ izračunljiva točka u $(\mathbb{R}, d, \beta)$. Stoga je $(\gamma, \gamma, \dots)$ izračunljiv niz u $(\mathbb{R}, d, \beta)$, pa je $(\gamma, \gamma, \dots) \in \mathcal{S}_\beta$. No, ovaj niz nije element od $\mathcal{S}_\alpha$. Naime, kada bi vrijedilo $(\gamma, \gamma, \dots) \in \mathcal{S}_\alpha$, tada bi γ bila izračunljiva točka u $(\mathbb{R}, d, \alpha)$ pa bi prema korolaru 3.0.35 *slijedilo da je γ rekurzivan broj, što je u kontradikciji s izborom od γ. Dakle, $\mathcal{S}_\alpha \neq \mathcal{S}_\beta$.*

Definicija 4.2.4. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je $\mathcal{S}$ struktura izračunljivosti na (X, d). Neka je $x_0 \in X$. Kažemo da je x_0* ***izračunljiva točka u $\mathcal{S}$*** *ako je konstantan niz $(x_0, x_0, \dots) \in \mathcal{S}$.*

Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor te $x_0 \in X$. Pretpostavimo da je x_0 izračunljiva točka u (X, d, α). Tada je $(x_0, x_0, \dots)$ izračunljiv niz u (X, d, α), što znači da je $(x_0, x_0, \dots) \in \mathcal{S}_\alpha$ pa je x_0 izračunljiva točka u $\mathcal{S}_\alpha$.
Obratno, ako je x_0 izračunljiva točka u $\mathcal{S}_\alpha$, onda na sličan način zaključujemo da je x_0 izračunljiva točka u (X, d, α).

Propozicija 4.2.5. *Neka je $\mathcal{S}$ struktura izračunljivosti na metričkom prostoru (X, d) te neka je $a \in X$. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

1. *a je izračunljiva točka u $\mathcal{S}$,*

2. *postoji $(x_i) \in \mathcal{S}$ tako da je $a = x_{i_0}$ za neki $i_0 \in \mathbb{N}$,*

3. *postoje* $(x_i) \in \mathcal{S}$ *i rekurzivna funkcija* $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *tako da je* $d(a, x_{f(k)}) < 2^{-k}$, *za svaki* $k \in \mathbb{N}$

Dokaz. Pretpostavimo da vrijedi 1. Budući da je a izračunljiva točka u $\mathcal{S}$ za niz definiran s $x_i = a, \forall i \in \mathbb{N}$ vrijedi $(x_i) \in \mathcal{S}$. Iz ovoga je očito da vrijedi tvrdnja 2.

Pretpostavimo da vrijedi 2. Definirajmo funkciju $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ s $f(k) = i_0, \forall k \in \mathbb{N}$. Funkcija f je rekurzivna te za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$d(a, x_{f(k)}) = 0 < 2^{-k}.$$

Pretpostavimo da vrijedi 3. Neka je (y_i) niz u X definiran s $y_i = a$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Definiramo funkciju $F\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ s $F(i,k) = f(k)$ za sve $i, k \in \mathbb{N}$. Očito je F rekurzivna funkcija. Iz 3. slijedi

$$d(y_i, x_{F(i,k)}) < 2^{-k}, \ \forall i, k \in \mathbb{N}.$$

Prema svojstvu 2. iz definicije strukture izračunljivosti, slijedi da je $(y_i) \in \mathcal{S}$, odnosno a je izračunljiva točka u $\mathcal{S}$. □

Definicija 4.2.6. *Ako je* $\mathcal{S}$ *struktura izračunljivosti na metričkom prostoru* (X, d) *onda sa* $\mathcal{S}^0$ *označavamo skup svih izračunljivih točaka u* $\mathcal{S}$.

Primjer 4.2.7. *Neka je X neprebrojiv skup te d diskretna metrika na X. Definiramo*

$$S = \{(a, a, \ldots) \mid a \in X\}.$$

Tvrdimo da je S *struktura izračunljivosti na* (X, d).

Ako su $(x_i), (y_j) \in S$ *onda je* $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$, $(i, j) \mapsto d(x_i, y_j)$ *konstantna funkcija s vrijednošću 0 ili 1, pa je stoga rekurzivna.*

Nadalje, neka je $(x_i) \in S$, $f\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ *rekurzivna funkcija te* (y_i) *niz u X takav da je*

$$d(y_i, x_{f(i,k)}) < 2^{-k}, \ \forall i, k \in \mathbb{N}.$$

Tada je

$$y_i = x_{f(i,k)}, \ \forall i, k \in \mathbb{N},$$

tj. (y_i) *je konstantan niz u X pa slijedi da je* $(y_i) \in S$.

Dakle, S *je struktura izračunljivosti na* (X, d). *Uočimo da je* S *neprebrojiv skup. Nadalje,* $S^0 = X$, *dakle i* S^0 *je neprebrojiv skup.*

Definicija 4.2.8. *Neka je* (X, d) *metrički prostor,* (x_n) *niz u X i* $a \in X$. *Kažemo da niz* (x_n) ***konvergira*** *(ili teži) prema a u metričkom prostoru* (X, d) *ako za svaki* $\varepsilon > 0$ *postoji* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tako da je*

$$d(x_n, a) < \varepsilon, \ \forall n \geqslant n_0.$$

Kažemo još da je a ***limes niza*** (x_n) *i pišemo* $x_n \to a$.

Propozicija 4.2.9 (Jedinstvenost limesa niza)**.** *Neka je (X,d) metrički prostor, neka je (x_n) niz u X te neka su $a,b \in X$ tako da vrijedi $x_n \to a$ i $x_n \to b$. Tada je $a = b$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. $a \neq b$. Tada je $d(a,b) > 0$. Definiramo $\varepsilon = \frac{d(a,b)}{2}$.
Zbog $x_n \to a$ postoji $n_1 \in \mathbb{N}$ tako da je $d(x_n,a) < \varepsilon, \forall n \geqslant n_1$.
Zbog $x_n \to b$ postoji $n_2 \in \mathbb{N}$ tako da je $d(x_n,b) < \varepsilon, \forall n \geqslant n_2$.

Neka je $n = \max\{n_1,n_2\}$. Tada vrijedi

$$d(a,b) \leqslant d(x_n,a) + d(x_n,b) < \varepsilon + \varepsilon = d(a,b).$$

Došli smo do kontradikcije. Prema tome je $a = b$. □

Napomena 4.2.10. *Neka je (X,d) metrički prostor, (x_n) niz u X te $a \in X$ točka takva da je $d(a,x_j) < 2^{-j}, \forall j \in \mathbb{N}$. Tada $x_j \to a$.*

Naime, ako je $\varepsilon > 0$ onda postoji $j_0 \in \mathbb{N}$ tako da vrijedi $2^{-j_0} < \varepsilon$. Tada za svaki $j \in \mathbb{N}$, $j \geqslant j_0$ vrijedi

$$2^{-j} \leqslant 2^{-j_0} \text{ pa je } 2^{-j} < \varepsilon.$$

Slijedi $d(a,x_j) < \varepsilon$, za svaki $j \geqslant j_0$.

Propozicija 4.2.11. *Neka je $\mathcal{S}$ separabilna struktura izračunljivosti na metričkom prostoru (X,d). Tada je $\mathcal{S}$ prebrojiv skup. Posebno, $\mathcal{S}^0$ je prebrojiv skup.*

Dokaz. Prema propoziciji 4.0.52 postoji efektivni separirajući niz α u (X,d) takav da je $\mathcal{S} = \mathcal{S}_\alpha$. Neka je $x \in \mathcal{S}$, $x = (x_i)$. Tada je x izračunljiv niz u (X,d,α) pa postoji $F_x \in \mathcal{R}(\mathbb{N}^2,\mathbb{N})$ takva da je

$$d(x_i, \alpha_{F_x(i,j)}) < 2^{-j}, \ \forall i,j \in \mathbb{N}.$$

Tvrdimo da je funkcija $\mathcal{S} \to \mathcal{R}(\mathbb{N}^2,\mathbb{N})$, $x \mapsto F_x$ injekcija.

Pretpostavimo da su $x,y \in \mathcal{S}$ takvi da je $F_x = F_y$. Neka je $i \in \mathbb{N}$. Tada za svaki $j \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$d(x_i, \alpha_{F_x(i,j)}) < 2^{-j}$$

$$d(y_i, \alpha_{F_y(i,j)}) < 2^{-j}.$$

Prema napomeni niz $(\alpha_{F_x(i,j)})_{j\in\mathbb{N}}$ teži prema x_i, analogno $(\alpha_{F_y(i,j)})_{j\in\mathbb{N}}$ teži prema y_i. No, ovi nizovi su jednaki pa zbog jedinstvenosti limesa niza slijedi da je $x_i = y_i$.

Dakle, $x_i = y_i$, za sve $i \in \mathbb{N}$, prema tome je $x = y$. Time smo dokazali da je funkcija $\mathcal{S} \to \mathcal{R}(\mathbb{N}^2,\mathbb{N})$, $x \mapsto F_x$ injekcija.

Skup $\mathcal{R}(\mathbb{N}^2,\mathbb{N})$ je prebrojiv, pa je i $\mathcal{S}$ prebrojiv.

Nadalje, funkcija $\mathcal{S}^0 \to \mathcal{S}$, $x \mapsto (x,x,\ldots)$ je očito injekcija, pa slijedi da je $\mathcal{S}^0$ prebrojiv skup.

Alternativno, $\mathcal{S}^0 = \bigcup_{(x_i)\in\mathcal{S}}\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, pa je $\mathcal{S}^0$ prebrojiv kao prebrojiva unija prebrojivih skupova. □

Primjer 4.2.12. *Neka je $(\mathbb{R}, d)$ metrički prostor gdje je d euklidska metrika. Neka je $x \in \mathbb{R}$. Tada postoji separabilna struktura izračunljivosti $\mathcal{S}$ na $(\mathbb{R}, d)$ takva da vrijedi $x \in \mathcal{S}^0$.*

Neka je α niz definiran u primjeru 3.0.32. *Definiramo niz $\beta\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sa $\beta_i = \alpha_i + x$. Tada je $(\mathbb{R}, d, \beta)$ izračunljiv metrički prostor (dokazujemo na isti način kao u primjeru 4.2.3), odnosno $\mathcal{S}_\beta$ je separabilna struktura izračunljivosti. Kako je $\alpha_1 = 0$, tako je $\beta_1 = x$. Dakle, $x \in (\mathcal{S}_\beta)^0$.*

Primjer 4.2.13. *Neka je d euklidska metrika na $[0,1]$. Neka je $\alpha\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ funkcija definirana s*

$$\alpha(i) = \frac{E(i,0)}{l(E(i,0) + E(i,1))},$$

pri čemu je $l\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $l(x) = \begin{cases} x, & x \geqslant 1 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$.

Primijetimo da je $\operatorname{Im}\alpha = \{q \in \mathbb{Q} \mid 0 \leqslant q \leqslant 1\} = \mathbb{Q} \cap [0,1]$. *Očito je α rekurzivna funkcija, pa zaključujemo da je α efektivan separirajući niz u $([0,1], d)$. Stoga je $\mathcal{S}_\alpha$ separabilna struktura izračunljivosti na $([0,1], d)$.*

Teorem 4.2.14. *Neka je d euklidska metrika na $[0,1]$. Tada postoji jedistvena separabilna struktura izračunljivosti na $([0,1], d)$.*

Dokaz. Neka je α niz iz primjera 4.2.13. Znamo da je $\mathcal{S}_\alpha$ separabilna struktura izračunljivosti. Dokažimo da je to jedina separabilna struktura izračunljivosti na $([0,1], d)$.

Pretpostavimo da je $\mathcal{S}$ separabilna struktura izračunljivosti na $([0,1], d)$. Tada je $\mathcal{S} = \mathcal{S}_\beta$ gdje je β efektivan separirajući niz u $([0,1], d)$. Budući da je β gust niz u $([0,1], d)$ postoji $i_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$d(0, \beta_{i_0}) < \frac{1}{4}, \quad \text{tj.} \quad \beta_{i_0} < \frac{1}{4}.$$

Neka je $k \in \mathbb{N}$. Tada postoje $i, j \in \mathbb{N}$ takvi da je

$$\begin{aligned} d(0, \beta_i) &< \frac{2^{-k}}{4}, \\ d(1, \beta_j) &< \frac{2^{-k}}{4}. \end{aligned}$$

Slijedi

$$\beta_i < \frac{2^{-k}}{4}, \tag{4.6}$$

$$1 - \beta_j < \frac{2^{-k}}{4}, \tag{4.7}$$

pa zbrajanjem ovih nejednakosti dobivamo

$$1 + \beta_i - \beta_j < \frac{2^{-k}}{2}$$

iz čega slijedi

$$1 - \frac{2^{-k}}{2} < \beta_j - \beta_i.$$

Stoga je

$$d(\beta_i, \beta_j) = \mid \beta_i - \beta_j \mid = \beta_j - \beta_i > 1 - \frac{2^{-k}}{2}.$$

Dakle, $d(\beta_i, \beta_j) > 1 - \frac{2^{-k}}{2}$.

Nadalje, iz (4.6) slijedi $\beta_i \in [0, \frac{1}{4}\rangle$ pa zbog $\beta_{i_0} \in [0, \frac{1}{4}\rangle$ imamo $\mid \beta_i - \beta_{i_0} \mid < \frac{1}{4}$, tj. $(\beta_i - \beta_{i_0}) < \frac{1}{4}$. Dakle, za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoje $i, j \in \mathbb{N}$ takvi da je

$$d(\beta_i, \beta_j) > 1 - \frac{2^{-k}}{2} \tag{4.8}$$

$$d(\beta_i, \beta_{i_0}) < \frac{1}{4}. \tag{4.9}$$

Pretpostavimo sada da su $i, j \in \mathbb{N}$ takvi da vrijedi (4.8) i (4.9).
Tvrdimo da je tada $d(0, \beta_i) < 2^{-k}$. Očito ne može vrijediti $\beta_i, \beta_j \in [0, 1 - \frac{2^{-k}}{2}]$ jer bi u tom slučaju vrijedilo $d(\beta_i, \beta_j) \leqslant 1 - \frac{2^{-k}}{2}$. Stoga se bar jedan od brojeva β_i i β_j nalazi u $[1 - \frac{2^{-k}}{2}, 1]$. No, $\beta_i \notin [1 - \frac{2^{-k}}{2}, 1]$ jer bi u suprotnom slučaju vrijedilo $\beta_{i_0} < \frac{1}{4} < \frac{1}{2} \leqslant 1 - \frac{2^{-k}}{2} \leqslant \beta_i$ što bi povlačilo da je $d(\beta_{i_0}, \beta_i) \geqslant \frac{1}{4}$. Stoga je

$$\beta_j \in [1 - \frac{2^{-k}}{2}, 1]. \tag{4.10}$$

Analogno zaključujemo da ne vrijedi $\beta_i, \beta_j \in [\frac{2^{-k}}{2}, 1]$, pa slijedi da se bar jedan od brojeva β_i, β_j nalazi u $[0, \frac{2^{-k}}{2}\rangle$. No to ne može biti β_j zbog (4.10). Prema tome $\beta_i \in [0, \frac{2^{-k}}{2}\rangle$, dakle $\beta_i < \frac{2^{-k}}{2}$ pa je $d(0, \beta_i) < 2^{-k}$.

Definirajmo skup

$$\omega = \{(k, i, j) \mid d(\beta_i, \beta_j) > 1 - \frac{2^{-k}}{2}, \, d(\beta_i, \beta_{i_0}) < \frac{1}{4}\}.$$

Neka su

$$\omega_1 = \{(k, i, j) \mid d(\beta_i, \beta_j) > 1 - \frac{2^{-k}}{2}\}$$

$$\omega_2 = \{(k, i, j) \mid d(\beta_i, \beta_{i_0}) < \frac{1}{4}\}.$$

Tada je $\omega = \omega_1 \cap \omega_2$. Funkcija

$$\mathbb{N}^3 \to \mathbb{R},\ (k, i, j) \mapsto d(\beta_i, \beta_j)$$

je rekurzivna, a također je rekurzivna i funkcija

$$\mathbb{N}^3 \to \mathbb{R},\ (k, i, j) \mapsto 1 - \frac{2^{-k}}{2}.$$

Prema korolaru 2.0.23 skup ω_1 je rekurzivno prebrojiv. Analogno zaključujemo da je ω_2 rekurzivno prebrojiv. Skup ω je rekurzivno prebrojiv kao presjek ω_1 i ω_2.

Za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoje $i, j \in \mathbb{N}$ takvi da vrijedi (4.8) i (4.9), odnosno za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoje $i, j \in \mathbb{N}$ takvi da je $(k, i, j) \in \omega$. Iz teorema 2.0.20 slijedi da postoje rekurzivne funkcije $f, g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takve da vrijedi

$$(k, f(k), g(k)) \in \omega, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Dokazali smo ranije da (4.8) i (4.9), tj. $(k, i, j) \in \omega$ povlači $d(0, \beta_i) < 2^{-k}$. Stoga vrijedi

$$(k, f(k), g(k)) \in \omega \Rightarrow d(0, \beta_{f(k)}) < 2^{-k},\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Dakle, 0 je izračunljiva točka u $([0, 1], d, \beta)$. Iz korolara 3.0.40 slijedi da je funkcija

$$\mathbb{N} \to \mathbb{R},\ i \mapsto d(0, \beta_i)$$

rekurzivna, odnosno (β_i) je rekurzivan niz. Iz ovoga i propozicije 1.4.8 slijedi da je funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{R},\ (i, j) \mapsto d(\beta_i, \alpha_j)$ rekurzivna.

Prema korolaru 2.0.23 skup

$$\gamma = \{(i, k, j) \mid d(\beta_i, \alpha_j) < 2^{-k}\}$$

je rekurzivno prebrojiv. Za sve $i, k \in \mathbb{N}$ postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je $(i, k, j) \in \gamma$ (zbog gustoće niza α). Prema teoremu 2.0.20 postoji rekurzivna funkcija $F \colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva je

$$(i, k, F(i, k)) \in \gamma,\ \forall i, k \in \mathbb{N}.$$

Tada je $d(\beta_i, \alpha_{F(i,k)}) < 2^{-k}, \forall i, k \in \mathbb{N}$, odnosno $\beta \preceq \alpha$. Stoga je $\beta \sim \alpha$, pa iz propozicije 4.0.48 slijedi $\mathcal{S}_\alpha = \mathcal{S}_\beta$.

Dakle, $\mathcal{S} = \mathcal{S}_\alpha$ i time je tvrdnja dokazana.

$\square$

4.3 Efektivna potpuna omeđenost

Definicija 4.3.1. *Neka je (X, d) metrički prostor te $S \subseteq X$. Kažemo da je S omeđen u metričkom prostoru (X, d) ako postoje $x_0 \in X$ i $r > 0$ takav da je $S \subseteq K(x_0, r)$.*

Uočimo sljedeće: ako je S omeđen skup u metričkom prostoru (X, d) onda za svaki $x \in X$ postoji $r > 0$ takav da vrijedi $S \subseteq K(x, r)$.

Naime, imamo $S \subseteq K(x_0, r)$ za neke $x_0 \in X$ i $r > 0$. Ako je $x \in X$ onda definiramo $s = d(x, x_0) + r$ te tada vrijedi $K(x_0, r) \subseteq K(x, s)$, jer ako je $a \in K(x_0, r)$ onda je

$$d(a, x) \leqslant d(a, x_0) + d(x_0, x) < r + d(x_0, x) = s$$

pa je $a \in K(x, s)$.

Propozicija 4.3.2. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka su $S_1, \ldots, S_n$ omeđeni skupovi u (X, d). Tada je $S_1 \cup \ldots \cup S_n$ omeđen skup u (X, d).*

Dokaz. Odaberemo $x_0 \in X$. Skupovi $S_1, \ldots, S_n$ su omeđeni pa vrijedi

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}\ \exists r_i > 0 \text{ takav da je } S_i \subseteq K(x_0, r_i).$$

Odaberemo $r = \max\{r_1, \ldots, r_n\}$. Tada je $S_1 \cup \ldots \cup S_n \subseteq K(x_0, r)$. □

Definicija 4.3.3. *Za metrički prostor kažemo da je* ***omeđen*** *ako je X omeđen skup u (X, d).*

Definicija 4.3.4. *Za metrički prostor (X, d) kažemo da je* ***potpuno omeđen*** *ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoje $n \in \mathbb{N}$ i $x_0, \ldots x_n \in X$ takvi da je*

$$X = K(x_0, \varepsilon) \cup \ldots \cup K(x_n, \varepsilon). \tag{4.11}$$

Uočimo sljedeće: ako je metrički prostor potpuno omeđen, onda je i omeđen. Naime, ako odaberemo bilo koji $\varepsilon > 0$ onda postoje $x_0, \ldots, x_n \in X$ takvi da vrijedi (4.11) pa prema prethodnoj propoziciji slijedi da je X omeđen skup.

Primjer 4.3.5. *Neka je $X \neq \emptyset$ te neka je d diskretna metrika na X. Metrički prostor (X, d) je omeđen, naime za $r = 2$ i proizvoljnu točku $x_0 \in X$ je $X = K(x_0, 2)$.*

Pretpostavimo sada da je X beskonačan. Tada (X, d) nije potpuno omeđen. U suprotnom bi za $\varepsilon = 1$ postojali $x_0, \ldots, x_n \in X$ takvi da vrijedi

$$X = K(x_0, \varepsilon) \cup \ldots \cup K(x_n, \varepsilon) = \{x_0\} \cup \ldots \cup \{x_n\}$$

ali to bi značilo da je X konačan skup, što je nemoguće.

Lema 4.3.6. *Neka je (X, d) metrički prostor, $x, y \in X$ te $r > 0$. Pretpostavimo da je $y \in K(x, r)$. Tada je $K(x, r) \subseteq K(y, 2r)$.*

Dokaz. Neka je $z \in K(x, r)$ proizvoljna točka. Tada je

$$\begin{aligned} & d(z, y) \leqslant d(z, x) + d(x, y) < r + r < 2r \\ & \Rightarrow z \in K(y, 2r), \end{aligned}$$

odnosno $K(x, r) \subseteq K(y, 2r)$. □

Propozicija 4.3.7. *Neka je (X, d) metrički prostor te $\alpha = (\alpha_i)$ gust niz u (X, d). Tada je (X, d) potpuno omeđen ako i samo ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $N \in \mathbb{N}$ takav da je $X = K(\alpha_0, \varepsilon) \cup \ldots \cup K(\alpha_N, \varepsilon)$.*

Dokaz. Ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji takav N onda je (X, d) potpuno omeđen.

Obratno, pretpostavimo da je (X, d) potpuno omeđen. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoje $n \in \mathbb{N}$ i $x_0, \ldots, x_n \in X$ takvi da je

$$X = K(x_0, \frac{\varepsilon}{2}) \cup \ldots \cup K(x_n, \frac{\varepsilon}{2}).$$

Zbog gustoće niza α postoje $i_0, \ldots, i_n \in \mathbb{N}$ takvi da je

$$\alpha_{i_0} \in K(x_0, \frac{\varepsilon}{2}), \ldots, \alpha_{i_n} \in K(x_n, \frac{\varepsilon}{2}),$$

a zbog leme vrijedi

$$K(x_0, \frac{\varepsilon}{2}) \subseteq K(\alpha_{i_0}, \varepsilon), \ldots, K(x_n, \frac{\varepsilon}{2}) \subseteq K(\alpha_{i_n}, \varepsilon).$$

Neka je $N = \max\{i_0, \ldots, i_n\}$. Tada je

$$X = K(\alpha_0, \varepsilon) \cup \ldots \cup K(\alpha_N, \varepsilon).$$

□

Napomena 4.3.8. *Neka je (X, d) metrički prostor te niz α gust u (X, d). Tada je (X, d) potpuno omeđen ako i samo ako za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoji $N \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi*

$$X = K(\alpha_0, 2^{-k}) \cup \ldots \cup K(\alpha_N, 2^{-k}).$$

Ako je (X, d) potpuno omeđen onda iz prethodne propozicije slijedi da za svaki $k > 0$ postoji takav N (uzmemo $\varepsilon = 2^{-k}$).

Obratno, ako za svaki k postoji takav N onda za $\varepsilon > 0$ odaberemo $k \in \mathbb{N}$ takav da je $2^{-k} < \varepsilon$. Postoji N takav da je

$$X = K(\alpha_0, 2^{-k}) \cup \ldots \cup K(\alpha_N, 2^{-k})$$

pa slijedi

$$X = K(\alpha_0, \varepsilon) \cup \ldots \cup K(\alpha_N, \varepsilon),$$

stoga je (X, d) potpuno omeđen.

Pretpostavimo da je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor takav da je metrički prostor (X, d) potpuno omeđen. Znamo:

$$\forall k \in \mathbb{N}\, \exists N \in \mathbb{N} \text{ takav da vrijedi } X = K(\alpha_0, 2^{-k}) \cup \ldots \cup K(\alpha_N, 2^{-k}).$$

Pitanje koje se prirodno postavlja je postoji li rekurzivna funkcija $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je

$$X = K(\alpha_0, 2^{-k}) \cup \ldots \cup K(\alpha_{f(k)}, 2^{-k}),\ \forall k \in \mathbb{N}. \tag{4.12}$$

Ako takva funkcija postoji, onda za izračunljiv metrički prostor (X, d, α) kažemo da je **efektivno potpuno omeđen**.

Teorem 4.3.9. *Neka je (X, d) metrički prostor te α i β efektivni separirajući nizovi u (X, d) takvi da vrijedi $\alpha \sim \beta$. Neka je (X, d, α) efektivno potpuno omeđen. Tada je i (X, d, β) efektivno potpuno omeđen .*

Dokaz. Postoji rekurzivna funkcija $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da vrijedi (4.12). Tada je

$$X = K(\alpha_0, \frac{2^{-k}}{2}) \cup \ldots \cup K(\alpha_{f(k+1)}, \frac{2^{-k}}{2}),\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Jer su α i β efektivni separirajući nizovi slijedi da za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoje $i_0, \ldots, i_{f(k)} \in \mathbb{N}$ takvi da vrijedi

$$d(\alpha_0, \beta_{i_0}) < \frac{2^{-k}}{2}$$
$$\ldots$$
$$d(\alpha_{f(k)}, \beta_{i_{f(k)}}) < \frac{2^{-k}}{2}.$$

Odnosno, prema lemi 4.3.6 vrijedi

$$K(\alpha_0, \frac{2^{-k}}{2}) \subseteq K(\beta_{i_0}, 2^{-k})$$
$$\ldots$$
$$K(\alpha_{f(k)}, \frac{2^{-k}}{2}) \subseteq K(\beta_{i_{f(k)}}, 2^{-k}).$$

Definirajmo $N = \max\{i_0, \dots, i_{f(k)}\}$. Slijedi

$$X = K(\beta_0, 2^{-k}) \cup \dots \cup K(\beta_N, 2^{-k}).$$

Iz pretpostavke teorema je $\alpha \sim \beta$, odnosno α je izračunljiv niz u (X, d, β) što povlači postojanje rekurzivne funkcije

$$F\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} \text{ takve da je } d(\alpha_i, \beta_{F(i,k)}) < 2^{-k}.$$

Neka je definirana funkcija $g\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $g(i,k) = F(i, k+1)$. Ta funkcija je rekurzivna i vrijedi

$$d(\alpha_i, \beta_{g(i,k)}) < \frac{2^{-k}}{2}.$$

Vrijedi

$$\begin{gathered}
K(\alpha_0, \frac{2^{-k}}{2}) \subseteq K(\beta_{g(0,k)}, 2^{-k}) \\
\vdots \\
K(\alpha_i, \frac{2^{-k}}{2}) \subseteq K(\beta_{g(i,k)}, 2^{-k}) \\
\vdots \\
K(\alpha_{f(k+1)}, \frac{2^{-k}}{2}) \subseteq K(\beta_{g(f(k+1),k)}, 2^{-k}).
\end{gathered}$$

Definiramo funkciju $H\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sa

$$H(k) = \max\{g(i,k) \mid 0 \leqslant i \leqslant f(k+1)\}.$$

Tada je

$$X = K(\beta_0, 2^{-k}) \cup \dots \cup K(\beta_{H(k)}, 2^{-k}),\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Treba još pokazati da je funkcija H rekurzivna. U tu svrhu definiramo funkciju $\tilde{H}\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ sa

$$\tilde{H}(j,k) = \max\{g(i,k) \mid 0 \leqslant i \leqslant j\},$$

a tada je $H(k) = \tilde{H}(f(k+1), k)$. Vrijedi

$$\begin{aligned}
\tilde{H}(0,k) &= g(0,k) \\
\tilde{H}(j+1,k) &= \max\{g(0,k), \dots g(j+1,k)\} \\
&= \max\{\tilde{H}(j,k), g(j+1,k)\} \\
&= G(\tilde{H}(j,k), j, k),
\end{aligned}$$

gdje je funkcija $G\colon \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ definirana sa

$$G(a, j, k) = \max\{a, g(j + 1, k)\}.$$

Dakle, $\tilde{H}$ je dobivena primitivnom rekurzijom od funkcije $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $k \mapsto g(0, k)$ i funkcije G. Stoga je $\tilde{H}$ rekurzivna, odnosno funkcija H je rekurzivna. Dakle, izračunljiv metrički prostor (X, d, β) je efektivno potpuno omeđen. $\square$

Bibliografija

[1] M. Vuković, *Izračunljivost*, skripta, PMF-MO, Zagreb, 2009.

[2] Z. Iljazović, *Rekurzivnost lančastih i cirkularno lančastih kontinuuma*, doktorska disertacija, PMF-MO, Zagreb, 2009.

[3] Z. Iljazović, *Isometries and Computability Structures*, Journal of Universal Computer Science, 16(2010.), 2569-2596.

[4] Z. Iljazović, L. Validžić *Maximal Computability Structures*, The Bulletin of Simbolic Logic, prihvaćeno za objavu.

[5] M. B. Pour-El, I. Richards, *Computability in Analysis and Physics*, Springer-Verlag, Berlin-Heielberg-New York, 1989.

[6] K. Weihrauch, *Computable Analysis*, Springer, Berlin, 2000.

[7] M. Yasugi, T. Mori, Y. Tsujji, *Effective properties of sets and functions in metric spaces with computability structure*, Theoretical Computer Science, 66:127-138, 1999.

[8] W. A. Sutherland, *Introduction to metric and topological spaces*, Oxford University Press, 1975.

Sažetak

U ovom radu smo pojam rekurzivne funkcije proširili na funkcije s realnim vrijednostima. Dokazali smo da su zbroj, apsolutna vrijednost i umnožak rekurzivnih funkcija također rekurzivne funkcije. Definirali smo rekurzivno prebrojive skupove i dokazali na koji način djeluju rekurzivne funkcije na takve skupove. Pojmove izračunljivog metričkog prostora, izračunljive točke i izračunljivog niza smo uveli u trećem poglavlju. Promatrali smo euklidsku metriku d na $\mathbb{R}$ te na prirodan način uveli niz α takav da je $(\mathbb{R}, d, \alpha)$ izračunljiv metrički prostor. Dokazali smo da je x izračunljiva točka u $(\mathbb{R}, d, \alpha)$ ako i samo ako je x rekurzivan broj.

U četvrtom poglavlju smo definirali što su strukture izračunljivosti, efektivni separirajući nizovi, separabilne strukture izračunljivosti i sl. Dokazali smo da je skup svih rekurzivnih brojeva prebrojiv. Glavni rezultat je teorem u kojem tvrdimo da postoji jedinstvena separabilna struktura izračunljivosti na metričkom prostoru $([0, 1], d)$, pri čemu je d euklidska metrika. Na kraju se smo se dotaknuli pojma omeđenosti u metričkim prostorima te definirali kada je izračunljiv metrički prostor efektivno potpuno omeđen.

Summary

In this paper, we expanded the notion of a recursive function to the function with real values. We have proven that the sum, the absolute value and the product of the recursive functions is also a recursive function. We introduced the notion of a recursively enumerable set. The preimage and image of a recursively enumerable set under the recursive function is a recursively enumerable set.

In the third chapter we introduced the notions of a computable metric space, a computable point and a computable sequence.

Let d be the euclidean metric on $\mathbb{R}$ and α sequence introduced naturally such that $(\mathbb{R}, d, \alpha)$ is a computable metric space. We proved that x is a computable point in $(\mathbb{R}, d, \alpha)$ if and only if x is a recursive number.

In the fourth chapter we defined the notion of a computability structure, a effective separating sequence, a separable computability structure etc. We have shown that the set of all recursive numbers is countable. The main result is a theorem in which we claim that there is a unique separable computability structure on the metric space $([0, 1], d)$, where d is the euclidean metric.

Finally we examined boundedness in metric space and defined when a computable metric space is effectively totally bounded.

Životopis

Zovem se Edita Kulović, rođena sam 08.07.1991. u Doboju, BiH. Osnovnu školu sam završila u Splitu, a također i 3. gimnaziju Split, prirodoslovno – matematičkog programa. Školovanje nastavljam u Zagrebu gdje sam 2014. godine završila Preddiplomski sveučilišni studij matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu. Pri istom fakultetu upisujem Diplomski sveučilišni studij Računarstvo i matematika.