Približno računanje vrijednosti elementarnih funkcija

Žugaj, Doris

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Doris Žugaj

PRIBLIŽNO RAČUNANJE VRIJEDNOSTI ELEMENTARNIH FUNKCIJA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Dijana Ilišević

Zagreb, lipanj 2016.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Ovaj diplomski rad posvećujem svojim roditeljima, bratu i dečku koji su me uvijek ohrabrivali i podržavali tijekom mog obrazovanja. Na tome sam im jako zahvalna.

Sadržaj

Uvod

Pri računanju izvodimo tri bitna koraka: računanje, provjeru rezultata i procjenu točnosti. U mnogim slučajevima računamo s približnim brojevima ili dobivamo približno rješenje. Ako je metoda računanja točna, u svakom koraku računanja postojat će greška operacije i greška zaokruživanja. Ako tražimo rješenje problema sličnog zadanom, imat ćemo i grešku metode. Prvo poglavlje ovog diplomskog rada govori o greškama, njihovim uzrocima te o postupku zaokruživanja.

Cilj ovog rada je opisati neke tehnike približnog računanja vrijednosti elementarnih funkcija. Jedan od pogodnih načina računanja vrijednosti funkcija su verižni razlomci, stoga su u drugom poglavlju dane osnove teorije verižnih razlomaka: postupak određivanja konvergenti verižnog razlomka i njihova svojstva, kao i razvoji nekih funkcija u verižne razlomke (racionalne funkcije, eksponencijalne funkcije, funkcije kvadratnog korijena i funkcije tangens) što se koristi u trećem poglavlju.

U trećem poglavlju detaljno su opisane još neke tehnike računanja vrijednosti elementarnih funkcija. Na početku je opisan Hornerov algoritam te njegova primjena na računanje vrijednosti racionalnih funkcija. Zatim su dane osnove teorije redova kako bi se objasnilo računanje vrijednosti funkcija pomoću razvoja funkcije u Taylorov red potencija. Na kraju ovog poglavlja objašnjeno je korištenje iterativnih metoda za određivanje približne vrijednosti funkcija na primjerima funkcije recipročne vrijednosti, kvadratnog korijena, recipročne vrijednosti kvadratnog korijena te kubnog korijena.

Kako bi se bolje razumjeli postupci računanja vrijednosti funkcija, za svaku elementarnu funkciju obrađenu u ovom radu dan je jedan ili više primjera s rješenjima te ocjenama grešaka.

Poglavlje 1

Približni brojevi

U raznim računanjima koja susrećemo u svakodnevnom životu, u prirodnim znanostima i tehnici radimo s približnim brojevima i približnim formulama. U tom računanju krećemo, na primjer, od brojeva dobivenih mjerenjem različitih veličina. Ta mjerenja, bez obzira kako se vješto izvela i s koliko god preciznim instrumentima, nikad ne mogu biti apsolutno točna. Stoga su brojevi dobiveni mjerenjem približni mjerni brojevi tih veličina. U formulama često susrećemo konstante koje označavaju približne brojeve. Također, tijekom računanja neke brojeve zamjenjujemo njima približnim brojevima. Iz svega toga je jasno da će u svim ovim slučajevima rezultat računanja biti približan rezultat točnog rezultata.

1.1 Apsolutna i relativna greška

Približan broj a je broj koji se malo razlikuje od točnog broja A i koristi se umjesto broja A u računima. Ako je $a < A$, onda kažemo da je *a donja aproksimacija broja A*, a ako je $a > A$, onda kažemo da je *a gornja aproksimacija broja A*. Na primjer, za $\sqrt{2}$ broj 1.41 je donja aproksimacija, a broj 1.42 je gornja aproksimacija jer je $1.41 < \sqrt{2} < 1.42$. Ako je a približna vrijednost broja A, pišemo $a \approx A$.

Greškom Δa približnog broja a smatramo razliku između točnog broja A i približnog broja a, odnosno

$$\Delta a = A - a$$

(ponekad se greškom naziva razlika $a - A$). Ako je $A > a$, greška je pozitivna ($\Delta a > 0$), a ako je $A < a$, onda je greška negativna ($\Delta a < 0$). Kako bismo odredili točan broj A, potrebno je približnom broju a dodati grešku Δa:

$$A = a + \Delta a.$$

Dakle, točan broj možemo smatrati približnim brojem s greškom nula.

U mnogim slučajevima predznak greške nije poznat ili nije od praktične važnosti. Stoga se preporučuje korištenje *apsolutne greške približnog broja*:

$$\Delta = |\Delta a|\,.$$

Definicija 1.1.1. *Apsolutna greška Δ približnog broja a je apsolutna vrijednost razlike točnog broja A i približnog broja a:*

$$\Delta = |A - a|\,. \tag{1.1}$$

Razlikujemo dva slučaja:

1. Ako je poznat broj A, tada se apsolutna greška Δ jednostavno računa po formuli (1.1). Na primjer, ako je $A = 4.56786$ i $a = 4.568$, onda je

$$\Delta = |4.56786 - 4.568| = 0.00014 = 14 \cdot 10^{-5}.$$

2. Ako broj A nije poznat (što je najčešće slučaj), apsolutna greška Δ se ne može računati po formuli (1.1). Tada je korisno uvesti gornju procjenu apsolutne greške, tzv. *granicu apsolutne greške*.

Definicija 1.1.2. *Granica apsolutne greške približnog broja je svaki broj koji nije manji od apsolutne greške tog broja.*

Dakle, ako je Δ_a granica apsolutne greške približnog broja a koji se uzima umjesto točnog broja A, onda je

$$\Delta = |A - a| \leq \Delta_a. \tag{1.2}$$

Iz toga slijedi da se točan broj A nalazi između brojeva $a - \Delta_a$ i $a + \Delta_a$, odnosno

$$a - \Delta_a \leq A \leq a + \Delta_a. \tag{1.3}$$

Prema tome, $a - \Delta_a$ je donja aproksimacija broja A, a $a + \Delta_a$ njegova gornja aproksimacija. Kraće možemo pisati

$$A = a \pm \Delta_a.$$

Primjer 1.1.3. *Odredimo granicu apsolutne greške broja $a = 3.14$, koji se koristi umjesto broja π. Budući da imamo nejednakost $3.14 < \pi < 3.15$, slijedi da je $|a - \pi| < 0.01$ i stoga možemo uzeti da je $\Delta_a = 0.01$.*

Uočimo da za

$$3.14 < \pi < 3.142$$

imamo bolju ocjenu: $\Delta_a = 0.002$.

Primijetimo da je pojam granice apsolutne greške definiran u definiciji 1.1.2 jako širok. Naime, *granica apsolutne greške približnog broja a podrazumijeva bilo koji broj od beskonačno nenegativnih brojeva Δ_a koji zadovoljavaju nejednakost (1.2).* Prema tome, slijedi da se svaki broj koji prelazi granicu apsolutne greške približnog broja također naziva granica apsolutne greške tog broja. Praktični cilj je za Δ_a uzeti najmanji broj koji zadovoljava (1.2). Kada odabiremo, odnosno određujemo taj broj, kažemo da *ocjenjujemo* grešku približnog broja. Ocjena te greške važna je u računanju s približnim brojevima.

Kada se zapisuje približan broj dobiven mjerenjem, obično se zadaje granica apsolutne greške. Na primjer, ako je duljina dužine $l = 214$ cm s točnošću 0.5 cm, tada pišemo $l = 214$ cm $\pm$ 0.5 cm. Ovdje je granica apsolutne greške $\Delta_t = 0.5$ cm i točna duljina l dužine zadovoljava nejednakost 213.5 cm $\leq l \leq$ 214.5 cm.

Apsolutna greška i granica apsolutne greške nisu dovoljni za opisivanje točnosti mjerenja i računanja. Pretpostavimo da smo pri mjerenju duljine dva štapa dobili $l_1 = 100.8$ cm $\pm$ 0.1 cm i $l_2 = 5.2$ cm $\pm$ 0.1 cm. Granice apsolutne greške se podudaraju. Pri prvom mjerenju pogriješili smo za 0.1 cm na duljini preko 100 cm, a kod drugog mjerenja na duljini manjoj od 6 cm. Prvo mjerenje je preciznije od drugog. Prema tome, apsolutna greška i granica apsolutne greške nisu dovoljne za opisivanje točnosti mjerenja. Navedeni primjer pokazuje da je potrebno apsolutnu grešku promatrati u odnosu na jedinicu duljine, odnosno potrebno je usporediti omjere

$$\frac{0.1}{100.8} = 0.000992063 \quad \text{i} \quad \frac{0.1}{5.2} = 0.019230769.$$

Broj 0.000992063 relativna je greška približnog broja 100.8 koja je manja od relativne greške 0.019230769 približnog broja 5.2.

Definicija 1.1.4. *Relativna greška δ približnog broja a je omjer apsolutne greške Δ približnog broja i apsolutne vrijednosti točnog broja $A \neq 0$, odnosno*

$$\delta = \frac{\Delta}{|A|}. \tag{1.4}$$

Dakle, $\Delta = \delta\,|A|$.

Kao i kod apsolutne greške i ovdje uvodimo pojam *granice relativne greške*.

Definicija 1.1.5. *Granica relativne greške δ_a približnog broja a je svaki broj δ koji nije manji od relativne greške tog broja, odnosno*

$$\delta \leq \delta_a. \tag{1.5}$$

Odatle slijedi da je $\Delta \leq |A|\,\delta_a$. Dakle, za granicu apsolutne greške približnog broja a možemo uzeti

$$\Delta_a = |A|\,\delta_a. \tag{1.6}$$

Budući da je, u praktičnim situacijama, $A \approx a$, umjesto (1.6) često se koristi

$$\Delta_a = |a|\,\delta_a. \tag{1.7}$$

Iz te formule, znajući granicu relativne greške δ_a, dobivamo granicu točnog broja. Činjenicu da se točan broj nalazi između brojeva $a(1-\delta_a)$ i $a(1+\delta_a)$ možemo kraće zapisati kao

$$A = a(1 \pm \delta_a).$$

Neka je a približna vrijednost broja A. Neka je Δ_a granica apsolutne greške broja a. Stavimo da je $A > 0$, $a > 0$ i $\Delta_a < a$. Tada je

$$\delta = \frac{\Delta}{A} \leq \frac{\Delta_a}{a - \Delta_a}.$$

Sada broj

$$\delta_a = \frac{\Delta_a}{a - \Delta_a}$$

možemo uzeti za granicu relativne greške broja a. Slično dobivamo $\Delta = A\delta \leq (a + \Delta)\delta_a$, odakle je

$$\Delta_a = \frac{a\delta_a}{1 - \delta_a}.$$

Ako je Δ_a puno manji od a i δ_a puno manji od 1, onda možemo uzeti da je

$$\delta_a \approx \frac{\Delta_a}{a},$$

odnosno

$$\Delta_a \approx a\delta_a.$$

Primjer 1.1.6. *Masa 1 dm*^{3} *vode na* $0°C$ *je dana sa* $p = 999.847$ *g* ± 0.001 *g. Odredimo granicu relativne greške mase vode. Očito je* $\Delta_p = 0.001$ *g i* $p \leq 999.846$ *g. Stoga je*

$$\delta_p = \frac{0.001}{999.846} \approx 10^{-4}\%.$$

1.2 Osnovni uzroci grešaka

Greške u matematici mogu se podijeliti u pet skupina.

1. Greške uključene u iskaze problema. Matematička formulacija rijetko daje točnu sliku aktualne pojave i najčešće se radi o idealiziranom modelu. Promatrajući pojave u prirodi, prisiljeni smo, u pravilu, prihvatiti određene uvjete koji pojednostavljuju problem.

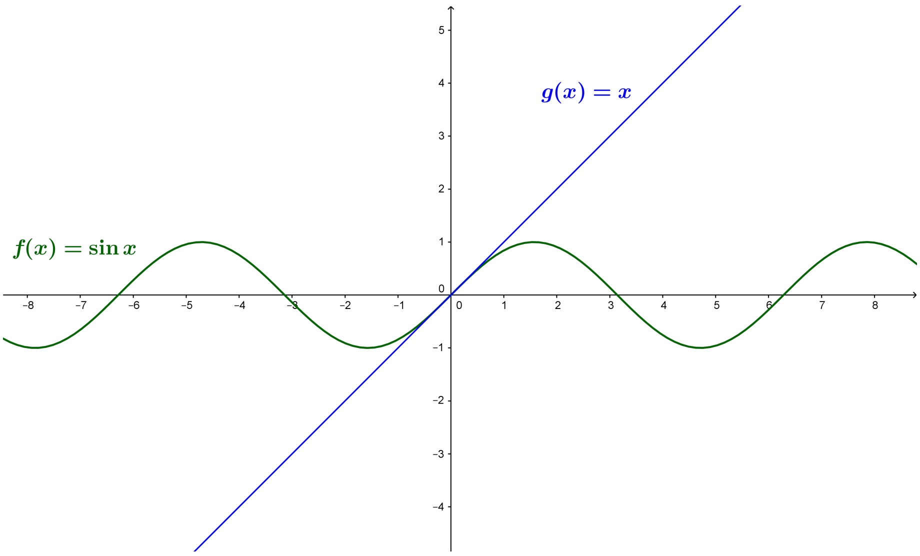
To je uzrok grešaka (*greška problema*).
Ponekad je teško ili čak nemoguće riješiti dani problem kada je formuliran precizno. U tom slučaju, problem se zamijeni sličnim problemom koji daje skoro ista rješenja. Taj uzrok greške naziva se *greška metode*.

2. Greške proizašle zbog prisutnosti beskonačnih postupaka u analizi. Funkcije uključene u matematičke formule često su navedene u obliku redova. Štoviše, mnoge se matematičke jednadžbe mogu riješiti samo opisujući beskonačne postupke čiji je limes traženo rješenje. Budući da se beskonačni postupci ne mogu izvršiti u konačnom broju koraka, prisiljeni smo u nekom trenutku stati i uzeti u obzir da je izračunata vrijednost približno rješenje. Prirodno, takav postupak uzrokuje pogreške. Takvu grešku zovemo *greška ostatka*.

Primjer 1.2.1. *Funkciju sinus možemo razviti u Taylorov red potencija:*

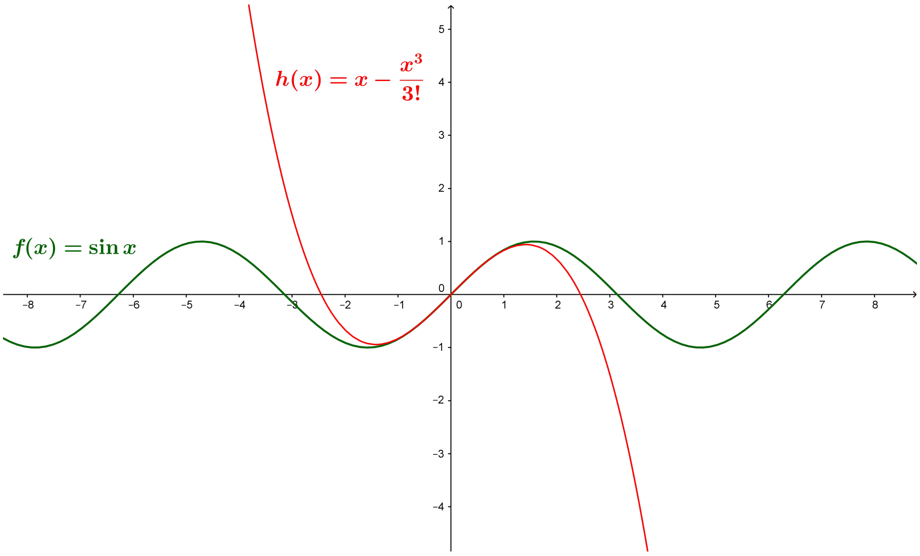
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!},$$

gdje je n prirodan broj. Pokazat ćemo kako pri grafičkim prikazima funkcija izgleda aproksimacija funkcije sinus pomoću njenog Taylorovog reda.



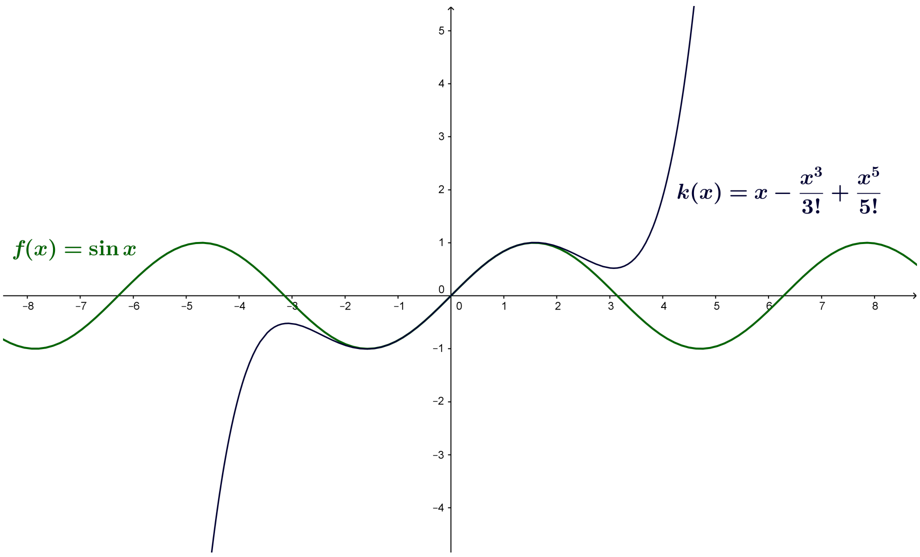
Slika 1.1: Taylorov polinom prvog stupnja za funkciju sinus

Vrijednosti funkcije sinus prikazane na slici 1.1 dobre su samo za vrijednosti x blizu nule.



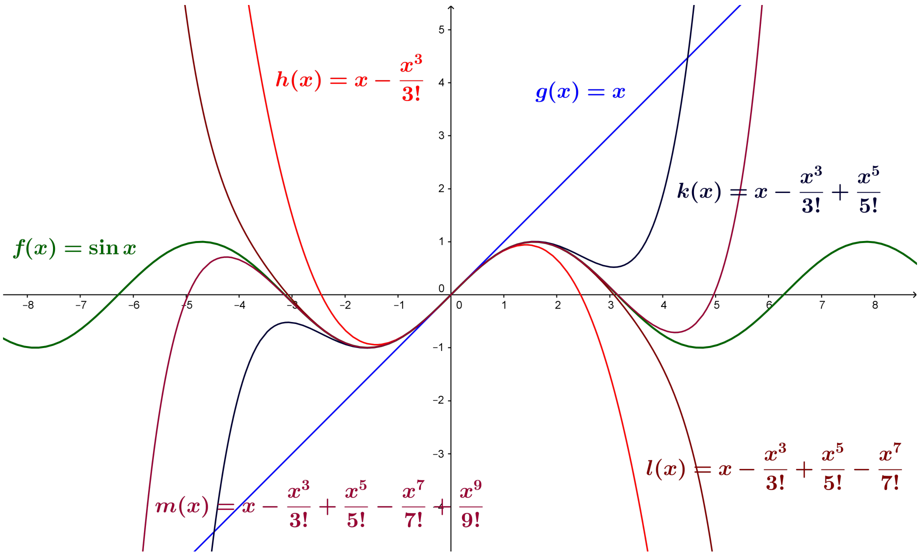
Slika 1.2: Taylorov polinom trećeg stupnja za funkciju sinus

Na slici 1.2 uočavamo da funkcija $h(x) = x - \frac{x^3}{3!}$ *dobro aproksimira funkciju sinus između* $-\frac{\pi}{4}$ *i* $\frac{\pi}{4}$.



Slika 1.3: Taylorov polinom petog stupnja za funkciju sinus

Funkcija $k(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ *dobro aproksimira funkciju sinus za vrijednosti argumenta između* $-\frac{\pi}{2}$ *i* $\frac{\pi}{2}$. *Nastavimo li postupak dalje, dobit ćemo sve bolju aproksimaciju funkcije* *sinus te će se greške pri određivanju vrijednosti funkcija smanjivati.*



Slika 1.4: Razvoj funkcije sinus u Taylorov red

3. Greške zbog numeričkih parametara (u formulama) čije se vrijednosti mogu samo približno odrediti. To su, primjerice, konstante u fizici. Takva greška se naziva *početna greška*.

4. Greške povezane sa sustavom računanja. Prikazom racionalnih brojeva u obliku decimalnog broja ili u nekom drugom pozicijskom sustavu, moguće je da će se iza decimalne točke pojaviti beskonačno mnogo znamenaka. Primjerice, možemo dobiti beskonačno periodičan decimalni broj. Pri računanju možemo koristiti samo konačan broj decimala. Takav uzrok greške naziva se *greška zaokruživanja*. Na primjer, pretpostavimo li da je $\frac{1}{3} = 0.333$, onda je greška $\Delta \approx 3 \cdot 10^{-4}$. Također se trebaju zaokružiti i konačni višeznamenkasti brojevi.

5. Greške zbog operacija koje uključuju približne brojeve (*greške operacija*). Pri računanju s približnim brojevima, prirodno prenosimo, u nekoj mjeri, greške izvornih podataka u konačni rezultat. U tom smislu, greške operacija su blisko povezane.

Sasvim prirodno, u posebnim problemima neke greške su odsutne, a druge vrše zanemariv učinak, ali potpuna analiza mora uključivati sve vrste grešaka.

1.3 Znanstveni zapis. Značajne znamenke. Broj točnih znamenaka

Pozitivan broj a se može prikazati kao konačan ili beskonačan decimalni broj:

$$a = \alpha_m 10^m + \alpha_{m-1} 10^{m-1} + \alpha_{m-2} 10^{m-2} + \cdots + \alpha_{m-n+1} 10^{m-n+1} + \cdots, \tag{1.8}$$

pri čemu su α_i decimalne znamenke broja a ($\alpha_i = 0, 1, 2, \ldots, 9$), početna znamenka $\alpha_m \neq 0$ i m cijeli broj (najveća potencija broja 10 u broju a). Na primjer,

$$3141.59\ldots = 3 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0 + 5 \cdot 10^{-1} + 9 \cdot 10^{-2} + \cdots$$

Svaka znamenka ima poseban položaj u broju a zapisanom u obliku decimalnog broja (1.8) i ima definiranu vrijednost. Znamenka koja stoji na prvom mjestu jednaka je 10^m, znamenka na drugom mjestu 10^{m-1} i na n-tom mjestu 10^{m-n+1}.

Stvarni slučajevi obično uključuju približne brojeve u obliku konačnog decimalnog broja:

$$b = \beta_m 10^m + \beta_{m-1} 10^{m-1} + \beta_{m-2} 10^{m-2} + \cdots + \beta_{m-n+1} 10^{m-n+1} \quad (\beta_m \neq 0). \tag{1.9}$$

Sve decimalne znamenke β_i ($i = m, m-1, \ldots, m-n+1$) nazivaju se *značajne znamenke* približnog broja b. Primijetimo da neke od njih mogu biti jednake nuli (s izuzetkom β_m). U dekadskom pozicijskom sustavu u zapisu broja b ponekad treba dodati nule na početku ili na kraju broja. Na primjer,

$$b = 7 \cdot 10^{-3} + 0 \cdot 10^{-4} + 1 \cdot 10^{-5} + 0 \cdot 10^{-6} = \underline{0.00}7010$$

ili

$$b = 2 \cdot 10^9 + 0 \cdot 10^8 + 0 \cdot 10^7 + 3 \cdot 10^6 + 0 \cdot 10^5 = 2003\underline{00000}.$$

Podvučene nule nisu značajne znamenke.

Definicija 1.3.1. *Značajna znamenka približnog broja je svaka nenul znamenka u decimalnom prikazu tog broja ili svaka nula koja se nalazi između značajnih znamenaka ili se koristi kako bi označila decimalno mjesto koje se uzima u obzir. Sve ostale nule približnog broja koje služe fiksiranju položaja decimalne točke ne smatraju se značajnim znamenkama.*

Na primjer, u broju 0.002080 prve tri nule nisu značajne znamenke jer fiksiraju položaj decimalne točke i ukazuju na vrijednosti decimalnih mjesta drugih znamenaka. Druge dvije nule su značajne znamenke jer se prva nalazi između znamenaka 2 i 8, a druga pokazuje da ćemo uzeti u obzir decimalno mjesto 10^{-6} približnog broja. Ako zadnja znamenka nije značajna, tada bi broj bio zapisan kao 0.00208. Gledano na ovaj način, brojevi 0.002080 i 0.00208 nisu jednaki jer prvi sadrži četiri značajne znamenke, a drugi samo tri.

Pri pisanju velikih brojeva, nule na desnoj strani mogu služiti i ukazivanju na značajne znamenke i fiksiranju vrijednosti decimalnih mjesta drugih znamenaka. To može dovesti do nerazumijevanja kada je broj zapisan na uobičajeni način. Razmotrimo, primjerice, broj 689 000. Nije u potpunosti jasno koliko značajnih znamenaka broj ima, iako možemo reći da ima najmanje tri. Ta dvosmislenost može se izbjeći korištenjem znanstvenog zapisa broja (zapisa pomoću potencija broja 10) i pisanjem broja kao $6.89 \cdot 10^5$ ako broj ima tri značajne znamenke, ili kao $6.8900 \cdot 10^5$ ako broj ima pet značajnih znamenaka. Općenito, ovakav zapis je prikladan za brojeve koji sadrže veliki broj nula koje nisu značajne znamenke, kao na primjer $0.000000120 = 1.20 \cdot 10^{-7}$.

Uvedimo pojam *točnih znamenaka* približnog broja.

Definicija 1.3.2. *Prvih n značajnih znamenaka približnog broja nazivamo točnim znamenkama ako apsolutna greška broja ne prelazi jednu polovinu dekadske jedinice na n-tom decimalnom mjestu, brojeći s lijeva na desno.*

Stoga, ako se za približni broj a, zapisan u obliku (1.8), koji se uzima umjesto točnog broja A, zna da je

$$\Delta = |A - a| \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{m-n+1},$$

onda je, prema definiciji, prvih n znamenaka $\alpha_m, \alpha_{m-1}, \ldots, \alpha_{m-n+1}$ tog broja točno.

Na primjer, s obzirom na točan broj $A = 35.97$, broj $a = 36.00$ je približan broj koji je točan na tri decimale jer vrijedi da je $|A - a| = 0.03 < \frac{1}{2} \cdot 0.1$.

Pojam *n točnih znamenaka* ne bi trebalo shvatiti doslovno, odnosno nije nužno istina da se u približnom broju a, koji ima n točnih znamenaka, prvih n značajnih znamenaka od a podudara s odgovarajućim znamenkama točnog broja A. Na primjer, približan broj $a = 9.995$, koji se uzima umjesto $A = 10$, je točan na tri decimale, iako se sve znamenke ovih brojeva razlikuju. Međutim, u mnogim slučajevima su točne znamenke približnog broja jednake odgovarajućim znamenkama točnog broja.

Napomena 1.3.3. *U mnogim slučajevima prikladno je reći da je broj a aproksimacija točnog broja A s n točnih znamenaka u širem smislu što znači da apsolutna greška $\Delta = |A - a|$ ne prelazi jedinicu u n-toj značajnoj znamenci približnog broja, odnosno mora vrijediti*

$$\Delta = |A - a| \leq 10^{m-n+1}.$$

Na primjer, s obzirom na točan broj $A = 412.3567$, broj $a = 412.356$ je aproksimacija broja A točna na šest znamenaka u širem smislu, budući da je $\Delta = 0.0007 < 1 \cdot 10^{-3}$.

1.4 Zaokruživanje brojeva

Razmotrimo približan ili točan broj a napisan u dekadskom brojevnom sustavu. Često se zahtijeva zaokružiti taj broj, odnosno zamijeniti ga brojem a_1 koji ima manji broj značajnih znamenaka. Broj a_1 je izabran tako da se greška zaokruživanja $|a_1 - a|$ zadrži na minimumu. Taj postupak naziva se *zaokruživanje broja a na broj* a_1.

Primjer 1.4.1. *Broj* $a = 8.7564$ *želimo zamijeniti približnim brojem koji ima samo dvije značajne znamenke. Jasno je da je*

$$8.756 < 8.7564 < 8.757.$$

Želimo li broj a zapisati sa četiri značajne znamenke, možemo uzeti 8.756 *ili* 8.757. *Međutim, kako su apsolutne greške*

$$|8.7564 - 8.756| = 0.0004, \qquad |8.7564 - 8.757| = 0.0006,$$

umjesto broja 8.7564 *uzet ćemo broj* 8.756. *Sada je*

$$8.75 < 8.756 < 8.76.$$

Želimo li broj 8.756 *zapisati s tri značajne znamenke, možemo uzeti* 8.75 *ili* 8.76. *No, kako su apsolutne greške*

$$|8.756 - 8.75| = 0.006, \qquad |8.756 - 8.76| = 0.004,$$

umjesto broja 8.756 *uzet ćemo broj* 8.76. *Nakon toga, želimo li broj* 8.76 *zapisati s dvije značajne znamenke, uzimamo brojeve* 8.7 *i* 8.8 *te računamo apsolutne greške:*

$$|8.76 - 8.7| = 0.06, \qquad |8.76 - 8.8| = 0.04.$$

Dakle, broj 8.7564 *zaokružili smo na broj* 8.8.

Pravilo zaokruživanja. Kako bi se broj zaokružio na n značajnih znamenaka, odbacimo sve znamenke desno od n-te značajne znamenke ili ih zamijenimo nulama ako je njima potrebno označiti decimalna mjesta koja se uzimaju u obzir. Pri računanju, treba obratiti pozornost na sljedeće:

1. Ako je prva od odbačenih znamenaka manja od 5, preostale znamenke se ostavljaju nepromijenjene.

2. Ako je prva od odbačenih znamenaka veća od 5, zadnjoj ostavljenoj znamenki dodaje se 1.

3. Ako je prva od odbačenih znamenaka jednaka 5 i postoje nenul znamenke među odbačenim znamenkama, zadnjoj ostavljenoj znamenki dodaje se 1.

4. Međutim, ako je prva od odbačenih znamenaka jednaka 5 i sve su odbačene znamenke jednake nuli, zadnja ostavljena znamenka ostaje nepromijenjena ako je parna, odnosno dodaje joj se 1 ako je neparna (*pravilo parnih znamenaka*).

Očito je da, pri primjeni pravila zaokruživanja, greška zaokruživanja ne prelazi jednu polovinu jedinice na mjestu zadnje ostavljene značajne znamenke.

Točnost približnog broja ne ovisi o broju značajnih znamenaka već o broju točnih značajnih znamenaka. Kada približni broj sadrži netočne značajne znamenke, koristi se pravilo zaokruživanja. Naglasimo sljedeće praktično pravilo: pri približnom računanju broj značajnih znamenaka u međukoracima ne smije prelaziti broj točnih znamenaka za više od dvije ili tri jedinice. Konačan rezultat ne smije sadržavati više od jedne dodatne značajne znamenke u odnosu na broj točnih znamenaka. Primjenom ovog pravila ne gomilaju se nepotrebne znamenke čime se olakšava i ubrzava računanje.

Primijetimo: ako je točan broj A zaokružen na n značajnih znamenaka pravilom zaokruživanja, tada je granica apsolutne greške zaokruživanja točnog broja $\frac{1}{2} \cdot 10^{m-n+1}$ te će približni broj a imati n točnih znamenaka u užem smislu.

Ako se približni broj a, koji ima n točnih znamenaka u užem smislu, zaokruži na n značajnih znamenaka, novi približni broj a_1 će imati n točnih znamenaka u širem smislu. Zaista, na temelju nejednakosti

$$|A - a_1| \leq |A - a| + |a - a_1|,$$

granica apsolutne greške broja a_1 sastoji se od apsolutne greške broja a i greške zaokruživanja.

1.5 Veza između relativne greške približnog broja i broja točnih znamenaka

Dokazat ćemo teorem koji povezuje relativnu grešku približnog broja i broja točnih znamenaka tog broja.

Teorem 1.5.1. *Ako pozitivni približni broj ima n točnih znamenaka, relativna greška δ tog broja ne prelazi omjer broja $\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$ i prve značajne znamenke danog broja, odnosno vrijedi*

$$\delta \leq \frac{1}{\alpha_m} \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1},$$

gdje je α_m prva značajna znamenka broja a.

Dokaz. Neka je broj

$$a = \alpha_m 10^m + \alpha_{m-1} 10^{m-1} + \cdots + \alpha_{m-n+1} 10^{m-n+1} + \cdots \quad (\alpha_m \geq 1)$$

približna vrijednost točnog broja A i neka je točna na n znamenaka. Prema tome, imamo

$$\Delta = |A - a| \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{m-n+1},$$

odnosno

$$A \geq a - \frac{1}{2} \cdot 10^{m-n+1}.$$

Ova nejednakost vrijedi i ako se broj a zamijeni manjim brojem $\alpha_m 10^m$:

$$A \geq \alpha_m 10^m - \frac{1}{2} \cdot 10^{m-n+1} = \frac{1}{2} \cdot 10^m \left(2\alpha_m - \frac{1}{10^{n-1}}\right). \tag{1.10}$$

Desna strana nejednakosti (1.10) je minimalna za $n = 1$. Stoga je

$$A \geq \frac{1}{2} \cdot 10^m \left(2\alpha_m - 1\right), \tag{1.11}$$

odnosno, budući da je

$$2\alpha_m - 1 = \alpha_m + (\alpha_m - 1) \geq \alpha_m,$$

slijedi da je

$$A \geq \frac{1}{2}\alpha_m 10^m.$$

Stoga je

$$\delta = \frac{\Delta}{A} \leq \frac{\frac{1}{2}10^{m-n+1}}{\frac{1}{2}\alpha_m 10^m} = \frac{1}{\alpha_m}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}.$$

Dakle,

$$\delta \leq \frac{1}{\alpha_m}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}. \tag{1.12}$$

□

Napomena 1.5.2. *Nejednakost (1.11) može se koristiti za dobivanje bolje ocjene relativne greške.*

Korolar 1.5.3. *Za granicu relativne greške broja a može se uzeti*

$$\delta = \frac{1}{\alpha_m}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}, \tag{1.13}$$

gdje je α_m prva značajna znamenka broja a.

Korolar 1.5.4. *Ako broj a ima više od dvije točne znamenke, odnosno ako je $n \geq 2$, onda za sve praktične svrhe vrijedi sljedeća formula:*

$$\delta_a = \frac{1}{2\alpha_m}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}. \tag{1.14}$$

Zaista, za $n \geq 2$ možemo zanemariti $\frac{1}{10^{n-1}}$ u nejednakosti (1.10). Tada je

$$A \geq \frac{1}{2} \cdot 10^m \cdot 2\alpha_m = \alpha_m 10^m,$$

odakle slijedi da je

$$\delta = \frac{\Delta}{A} \leq \frac{\frac{1}{2} \cdot 10^{m-n+1}}{\alpha_m 10^m} = \frac{1}{2\alpha_m}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}.$$

Konačno,

$$\delta_a = \frac{1}{2\alpha_m}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}.$$

Ovaj teorem nam omogućuje određivanje relativne greške δ približnog broja a pomoću broja točnih znamenaka:

$$a = \alpha_m 10^m + \alpha_{m-1} 10^{m-1} + \cdots \tag{1.15}$$

Kako bi se riješio obratni problem, odnosno odredio broj n točnih znamenaka broja (1.15) ako je poznata relativna greška δ, obično se koristiti približna formula

$$\delta = \frac{\Delta}{a} \quad (a > 0),$$

gdje je Δ apsolutna greška broja a. Stoga je

$$\Delta = a\delta. \tag{1.16}$$

Uzimajući u obzir vodeću potenciju broja 10 u broju Δ, lako je odrediti broj točnih znamenaka danog približnog broja a. Posebno, ako je

$$\delta \leq \frac{1}{10^n},$$

onda iz (1.15) i (1.16) dobivamo

$$\Delta \leq (\alpha_m + 1) \cdot 10^m \cdot 10^{-n} \leq 10^{m-n+1}.$$

Drugim riječima, a je sigurno točan na n decimalnih mjesta u širem smislu. Slično, ako je

$$\delta \leq \frac{1}{2 \cdot 10^n},$$

onda je broj a točan na n mjesta u užem smislu.

Napomena 1.5.5. *Metoda određivanja broja točnih znamenaka je približna. Pri točnom računanju točnih znamenaka broja a potrebno je nastaviti s nejednakostima*

$$\delta \geq \frac{\Delta}{a+\Delta} \quad \text{i} \quad \Delta \leq \frac{a\delta}{1-\delta} \quad (0 \leq \delta < 1).$$

1.6 Greška zbroja

Teorem 1.6.1. *Apsolutna greška algebarskog zbroja nekoliko približnih brojeva ne prelazi zbroj apsolutnih grešaka brojeva.*

Dokaz. Neka su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dani približni brojevi. Računamo njihov algebarski zbroj

$$u = \pm x_1 \pm x_2 \pm \cdots \pm x_n.$$

Očito je

$$\Delta u = \pm \Delta x_1 \pm \Delta x_2 \pm \cdots \pm \Delta x_n,$$

te je stoga

$$|\Delta u| \leq |\Delta x_1| + |\Delta x_2| + \cdots + |\Delta x_n|. \tag{1.17}$$

□

Korolar 1.6.2. *Za granicu apsolutne greške algebarskog zbroja možemo uzeti zbroj granica apsolutnih grešaka članova:*

$$|\Delta_u| \leq \left|\Delta_{x_1}\right| + \left|\Delta_{x_2}\right| + \cdots + \left|\Delta_{x_n}\right|. \tag{1.18}$$

Iz (1.18) slijedi da granica apsolutnih grešaka zbroja ne može biti manja od granice apsolutne greške najmanje točnog člana (u smislu apsolutne greške), odnosno člana koji ima najveću apsolutnu grešku. Prema tome, bez obzira na stupanj točnosti ostalih članova, ne možemo povećati točnost zbroja. Iz tog razloga je besmisleno uzeti u obzir dodatne znamenke u članovima s manjom apsolutnom greškom. Iz navedenog dobivamo sljedeće pravilo za zbroj približnih brojeva.

Pravilo. Za zbrajanje brojeva s različitom apsolutnom točnošću,

1. pronađite brojeve s najmanje decimala i ostavite ih nepromijenjenim;
2. zaokružite ostale brojeve ostavljajući jedan ili dva dodatna decimalna mjesta u odnosu na one s najmanjim brojem decimala;
3. zbrojite brojeve uzimajući u obzir sve ostavljene decimale;
4. zaokružite rezultat smanjujući ga za jednu decimalu.

Primjer 1.6.3. *Izračunajmo zbroj približnih zaokruženih brojeva*

$$s = 0.4391 + 0.2745 + 456.4 + 325.3 + 12.85 + 8.28 + 0.0748 + 0.0324 + 0.000453$$

te odredimo granicu apsolutne greške zbroja. Prema zapisanom pravilu, uočavamo da brojevi 456.4 *i* 325.3 *imaju samo jednu decimalu. Stoga ostale brojeve zaokružujemo te računamo zbroj*

$$\overline{s} = 456.4 + 325.3 + 0.439 + 0.274 + 12.85 + 8.28 + 0.075 + 0.032 + 0.000.$$

Vrijedi da je

$$\overline{s} = 803.650 \approx 803.6.$$

S obzirom da su pribrojnici zaokruženi brojevi, iz (1.18) slijedi

$$|\Delta_u| \leq \frac{1}{2}\cdot 10^{-4} + \frac{1}{2}\cdot 10^{-4} + \frac{1}{2}\cdot 10^{-1} + \frac{1}{2}\cdot 10^{-1} + \frac{1}{2}\cdot 10^{-2} + \frac{1}{2}\cdot 10^{-2} + \frac{1}{2}\cdot 10^{-4} + \frac{1}{2}\cdot 10^{-4} + \frac{1}{2}\cdot 10^{-6}$$

Dakle,

$$|\Delta_u| = 0.1102005 < 0.111.$$

Kada u zbroju

$$u = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

pribrojnike zaokružimo na m decimala, tada greška zaokruživanja zbroja, u najnepovoljnijem slučaju, ne prelazi

$$\Delta_{zaokruživanja} \leq n \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^m. \tag{1.19}$$

Točniji rezultat može se dobiti uzimanjem u obzir predznake grešaka zaokruživanja pojedinih članova.

Teorem 1.6.4. *Ako svi članovi imaju isti predznak, granica apsolutne greške njihovog zbroja ne prelazi maksimalnu granicu relativne greške bilo kojeg od članova.*

Dokaz. Neka je $u = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ i neka su $x_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Označimo sa A_i $(A_i > 0; i = 1, 2, \ldots, n)$ točne vrijednosti članova x_i i sa $A = A_1 + A_2 + \cdots + A_n$ točnu vrijednost zbroja u. Tada za granicu relativne greške zbroja možemo uzeti da je

$$\delta_u = \frac{\Delta_u}{A} = \frac{\Delta_{x_1} + \Delta_{x_2} + \cdots + \Delta_{x_n}}{A_1 + A_2 + \cdots + A_n}. \tag{1.20}$$

Budući da je

$$\delta_{x_i} = \frac{\Delta_{x_i}}{A_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

slijedi da je

$$\Delta_{x_i} = A_i \delta_{x_i}. \tag{1.21}$$

Uvrstimo li (1.21) u (1.20), dobivamo

$$\delta_u = \frac{A_1\delta_{x_1} + A_2\delta_{x_2} + \cdots + A_n\delta_{x_n}}{A_1 + A_2 + \cdots + A_n}.$$

Neka je $\overline{\delta}$ najveća od svih relativnih grešaka δ_{x_i}, ili $\overline{\delta}_{x_i} \leq \overline{\delta}$. Tada je

$$\delta_u \leq \frac{\overline{\delta}\,(A_1 + A_2 + \cdots + A_n)}{A_1 + A_2 + \cdots + A_n} = \overline{\delta}.$$

Stoga je $\delta_u \leq \overline{\delta}$, odnosno

$$\delta_u \leq \max\left\{\delta_{x_1}, \delta_{x_2}, \ldots, \delta_{x_n}\right\}.$$

$\square$

Poglavlje 2

Uvod u teoriju verižnih razlomaka

2.1 Definicija verižnih razlomaka

Izraz oblika

$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \ddots}}} \tag{2.1}$$

se naziva *verižni razlomak*. Pretpostavljamo da je $a_k \neq 0$ za svaki $k = 1, 2, 3, \ldots$ Umjesto (2.1) kraće pišemo

$$\left[a_0; \frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \frac{b_3}{a_3}, \ldots\right], \tag{2.2}$$

a ponekad i

$$a_0 + \frac{b_1|}{|a_1} + \frac{b_2|}{|a_2} + \ldots \tag{2.3}$$

Općenito, elementi a_0, a_k, b_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ verižnog razlomka su realni ili kompleksni brojevi, ili funkcije jedne ili više varijabli. Razlomci $a_0 = \frac{a_0}{1}$ i $\frac{b_k}{a_k}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ nazivaju se *komponente* verižnog razlomka (2.1): a_0 je nulta, a $\frac{b_k}{a_k}$ k-ta komponenta za $k = 1, 2, 3, \ldots$, pri čemu se b_k naziva k-tim parcijalnim brojnikom, a a_k k-tim parcijalnim nazivnikom. Naglasimo da se u skraćenom zapisu (2.2) komponente $\frac{b_k}{a_k}$ ne mogu skratiti.

Ako verižni razlomak ima konačno mnogo komponenata (na primjer n ne brojeći nultu), naziva se *konačni* (ili preciznije *n-člani*) *verižni razlomak*. Konačni verižni razlomak zapisujemo u obliku

$$\left[a_0; \frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \ldots, \frac{b_n}{a_n}\right] = \left[a_0; \frac{b_k}{a_k}\right]_1^n. \tag{2.4}$$

Konačan verižni razlomak poistovjećuje se s odgovarajućim običnim razlomkom dobivenim izvođenjem naznačenih operacija. Verižni razlomak (2.1) koji sadrži beskonačno komponenata naziva se *beskonačni verižni razlomak* i označava se sa

$$\left[a_0; \frac{b_k}{a_k}\right]_1^\infty . \tag{2.5}$$

Verižni razlomak

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots}}} \tag{2.6}$$

u kojem su svi parcijalni brojnici jednaki 1 naziva se *jednostavan verižni razlomak* i kraće označava sa

$$[a_0; a_1, a_2, a_3, \dots] . \tag{2.7}$$

2.2 Pretvaranje verižnih razlomaka u obične razlomke i obratno

Svaki konačni verižni razlomak možemo pretvoriti u obični razlomak. Kako bismo to učinili, potrebno je izvesti sve operacije naznačene u verižnom razlomku.

Primjer 2.2.1. *Verižni razlomak*

$$\left[3; \frac{1}{3}, \frac{1}{1}, \frac{1}{4}\right] = 3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4}}}$$

pretvorimo u obični razlomak. Izvođenjem naznačenih operacija dobivamo redom

$$1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}, \quad 1 : \frac{5}{4} = \frac{4}{5}, \quad 3 + \frac{4}{5} = \frac{19}{5}, \quad 1 : \frac{19}{5} = \frac{5}{19}, \quad 3 + \frac{5}{19} = \frac{62}{19}.$$

Dakle,

$$\left[3; \frac{1}{3}, \frac{1}{1}, \frac{1}{4}\right] = \frac{62}{19} = 3\frac{5}{19}.$$

Obrnuto, svaki se pozitivni racionalni broj može razviti u verižni razlomak čiji su elementi prirodni brojevi. Pretpostavimo, na primjer, da imamo razlomak $\frac{p}{q}$. Uklanjanjem cijelog dijela a_0 dobivamo

$$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{r_0}{q},$$

gdje je r_0 ostatak pri dijeljenju p sa q. Ako je $\frac{p}{q}$ pravi razlomak, onda je $a_0 = 0$ i $r_0 = p$. Dijeljenjem brojnika i nazivnika razlomka $\frac{r_0}{q}$ sa r_0 imamo

$$\frac{r_0}{q} = \frac{1}{q : r_0} = \frac{1}{a_1 + \frac{r_1}{r_0}},$$

gdje je a_1 cijeli količnik, a r_1 ostatak dijeljenja broja q sa r_0. Dijeljenjem brojnika i nazivnika razlomka $\frac{r_1}{r_0}$ brojem r_1 dobivamo

$$\frac{r_1}{r_0} = \frac{1}{r_0 : r_1} = \frac{1}{a_2 + \frac{r_2}{r_1}},$$

gdje je a_2 cijeli dio količnika i r_2 ostatak dijeljenja r_0 sa r_1. Postupak se može dalje nastaviti istim načinom. Kako je $q > r_0 > r_1 > r_2 > r_3 > \dots$ i kako su r_i $(i = 0, 1, 2, 3, \dots)$ pozitivni cijeli brojevi, u zadnjem koraku ćemo dobiti $r_n = 0$, odnosno

$$\frac{r_{n-1}}{r_{n-2}} = \frac{1}{a_n + 0}.$$

Supstitucijom $\frac{r_i}{r_{i-1}}$ dobivamo

$$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{r_0}{q} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{r_1}{r_0}} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \frac{r_2}{r_1}}} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_n}}}.$$

Primjer 2.2.2. *Razlomak $\frac{215}{93}$ razvijmo u verižni razlomak:*

$$\frac{215}{93} = 2 + \frac{29}{93} = 2 + \cfrac{1}{\cfrac{93}{29}} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{6}{29}} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\cfrac{29}{6}}}$$

$$= 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{5}{6}}} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\cfrac{6}{5}}}} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5}}}}.$$

Dakle, $\frac{215}{93} = \left[2; \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{1}, \frac{1}{5}\right]$.

Primjer 2.2.3. *Verižni razlomak*

$$\left[1; \frac{-x^2}{1}, \frac{-x^2}{3}, \frac{-x^2}{5}\right] = 1 - \frac{x^2}{1 - \frac{x^2}{3 - \frac{x^2}{5}}}$$

pretvorimo u obični razlomak. Imamo

$$1 - \frac{x^2}{3 - \frac{x^2}{5}} = 1 - \frac{x^2}{\frac{15-x^2}{5}} = 1 - \frac{5x^2}{15 - x^2} = \frac{15 - x^2 - 5x^2}{15 - x^2} = \frac{15 - 6x^2}{15 - x^2},$$

$$1 - \frac{x^2}{\frac{15-6x^2}{15-x^2}} = 1 - \frac{x^2(15 - x^2)}{15 - 6x^2} = 1 - \frac{15x^2 - x^4}{15 - 6x^2} = \frac{15 - 6x^2 - 15x^2 + x^4}{15 - 6x^2} = \frac{15 - 21x^2 + x^4}{15 - 6x^2}.$$

Dakle,

$$\left[1; \frac{-x^2}{1}, \frac{-x^2}{3}, \frac{-x^2}{5}\right] = \frac{15 - 21x^2 + x^4}{15 - 6x^2}.$$

2.3 Konvergente verižnih razlomaka

Pretpostavimo da imamo konačan verižni razlomak

$$\left[a_0; \frac{b_k}{a_k}\right]_1^n. \tag{2.8}$$

Definirajmo racionalne brojeve $\frac{P_k}{Q_k}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ sa

$$\frac{P_k}{Q_k} = \left[a_0; \frac{b_1}{a_1}, \ldots, \frac{b_k}{a_k}\right].$$

Racionalne brojeve $\frac{P_k}{Q_k}$ nazivamo *k-te konvergente* verižnog razlomka (2.8). Obično uzimamo

$$\frac{P_0}{Q_0} = \frac{a_0}{1}, \quad \frac{P_{-1}}{Q_{-1}} = \frac{1}{0}$$

i pretpostavljamo

$$P_0 = a_0, \quad Q_0 = 1, \quad P_{-1} = 1, \quad Q_{-1} = 0. \tag{2.9}$$

Teorem 2.3.1. *Brojevi P_k, Q_k $(k = -1, 0, 1, 2, \ldots, n)$ određeni rekurzijom*

$$P_k = a_k P_{k-1} + b_k P_{k-2}, \quad Q_k = a_k Q_{k-1} + b_k Q_{k-2}, \tag{2.10}$$

gdje su

$$P_{-1} = 1, \quad Q_{-1} = 0, \quad P_0 = a_0, \quad Q_0 = 1, \tag{2.11}$$

su redom brojnici i nazivnici konvergenti verižnog razlomka (2.8).

Dokaz. Neka su R_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) uzastopne konvergente verižnog razlomka (2.8). Potrebno je dokazati da je

$$R_k = \frac{P_k}{Q_k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Ovu tvrdnju dokazat ćemo matematičkom indukcijom. Kada je $k = 1$, imamo

$$R_1 = a_0 + \frac{b_1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + b_1}{a_1}.$$

S druge strane, uvrštavanjem izraza iz (2.11) u (2.10) dobivamo

$$\frac{P_1}{Q_1} = \frac{a_1 a_0 + b_1}{a_1 \cdot 1 + b_1 \cdot 0} = \frac{a_0 a_1 + b_1}{a_1} = R_1.$$

Prema tome, tvrdnja teorema vrijedi za $k = 1$.

Pretpostavimo da tvrdnja teorema vrijedi za sve prirodne brojeve manje ili jednake k. Želimo dokazati da tvrdnja teorema vrijedi i za prirodni broj $k+1$. Prema (2.10),

$$\begin{aligned} P_{k+1} &= a_{k+1} P_k + b_{k+1} P_{k-1}, \\ Q_{k+1} &= a_{k+1} Q_k + b_{k+1} Q_{k-1}. \end{aligned}$$

Iz pretpostavke indukcije dobivamo

$$R_k = \frac{P_k}{Q_k} = \frac{a_k P_{k-1} + b_k P_{k-2}}{a_k Q_{k-1} + b_k Q_{k-2}}.$$

Konvergenta R_{k+1} se dobiva iz konvergente R_k zamjenom broja a_k zbrojem $a_k + \frac{b_{k+1}}{a_{k+1}}$. Stoga je

$$\begin{aligned} R_{k+1} &= \frac{\left(a_k + \frac{b_{k+1}}{a_{k+1}}\right) P_{k-1} + b_k P_{k-2}}{\left(a_k + \frac{b_{k+1}}{a_{k+1}}\right) Q_{k-2} + b_k Q_{k-2}} \\ &= \frac{a_{k+1}\left(a_k P_{k-1} + b_k P_{k-2}\right) + b_{k+1} P_{k-1}}{a_{k+1}\left(a_k Q_{k-1} + b_k Q_{k-2}\right) + b_{k+1} Q_{k-1}} \\ &= \frac{a_{k+1} P_k + b_{k+1} P_{k-1}}{a_{k+1} Q_k + b_{k+1} Q_{k-1}} = \frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}} \end{aligned}$$

čime je teorem dokazan. □

Napomena 2.3.2. *Konvergente čiji brojnici i nazivnici zadovoljavaju rekurziju (2.10) uz početne uvjete (2.11) nazivaju se kanonskim konvergentama. Budući da brojnici i nazivnici konvergenata nisu jedinstveni, u općem slučaju ne možemo tvrditi da zadovoljavaju tu rekurziju. U nastavku pretpostavljamo da su konvergente koje razmatramo kanonske.*

Korolar 2.3.3. *U jednostavnom verižnom razlomku*

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots}}$$

brojnici i nazivnici konvergenti $\frac{P_k}{Q_k}$ *(*$k = 1, 2, \ldots$*) mogu se odrediti iz rekurzije*

$$\begin{aligned} P_k &= a_k P_{k-1} + P_{k-2}, \\ Q_k &= a_k Q_{k-1} + Q_{k-2}, \end{aligned} \tag{2.12}$$

gdje su $P_0 = a_0$, $P_{-1} = 1$ *i* $Q_0 = 1$, $Q_{-1} = 0$.

Napomena 2.3.4. *Sljedeća tablica omogućava jednostavnije pronalaženje vrijednosti konvergenti pomoću rekurzije (2.10).*

k	-1	0	1	2	3	$\ldots$
b_k		1	b_1	b_2	b_3	$\ldots$
a_k		a_0	a_1	a_2	a_3	$\ldots$
P_k	1	a_0	P_1	P_2	P_3	$\ldots$
Q_k	0	1	Q_1	Q_2	Q_3	$\ldots$

Za jednostavne verižne razlomke, tj. one za koje je $b_k = 1$ *(*$k = 1, 2, 3, \ldots$*), u tablici izostavljamo redak* b_k.

Primjer 2.3.5. *Odredimo sve konvergente verižnog razlomka*

$$\frac{163}{59} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}}.$$

Iz tablice

k	-1	0	1	2	3	4	5
a_k		2	1	3	4	1	2
P_k	1	2	3	11	47	58	163
Q_k	0	1	1	4	17	21	59

dobivamo

$$\frac{P_0}{Q_0} = \frac{2}{1}, \quad \frac{P_1}{Q_1} = \frac{3}{1}, \quad \frac{P_2}{Q_2} = \frac{11}{4},$$
$$\frac{P_3}{Q_3} = \frac{47}{17}, \quad \frac{P_4}{Q_4} = \frac{58}{21}, \quad \frac{P_5}{Q_5} = \frac{163}{59}.$$

Primjer 2.3.6. *Odredimo sve konvergente verižnog razlomka*

$$\left[0; \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \frac{7}{16}\right].$$

Imamo tablicu:

k	-1	0	1	2	3	4
b_k		1	1	3	5	7
a_k		0	2	4	8	16
P_k	1	0	1	4	37	620
Q_k	0	1	2	11	98	1645

Dakle,

$$\frac{P_0}{Q_0} = \frac{0}{1}, \quad \frac{P_1}{Q_1} = \frac{1}{2}, \quad \frac{P_2}{Q_2} = \frac{4}{11}, \quad \frac{P_3}{Q_3} = \frac{37}{98}, \quad \frac{P_4}{Q_4} = \frac{620}{1645}.$$

Teorem 2.3.7. *Neka su* $\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}$ *i* $\frac{P_k}{Q_k}$ *(*$k \geq 1$*) dvije uzastopne konvergente verižnog razlomka (2.8). Tada vrijedi*

$$\frac{P_k}{Q_k} - \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} = (-1)^{k-1} \frac{b_1 b_2 \dots b_k}{Q_{k-1} Q_k}. \tag{2.13}$$

Dokaz. Imamo

$$\frac{P_k}{Q_k} - \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} = \frac{\Delta_k}{Q_{k-1} Q_k}, \tag{2.14}$$

gdje je

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} P_k & P_{k-1} \\ Q_k & Q_{k-1} \end{vmatrix}.$$

Primjenom svojstava determinante i rekurzije (2.10) dobivamo

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_k P_{k-1} + b_k P_{k-2} & P_{k-1} \\ a_k Q_{k-1} + b_k Q_{k-2} & Q_{k-1} \end{vmatrix} = b_k \begin{vmatrix} P_{k-2} & P_{k-1} \\ Q_{k-2} & Q_{k-1} \end{vmatrix} = -b_k \Delta_{k-1}.$$

Prema tome, vrijedi

$$\Delta_k = (-b_k)(-b_{k-1}) \cdots (-b_1)\Delta_0 = (-1)^k b_1 b_2 \dots b_k \Delta_0,$$

gdje je

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} P_0 & P_{-1} \\ Q_0 & Q_{-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

Dakle, vrijedi

$$\Delta_k = (-1)^{k-1} b_1 b_2 \dots b_k.$$

Prema (2.14), zaključujemo da vrijedi

$$\frac{P_k}{Q_k} - \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} = (-1)^{k-1} \frac{b_1 b_2 \dots b_k}{Q_{k-1} Q_k}.$$

□

Korolar 2.3.8. *Ako su $\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}$ i $\frac{P_k}{Q_k}$ ($k \geq 1$) dvije uzastopne konvergente verižnog razlomka (2.8), onda je*

$$P_k Q_{k-1} - P_{k-1} Q_k = (-1)^{k-1} b_1 b_2 \dots b_k.$$

Korolar 2.3.9. *Za dvije uzastopne konvergente $\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}$ i $\frac{P_k}{Q_k}$ ($k \geq 1$) jednostavnog verižnog razlomka vrijedi*

$$\frac{P_k}{Q_k} - \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} = \frac{(-1)^{k-1}}{Q_{k-1} Q_k}.$$

Teorem 2.3.10. *Za dvije uzastopne konvergente jednake parnosti $\frac{P_{k-2}}{Q_{k-2}}$ i $\frac{P_k}{Q_k}$ ($k \geq 2$) verižnog razlomka (2.8) vrijedi*

$$\frac{P_k}{Q_k} - \frac{P_{k-2}}{Q_{k-2}} = (-1)^k \frac{b_1 b_2 \dots b_{k-1} a_k}{Q_{k-2} Q_k}. \tag{2.15}$$

Dokaz. Imamo

$$\frac{P_k}{Q_k} - \frac{P_{k-2}}{Q_{k-2}} = \frac{D_k}{Q_{k-2} Q_k}, \tag{2.16}$$

gdje je

$$D_k = \begin{vmatrix} P_k & P_{k-2} \\ Q_k & Q_{k-2} \end{vmatrix}.$$

Primjenom svojstava konvergenti verižnih razlomaka te svojstava determinante dobivamo

$$D_k = \begin{vmatrix} a_k P_{k-1} + b_k P_{k-2} & P_{k-2} \\ a_k Q_{k-1} + b_k Q_{k-2} & Q_{k-2} \end{vmatrix} = a_k \begin{vmatrix} P_{k-1} & P_{k-2} \\ Q_{k-1} & Q_{k-2} \end{vmatrix} = a_k \left(P_{k-1} Q_{k-2} - P_{k-2} Q_{k-1} \right).$$

Prema korolaru 2.3.8, vrijedi

$$P_{k-1} Q_{k-2} - P_{k-2} Q_{k-1} = (-1)^{k-2} b_1 b_2 \dots b_{k-1}.$$

Stoga je

$$D_k = (-1)^k b_1 b_2 \dots b_{k-1} a_k.$$

Koristeći (2.16) dobivamo (2.15). □

Korolar 2.3.11. *Za dvije uzastopne konvergente iste parnosti* $\frac{P_{k-2}}{Q_{k-2}}$ *i* $\frac{P_k}{Q_k}$ $(k \geq 2)$ *jednostavnog verižnog razlomka*

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots}},$$

vrijedi

$$\frac{P_k}{Q_k} - \frac{P_{k-2}}{Q_{k-2}} = (-1)^k \frac{a_k}{Q_{k-2}Q_k}.$$

Teorem 2.3.12. *Neka je verižni razlomak*

$$\alpha = \left[a_0; \frac{b_k}{a_k}\right]_1^n \tag{2.17}$$

takav da su svi a_k, b_k $(k = 1, \dots, n)$ *pozitivni. Neka su* $\frac{P_k}{Q_k}$ $(k = 0, 1, \dots, n)$ *uzastopne kanonske konvergente od* α. *Tada vrijede sljedeće tvrdnje:*

1. $\frac{P_0}{Q_0} < \frac{P_2}{Q_2} < \frac{P_4}{Q_4} < \dots,$
2. $\frac{P_1}{Q_1} > \frac{P_3}{Q_3} > \frac{P_5}{Q_5} > \dots,$
3. *Ako je* n *paran, a* m *neparan, onda je* $\frac{P_n}{Q_n} < \frac{P_m}{Q_m}$.
4. *Broj* α *se nalazi između dvije uzastopne konvergente.*

Dokaz. Kako su svi a_k, b_k $(k = 1, \dots, n)$ pozitivni, to su i svi P_k, Q_k $(k = 1, \dots, n)$ pozitivni, pa iz teorema 2.3.10 slijedi, za svaki $m \geq 1$,

$$\frac{P_{2m}}{Q_{2m}} - \frac{P_{2m-2}}{Q_{2m-2}} > 0.$$

Dakle,

$$\frac{P_0}{Q_0} < \frac{P_2}{Q_2} < \frac{P_4}{Q_4} < \dots$$

Analogno, teorem 2.3.10 povlači, za svaki $m \geq 1$,

$$\frac{P_{2m+1}}{Q_{2m+1}} - \frac{P_{2m-1}}{Q_{2m-1}} < 0.$$

Slijedi

$$\frac{P_1}{Q_1} > \frac{P_3}{Q_3} > \frac{P_5}{Q_5} > \dots$$

Ovime smo dokazali da parne konvergente verižnog razlomka čine rastući niz, a neparne konvergente padajući niz, odnosno dokazali smo prve dvije tvrdnje teorema.

Dokažimo treću tvrdnju. Iz teorema 2.3.7 slijedi

$$\frac{P_{2m-1}}{Q_{2m-1}} > \frac{P_{2m}}{Q_{2m}},$$

što znači da je svaka neparna konvergenta veća od svake susjedne parne konvegente. Stoga zaključujemo da je svaka neparna konvergenta veća od svake parne konvergente. Doista, neka je $\frac{P_{2s-1}}{Q_{2s-1}}$ neka neparna konvergenta. Ako je $s \leq m$, onda je

$$\frac{P_{2s-1}}{Q_{2s-1}} \geq \frac{P_{2m-1}}{Q_{2m-1}} > \frac{P_{2m}}{Q_{2m}},$$

a ako je $s > m$, onda je

$$\frac{P_{2s-1}}{Q_{2s-1}} > \frac{P_{2s}}{Q_{2s}} > \frac{P_{2m}}{Q_{2m}}.$$

Dakle, za sve s i m dobivamo

$$\frac{P_{2s-1}}{Q_{2s-1}} > \frac{P_{2m}}{Q_{2m}}.$$

Preostaje dokazati četvrtu tvrdnju teorema. Za konvergente verižnog razlomka

$$\alpha = a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \ddots + \cfrac{b_n}{a_n}}}$$

očigledno vrijedi

$$\alpha > \frac{P_0}{Q_0}, \quad \alpha < \frac{P_1}{Q_1}, \quad \alpha > \frac{P_2}{Q_2}, \quad \ldots$$

Stoga za paran k imamo

$$\frac{P_k}{Q_k} < \alpha < \frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}, \tag{2.18}$$

a za neparan

$$\frac{P_k}{Q_k} > \alpha > \frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}. \tag{2.19}$$

Za posljednju konvergentu očito ćemo u (2.18), odnosno u (2.19), umjesto desne stroge nejednakosti dobiti jednakost. □

Korolar 2.3.13. *Ako su elementi verižnog razlomka (2.17) pozitivni i* $\frac{P_k}{Q_k}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ *njegove konvergente, onda vrijedi*

$$\left|\alpha - \frac{P_k}{Q_k}\right| \leq \frac{b_1 b_2 \ldots b_{k+1}}{Q_k Q_{k+1}}. \tag{2.20}$$

Dokaz. Doista, prema četvrtoj tvrdnji teorema 2.3.12 vrijedi

$$\left|\alpha - \frac{P_k}{Q_k}\right| \leq \left|\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}} - \frac{P_k}{Q_k}\right|.$$

Stoga je dovoljno primijeniti teorem 2.3.7. □

Korolar 2.3.14. *Ako je verižni razlomak* α *jednostavan i ako su* $\frac{P_k}{Q_k}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ *njegove konvergente, onda je*

$$\left|\alpha - \frac{P_k}{Q_k}\right| \leq \frac{1}{Q_k Q_{k+1}}.$$

2.4 Beskonačni verižni razlomci

Neka je

$$\left[a_0; \frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \frac{b_3}{a_3}, \ldots\right] = a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \ddots}}} \tag{2.21}$$

beskonačan verižni razlomak. Razmatrat ćemo dio beskonačnog verižnog razlomka koji je konačni verižni razlomak:

$$\left[a_0; \frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \frac{b_3}{a_3}, \ldots, \frac{b_n}{a_n}\right] = \frac{P_n}{Q_n} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{2.22}$$

Definicija 2.4.1. *Kažemo da je beskonačni verižni razlomak (2.21) konvergentan ako postoji limes*

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{Q_n}. \tag{2.23}$$

U tom slučaju broj α *nazivamo vrijednošću verižnog razlomka. Ako limes (2.23) ne postoji, onda kažemo da je verižni razlomak (2.21) divergentan i ne pridružujemo mu nikakvu brojčanu vrijednost.*

Niz $\left(\frac{P_n}{Q_n}\right)$ konvergira ako i samo ako je Cauchyjev, tj. ako i samo ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $N = N(\varepsilon)$ takav da je

$$\left|\frac{P_{n+m}}{Q_{n+m}} - \frac{P_n}{Q_n}\right| < \varepsilon$$

za svaki $n > N$ i za svaki $m > 0$.

Ako je $Q_k \neq 0$ za svaki k, onda očito imamo

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{P_0}{Q_0} + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{P_k}{Q_k} - \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}\right) = \frac{P_0}{Q_0} + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{b_1 b_2 \ldots b_k}{Q_{k-1}Q_k}, \tag{2.24}$$

pri čemu posljednja jednakost slijedi iz teorema 2.3.7. Prema tome, niz $\left(\frac{P_n}{Q_n}\right)$ je konvergentan ako i samo ako je red

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{b_1 b_2 \ldots b_k}{Q_{k-1}Q_k}$$

konvergentan. Ako verižni razlomak (2.21) konvergira, onda postoji

$$\alpha = \lim_{n\to\infty}\frac{P_n}{Q_n}.$$

Teorem 2.4.2. *Ako su svi elementi a_k, b_k ($k = 0, 1, 2, \ldots$) verižnog razlomka (2.21) pozitivni i ako vrijedi*

$$b_k \leq a_k \quad i \quad a_k \geq d > 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots), \tag{2.25}$$

onda je (2.21) konvergentan.

Dokaz. Prilikom dokazivanja prva tri dijela teorema 2.3.12 nismo koristili konačnost verižnog razlomka. Stoga i ovdje zaključujemo: ako su elementi verižnog razlomka pozitivni, onda parne konvergente $\frac{P_{2k}}{Q_{2k}}$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$) čine rastući niz omeđen odozgo (na primjer, brojem $\frac{P_1}{Q_1}$). Odatle zaključujemo da postoji limes

$$\lim_{k\to\infty}\frac{P_{2k}}{Q_{2k}} = \alpha.$$

Analogno, neparne konvergente $\frac{P_{2k+1}}{Q_{2k+1}}$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$) verižnog razlomka (2.21) čine padajući niz omeđen odozdo, na primjer, brojem $\frac{P_0}{Q_0}$. Stoga također postoji

$$\lim_{k\to\infty}\frac{P_{2k+1}}{Q_{2k+1}} = \beta$$

i vrijedi $\beta \geq \alpha$. Osim toga, za svaki $k \geq 0$ imamo

$$\frac{P_{2k}}{Q_{2k}} < \alpha \leq \beta < \frac{P_{2k+1}}{Q_{2k+1}},$$

pa prema teoremu 2.3.7 vrijedi

$$0 \leq \beta - \alpha < \frac{P_{2k+1}}{Q_{2k+1}} - \frac{P_{2k}}{Q_{2k}} = \frac{b_1 b_2 \dots b_{2k+1}}{Q_{2k} Q_{2k+1}} \stackrel{def}{=} \eta_k. \tag{2.26}$$

Trebamo dokazati da $\eta_k \to 0$ ako $k \to \infty$. Zaista, prema teoremu 2.3.1, za $k \geq 2$ dobivamo

$$Q_k = a_k Q_{k-1} + b_k Q_{k-2}, \qquad Q_{k-1} = a_{k-1} Q_{k-2} + b_{k-1} Q_{k-3}.$$

Odatle, prema pretpostavci (2.25) teorema, zaključujemo

$$Q_k \geq b_k (Q_{k-1} + Q_{k-2}), \qquad Q_{k-1} \geq d Q_{k-2}.$$

Stoga,

$$Q_k \geq b_k (1 + d) Q_{k-2}. \tag{2.27}$$

Iz nejednakosti (2.27) dobivamo

$$Q_{2k} \geq b_{2k}(1+d) Q_{2k-2} \geq \dots \geq b_{2k} b_{2k-2} \dots b_2 (1+d)^k Q_0 = b_2 b_4 \dots b_{2k} (1+d)^k, \tag{2.28}$$

a također i

$$Q_{2k+1} \geq b_{2k+1}(1+d) Q_{2k-1} \geq \dots \geq b_{2k+1} \dots b_3 (1+d)^k Q_1 \geq b_1 b_3 \dots b_{2k+1} (1+d)^k \tag{2.29}$$

jer je $Q_1 = a_1 \geq b_1$. Množenjem nejednakosti (2.28) i (2.29) dobivamo

$$Q_{2k} Q_{2k+1} \geq b_1 b_2 \dots b_{2k+1} (1+d)^{2k}, \tag{2.30}$$

odakle slijedi

$$\eta_k = \frac{b_1 b_2 \dots b_{2k+1}}{Q_{2k} Q_{2k+1}} \leq \frac{1}{(1+d)^{2k}}.$$

Prema tome, $\eta_k \to 0$ kada $k \to \infty$.

Uzmemo li to u obzir u (2.26), zaključujemo $0 \leq \beta - \alpha \leq 0$, odnosno

$$\alpha = \beta = \lim_{n \to \infty} \frac{P_n}{Q_n}$$

i stoga verižni razlomak (2.21) konvergira. □

Napomena 2.4.3. *Vrijednost α verižnog razlomka (2.21) s pozitivnim elementima nalazi se između dvije uzastopne konvergente $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ i $\frac{P_n}{Q_n}$. Dakle,*

$$\left| \alpha - \frac{P_n}{Q_n} \right| \leq \left| \frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} \right| = \frac{b_1 b_2 \dots b_n}{Q_{n-1} Q_n}.$$

Primjer 2.4.4. *Razvijmo $\sqrt{53}$ u verižni razlomak i odredimo njegovu približnu vrijednost. Budući da je najveće cijelo od $\sqrt{53}$ jednako 7, dobivamo*

$$\sqrt{53} = 7 + \frac{1}{a_1}. \tag{2.31}$$

Iz toga slijedi da je

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{53} - 7} = \frac{\sqrt{53} + 7}{4}.$$

Najveće cijelo od a_1 je 3 pa je

$$a_1 = 3 + \frac{1}{a_2}, \tag{2.32}$$

iz čega slijedi da je

$$a_2 = \frac{1}{a_1 - 3} = \frac{4}{\sqrt{53} - 5} = \frac{\sqrt{53} + 5}{7}. \tag{2.33}$$

Analogno,

$$a_3 = \frac{1}{a_2 - 1} = \frac{7}{\sqrt{53} - 2} = \frac{\sqrt{53} + 2}{7}, \tag{2.34}$$

$$a_4 = \frac{1}{a_3 - 1} = \frac{7}{\sqrt{53} - 5} = \frac{\sqrt{53} + 5}{4}, \tag{2.35}$$

$$a_5 = \frac{1}{a_4 - 3} = \frac{4}{\sqrt{53} - 7} = \sqrt{53} + 7, \tag{2.36}$$

$$a_6 = \frac{1}{a_5 - 14} = \frac{1}{\sqrt{53} - 7} = \frac{\sqrt{53} + 7}{4}. \tag{2.37}$$

Primijetimo da je $a_1 = a_6$ pa će se elementi verižnog razlomka ponavljati. Supstitucijom jednakosti (2.32), (2.33), (2.34), (2.35), (2.36), (2.37) u izraz (2.31), dobivamo

$$\sqrt{53} = 7 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{14 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}}}}}.$$

Dakle, iracionalni broj $\sqrt{53}$ *je razvijen u beskonačni periodični verižni razlomak*

$$\sqrt{53} = \left(7; \frac{1}{3}, \frac{1}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{14}, \frac{1}{3}, \frac{1}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{14}, \ldots\right).$$

Konvergente $\frac{P_k}{Q_k}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ *određujemo pomoću sljedeće tablice:*

k	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
a_k		7	3	1	1	3	14	3	1	1
P_k	1	7	22	29	51	182	2 599	7 979	10 578	$\ldots$
Q_k	0	1	3	4	7	25	357	1 096	1 453	$\ldots$

Sedma konvergenta je $\frac{10578}{1453} = 7.280110117$ *što je aproksimacija broja* $\sqrt{53}$ *s apsolutnom greškom manjom od* $3 \cdot 10^{-7}$.

2.5 Razvoj funkcija u verižne razlomke

Verižni razlomci pogodan su način prikazivanja i računanja vrijednosti funkcija. U ovom dijelu obradit ćemo samo neke primjere.

Razvoj racionalne funkcije u verižni razlomak

Ako je f racionalna funkcija, tj.

$$f(x) = \frac{c_{10} + c_{11}x + c_{12}x^2 + \ldots}{c_{00} + c_{01}x + c_{02}x^2 + \ldots},$$

onda, u općenitom slučaju, nakon izvođenja osnovnih operacija dobivamo

$$f(x) = \frac{1}{\frac{c_{00}}{c_{10}} + \frac{c_{00}+c_{01}x+c_{02}x^2+\ldots}{c_{10}+c_{11}x+c_{12}x^2+\ldots} - \frac{c_{00}}{c_{10}}} = \frac{c_{10}}{c_{00} + xf_1(x)},$$

gdje je

$$f_1(x) = \frac{c_{20} + c_{21}x + c_{22}x^2 + \ldots}{c_{10} + c_{11}x + c_{12}x^2 + \ldots}$$

i

$$c_{2k} = c_{10}c_{0,k+1} - c_{00}c_{1,k+1} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Analogno,

$$f_1(x) = \frac{c_{20}}{c_{10} + xf_2(x)},$$

gdje je

$$f_2(x) = \frac{c_{30} + c_{31}x + c_{32}x^2 + \dots}{c_{20} + c_{21}x + c_{22}x^2 + \dots}$$

i

$$c_{3k} = c_{20}c_{1,k+1} - c_{10}c_{2,k+1} \qquad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Postupak se analogno nastavlja.

Prema tome,

$$f(x) = \cfrac{c_{10}}{c_{00} + \cfrac{c_{20}x}{c_{10} + \cfrac{c_{30}x}{c_{20} + \ddots}}} = \left[0; \frac{c_{10}}{c_{00}}, \frac{c_{20}x}{c_{10}}, \frac{c_{30}x}{c_{20}}, \dots, \frac{c_{n0}x}{c_{n-1,0}}\right]. \tag{2.38}$$

Lako se vidi da je verižni razlomak (2.38) konačan.

Koeficijenti c_{jk} jednostavno se računaju pomoću formule

$$c_{jk} = -\begin{vmatrix} c_{j-2,0} & c_{j-2,k+1} \\ c_{j-1,0} & c_{j-1,k+1} \end{vmatrix},$$

gdje je $j \geq 2$.

Primijetimo da u nekim slučajevima koeficijenti c_{jk} mogu biti jednaki nuli. Tada su potrebne odgovarajuće prilagodbe u razvoju (2.38).

Primjer 2.5.1. *Razvijmo funkciju*

$$f(x) = \frac{1 - x}{1 - 5x + 6x^2}$$

u verižni razlomak. Koeficijente c_{jk} zapišemo u sljedeću tablicu

j \ k	0	1	2
0	1	−5	6
1	1	−1	0
2	−4	6	0
3	−2	0	0
4	−12	0	0

Prema tome,

$$f(x) = \frac{1 - x}{1 - 5x + 6x^2} = \left[0; \frac{1}{1}, \frac{-4x}{1}, \frac{-2x}{-4}, \frac{-12x}{-2}\right] = \cfrac{1}{1 - \cfrac{4x}{1 - \cfrac{2x}{-4 + 6x}}}.$$

Razvoj e^x u verižni razlomak

Za e^x Euler[1] je dobio razvoj

$$e^x = \left[0; \frac{1}{1}, \frac{-2x}{2+x}, \frac{x^2}{6}, \frac{x^2}{10}, \dots, \frac{x^2}{4n+2}, \dots\right] \tag{2.39}$$

koje konvergira za svaki x, realan ili kompleksan.

Iz toga dobivamo konvergente

$$\begin{aligned} \frac{P_1}{Q_1} &= \frac{1}{1}, \\ \frac{P_2}{Q_2} &= \frac{2+x}{2-x}, \\ \frac{P_3}{Q_3} &= \frac{12+6x+x^2}{12-6x+x^2}, \\ \frac{P_4}{Q_4} &= \frac{120+60x+12x^2+x^3}{120-60x+12x^2-x^3} \end{aligned}$$

i tako dalje.

Posebno, uzmemo li $x = 1$ i ograničimo li se na četvrtu konvergentu, dobivamo

$$e \approx \frac{193}{71} = 2.7183\dots$$

Kako bismo dobili jednaku preciznost u Maclaurinovom razvoju

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

trebamo najmanje osam članova.

Razvoj $\operatorname{tg} x$ u verižni razlomak

Za $\operatorname{tg} x$, Lambert[2] je dobio razvoj

$$\operatorname{tg} x = \left[0; \frac{x}{1}, \frac{-x^2}{3}, \frac{-x^2}{5}, \dots, \frac{-x^2}{2n+1}, \dots\right] \tag{2.40}$$

koji konvergira u svim točkama neprekidnosti funkcije.

[1]Leonhard Euler (1707.-1783.), švicarski matematičar koji je dao veliki doprinos mnogim matematičkim disciplinama (geometrija, matematička analiza, topologija, teorija brojeva) i fizici.

[2]Johann Heinrich Lambert (1728.-1777.), švicarski matematičar, astronom i filozof. U povijesti matematike ostao je poznat po dokazu iracionalnosti broja π.

Primjer 2.5.2. *Pronađimo približnu vrijednost od* tg 1. *Uvrštavanjem $x = 1$ u (2.40) dobivamo*

$$\operatorname{tg} 1 = \left[0; \frac{1}{1}, \frac{-1}{3}, \frac{-1}{5}, \ldots\right].$$

Koristeći rekurzije (2.10) određujemo konvergente

k	-1	0	1	2	3	4
b_k		1	1	-1	-1	1
a_k		0	1	3	5	7
P_k	1	0	1	3	14	95
Q_k	0	1	1	2	9	61

Ograničavajući se na četvrtu konvergentu, dobivamo

$$\operatorname{tg} 1 \approx \frac{95}{61} = 1.557377,$$

a vrijednost dobivena pomoću računala je 1.55740772465.

Poglavlje 3

Računanje vrijednosti funkcija

Zapis funkcije nije nevažan. Ako su izrazi matematički ekvivalentni, ne znači da su ekvivalentni i njihovi približni izračuni. To dovodi do važnog problema, a to je problem određivanja najprikladnijeg zapisa elementarnih funkcija. Pogodnim zapisom funkcije računanje vrijednosti te funkcije svodi se na slijed jednostavnih računskih operacija.

3.1 Računanje vrijednosti polinoma. Hornerov algoritam

Neka je

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \tag{3.1}$$

polinom n-tog stupnja s realnim koeficijentima a_k $(k = 0, 1, \ldots, n)$, $a_n \neq 0$. Neka je $\alpha \in \mathbb{R}$ zadan. Određujemo koeficijente $b_0, b_1, \ldots, b_m$ polinoma

$$q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0 \tag{3.2}$$

dobivenog dijeljenjem polinoma p polinomom $x-\alpha$, te određujemo vrijednost $p(\alpha)$. Prema teoremu o dijeljenju polinoma s ostatkom vrijedi da je

$$p(x) = q(x)(x - \alpha) + p(\alpha). \tag{3.3}$$

Iz (3.2) i (3.3) dobivamo

$$p(x) = (b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0)(x - \alpha) + p(\alpha),$$

odnosno

$$p(x) = b_{m+1} x^{m+1} + (b_{m-1} - \alpha b_m) x^m + \cdots + (b_0 - \alpha b_1) x + (p(\alpha) - \alpha b_0).$$

Prema teoremu o jednakosti polinoma, jednakost

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = b_{m+1}x^{m+1} + (b_{m-1} - \alpha b_m)x^m + \cdots + (b_0 - \alpha b_1)x + (p(\alpha) - \alpha b_0)$$

vrijedi ako i samo ako vrijedi

$$\begin{array}{rclcrcl}
n &=& m+1 & \Longrightarrow & m &=& n-1 \\
a_n &=& b_{n-1} & \Longrightarrow & b_{n-1} &=& a_n \\
a_{n-1} &=& b_{n-2} - \alpha b_{n-1} & \Longrightarrow & b_{n-2} &=& a_{n-1} + \alpha b_{n-1} \\
\vdots & & & & \vdots & & \\
a_1 &=& b_0 - \alpha b_1 & \Longrightarrow & b_0 &=& a_1 + \alpha b_1 \\
a_0 &=& p(\alpha) - \alpha b_0 & \Longrightarrow & p(\alpha) &=& a_0 + \alpha b_0.
\end{array}$$

Ovim postupkom određujemo koeficijente polinoma q i $p(\alpha)$. Praktičniji način računanja vrijednosti polinoma u točki $x = \alpha$ provodi se pomoću *Hornerovog*[1] *algoritma*:

	a_n	a_{n-1}	$\dots$	a_2	a_1	a_0
α	$\underbrace{b_{n-1}}_{a_n}$	$\underbrace{b_{n-2}}_{a_{n-1}+\alpha b_{n-1}}$	$\dots$	$\underbrace{b_1}_{a_2+\alpha b_2}$	$\underbrace{b_0}_{a_1+\alpha b_1}$	$\underbrace{p(\alpha)}_{a_0+\alpha b_0}$

Primjer 3.1.1. *Izračunajmo vrijednost polinoma*

$$p(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$$

za $x = 3$. *Pomoću Hornerovog algoritma računamo:*

	1	-5	7	-2	4	-8
3	1	$-5 + 3 \cdot 1 = -2$	$7 + 3 \cdot (-2) = 1$	$-2 + 3 \cdot 1 = 1$	$4 + 3 \cdot 1 = 7$	$-8 + 3 \cdot 7 = 13$

Dakle, $p(3) = 13$.

Napomena 3.1.2. *Određivanje vrijednosti polinoma* p *u točki* α *prema Hornerovom algoritmu vrlo je efikasno jer zahtijeva* n *množenja i* n *zbrajanja dok računanje vrijednosti* $p(\alpha)$ *uvrštavanjem supstitucije* $x = \alpha$ *u (3.1) zahtijeva* $\frac{n(n+1)}{2}$ *množenja i* n *zbrajanja.*

Primjer 3.1.3. *Odredimo vrijednost polinoma*

$$p(x) = 4x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 7x + 8$$

[1] William George Horner (1786.- 1837.), engleski matematičar

u točki α na dva načina te promotrimo broj zbrajanja, odnosno množenja pri svakom računanju.
Uvrštavanjem supstitucije $x = \alpha$ u $p(x)$ te računanjem dobivamo

$$\begin{aligned} p(\alpha) &= 4 \cdot \alpha^4 + 5 \cdot \alpha^3 + 6 \cdot \alpha^2 + 7 \cdot \alpha + 8 \\ &= 4 \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha + 5 \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha + 6 \cdot \alpha \cdot \alpha + 7 \cdot \alpha + 8. \end{aligned}$$

Ovim načinom računanja za bilo koji α imamo 4 zbrajanja te 10 množenja, odnosno ukupno 14 računskih operacija.
Računamo li vrijednost polinoma Hornerovim algoritmom dobivamo:

	4	5	6	7	8
α	4	$4\alpha + 5$	$\alpha(4\alpha + 5) + 6$	$\alpha(\alpha(4\alpha + 5) + 6) + 7$	$\alpha(\alpha(\alpha(4\alpha + 5) + 6) + 7) + 8$

Dakle,

$$p(\alpha) = \alpha \cdot (\alpha \cdot (\alpha \cdot (4 \cdot \alpha + 5) + 6) + 7) + 8$$

gdje imamo 4 zbrajanja i 4 množenja.

Napomena 3.1.4. *Hornerov algoritam omogućuje određivanje granica (međa) realnih rješenja (korijena) polinoma p.*

Pretpostavimo da su za $x = \beta > 0$ svi koeficijenti b_i Hornerovog algoritma nenegativni te da je prvi koeficijent pozitivan, odnosno da je

$$b_{n-1} = a_n > 0, \qquad b_i \geq 0 \quad (i = 0, 1, \ldots, n-2) \quad \text{i} \quad p(\beta) > 0. \tag{3.4}$$

Tvrdimo da svi realni korijeni x_k ($k = 1, 2, \ldots, m; m \leq n$) polinoma p nisu smješteni desno od β, odnosno da vrijedi $x_k \leq \beta$ za $k = 1, 2, \ldots, m$. Zaista, iz

$$p(x) = (b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0)(x - \beta) + p(\beta)$$

slijedi da za svaki $x > \beta$ uz uvjete (3.4) vrijedi da je $p(x) > 0$ što znači da svaki broj veći od β nije korijen polinoma p. Prema tome, imamo gornju granicu (među) realnih korijena polinoma p.

Za određivanje donje granice korijena x_k zapišimo polinom

$$(-1)^n p(-x) = a_n x^n - a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + (-1)^n a_0.$$

Za novi polinom pronađemo broj $x = \alpha$ ($\alpha > 0$) takav da su svi koeficijenti Hornerovog algoritma nenegativni. Tada, prema ranijim zaključcima, za realne korijene polinoma $(-1)^n p(-x)$, a oni su jednaki $-x_k$ ($k = 1, 2, \ldots, m$), vrijedi $-x_k \leq \alpha$. Dakle, $x_k \geq -\alpha$ ($k = 1, 2, \ldots, m$). Time smo dobili donju granicu $-\alpha$ realnih korijena polinoma p.

Prema tome, svi se realni korijeni polinoma p nalaze u segmentu $[-\alpha, \beta]$.

Primjer 3.1.5. *Pronađimo granice realnih korijena polinoma*

$$p(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 4x - 1.$$

Izračunajmo vrijednost polinoma p za, recimo, $x = 2$. *Koristeći se Hornerovim algoritmom dobivamo*

	1	-2	3	4	-1
2	1	$-2 + 2 \cdot 1 = 0$	$3 + 2 \cdot 0 = 3$	$4 + 2 \cdot 3 = 10$	$-1 + 2 \cdot 10 = 19$

Budući da su svi koeficijenti $b_i \geq 0$, *realni korijeni* x_k *polinoma p (ako postoje) zadovoljavaju nejednadžbu* $x_k < 2$. *Gornja granica realnih korijena je 2. Pronađimo donju granicu. Zapišimo novi polinom*

$$q(x) = (-1)^4 p(-x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 - 4x - 1.$$

Računanjem vrijednosti polinoma q za, recimo, $x = 1$ *dobivamo*

	1	2	3	-4	-1
1	1	$2 + 1 \cdot 1 = 3$	$3 + 1 \cdot 3 = 6$	$-4 + 1 \cdot 6 = 2$	$-1 + 1 \cdot 2 = 1$

Svi koeficijenti Hornerovog algoritma su pozitivni iz čega slijedi da je $-x_k < 1$, *odnosno da je* $x_k > -1$. *Prema tome, donja granica realnih korijena polinoma p je* -1. *Dakle, svi se realni korijeni polinoma p nalaze u segmentu* $[-1, 2]$.

3.2 Prošireni Hornerov algoritam – Taylorov razvoj polinoma

Neka je $\alpha \in \mathbb{R}$ te neka je

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \tag{3.5}$$

polinom n-tog stupnja s realnim koeficijentima a_k ($k = 0, 1, \ldots, n$), $a_n \neq 0$. Zamjenom

$$x = y + \alpha$$

u (3.5) te izvođenjem potrebnih računskih operacija dobivamo novi polinom u varijabli y:

$$p(y + \alpha) = A_n y^n + A_{n-1} y^{n-1} + \cdots + A_1 x + A_0. \tag{3.6}$$

Budući da je polinom (3.6) zapravo Taylorov polinom funkcije $p(y + \alpha)$, koeficijente A_i ($i = 0, 1, \ldots, n$) možemo izračunati pomoću formule

$$A_i = \frac{p^{(i)}(\alpha)}{i!} \qquad (i = 0, 1, \ldots, n).$$

Koeficijente A_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ možemo praktičnije odrediti pomoću Hornerovog algoritma. Uvrstimo li $y = 0$ u (3.6) dobivamo da je $p(\alpha) = A_0$. Dijeljenjem polinoma (3.5) polinomom $x - \alpha$ dobivamo

$$p(x) = (x - \alpha)p_1(x) + p(\alpha), \tag{3.7}$$

gdje je

$$p_1(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0.$$

Uvrstimo li $y = x - \alpha$ u (3.6) dobivamo

$$p(x) = (x - \alpha)\left[A_n(x - \alpha)^{n-1} + A_{n-1}(x - \alpha)^{n-2} + \cdots + A_1\right] + p(\alpha). \tag{3.8}$$

Uspoređujući jednakosti (3.7) i (3.8) zaključujemo da je

$$p_1(x) = A_n(x - \alpha)^{n-1} + A_{n-1}(x - \alpha)^{n-2} + \cdots + A_1, \tag{3.9}$$

iz čega slijedi da je

$$A_1 = p_1(\alpha). \tag{3.10}$$

Analogno, dijeljenjem polinoma p_1 polinomom $x - \alpha$ dobivamo

$$p_1(x) = (x - \alpha)p_2(x) + p_1(\alpha), \tag{3.11}$$

gdje je

$$p_2(x) = c_{n-2}x^{n-2} + c_{n-3}x^{n-3} + \cdots + c_1 x + c_0.$$

Iz (3.9) i (3.10) dobivamo

$$p_1(x) = (x - \alpha)\left[A_n(x - \alpha)^{n-2} + A_{n-1}(x - \alpha)^{n-3} + \cdots + A_2\right] + p_1(\alpha). \tag{3.12}$$

Uspoređujući (3.11) i (3.12) zaključujemo da je

$$p_2(x) = A_n(x - \alpha)^{n-2} + A_{n-1}(x - \alpha)^{n-3} + \cdots + A_2,$$

iz čega slijedi da je $A_2 = p_2(\alpha)$.

Nastavljajući postupak, izražavamo sve koeficijente A_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ pomoću vrijednosti odgovarajućih polinoma $p_n(x) = p(x)$, $p_{n-1}(x), \ldots, p_0(x) = a_0$ za $x = \alpha$:

$$\begin{aligned}
A_0 &= p(\alpha), \\
A_1 &= p_1(\alpha), \\
A_2 &= p_2(\alpha), \\
&\vdots \\
A_{n-1} &= p_{n-1}(\alpha), \\
A_n &= p_n(\alpha),
\end{aligned}$$

pri čemu su polinomi p_{k+1} konstruirani, polazeći od polinoma p_k, pomoću formule

$$p_k(x) = (x - \alpha)p_{k+1}(x) + p_k(\alpha) \qquad (k = 0, 1, \ldots, n).$$

Za računanje vrijednosti $p_n(\alpha), p_{n-1}(\alpha), p_{n-2}(\alpha), \ldots$ koristimo *prošireni Hornerov algoritam*:

	a_n	a_{n-1}	$\ldots$	a_2	a_1	a_0
α	$\underbrace{b_{n-1}}_{a_n}$	$\underbrace{b_{n-2}}_{a_{n-1}+\alpha b_{n-1}}$	$\ldots$	$\underbrace{b_1}_{a_2+\alpha b_2}$	$\underbrace{b_0}_{a_1+\alpha b_1}$	$\underbrace{p(\alpha)}_{a_0+\alpha b_0}$
α	$\underbrace{c_{n-2}}_{b_{n-1}}$	$\underbrace{c_{n-3}}_{b_{n-2}+\alpha c_{n-2}}$	$\ldots$	$\underbrace{c_0}_{b_1+\alpha c_1}$	$\underbrace{p_1(\alpha)}_{b_0+\alpha c_0}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$		

Primjer 3.2.1. *Razvijmo polinom*

$$p(x) = x^6 + 4x^5 + 6x^4 + 6x^3 + 5x^2 + 2x + 1$$

oko točke -1*, odnosno razvijmo polinom* p *po potencijama*

$$x - \alpha = x - (-1) = x + 1.$$

Koristimo prošireni Hornerov algoritam:

	1	4	6	6	5	2	1
-1	1	3	3	3	2	0	$1 = A_0$
-1	1	2	1	2	0	$0 = A_1$	
-1	1	1	0	2	$-2 = A_2$		
-1	1	0	0	$2 = A_3$			
-1	1	-1	$1 = A_4$				
-1	1	$-2 = A_5$					
-1	$1 = A_6$						

Dakle,

$$p(x) = (x + 1)^6 - 2(x + 1)^5 + (x + 1)^4 + 2(x + 1)^3 - 2(x + 1)^2 + 1.$$

3.3 Računanje vrijednosti racionalnih funkcija

Svaka *racionalna funkcija* $r(x)$ može se zapisati kao kvocijent dva polinoma,

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \tag{3.13}$$

gdje su

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$
$$q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0.$$

Računamo vrijednost racionalne funkcije r za $x = \alpha$, odnosno računamo

$$r(\alpha) = \frac{p(\alpha)}{q(\alpha)}. \tag{3.14}$$

Brojnik $p(\alpha)$ i nazivnik $q(\alpha)$ iz (3.14) računamo pomoću Hornerovog algoritma. To nam daje jednostavnu metodu računanja broja $r(\alpha)$.

Drugi način je pretvaranje racionalne funkcije r u verižni razlomak što je objašnjeno u odjeljku 2.5.

Primjer 3.3.1. *Izračunajmo vrijednost racionalne funkcije*

$$r(x) = \frac{1-4x}{1-3x+4x^2}$$

za $x = 3$. *Brojnik racionalne funkcije je polinom prvog stupnja, odnosno*

$$p(x) = 1 - 4x,$$

a nazivnik polinom drugog stupnja, tj.

$$q(x) = 1 - 3x + 4x^2.$$

Vrijednost racionalne funkcije r *za* $x = 3$ *računamo tako da izračunamo vrijednosti polinoma* p *i* q *za* $x = 3$. *Za funkciju* p *pomoću Hornerovog algoritma računamo:*

	-4	1
3	-4	$1 + 3 \cdot (-4) = -11$

Dakle, $p(3) = -11$. *Sada računamo vrijednost polinoma* q *pomoću Hornerovog algoritma:*

	4	-3	1
3	4	$-3 + 3 \cdot 4 = 9$	$1 + 3 \cdot 9 = 28$

Dakle, $q(3) = 28$. *Prema tome, vrijednost racionalne funkcije* r *za* $x = 3$ *je jednaka*

$$r(3) = \frac{p(3)}{q(3)} = -\frac{11}{28}.$$

Drugi način računanja vrijednosti racionalne funkcije r *za* $x = 3$ *je pretvaranje racionalne funkcije u verižni razlomak. Koeficijente* c_{jk} *racionalne funkcije zapisujemo u sljedeću tablicu:*

$j \backslash k$	0	1	2
0	1	−3	4
1	1	−4	0
2	1	4	0
3	−8	0	0
4	−32	0	0

Prema tome,

$$r(x) = \left[0; \frac{1}{1}, \frac{x}{1}, \frac{-8x}{1}, \frac{-32x}{-8}\right] = \cfrac{1}{1 + \cfrac{x}{1 - \cfrac{8x}{1+4x}}}.$$

Uvrštavanjem $x = 3$ u gornji izraz dobivamo

$$r(3) = \left[0; \frac{1}{1}, \frac{3}{1}, \frac{-24}{1}, \frac{12}{1}\right] = \cfrac{1}{1 + \cfrac{3}{1 - \cfrac{8 \cdot 3}{1+4 \cdot 3}}}.$$

Izvođenjem naznačenih operacija dobivamo redom:

$$1 - \frac{24}{13} = -\frac{11}{3}, \quad 3 : \left(-\frac{11}{13}\right) = -\frac{39}{11}, \quad 1 + \left(-\frac{39}{11}\right) = -\frac{28}{11}, \quad 1 : \left(-\frac{28}{11}\right) = -\frac{11}{28}.$$

Dakle, $r(3) = -\frac{11}{28}$ što je jednako izračunatoj vrijednosti funkcije r pomoću Hornerovog algoritma.

3.4 Približno računanje sume reda

Definicija 3.4.1. *Neka je (a_i) niz realnih ili kompleksnih brojeva. Broj*

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

se naziva n-ta parcijalna suma niza (a_i). Red, u oznaci

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + \cdots \tag{3.15}$$

je uređeni par $((a_i), (S_i))$ *niza* (a_i) *i niza parcijalnih suma* (S_i).

Ako je niz parcijalnih suma (S_n) *konvergentan, kažemo da red (3.15) konvergira. Ako red (3.15) konvergira, onda se broj*

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n \tag{3.16}$$

naziva suma reda (3.15). Ako niz parcijalnih suma (S_n) *divergira, kažemo da red* $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ *divergira.*

Dakle, konvergencija reda (3.15) je ekvivalentna konvergenciji niza njegovih parcijalnih suma. Prema Cauchyjevom kriteriju konvergencije, niz (a_i) konvergira ako i samo ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $N = N(\varepsilon)$ takav da je

$$\left|S_{n+p} - S_n\right| < \varepsilon$$

za svaki $n > N$ i za svaki $p > 0$.

Iz jednakosti (3.16) dobivamo

$$S = S_n + R_n, \tag{3.17}$$

gdje je R_n n-ti ostatak reda (3.15), odnosno

$$R_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k} = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots$$

Kada $n \to \infty$, vrijedi da $R_n \to 0$.

Za određivanje sume S konvergentnog reda (3.15) za točno određeni ε, potrebno je uzeti dovoljno velik broj n, odnosno dovoljno velik broj članova reda, kako bi vrijedilo

$$|R_n| < \varepsilon.$$

Tada se parcijalna suma S_n približno određuje iz sume S reda (3.15).

Primijetit ćemo da članove $a_1, a_2, \dots$ također približno određujemo. Osim toga, sumu S_n obično zaokružujemo na određeni broj decimala. Kako bi se sve greške uzele u obzir te kako bi se osigurala potrebna točnost, izvodimo sljedeći postupak: u općenitom slučaju, odaberemo tri pozitivna broja $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ i ε_3 takva da je

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_2 = \varepsilon.$$

Odredimo broj n takav da je broj članova reda dovoljno velik, odnosno da *greška ostatka* $|R_n|$ zadovoljava

$$|R_n| \le \varepsilon_1. \tag{3.18}$$

Računamo sve članove a_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) s graničnom apsolutnom greškom koja ne prelazi $\frac{\varepsilon_2}{n}$. Neka su $\overline{a}_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) odgovarajuće približne vrijednosti članova reda (3.15), odnosno neka je

$$|\overline{a}_i - a_i| \leq \frac{\varepsilon_2}{n}.$$

Tada *greška operacije* (zbrajanja) zadovoljava nejednakost

$$|S_n - \overline{S}_n| \leq \varepsilon_2, \tag{3.19}$$

gdje je

$$\overline{S}_n = \sum_{i=1}^{n} \overline{a}_i.$$

Konačno, zaokružimo li približnu vrijednost $\overline{S}_n$ na broj $\widehat{S}_n$, tada je *greška zaokruživanja*

$$|\overline{S}_n - \widehat{S}_n| \leq \varepsilon_3. \tag{3.20}$$

Tada je broj $\widehat{S}_n$ približna vrijednost sume S reda (3.15) za određeni ε. Doista, iz nejednakosti (3.18), (3.19) i (3.20) dobivamo

$$|S - \widehat{S}_n| \leq |S - S_n| + |S_n - \overline{S}_n| + |\overline{S}_n - \widehat{S}_n| \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon.$$

Broj ε je podijeljen na pozitivne brojeve $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ i ε_3 kako bi se dobio željeni rezultat. Ako je $\varepsilon = 10^{-m}$, rješenje treba odrediti na m decimala te se obično za $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ i ε_3 uzimaju

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{4}, \qquad \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{4}, \qquad \varepsilon_3 = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ako se ne traži završno zaokruživanje, onda se uzima

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \varepsilon_3 = 0.$$

Zadatak postaje kompliciraniji ako je potrebno odrediti sumu reda na m decimala. Zapravo, potrebno je odrediti element skupa $\left\{\frac{k}{10^m} : k \in \mathbb{Z}\right\}$ koji je najbliži broju S.

Pretpostavimo da je suma S pozitivna i pretpostavimo da je

$$\widetilde{S} = p_0 + \frac{p_1}{10} + \cdots + \frac{p_m}{10^m} + \cdots + \frac{p_n}{10^n}$$

(gdje su p_k nenegativni cijeli brojevi, $n \geq m$) racionalna aproksimacija takva da je

$$|S - \widetilde{S}| \leq \frac{1}{10^{m+1}}.$$

Također pretpostavimo da je

$$p_{m+1} \neq 4, \qquad p_{m+1} \neq 5.$$

Tada, zaokružimo li broj $\widetilde{S}$, dobivamo:

$$\sigma = p_0 + \frac{p_1}{10} + \cdots + \frac{p_m}{10^m} \quad \text{ako je} \quad p_{m+1} \leq 3, \tag{3.21}$$

odnosno

$$\sigma = p_0 + \frac{p_1}{10} + \cdots + \frac{p_{m+1}}{10^m} \quad \text{ako je} \quad p_{m+1} \geq 6. \tag{3.22}$$

Doista, u prvom slučaju, zaokruživanjem dobivamo

$$0 \leq \widetilde{S} - \sigma = \frac{p_{m+1}}{10^{m+1}} + \frac{p_{m+2}}{10^{m+2}} + \cdots + \frac{p_n}{10^n} \leq \frac{3}{10^{m+1}} + \frac{9}{10^{m+2}} + \cdots + \frac{9}{10^n} < \frac{4}{10^{m+1}}.$$

U drugom slučaju, zaokruživanjem dobivamo

$$0 \leq \sigma - \widetilde{S} = \frac{1}{10^m} - \frac{p_{m+1}}{10^{m+1}} - \cdots - \frac{p_n}{10^n} \leq \frac{1}{10^m} - \frac{6}{10^{m+1}} = \frac{4}{10^{m+1}}.$$

Dakle, u oba slučaja dobivamo

$$|\widetilde{S} - \sigma| \leq \frac{4}{10^{m+1}}$$

i prema tome vrijedi da je

$$|S - \sigma| \leq |S - \widetilde{S}| + |\widetilde{S} - \sigma| \leq \frac{1}{10^{m+1}} + \frac{4}{10^{m+1}} = \frac{1}{2} \cdot 10^{-m}.$$

Dakle,

$$S = \sigma \pm \frac{1}{2} \cdot 10^{-m}.$$

Ako je $p_{m+1} = 4$ ili $p_{m+1} = 5$, treba povećati točnost aproksimacije sume $\widetilde{S}$ uzimajući drugi broj decimala.

U posebnom slučaju kada je $p_{m+1} = 4$ i znamo da je

$$S < \widetilde{S},$$

onda je σ iz (3.21) približna vrijednost sume S koja je manja od $\frac{1}{2} \cdot 10^{-m}$.

Analogno, ako je $p_{m+1} = 5$ i

$$S > \widetilde{S},$$

onda je σ iz (3.22) približna vrijednost sume S koja je veća od $\frac{1}{2} \cdot 10^{-m}$.

Kako bi se procijenio ostatak reda (3.15), korisno je primijeniti sljedeće teoreme.

Teorem 3.4.2. *Ako su članovi reda (3.15) odgovarajuće vrijednosti pozitivne padajuće funkcije* $f(x)$*, odnosno ako je*

$$a_n = f(n) \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{3.23}$$

onda vrijedi

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x)dx < R_n < \int_{n}^{\infty} f(x)dx.$$

Teorem 3.4.3. *Ako je red (3.15) alternirajući, odnosno:*

$$a_1 > 0, \qquad a_2 < 0, \qquad a_3 > 0, \quad \ldots$$

i ako je niz $(|a_n|)$ *monotono padajući, onda je*

$$|R_n| \le |a_{n+1}|, \qquad \operatorname{sgn} R_n = \operatorname{sgn} a_{n+1}.$$

Primjer 3.4.4. *Pronađimo sumu reda*

$$S = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{n^3} + \cdots \tag{3.24}$$

na treću decimalu (unutar greške 0.001*). Uzmimo da je greška ostatka*

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{4} \cdot 10^{-3} = \frac{1}{4000}.$$

Članovi reda (3.24) su odgovarajuće vrijednosti padajuće funkcije

$$f(x) = \frac{1}{x^3}.$$

Procjenu n-tog parcijalnog ostatka reda tj.

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$$

određujemo pomoću teorema 3.4.2 *i zaključujemo da je*

$$R_n \le \int_n^{\infty} \frac{dx}{x^3} = \frac{1}{2n^2}.$$

Rješavanjem nejednadžbe

$$\frac{1}{2n^2} \le \frac{1}{4000}$$

dobivamo

$$n \geq \sqrt{2000} \approx 44.7.$$

Uzimamo da je $n = 45$.

Uzmimo graničnu grešku zbrajanja

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{4} \cdot 10^{-3}$$

odakle je dopuštena granična apsolutna greška članova parcijalne sume S_{45} *reda (3.24) jednaka*

$$\frac{\varepsilon_2}{n} \leq \frac{\frac{1}{4} \cdot 10^{-3}}{45} = \frac{5}{9} \cdot 10^{-5}.$$

Neka je

$$\frac{\varepsilon_2}{n} = \frac{1}{2} \cdot 10^{-5}.$$

Sada računamo članove reda (3.24) na pet decimala (i djelomične zbrojeve):

1.00000	0.00100	0.00014	0.00004	0.00002
0.12500	0.00075	0.00012	0.00004	0.00002
0.03704	0.00058	0.00011	0.00004	0.00002
0.01562	0.00046	0.00009	0.00003	0.00002
0.00800	0.00036	0.00008	0.00003	0.00001
0.00463	0.00030	0.00007	0.00003	0.00001
0.00292	0.00024	0.00006	0.00003	0.00001
0.00195	0.00020	0.00006	0.00002	0.00001
0.00137	0.00017	0.00005	0.00002	0.00001
1.19653	0.00406	0.00078	0.00028	0.00013

Dakle,

$$S_{45} = 1.19653 + 0.00406 + 0.00078 + 0.00028 + 0.00013 = 1.20178.$$

Zaokružimo li vrijednost na tisućinke, dobivamo približnu vrijednost sume:

$$S \approx 1.202.$$

Prema tome, greška zaokruživanja je

$$\varepsilon_3 = 0.00022 < \frac{1}{4} \cdot 10^{-3}$$

i ukupna greška ne prelazi

$$\frac{1}{4}\cdot 10^{-3} + \frac{1}{4}\cdot 10^{-3} + \frac{1}{4}\cdot 10^{-3} < \frac{3}{4}\cdot 10^{-3}.$$

Dakle,

$$S = 1.202 \pm 0.001.$$

Preciznija procjena dobije se ako se broj decimala poveća. Za usporedbu, vrijednost sume reda S do $\frac{1}{2}\cdot 10^{-6}$ iznosi

$$S = 1.202057.$$

Napomena 3.4.5. *Budući da je određivanje ukupne greške zahtjevan proces, praktičniji pristup je sljedeći: da bi se osigurala zadana preciznost za $\varepsilon = 10^{-m}$, sve srednje izračune zapišemo s jednom ili dvije dodatne znamenke. U tom postupku se pretpostavlja da greške ne utječu na m-tu decimalu traženog rezultata.*

Prilikom rješavanja primjera 3.4.4 *vidljivo je da smo morali pronaći sumu relativno velikog broja pribrojnika. U praksi najprije treba pokušati transformirati red tako da se željeni rezultat dobije pomoću manjeg broja članova. Taj postupak transformiranja reda naziva se ubrzavanje konvergencije reda i u mnogim slučajevima štedi vrijeme računanja.*

3.5 Računanje vrijednosti analitičkih funkcija

Za realnu funkciju f kažemo da je *analitička* u točki $c \in \mathbb{R}$ ako ju je u nekoj okolini $|x-c| < R$ točke c moguće razviti u red potencija

$$f(x) = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \cdots + a_n(x-c)^n + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3.25}$$

Uvrstimo li $x = c$ u (3.25) dobivamo da je

$$a_0 = f(c). \tag{3.26}$$

Funkcija f je klase C^∞ na intervalu $\langle c-R, c+R\rangle$ te se derivacije $f', f'', \ldots$ funkcije f dobivaju deriviranjem članova reda, odnosno

$$\begin{aligned}
f'(x) &= a_1 + 2a_2(x-c) + 3a_3(x-c)^2 + \cdots + na_n(x-c)^{n-1} + \cdots,\\
f''(x) &= 2a_2 + 3\cdot 2a_3(x-c) + 4\cdot 3a_4(x-c)^2 + \cdots + n\cdot(n-1)a_n(x-c)^{n-2} + \cdots,\\
&\ \vdots\\
f^{(m)}(x) &= m!a_m + (m+1)\cdot m\cdot(m-1)\cdots 3\cdot 2\cdot a_{m+1}(x-c) + \cdots \qquad (m = 3, 4, \ldots).
\end{aligned}$$

Uvrštavanjem $x = c$ dobivamo

$$f'(c) = a_1, \qquad f''(c) = 2a_2, \quad \ldots \quad f^{(m)}(c) = m!a_m, \quad \ldots$$

Odatle je

$$a_1 = \frac{f'(c)}{1!}, \quad a_2 = \frac{f''(c)}{2!}, \quad \ldots \quad a_m = \frac{f^{(m)}(c)}{m!}, \quad \ldots \tag{3.27}$$

Uvrštavanjem (3.26) i (3.27) u (3.25) dobivamo

$$f(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \cdots, \quad x \in \langle c - R, c + R \rangle. \tag{3.28}$$

Red potencija

$$f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \cdots$$

naziva se Taylorov[2] red funkcije f u točki $x = c$. Za $c = 0$ Taylorov red postaje tzv. Maclaurinov[3] red:

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots \tag{3.29}$$

Razlika

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$$

naziva se *n-ti ostatak funkcije f* u točki c. Ostatak $R_n(x)$ je i greška koja nastaje zamjenom funkcije f Taylorovim polinomom

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k.$$

Ocjena greške, odnosno n-ti ostatak reda funkcije može se računati pomoću *Lagrangeove formule*:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}[c + \theta(x-c)]}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}, \tag{3.30}$$

gdje je $0 < \theta < 1$. Posebno, za Maclaurinov red (3.29) vrijedi:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}, \tag{3.31}$$

[2]Brook Taylor (1685.- 1731.), engleski matematičar

[3]Colin Maclaurin (1698.- 1746.), škotski matematičar

gdje je $0 < \theta < 1$.

U mnogim slučajevima je razvoj funkcije u Taylorov red pogodan način računanja vrijednosti funkcije. Aproksimirati funkciju f odgovarajućim Taylorovim polinomom znači u intervalu $\langle c-h, c+h\rangle$ uzeti taj polinom umjesto funkcije f, odnosno staviti

$$f(x) \approx P_n(x)$$

i ocijeniti grešku $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$. Zapravo, potrebno je odrediti granicu apsolutne greške Δ_P:

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \Delta_P.$$

Za Lagrangeovu formulu ocjene greške vrijedi da je

$$|f(x) - P_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}[c + \theta(x-c)]|}{(n+1)!}|x-c|^{n+1}, \quad (0 < \theta < 1, |x-c| \leq h).$$

Tada vrijedi

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}h^{n+1}, \quad \text{za svaki} \quad x \in \langle c-h, c+h\rangle\,.$$

Prema tome, za granicu apsolutne greške aproksimacije možemo uzeti

$$\Delta_P \geq \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}h^{n+1}.$$

Također, ako je poznato $f(c)$ te se traži vrijednost funkcije $f(c+h)$, onda se umjesto formule (3.28) koristi

$$f(c+h) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}h + \frac{f''(c)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}h^n + R_n(h), \tag{3.32}$$

pri čemu je

$$R_n(h) = \frac{f^{(n+1)}(c+\theta h)}{(n+1)!}h^{n+1} \quad (0 < \theta < 1).$$

Primjer 3.5.1. *Odredimo aproksimaciju broja $\sqrt{28}$. Broj $\sqrt{28}$ možemo zapisati na sljedeći način:*

$$\sqrt{28} = \sqrt{25+3} = \sqrt{25\left(1+\frac{3}{25}\right)} = 5\sqrt{1+\frac{3}{25}} = 5\left(1+\frac{3}{25}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.33}$$

Neka je

$$f(x) = (1+x)^{\frac{1}{2}}.$$

Tada, računanjem derivacija funkcije f, dobivamo

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}},\\
f''(x) &= -\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}},\\
f'''(x) &= \frac{3}{8}(1+x)^{-\frac{5}{2}},\\
f^{(4)}(x) &= -\frac{15}{16}(1+x)^{-\frac{7}{2}}.
\end{aligned}$$

Primijetimo da je

$$f(0)=1,\quad f'(0)=\frac{1}{2},\quad f''(0)=-\frac{1}{4},\quad f'''(0)=\frac{3}{8}.$$

Odatle, uvrštavanjem $c = 0$ i $h = \frac{3}{25}$ u izraz (3.32) dobivamo

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{3}{25}\right)^{\frac{1}{2}} &= 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{25}-\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{3}{25}\right)^2+\frac{1}{16}\cdot\left(\frac{3}{25}\right)^3+R_3\\
&= 1+0.06-0.0018+0.000108+R_3\\
&= 1.058308+R_3,
\end{aligned} \tag{3.34}$$

gdje je

$$R_3 = -\frac{15}{16}\cdot\frac{1}{4!}\cdot\left(1+\frac{3\theta}{25}\right)^{-\frac{7}{2}}\cdot\left(\frac{3}{25}\right)^4 = -\frac{81}{10000000}\cdot\left(1+\frac{3\theta}{25}\right)^{-\frac{7}{2}} \quad (0<\theta<1).$$

Očito je

$$|R_3| < 8.1\cdot 10^{-6}.$$

Iz izraza (3.33) i (3.34) dobivamo

$$\sqrt{28} = 5\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{25}-\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{3}{25}\right)^2+\frac{1}{16}\cdot\left(\frac{3}{25}\right)^3+R_3\right). \tag{3.35}$$

U zbroju

$$1+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{25}-\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{3}{25}\right)^2+\frac{1}{16}\cdot\left(\frac{3}{25}\right)^3$$

pribrojnike zaokružimo na 5. decimalu. Zapravo moramo zaokružiti samo zadnji pribrojnik te je stoga greška zaokruživanja

$$\frac{1}{2}\cdot 10^{-5}.$$

Prema tome, vrijedi da je

$$\sqrt{28} = 5 \cdot (1.05831 + E)\,,$$

gdje je

$$|E| < 5 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 10^{-5} + 8.1 \cdot 10^{-6}\right) = 6.55 \cdot 10^{-5}.$$

Zaokružimo li dobivene vrijednosti na četvrte decimale, dobivamo da je

$$\sqrt{28} = 5.2915 \pm 6.55 \cdot 10^{-5}.$$

Vrijednost dobivena pomoću računala je 5.291502622...

3.6 Računanje vrijednosti eksponencijalnih funkcija

Za eksponencijalnu funkciju e^x imamo razvoj

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{3.36}$$

čiji je interval konvergencije $-\infty < x < +\infty$. Red (3.36) ima n-ti ostatak

$$R_n(x) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1} \qquad (0 < \theta < 1). \tag{3.37}$$

Primjer 3.6.1. *Izračunajmo broj e unutar greške od* $\frac{1}{2} \cdot 10^{-4}$. *Zapravo, trebamo pronaći broj d takav da je* $|d - e| < \frac{1}{2} \cdot 10^{-4}$. *Za* $x = 1$ *i* $n = 2$ *iz (3.36) i (3.37) dobivamo*

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} e^{\theta} < 3.$$

Prema tome, vrijedi da je

$$R_n < \frac{3}{(n+1)!} \quad (n = 2, 3, \ldots).$$

Trebamo odrediti najmanji prirodni broj za koji vrijedi

$$\frac{3}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{-4},$$

odnosno

$$6 \cdot 10^4 \leq (n+1)!.$$

Računanjem odredimo da je $n = 8$. Tražena aproksimacija je Taylorov polinom

$$P_8(1) = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!}.$$

Vrijedi

$$|e - P_8(x)| = \frac{3}{9!} = 8.267 \cdot 10^{-6} < 9 \cdot 10^{-6}.$$

Potrebno je izračunati $P_8(1)$. Prva tri pribrojnika nije potrebno zaokružiti. Stoga ćemo $P_8(1)$ aproksimirati brojem d_1. Preostalih šest pribrojnika potrebno je zaokružiti s točnošću do $\frac{1}{2} \cdot 10^{-5}$ jer će tada tih šest pribrojnika imati grešku zaokruživanja manju od $6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^{-5}$. Dakle, zaokruživanjem vrijedi

$$|P_8(x) - d_1| < 3 \cdot 10^{-5},$$

odnosno

$$|e - d_1| < |e - P_8(x)| + |P_8(x) - d_1| < 9 \cdot 10^{-6} + 3 \cdot 10^{-5} = 3.9 \cdot 10^{-5} < \frac{1}{2} \cdot 10^{-4}.$$

Prema tome, d_1 aproksimira e s greškom manjom od $\frac{1}{2} \cdot 10^{-4}$. Pribrojnike zaokružujemo na pet decimala te računamo:

$$\begin{aligned}
P_8(1) &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} \\
&= 1 + 1 + 0.5 + 0.16667 + 0.04167 + 0.00833 + 0.00134 + 0.0002 + 0.00002 \\
&= 2.71823.
\end{aligned}$$

Prema tome, decimalni broj 2.7182 aproksimira broj e unutar greške $\frac{1}{2} \cdot 10^{-4}$.

Ako x ima veliku apsolutnu vrijednost, red (3.36) je nepogodan za računanje. Stoga je uobičajeni postupak računanja sljedeći: neka je

$$x = \lfloor x \rfloor + q,$$

gdje je $\lfloor x \rfloor$ najveće cijelo od x i $0 \leq q < 1$ razlomljeni dio broja. Prema tome, vrijedi

$$e^x = e^{\lfloor x \rfloor} \cdot e^q. \tag{3.38}$$

Prvi faktor umnoška (3.38) dobiva se množenjem:

$$e^{\lfloor x \rfloor} = \underbrace{e \cdot e \cdot e \cdots e}_{\lfloor x \rfloor \text{ puta}} \quad \text{ako je} \quad \lfloor x \rfloor \geq 0$$

ili

$$e^{\lfloor x \rfloor} = \underbrace{\frac{1}{e} \cdot \frac{1}{e} \cdots \frac{1}{e}}_{-\lfloor x \rfloor \ puta} \quad \text{ako je} \quad \lfloor x \rfloor < 0,$$

pri čemu je

$$e = 2.718281828459045\ldots$$

i

$$\frac{1}{e} = 0.367879441171442\ldots$$

Kako bi se osigurala određena točnost, e i $\frac{1}{e}$ uzimamo s dovoljno velikim brojem decimalnih mjesta.

Drugi faktor e^q umnoška (3.38) se računa pomoću razvoja

$$e^q = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{n!}, \tag{3.39}$$

koji za $0 \leq q < 1$ čini konvergentni red. Prema (3.37), ocjena n-tog ostatka $R_n(q)$ je

$$0 \leq R_n(q) < \frac{3}{(n+1)!} q^{n+1}.$$

Izvedimo sada precizniju formulu za ocjenu ostatka $R_n(x)$ za $0 < q < 1$:

$$\begin{aligned} R_n(q) &= \frac{q^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{q^{n+2}}{(n+2)!} + \frac{q^{n+3}}{(n+3)!} + \cdots \\ &= \frac{q^{n+1}}{(n+1)!} \left[1 + \frac{q}{n+2} + \frac{q^2}{(n+2)(n+3)} + \cdots \right] \\ &< \frac{q^{n+1}}{(n+1)!} \left[1 + \frac{q}{n+2} + \left(\frac{q}{n+2} \right)^2 + \cdots \right] \end{aligned}$$

Odatle, određivanjem sume geometrijskog reda zapisanog u zagradi, dobivamo

$$R_n(q) < \frac{q^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{q}{n+2}}, \tag{3.40}$$

odnosno, uočavanjem da je

$$\frac{n+2}{n+1} < \frac{n+1}{n},$$

konačno dobivamo

$$0 < R_n(q) < \frac{q^{n+1}}{n!n}$$

ili

$$0 < R_n(q) < u_n \frac{q}{n}, \tag{3.41}$$

gdje je

$$u_n = \frac{q^n}{n!}$$

posljednji poznati član.

Ako je zadana greška ostatka ε, potrebni broj članova n određujemo rješavanjem nejednadžbe

$$\frac{q^{n+1}}{n!n} < \varepsilon.$$

Aproksimaciju od e^x za male x računamo pomoću

$$e^x = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n + R_n(x), \tag{3.42}$$

gdje je

$$u_0 = 1, \quad u_k = \frac{xu_{k-1}}{k} \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{3.43}$$

Na računalu se račun izvodi prema formulama

$$u_k = \frac{x}{k} u_{k-1}, \quad s_k = s_{k-1} + u_k \quad (k = 0, 1, \ldots, n),$$

gdje su $u_0 = 1$, $s_{-1} = 0$, $s_0 = 1$. Broj $s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ približno daje željenu vrijednost od e^x.

Ako je zadana greška ostatka ε i $n \geq 2|x| > 0$, onda zbrajanje prestaje kada je zadovoljena nejednakost

$$\begin{aligned} |R_n(x)| \leq R_n(|x|) &< \frac{\left|x^{n+1}\right|}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{|x|}{n-2}} \\ &< \frac{2|x|^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{2|x|}{n+1} \cdot \frac{|x|^2}{n!} < |u_n| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Prema tome, zbrajanje prestaje ako apsolutna vrijednost posljednjeg člana u_n ne prelazi ε i tada je

$$|R_n(x)| < |u_n|. \tag{3.44}$$

Primjer 3.6.2. *Odredimo* $\sqrt{e}$ *na petu decimalu, odnosno unutar greške* 10^{-5}. *Pretpostavimo da je greška ostatka*

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{4} \cdot 10^{-5} = 2.5 \cdot 10^{-6}.$$

Tada gruba procjena daje da je broj članova sume (3.42) jednak 10*. Stoga ćemo članove računati s dodatne dvije decimale. Uzmimo da je greška zbrajanja*

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{4} \cdot 10^{-5}.$$

Tada je dopuštena granična greška jednaka

$$\frac{\varepsilon_2}{n} \leq \frac{\frac{1}{4} \cdot 10^{-5}}{10} = \frac{5}{2} \cdot 10^{-7}.$$

Za

$$u_0 = 1, \quad u_k = \frac{u_{k-1}}{2k} \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

dobivamo

$$\begin{aligned} u_0 &= 1, \\ u_1 &= \frac{1}{2} = 0.5, \\ u_2 &= \frac{u_1}{4} = 0.125, \\ u_3 &= \frac{u_2}{6} = 0.0208333, \\ u_4 &= \frac{u_3}{8} = 0.0026042, \\ u_5 &= \frac{u_4}{10} = 0.0002604, \\ u_6 &= \frac{u_5}{12} = 0.0000217, \\ u_7 &= \frac{u_6}{14} = 0.0000016. \end{aligned}$$

Tada je, prema (3.42),

$$\begin{aligned} \sqrt{e} &= 1 + 0.5 + 0.125 + 0.0208333 + 0.0026042 + 0.0002604 + 0.0000217 + 0.0000016 \\ &= 1.6487212. \end{aligned}$$

Zaokružimo li zbroj na pet decimala dobivamo

$$\sqrt{e} = 1.64872. \tag{3.45}$$

Prema tome, greška zaokruživanja je

$$\varepsilon_3 = 0.0000012 < \frac{1}{4} \cdot 10^{-5}$$

i ukupna greška ne prelazi

$$\varepsilon < 2.5 \cdot 10^{-6} + \frac{5}{2} \cdot 10^{-7} + 1.2 \cdot 10^{-6} = 3.95 \cdot 10^{-6} < \frac{1}{2} \cdot 10^{-5}.$$

Vrijednosti od e^x možemo računati i pretvaranjem e^x u verižni razlomak:

$$e^x = \left[0; \frac{1}{1}, \frac{-2x}{2+x}, \frac{x^2}{6}, \frac{x^2}{10}, \dots, \frac{x^2}{4n+2}, \dots\right] \tag{3.46}$$

koji konvergira za svaki x (realni i kompleksni).

Primjer 3.6.3. *Odredimo $\sqrt{e}$ pomoću formule (3.46). Uvrstimo $x = \frac{1}{2}$ u formulu (3.46) i konvergente određujemo pomoću sljedeće tablice:*

k	-1	0	1	2	3	4	5
b_k		0	1	-1	$1/4$	$1/4$	$1/4$
a_k	1	1	1	$5/2$	6	10	14
P_k	1	0	1	$5/2$	$61/4$	$1225/8$	$34361/16$
Q_k	0	1	1	$3/2$	$37/4$	$743/8$	$20841/16$

Ograničimo li se na petu konvergentu, dobivamo da je

$$\sqrt{e} \approx \frac{P_5}{Q_5} = \frac{34361}{16} : \frac{20841}{16} = \frac{34361}{20841} = 1.648721$$

unutar greške od $\frac{1}{2} \cdot 10^{-6}$.

3.7 Računanje vrijednosti logaritamske funkcije

Za prirodni logaritam brojeva blizu jedinice imamo razvoj

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots \quad (-1 < x \le 1). \tag{3.47}$$

Izraz (3.47) nije prikladan za računanje budući da su razmaci između brojeva $0 < 1 + x \le 2$ mali. Osim toga, za $|x|$ blizu jedinice, red (3.47) sporo konvergira.

Pokazat ćemo prikladniju formulu za računanje prirodnog logaritma broja. Zamjenom x sa $-x$ u (3.47) dobivamo

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots - \frac{x^n}{n} - \cdots . \tag{3.48}$$

Oduzimanjem članova u izrazu (3.48) od članova u izrazu (3.47) dobivamo

$$\ln\frac{1-x}{1+x} = -2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right).$$

Stavimo li

$$z = \frac{1-x}{1+x},$$

tada je

$$x = \frac{1-z}{1+z}$$

i stoga je, za $0 < z < +\infty$,

$$\ln z = -2\left[\frac{1-z}{1+z} + \frac{1}{3}\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^5 + \cdots\right]. \tag{3.49}$$

Neka je x pozitivan broj. Prikažimo ga kao

$$x = 2^m \cdot z,$$

pri čemu je $m \in \mathbb{Z}$ i $\frac{1}{2} \leq z < 1$. Zamjenom

$$\xi = \frac{1-z}{1+z},$$

gdje je

$$0 < \xi \leq \frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3},$$

iz (3.49) slijedi

$$\ln x = \ln(2^m z) = m\ln 2 + \ln z = m\ln 2 - 2\left(\xi + \frac{\xi^3}{3} + \cdots + \frac{\xi^{2n-1}}{2n-1}\right) - R_n,$$

pri čemu je

$$\begin{aligned} R_n &= 2\left(\frac{\xi^{2n+1}}{2n+1} + \frac{\xi^{2n+3}}{2n+3} + \frac{\xi^{2n+5}}{2n+5} + \cdots\right) \\ &< 2 \cdot \frac{\xi^{2n+1}}{2n+1}(1 + \xi^2 + \xi^4 + \cdots) < \frac{2}{1-\xi^2} \cdot \frac{\xi^{2n+1}}{2n+1}. \end{aligned}$$

Za $0 < \xi \leq \frac{1}{3}$ dobivamo

$$\frac{2}{1-\xi^2} \leq \frac{9}{4}$$

te je prema tome

$$0 < R_n < \frac{9}{4} \cdot \frac{\xi^{2n+1}}{2n+1}, \tag{3.50}$$

odnosno

$$0 < R_n < \frac{1}{4(2n+1)} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2n-1}.$$

Stavimo li

$$u_k = \frac{\xi^{2k-1}}{2k-1} \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

možemo pisati

$$\ln x = m \ln 2 - 2(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) - R_n, \tag{3.51}$$

pri čemu je

$$\ln 2 = 0.69314718\ldots$$

Iz (3.50) dobivamo

$$R_n < \frac{9}{4}\xi^2 \cdot \frac{\xi^{2n-1}}{2n-1} \leq \frac{1}{4}u_n < \varepsilon,$$

gdje je ε dozvoljena greška ostatka. Prema tome, zbrajanje prestaje kada je

$$u_n < 4\varepsilon.$$

Granična greška sume $\sum_{k=1}^{n} u_k$ može se procijeniti navodeći određeni broj decimalnih mjesta u sumi te procjenom prikladnog broja sumanada n prema (3.49).

Primjer 3.7.1. *Odredimo* $\ln 5$ *na petu decimalu. Računat ćemo s dodane dvije decimale kako bismo što točnije odredili* $\ln 5$. *Izrazimo li*

$$5 = 2^3 \cdot \frac{5}{8} = 2^3 \cdot 0.625,$$

imamo $z = 0.625$ *i*

$$\xi = \frac{1-z}{1+z} = \frac{0.375}{1.625} = 0.2307692.$$

Tada je

$$u_1 = \xi = 0.2307692,$$

$$u_2 = \frac{\xi^3}{3} = 0.0040965,$$

$$u_3 = \frac{\xi^5}{5} = 0.0001309,$$

$$u_4 = \frac{\xi^7}{7} = 0.000005.$$

Prema tome, vrijedi

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 0.2307692 + 0.0040965 + 0.0001309 + 0.000005 = 0.2350016.$$

Koristeći (3.51) dobivamo

$$\ln 5 = 3 \cdot 0.69314718 - 2 \cdot 0.2350016 = 1.60944.$$

Napomena 3.7.2. *Također je moguće računati prirodni logaritam pomoću zapisa*

$$x = e^p z,$$

gdje je $p \in \mathbb{Z}$ *i* $\frac{1}{e} < z \leq 1$.

Za računanje općeg logaritma koristi se formula

$$\log_{10} x = 10 \ln x,$$

gdje je $M = \log_{10} e = 0.434294481903252\ldots$

3.8 Računanje vrijednosti trigonometrijskih funkcija

Računanje vrijednosti sinusa i kosinusa

Neka je $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. Svi ostali x mogu se odrediti primjenom svojstava funkcija sinusa i kosinusa (tzv. redukcijskim formulama). Ako je $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$, vrijedi

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \tag{3.52}$$

Tada je Taylorov polinom

$$P_n(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!},$$

a pripadni ostatak, prema Lagrangeovoj formuli

$$R_{2n+1}(x) = (-1)^n \cos(\theta x) \quad (0 < \theta < 1).$$

Primjer 3.8.1. *Odredimo Taylorov polinom* P_n *koji na segmentu* $\left[-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right]$ *aproksimira funkciju* $f(x) = \sin 2x$ *unutar greške* $\frac{1}{2} \cdot 10^{-5}$. *Zapravo moramo odrediti polinom* P_n *za koji vrijedi*

$$|\sin 2x - P_n| < \frac{1}{2} \cdot 10^{-5}, \quad \forall x \in \left[-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right].$$

Odredimo n za koji vrijedi

$$|R_{2n+1}(2x)| < \frac{1}{2} \cdot 10^{-5}.$$

Znamo da je

$$|R_{2n+1}(2x)| \leq \frac{|2x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \leq \frac{1}{(2n+1)!}\left(2 \cdot \frac{\pi}{8}\right)^{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}, \quad \forall x \in \left[-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right].$$

Uzimajući $n = 2, 3, 4$ *dobivamo redom*

$$\frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^5 = 0.002490394, \quad \frac{1}{7!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^7 = 0.000036576, \quad \frac{1}{9!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^9 = 0.000000313 < \frac{1}{2} \cdot 10^{-5}.$$

Prema tome, dovoljno je uzeti Taylorov polinom sedmog stupnja

$$2x - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} - \frac{(2x)^7}{7!}$$

da bi se funkcija $f(x) = \sin 2x$ *aproksimirala na segmentu* $\left[-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right]$ *unutar greške* $\frac{1}{2} \cdot 10^{-5}$. *Odredimo segment* $[-h, h]$ *u kojem je granica apsolutne greške aproksimacije*

$$2x - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} - \frac{(2x)^7}{7!}$$

manja od $\frac{1}{2} \cdot 10^{-4}$. *Znamo da je*

$$\left|\frac{(2x)^9}{9!}\cos(2\theta x)\right| \leq \frac{(2h)^9}{9!} \quad (0 < \theta < 1).$$

Također znamo da je granica apsolutne greške aproksimacije manja od $\frac{1}{2} \cdot 10^{-4}$*, odnosno da je*

$$\left|\frac{(2x)^9}{9!}\cos(2\theta x)\right| < \frac{1}{2} \cdot 10^{-4},$$

a to će vrijediti ako je

$$\frac{(2h)^9}{9!} \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{-4},$$

odnosno ako je

$$h \leq \frac{1}{2}\sqrt[9]{0.00005 \cdot 9!}.$$

Budući da je

$$\frac{1}{2}\sqrt[9]{0.00005 \cdot 9!} > \frac{1}{2}\sqrt[3]{\sqrt[3]{18}} > \frac{1}{2}\sqrt[3]{2.6} > \frac{1}{2} \cdot 1.3 = 0.65,$$

vrijedi da je

$$h \leq 0.65 = \frac{13}{20}.$$

Dakle, Taylorov polinom

$$2x - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} - \frac{(2x)^7}{7!}$$

aproksimira funkciju $f(x) = \sin 2x$ *unutar greške* $\frac{1}{2} \cdot 10^4$ *u segmentu* $\left[-\frac{13}{20}, \frac{13}{20}\right]$.

Ako je $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, tada je

$$\sin x = \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \tag{3.53}$$

pri čemu je $z = \frac{\pi}{2} - x$ i $0 \leq z \leq \frac{\pi}{4}$.

Suma reda (3.52) može se računati pomoću

$$\sin x = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + R_n, \tag{3.54}$$

gdje se sumandi u_k $(k = 1, 2, \ldots n)$ računaju pomoću formula

$$u_1 = x, \quad u_{k+1} = -\frac{x^2}{2k(2k+1)} u_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Budući da je red (3.52) alternirajući, pri čemu apsolutne vrijednosti članova monotono padaju, ocjena n-tog ostatka R_n je

$$|R_n| \leq \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = |u_{n+1}|$$

i vrijedi

$$\operatorname{sgn} R_n = \operatorname{sgn} u_{n+1}.$$

Zbrajanje članova u (3.54) završava kada je

$$|u_k| \leq \varepsilon,$$

pri čemu je ε greška ostatka.

Analogno,

$$\cos z = v_1 + v_2 + \cdots + v_n + R_n, \tag{3.55}$$

gdje je

$$v_1 = 1, \quad v_{k+1} = -\frac{x^2}{(2k-1)2k} v_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1),$$

$$|R_n| \leq \frac{z^{2n}}{(2n)!} = |v_{n+1}|, \quad \operatorname{sgn} R_n = \operatorname{sgn} v_{n+1}.$$

Primjer 3.8.2. *Odredimo* $\sin 38°12'$ *unutar greške* 10^{-5}. *Zapišimo*

$$x = 38°12' = 38.2° = \frac{191\pi}{900} = 0.666716.$$

Prema (3.54) dobivamo

$$\begin{aligned}
u_1 &= x = 0.666716,\\
u_2 &= -\frac{x^2 u_1}{2\cdot 3} = -0.049394,\\
u_3 &= -\frac{x^2 u_2}{4\cdot 5} = 0.001098,\\
u_4 &= -\frac{x^2 u_3}{6\cdot 7} = -0.000012
\end{aligned}$$

te je

$$\sin 38°12' = 0.666716 - 0.049394 + 0.001098 - 0.000012 = 0.618408.$$

Zaokruživanjem na petu decimalu dobivamo

$$\sin 38°12' = 0.61841.$$

Vrijednost od $\cos 38°12'$ računa se na analogan način.

Primjer 3.8.3. *Odredimo* $\cos 38°12'$. *Znamo da je* $x = 38°12' = 0.666716$. *Prema (3.55) dobivamo*

$$\begin{aligned}
v_1 &= 1,\\
v_2 &= -\frac{x^2 v_1}{1\cdot 2} = -0.222255,\\
v_3 &= -\frac{x^2 v_2}{3\cdot 4} = 0.008233,\\
v_4 &= -\frac{x^2 v_3}{5\cdot 6} = -0.000122
\end{aligned}$$

te je

$$\cos 38°12' = 1 - 0.222255 + 0.008233 - 0.000122 = 0.785856.$$

Zaokruživanjem na petu decimalu dobivamo

$$\cos 38°12' = 0.78586.$$

Računanje vrijednosti tangensa

Neka je $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$. Ako je $|x| < \frac{\pi}{2}$, onda vrijedi

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} + \cdots$$

Vrijednosti tangensa lako računamo pomoću verižnih razlomaka. Stavimo li

$$y = \frac{x}{\operatorname{tg} x},$$

tada je, prema Lambertovom razvoju tangensa u verižni razlomak (2.40),

$$y = \left[1; \frac{-x^2}{3}, \frac{-x^2}{5}, \ldots, \frac{-x^2}{2n+1}, \ldots\right]$$

Kako bismo odredili y unutar greške od 10^{-10} dovoljno je uzeti $n = 7$. Tada je

$$y = 1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7 - \cfrac{x^2}{9 - \cfrac{x^2}{11 - \cfrac{x^2}{13 - \cfrac{x^2}{15}}}}}}}.$$

Obično se y računa pomoću Hornerovog algoritma pri čemu se kreće od kraja:

$$\begin{aligned}
y_1 &= 13 - \frac{x^2}{15}, \\
y_2 &= 11 - \frac{x^2}{y_1}, \\
y_3 &= 9 - \frac{x^2}{y_2}, \\
y_4 &= 7 - \frac{x^2}{y_3}, \\
y_5 &= 5 - \frac{x^2}{y_4}, \\
y_6 &= 3 - \frac{x^2}{y_5}, \\
y = y_7 &= 1 - \frac{x^2}{y_6}.
\end{aligned}$$

Konačno, $\operatorname{tg} x = \frac{x}{y}$.

Primjer 3.8.4. *Odredimo* tg 25°. *Zapišimo*

$$x = 25^\circ = 0.436332.$$

Tada je

$$x^2 = 0.190386.$$

Računamo:

$$\begin{aligned}
y_1 &= 13 - \frac{0.190386}{15} = 12.987308,\\
y_2 &= 11 - \frac{0.190386}{12.987308} = 10.985341,\\
y_3 &= 9 - \frac{0.190386}{10.985341} = 8.982669,\\
y_4 &= 7 - \frac{0.190386}{8.982669} = 6.978805,\\
y_5 &= 5 - \frac{0.190386}{6.978805} = 4.972719,\\
y_6 &= 3 - \frac{0.190386}{4.972719} = 2.961714,\\
y = y_7 &= 1 - \frac{0.190386}{2.961714} = 0.935718
\end{aligned}$$

te je

$$\operatorname{tg} 25^\circ = \frac{0.436332}{0.935718} = 0.466307.$$

3.9 Računanje vrijednosti hiperbolnih funkcija

Računanje vrijednosti sinusa hiperbolnog

Kako je

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

to je

$$\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x.$$

Sinus hiperbolni ima sljedeći razvoj:

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots \quad (-\infty < x < +\infty).$$

Pretpostavimo da je $x > 0$. Tada se računanje vrijednosti sinusa hiperbolnog izvodi pomoću zbroja

$$\operatorname{sh} x = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + R_n,$$

gdje je

$$u_1 = x, \quad u_{k+1} = \frac{x^2}{2k(2k+1)} u_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1)$$

i R_n n-ti ostatak. Za $0 < x \leq n$ dobivamo

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} + \frac{x^{2n+5}}{(2n+5)!} + \cdots \\ &< \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \left[1 + \frac{x^2}{(2n+2)(2n+3)} + \frac{x^4}{(2n+2)^2(2n+3)^2} + \cdots \right] \\ &< \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{x^2}{(2n+2)(2n+3)}} < \frac{4}{3} \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{4}{3} u_{n+1}. \end{aligned}$$

Budući da vrijedi

$$u_{n+1} = \frac{x^2}{2n(2n+1)} u_n < \frac{1}{4} u_n,$$

slijedi da je

$$R_n < \frac{1}{3} u_n.$$

Pomoću razvoja sinusa hiperbolnog možemo otkriti vezu između $\operatorname{sh} ix$ i $\sin x$. Budući da je $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$, $i^6 = -1 \ldots$, zamjenom x sa ix u razvoju sinusa hiperbolnog dobivamo

$$\operatorname{sh} ix = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} = ix - i\frac{x^3}{3!} + i\frac{x^5}{5!} - i\frac{x^7}{7!} + \cdots = i \sin x.$$

Računanje vrijednosti kosinusa hiperbolnog

Kako je

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

to je

$$\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x.$$

Kosinus hiperbolni ima sljedeći razvoj:

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \quad (-\infty < x < +\infty).$$

Računanje vrijednosti kosinusa hiperbolnog izvodi se pomoću zbroja

$$\operatorname{ch} x = v_1 + v_2 + \cdots + v_n + R_n,$$

gdje je

$$v_1 = 1, \quad v_{k+1} = \frac{x^2}{(2k-1)2k} v_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1)$$

i R_n n-ti ostatak. Za $0 < |x| \le n$ dobivamo

$$\begin{aligned}
R_n &= \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} + \frac{x^{2n+4}}{(2n+4)!} + \cdots \\
&< \frac{x^{2n}}{(2n)!}\left[1 + \frac{x^2}{(2n-1)(2n+2)} + \frac{x^4}{(2n+1)^2(2n+2)^2} + \cdots\right] \\
&< \frac{x^{2n}}{(2n)!} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{x^2}{(2n+1)(2n+2)}} < \frac{4}{3} \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{4}{3} v_{n+1}.
\end{aligned}$$

Za $n \ge 1$ vrijedi

$$v_{n+1} = \frac{x^2}{(2n-1)2n} v_n \le \frac{1}{2} v_n,$$

iz čega slijedi da je

$$R_n < \frac{2}{3} v_n.$$

Računanje vrijednosti tangensa hiperbolnog

Kako je

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$

to je

$$\operatorname{th}(-x) = -\operatorname{th} x.$$

Za $|x| < \frac{\pi}{2}$, za određivanje vrijednosti tangensa hiperbolnog koristimo sljedeći razvoj:

$$\operatorname{th} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} + \cdots .$$

Za sve vrijednosti broja x, vrijednost tangensa hiperbolnog računamo pretvaranjem u verižni razlomak:

$$\operatorname{th} x = \left[0; \frac{x}{1}, \frac{x^2}{3}, \frac{x^2}{5}, \ldots, \frac{x^2}{2n-1}, \ldots\right].$$

Budući da su članovi verižnog razlomka za $x > 0$ pozitivni, vrijednost $\operatorname{th} x$ se nalazi između susjednih konvergenata.

Ako je $x > 0$, onda se $\operatorname{th} x$ može računati pomoću formule

$$\operatorname{th} x = 1 - \frac{2}{e^{2x} + 1}.$$

3.10 Korištenje iterativne metode za određivanje približnih vrijednosti funkcija

Za danu vrijednost argumenta x potrebno je izračunati vrijednost neprekidne funkcije

$$y = f(x). \tag{3.56}$$

Ako je funkcija (3.56) komplicirana i ako je potrebno izračunati velik broj vrijednosti, računanje se obično izvodi pomoću računala. Moguće je da direktno računanje vrijednosti funkcije pomoću formule (3.56) bude zahtjevno ovisno o značajkama stroja. Jednostavne operacije mogu postati "komplicirane" ili čak nemoguće za izvođenje. Na primjer, postoje strojevi za računanje koji nemaju mogućnost dijeljenja. U takvim slučajevima je vrlo korisna sljedeća tehnika računanja. Zapišimo (3.56) u implicitnom obliku:

$$F(x, y) = 0. \tag{3.57}$$

Pretpostavimo da je $F(x, y)$ neprekidna te da ima neprekidnu parcijalnu derivaciju $F_y'(x, y) \neq 0$. Neka je y_n približna vrijednost od y. Prema Lagrangeovom teoremu, vrijedi

$$F(x, y_n) = F(x, y_n) - F(x, y) = (y_n - y)F_y'(x, \overline{y}_n),$$

gdje je $\overline{y}_n$ vrijednost između y_n i y. Iz prethodne jednadžbe dobivamo

$$y = y_n - \frac{F(x, y_n)}{F_y'(x, \overline{y}_n)}. \tag{3.58}$$

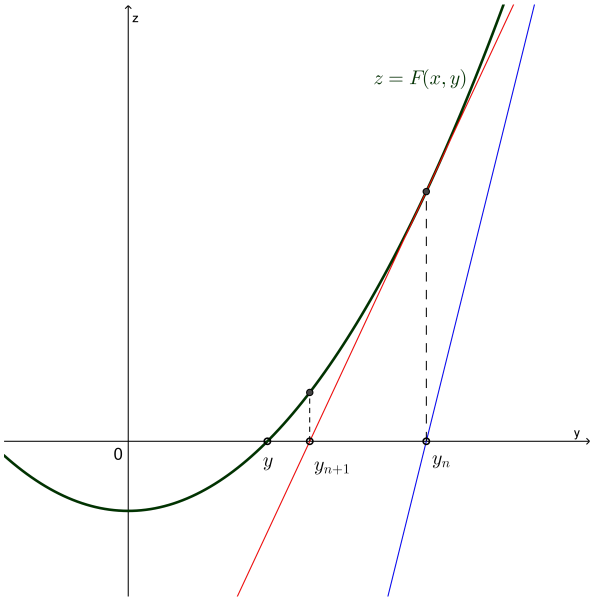
Pretpostavimo li da je $\overline{y}_n \approx y_n$, dobivamo sljedeći iterativni postupak za računanje vrijednosti od y:

$$y_{n+1} = y_n - \frac{F(x, y_n)}{F_y'(x, y_n)} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{3.59}$$

Formula (3.58) ima jednostavno geometrijsko značenje. Fiksirajmo vrijednost od x i promatrajmo graf funkcije

$$z = F(x, y). \tag{3.60}$$

Iz izraza (3.59) slijedi da je ovaj iterativni postupak zapravo *Newtonova metoda tangente*. To znači da su uzastopne aproksimacije y_{n+1} dobivene kao apscise sjecišta y-osi i tangente krivulje za $y = y_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, kao na slici 3.1. Konvergencija postupka je osigurana ako $F_y^{'}(x, y)$ i $F_{yy}^{''}(x, y)$ zadrže konstantne predznake u promatranom intervalu koji sadrži y.



Slika 3.1: Newtonova metoda tangente

Općenito, početna vrijednost y_0 je proizvoljna i bira se što je moguće bliže željenoj vrijednosti y. Iterativni postupak je neprekidan sve dok se dvije uzastopne vrijednosti y_{n-1} i y_n ne podudaraju unutar granice dane točnosti ε, odnosno sve dok se ne dobije $|y_{n-1} - y_n| < \varepsilon$. Strogo govoreći, ne može se jamčiti da je

$$|y - y_n| < \varepsilon. \tag{3.61}$$

Iz tog se razloga svaki konkretni slučaj dodatno ispituje.

Vrlina iterativnog postupka je u ponavljanju istih operacija te se stoga lako programira.

3.11 Računanje recipročne vrijednosti

Neka je

$$y = \frac{1}{x}.$$

Pretpostavimo da je $x > 0$. Stavimo

$$F(x, y) \stackrel{def}{=} x - \frac{1}{y} = 0.$$

Tada je

$$F_y'(x, y) = \frac{1}{y^2}.$$

Iz (3.59) dobivamo

$$y_{n+1} = y_n - \frac{x - \frac{1}{y_n}}{\frac{1}{y_n{}^2}},$$

odnosno

$$y_{n+1} = y_n(2 - xy_n) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{3.62}$$

Dobili smo iterativni postupak bez dijeljenja. Početna vrijednost y_0 bira se sljedećim načinom. Pretpostavimo da je argument zapisan u obliku

$$x = 2^m x_1,$$

gdje je m cijeli broj i $\frac{1}{2} \leq x_1 < 1$. Stavimo da je

$$y_0 = 2^{-m}. \tag{3.63}$$

Ispitajmo uvjete konvergencije postupka (3.62). Iz (3.62) dobivamo

$$\frac{1}{x} - y_n = \frac{1}{x} - 2y_{n-1} + xy_{n-1}^2 = x\left(\frac{1}{x} - y_{n-1}\right)^2. \tag{3.64}$$

Odatle zaključujemo

$$\frac{1}{x} - y_n = x^{2^n-1}\left(\frac{1}{x} - y_0\right)^{2^n} = \frac{1}{x}\left(1 - xy_0\right)^{2^n}. \tag{3.65}$$

Za konvergenciju postupka (3.65) nužno je i dovoljno da vrijedi

$$|1 - xy_0| < 1,$$

odnosno

$$0 < xy_0 < 2. \tag{3.66}$$

Prema tome, ako vrijedi (3.66), tada je

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \frac{1}{x}.$$

Primijetimo da za odabir y_0 u (3.63) dobivamo

$$xy_0 = 2^m x_1 \cdot 2^{-m} = x_1,$$

pa je

$$\frac{1}{2} \leq xy_0 < 1 \tag{3.67}$$

čime su uvjeti (3.66) zadovoljeni. Osim toga, iz (3.65) zaključujemo da je

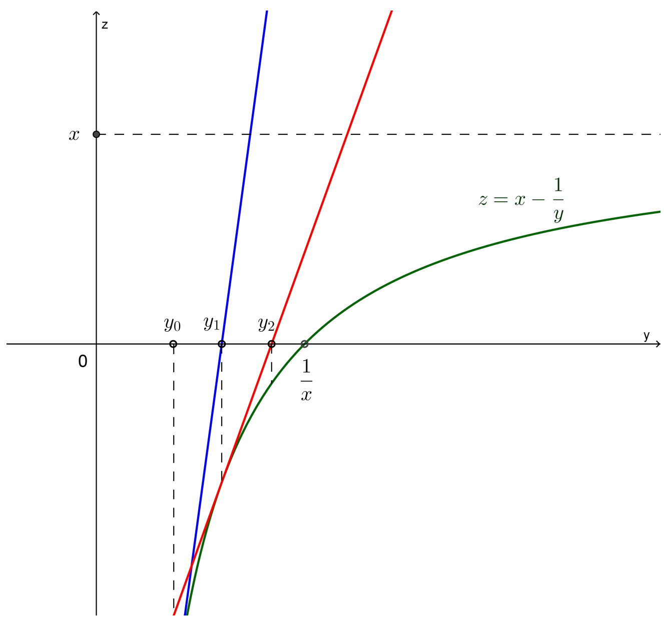
$$\left|\frac{1}{x} - y_n\right| \leq \frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n} \leq 2y_0\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}.$$

Prema tome, konvergencija iterativnog postupka je izuzetno brza.

Izvedimo drugu (ponekad praktičniju) procjenu greške za vrijednost y_n. Najprije uočimo da su sve uzastopne aproksimacije $y_0, y_1, y_2, \ldots$ dobivene primjenom Newtonove metode tangente na hiperbolu

$$z = x - \frac{1}{y} \quad (x = \text{konstanta}),$$

vidite sliku 3.2.



Slika 3.2: Graf funkcije $z = x - \frac{1}{y}$, gdje je x =konst.

Iz (3.64) i (3.67) slijedi

$$0 < y_n < \frac{1}{x} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Osim toga, budući da je

$$y_n - y_{n-1} = y_{n-1}(1 - xy_{n-1}) = xy_{n-1}\left(\frac{1}{x} - y_{n-1}\right) \geq 0, \tag{3.68}$$

slijedi da su uzastopne aproksimacije od y_n monotono rastuće, odnosno

$$y_0 \leq y_1 \leq y_2 \leq \cdots .$$

Iz (3.68) dobivamo

$$\frac{1}{x} - y_{n-1} = \frac{1}{xy_{n-1}}(y_n - y_{n-1}),$$

odnosno, zbog

$$xy_{n-1} \geq xy_0 \geq \frac{1}{2},$$

imamo

$$\frac{1}{x} - y_{n-1} \leq 2(y_n - y_{n-1}).$$

Odatle slijedi

$$\frac{1}{x} - y_n \leq y_n - y_{n-1}.$$

Dakle, ako pronađemo y_n i y_{n-1} za koje vrijedi $y_n - y_{n-1} < \varepsilon$, onda također vrijedi

$$0 < \frac{1}{x} - y_n < \varepsilon.$$

Primjer 3.11.1. *Koristeći (3.62) odredimo vrijednost funkcije $y = \frac{1}{x}$ za $x = 3$. Vrijedi da je $x = 2^2 \cdot \frac{3}{4}$. Stavimo li $y_0 = \frac{1}{4}$, dobivamo*

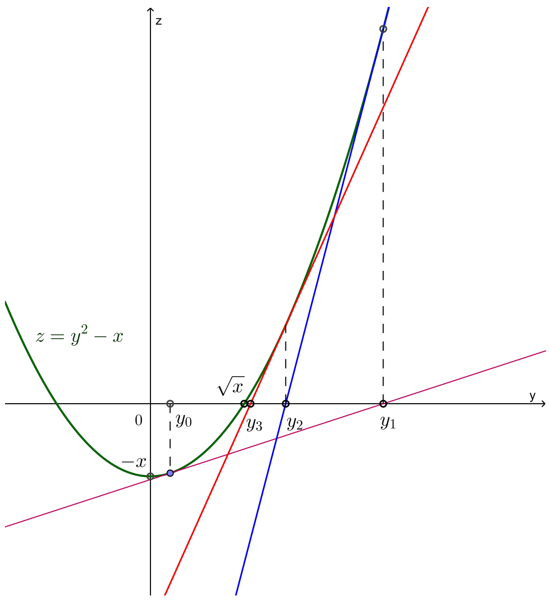
$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{4}\left(2 - \frac{3}{4}\right) = \frac{5}{16} = 0.312, \\ y_2 &= 0.312(2 - 3 \cdot 0.312) = 0.332, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Iterativni postupak brzo konvergira.

3.12 Računanje kvadratnog korijena

Neka je
$$y = \sqrt{x} \quad (x > 0). \tag{3.69}$$
Stavimo
$$F(x, y) \overset{def}{=} y^2 - x = 0.$$
Tada je
$$F_y'(x, y) = 2y.$$
Koristeći (3.59) dobivamo
$$y_{n+1} = y_n - \frac{y_n^2 - x}{2y_n},$$
odnosno
$$y_{n+1} = \frac{1}{2}\left(y_n + \frac{x}{y_n}\right) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{3.70}$$
što je *Heronov*[4] *postupak (Heronov algoritam).*

Uzastopne aproksimacije $y_0, y_1, y_2, \ldots$ dobivene su primjenom Newtonove metode tangente na parabolu
$$z = y^2 - x \quad (x = \text{konstanta}),$$
vidite sliku 3.3.



Slika 3.3: Graf funkcije $z = y^2 - x$, gdje je x =konst.

[4]Heron (oko 10.- 70.), grčki matematičar i inženjer

Stavimo li

$$y_0 = \sqrt{x}(1+\delta),$$

tj. ako y_0 aproksimira $\sqrt{x}$ s relativnom greškom $|\delta|$, zanemarujući potencije od δ iznad treće, dobivamo

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{2}\left(y_0 + \frac{x}{y_0}\right) = \frac{1}{2}\left[\sqrt{x}(1+\delta) + \sqrt{x}(1+\delta)^{-1}\right] \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{x}(1+\delta+1-\delta+\delta^2) = \sqrt{x}\left(1+\frac{\delta^2}{2}\right), \end{aligned}$$

pa y_1 aproksimira $\sqrt{x}$ s relativnom greškom $\frac{1}{2}\delta^2$. Odatle dolazimo do bitnog zaključka: primjenom Heronovog postupka se broj točnih znamenaka otprilike udvostručuje u svakom koraku.

Primjer 3.12.1. *Za $y = \sqrt{2}$ uzmimo da je približno*

$$y_0 = 1.4.$$

Preciznijim određivanjem vrijednosti dobivamo

$$y_1 = \frac{1}{2}\left(1.4 + \frac{2}{1.4}\right) = 0.7 + 0.714 = 1.414.$$

Ponavljanjem postupka dobivamo

$$y_2 = \frac{1}{2}\left(1.414 + \frac{2}{1.414}\right) = 0.707 + 0.7072136 = 1.4142136,$$

što je točna vrijednost od $\sqrt{2}$ na sedmu decimalu ($\sqrt{2} = 1.41421356\ldots$).

Ispitajmo uvjete konvergencije Heronovog postupka. Iz (3.70) zamjenom $n+1$ sa n, za $y_0 \neq 0$, dobivamo

$$y_n - \sqrt{x} = \frac{1}{2y_{n-1}}\left(y_{n-1} - \sqrt{x}\right)^2$$

i

$$y_n + \sqrt{x} = \frac{1}{2y_{n-1}}\left(y_{n-1} + \sqrt{x}\right)^2.$$

Odatle je

$$\frac{y_n - \sqrt{x}}{y_n + \sqrt{x}} = \left(\frac{y_{n-1} - \sqrt{x}}{y_{n-1} + \sqrt{x}}\right)^2. \tag{3.71}$$

Stoga je

$$\frac{y_n - \sqrt{x}}{y_n + \sqrt{x}} = \left(\frac{y_0 - \sqrt{x}}{y_0 + \sqrt{x}}\right)^{2^n}.$$

Slijedi

$$y_n - \sqrt{x} = 2\sqrt{x} \cdot \frac{q^{2^n}}{1 - q^{2^n}}, \tag{3.72}$$

gdje je

$$q = \frac{y_0 - \sqrt{x}}{y_0 + \sqrt{x}}. \tag{3.73}$$

Iz (3.72) slijedi da Heronov postupak konvergira za

$$|q| < 1,$$

što vrijedi ako je

$$y_0 > 0.$$

U tom slučaju dobivamo

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \sqrt{x} \quad \text{i} \quad y_n \geq \sqrt{x} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Primijetimo da je

$$y_{n-1} - y_n = y_{n-1} - \frac{1}{2}\left(y_{n-1} + \frac{x}{y_{n-1}}\right) = \frac{y_{n-1}^2 - x}{2y_{n-1}} > 0 \tag{3.74}$$

i prema tome aproksimacije y_n za $n \geq 1$ čine monotono padajući niz

$$y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_{n-1} \geq x_n \geq \cdots \geq \sqrt{x}.$$

Jednakost se postiže jedino kada je $y_0 = \sqrt{x}$.

Kada računamo na računalu, pogodno je zapisati broj x u binarnom sustavu, odnosno kao $x = 2^m x_1$, gdje je m cijeli broj i $\frac{1}{2} \leq x_1 < 1$. Tada se za nultu aproksimaciju obično uzima

$$y_0 = 2^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}, \tag{3.75}$$

gdje $\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$ označava najveći cijeli broj broja $\frac{m}{2}$.

Primjer 3.12.2. *Odredimo $\sqrt{7}$. Zapišimo $x = 7 = 2^3 \cdot \frac{7}{8}$. Tada je*

$$y_0 = 2^{\lfloor \frac{3}{2} \rfloor} = 2.$$

Koristeći (3.70) računamo

$$
\begin{aligned}
y_1 &= \frac{1}{2}\left(2+\frac{7}{2}\right) = 2.75, \\
y_2 &= \frac{1}{2}\left(2.75+\frac{7}{2.75}\right) = \frac{1}{2}\,(2.75+2.5455) = 2.64775, \\
y_3 &= \frac{1}{2}\left(2.64775+\frac{7}{2.64775}\right) = \frac{1}{2}\,(2.64775+2.643754) = 2.645752
\end{aligned}
$$

i tako dalje. Usporedimo li dobivene aproksimacije sa

$$\sqrt{7} = 2.64575131\ldots,$$

vidimo da y_2 ima dvije, a y_3 pet točnih znamenaka.

Ako je $m = 2p$ paran, onda je

$$y_0 = 2^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} = 2^p > \sqrt{x}$$

i stoga je

$$|q| = \frac{y_0 - \sqrt{x}}{y_0 + \sqrt{x}} = \frac{2^p - 2^p\sqrt{x_1}}{2^p + 2^p\sqrt{x_1}} = \frac{1-\sqrt{x_1}}{1+\sqrt{x_1}} \le \frac{1-\sqrt{\frac{1}{2}}}{1+\sqrt{\frac{1}{2}}} = \left(\sqrt{2}-1\right)^2.$$

Analogno, ako je $m = 2p + 1$ neparan, onda je

$$y_0 = 2^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} = 2^p \le \sqrt{x}.$$

Stoga je

$$|q| = \frac{\sqrt{x}-y_0}{\sqrt{x}+y_0} = \frac{2^p\sqrt{2x_1}-2^p}{2^p\sqrt{2x_1}+2^p} = \frac{\sqrt{2x_1}-1}{\sqrt{2x_1}+1} = 1 - \frac{2}{\sqrt{2x_1}+1} < 1 - \frac{2}{\sqrt{2}+1} = \left(\sqrt{2}-1\right)^2.$$

Prema tome, uvijek dobivamo

$$|q| \le \left(\sqrt{2}-1\right)^2 = 0.1716\ldots < \frac{1}{5}.$$

Ovo zajedno s (3.72) povlači

$$0 \le y_n - \sqrt{x} < 2\sqrt{x}\,\frac{\left(\frac{1}{5}\right)^{2^n}}{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{2^n}} \le \frac{25}{12}y_1\left(\frac{1}{5}\right)^{2^n} \quad \text{za} \quad n \ge 1,$$

pri čemu je

$$y_1 = \frac{1}{2}\left(y_0 + \frac{x}{y_0}\right) \le \frac{3}{2} y_0.$$

Konačno,

$$0 \le y_n - \sqrt{x} < \frac{25}{8} y_0 \left(\frac{1}{5}\right)^{2^n}. \tag{3.76}$$

Pomoću (3.76) lako se odredi broj iteracija $n = n(x)$ dovoljan da bi se osigurala zadana točnost.

Pokažimo još jednu formulu za ocjenjivanje greške vrijednosti y_n ($n \ge 2$). Budući da je

$$y_{n-1} \ge \sqrt{x} \quad \text{i} \quad \frac{x}{y_{n-1}} \le \sqrt{x},$$

uzimajući u obzir (3.74), dobivamo

$$0 \le y_{n-1} - \sqrt{x} \le y_{n-1} - \frac{x}{y_{n-1}} = \frac{y_{n-1}^2 - x}{y_{n-1}} = 2\left(y_{n-1} - y_n\right).$$

Stoga je

$$0 \le y_n - \sqrt{x} \le y_{n-1} - y_n. \tag{3.77}$$

Prema tome, ako je $0 \le y_{n-1} - y_n < \varepsilon$ ($n \ge 2$), onda je sigurno $0 \le y_n - \sqrt{x} < \varepsilon$.

Ponekad je korisna sljedeća metoda računanja kvadratnog korijena. Stavimo

$$F(x, y) \stackrel{def}{=} \frac{x}{y^2} - 1 = 0.$$

Tada je

$$F_y'(x, y) = -\frac{2x}{y^3}.$$

Koristeći (3.59) dobivamo

$$y_{n+1} = y_n + \frac{\frac{x}{y_n^2} - 1}{\frac{2x}{y_n^3}},$$

odnosno

$$y_{n+1} = \frac{y_n}{2}\left(3 - \frac{y_n^2}{x}\right) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{3.78}$$

Nećemo razmatrati ocjenu greške i uvjete konvergencije iterativnog postupka (3.78).

3.13 Računanje recipročne vrijednosti kvadratnog korijena

Neka je

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (x > 0).$$

Zapišemo li ovu funkciju kao

$$y = \sqrt{\frac{1}{x}}$$

iz (3.78) dobivamo iterativni postupak bez dijeljenja:

$$y_{n+1} = \frac{y_n}{2}\left(3 - xy_n^2\right) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{3.79}$$

Ako je $x = 2^m x_1$, gdje je $\frac{1}{2} \leq x < 1$, onda za y_0 biramo vrijednost

$$y_0 = 2^{-\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}.$$

Napomenimo da je zbog

$$\sqrt{x} = x\sqrt{\frac{1}{x}}$$

moguće na temelju (3.79) izračunati kvadratni korijen broja bez korištenja operacije dijeljenja.

3.14 Računanje kubnog korijena

Ako je

$$y = \sqrt[3]{x} \quad (x > 0), \tag{3.80}$$

onda, stavljanjem

$$F(x, y) \overset{def}{=} y^3 - x = 0,$$

dobivamo

$$F_y^{'}(x, y) = 3y^2.$$

Prema (3.59) imamo

$$y_{n+1} = y_n - \frac{y_n^3 - x}{3y_n^2}, \tag{3.81}$$

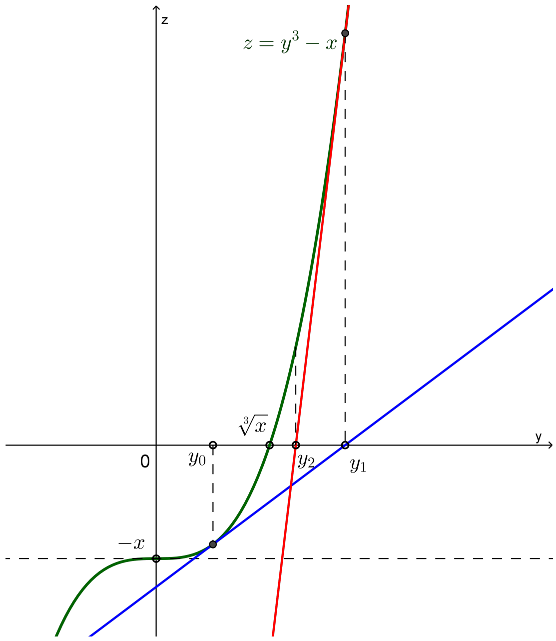
odnosno

$$y_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2y_n + \frac{x}{y_n^2}\right). \tag{3.82}$$

Geometrijski, (3.82) je Newtonova metoda tangente na parabolu

$$z = y^3 - x \quad (x = \text{konstanta}),$$

vidite sliku 3.4. Iterativni postupak (3.82) konvergira za $y_0 > 0$.



Slika 3.4: Graf funkcije $z = y^3 - x$, gdje je x =konst.

Uzmemo li da početna aproksimacija y_0 ima relativnu grešku $|\delta|$, tj. stavimo li

$$y_0 = \sqrt[3]{x}\,(1 + \delta)\,,$$

vrijednost y_1, izračunata iz (3.82), dat će $\sqrt[3]{x}$ s relativnom greškom od δ^2. Doista, primjenom (3.82) dobivamo

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{3}\left(2y_0 + \frac{x}{y_0^2}\right) = \frac{1}{3}\left[2\sqrt[3]{x}\,(1+\delta) + \sqrt[3]{x}\,(1+\delta)^{-2}\right] \\ &= \frac{1}{3}\sqrt[3]{x}\left(2 + 2\delta + 1 - 2\delta + 3\delta^2\right) = \sqrt[3]{x}\left(1 + \delta^2\right). \end{aligned}$$

Iz prethodnog zaključujemo da, ako je y_0 točan do p-te znamenke, onda će y_1 imati točne $2p$ ili $2p - 1$ znamenke.

Primjer 3.14.1. *Koristeći tabličnu vrijednost točnu na tri decimale, imamo*

$$\sqrt[3]{15} = 2.466.$$

Prema (3.82) dobivamo

$$\sqrt[3]{15} = \frac{1}{3}\left(2 \cdot 2.466 + \frac{15}{2.466^2}\right) = \frac{1}{3}(4.932 + 2.466636) = 2.466212.$$

Usporedimo li dobivenu vrijednost s vrijednošću dobivenom pomoću računala ($\sqrt[3]{15} = 2.466212074\ldots$) *uočavamo da su vrijednosti jednake do šeste decimale.*

Ako je $x = 2^m x_1$, gdje je m cijeli broj i $\frac{1}{2} \leq x_1 \leq 1$, onda se za početnu vrijednost uzima

$$y_0 = 2^{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor} > 0. \tag{3.83}$$

Budući da je

$$\begin{aligned} y_n - \sqrt[3]{x} &= \frac{1}{3}\left(2y_{n-1} + \frac{x}{y_{n-1}^2} - 3\sqrt[3]{x}\right) \\ &= \frac{1}{3y_{n-1}^2}\left(y_{n-1} - \sqrt[3]{x}\right)^2\left(2y_{n-1} + \sqrt[3]{x}\right) > 0, \end{aligned}$$

slijedi

$$y_n \geq \sqrt[3]{x} \quad \text{za} \quad n \geq 1. \tag{3.84}$$

Osim toga, zamjenom $n + 1$ sa n u (3.81), dobivamo

$$y_{n-1} - y_n = \frac{y_{n-1}^3 - x}{3y_{n-1}^2}. \tag{3.85}$$

Stoga je

$$y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_{n-1} \geq y_n \geq \cdots \geq \sqrt[3]{x} \tag{3.86}$$

odakle slijedi da postoji

$$\lim_{n\to\infty} y_n = y > 0.$$

Odredimo li limes od (3.82) kada $n \to \infty$, dobivamo

$$y = \frac{1}{3}\left(2y + \frac{x}{y^2}\right),$$

odnosno

$$y = \sqrt[3]{x}.$$

Dakle,

$$\lim_{n \to \infty} y_n = \sqrt[3]{x}.$$

Ako je početna aproksimacija y_0 izabrana kao u (3.83), može se dokazati da je

$$0 \leq y_n - \sqrt[3]{x} \leq \frac{3}{2}\,(y_{n-1} - y_n) \quad \text{za} \quad n \geq 2.$$

Bibliografija

[1] B. P. Demidovič, I. A. Maron, *Computational Mathematics* (prijevod s ruskog), Mir Publishers, Moskva, 1987.

[2] A. Dujella, *Uvod u teoriju brojeva*, skripta, `https://web.math.pmf.unizg.hr/ duje/utb/utblink.pdf`

[3] S. Kurepa, *Matematička analiza, drugi dio*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1984.

[4] V. Petričević, *Periodski verižni razlomci*, magistarski rad, 2009, `https://web.math.pmf.unizg.hr/ vpetrice/radovi/Magistarski.pdf`

[5] E. Stipanić, *Viša matematika, prvi deo*, Građevinska knjiga, Beograd, 1981.

Sažetak

Prikladan zapis funkcije omogućuje pogodnije računanje (približnih) vrijednosti te funkcije. Elementarna funkcija se zapisuje u matematički ekvivalentnom obliku koji računanje vrijednosti funkcije obično svodi na osnovne računske operacije. U ovom diplomskom radu opisane su neke tehnike približnog računanja vrijednosti elementarnih funkcija: pomoću zapisa funkcije u obliku verižnog razlomka, zapisa funkcije u obliku reda potencija i pomoću iterativnih postupaka. Također su opisane i greške do kojih dolazi prilikom računanja.

Summary

A suitable representation of a function allows us the computation of its (approximate) values in a more convenient way. An elementary function is usually represented in an equivalent form which reduces the computing of its values to elementary arithmetic operations. Some techniques of approximate computation of the values of elementary functions are described in this thesis: by means of continued fractions, by means of power series, and by iterative processes. All types of errors arising from these calculations are also described.

Životopis

Rođena sam 28. prosinca 1992. godine u Slavonskom Brodu. Osnovnu školu "Bogoslav Šulek" pohađala sam u obližnjim selima Šušnjevci i Vranovci. Nakon završetka osnovne škole, 2007. godine upisala sam opći smjer gimnazije "Matija Mesić" u Slavonskom Brodu. Srednjoškolsko obrazovanje završila sam 2011. godine. Iste godine upisala sam preddiplomski sveučilišni studij Matematika, smjer: nastavnički na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno–matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu. Godine 2014. završila sam preddiplomski studij te na istom fakultetu upisala diplomski sveučilišni studij Matematika, smjer: nastavnički. U rujnu 2015. godine u časopisu za mlade matematičare Matka objavljen mi je članak pod nazivom "Matematika u receptima".