Analitičke metode modularnih formi

Žunar, Sonja

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Sonja Žunar

ANALITIČKE METODE MODULARNIH FORMI

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Goran Muić

Zagreb, srpanj 2014.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Baki Barbari i braci Bojanu

Sadržaj

Uvod

Kad je Dirichlet 1837. godine pomoću (Dirichletovih) L-funkcija dokazao Teorem o prostim brojevima u aritmetičkim nizovima, uočen je potencijal primjene ozbiljnih analitičkih metoda u teoriji brojeva. Dirichletov se dokaz smatra rođenjem analitičke teorije brojeva, a korištenje generalizacija Dirichletovih L-funkcija i u suvremenoj je teoriji brojeva važna ideja pristupa brojnim problemima.

Danas je jedno od važnih područja istraživanja u analitičkoj teoriji brojeva teorija modularnih formi, holomorfnih funkcija na gornjoj kompleksnoj poluravnini koje zadovoljavaju određenu funkcionalnu jednadžbu u vezi s grupom $SL_2(\mathbb{Z})$ (ili, općenitije, nekom njenom podgrupom konačnog indeksa) i neke dodatne uvjete (vidi potpoglavlje 3.2). Ne samo da su iznenađujuća svojstva modularnih formi izvor dokaza brojnih netrivijalnih identiteta u teoriji brojeva, već modularne forme primjene nalaze i u algebarskoj geometriji i matematičkoj fizici te su u jakoj vezi s teorijom eliptičkih krivulja. Jedan je od najpoznatijih rezultata o toj vezi Teorem modularnosti, u potpunosti dokazan tek 2001. godine, prema kojem je svaka racionalna eliptička krivulja zapravo "zamaskirana" modularna forma. Činjenica da je Posljednji Fermatov teorem dokazan upravo kao posljedica (posebnog slučaja) Teorema modularnosti dovoljno govori o aktualnosti i snazi teorije modularnih formi.

Ovaj je rad zamišljen kao uvod u analitičku teoriju brojeva i teoriju modularnih formi. Podijeljen je na dva dijela: cilj je prvog dijela Drichletovom metodom dokazati Teorem o prostim brojevima u aritmetičkim nizovima, dok se drugi dio bavi modularnim formama.

Rad počinje uvodnim poglavljem (Poglavlje 1), u kojemu razvijamo metode kompleksne analize koje ćemo koristiti u glavnom dijelu rada. Osnovne rezultate navodimo bez dokaza, ali posebnu pažnju posvećujemo beskonačnim produktima te dokazujemo poznatu formulu o razvoju kotangensa u red parcijalnih razlomaka (teorem 1.3.1).

U Poglavlju 2 Dirichletovom metodom dokazujemo Teorem o prostim brojevima u aritmetičkim nizovima (teorem 2.0.2). Na putu do dokaza proučavamo grupe karaktera konačnih Abelovih grupa, konvergenciju Dirichletovih redova, dokazujemo osnovna svojstva zeta funkcije i Dirichletovih L-funkcija te uvodimo pojmove analitičke i prirodne gustoće skupova prostih brojeva. Na kraju ilustriramo jednu primjenu Dirichletova teorema: dokazujemo da za svaki $n \in \mathbb{Z} \backslash \mathbb{Z}^2$ skup prostih brojeva p takvih da jednadžba

$x^2 = n$ ima rješenje modulo p ima analitičku gustoću $\frac{1}{2}$ (teorem 2.7.6).

Poglavlje 3 uvod je u teoriju modularnih formi: promatramo djelovanje modularne grupe na gornju kompleksnu poluravninu i identificiramo kvocijent tog djelovanja sa skupom rešetki u $\mathbb{C}$ definiranih do na homotetiju; definiramo modularne funkcije i modularne forme težine $2k$, $k \in \mathbb{Z}$, i ostvarujemo vezu s funkcijama $\mathscr{R} \to \overline{\mathbb{C}}$ težine $2k$ (ovdje je $\mathscr{R}$ skup rešetki u $\mathbb{C}$); određujemo dimenzije i konstruiramo baze prostora modularnih formi te ocjenjujemo brzinu rasta njihovih Fourierovih koeficijenata; uvodimo Heckeove operatore kao korespondencije na $\mathscr{R}$ i dokazujemo osnovna svojstva njihovih svojstvenih funkcija i odgovarajućih Dirichletovih redova. Usporedno s razvojem teorije uvodimo osnovne primjere modularnih formi i modularnih funkcija: Eisensteinov red, modularnu diskriminantu i modularnu invarijantu, i istražujemo njihova svojstva. Primjerice, određujemo koeficijente razvoja Eisensteinova reda u Fourierov red (korolar 3.3.12), izvodimo Jacobijevu produktnu formulu za modularnu diskriminantu (teorem 3.7.3) i dokazujemo multiplikativnost Ramanujanove τ funkcije (teorem 3.8.24).

Zahvaljujem svom mentoru, prof. dr. sc. Goranu Muiću, na velikoj pomoći pri odabiru teme koja me "natjerala" da zavolim teoriju brojeva, te iznimnom strpljenju i brojnim korisnim savjetima tijekom izrade ovog rada.

Poglavlje 1

Rezultati iz kompleksne analize

1.1 Osnovni pojmovi i rezultati

U ovom potpoglavlju izložit ćemo neke poznate rezultate kompleksne analize koje ćemo koristiti u glavnom dijelu rada. Dokazi navedenih tvrdnji mogu se naći u bilo kojem standardnom udžbeniku iz uvoda u kompleksnu analizu, npr. u [2].

Osnovni pojmovi

Polje kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$, skup uređenih parova realnih brojeva s operacijama zbrajanja

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \qquad x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R},$$

i množenja

$$(x_1, y_1)\,(x_2, y_2) := (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2), \qquad x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R},$$

promatrat ćemo sa standardnom topologijom naslijeđenom od $\mathbb{R}^2$. Neprazan, otvoren i povezan skup u $\mathbb{C}$ zvat ćemo **područjem**.

Skup $\mathbb{R}$ identificirat ćemo s njegovom slikom po ulaganju $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$, $x \mapsto (x, 0)$. Uvedimo oznaku $i := (0, 1)$. Kako je $\{1, i\}$ baza dvodimenzionalnog realnog vektorskog prostora $\mathbb{C}$, svaki $z \in \mathbb{C}$ na jedinstven se način može prikazati u obliku $z = x + iy$, gdje su $x, y \in \mathbb{R}$.

Kompleksno konjugiranje je funkcija $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$z = x + iy \;\mapsto\; \bar{z} := x - iy, \qquad x, y \in \mathbb{R},$$

a **apsolutna vrijednost**, $|\cdot| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, definirana je sa

$$|z| = |x + iy| := \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

Uvedimo sada osnovne pojmove kompleksne analize – kompleksnu derivaciju i integral neprekidne funkcije po po dijelovima glatkom putu. Neka je Ω otvoren skup u $\mathbb{C}$.

Definicija 1.1.1. *Kažemo da je funkcija $f : \Omega \to \mathbb{C}$ **derivabilna (diferencijabilna) u točki** $a \in \Omega$ ako postoji*

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}.$$

*U tom slučaju ovaj limes zovemo **derivacijom funkcije** f **u točki** a i označavamo ga sa $f'(a)$.*
*Neka je $U \subseteq \Omega$ otvoren. Ako je f derivabilna u svakoj točki skupa U, kažemo da je f **holomorfna** ili **analitička na** U.*
*Kažemo da je f **analitička u točki** $a \in \Omega$ ako je f holomorfna na nekoj otvorenoj okolini točke a.*
*Ako je f holomorfna na Ω, kažemo da je f **holomorfna** ili **analitička funkcija**.*

Definicija 1.1.2. *Neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Za $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ i $a \in \Omega$ induktivno po n definiramo derivaciju n-tog reda funkcije f u točki a:*

(1) $f^{(0)} := f$.

*(2) Za $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, ako postoji otvorena okolina U točke a takva da je $f^{(n-1)}(z)$ definirano za sve $z \in U$ i da je funkcija $f^{(n-1)} : U \to \mathbb{C}$ derivabilna u točki a, kažemo da je f n **puta derivabilna** (n **puta diferencijabilna) u točki** a i definiramo **derivaciju** n**-tog reda** funkcije f u točki a sa*

$$f^{(n)}(a) := \left(f^{(n-1)}\right)'(a).$$

Definicija 1.1.3. *Neka je I interval u $\mathbb{R}$ i neka je $\gamma : I \to \mathbb{C}$. Neka su $u, v : I \to \mathbb{R}$ takve da vrijedi $\gamma = u + iv$. Ako su funkcije u i v derivabilne u točki $t \in I$ (kao realne funkcije na I), kažemo da je γ **derivabilna (diferencijabilna) u točki** t i definiramo **derivaciju funkcije** γ **u točki** t sa*

$$\gamma'(t) := u'(t) + iv'(t).$$

Definicija 1.1.4. *Neka je $[a, b]$ $(a < b)$ segment u $\mathbb{R}$.*
*Neprekidnu funkciju $\gamma : [a, b] \to \Omega$ zovemo **putem** u Ω. Točku $\gamma(a)$ zovemo **početkom**, a točku $\gamma(b)$ **krajem puta** γ.*
*Za put $\gamma : [a, b] \to \Omega$ takav da je $\gamma(a) = \gamma(b)$ kažemo da je **zatvoren**.*
*Za neprekidno diferencijabilan put kažemo da je **gladak**.*
Za put $\gamma : [a, b] \to \Omega$ takav da postoje $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ i $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ takvi da vrijedi

$$a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b,$$

pri čemu su restrikcije

$$\gamma|_{[a_{k-1}, a_k]}, \qquad k = 1, \ldots, n,$$

*glatki putevi, kažemo da je **po dijelovima gladak**.*

Definicija 1.1.5. *Za po dijelovima gladak put $\gamma : [a,b] \to \Omega$ i neprekidnu funkciju $f : D \to \mathbb{C}$, pri čemu je $D \subseteq \mathbb{C}$ takav da vrijedi $\gamma([a,b]) \subseteq D$, definiramo* ***integral funkcije** f **po putu** γ sa*

$$\int_\gamma f(z)dz := \sum_{k=1}^{n} \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(\gamma(t))\,\gamma'(t)dt,$$

pri čemu je $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$ proizvoljna subdivizija segmenta $[a,b]$ sa svojstvom da su restrikcije $\gamma|_{[a_{k-1},a_k]}$, $k = 1,\ldots,n$, glatki putevi.

Svojstva kompleksne derivacije i integrala po putu

Neka je Ω otvoren skup u $\mathbb{C}$.

Propozicija 1.1.6. *Neka je $a \in \Omega$. Neka su $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ derivabilne u točki a. Vrijede sljedeće tvrdnje:*

(i) Funkcije $f + g$ i $f \cdot g$ derivabilne su u točki a i vrijedi

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a), \qquad (f \cdot g)'(a) = f'(a)\,g(a) + f(a)\,g'(a).$$

(ii) Ako je $g(a) \neq 0$, tada je funkcija $\frac{1}{g} : g^{-1}(\mathbb{C}\backslash\{0\}) \to \mathbb{C}$ derivabilna u točki a i vrijedi

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{g(a)^2}.$$

(iii) Ako je Ω_1 otvoren skup u $\mathbb{C}$ takav da je $f(\Omega) \subseteq \Omega_1$ i ako je $h : \Omega_1 \to \mathbb{C}$ funkcija derivabilna u točki $f(a)$, tada je funkcija $h \circ f : \Omega \to \mathbb{C}$ derivabilna u točki a i vrijedi

$$(h \circ f)'(a) = h'(f(a))\,f'(a).$$

Primjer 1.1.7. *Polinomi i racionalne funkcije s kompleksnim koeficijentima holomorfne su funkcije na svojim prirodnim domenama.*

Definicija 1.1.8. *Neka je $\gamma : [a,b] \to \Omega$ po dijelovima gladak put. Definiramo* ***duljinu puta** γ sa*

$$l(\gamma) := \int_a^b |\gamma'(t)|dt.$$

Jednostavnu, ali važnu ocjenu vrijednosti integrala neprekidne funkcije po po dijelovima glatkom putu daje sljedeća propozicija.

Propozicija 1.1.9 (Fundamentalna ocjena)**.** *Neka je $\gamma : [a, b] \to \Omega$ po dijelovima gladak put. Neka je $f : D \to \mathbb{C}$ neprekidna funkcija, pri čemu je $D \subseteq \mathbb{C}$ takav da je $\gamma([a, b]) \subseteq D$. Tada vrijedi sljedeća ocjena:*

$$\left| \int_\gamma f(z)dz \right| \leq l(\gamma) \max_{z \in \gamma([a,b])} |f(z)|. \tag{1.1}$$

Spomenimo i jedan koristan rezultat o derivaciji kompleksnih funkcija definiranih integralom.

Propozicija 1.1.10 (Leibnizovo integralno pravilo)**.** *Neka je $f : [a, b] \times \Omega \to \mathbb{C}$ neprekidna funkcija koja je neprekidno diferencijabilna po kompleksnoj varijabli. Tada je funkcija*

$$g : \Omega \to \mathbb{C}, \qquad g(z) := \int_a^b f(t, z)dt, \quad z \in \Omega,$$

holomorfna i vrijedi

$$g'(z) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial z}(t, z)dt, \qquad z \in \Omega.$$

Eksponencijalna funkcija i kompleksni logaritam

Označimo $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \backslash \{0\}$.

Definicija 1.1.11. *Funkciju* $\operatorname{Arg} : \mathbb{C}^* \to (-\pi, \pi]$, *pri čemu je, za $z \in \mathbb{C}^*$,* $\operatorname{Arg} z$ *definiran kao jedinstven $\alpha \in \langle -\pi, \pi]$ sa svojstvom*

$$z = |z| (\cos \alpha + i \sin \alpha),$$

*zovemo **argumentom**.*

Definicija 1.1.12. *Funkciju* $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$*,*

$$\exp(x + iy) = e^{x+iy} := e^x(\cos y + i \sin y), \qquad x, y \in \mathbb{R},$$

*zovemo **(kompleksnom) eksponencijalnom funkcijom**.*

Eksponencijalna funkcija jedinstveno je analitičko proširenje realne eksponencijalne funkcije na $\mathbb{C}$. Njezina je slika skup $\mathbb{C}^*$. Eksponencijalna funkcija nije injekcija, štoviše periodična je s periodom $2\pi i$. Međutim, njezine restrikcije na $\mathbb{R} \times I$, gdje je I proizvoljan poluotvoren interval u $\mathbb{R}$ duljine 2π, bijekcije su na $\mathbb{C}^*$.

Definicija 1.1.13. ***Logaritam*** *kompleksnog broja $z \in \mathbb{C}^*$ jest bilo koji kompleksan broj $w \in \mathbb{C}$ takav da vrijedi*

$$e^w = z.$$

Kompleksni logaritam *jest bilo koja funkcija $f : D \to \mathbb{C}$, $D \subseteq \mathbb{C}^*$, takva da vrijedi*

$$e^{f(z)} = z, \qquad z \in D.$$

Kompleksne logaritme

$$\ln_\alpha : \mathbb{C}^* \setminus \operatorname{Arg}^{-1}(\alpha + 2\pi\mathbb{Z}) \to \mathbb{R} \times (\alpha, \alpha + 2\pi), \qquad \alpha \in \mathbb{R},$$

zovemo ***granama kompleksnog logaritma****. Funkciju $\ln_{-\pi}$ zovemo* ***glavnom granom kompleksnog logaritma*** *i označavamo je sa* Ln.

Ako je w logaritam kompleksnog broja $z \in \mathbb{C}^*$, tada je $w + 2\pi i\mathbb{Z}$ skup svih logaritama od z. Nadalje, za svaki $\alpha \in \mathbb{R}$ postoji jedinstvena grana logaritma $\ln_\alpha$, i holomorfna je funkcija. Primjerice, glavna grana kompleksnog logaritma dana je formulom

$$\operatorname{Ln} z = \ln_{\mathbb{R}}|z| + i \operatorname{Arg} z, \qquad z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_{\leq 0},$$

pri čemu je $\ln_{\mathbb{R}} : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ realni logaritam. Primijetimo da za sve $x > 0$ vrijedi $\operatorname{Ln} x = \ln_{\mathbb{R}} x$.

Pomoću eksponencijalne funkcije definiraju se i kompleksne trigonometrijske funkcije, analitička proširenja realnih trigonometrijskih funkcija:

$$\begin{aligned}
\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, &\qquad \sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},\\
\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, &\qquad \cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},\\
\operatorname{tg} : \mathbb{C}\setminus\left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right) \to \mathbb{C}, &\qquad \operatorname{tg} z := \frac{\sin z}{\cos z},\\
\operatorname{ctg} : \mathbb{C}\setminus(\pi\mathbb{Z}) \to \mathbb{C}, &\qquad \operatorname{ctg} z := \frac{\cos z}{\sin z}.
\end{aligned}$$

Cauchyjeva integralna formula za krug

Definicija 1.1.14. *Za $z_0 \in \mathbb{C}$ i $r > 0$ definiramo* ***otvoren krug*** *sa središtem u z_0 radijusa r*

$$K(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\},$$

zatvoren krug *sa središtem u z_0 radijusa r*

$$\overline{K}(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$$

i ***kružnicu*** *sa središtem u z_0 radijusa r*

$$S(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}.$$

Za $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ i neprekidnu funkciju $f : D \to \mathbb{C}$, pri čemu je $D \subseteq \mathbb{C}$ takav da je $S(z_0, r) \subseteq D$, uvedimo oznaku

$$\int\limits_{|z-z_0|=r} f(z)dz := \int_\gamma f(z)dz,$$

gdje je $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ parametrizacija kružnice $S(z_0, r)$ zadana sa

$$\gamma(t) := z_0 + re^{it}, \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Teorem 1.1.15 (Cauchyjeva integralna formula za krug)**.** *Neka je Ω otvoren skup u $\mathbb{C}$ i neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija. Neka su $z_0 \in \Omega$ i $r > 0$ takvi da je $\overline{K}(z_0, r) \subseteq \Omega$. Tada za svaki $z \in K(z_0, r)$ vrijedi*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-z_0|=r} \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

Teorem 1.1.16 (Generalizirana Cauchyjeva integralna formula za krug)**.** *Uz oznake i pretpostavke teorema 1.1.15, f je beskonačno diferencijabilna (dakle za sve $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ $f^{(n)}$ postoji i holomorfna je funkcija na Ω) i za svaki $z \in K(z_0, r)$ i za sve $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ vrijedi*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{|z-z_0|=r} \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}} dw.$$

Konvergencija nizova i redova funkcija

Napomena 1.1.17. *Radi jednostavnosti notacije svi nizovi i redovi u ovom potpoglavlju indeksirani su po skupu $\mathbb{Z}_{>0}$ sa standardnim uređajem. Međutim, sve definicije i rezultati ovog potpoglavlja na očit se način proširuju i na slučaj kad je skup indeksa beskonačan podskup skupa $\mathbb{Z}_{\geq n_0}$ za neki $n_0 \in \mathbb{Z}$ (također sa standardnim uređajem), što ćemo kasnije često koristiti.*

Neka je Ω otvoren skup u $\mathbb{C}$.

Definicija 1.1.18. *Neka je $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}_{>0}}$ niz funkcija $\Omega \to \mathbb{C}$ i neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$.*
Kažemo da niz (f_n) ***konvergira po točkama*** *prema funkciji f ako za svaki $z \in \Omega$ vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z).$$

Kažemo da niz (f_n) ***konvergira uniformno*** *prema funkciji f ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{Z}_{>0}$ takav da za sve $n \geq n_0$ i za sve $z \in \Omega$ vrijedi*

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon.$$

Kažemo da niz (f_n) ***konvergira lokalno uniformno*** *prema funkciji f ako svaka točka $z \in \Omega$ ima otvorenu okolinu na kojoj (f_n) konvergira uniformno prema f.*

Propozicija 1.1.19. *Za niz funkcija (f_n) i funkciju f kao u definiciji 1.1.18 vrijedi sljedeći niz implikacija:*

$$\begin{gathered} f_n \to f \text{ uniformno} \\ \Downarrow \\ f_n \to f \text{ lokalno uniformno} \\ \Downarrow \\ f_n \to f \text{ po točkama.} \end{gathered}$$

Lokalno uniformna konvergencija ima za matematičku analizu vrlo dobra svojstva:

Teorem 1.1.20. *Neka je $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}_{>0}}$ niz neprekidnih funkcija $\Omega \to \mathbb{C}$ koji konvergira lokalno uniformno prema funkciji $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Vrijede sljedeće tvrdnje:*

(i) f je neprekidna.

(ii) Ako je $\gamma : [a, b] \to \Omega$ po dijelovima gladak put, vrijedi

$$\int_\gamma f(z)dz = \lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n(z)dz.$$

Teorem 1.1.21 (Weierstrass)**.** *Neka je $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}_{>0}}$ niz holomorfnih funkcija $\Omega \to \mathbb{C}$ koji konvergira lokalno uniformno prema funkciji $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Tada je f holomorfna funkcija i za svaki $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ niz $(f_n^{(k)})_{n \in \mathbb{Z}_{>0}}$ konvergira lokalno uniformno prema funkciji $f^{(k)}$.*

Definicija 1.1.22. *Kažemo da je niz $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}_{>0}}$ funkcija $\Omega \to \mathbb{C}$* ***uniformno Cauchyjev*** *ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $N \in \mathbb{Z}_{>0}$ takav da za sve $m, n \in \mathbb{Z}_{\geq N}$ i za sve $z \in \Omega$ vrijedi*

$$|f_m(z) - f_n(z)| < \varepsilon.$$

Propozicija 1.1.23. *Niz funkcija $\Omega \to \mathbb{C}$ uniformno je Cauchyjev ako i samo ako je uniformno konvergentan.*

Prijeđimo sada na redove funkcija.

Definicija 1.1.24. *Neka je $\sum_{n=1}^\infty f_n$ red funkcija $\Omega \to \mathbb{C}$.*
Kažemo da red $\sum_{n=1}^\infty f_n$ ***konvergira uniformno / lokalno uniformno / po točkama*** *ako njegov niz parcijalnih suma konvergira na odgovarajući način.*
Kažemo da red $\sum_{n=1}^\infty f_n$ ***konvergira normalno*** *ako postoji konvergentan red nenegativnih realnih brojeva $\sum_{n=1}^\infty M_n$ takav da za sve $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ i za sve $z \in \Omega$ vrijedi*

$$|f_n(z)| \leq M_n.$$

Kažemo da red $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ ***konvergira normalno po kompaktima*** *ako za svaki kompaktan skup K u $\mathbb{C}$ takav da je $K \subseteq \Omega$ red $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergira normalno na K.*

Propozicija 1.1.25. *Vrste konvergencije reda funkcija $\Omega \to \mathbb{C}$ iz definicije 1.1.24 zadovoljavaju sljedeće implikacije:*

$$\begin{array}{ccc}
\textit{normalna konvergencija} & \Rightarrow & \textit{uniformna konvergencija} \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
\textit{normalna konvergencija po kompaktima} & \Rightarrow & \textit{lokalno uniformna konvergencija} \\
 & & \Downarrow \\
 & & \textit{konvergencija po točkama.}
\end{array}$$

Teoremi 1.1.20 i 1.1.21 dobivaju direktnu posljedicu:

Korolar 1.1.26. *Neka je $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ red neprekidnih funkcija $\Omega \to \mathbb{C}$ koji konvergira lokalno uniformno. Vrijede sljedeće tvrdnje:*

(i) Funkcija $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ je neprekidna.

(ii) Ako je $\gamma : [a, b] \to \Omega$ po dijelovima gladak put, vrijedi

$$\int_{\gamma} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\gamma} f_n(z)dz.$$

(iii) Ako su funkcije f_n, $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, holomorfne, tada je i funkcija $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ holomorfna i za sve $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ vrijedi

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)^{(k)} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)},$$

pri čemu red na desnoj strani konvergira lokalno uniformno.

Redovi potencija

Definicija 1.1.27. *Red oblika*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n,$$

pri čemu su $z_0 \in \mathbb{C}$ i $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} \subseteq \mathbb{C}$ fiksni, a $z \in \mathbb{C}$ je varijabla, zovemo ***redom potencija*** *oko točke z_0. Za $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, a_n zovemo* ***n-tim koeficijentom*** *tog reda.*

Teorem 1.1.28 (Cauchy-Hadamard)**.** *Neka je* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *red potencija oko točke* z_0*. Uz konvenciju* $\frac{1}{0} = +\infty$ *i* $\frac{1}{+\infty} = 0$*, označimo*

$$R := \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}} \in [0, +\infty]$$

Vrijede sljedeće tvrdnje:

(a) Ako je $R \in \langle 0, +\infty]$*, red* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *konvergira apsolutno i lokalno uniformno na* $K(z_0, R)$ *(uz* $K(z_0, +\infty) := \mathbb{C}$*).*

(b) Ako je $R \in [0, +\infty\rangle$*, red* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *divergira za sve* $z \in \mathbb{C}$ *takve da je* $|z - z_0| > R$*.*

Definicija 1.1.29. *Za red potencija* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$*,* $R \in [0, +\infty]$ *iz teorema 1.1.28 zovemo njegovim* ***radijusom konvergencije****.*

Teorem 1.1.30. *Red potencija* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *s radijusom konvergencije* $R \in \langle 0, +\infty]$ *definira holomorfnu funkciju* $f : K(z_0, R) \to \mathbb{C}$*. Pritom vrijedi*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \qquad n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

Korolar 1.1.31. *Ako su* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *i* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$ *redovi potencija s pozitivnim radijusima konvergencije i postoji otvorena okolina* U *točke* z_0 *takva da vrijedi*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n, \qquad z \in U,$$

tada je $a_n = b_n$ *za sve* $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$*.*

Lokalna analitičnost holomorfnih funkcija

Neka je Ω otvoren skup u $\mathbb{C}$.

Definicija 1.1.32. *Neka je* $z_0 \in \Omega$ *i neka je* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *funkcija analitička u točki* z_0*. Red potencija*

$$T_f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

zovemo ***Taylorovim redom*** *funkcije* f *oko točke* z_0*.*

Teorem 1.1.33. *Neka je* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *holomorfna funkcija. Za sve* $z_0 \in \Omega$ *i* $r > 0$ *takve da je* $K(z_0, r) \subseteq \Omega$ *vrijedi*

$$f(z) = T_f(z), \qquad z \in K(z_0, r),$$

pri čemu red T_f *konvergira lokalno uniformno na* $K(z_0, r)$*.*

Laurentov red

Definicija 1.1.34. *Za indeksiranu familiju $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \subseteq \mathbb{C}$, definiramo **red** $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n$ kao uređen par redova*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}, \sum_{n=0}^{\infty} a_n\right).$$

*Kažemo da red $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n$ **konvergira** ako su redovi $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}$ i $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergentni i u tom slučaju definiramo **sumu reda** $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n$ sa*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n := \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Napomena 1.1.35. *Kao u slučaju redova indeksiranih po skupu $\mathbb{Z}_{>0}$, upotrebljavamo istu oznaku za red i njegovu sumu. Iako ova dvoznačnost stvara opasnost za nejasnoće, iz konteksta će uvijek biti jasno na koji se pojam ta oznaka odnosi.*

Definicija 1.1.36. *Za $z_0 \in \mathbb{C}$ i $0 \le r < R \le +\infty$, definiramo **kružni vijenac** sa središtem z_0, unutarnjim radijusom r i vanjskim radijusom R sa*

$$K(z_0; r, R) := \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}.$$

*Za $z_0 \in \mathbb{C}$ i $R \in \langle 0, +\infty]$, kružni vijenac $K(z_0; 0, R)$ zovemo **probušenim krugom** sa središtem z_0 i radijusom R i označavamo ga sa*

$$K^{\times}(z_0, R).$$

Teorem 1.1.37 (o Laurentovu razvoju)**.** *Neka je Ω otvoren skup u $\mathbb{C}$ i $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija. Neka je $K(z_0; r, R) \subseteq \Omega$. Tada postoje jedinstvene holomorfne funkcije $f_{reg} : K(z_0, R) \to \mathbb{C}$ i $f_{sing} : K(z_0; r, +\infty) \to \mathbb{C}$ sa svojstvima:*

(a)
$$f(z) = f_{reg}(z) + f_{sing}(z), \qquad z \in K(z_0; r, R);$$

(b)
$$\lim_{|z|\to+\infty} f_{sing}(z) = 0.$$

Vrijedi

$$f_{reg}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \qquad z \in K(z_0, R),$$
$$f_{sing}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n}, \qquad z \in K(z_0; r, +\infty),$$

pri čemu su koeficijenti a_n, $n \in \mathbb{Z}$, zadani sa

$$a_n := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-z_0|=r_0} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw, \qquad n \in \mathbb{Z},$$

za proizvoljan $r_0 \in \langle r, R \rangle$. Posebno vrijedi

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-z_0)^n, \qquad z \in K(z_0; r, R),$$

pri čemu redovi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n}$ konvergiraju lokalno uniformno na $K(z_0; r, R)$.

Definicija 1.1.38. *Uz oznake i pretpostavke teorema 1.1.37, red $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-z_0)^n$ zovemo **Laurentovim redom** funkcije f oko točke z_0 na kružnom vijencu $K(z_0; r, R)$. Ako je $r = 0$, kraće kažemo da je $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-z_0)^n$ Laurentov red funkcije f u okolini točke z_0.*

Razvoj u Laurentov red ključan je alat za proučavanje ponašanja holomorfnih funkcija u okolini njihovih singulariteta, što je tema sljedećeg potpoglavlja.

Singulariteti

Neka je Ω otvoren skup u $\mathbb{C}$.

Definicija 1.1.39. *Neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija. Točku $a \in \mathbb{C}\backslash\Omega$ takvu da za neki $r > 0$ vrijedi*

$$K^{\times}(a, r) \subseteq \Omega$$

*zovemo **izoliranim singularitetom** funkcije f.*

Definicija 1.1.40. *Neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija. Neka je a točka skupa Ω ili izoliran singularitet funkcije f. Neka je*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-a)^n$$

*Laurentov red funkcije f u okolini točke a. Definiramo **red funkcije f u točki** a, $\nu_a(f)$, na sljedeći način:*

(1) Ako je $a_n = 0$, $n \in \mathbb{Z}$, stavljamo $\nu_a(f) := +\infty$.

(2) Ako za neki $m \in \mathbb{Z}$ vrijedi $a_m \neq 0$ i $a_n = 0$ za sve $n \in \mathbb{Z}_{<m}$, stavljamo $\nu_a(f) := m$.

(3) Ako za svaki $n \in \mathbb{Z}$ postoji $m \in \mathbb{Z}_{<n}$ takav da je $a_m \neq 0$, stavljamo $\nu_a(f) := -\infty$.

Definicija 1.1.41. *Neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija. Neka je $a \in \Omega$.*
Ako je $\nu_a(f) = +\infty$, kažemo da je a ***nultočka beskonačnog reda*** *funkcije f.*
Ako je $n := \nu_a(f) \in \mathbb{Z}_{>0}$, kažemo da je a ***nultočka n-tog reda*** *funkcije f.*

Definicija 1.1.42. *Neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija. Neka je a izoliran singularitet funkcije f.*
Ako je $\nu_a(f) \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{+\infty\}$, kažemo da je a ***uklonjiv singularitet*** *funkcije f.*
Ako je $\nu_a(f) \in \mathbb{Z}_{<0}$, kažemo da je a ***pol n-tog reda*** *funkcije f, gdje je $n := -\nu_a(f)$.*
Ako je $\nu_a(f) = -\infty$, kažemo da je a ***bitan singularitet*** *funkcije f.*

Teorem 1.1.43 (karakterizacija klasa izoliranih singulariteta)**.** *Neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija. Neka je a izoliran singularitet funkcije f. Vrijede sljedeće tvrdnje:*

(i) a je uklonjiv singularitet funkcije f ako i samo ako postoji $\lim_{z\to a} f(z)$.

(ii) a je pol funkcije f ako i samo ako vrijedi $\lim_{z\to a}|f(z)| = +\infty$.

(iii) a je bitan singularitet funkcije f ako i samo ako je za svaki $r > 0$ skup $f(K^\times(a, r) \cap \Omega)$ gust u $\mathbb{C}$.

Propozicija 1.1.44 (karakterizacija reda holomorfne funkcije u točki)**.** *Neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija. Neka je a točka skupa Ω ili izoliran singularitet funkcije f. Vrijede sljedeće tvrdnje:*

(i) $\nu_a(f) = +\infty$ ako i samo ako postoji $r > 0$ takav da je

$$f|_{K^\times(a,r)} \equiv 0.$$

(ii) $\nu_a(f) = n \in \mathbb{Z}$ ako i samo ako postoji $r > 0$ i holomorfna funkcija $g : K(a, r) \to \mathbb{C}$ takva da je $g(a) \neq 0$ i da je

$$f(z) = (z - a)^n g(z), \qquad z \in K^\times(a, r),$$

ako i samo ako u $\mathbb{C}$ postoji limes

$$\lim_{z\to a} \frac{f(z)}{(z - a)^n}$$

i različit je od 0.

Meromorfne funkcije

Označimo
$$\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

Iz teorema 1.1.43 vidi se da, dok holomorfne funkcije u blizini svojih bitnih singulariteta "divljaju", u blizini polova i uklonjivih singulariteta pokazuju dosta pravilno ponašanje – neformalno, u tim točkama imaju limes u skupu $\overline{\mathbb{C}}$. Dodefiniranjem holomorfne funkcije u njenom uklonjivom singularitetu vrijednošću tog limesa opet dobivamo holomorfnu funkciju. Također, prirodno je dodefinirati holomorfnu funkciju u njenim polovima vrijednošću ∞. Tako dolazimo do sljedeće definicije.

Definicija 1.1.45. *Neka je $f : \Omega \to \overline{\mathbb{C}}$. Označimo $S := f^{-1}(\{\infty\})$, i neka je $f_h : \Omega \backslash S \to \mathbb{C}$ restrikcija funkcije f. Kažemo da je f* ***meromorfna funkcija*** *(na Ω) ako vrijede sljedeće tvrdnje:*

(1) Skup S nema gomilišta u Ω.

(2) Funkcija f_h je holomorfna, a točke skupa S njezini su polovi.

Definicija 1.1.46. *Neka je $f : \Omega \to \overline{\mathbb{C}}$ meromorfna funkcija. Označimo $S := f^{-1}(\{\infty\})$, i neka je $f_h : \Omega \backslash S \to \mathbb{C}$ restrikcija funkcije f. Neka je $a \in \Omega$.*
Definiramo ***red funkcije*** *f* ***u točki*** *a**,** $\nu_a(f)$, sa*
$$\nu_a(f) := \nu_a(f_h).$$

Neka je $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Kažemo da je a ***nultočka beskonačnog reda / nultočka*** *n**-tog reda / pol*** *n**-tog reda** funkcije f ako je a nultočka beskonačnog reda / nultočka n-tog reda / pol n-tog reda funkcije f_h.*

Napomena 1.1.47. *Često ćemo holomorfne funkcije $\Omega \to \mathbb{C}$ prešutno identificirati (proširenjem kodomene) s odgovarajućim meromorfnim funkcijama $\Omega \to \overline{\mathbb{C}}$.*

Definicija 1.1.48. *Neka su $f, g : \Omega \to \overline{\mathbb{C}}$ meromorfne funkcije. Označimo $S := f^{-1}(\{\infty\}) \cup g^{-1}(\{\infty\})$, $D := g^{-1}(\{0\})$.*

(a) Definiramo ***sumu*** *funkcija f i g, $f + g$, kao proširenje funkcije $f|_{\Omega\backslash S} + g|_{\Omega\backslash S}$ do meromorfne funkcije na Ω.*

(b) Definiramo ***produkt*** *funkcija f i g, $f \cdot g$, kao proširenje funkcije $f|_{\Omega\backslash S} \cdot g|_{\Omega\backslash S}$ do meromorfne funkcije na Ω.*

(c) Ako skup D nema gomilišta u Ω, definiramo ***kvocijent*** *funkcija f i g, $\frac{f}{g}$, kao proširenje funkcije $\dfrac{f|_{\Omega\backslash(D\cup S)}}{g|_{\Omega\backslash(D\cup S)}}$ do meromorfne funkcije na Ω.*

Da definicija ima smisla, tj. da se spomenute restrikcije stvarno mogu proširiti do meromorfnih funkcija na Ω, lako se dokaže pomoću propozicije 1.1.44.

Propozicija 1.1.49. *Neka je Ω područje. Neka su $f, g : \Omega \to \overline{\mathbb{C}}$ meromorfne funkcije i neka je $z \in \Omega$. Ako su $\nu_z(f), \nu_z(g) \in \mathbb{Z}$, tada vrijedi*

$$\nu_z(fg) = \nu_z(f) + \nu_z(g), \qquad \nu_z\left(\frac{f}{g}\right) = \nu_z(f) - \nu_z(g).$$

Lema 1.1.50. *Neka je Ω_1 otvoren skup u $\mathbb{C}$. Neka je $g : \Omega_1 \to \Omega$ holomorfna bijekcija s holomorfnim inverzom i neka je $f : \Omega \to \overline{\mathbb{C}}$ meromorfna funkcija. Tada je i kompozicija $f \circ g : \Omega_1 \to \overline{\mathbb{C}}$ meromorfna funkcija.*

Teorem o reziduumima

Definicija 1.1.51. *Skup $A \subseteq \mathbb{C}$ takav da postoji $z_0 \in A$ sa svojstvom da za sve $z \in A$ i sve $t \in [0, 1]$ vrijedi*

$$(1 - t)z_0 + tz \in A$$

zovemo ***zvjezdastim skupom*** *u $\mathbb{C}$.*

Napomena 1.1.52. *Geometrijski, podskup A kompleksne ravnine zvjezdast je ako u njemu postoji točka z_0 takva da su sve dužine s krajevima z_0 i z, gdje je z proizvoljna točka skupa A, sadržane u skupu A.*

Definicija 1.1.53. *Neka je Ω otvoren skup u $\mathbb{C}$, $\gamma : [a, b] \to \Omega$ po dijelovima gladak zatvoren put i $z \in \mathbb{C} \backslash \gamma([a, b])$. Definiramo* ***indeks*** *puta γ u odnosu na točku z sa*

$$\chi(\gamma, z) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{w - z} dw.$$

Napomena 1.1.54. *Može se pokazati da je indeks po dijelovima glatkog zatvorenog puta γ u odnosu na točku z koja ne leži u njegovoj slici uvijek cijeli broj. Intuitivno, to je broj obilazaka puta γ oko točke z u smjeru suprotnom od kazaljke na satu.*

Definicija 1.1.55. *Neka je Ω otvoren skup u $\mathbb{C}$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija i $z_0 \in \mathbb{C}$ točka skupa Ω ili izoliran singularitet funkcije f. Neka je*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n$$

Laurentov red funkcije f u okolini točke z_0. Koeficijent a_{-1} zovemo ***reziduumom*** *funkcije f u točki z_0 i označavamo ga sa*

$$\mathrm{Res}(f, z_0).$$

Teorem 1.1.56 (Teorem o reziduumima)**.** *Neka je Ω otvoren zvjezdast skup u $\mathbb{C}$. Neka je S konačan podskup skupa Ω i neka je $f : \Omega\backslash S \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija. Neka je γ po dijelovima gladak zatvoren put u $\Omega\backslash S$. Tada vrijedi*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(w)dw = \sum_{z\in S}\chi(\gamma, z)\ \mathrm{Res}(f, z).$$

Korolar 1.1.57. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren zvjezdast skup. Neka je $f : \Omega \to \overline{\mathbb{C}}$ meromorfna funkcija s konačnim skupom S nultočaka i polova. Neka je γ po dijelovima gladak zatvoren put u $\Omega\backslash S$. Tada vrijedi*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(w)}{f(w)}dw = \sum_{z\in S}\chi(\gamma, z)\,\nu_z(f).$$

Liouvilleov teorem

Definicija 1.1.58. *Holomorfnu funkciju $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ zovemo* ***cijelom funkcijom****.*

Teorem 1.1.59 (Liouville)**.** *Svaka je ograničena cijela funkcija konstantna.*

1.2 Beskonačni produkti

Beskonačni produkti kompleksnih brojeva

Definicija 1.2.1. *Kažemo da beskonačan produkt $\prod_{n=1}^\infty b_n$, $b_n \in \mathbb{C}$,* ***konvergira (obično)*** *ako postoji*

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^n b_k. \tag{1.2}$$

U tom slučaju taj limes također označavamo sa $\prod_{n=1}^\infty b_n$ i zovemo ga ***vrijednošću*** *beskonačnog produkta $\prod_{n=1}^\infty b_n$.*

Ova definicija vrijednosti beskonačnog produkta dovodi do nekih nepoželjnih pojava. Primjerice, vrijednost beskonačnog produkta jednaka je 0 čim je barem jedan od faktora jednak 0; s druge strane, beskonačan produkt može biti jednak 0 i kad su svi faktori različiti od 0 (npr. $\prod_{n=1}^\infty \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$). Često se zato promatraju drugačiji oblici konvergencije beskonačnih produkata.

Definicija 1.2.2. *Kažemo da beskonačan produkt*

$$\prod_{n=1}^\infty (1 + a_n), \quad a_n \in \mathbb{C},$$

konvergira apsolutno *ako je red* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *apsolutno konvergentan. U tom slučaju kompleksan broj*

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n) := (1+a_1)\cdots(1+a_{N-1})\cdot e^{\sum_{n=N}^{\infty}\mathrm{Ln}(1+a_n)}, \tag{1.3}$$

pri čemu je N *proizvoljan element skupa* $\mathbb{Z}_{>0}$ *sa svojstvom da je* $|a_n| < 1$ *za sve* $n \geq N$*, zovemo* ***vrijednošću*** *beskonačnog produkta* $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$*.*

Definicija vrijednosti apsolutno konvergentnog beskonačnog produkta ima smisla:

- Za apsolutno konvergentan red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ svakako vrijedi da je $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, pa $N \in \mathbb{Z}_{>0}$ s traženim svojstvom postoji.

- S obzirom da je funkcija Ln definirana na skupu $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_{\leq 0}$, koji sadrži $K(1,1)$, vrijednost $\mathrm{Ln}(1+a_n)$ definirana je za sve $n \geq N$.

- Red $\sum_{n=N}^{\infty}\mathrm{Ln}(1+a_n)$ konvergira: iz Laurentova razvoja funkcije $z \longmapsto \frac{\mathrm{Ln}(1+z)}{z}$ u okolini 0,

$$\frac{\mathrm{Ln}(1+z)}{z} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}z^n, \qquad z \in K^{\times}(0,1),$$

vidi se da ona u 0 ima uklonjiv singularitet i da je $\lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{Ln}(1+z)}{z} = 1$, pa postoji $\delta \in \langle 0, 1\rangle$ takav da za $0 < |z| < \delta$ vrijedi

$$\left|\frac{\mathrm{Ln}(1+z)}{z}\right| \leq 2,$$

tj. da za $|z| < \delta$ vrijedi

$$|\mathrm{Ln}(1+z)| \leq 2|z|. \tag{1.4}$$

Za $M \in \mathbb{Z}_{\geq N}$ takav da za sve $n \geq M$ vrijedi $|a_n| < \delta$, dobivamo ocjenu

$$\sum_{n=M}^{\infty}|\mathrm{Ln}(1+a_n)| \leq 2\sum_{n=M}^{\infty}|a_n| < \infty,$$

dakle red $\sum_{n=M}^{\infty}\mathrm{Ln}(1+a_n)$ konvergira (apsolutno), pa isto vrijedi i za $\sum_{n=N}^{\infty}\mathrm{Ln}(1+a_n)$.

- Napokon, iz činjenice da za $n \geq N$ vrijedi $e^{\mathrm{Ln}(1+a_n)} = 1 + a_n$ lako se vidi da definicija ne ovisi o izboru broja N.

Zbog neprekidnosti eksponencijalne funkcije, vrijednost apsolutno konvergentnog beskonačnog produkta $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$, uz N sa svojstvima iz definicije, jest

$$\begin{aligned}\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n) &= (1+a_1)\cdots(1+a_{N-1})\cdot e^{\lim_{M\to\infty}\sum_{n=N}^{M}\mathrm{Ln}(1+a_n)} = \\ &= (1+a_1)\cdots(1+a_{N-1})\cdot \lim_{M\to\infty} e^{\sum_{n=N}^{M}\mathrm{Ln}(1+a_n)} = \\ &= (1+a_1)\cdots(1+a_{N-1})\cdot \lim_{M\to\infty}\prod_{n=N}^{M} e^{\mathrm{Ln}(1+a_n)} = \\ &= (1+a_1)\cdots(1+a_{N-1})\cdot \lim_{M\to\infty}\prod_{n=N}^{M}(1+a_n) = \\ &= \lim_{M\to\infty}\prod_{n=1}^{M}(1+a_n),\end{aligned}$$

dakle apsolutna je konvergencija beskonačnih produkata poseban slučaj obične konvergencije beskonačnih produkata, i vrijednost apsolutno konvergentnog beskonačnog produkta definirana sa (1.3) ista je kao ona definirana sa (1.2).

Napomena 1.2.3. *U slučaju apsolutne konvergencije beskonačnog produkta nestaje dvoznačnost nule kao vrijednosti beskonačnog produkta: sjetimo li se da* 0 *nije u slici eksponencijalne funkcije, iz* (1.3) *odmah je jasno da je vrijednost apsolutno konvergentnog beskonačnog produkta jednaka* 0 *ako i samo ako je neki od faktora jednak* 0*.*

Beskonačni produkti holomorfnih funkcija

Neka je Ω otvoren skup u $\mathbb{C}$. Neka je $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}_{>0}}$ niz funkcija $\Omega\to\mathbb{C}$.

Definicija 1.2.4. *(i) Kažemo da beskonačan produkt* $\prod_{n=1}^{\infty}(1+f_n)$ ***konvergira (apsolutno)*** *ako za svaki* $z\in\Omega$ *beskonačan produkt* $\prod_{n=1}^{\infty}(1+f_n(z))$ *konvergira (apsolutno).*

(ii) Kažemo da beskonačan produkt $\prod_{n=1}^{\infty}(1+f_n)$ ***konvergira normalno (po kompaktima)*** *ako red* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *konvergira normalno (po kompaktima).*

Teorem 1.2.5. *Ako beskonačan produkt*

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+f_n)$$

konvergira normalno po kompaktima, tada konvergira i apsolutno. Ako su uz to funkcije f_n, $n\in\mathbb{Z}_{>0}$, *holomorfne, tada je* $\prod_{n=1}^{\infty}(1+f_n)$ *holomorfna funkcija.*

Dokaz. Prva tvrdnja direktna je posljedica činjenice da normalna konvergencija reda $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ povlači njegovu apsolutnu konvergenciju.

Pretpostavimo sada da su funkcije f_n, $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, holomorfne. Označimo sa F funkciju definiranu beskonačnim produktom $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + f_n)$. Za $z_0 \in \Omega$, zbog otvorenosti skupa Ω, postoji $r > 0$ takav da je $\overline{K}(z_0, r) \subseteq \Omega$. Kako red $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergira normalno na $\overline{K}(z_0, r)$, postoji konvergentan red nenegativnih realnih brojeva $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ takav da vrijedi

$$|f_n(z)| \leq M_n, \qquad z \in \overline{K}(z_0, r),\ n \in \mathbb{Z}_{>0}.$$

Po (1.4), postoji $\delta \in \langle 0, 1\rangle$ takav da za $|z| < \delta$ vrijedi

$$|\mathrm{Ln}(1 + z)| \leq 2|z|. \tag{1.5}$$

Odaberemo li sada $N \in \mathbb{Z}_{>0}$ takav da za $n \geq N$ vrijedi $M_n < \delta$, onda, s obzirom da za $z \in K(z_0, r)$ i $n \geq N$ vrijedi $|f_n(z)| \leq M_n < \delta$, iz (1.5) slijedi da je

$$|\mathrm{Ln}(1 + f_n(z))| \leq 2|f_n(z)| \leq 2M_n, \qquad z \in K(z_0, r),\ n \geq N,$$

a

$$\sum_{n=N}^{\infty} 2M_n \leq 2\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty.$$

Prema tome, red $\sum_{n=N}^{\infty} \mathrm{Ln}(1 + f_n)$ holomorfnih funkcija konvergira normalno, dakle i lokalno uniformno, na $K(z_0, r)$ pa je (korolar 1.1.26.(iii)) funkcija

$$g : K(z_0, r) \to \mathbb{C}, \qquad g(z) := \sum_{n=N}^{\infty} \mathrm{Ln}(1 + f_n(z)), \quad z \in K(z_0, r),$$

holomorfna. Kako za $n \geq N$ i $z \in K(z_0, r)$ vrijedi $|f_n(z)| \leq M_n < \delta < 1$, po definiciji vrijednosti apsolutno konvergentnog beskonačnog produkta (formula (1.3)) vrijedi

$$F(z) = (1 + f_1(z)) \cdots (1 + f_{N-1}(z)) \cdot e^{g(z)}, \qquad z \in K(z_0, r).$$

Budući da su funkcije $f_1, \ldots, f_{N-1}, g$ i exp holomorfne, odavde slijedi da je F holomorfna na $K(z_0, r)$. Zbog proizvoljnosti odabira $z_0 \in \Omega$, zaključujemo da je F holomorfna na cijelom Ω. □

Konačni produkti redova

U proučavanju konvergencije raznih beskonačnih produkata u drugom i trećem poglavlju koristit ćemo i nekoliko poznatih rezultata o konvergenciji konačnih produkata redova u $\mathbb{C}$. Navedimo ih ovdje.

Definicija 1.2.6. *Kažemo da red $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ **konvergira bezuvjetno** ako je za svaku bijekciju $\sigma : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ red $\sum_{n=1}^{\infty} c_{\sigma(n)}$ konvergentan s istom sumom.*

Propozicija 1.2.7. *Svaki apsolutno konvergentan red u $\mathbb{C}$ konvergira bezuvjetno.*

Neka su $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ redovi u $\mathbb{C}$.

Definicija 1.2.8. ***(Cauchyjev) produkt redova** $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ jest red $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$, gdje je*

$$c_n := \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k, \qquad n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

Propozicija 1.2.9. *Ako su redovi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergentni sa sumama A i B, i barem je jedan od njih apsolutno konvergentan, tada je njihov Cauchyjev produkt konvergentan i suma mu je AB.*

Propozicija 1.2.10. *Ako su redovi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ apsolutno konvergentni, tada je i njihov Cauchyjev produkt apsolutno konvergentan, sa sumom*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = a_0 b_0 + a_0 b_1 + a_1 b_0 + a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 + \ldots,$$

pri čemu red na desnoj strani konvergira apsolutno.

Skup $\overline{\mathbb{R}}_{\geq 0} := \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{+\infty\}$ promatramo sa standardnom uređajnom topologijom i sa zbrajanjem i množenjem proširenima sa $\mathbb{R}_{\geq 0}$ pravilima

$$a + (+\infty) = (+\infty) + a = +\infty, \qquad a \in \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0},$$

$$a \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot a = \begin{cases} +\infty, & \text{ako je } a \in \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0} \backslash \{0\}, \\ 0, & \text{ako je } a = 0. \end{cases}$$

Svaki red u $\overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ konvergira bezuvjetno.

Propozicija 1.2.11. *Neka su $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ redovi s nenegativnim članovima. Tada je i njihov Cauchyjev produkt $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ red s nenegativnim članovima, i za sume ovih redova u $\overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ vrijedi*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = a_0 b_0 + a_0 b_1 + a_1 b_0 + a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 + \ldots,$$

pri čemu red na desnoj strani konvergira bezuvjetno.

1.3 Kotangens kao red parcijalnih razlomaka

Teorem 1.3.1. *Vrijedi*

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{z + n\pi} \right), \qquad z \in \mathbb{C} \backslash \pi\mathbb{Z}, \tag{1.6}$$

pri čemu red na desnoj strani konvergira lokalno uniformno.

Ova se formula smatra jednim od najzanimljivijih rezultata o elementarnim funkcijama. Dokazao ju je Euler 1748. godine. U Poglavlju 3 pojavit će se kao oslonac dokaza nekoliko važnih identiteta o zeta funkciji i modularnim formama, pa je ovdje dokazujemo.

Dokaz. Ideja je dokaza istraživati svojstva funkcije na desnoj strani u (1.6) sve dok nas njene sličnosti s kotangensom (uz malu pomoć Liouvilleova teorema) ne natjeraju na zaključak o njihovoj jednakosti. Pokažimo najprije da red

$$\varphi(z) := \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{z + n\pi} \right) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2\pi^2}$$

konvergira lokalno uniformno na $\mathbb{C} \backslash \pi\mathbb{Z}$. Odaberimo, za $R > 0$, $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ takav da je $\frac{m\pi}{\sqrt{2}} > R$. Za $z \in K(0, R) \backslash \pi\mathbb{Z}$ i $n \geq m$, zbog

$$\left| z^2 - n^2\pi^2 \right| \geq n^2\pi^2 - |z|^2 > n^2\pi^2 - R^2 > n^2\pi^2 - \frac{n^2\pi^2}{2} = \frac{n^2\pi^2}{2},$$

imamo ocjenu

$$\left| \frac{2z}{z^2 - n^2\pi^2} \right| \leq \frac{2R}{\frac{n^2\pi^2}{2}} = \frac{4R}{\pi^2 n^2}, \qquad \text{a} \qquad \frac{4R}{\pi^2} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Zaključujemo da red $\sum_{n=m}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2\pi^2}$ na skupovima $K(0, R) \backslash \pi\mathbb{Z}$, $R > 0$, konvergira normalno, a red $\varphi(z)$ uniformno. Posebno, red $\varphi(z)$ na $\mathbb{C} \backslash \pi\mathbb{Z}$ konvergira lokalno uniformno pa (korolar 1.1.26.(iii)) definira holomorfnu funkciju i vrijedi

$$\varphi'(z) = -\frac{1}{z^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(z - n\pi)^2} + \frac{1}{(z + n\pi)^2} \right) = -\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z + n\pi)^2}, \qquad z \in \mathbb{C} \backslash \pi\mathbb{Z},$$

pri čemu posljednja jednakost vrijedi jer red $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z+n\pi)^2}$ konvergira apsolutno (što se lako pokaže ocjenom sličnom gornjoj).

φ je očito neparna, a φ' parna π-periodična funkcija. Dakle, funkcija $\varphi(\cdot+\pi)-\varphi$ je konstantna, jednaka

$$\varphi\left(-\frac{\pi}{2}+\pi\right)-\varphi\left(-\frac{\pi}{2}\right)=2\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\left(\frac{2}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n\pi-\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{n\pi+\frac{\pi}{2}}\right)\right)=$$
$$=\text{(teleskopiranjem)}=\frac{4}{\pi}+2\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{\pi-\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{n\pi+\frac{\pi}{2}}\right)=0.$$

Drugim riječima, φ je π-periodična funkcija.

Kako red

$$\varphi_0(z):=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-n\pi}+\frac{1}{z+n\pi}\right)$$

konvergira uniformno, pa definira holomorfnu funkciju, na $K(0,\pi)$, a vrijedi

$$\varphi(z)=\frac{1}{z}+\varphi_0(z),\qquad z\in K(0,\pi),$$

funkcija φ u 0 ima pol prvog reda, s reziduumom 1. Zbog njene π-periodičnosti, situacija je ista u svakoj točki skupa $\pi\mathbb{Z}$. Kako je i funkcija ctg holomorfna na $\mathbb{C}\backslash\pi\mathbb{Z}$, s polovima prvog reda i reziduumom 1 u točkama skupa $\pi\mathbb{Z}$, zaključujemo da se funkcija ctg $-\varphi$ proširuje do cijele funkcije $F:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$. Pokažemo li da je ona ograničena, po Liouvilleovu će teoremu (teorem 1.1.59) slijediti da je konstantna.

Zbog neprekidnosti i π-periodičnosti funkcije F, dovoljno je pokazati da su funkcije ctg i φ ograničene na trakama $T_1:=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\times\langle 1,+\infty\rangle$ i $T_2:=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\times\langle-\infty,-1\rangle$. Za ctg tvrdnju pokazuju ocjene

$$|\operatorname{ctg}(x+iy)|=\left|\frac{e^{2i(x+iy)}+1}{e^{2i(x+iy)}-1}\right|=\left|1+\frac{2}{e^{-2y}e^{2ix}-1}\right|\le\begin{cases}1+\dfrac{2}{1-e^{-2}}, & (x,y)\in T_1,\\[2ex] 1+\dfrac{2}{e^{2}-1}, & (x,y)\in T_2.\end{cases}$$

S druge strane, za $z=(x,y)\in T_1\cup T_2$, zbog

$$\left|z^2-n^2\pi^2\right|\ge\left|\operatorname{Re}\left(z^2-n^2\pi^2\right)\right|\ge n^2\pi^2-x^2+y^2>\left(n^2-1\right)\pi^2+y^2,$$

uz oznaku $Y:=\lfloor|y|\rfloor$ imamo

$$|\varphi(z)|=\left|\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2\pi^2}\right|\le 1+2\left(|y|+\frac{\pi}{2}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)\pi^2+y^2},$$

odakle pomoću

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)\pi^2+y^2}=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{r=1}^{Y}\frac{1}{\left((Ym+r)^2-1\right)\pi^2+y^2}\leq\sum_{m=0}^{\infty}\frac{Y}{(Ym)^2\pi^2+Y^2}=$$
$$=\frac{1}{Y}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m^2\pi^2+1},$$

koristeći da, zbog $|y|>1$, vrijedi $Y\geq 1$ i $|y|<Y+1\leq 2Y$, dobivamo ocjenu

$$|\varphi(z)|\leq 1+2\left(\frac{|y|}{Y}+\frac{\pi}{2Y}\right)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m^2\pi^2+1}\leq 1+2\left(2+\frac{\pi}{2}\right)\left(1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}\right).$$

Kako je suma na desnoj strani konačna, zaključujemo da je i φ ograničena na $T_1\cup T_2$.

Dakle, F je konstantna funkcija, s vrijednošću

$$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}-\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)=0,$$

tj. vrijedi $\operatorname{ctg}=\varphi$ na $\mathbb{C}\backslash\pi\mathbb{Z}$. $\square$

Poglavlje 2

Dirichletov teorem o prostim brojevima u aritmetičkim nizovima

Sa $\mathbb{P}$ ćemo označavati skup prostih brojeva, sa (m,n) najveći zajednički djelitelj cijelih brojeva m i n, a sa φ Eulerovu φ-funkciju:

$$\varphi : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}, \qquad \varphi(n) := |\{k \in \{1, \dots, n\} : (k,n) = 1\}|, \quad n \in \mathbb{Z}_{>0}.$$

Teorem 2.0.2 (Dirichletov teorem o prostim brojevima u aritmetičkim nizovima)**.** *Neka su $a \in \mathbb{Z}$ i $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ relativno prosti. Tada je skup*

$$P_a := \{a + km : k \in \mathbb{Z}\} \cap \mathbb{P} = \{p \in \mathbb{P} : p \equiv a \pmod m\}$$

beskonačan.

Ovaj je teorem prvi dokazao Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet 1837. godine [1], i taj se dokaz smatra rođenjem analitičke teorije brojeva. Mi ćemo ga u ovom poglavlju dokazati njegovom metodom, koja se temelji na proučavanju svojstava L-funkcija modularnih karaktera. Zapravo ćemo dokazati jedan jači rezultat: za $m \in \mathbb{Z}_{>0}$, analitička gustoća skupa prostih brojeva u proizvoljnoj klasi kongruentnosti modulo m čiji su predstavnici relativno prosti sa m jednaka je $\frac{1}{\varphi(m)}$ (teorem 2.6.1). Prije nego što prijeđemo na sam dokaz, moramo "pripremiti teren", uvođenjem i proučavanjem svojstava pojmova poput karaktera konačnih Abelovih grupa, Dirichletovih redova, Eulerovih produkata, zeta funkcije i L-funkcija te analitičke gustoće.

2.1 Karakteri konačnih Abelovih grupa

Neka je $(G,+)$ konačna Abelova grupa.

Definicija 2.1.1. *Homomorfizam grupa $\chi : G \to (\mathbb{C}^*, \cdot)$ zovemo* ***karakterom*** *grupe G.*

Označimo sa $\hat{G}$ skup svih karaktera grupe G. Uz množenje po točkama, kojim je produkt karaktera $\chi_1, \chi_2 \in \hat{G}$ definiran sa

$$\chi_1\chi_2 : G \to \mathbb{C}^*, \qquad (\chi_1\chi_2)(a) := \chi_1(a)\chi_2(a), \quad a \in G,$$

$\hat{G}$ postaje Abelova grupa:

- $\hat{G}$ je zatvoren na množenje po točkama: za $\chi_1, \chi_2 \in \hat{G}$, $\chi_1\chi_2 : G \to \mathbb{C}^*$ zadovoljava

$$\begin{aligned}(\chi_1\chi_2)(a+b) &= \chi_1(a+b)\chi_2(a+b) \\ &= \chi_1(a)\chi_1(b)\chi_2(a)\chi_2(b) && \text{(jer su } \chi_1 \text{ i } \chi_2 \text{ homomorfizmi)} \\ &= \chi_1(a)\chi_2(a)\chi_1(b)\chi_2(b) && \text{(komutativnost grupe } \mathbb{C}^*\text{)} \\ &= (\chi_1\chi_2)(a)\,(\chi_1\chi_2)(b), \quad a, b \in G,\end{aligned}$$

  dakle $\chi_1\chi_2$ je homomorfizam grupa $G \to \mathbb{C}^*$, tj. $\chi_1\chi_2 \in \hat{G}$.

- Asocijativnost i komutativnost naslijeđene su od množenja u $\mathbb{C}^*$. Karakter

$$\chi : G \to \mathbb{C}^*, \qquad \chi \equiv 1,$$

  (pišemo kraće $\chi = 1$) neutralni je element za množenje po točkama, a inverzni element karaktera $\chi_1 \in \hat{G}$ jest

$$\chi_1^{-1} : G \to \mathbb{C}^*, \qquad \chi_1^{-1}(a) := \frac{1}{\chi_1(a)}, \quad a \in G.$$

Definicija 2.1.2. *Grupu $\hat{G}$ zovemo* ***dualnom grupom*** *grupe G.*

Teorem 2.1.3. *Vrijedi*

$$\hat{G} \cong G.$$

U dokazu ovog teorema ključnu će ulogu imati sljedeći poznati rezultat o strukturi konačno generiranih Abelovih grupa:

Teorem 2.1.4 (Strukturni teorem za konačno generirane Abelove grupe)**.** *Neka je H konačno generirana Abelova grupa. Tada postoje jedinstveni $r, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ i $d_1, \ldots, d_r \in \mathbb{Z}_{>1}$, pri čemu $d_1 \mid d_2 \mid \ldots \mid d_r$, takvi da vrijedi*

$$H \cong \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/d_2\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}/d_r\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^n.$$

Dokaz teorema 2.1.3. Kako je G konačna (pa onda i konačno generirana) Abelova grupa, po teoremu 2.1.4 G je direktna suma konačnog broja cikličkih grupa, tj. postoje $r \in \mathbb{Z}_{>0}$ i $a_1, a_2, \ldots, a_r \in G$ takvi da vrijedi

$$G = \mathbb{Z}a_1 \oplus \mathbb{Z}a_2 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}a_r. \tag{2.1}$$

Označimo $n_j := |a_j|,\ j = 1, 2, \ldots, r$.

Za $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, označimo sa R_n grupu n-tih korijena iz jedinice u $\mathbb{C}$. Sjetimo se da je R_n ciklička podgrupa od $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ reda n. Dakle, grupa $G_1 := R_{n_1} \times R_{n_2} \times \ldots \times R_{n_r}$ direktni je produkt cikličkih grupa redova $n_1, n_2, \ldots, n_r$, baš kao i G, pa je $G_1 \cong G$. Pokazat ćemo da je $G_1 \cong \hat{G}$, odakle će slijediti tvrdnja propozicije.

Uočimo da svaki $\chi \in \hat{G}$ zadovoljava $\chi(a_j)^{n_j} = \chi(n_j a_j) = \chi(0) = 1$, tj. $\chi(a_j) \in R_{n_j},\ j = 1, 2, \ldots, r$. Zato je preslikavanje

$$\Phi : \hat{G} \to G_1, \qquad \Phi(\chi) := (\chi(a_1), \chi(a_2), \ldots, \chi(a_r)), \quad \chi \in \hat{G},$$

dobro definirano. Štoviše, Φ je izomorfizam grupa:

- Φ je homomorfizam grupa:

$$\begin{aligned}
\Phi(\chi_1 \chi_2) &= ((\chi_1\chi_2)(a_1), \ldots, (\chi_1\chi_2)(a_r)) \\
&= (\chi_1(a_1)\chi_2(a_1), \ldots, \chi_1(a_r)\chi_2(a_r)) \\
&= (\chi_1(a_1), \ldots, \chi_1(a_r))\,(\chi_2(a_1), \ldots, \chi_2(a_r)) \\
&= \Phi(\chi_1)\,\Phi(\chi_2), \qquad \chi_1, \chi_2 \in \hat{G}.
\end{aligned}$$

- Kako je svaki $\chi \in \hat{G}$ jedinstveno određen svojim djelovanjem na skupu generatora $\{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$ grupe G, Φ je injekcija.

- Za surjektivnost, fiksirajmo $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r) \in G_1$ i pokažimo da postoji $\chi \in \hat{G}$ takav da je $\Phi(\chi) = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r)$.

  Uzimajući u obzir da vrijedi $\omega_j^{n_j} = 1,\ j = 1, 2, \ldots, r$, lako se vidi da su

$$\chi_j : \mathbb{Z}a_j \to \mathbb{C}^*, \qquad \chi_j(ka_j) := \omega_j^k, \quad k \in \mathbb{Z}, \qquad j = 1, 2, \ldots, r,$$

  dobro definirani homomorfizmi grupa. Po univerzalnom svojstvu direktne sume u kategoriji Abelovih grupa, iz (2.1) slijedi da postoji jedinstven $\chi \in \hat{G}$ takav da je

$$\chi|_{\mathbb{Z}a_j} = \chi_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, r;$$

  posebno vrijedi $\chi(a_j) = \chi_j(a_j) = \omega_j,\ j = 1, 2, \ldots, r$, tj. $\Phi(\chi) = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r)$.

Dakle, vrijedi

$$\hat{G} \overset{\Phi}{\cong} G_1 \cong G,$$

pa je $\hat{G} \cong G$. □

Ako je H podgrupa grupe G, jasno je da je za $\chi \in \hat{G}$ restrikcija $\chi|_H$ karakter grupe H. Korisnu informaciju u obratnom smjeru daje sljedeća propozicija.

Propozicija 2.1.5. *Neka je H podgrupa grupe G.*

(i) Neka je $\chi_0 \in \hat{H}$. Vrijedi

$$\left|\left\{\chi \in \hat{G} \ :\ \chi|_H = \chi_0\right\}\right| = [G : H].$$

(ii) Neka je $a \in G\backslash\{0\}$. Neka je ω $|a|$-ti korijen iz jedinice u $\mathbb{C}$. Vrijedi

$$\left|\left\{\chi \in \hat{G} \ :\ \chi(a) = \omega\right\}\right| = \frac{|G|}{|a|}.$$

Dokaz. (i) Tvrdnju dokazujemo indukcijom po $[G : H]$.

Ako je $[G : H] = 1$, tj. $H = G$, tvrdnja trivijalno vrijedi.

Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{Z}_{>1}$ tvrdnja vrijedi u slučaju podgrupe indeksa strogo manjeg od n, i da je H podgrupa grupe G indeksa n. Kako je $n > 1$, vrijedi $H \subsetneq G$ pa možemo odabrati $a \in G\backslash H$. Skup $\{k \in \mathbb{Z}_{>0} \ :\ ka \in H\}$ neprazan je podskup skupa $\mathbb{Z}_{>0}$ (npr. $|a|$ je njegov element) pa postoji

$$m := \min\{k \in \mathbb{Z}_{>0} \ :\ ka \in H\} > 1.$$

Označimo sa H' podgrupu grupe G generiranu sa $H \cup \{a\}$. Lako se vidi da se svaki element grupe H' na jedinstven način može prikazati u obliku

$$la + h, \qquad l \in \{0, 1, \ldots, m-1\},\ h \in H. \tag{2.2}$$

Odatle je jasno da je $|H'| = m\,|H|$, pa je

$$[H' : H] = m. \tag{2.3}$$

Prebrojimo karaktere grupe H' koji proširuju χ. Svako je takvo proširenje χ' jedinstveno određeno svojim djelovanjem na a. Označimo $w := \chi(ma)$. Uvjet

$$\chi'(a)^m = \chi'(ma) = \chi(ma) = w$$

pokazuje da je $\chi'(a)$ nužno m-ti korijen iz w u $\mathbb{C}$, što daje m različitih kandidata za $\chi'(a)$, a time i m različitih mogućnosti za χ'. Svaka se od tih mogućnosti ostvaruje: ako je $\omega_m \in \mathbb{C}^*$ proizvoljan m-ti korijen iz w, onda je

$$\chi' : H' \to \mathbb{C}^*, \qquad \chi'(la+h) := \omega_m^l \chi(a), \quad l \in \{0, 1, \ldots, m-1\},\ h \in H,$$

dobro definiran homomorfizam grupa koji proširuje χ:

- Da je χ' dobro definiran, slijedi direktno iz egzistencije i jedinstvenosti prikaza elemenata grupe H' u obliku (2.2).

- χ' je homomorfizam grupa: za $l_1, l_2 \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ i $h_1, h_2 \in H$, neka su $q \in \mathbb{Z},\ r \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ takvi da vrijedi $l_1 + l_2 = qm + r$ (takvi q i r postoje po Teoremu o dijeljenju s ostatkom); imamo

$$\begin{aligned} \chi'((l_1a + h_1) + (l_2a + h_2)) &= \chi'((l_1 + l_2)a + h_1 + h_2) = \chi'(ra + (q(ma) + h_1 + h_2)) = \\ &= \omega_m^r \chi(q(ma) + h_1 + h_2) = \omega_m^r w^q \chi(h_1)\chi(h_2) = \\ &= \omega_m^{r+mq} \chi(h_1)\chi(h_2) = \omega_m^{l_1}\chi(h_1)\,\omega_m^{l_2}\chi(h_2) = \\ &= \chi'(l_1a + h_1)\chi'(l_2a + h_2). \end{aligned}$$

- χ' proširuje χ:
$$\chi'(h) = \chi'(0a + h) = \omega_m^0 \chi(h) = \chi(h), \qquad h \in H.$$

Dakle, postoji točno m različitih proširenja karaktera χ do karaktera grupe H'. Kako vrijedi

$$[G : H'] = \frac{[G : H]}{[H' : H]} \overset{(2.3)}{=} \frac{[G : H]}{m} < [G : H] = n,$$

primjenom pretpostavke indukcije na podgrupu H' grupe G slijedi da se svako od tih proširenja točno na $[G : H']$ različitih načina proširuje do karaktera grupe G. Ukupno, postoji točno

$$m\,[G : H'] = m\,\frac{[G : H]}{m} = [G : H]$$

različitih karaktera grupe G koji proširuju χ.

Dakle, tvrdnja vrijedi u slučaju podgrupe indeksa n. Po principu matematičke indukcije, vrijedi i u slučaju podgrupe proizvoljnog indeksa.

(ii) Očito je da pravilo $ka \mapsto \omega^k$, $k \in \mathbb{Z}$, definira jedinstven karakter χ' grupe $\mathbb{Z}a$ koji zadovoljava $\chi'(a) = \omega$. Prema (i), χ' se točno na $[G : \mathbb{Z}a] = \frac{|G|}{|a|}$ različitih načina proširuje do karaktera grupe G. Slijedi (ii). □

Modularni karakteri

Neka je $m \in \mathbb{Z}_{>1}$.

Definicija 2.1.6. *Karakter grupe* $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$ *(grupe invertibilnih elemenata prstena* $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$*) zovemo* ***karakterom modulo*** m*.*

Karakter χ modulo m identificiramo s funkcijom $\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$,

$$n \mapsto \begin{cases} 0, & \text{ako je } (n, m) \neq 1, \\ \chi(n), & \text{ako je } (n, m) = 1, \end{cases} \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Uz ovu identifikaciju, funkcija $\chi : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ je karakter modulo m ako i samo ako je periodična s periodom m, zadovoljava $\chi(n_1 n_2) = \chi(n_1)\chi(n_2)$, $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$, i poništava se točno u onim cijelim brojevima koji nisu relativno prosti sa m.

Drugi dual

Po teoremu 2.1.3, grupa $\hat{G}$ opet je konačna Abelova grupa, i za njezinu dualnu grupu $\hat{\hat{G}}$ vrijedi

$$G \cong \hat{G} \cong \hat{\hat{G}}.$$

Primijetimo da je evaluacija elemenata grupe $\hat{G}$ u fiksnom $a \in G$,

$$\tilde{a} : \hat{G} \to \mathbb{C}^*, \qquad \tilde{a}(\chi) := \chi(a), \quad \chi \in \hat{G},$$

homomorfizam grupa:

$$\tilde{a}(\chi_1\chi_2) = (\chi_1\chi_2)(a) = \chi_1(a)\chi_2(a) = \tilde{a}(\chi_1)\,\tilde{a}(\chi_2), \quad \chi_1, \chi_2 \in \hat{G}.$$

Dakle, $\tilde{a} \in \hat{\hat{G}}$.

Propozicija 2.1.7. *Preslikavanje*

$$\Psi : G \to \hat{\hat{G}}, \qquad a \overset{\Psi}{\longmapsto} \tilde{a}, \quad a \in G,$$

izomorfizam je grupa.

Dokaz. Iz

$$(a_1 + a_2)^{\sim}(\chi) = \chi(a_1 + a_2) = \chi(a_1)\chi(a_2) = \tilde{a}_1(\chi)\,\tilde{a}_2(\chi), \qquad \chi \in \tilde{G}, \ a_1, a_2 \in G,$$

zaključujemo da je

$$(a_1 + a_2)^{\sim} = \tilde{a}_1\tilde{a}_2, \qquad a_1, a_2 \in G,$$

dakle Ψ je homomorfizam grupa.

Pokažimo injektivnost. Za $a \in G$ vrijedi

$$a \in \operatorname{Ker}\Psi \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{a} \equiv 1 \quad \Leftrightarrow \quad \chi(a) = 1,\ \chi \in G. \tag{2.4}$$

Ako je $a \neq 0$, pa je $|a| > 1$, stavimo $\omega := e^{\frac{2\pi i}{|a|}}$; po propoziciji 2.1.5.(ii), postoji $\chi \in \hat{G}$ takav da vrijedi $\chi(a) = \omega \neq 1$ pa, po (2.4), $a \notin \operatorname{Ker}\Psi$. Prema tome, $\operatorname{Ker}\Psi = \{0\}$, dakle Ψ je monomorfizam.

Kako su domena i kodomena preslikavanja Ψ konačne i ekvipotentne, njegova injektivnost ekvivalentna je njegovoj bijektivnosti. Zaključujemo da je Ψ izomorfizam grupa. $\square$

Dakle, posredstvom izomorfizma Ψ elemente grupe $\hat{\hat{G}}$ na prirodan način identificiramo s elementima grupe G; kaže se da je Ψ kanonski izomorfizam grupa G i $\hat{\hat{G}}$.

Relacije ortogonalnosti

Propozicija 2.1.8. *Za $\chi \in \hat{G}$ vrijedi*

$$\sum_{a \in G} \chi(a) = \begin{cases} |G|, & \textit{ako je } \chi = 1, \\ 0, & \textit{ako je } \chi \neq 1. \end{cases}$$

Dokaz. Ako je $\chi = 1$, tvrdnja očito vrijedi.

Ako je $\chi \neq 1$, neka je $b \in G$ takav da je $\chi(b) \neq 1$. Kako je preslikavanje $a \mapsto b + a$ bijekcija $G \to G$, imamo

$$\sum_{a \in G} \chi(a) = \sum_{a \in G} \chi(b + a) = \sum_{a \in G} \chi(b)\chi(a) = \chi(b) \sum_{a \in G} \chi(a),$$

odakle slijedi

$$(1 - \chi(b)) \sum_{a \in G} \chi(a) = 0.$$

Kako je $\chi(b) \neq 1$, a $\mathbb{C}$ je integralna domena, zaključujemo da je

$$\sum_{a \in G} \chi(a) = 0. \qquad \square$$

Propozicija 2.1.9. *Za $a \in G$ vrijedi*

$$\sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(a) = \begin{cases} |G|, & \textit{ako je } a = 0, \\ 0, & \textit{ako je } a \neq 0. \end{cases}$$

Dokaz. Po propoziciji 2.1.7 vrijedi $a = 0 \Leftrightarrow \tilde{a} = 1$. Uočimo i da je

$$\sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(a) = \sum_{\chi \in \hat{G}} \tilde{a}(\chi)$$

pa tvrdnja slijedi primjenom propozicije 2.1.8 na $\tilde{a} \in \hat{\hat{G}}$. $\square$

2.2 Dirichletovi redovi

Definicija 2.2.1. *Red oblika*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z},$$

pri čemu je $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ *niz u* $\mathbb{C}$, $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ *je rastući niz nenegativnih realnih brojeva, a* $z \in \mathbb{C}$ *je varijabla, zovemo* ***Dirichletovim redom****.*

Primjer 2.2.2. *(i) Stavljajući* $a_0 = 0$ *i* $\lambda_n = \ln n$, $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, *dobivamo* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^z}$, ***običan Dirichletov red****.*

(ii) Stavljajući $\lambda_n = n$, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, *dobivamo* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (e^{-z})^n$, *(uz supstituciju* $t = e^{-z}$*) red potencija.*

U proučavanju konvergencije Dirichletovih redova pomoći će nam sljedeća lema.

Lema 2.2.3 (Abelova lema)**.** *Neka su* $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ *i* $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ *nizovi u* $\mathbb{C}$. *Uvedimo oznaku*

$$A_{m,n} := \begin{cases} \sum_{k=m}^{n} a_k, & \text{ako je } m \leq n, \\ 0, & \text{ako je } m > n, \end{cases} \qquad m \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ n \in \mathbb{Z}.$$

Za $m, m' \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ *takve da je* $m \leq m'$, *vrijedi*

$$\sum_{n=m}^{m'} a_n b_n = \sum_{n=m}^{m'-1} A_{m,n}(b_n - b_{n+1}) + A_{m,m'} b_{m'}.$$

Dokaz. Imamo

$$\begin{aligned} \sum_{n=m}^{m'} a_n b_n &= \sum_{n=m}^{m'} (A_{m,n} - A_{m,n-1}) b_n = \\ &= \sum_{n=m}^{m'} A_{m,n} b_n - \sum_{n=m-1}^{m'-1} A_{m,n} b_{n+1} = \\ &= \sum_{n=m}^{m'-1} A_{m,n}(b_n - b_{n+1}) + A_{m,m'} b_{m'} - A_{m,m-1} b_m = \\ &= \sum_{n=m}^{m'-1} A_{m,n}(b_n - b_{n+1}) + A_{m,m'} b_{m'} \end{aligned}$$

jer je $A_{m,m-1} = 0$. □

Propozicija 2.2.4 (o konvergenciji Dirichletova reda)**.** *Ako Dirichletov red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$ konvergira u točki $z_0 \in \mathbb{C}$, tada konvergira uniformno na skupovima*

$$D_{z_0,\alpha} := \{z_0\} \cup \{z \in \mathbb{C} \ : \ \operatorname{Re}(z - z_0) > 0, \ |\operatorname{Arg}(z - z_0)| \leq \alpha\}, \qquad \alpha \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle.$$

Dokaz. Dokažimo najprije tvrdnju u slučaju $z_0 = 0$. Neka je $\alpha \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$. Neka je $\varepsilon > 0$. Pretpostavka da red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$ konvergira u točki $z_0 = 0$ znači da je red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergentan, pa postoji $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ takav da za sve $m, n \geq N$ vrijedi $|A_{m,n}| < \varepsilon$. Primjenom leme 2.2.3 na nizove $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ i $(e^{-\lambda_n z})_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$, dobivamo da za $m' \geq m \geq N$ i $z = (x, y) \in D_{0,\alpha}$ vrijedi

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{n=m}^{m'} a_n e^{-\lambda_n z} \right| &= \left| \sum_{n=m}^{m'-1} A_{m,n} \left(e^{-\lambda_n z} - e^{-\lambda_{n+1} z} \right) + A_{m,m'} e^{-\lambda_{m'} z} \right| \leq \varepsilon \left(\sum_{n=m}^{m'-1} \left| e^{-\lambda_n z} - e^{-\lambda_{n+1} z} \right| + \left| e^{-\lambda_{m'} z} \right| \right) = \\
&= \varepsilon \left(\sum_{n=m}^{m'-1} \left| \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} z e^{-tz} dt \right| + e^{-\lambda_{m'} x} \right) \leq \varepsilon \left(\sum_{n=m}^{m'-1} \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} \left| z e^{-tz} \right| dt + e^{-\lambda_{m'} x} \right) = \\
&= \varepsilon \left(|z| \sum_{n=m}^{m'-1} \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} e^{-tx} dt + e^{-\lambda_{m'} x} \right) = \varepsilon \left(|z| \int_{\lambda_m}^{\lambda_{m'}} e^{-tx} dt + e^{-\lambda_{m'} x} \right) = \\
&= \varepsilon \left(\frac{|z|}{x} \left(e^{-\lambda_m x} - e^{-\lambda_{m'} x} \right) + e^{-\lambda_{m'} x} \right).
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Zbog

$$x > 0, \ \ 0 \leq \lambda_m \leq \lambda_{m'} \quad \Rightarrow \quad 0 < e^{-\lambda_{m'} x} \leq e^{-\lambda_m x} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq e^{-\lambda_m x} - e^{-\lambda_{m'} x} \leq 1,$$

iz (2.5) slijedi

$$\left| \sum_{n=m}^{m'} a_n e^{-\lambda_n z} \right| \leq \varepsilon \left(\frac{|z|}{x} + 1 \right) = \varepsilon \left(\frac{1}{\cos(\operatorname{Arg} z)} + 1 \right) \leq \varepsilon \left(\frac{1}{\cos \alpha} + 1 \right),$$

za proizvoljne $m, m' \geq N$ i $z = (x, y) \in D_{0,\alpha}$. Kako ovo možemo učiniti za proizvoljan $\varepsilon > 0$, zaključujemo da je niz parcijalnih suma reda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$ uniformno Cauchyjev na $D_{0,\alpha} \backslash \{0\}$ pa konvergira uniformno na $D_{0,\alpha} \backslash \{0\}$ (propozicija 1.1.23). Kako po pretpostavci konvergira i u 0, zaključujemo da konvergira uniformno na cijelom $D_{0,\alpha}$.

Pogledajmo sada slučaj $z_0 \neq 0$. Po pretpostavci Dirichletov red $\sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n e^{-\lambda_n z_0} \right) e^{-\lambda_n w}$ konvergira u $w = 0$ pa, po dokazanom dijelu propozicije, konvergira uniformno na skupovima

$$D_{0,\alpha} = \{0\} \cup \{w \in \mathbb{C} \ : \ \operatorname{Re} w > 0, \ |\operatorname{Arg} w| \leq \alpha\}, \qquad \alpha \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle.$$

Supstitucijom $w = z - z_0$, red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$ konvergira uniformno na skupovima

$$\{z_0\} \cup \{z \in \mathbb{C} \ : \ \mathrm{Re}(z - z_0) > 0, \ |\mathrm{Arg}(z - z_0)| \leq \alpha\} = D_{z_0, \alpha}, \qquad \alpha \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle,$$

što smo i htjeli pokazati. □

Uvedimo oznaku

$$M_\rho := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z > \rho\}, \qquad \rho \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

Korolar 2.2.5. *Ako Dirichletov red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$ konvergira u točki $z_0 \in \mathbb{C}$, tada konvergira lokalno uniformno i definira holomorfnu funkciju na otvorenoj poluravnini $M_{\mathrm{Re}\, z_0}$.*

Dokaz. Jasno je da za svaki zatvoren krug $\overline{K}(z, r) \subseteq M_{\mathrm{Re}\, z_0}$ postoji $\alpha \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ takav da je $\overline{K}(z, r) \subseteq D_{z_0, \alpha}$, pa propozicija 2.2.4 povlači da red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$ konvergira uniformno na svakom zatvorenom krugu u $M_{\mathrm{Re}\, z_0}$, dakle i lokalno uniformno na $M_{\mathrm{Re}\, z_0}$. Kako su uz to funkcije $z \mapsto a_n e^{-\lambda_n z}$, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, holomorfne, po korolaru 1.1.26.(iii) red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$ definira holomorfnu funkciju na $M_{\mathrm{Re}\, z_0}$. □

Definicija 2.2.6. *Neka je $\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$ Dirichletov red.*

$$\rho := \inf \left\{ x \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z} \ \textit{konvergira za} \ \mathrm{Re}\, z > x \right\} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

zovemo ***apscisom konvergencije*** *reda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$. Poluravninu M_ρ zovemo* ***poluravninom konvergencije*** *reda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$.*

Uz ovu terminologiju, direktna posljedica korolara 2.2.5 jest sljedeći rezultat.

Korolar 2.2.7. *Dirichletov red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$ s apscisom konvergencije ρ konvergira lokalno uniformno i definira holomorfnu funkciju na svojoj poluravnini konvergencije, a divergira za $\mathrm{Re}\, z < \rho$.*

Dirichletov red s nenegativnim koeficijentima

Propozicija 2.2.8. *Neka je $\rho \in \mathbb{R}$ i neka je $\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$ Dirichletov red s nenegativnim koeficijentima (tj. vrijedi $a_n \geq 0$ za sve $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$). Ako red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$ konvergira na poluravnini M_ρ, i ako se njime definirana holomorfna funkcija $f : M_\rho \to \mathbb{C}$ analitički proširuje u okolini točke ρ, tada postoji $\varepsilon > 0$ takav da red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$ konvergira na poluravnini $M_{\rho-\varepsilon}$.*

Dokaz. Dokažimo najprije tvrdnju u slučaju $\rho = 0$. Neka je $U \supseteq M_0$ otvorena okolina točke 0 takva da postoji analitičko proširenje $f_1 : U \to \mathbb{C}$ funkcije f. Neka su $\varepsilon_1 > \varepsilon > 0$ takvi da je $K(1, 1+\varepsilon_1) \subseteq U$ (možemo uzeti npr. $\varepsilon_1 := \sqrt{1+\frac{r^2}{4}} - 1$ za neki $r > 0$ takav da je $K(0, r) \subseteq U$). Kako je f_1 holomorfna na U, ona se na $K(1, 1+\varepsilon_1)$ razvija u svoj Taylorov red oko 1 (teorem 1.1.33), tj. vrijedi

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(z-1)^n, \qquad z \in K(1, 1+\varepsilon_1). \tag{2.6}$$

Kako je $\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$ red holomorfnih funkcija koji konvergira lokalno uniformno na M_0 (korolar 2.2.7), na toj ga domeni možemo derivirati član po član (korolar 1.1.26.(iii)) pa vrijedi

$$f^{(n)}(1) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m(-\lambda_m)^n e^{-\lambda_m}, \qquad n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

Uvrstimo li to u (2.6), stavljajući $z = -\varepsilon \in K(1, 1+\varepsilon_1)$, dobivamo

$$f_1(-\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sum_{m=0}^{\infty} a_m(-\lambda_m)^n e^{-\lambda_m}}{n!}(-1-\varepsilon)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m \lambda_m^n e^{-\lambda_m}}{n!}(1+\varepsilon)^n.$$

Budući da dvostruki red na desnoj strani ima nenegativne članove, u njemu smijemo promijeniti poredak sumacije. Dobivamo

$$f_1(-\varepsilon) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m e^{-\lambda_m} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda_m(1+\varepsilon))^n}{n!} = \sum_{m=0}^{\infty} a_m e^{-\lambda_m} e^{\lambda_m(1+\varepsilon)} = \sum_{m=0}^{\infty} a_m e^{-\lambda_m(-\varepsilon)}.$$

Dakle, red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$ konvergira u točki $-\varepsilon$ pa, po korolaru 2.2.5, konvergira i na poluravnini $M_{-\varepsilon}$.

U slučaju kad je $\rho \neq 0$, iz pretpostavke propozicije translacijom za $-\rho$ slijedi da red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n(z+\rho)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n e^{-\lambda_n \rho}\right) e^{-\lambda_n z}$ konvergira na M_0 i da se njime definirana holomorfna funkcija analitički proširuje u okolini točke 0 pa, po dokazanom dijelu teorema, taj red konvergira na $M_{-\varepsilon}$ za neki $\varepsilon > 0$. Translacijom za ρ, red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$ konvergira na $M_{\rho-\varepsilon}$. □

Običan Dirichletov red

Lema 2.2.9. *Neka je $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ običan Dirichletov red.*

(i) Ako postoji $M > 0$ takav da je $|a_n| \leq M$ za sve $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, tada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ konvergira apsolutno za $\operatorname{Re} s > 1$.

(ii) Ako postoji $M > 0$ takav da je $|A_{m,n}| \leq M$ za sve $m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$, tada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ konvergira za $\operatorname{Re} s > 0$.

Dokaz. (i) Ako je $\operatorname{Re} s > 1$, imamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{a_n}{n^s} \right| \leq M \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n^s} \right| = M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\operatorname{Re} s}} < \infty,$$

dakle $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ konvergira apsolutno.
(ii) Pokažimo prvo tvrdnju za $s > 0$. Za $m, m' \in \mathbb{Z}_{>0}$, $m \leq m'$, koristeći Abelovu lemu (lema 2.2.3) dobivamo

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{n=m}^{m'} \frac{a_n}{n^s} \right| &= \left| \sum_{n=m}^{m'-1} A_{m,n} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} \right) + A_{m,m'} \frac{1}{m'^s} \right| \\
&\leq M \left(\sum_{n=m}^{m'-1} \left| \frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} \right| + \left| \frac{1}{m'^s} \right| \right) && \text{(jer je } |A_{m,n}| \leq M) \\
&= M \left(\sum_{n=m}^{m'-1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} \right) + \frac{1}{m'^s} \right) && \text{(jer je } s > 0) \\
&= \frac{M}{m^s} \xrightarrow{m \to \infty} 0.
\end{aligned}$$

Dakle, ako je $s > 0$, niz parcijalnih suma reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ Cauchyjev je pa, zbog potpunosti od $\mathbb{C}$, i konvergentan, tj. red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ konvergira.

Neka je ρ apscisa konvergencije reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$. Po korolaru 2.2.7, za $\operatorname{Re} s < \rho$ red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ divergira pa, iz dokazane činjenice da on konvergira za $s > 0$, zaključujemo da je $\rho \leq 0$. To znači da poluravnina konvergencije M_ρ sadrži M_0, pa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ konvergira za $\operatorname{Re} s > 0$. □

Eulerovi produkti

Definicija 2.2.10. *Kažemo da je funkcija $f : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{C}$* ***multiplikativna*** *ako je $f(1) = 1$ i za sve parove relativno prostih brojeva $m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$ vrijedi*

$$f(mn) = f(m)f(n).$$

Ako je ova jednakost zadovoljena čak za sve $m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$, kažemo da je f ***potpuno multiplikativna funkcija****.*

Lema 2.2.11. *Neka je f multiplikativna funkcija. Neka je $s \in \mathbb{C}$ takav da red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ konvergira apsolutno. Tada vrijedi*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 + \frac{f(p)}{p^s} + \frac{f(p^2)}{p^{2s}} + \frac{f(p^3)}{p^{3s}} + \dots \right). \tag{2.7}$$

Dokaz. Označimo

$$S := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}, \qquad P := \prod_{p\in\mathbb{P}} \left(1 + \frac{f(p)}{p^s} + \frac{f(p^2)}{p^{2s}} + \frac{f(p^3)}{p^{3s}} + \dots\right).$$

Kako je

$$\sum_{p\in\mathbb{P}} \left|\frac{f(p)}{p^s} + \frac{f(p^2)}{p^{2s}} + \frac{f(p^3)}{p^{3s}} + \dots\right| \le \sum_{p\in\mathbb{P}} \sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{f(p^k)}{p^{ks}}\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{f(n)}{n^s}\right| < \infty,$$

beskonačan produkt P konvergira apsolutno.

Neka je $\varepsilon > 0$. Zbog apsolutne konvergencije reda S, postoji $m_1 \in \mathbb{Z}_{>0}$ takav da vrijedi

$$\sum_{n=m_1}^{\infty} \left|\frac{f(n)}{n^s}\right| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2.8}$$

Nadalje, po definiciji vrijednosti beskonačnog produkta (formula (1.2)), postoji $m_2 \in \mathbb{Z}_{>0}$ takav da za $m \ge m_2$ vrijedi

$$\left|\prod_{p\in\mathbb{P}_{\le m}} \left(1 + \frac{f(p)}{p^s} + \frac{f(p^2)}{p^{2s}} + \frac{f(p^3)}{p^{3s}} + \dots\right) - P\right| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2.9}$$

Označimo, za $S \subseteq \mathbb{P}$, sa $N(S)$ skup strogo pozitivnih cijelih brojeva čiji su svi prosti djelitelji elementi skupa S. Kako je za svaki $p \in \mathbb{P}$ red $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(p^k)}{p^{ks}}$ apsolutno konvergentan, induktivnom primjenom propozicije 1.2.10, koristeći multiplikativnost funkcije f, dobivamo da je za svaki $m \in \mathbb{Z}_{>0}$

$$\prod_{p\in\mathbb{P}_{\le m}} \left(1 + \frac{f(p)}{p^s} + \frac{f(p^2)}{p^{2s}} + \frac{f(p^3)}{p^{3s}} + \dots\right) = \sum_{n\in N(\mathbb{P}_{\le m})} \frac{f(n)}{n^s},$$

dakle, po (2.9), za $m \ge m_2$ vrijedi

$$\left|\sum_{n\in N(\mathbb{P}_{\le m})} \frac{f(n)}{n^s} - P\right| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2.10}$$

Neka je $m := \max\{m_1, m_2\}$. Imamo

$$|S - P| \le \left|S - \sum_{n=1}^{m} \frac{f(n)}{n^s}\right| + \left|\sum_{n=1}^{m} \frac{f(n)}{n^s} - \sum_{n\in N(\mathbb{P}_{\le m})} \frac{f(n)}{n^s}\right| + \left|\sum_{n\in N(\mathbb{P}_{\le m})} \frac{f(n)}{n^s} - P\right|.$$

Ocijenimo svaki pribrojnik na desnoj strani. Vrijedi

$$\left|S - \sum_{n=1}^{m} \frac{f(n)}{n^s}\right| = \left|\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}\right| \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} \left|\frac{f(n)}{n^s}\right| \leq \sum_{n=m_1}^{\infty} \left|\frac{f(n)}{n^s}\right| \overset{(2.8)}{<} \frac{\varepsilon}{3}.$$

S obzirom da je $\{1, 2, \dots, m\} \subseteq N(\mathbb{P}_{\leq m})$, imamo i

$$\left|\sum_{n=1}^{m} \frac{f(n)}{n^s} - \sum_{n \in N(\mathbb{P}_{\leq m})} \frac{f(n)}{n^s}\right| = \left|\sum_{\substack{n \in N(\mathbb{P}_{\leq m}) \\ n > m}} \frac{f(n)}{n^s}\right| \leq \sum_{\substack{n \in N(\mathbb{P}_{\leq m}) \\ n > m}} \left|\frac{f(n)}{n^s}\right| \leq \sum_{n=m_1}^{\infty} \left|\frac{f(n)}{n^s}\right| \overset{(2.8)}{<} \frac{\varepsilon}{3}.$$

Napokon,

$$\left|\sum_{n \in N(\mathbb{P}_{\leq m})} \frac{f(n)}{n^s} - P\right| \overset{(2.10)}{<} \frac{\varepsilon}{3}.$$

Zbrajanjem dobivamo da je $|S - P| < \varepsilon$. Kako to vrijedi za proizvoljan $\varepsilon > 0$, zaključujemo da je $S = P$, tj. vrijedi (2.7). □

Propozicija 2.2.12. *Neka je f ograničena multiplikativna funkcija. Dirichletov red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ konvergira apsolutno i definira holomorfnu funkciju na poluravnini M_1, i vrijedi*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 + \frac{f(p)}{p^s} + \frac{f(p^2)}{p^{2s}} + \frac{f(p^3)}{p^{3s}} + \dots\right), \qquad \operatorname{Re} s > 1, \tag{2.11}$$

pri čemu je produkt na desnoj strani beskonačan produkt holomorfnih funkcija na M_1 koji konvergira normalno po kompaktima.

Dokaz. Označimo

$$S(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}, \qquad f_p(s) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f(p^k)}{p^{ks}}, \qquad P(s) := \prod_{p \in \mathbb{P}} \big(1 + f_p(s)\big).$$

Kako je f ograničena, tvrdnja o apsolutnoj konvergeciji reda S na M_1 slijedi iz leme 2.2.9.(i). Holomorfnost sada daje korolar 2.2.5, a jednakost (2.11) direktna je posljedica leme 2.2.11.

Preostaje pokazati da su faktori beskonačnog produkta P dobro definirane holomorfne funkcije na M_1 i da on konvergira normalno po kompaktima u M_1. Neka je $M > 0$ takav da za sve $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ vrijedi $|f(n)| \leq M$. Za fiksan $p \in \mathbb{P}$, za $\operatorname{Re} s \geq x > 1$ imamo ocjenu

$$\left|\frac{f(p^k)}{p^{ks}}\right| \leq \frac{M}{p^{kx}}, \quad k \in \mathbb{Z}_{>0}, \qquad \text{i} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M}{p^{kx}} \leq M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} < \infty,$$

dakle f_p je red holomorfnih funkcija koji konvergira normalno na skupovima M_x, $x > 1$, a onda i na kompaktima u M_1 pa, po propoziciji 1.1.25 i korolaru 1.1.26.(iii), red f_p definira holomorfnu funkciju na M_1. Nadalje, kako je za $\operatorname{Re} s \geq x > 1$

$$|f_p(s)| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{f(p^k)}{p^{ks}}\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M}{p^{kx}}, \quad p \in \mathbb{P}, \qquad \text{i} \qquad \sum_{p\in\mathbb{P}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{M}{p^{kx}}\right) \leq M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} < \infty,$$

red $\sum_{p\in\mathbb{P}} f_p$ konvergira normalno na poluravninama M_x, $x > 1$, pa onda i na kompaktima u M_1, dakle beskonačan produkt P konvergira normalno po kompaktima u M_1. □

Korolar 2.2.13. *Ako je $f : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{C}$ ograničena potpuno multiplikativna funkcija, tada vrijedi*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{1 - \frac{f(p)}{p^s}}, \qquad \operatorname{Re} s > 1,$$

pri čemu je produkt na desnoj strani beskonačan produkt holomorfnih funkcija na M_1 koji konvergira normalno po kompaktima.

Dokaz. Uočimo prvo da f nužno zadovoljava $|f(n)| \leq 1$, $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Naime, kad bi postojao $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ takav da je $|f(n)| > 1$, imali bismo, zbog potpune multiplikativnosti, za $k \in \mathbb{Z}_{>0}$,

$$|f(n^k)| = |f(n)^k| = |f(n)|^k \xrightarrow{k\to\infty} +\infty,$$

što je nemoguće jer je f ograničena. Posebno, za $\operatorname{Re} s > 1$ i $p \in \mathbb{P}$ vrijedi $\left|\frac{f(p)}{p^s}\right| < 1$.

Tvrdnja sada slijedi direktno iz propozicije 2.2.12 i činjenice da je, zbog potpune multiplikativnosti funkcije f, za $p \in \mathbb{P}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(p^n)}{p^{ns}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{f(p)}{p^s}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{f(p)}{p^s}}, \qquad \operatorname{Re} s > 1. \qquad □$$

Spomenimo ovdje i jedan rezultat o Eulerovim produktima s nenegativnim koeficijentima.

Definicija 2.2.14. *Neka je $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}_{>0}} \subseteq \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$. Kažemo da beskonačan produkt $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$* ***konvergira u*** *$\overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ ako u $\overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ postoji*

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} a_k.$$

U tom slučaju taj limes zovemo ***vrijednošću beskonačnog produkta*** *$\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ i označavamo ga također sa $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$.*

Lema 2.2.15. *Neka je* $f : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ *takva da je* $f(1) = 1$*, i neka je* $s \in \mathbb{R}$*. Beskonačan produkt* $\prod_{p\in\mathbb{P}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(p^k)}{p^{ks}}$ *konvergira u* $\overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ *i vrijedi*

$$\prod_{p\in\mathbb{P}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(p^k)}{p^{ks}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \tag{2.12}$$

gdje je

$$a_n := \prod_{\substack{p\in\mathbb{P} \\ p^k \mid n,\ p^{k+1}\nmid n}} f(p^k), \qquad n \in \mathbb{Z}_{>0}.$$

Dokaz. Kako je f nenegativna i $f(1) = 1$, svaki je faktor beskonačnog produkta u (2.12) ≥ 1, dakle niz parcijalnih produkata rastući je, pa nužno i konvergentan, niz u $\overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$. Drugim riječima, beskonačan produkt iz (2.12) konvergira u $\overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$. Imamo

$$\prod_{p\in\mathbb{P}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(p^k)}{p^{ks}} = \lim_{m\to\infty} \prod_{p\in\mathbb{P}_{\leq m}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(p^k)}{p^{ks}} = \lim_{m\to\infty} \sum_{n\in N(\mathbb{P}_{\leq m})} \frac{a_n}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s},$$

pri čemu je druga jednakost posljedica propozicije 1.2.11, a treća vrijedi jer je $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ red s nenegativnim članovima. □

2.3 Zeta funkcija

Definicija 2.3.1. *Funkciju*

$$\zeta : M_1 \to \mathbb{C}, \qquad \zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad \operatorname{Re} s > 1,$$

zovemo ***zeta funkcijom****.*

Zeta funkcija definirana je Dirichletovim redom $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$, pri čemu je $f : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{C}$, $f \equiv 1$. Kako je f trivijalan primjer ograničene potpuno multiplikativne funkcije, iz propozicije 2.2.12 i korolara 2.2.13 slijedi da je ζ dobro definirana holomorfna funkcija koja zadovoljava produktnu formulu

$$\zeta(s) = \prod_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}, \qquad \operatorname{Re} s > 1. \tag{2.13}$$

Propozicija 2.3.2. *Postoji holomorfna funkcija* $\phi : M_0 \to \mathbb{C}$ *takva da vrijedi*

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \phi(s), \qquad \operatorname{Re} s > 1.$$

Dokaz. Uočimo da je, za $\operatorname{Re} s > 1$,

$$\frac{1}{s-1} = \int_1^{\infty} \frac{1}{t^s} dt = \int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{t^s} \mathbb{1}_{[n,n+1\rangle}(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{t^s} \mathbb{1}_{[n,n+1\rangle}(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{1}{t^s} dt,$$

pri čemu treća jednakost vrijedi jer je niz parcijalnih suma reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{t^s} \mathbb{1}_{[n,n+1\rangle}(t)$ apsolutno dominiran integrabilnom funkcijom $\frac{1}{t^{Re s}} \mathbb{1}_{[1,+\infty\rangle}(t)$ pa, po Lebesgueovu teoremu o dominiranoj konvergenciji, suma smije iskočiti ispred integrala. Slijedi

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^s} - \int_n^{n+1} \frac{1}{t^s} dt \right) = \frac{1}{s-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{t^s} \right) dt, \quad \operatorname{Re} s > 1.$$

Da bismo dovršili dokaz, dovoljno je pokazati da je

$$\phi : M_0 \to \mathbb{C}, \qquad \phi(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{t^s} \right) dt, \quad \operatorname{Re} s > 0,$$

dobro definirana holomorfna funkcija. Definirajmo, za $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, funkcije

$$\phi_n : M_0 \to \mathbb{C}, \qquad \phi_n(s) := \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{t^s} \right) dt, \quad \operatorname{Re} s > 0.$$

Po propoziciji 1.1.10, funkcije ϕ_n su holomorfne. Nadalje, za svaki $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ imamo

$$|\phi_n(s)| \leq \int_n^{n+1} \left| \frac{1}{n^s} - \frac{1}{t^s} \right| dt = \int_n^{n+1} \left| \int_n^t \frac{s}{u^{s+1}} du \right| dt, \qquad \operatorname{Re} s > 0.$$

Unutrašnji integral na desnoj strani integral je funkcije

$$z \mapsto \frac{s}{z^{s+1}} = \frac{s}{e^{(s+1)\operatorname{Ln} z}}$$

po putu $\gamma : [n, t] \to \mathbb{C}$, $\gamma(u) := u$, pa primjenom Fundamentalne ocjene (1.1) slijedi

$$|\phi_n(s)| \leq \int_n^{n+1} (t-n) \max_{z \in [n,t]} \left| \frac{s}{z^{s+1}} \right| dt \leq \int_n^{n+1} \max_{z \in [n,n+1]} \left| \frac{s}{z^{s+1}} \right| dt = \frac{|s|}{n^{\operatorname{Re} s+1}}, \qquad \operatorname{Re} s > 0.$$

Dakle, ako su $x, r > 0$, za $s \in C(r, x) := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq x, |z| \leq r\}$ vrijedi

$$|\phi_n(s)| \leq \frac{r}{n^{x+1}}, \qquad \text{a} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r}{n^{x+1}} = r \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{x+1}} < \infty.$$

Prema tome, red $\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n$ konvergira normalno na kružnom odsječku $C(r, x)$. Kako je svaki kompaktan podskup K poluravnine M_0 sadržan u nekom odsječku tog oblika (npr. $K \subseteq C(\max_{z \in K}|z|, d(K, i\mathbb{R}))$), zaključujemo da red $\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n$ konvergira normalno po kompaktima u M_0, pa je (propozicija 1.1.25, korolar 1.1.26.(iii)) njegova suma ϕ holomorfna funkcija na M_0. □

Dakle, zeta funkcija analitički se proširuje do meromorfne funkcije na poluravnini M_0. Jedini pol tog proširenja je 1. Može se pokazati da se zeta funkcija analitički proširuje do meromorfne funkcije na cijelom $\mathbb{C}$ (1 je jedini pol i tog proširenja).

2.4 L-funkcije

Neka je $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ i neka je χ karakter modulo m.

Definicija 2.4.1. *Dirichletov red*

$$L_\chi(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$$

zovemo ***L-redom*** *karaktera χ.*

Kako je slika karaktera χ konačna (preciznije, za svaki $n \in \mathbb{Z}$ vrijedi da je $\chi(n)$ ili 0 ili $\varphi(m)$-ti korijen iz jedinice u $\mathbb{C}$), χ je ograničena funkcija. Osim toga, restrikcija karaktera χ na $\mathbb{Z}_{>0}$ potpuno je multiplikativna funkcija, pa iz propozicije 2.2.12 i korolara 2.2.13 slijedi da red L_χ definira holomorfnu funkciju na M_1 i da vrijedi produktna formula

$$L_\chi(s) = \prod_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{1 - \frac{\chi(p)}{p^s}}, \qquad \operatorname{Re} s > 1. \tag{2.14}$$

Propozicija 2.4.2. *Ako je $\chi = 1$, holomorfna funkcija na M_1 definirana redom L_χ analitički se proširuje do meromorfne funkcije na M_0 s jedinstvenim polom* 1.

Dokaz. Imamo

$$L_\chi(s) \overset{(2.14)}{=} \prod_{\substack{p\in\mathbb{P}\\ p\nmid m}} \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = \prod_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} \cdot \prod_{\substack{p\in\mathbb{P}\\ p\mid m}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) \overset{(2.13)}{=} \zeta(s) \prod_{\substack{p\in\mathbb{P}\\ p\mid m}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right), \qquad \operatorname{Re} s > 1.$$

Kako je za svaki $p \in \mathbb{P}$ funkcija $s \mapsto 1 - \frac{1}{p^s}$ holomorfna na M_0 i 1 nije njezina nultočka, tvrdnja slijedi iz odgovarajućih svojstava zeta funkcije (propozicija 2.3.2). □

Propozicija 2.4.3. *Ako je $\chi \neq 1$, red L_χ definira holomorfnu funkciju na M_0.*

Dokaz. Uz oznaku $a_n := \chi(n)$, $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, vrijedi $L_\chi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$. Za $k, l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $k \leq l$, neka su $q \in \mathbb{Z}$ i $r \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ takvi da je $l - k + 1 = qm + r$ (takvi q i r postoje po Teoremu o dijeljenju s ostatkom). Imamo

$$A_{k,l} = \sum_{n=k}^{l} \chi(n) = \sum_{n=k}^{k+m-1} \chi(n) + \sum_{n=k+m}^{k+2m-1} \chi(n) + \ldots + \sum_{n=k+(q-1)m}^{k+qm-1} \chi(n) + \sum_{n=k+qm}^{k+qm+r-1} \chi(n).$$

Kako je χ periodična funkcija s periodom m, slijedi

$$A_{k,l} = q\sum_{n=1}^{m}\chi(n) + \sum_{n=k}^{k+r-1}\chi(n) = q\sum_{n\in(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*}\chi(n) + \sum_{n=k}^{k+r-1}\chi(n),$$

odakle, zbog $\sum_{n\in(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*}\chi(n) = 0$ (propozicija 2.1.8), slijedi

$$A_{k,l} = \sum_{n=k}^{k+r-1}\chi(n).$$

Dakle, $A_{k,l}$ je suma vrijednosti m-periodične funkcije $\chi : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ u $r \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ uzastopnih cijelih brojeva. Jasno je da postoji samo konačno mnogo mogućnosti za vrijednost takve sume. Dakle, skup $\{A_{k,l} : k, l \in \mathbb{Z}_{>0}, k \leq l\}$ konačan je, pa onda i ograničen. Po lemi 2.2.9 slijedi da Dirichletov red $L_\chi(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}$ konvergira za $\operatorname{Re} s > 0$ pa, po korolaru 2.2.5, definira holomorfnu funkciju na M_0. □

Definicija 2.4.4. *Meromorfnu funkciju iz propozicije 2.4.2, ako je* $\chi = 1$*, odnosno holomorfnu fukciju iz propozicije 2.4.3, ako je* $\chi \neq 1$*, zovemo* ***L-funkcijom*** *karaktera* χ *i označavamo je sa* $L(\chi, \cdot)$.

Produkt L-funkcija

Neka je $m \in \mathbb{Z}_{>0}$. Za dokaz Dirichletova teorema u potpoglavlju 2.6 ključno će biti ponašanje L-funkcija karaktera modulo m u točki 1. Vidjeli smo (propozicija 2.4.3) da je 1 pol prvog reda funkcije $L(1, \cdot)$, dok su L-funkcije netrivijalnih karaktera analitičke u 1. Sada ćemo pokazati da 1 nije nultočka L-funkcije nijednog netrivijalnog modularnog karaktera, i to proučavajući svojstva produkta L-funkcija svih karaktera modulo m.

Uvedimo oznaku $G_m := (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$ i, za $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ relativno prost sa m, označimo sa $|n|$ red od $n + \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ u grupi G_m.

Lema 2.4.5. *Neka je* $p \in \mathbb{P}$ *takav da* $p \nmid m$*. Vrijedi*

$$\prod_{\chi\in\hat{G}_m}(1 - \chi(p)X) = \left(1 - X^{|p|}\right)^{\frac{\varphi(m)}{|p|}}. \tag{2.15}$$

Dokaz. Označimo sa $R_{|p|}$ grupu $|p|$-tih korijena iz jedinice u $\mathbb{C}$. Naravno, za svaki karakter χ modulo m vrijedi $\chi(p) \in R_{|p|}$, a po propoziciji 2.1.5.(ii) za svaki je $\omega \in R_{|p|}$

$$\left|\left\{\chi \in \hat{G}_m : \chi(p) = \omega\right\}\right| = \frac{\varphi(m)}{|p|}.$$

Odavde slijedi da je

$$\prod_{\chi\in\hat{G}_m}(1-\chi(p)X)=\left(\prod_{\omega\in R_{|p|}}(1-\omega X)\right)^{\frac{\varphi(m)}{|p|}}=\left(1-X^{|p|}\right)^{\frac{\varphi(m)}{|p|}},$$

pri čemu zadnja jednakost vrijedi jer svaki od polinoma $\prod_{\omega\in R_{|p|}}(1-\omega X)$ i $1-X^{|p|}$ ima skup (jednostrukih) korijena jednak $R_{|p|}$ i slobodni koeficijent 1, a nad $\mathbb{C}$ postoji točno jedan polinom s tim svojstvima, pa je nužno $\prod_{\omega\in R_{|p|}}(1-\omega X)=1-X^{|p|}$. □

Propozicija 2.4.6. *Funkcija*

$$\zeta_m : M_0\to\overline{\mathbb{C}},\qquad \zeta_m(s):=\prod_{\chi\in\hat{G}_m}L(\chi,s),\quad \operatorname{Re}s>0,$$

meromorfna je funkcija na M_0 i zadovoljava produktnu formulu

$$\zeta_m(s)=\prod_{\substack{p\in\mathbb{P}\\ p\nmid m}}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{p^{|p|s}}\right)^{\frac{\varphi(m)}{|p|}}},\qquad \operatorname{Re}s>1.$$

Nadalje, postoji Dirichletov red $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}$ takav da vrijedi

$$\zeta_m(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s},\qquad \operatorname{Re}s>1,$$

pri čemu su koeficijenti a_n, $n\in\mathbb{Z}_{>0}$, nenegativni cijeli brojevi, i za sve $n\in\mathbb{Z}_{>0}$ relativno proste sa m vrijedi $a_{n^{\varphi(m)}}\geq 1$.

Dokaz. Kako je ζ_m po definiciji produkt konačno mnogo meromorfnih funkcija na M_0, i sama je meromorfna funkcija na M_0. Nadalje, za $\operatorname{Re}s>1$ imamo

$$\zeta_m(s)=\prod_{\chi\in\hat{G}_m}L(\chi,s)\overset{(2.14)}{=}\prod_{\chi\in\hat{G}_m}\prod_{p\in\mathbb{P}}\frac{1}{1-\frac{\chi(p)}{p^s}}=\prod_{\chi\in\hat{G}_m}\prod_{\substack{p\in\mathbb{P}\\ p\nmid m}}\frac{1}{1-\frac{\chi(p)}{p^s}}=\prod_{\substack{p\in\mathbb{P}\\ p\nmid m}}\prod_{\chi\in\hat{G}_m}\frac{1}{1-\frac{\chi(p)}{p^s}}.$$

Koristeći lemu 2.4.5 (evaluacijom (2.15) u $\frac{1}{p^s}$), dobivamo produktnu formulu

$$\zeta_m(s)=\prod_{\substack{p\in\mathbb{P}\\ p\nmid m}}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{p^{|p|s}}\right)^{\frac{\varphi(m)}{|p|}}},\qquad \operatorname{Re}s>1.$$

Iz nje, koristeći činjenicu da se, za $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, holomorfna funkcija $z \mapsto \frac{1}{(1-z)^n}$ na $K(0,1)$ razvija u svoj Taylorov red oko 0, tj. vrijedi

$$\frac{1}{(1-z)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+n-1}{n-1} z^k, \qquad |z| < 1,$$

dobivamo

$$\zeta_m(s) = \prod_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \nmid m}} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k + \frac{\varphi(m)}{|p|} - 1}{\frac{\varphi(m)}{|p|} - 1} \frac{1}{p^{|p|ks}}, \qquad \operatorname{Re} s > 1.$$

Ovo, uz definiciju $f : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,

$$f(n) := \begin{cases} \binom{k + \frac{\varphi(m)}{|p|} - 1}{\frac{\varphi(m)}{|p|} - 1}, & \text{ako je } n = p^{|p|k} \text{ za neke } p \in \mathbb{P}, p \nmid m, \text{ i } k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \\ 0, & \text{inače}, \end{cases} \qquad n \in \mathbb{Z}_{>0}, \quad (2.16)$$

možemo zapisati kao

$$\zeta_m(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{f(p^l)}{p^{ls}}, \qquad \operatorname{Re} s > 1,$$

pa po lemi 2.2.15 slijedi da je

$$\zeta_m(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \qquad \operatorname{Re} s > 1,$$

gdje je

$$a_n := \prod_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p^l | n,\ p^{l+1} \nmid n}} f(p^l), \qquad n \in \mathbb{Z}_{>0}. \quad (2.17)$$

Očito je $a_n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ za sve $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Dokažimo da red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ zadovoljava i zadnji zahtjev propozicije. Neka je $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ relativno prost sa m. Iz (2.17) vidimo da je $a_{n^{\varphi(m)}}$ produkt konačno mnogo faktora oblika $f(p^l)$, pri čemu $p \nmid m$, a l je djelijv sa $\varphi(m)$, pa onda i sa $|p|$, tj. $l = |p|k$ za neki $k \in \mathbb{Z}$. Iz (2.16) vidimo da su svi takvi faktori ≥ 1. Zato je i $a_{n^{\varphi(m)}} \geq 1$. □

Korolar 2.4.7. $1 \in \mathbb{C}$ *nije nultočka L-funkcije nijednog karaktera* $\chi \in \hat{G}_m \backslash \{1\}$.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, da postoji $\chi_0 \in \hat{G}_m \backslash \{1\}$ takav da je $L(\chi_0, 1) = 0$. Imamo

$$\zeta_m(s) = ((s-1)\, L(1,s)) \cdot \frac{L(\chi_0, s)}{s-1} \cdot \prod_{\chi \in \hat{G}_m \backslash \{1, \chi_0\}} L(\chi, s), \qquad s \in M_0 \backslash \{1\}.$$

Kako je 1 pol prvog reda meromorfne funkcije $L(1,\cdot)$ (propozicija 2.4.2), nultočka holomorfne funkcije $L(\chi_0,\cdot)$ i točka u domeni holomorfnih funkcija $L(\chi,\cdot)$, $\chi \in \hat{G}_m\backslash\{1,\chi_0\}$, (propozicija 2.4.3), zaključujemo da se svaki faktor na desnoj strani analitički proširuje do holomorfne funkcije na M_0 (vidi propoziciju 1.1.44.(ii)), dakle funkcija ζ_m je holomorfna na M_0.

Neka je $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}$ Dirichletov red iz propozicije 2.4.6. Kako je ζ_m holomorfna na M_0, ona je analitičko proširenje na poluravninu M_0 funkcije $M_1 \to \mathbb{C}$ definirane Dirichletovim redom (s nenegativnim koeficijentima) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}$. Iz propozicije 2.2.8 slijedi da je apscisa konvergencije reda $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}$ manja od ili jednaka 0, pa red $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}$ konvergira na M_0. Posebno, red $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}$ konvergira u točki $\frac{1}{\varphi(m)}$, tj. vrijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{\frac{1}{\varphi(m)}}} < \infty. \tag{2.18}$$

Međutim, kako za sve $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ koji su relativno prosti sa m vrijedi $a_{n^{\varphi(m)}} \geq 1$ (propozicija 2.4.6), imamo i

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{\frac{1}{\varphi(m)}}} \geq \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}_{>0}\\(n,m)=1}}\frac{1}{\left(n^{\varphi(m)}\right)^{\frac{1}{\varphi(m)}}} = \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}_{>0}\\(n,m)=1}}\frac{1}{n} \geq \sum_{\substack{p\in\mathbb{P}\\p\nmid m}}\frac{1}{p} = +\infty, \tag{2.19}$$

pri čemu zadnja jednakost vrijedi jer se red $\sum_{p\in\mathbb{P},\,p\nmid m}\frac{1}{p}$ od reda $\sum_{p\in\mathbb{P}}\frac{1}{p}$, koji divergira (to ćemo, neovisno o ovoj propoziciji, dokazati u sljedećem odjeljku (napomena 2.5.5)), razlikuje samo za konačno mnogo članova. Naravno, (2.18) i (2.19) su u kontradikciji. Zaključujemo da 1 nije nultočka L-funkcije nijednog netrivijalnog karaktera modulo m. □

2.5 Analitička gustoća

Za mjerenje "veličine" (beskonačnih) podskupova skupa prostih brojeva u odnosu na "veličinu" cijelog skupa $\mathbb{P}$, uvode se razne vrste gustoće podskupa skupa $\mathbb{P}$ u $\mathbb{P}$.

Definicija 2.5.1. *Neka je $S \subseteq \mathbb{P}$. Ako postoji limes*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|\{p \in S : p \leq n\}|}{|\{p \in \mathbb{P} : p \leq n\}|},$$

zovemo ga ***prirodnom (asimptotskom) gustoćom*** *skupa S (u $\mathbb{P}$) i označavamo ga sa $\delta(S)$.*

Definicija 2.5.2. *Neka je $S \subseteq \mathbb{P}$. Ako postoji limes*

$$\lim_{s\searrow 1}\frac{\sum_{p\in S}\frac{1}{p^s}}{\sum_{p\in\mathbb{P}}\frac{1}{p^s}},$$

zovemo ga ***analitičkom (Dirichletovom) gustoćom*** *skupa S i označavamo ga sa $d(S)$.*

Napomena 2.5.3. *(a) Iz definicija je jasno da su i prirodna i analitička gustoća skupa $S \subseteq \mathbb{P}$, kad postoje, elementi segmenta* $[0, 1]$*, i da je* $\delta(\mathbb{P}) = d(\mathbb{P}) = 1$.

(b) Lako se vidi i da konačna disjunktna unija skupova koji imaju prirodnu / analitičku gustoću također ima prirodnu / analitičku gustoću, i ona je jednaka sumi njihovih gustoća.

(c) Može se pokazati da svaki $S \subseteq \mathbb{P}$ koji ima prirodnu gustoću ima i analitičku gustoću, i ona je jednaka prirodnoj gustoći (obrat ne vrijedi). Iako je pojam prirodne gustoće intuitivno zaista "prirodniji", nama će biti spretnije raditi s analitičkom gustoćom. Spomenimo samo da se može pokazati da glavni teoremi ovog poglavlja, teoremi 2.6.1 i 2.7.6, koje mi u ovom radu iskazujemo i dokazujemo u terminima analitičke gustoće, vrijede i ako u njihovim iskazima analitičku gustoću zamijenimo prirodnom gustoćom.

Propozicija 2.5.4.

$$\lim_{s \searrow 1} \frac{\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p^s}}{\ln \frac{1}{s-1}} = 1.$$

Dokaz. Uočimo da za $s > 1$ vrijedi $\frac{1}{1-p^{-s}} > 0$ i $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} > 0$ pa su vrijednosti $\ln \frac{1}{1-p^{-s}}$ i $\ln \zeta(s)$ definirane. Iz formule 2.13, koristeći neprekidnost funkcije ln, dobivamo

$$\ln \zeta(s) = \ln \left(\lim_{n \to \infty} \prod_{p \in \mathbb{P}_{\le n}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} \right) = \lim_{n \to \infty} \ln \left(\prod_{p \in \mathbb{P}_{\le n}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} \right) = \lim_{n \to \infty} \left(- \sum_{p \in \mathbb{P}_{\le n}} \ln \left(1 - \frac{1}{p^s} \right) \right)$$
$$= - \sum_{p \in \mathbb{P}} \ln \left(1 - \frac{1}{p^s} \right) = \sum_{p \in \mathbb{P}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{kp^{ks}}, \qquad s > 1.$$

Kako je dvostruki red na desnoj strani red s nenegativnim članovima, u njemu smijemo mijenjati poredak sumacije, pa vrijedi

$$\ln \zeta(s) = \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p^s} + \sum_{p \in \mathbb{P}} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{kp^{ks}}, \qquad s > 1. \tag{2.20}$$

Slijedi

$$\frac{\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p^s}}{\ln \frac{1}{s-1}} = \frac{\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p^s}}{\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p^s} + \sum_{p \in \mathbb{P}} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{kp^{ks}}} \cdot \frac{\ln \zeta(s)}{\ln \frac{1}{s-1}}, \qquad s > 1. \tag{2.21}$$

Pogledajmo što se događa sa svakim od faktora na desnoj strani u (2.21) kad $s \searrow 1$.

Za $s > 1$ možemo ocijeniti

$$\begin{aligned}\sum_{p\in\mathbb{P}}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{kp^{ks}} &\le \sum_{p\in\mathbb{P}}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{p^{ks}} = \sum_{p\in\mathbb{P}}\frac{1}{p^{2s}}\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = \sum_{p\in\mathbb{P}}\frac{1}{p^s(p^s-1)} \le \sum_{p\in\mathbb{P}}\frac{1}{p(p-1)} < \\ &< \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right) = \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right) = 1. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Kako je $\lim_{s\searrow 1}\zeta(s) = +\infty$, pa je i $\lim_{s\searrow 1}\ln(\zeta(s)) = +\infty$, iz formule (2.20) i ocjene (2.22) zaključujemo da je

$$\lim_{s\searrow 1}\sum_{p\in\mathbb{P}}\frac{1}{p^s} = +\infty. \tag{2.23}$$

Iz (2.22) i (2.23) jasno je da je

$$\lim_{s\searrow 1}\frac{\sum_{p\in\mathbb{P}}\frac{1}{p^s}}{\sum_{p\in\mathbb{P}}\frac{1}{p^s}+\sum_{p\in\mathbb{P}}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{p^{ks}}} = 1. \tag{2.24}$$

Da bismo vidjeli što se događa s drugim faktorom u (2.21), sjetimo se da analitičko proširenje funkcije ζ na M_0 u 1 ima pol prvog reda (propozicija (2.3.2)), pa (propozicija 1.1.44.(ii)) postoji holomorfna funkcija $h : K(1,1)\to\mathbb{C}$ takva da vrijedi $h(1)\neq 0$ i $\zeta(s) = \frac{h(s)}{s-1}$ za $s\in K^{\times}(1,1)\cap M_1$. Za $s\in\langle 1,2\rangle$ vrijedi $\zeta(s) > 0$, pa onda i i $h(s) > 0$. Zbog neprekidnosti funkcije h slijedi da je $h(1)\ge 0$, tj., zbog $h(1)\neq 0$, $h(1) > 0$. Za $s\in\langle 1,2\rangle$ sada imamo

$$\frac{\ln\zeta(s)}{\ln\frac{1}{s-1}} = \frac{\ln\frac{h(s)}{s-1}}{\ln\frac{1}{s-1}} = \frac{\ln h(s)-\ln(s-1)}{-\ln(s-1)} = 1-\frac{\ln h(s)}{\ln(s-1)} \xrightarrow{s\searrow 1} 1 \tag{2.25}$$

jer je $\lim_{s\searrow 1}\ln h(s) = \ln h(1)$, a $\lim_{s\searrow 1}\ln(s-1) = -\infty$.

Napokon, iz (2.21), (2.24) i (2.25) zaključujemo da je

$$\lim_{s\searrow 1}\frac{\sum_{p\in\mathbb{P}}\frac{1}{p^s}}{\ln\frac{1}{s-1}} = 1,$$

što je i trebalo pokazati. □

Napomena 2.5.5. *Primijetimo da smo u prethodnom dokazu usput praktički dokazali i da je*

$$\sum_{p\in\mathbb{P}}\frac{1}{p} = +\infty.$$

Naime, to slijedi direktno iz (2.23) *i činjenice da je* $\sum_{p\in\mathbb{P}}\frac{1}{p}\ge\sum_{p\in\mathbb{P}}\frac{1}{p^s}$ *za svaki* $s > 1$.

Korolar 2.5.6. *Neka je $S \subseteq \mathbb{P}$. Vrijedi*

$$\lim_{s\searrow 1} \frac{\sum_{p\in S} \frac{1}{p^s}}{\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p^s}} = \lim_{s\searrow 1} \frac{\sum_{p\in S} \frac{1}{p^s}}{\ln \frac{1}{s-1}},$$

u smislu da jedan limes postoji ako i samo ako postoji i drugi, i da su, kad postoje, međusobno jednaki.

Dokaz. Tvrdnja slijedi direktno iz propozicije 2.5.4 puštanjem limesa kad $s \searrow 1$ u jednakosti

$$\frac{\sum_{p\in S} \frac{1}{p^s}}{\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p^s}} = \frac{\sum_{p\in S} \frac{1}{p^s}}{\ln \frac{1}{s-1}} \cdot \frac{\ln \frac{1}{s-1}}{\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p^s}}. \qquad \square$$

Ovime smo dobili alternativnu definiciju analitičke gustoće skupa $S \subseteq \mathbb{P}$:

$$d(S) := \lim_{s\searrow 1} \frac{\sum_{p\in S} \frac{1}{p^s}}{\ln \frac{1}{s-1}}, \tag{2.26}$$

ako limes na desnoj strani postoji.

Lema 2.5.7. *Neka je $S \subseteq \mathbb{P}$ konačan. Tada je $d(S) = 0$.*

Dokaz. Tvrdnja slijedi direktno iz (2.26) i činjenice da je $\lim_{s\searrow 1} \sum_{p\in S} \frac{1}{p^s} = \sum_{p\in S} \frac{1}{p} < \infty$, dok je $\lim_{s\searrow 1} \ln \frac{1}{s-1} = +\infty$. $\square$

2.6 Dokaz Dirichletova teorema

Teorem 2.6.1. *Neka su $a \in \mathbb{Z}$ i $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ relativno prosti. Skup*

$$P_a := \{p \in \mathbb{P} : p \equiv a \pmod{m}\}$$

ima analitičku gustoću $\frac{1}{\varphi(m)}$.

Dokaz. Zanima nas limes

$$\lim_{s\searrow 1} \frac{\sum_{p\in P_a} \frac{1}{p^s}}{\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p^s}} = \lim_{s\searrow 1} \frac{\sum_{p\in\mathbb{P},\ p\equiv a \,(\mathrm{mod}\, m)} \frac{1}{p^s}}{\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p^s}}. \tag{2.27}$$

Neka je a^{-1} bilo koji cijeli broj sa svojstvom $a^{-1}a \equiv 1 \pmod{m}$ (tj. bilo koji predstavnik inverza klase $a + \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ u grupi G_m). Iz relacija ortogonalnosti za karaktere konačnih Abelovih grupa (propozicija 2.1.9) dobivamo

$$\sum_{\chi\in\hat{G}_m} \chi(a^{-1}p) = \begin{cases} \varphi(m), & a^{-1}p \equiv 1 \pmod{m}, \\ 0, & a^{-1}p \not\equiv 1 \pmod{m}, \end{cases} \qquad p \in \mathbb{P},\ p \nmid m. \tag{2.28}$$

Primijetimo da u ovoj jednakosti možemo i zaboraviti uvjet $p \nmid m$, s obzirom da u slučaju kad $p \mid m$ vrijedi da $a^{-1}p$ nije relativno prost sa m pa je $a^{-1}p \not\equiv 1 \pmod{m}$ i da je $\sum_{\chi\in\hat{G}_m}\chi(a^{-1}p) = \sum_{\chi\in\hat{G}_m} 0 = 0$. Jednakost (2.28) možemo, budući da je uvjet $a^{-1}p \equiv 1 \pmod{m}$ ekvivalentan sa $p \equiv a \pmod{m}$, zgodno iskoristiti za novi zapis brojnika u (2.27):

$$\sum_{p\in P_a}\frac{1}{p^s} = \frac{1}{\varphi(m)}\sum_{p\in\mathbb{P}}\sum_{\chi\in\hat{G}_m}\frac{\chi(a^{-1}p)}{p^s}, \qquad s > 1.$$

Kako za sve $\chi \in \hat{G}_m$ i $s > 1$ vrijedi $\sum_{p\in\mathbb{P}}\left|\frac{\chi(a^{-1}p)}{p^s}\right| \le \sum_{p\in\mathbb{P}}\frac{1}{p^s} < \zeta(s) < \infty$, pa $\sum_{p\in\mathbb{P}}\frac{\chi(a^{-1}p)}{p^s}$ konvergira (apsolutno), slijedi

$$\sum_{p\in P_a}\frac{1}{p^s} = \frac{1}{\varphi(m)}\sum_{\chi\in\hat{G}_m}\sum_{p\in\mathbb{P}}\frac{\chi(a^{-1}p)}{p^s} = \frac{1}{\varphi(m)}\sum_{\chi\in\hat{G}_m}\frac{1}{\chi(a)}\sum_{p\in\mathbb{P}}\frac{\chi(p)}{p^s}, \quad s > 1. \tag{2.29}$$

Ova jednakost omogućuje da limes (2.27) shvatimo kao sumu $\varphi(m)$ novih limesa, indeksiranih po $\hat{G}_m$, u nadi da svi ti limesi postoje i da ih znamo izračunati.

Za $\chi \in \hat{G}_m$, definirajmo

$$f_\chi : M_1 \to \mathbb{C}, \qquad f_\chi(s) := \sum_{p\in\mathbb{P}}\frac{\chi(p)}{p^s}, \qquad \operatorname{Re} s > 1.$$

Kako za $\operatorname{Re} s \ge x > 1$ vrijedi

$$\left|\frac{\chi(p)}{p^s}\right| \le \frac{1}{p^x}, \qquad \text{a} \qquad \sum_{p\in\mathbb{P}}\frac{1}{p^x} < \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x} < \infty,$$

red $\sum_{p\in\mathbb{P}}\frac{\chi(p)}{p^s}$ holomorfnih funkcija konvergira normalno po kompaktima u M_1, pa je (propozicija 1.1.25 i korolar 1.1.26.(iii)) f_χ dobro definirana holomorfna funkcija na M_1.

Lema 2.6.2. *Za $\chi \in \hat{G}_m$, $\chi = 1$, vrijedi*

$$\lim_{s\searrow 1}\frac{f_\chi(s)}{\sum_{p\in\mathbb{P}}\frac{1}{p^s}} = 1.$$

Dokaz. Za $\chi = 1$ imamo

$$\lim_{s\searrow 1}\frac{f_\chi(s)}{\sum_{p\in\mathbb{P}}\frac{1}{p^s}} = \lim_{s\searrow 1}\frac{\sum_{p\in\mathbb{P},\, p\nmid m}\frac{1}{p^s}}{\sum_{p\in\mathbb{P}}\frac{1}{p^s}} = \lim_{s\searrow 1}\frac{\sum_{p\in\mathbb{P}}\frac{1}{p^s} - \sum_{p\in\mathbb{P},\, p\mid m}\frac{1}{p^s}}{\sum_{p\in\mathbb{P}}\frac{1}{p^s}} = 1,$$

pri čemu zadnja jednakost vrijedi zbog (2.23) i činjenice da za sve $s > 1$ vrijedi $\sum_{p\in\mathbb{P},\, p\mid m}\frac{1}{p^s} \le \sum_{p\in\mathbb{P},\, p\mid m} 1 \le m$. □

Lema 2.6.3. *Za* $\chi \in \hat{G}_m$, $\chi \neq 1$, *vrijedi*

$$\lim_{s \searrow 1} \frac{f_\chi(s)}{\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p^s}} = 0.$$

Dokaz. Primijetimo da je dovoljno pokazati da je funkcija f_χ ograničena na nekom intervalu oblika $\langle 1, 1+\varepsilon \rangle$, $\varepsilon > 0$; tvrdnja onda slijedi direktno iz (2.23). Slično kao što je osnova dokaza propozicije 2.5.4 bila promatranje logaritma zeta funkcije, osnova ovog dokaza bit će promatranje logaritma funkcije $L(\chi, \cdot)$. Ovdje se, međutim, ne možemo poslužiti realnim logaritmom, već ćemo morati žonglirati različitim kompleksnim logaritmima funkcije $L(\chi, \cdot)$.

Za početak, definirajmo

$$g : M_1 \to \mathbb{C}, \qquad g(s) := \sum_{p \in \mathbb{P}} \operatorname{Ln} \frac{1}{1 - \frac{\chi(p)}{p^s}}, \quad \operatorname{Re} s > 1.$$

Pokažimo da ova definicija ima smisla. Lako se vidi da za $p \in \mathbb{P}$ i $\operatorname{Re} s > 1$ vrijedi $\operatorname{Re} \frac{1}{1-\frac{\chi(p)}{p^s}} > 0$, pa je $\frac{1}{1-\frac{\chi(p)}{p^s}}$ u domeni glavne grane kompleksnog logaritma, dakle svi članovi gornje sume dobro su definirani. Nadalje, koristeći razvoj holomorfne funkcije $z \mapsto \operatorname{Ln} \frac{1}{1-z}$ u Taylorov red oko 0 na $K(0,1)$ dobivamo da za $p \in \mathbb{P}$ vrijedi

$$\operatorname{Ln} \frac{1}{1 - \frac{\chi(p)}{p^s}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(p)^n}{n p^{ns}}, \qquad \operatorname{Re} s > 1. \tag{2.30}$$

Odavde slijedi da je, za $p \in \mathbb{P}$ i $\operatorname{Re} s \geq x > 1$,

$$\left| \operatorname{Ln} \frac{1}{1 - \frac{\chi(p)}{p^s}} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\chi(p)^n}{n p^{ns}} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n p^{nx}},$$

a

$$\sum_{p \in \mathbb{P}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n p^{nx}} = \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p^x} + \sum_{p \in \mathbb{P}} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n p^{nx}} < \zeta(x) + \sum_{p \in \mathbb{P}} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n p^{nx}} \overset{(2.22)}{\leq} \zeta(x) + 1 < \infty,$$

dakle red $\sum_{p \in \mathbb{P}} \operatorname{Ln} \frac{1}{1-\frac{\chi(p)}{p^s}}$ holomorfnih funkcija na M_1 konvergira normalno na poluravninama $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq x\}$, $x > 1$, pa onda i na kompaktima u M_1, odakle slijedi (propozicija 1.1.25 i korolar 1.1.26.(iii)) da je g dobro definirana holomorfna funkcija na M_1.

Iz (2.30) i definicije funkcije g dobivamo

$$g(s) = \sum_{p \in \mathbb{P}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(p)^n}{n p^{ns}}, \qquad \operatorname{Re} s > 1,$$

pri čemu, zbog apsolutne konvergencije, dvostruki red na desnoj strani konvergira bezuvjetno, pa vrijedi i

$$g(s) = \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{\chi(p)}{p^s} + \sum_{p\in\mathbb{P}} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\chi(p)^n}{np^{ns}} = f_\chi(s) + \sum_{p\in\mathbb{P}} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\chi(p)^n}{np^{ns}}, \qquad \operatorname{Re} s > 1. \tag{2.31}$$

Kako je

$$\left| \sum_{p\in\mathbb{P}} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\chi(p)^n}{np^{ns}} \right| \le \sum_{p\in\mathbb{P}} \sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{\chi(p)^n}{np^{ns}} \right| \le \sum_{p\in\mathbb{P}} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{np^{n \operatorname{Re} s}} \overset{(2.22)}{\le} 1, \qquad \operatorname{Re} s > 1,$$

iz (2.31) vidimo da je za završetak dokaza leme, tj. da bismo dokazali ograničenost funkcije f_χ na nekom intervalu oblika $\langle 1, 1+\varepsilon\rangle$, $\varepsilon > 0$, više nego dovoljno pokazati da je funkcija g ograničena na $K(1,r) \cap M_1$ za neki $r > 0$.

g je kompleksni logaritam funkcije $L(\chi, \cdot)$ na M_1: imamo

$$e^{g(s)} = e^{\sum_{p\in\mathbb{P}} \operatorname{Ln} \frac{1}{1-\frac{\chi(p)}{p^s}}} = \prod_{p\in\mathbb{P}} e^{\operatorname{Ln} \frac{1}{1-\frac{\chi(p)}{p^s}}} = \prod_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{1-\frac{\chi(p)}{p^s}} \overset{(2.14)}{=} L(\chi, s), \qquad \operatorname{Re} s > 1,$$

pri čemu druga jednakost vrijedi zbog neprekidnosti eksponencijalne funkcije. S druge strane, sjetimo se da je, po korolaru 2.4.7, $L(\chi, 1) \neq 0$, pa postoji $\alpha \in \mathbb{R}$ takav da je $L(\chi, 1)$ u domeni grane kompleksnog logaritma $\ln_\alpha$. Štoviše, zbog otvorenosti domene funkcije $\ln_\alpha$ i neprekidnosti funkcije $L(\chi, \cdot)$, možemo odabrati $0 < r < 1$ takav da je i cijeli $L(\chi, K(1,r))$ sadržan u domeni funkcije $\ln_\alpha$. Drugim riječima, funkcija

$$h : K(1,r) \to \mathbb{C}, \qquad h(s) := \ln_\alpha (L(\chi, s)), \quad s \in K(1,r),$$

dobro je definirana. Naravno, h je, kao kompozicija holomorfnih funkcija, i sama holomorfna. Posebno, h je neprekidna, pa bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je odabrani r dovoljno malen da za sve $s \in K(1,r)$ vrijedi $|h(s) - h(1)| < 1$. Odavde slijedi da je h ograničena funkcija.

Za svaki $s \in K(1,r) \cap M_1$, s obzirom da su $h(s)$ i $g(s)$ logaritmi istog kompleksnog broja, vrijedi $h(s) - g(s) \in 2\pi i\mathbb{Z} =: D$. Dakle, $(g-h)(K(1,r) \cap M_1) \subseteq D$. Kako je $g - h : K(1,r) \cap M_1 \to \mathbb{C}$ neprekidna funkcija, ona povezan skup $K(1,r) \cap M_1$ preslikava u povezan podskup od D. No, D je diskretan, pa su jedini njegovi neprazni povezani podskupovi jednočlani. Zaključujemo da je $g - h$ konstantna funkcija. Kako je h ograničena, odavde slijedi da je i g ograničena na $K(1,r) \cap M_1$, što završava dokaz leme. □

Uvrštavanjem rezultata lema 2.6.2 i 2.6.3 dobivamo

$$\lim_{s \searrow 1} \frac{\sum_{p\in P_a} \frac{1}{p^s}}{\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p^s}} \overset{(2.29)}{=} \frac{1}{\varphi(m)} \sum_{\chi\in\hat{G}_m} \frac{1}{\chi(a)} \lim_{s\searrow 1} \frac{f_\chi(s)}{\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p^s}} = \frac{1}{\varphi(m)} \left(\frac{1}{1} \cdot 1 + \sum_{\chi\in\hat{G}_m\setminus\{1\}} \frac{1}{\chi(a)} \cdot 0 \right) = \frac{1}{\varphi(m)}.$$

Zaključujemo da skup P_a ima analitičku gustoću i ona je jednaka $\frac{1}{\varphi(m)}$. □

Dokaz teorema 2.0.2. Pretpostavimo da tvrdnja teorema ne vrijedi, tj. da je skup P_a konačan. Po lemi 2.5.7, tada je $d(P_a) = 0$. No, po teoremu 2.6.1 vrijedi $d(P_a) = \frac{1}{\varphi(m)}$. Ovo je, naravno, kontradikcija! Dakle, skup P_a je beskonačan. □

2.7 Analitička gustoća skupa $\left\{p \in \mathbb{P}_{>2} : \left(\frac{n}{p}\right) = 1\right\}$

Ilustrirajmo jednu primjenu Dirichletova teorema. Prisjetimo se najprije definicije i svojstava Legendreovih simbola.

Definicija 2.7.1. *Neka je p neparan prost broj. Za $n \in \mathbb{Z}$ definiramo* ***Legendreov simbol***

$$\left(\frac{n}{p}\right) := \begin{cases} 0, & n \in p\mathbb{Z}, \\ 1, & n + p\mathbb{Z} \in ((\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*)^2, \\ -1, & \textit{inače}. \end{cases}$$

Za fiksni neparan prost broj p, funkcija $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* \to \mathbb{C}^*$, $n + p\mathbb{Z} \mapsto \left(\frac{n}{p}\right)$, netrivijalan je karakter modulo p, sa slikom $\{-1, 1\}$, pa (kao direktna posljedica Prvog teorema o izomorfizmu grupa) vrijedi

$$\left|\left\{n + p\mathbb{Z} : \left(\frac{n}{p}\right) = 1\right\}\right| = \frac{\varphi(p)}{2} = \frac{p-1}{2}.$$

Postavlja se pitanje što možemo, za fiksni $n \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{Z}^2$, reći o veličini skupa

$$\left\{p \in \mathbb{P}_{>2} : \left(\frac{n}{p}\right) = 1\right\}.$$

Odgovor u terminima analitičke gustoće daje teorem 2.7.6. Ovdje ćemo ga dokazati kao direktnu posljedicu teorema 2.6.1. Prisjetimo se najprije još nekih poznatih rezultata iz teorije brojeva.

Neka su $\varepsilon, \omega : \mathbb{Z}\backslash 2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ zadane sa

$$\varepsilon(n) := \begin{cases} 0, & n \equiv 1 \pmod 4, \\ 1, & n \equiv -1 \pmod 4, \end{cases} \qquad \omega(n) := \begin{cases} 0, & n \equiv \pm 1 \pmod 8, \\ 1, & n \equiv \pm 3 \pmod 8. \end{cases}$$

Funkcije ε i ω induciraju homomorfizme grupa $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^*$ odnosno $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^*$ na $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Uz tu interpretaciju, funkcije $x \mapsto (-1)^{\varepsilon(x)}$ odnosno $x \mapsto (-1)^{\omega(x)}$ karakteri su modulo 4 odnosno 8.

Propozicija 2.7.2. *Neka je p neparan prost broj. Vrijedi*

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\varepsilon(p)}, \qquad \left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\omega(p)}.$$

Teorem 2.7.3 (Gaussov zakon kvadratnog reciprociteta)**.** *Za različite neparne proste brojeve p i q vrijedi*

$$\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\varepsilon(p)\varepsilon(q)} \left(\frac{p}{q}\right). \tag{2.32}$$

Teorem 2.7.4 (Kineski teorem o ostacima)**.** *Neka je $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ i neka su $m_1, m_2, \dots m_n \in \mathbb{Z}_{>0}$ u parovima relativno prosti. Neka su $b_1, b_2, \dots b_n \in \mathbb{Z}$. Tada sustav kongruencijskih jednadžbi*

$$x \equiv b_k \pmod{m_k}, \qquad k = 1, 2, \dots, n,$$

ima rješenje. Ako je $x = a$ jedno njegovo rješenje, skup svih rješenja jest $a + m_1 m_2 \cdots m_n \mathbb{Z}$.

Lema 2.7.5. *Neka je $a \in \mathbb{Z}$ kvadratno slobodan. Tada postoji jedinstven karakter χ_a modulo $m := 4|a|$ takav da za svaki prost broj p koji ne dijeli m vrijedi*

$$\chi_a(p) = \left(\frac{a}{p}\right).$$

Vrijedi $\chi_a^2 = 1$. Također, $\chi_a \neq 1$ ako $a \neq 1$.

Dokaz. Kako je svaki karakter modulo m potpuno određen svojim vrijednostima u prostim brojevima koji ne dijele m, postoji najviše jedan karakter χ_a s traženim svojstvom, i nužno je $\chi_a((\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*) \subseteq \{\pm 1\}$, pa je $\chi_a^2 = 1$.

Pretpostavimo da je $a = p_1 p_2 \cdots p_k$, gdje je $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, a $p_1, p_2, \dots, p_k$ su neparni prosti brojevi. Tražimo karakter χ_a takav da za svaki prost broj p koji ne dijeli m vrijedi

$$\chi_a(p) = \left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{p_1}{p}\right) \cdots \left(\frac{p_k}{p}\right) \overset{(2.32)}{=} (-1)^{\varepsilon(p)\sum_{j=1}^{k}\varepsilon(p_j)} \left(\frac{p}{p_1}\right) \cdots \left(\frac{p}{p_k}\right) = (-1)^{\varepsilon(p)\varepsilon(a)} \left(\frac{p}{p_1}\right) \cdots \left(\frac{p}{p_k}\right).$$

Jasno je da je

$$\chi : (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^* \to \mathbb{C}, \quad \chi(n + m\mathbb{Z}) := (-1)^{\varepsilon(n)\varepsilon(p_1 \cdots p_k)} \left(\frac{n}{p_1}\right) \cdots \left(\frac{n}{p_k}\right), \quad n \in \mathbb{Z},\ (n, m) = 1,$$

jedan takav karakter. Također, ako je $a \neq 1$, tj. $k > 1$, vrijedi $\chi \neq 1$. Naime, odaberemo li $r \in \mathbb{Z}$ takav da je $\left(\frac{r}{p_1}\right) = -1$, po Kineskom teoremu o ostacima (teorem 2.7.4) postoji $x \in \mathbb{Z}$ takav da je

$$x \equiv r \pmod{p_1} \qquad \text{i} \qquad x \equiv 1 \pmod{4p_2 \cdots p_k}.$$

Očito je $\chi(x) = -1$.

U slučajevima $a = 2p_1 \cdots p_k$, $a = -p_1 \cdots p_k$ odnosno $a = -2p_1 \cdots p_k$, analogni argumenti (uz primjenu propozicije 2.7.2) pokazuju da je $(-1)^{\omega}\chi$, $(-1)^{\varepsilon}\chi$ odnosno $(-1)^{\varepsilon+\omega}\chi$ karakter s traženim svojstvima, i da nije identički jednak 1. □

Teorem 2.7.6. *Neka je $a \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{Z}^2$. Skup*

$$S_a := \left\{p \in \mathbb{P}_{>2} : \left(\frac{a}{p}\right) = 1\right\}$$

ima analitičku gustoću $\frac{1}{2}$.

Dokaz. Neka su $x, y \in \mathbb{Z}$ takvi da je $a = x^2 y$, a y je kvadratno slobodan. Kako je $a \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{Z}^2$, vrijedi $y \neq 1$, a očito je $S_a \subseteq S_y$ i skup $S_y \backslash S_a$ je konačan (podskup je skupa prostih brojeva koji dijele a, a ne dijele y). Slijedi (lema 2.5.7, napomena 2.5.3.(b)) da skup S_a ima analitičku gustoću ako i samo ako skup S_y ima analitičku gustoću, i u tom su slučaju one jednake. Prema tome, tvrdnju je dovoljno dokazati u slučaju kad je a kvadratno slobodan cijeli broj $\neq 1$. Uz oznake leme 2.7.5, tada imamo

$$S_a = \{p \in \mathbb{P} : p + m\mathbb{Z} \in \operatorname{Ker}\chi_a\} = \bigcup_{C \in \operatorname{Ker}\chi_a} (C \cap \mathbb{P}),$$

i vrijedi $\chi_a^2 = 1$ i $\chi_a \neq 1$. Dakle, χ_a ima dvočlanu sliku, $\{-1, 1\}$, pa, po Prvom teoremu o izomorfizmu grupa, vrijedi $|\operatorname{Ker}\chi_a| = \frac{\varphi(m)}{2}$. Prema tome, S_a je disjunktna unija $\frac{\varphi(m)}{2}$ skupova od kojih svaki, po teoremu 2.0.2, ima analitičku gustoću $\frac{1}{\varphi(m)}$. Slijedi (vidi napomenu 2.5.3.(b))

$$d(S_a) = \frac{\varphi(m)}{2} \cdot \frac{1}{\varphi(m)} = \frac{1}{2}.$$

□

Poglavlje 3

Modularne forme

3.1 Modularna grupa

Promotrimo djelovanje grupe

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) := \{A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{Z}) : \det A = 1\}$$

na gornju kompleksnu poluravninu

$$H := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$$

zadano sa

$$gz := \frac{az+b}{cz+d}, \qquad g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}),\ z \in H.$$

Prije svega, primijetimo da za svaki izbor g i z vrijedi $cz + d \neq 0$ i

$$\operatorname{Im} gz = \frac{(ad-bc)\operatorname{Im} z}{|cz+d|^2} = \frac{\operatorname{Im} z}{|cz+d|^2} > 0$$

pa je definicija dobra. Lako se provjeri i da je ovo stvarno djelovanje grupe, tj. da vrijedi

$$Iz = z, \qquad (g_1g_2)z = g_1(g_2z), \qquad z \in H,\ g_1, g_2 \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}).$$

Uočimo da $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ zadovoljava

$$gz = z, \qquad z \in H,$$

ako i samo ako je $g \in \{I, -I\}$. (Naime, uvrstimo li u ovu formulu $z = i$ i $z = 2i$, dobivamo $a = d$ i $b = -c = -4c$, odakle slijedi da je nužno $b = c = 0$ i, zbog $ad-bc = 1$, $a = d = \pm 1$, tj. $g = \pm I$. S druge strane, I i $-I$ očito zadovoljavaju formulu za sve $z \in H$.) Dakle, za svaki $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ elementi g i $-g$ grupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ na sve elemente poluravnine H djeluju na isti način, pa djelovanje grupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ inducira djelovanje grupe

$$G := \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})/\{\pm I\},$$

i to je djelovanje *vjerno*, tj. preslikavanje koje elementu $g \in G$ pridružuje funkciju $z \mapsto gz$ injektivno je.

Definicija 3.1.1. *Grupu G zovemo* ***modularnom grupom****.*

U nastavku ćemo elemente grupe G označavati istim simbolima kao njihove predstavnike u $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, tj. umjesto $\{\pm g\}$ pisat ćemo jednostavno g (ili, ekvivalentno, $-g$).

Označimo

$$S := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad T := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Za $z \in H$ vrijedi

$$Sz = -\frac{1}{z}, \qquad Tz = z + 1.$$

Pokazat ćemo da S i T generiraju grupu G. Može se pokazati da je $\left\langle S, T; S^2, (ST)^3 \right\rangle$ prezentacija grupe G.

Definicija 3.1.2. *Skup*

$$D := \left\{ z \in H : |\mathrm{Re}\, z| \leq \frac{1}{2},\ |z| \geq 1 \right\}$$

zovemo ***fundamentalnom domenom*** *djelovanja grupe G.*

Na ovako smjelom imenu skup D može zahvaliti tvrdnjama (i) i (ii) sljedećeg teorema.

Teorem 3.1.3. *(i) Za svaki $z \in H$ postoji $g \in G$ takav da je $gz \in D$, tj. D sadrži predstavnike svih orbita djelovanja grupe G.*

(ii) Međusobno različiti $z_1, z_2 \in D$ nalaze se u istoj orbiti djelovanja grupe G, tj. postoji $g \in G$ takav da je $gz_1 = z_2$, ako i samo ako vrijedi jedno od sljedećeg:

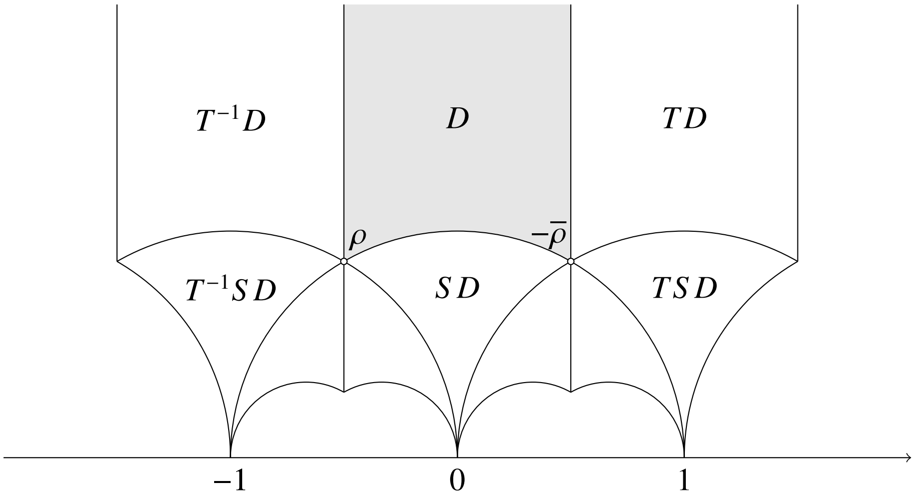
(a) $|\mathrm{Re}\, z_1| = \frac{1}{2}$ i $z_2 = z_1 \pm 1$;

(b) $|z_1| = 1$ i $z_2 = -\frac{1}{z_1}$.

(iii) Jedini elementi skupa D s netrivijalnim stabilizatorima u G su:

(a) $\rho := e^{\frac{2\pi i}{3}}$ sa stabilizatorom $\{I, ST, (ST)^2\}$;

(b) $-\overline{\rho} = e^{\frac{\pi i}{3}}$ sa stabilizatorom $\{I, TS, (TS)^2\}$;



Slika 3.1: Fundamentalna domena D i njene transformacije elementima grupe G

(c) i sa stabilizatorom $\{I, S\}$.

(iv) Grupa G generirana je sa S i T.

Dokaz. (i) Neka je G' podgrupa grupe G generirana sa S i T. Neka je $z \in H$. Pokazat ćemo da postoji $g \in G'$ takav da je $gz \in D$.

Odaberimo $g' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G'$ takav da je $\mathrm{Im}(g'z) = \frac{\mathrm{Im}\, z}{|cz+d|^2}$ najveći mogući. Da takav g' postoji, slijedi iz geometrijski očite činjenice da je za svaki $M > 0$ skup

$$\left\{(c,d) \in \mathbb{Z}^2 \backslash \{(0,0)\} : \frac{\mathrm{Im}\, z}{|cz+d|^2} \geq M\right\} = \left\{(c,d) \in \mathbb{Z}^2 \backslash \{(0,0)\} : |cz+d| \leq \sqrt{\frac{\mathrm{Im}\, z}{M}}\right\}$$

konačan, pa je i $\mathrm{Im}(G'z) \cap [M, +\infty\rangle$ konačan. Za dovoljno malen M taj je skup i neprazan pa ima najveći element y_0, i jasno je da je svaki $g_1 \in G'$ takav da je $\mathrm{Im}(g_1 z) = y_0$ dobar izbor za g'.

Odaberimo sada $n \in \mathbb{Z}$ takav da je $\mathrm{Re}(T^n g'z) = \mathrm{Re}(g'z) + n \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Tvrdimo da je $T^n g'z \in D$, tj. da vrijedi i $|T^n g'z| \geq 1$. Zaista, kad bi bilo $|T^n g'z| < 1$, imali bismo

$$\mathrm{Im}(ST^n g'z) = \frac{\mathrm{Im}(T^n g'z)}{|T^n g'z|^2} > \mathrm{Im}(T^n g'z) = \mathrm{Im}(g'z),$$

što je u kontradikciji s izborom g'. Dakle, za $g := T^n g' \in G'$ vrijedi $gz \in D$.

(ii), (iii) Da bismo pokazali (ii) i (iii), nađimo sve parove $(g, z) \in (G\backslash\{I\}) \times D$ takve da je $gz \in D$, tj. sve trojke $(g, z, gz) \in (G\backslash\{I\}) \times D \times D$. Primijetimo da je dovoljno pronaći samo one trojke koje zadovoljavaju i $\mathrm{Im}(gz) \geq \mathrm{Im}\, z$, tj. $|cz+d|^2 \leq 1$; preostale su trojke onda oblika (g^{-1}, gz, z).

Kako je $1 \geq |cz+d|^2 \geq c^2(\mathrm{Im}\, z)^2 \geq \frac{3}{4}c^2$, vidimo da je moguće samo $c \in \{-1, 0, 1\}$.

Ako je $c = 0$, imamo $1 = ad - bc = ad$, pa je $a = d = \pm 1$, odakle slijedi da je $g = T^n$ za neki $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Geometrijski je jasno da su jedine translacije za cijeli broj $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ koje ne prebacuju sve $z \in D$ u $H\backslash D$ translacije za ± 1. Preciznije, u slučaju $c = 0$ jedine su trojke (g, z, gz) s traženim svojstvom

$$(T, z, z+1), \quad \mathrm{Re}\, z = -\frac{1}{2}, \qquad \text{i} \qquad \left(T^{-1}, z, z-1\right), \quad \mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2}.$$

U slučaju $c = 1$ imamo $1 = ad - bc = ad - b$ pa za sve $w \in H$ vrijedi $gw = \frac{aw+b}{w+d} = \frac{a(w+d)-(ad-b)}{w+d} = a - \frac{1}{w+d}$, dakle $g = T^a S T^d$. Također vrijedi $1 \geq |cz+d| = |z+d| \geq |\mathrm{Re}(z+d)| \geq |d| - |\mathrm{Re}\, z| \geq |d| - \frac{1}{2}$, tj. $|d| \leq \frac{3}{2}$, pa je nužno $d \in \{-1, 0, 1\}$.

(1) Ako je $d = 0$, iz $1 \geq |cz+d| = |z| \geq 1$ vidimo da je nužno $z \in S(0,1) \cap D$, pa je i $-\frac{1}{z} = -\overline{z} \in S(0,1) \cap D$; zato, da bi bilo $gz = a - \frac{1}{z} \in D$, mora vrijediti $a \in \{-1, 0, 1\}$. Raspisivanjem svakog od slučajeva dobivamo trojke

$$\left(S, z, -\frac{1}{z}\right), \quad |z| = 1, \qquad (TS, -\overline{\rho}, -\overline{\rho}) \qquad \text{i} \qquad \left(T^{-1}S = (ST)^2, \rho, \rho\right).$$

(2) Ako je $d = 1$, imamo $1 \geq |cz+d|^2 = |z+1|^2 = (\mathrm{Re}\, z+1)^2 + (\mathrm{Im}\, z)^2 \geq \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$, dakle svuda zapravo vrijede jednakosti, pa je nužno $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \rho$. Slijedi $gz = a - \frac{1}{z+d} = a - \frac{1}{1+\rho} = a + \rho$, što je u D ako i samo ako je $a \in \{0, 1\}$. Dakle, ovaj slučaj daje trojke

$$(ST, \rho, \rho) \qquad \text{i} \qquad (TST, \rho, -\overline{\rho}).$$

(3) Ako je $d = -1$, analogno kao u (2) dobivamo da je nužno $z = -\overline{\rho}$, i dobivamo trojke

$$(T^{-1}ST^{-1}, -\overline{\rho}, \rho) \qquad \text{i} \qquad (ST^{-1}, -\overline{\rho}, -\overline{\rho}).$$

Napokon, slučaj $c = -1$ zapravo je slučaj $c = 1$, s obzirom da u G vrijedi

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -1 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ 1 & -d \end{pmatrix}.$$

Grupiranjem svih dobivenih trojki kod kojih je $z \neq gz$, odnosno onih kod kojih je $z = gz$, dobivamo tvrdnje (ii) odnosno (iii).

(*iv*) Neka je $g \in G$. Želimo pokazati da je $g \in G'$. Označimo $z := g(2i)$. Prema dokazu tvrdnje (i), postoji $g' \in G'$ takav da je $g'z \in D$, tj. da je $(g'g)(2i) \in D$. Prema (ii) i (iii), to je moguće samo ako je $g'g = I$, odakle slijedi da je $g = g'^{-1}$, pa je posebno $g \in G'$. $\square$

Kvocijent H/G i rešetke u $\mathbb{C}$

Fundamentalna domena D predstavlja prirodan geometrijski prikaz kvocijenta H/G djelovanja grupe G na H. Još jedan koristan prikaz kvocijenta H/G dobit ćemo promatranjem skupa svih rešetki u $\mathbb{C}$.

Definicija 3.1.4. *Neka su $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ linearno nezavisni nad $\mathbb{R}$. Podgrupu*

$$\Gamma(\omega_1, \omega_2) := \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$$

*od $\mathbb{C}$ zovemo **rešetkom** u $\mathbb{C}$.*

Rešetka $\Gamma(\omega_1, \omega_2)$ slobodna je Abelova grupa s bazom $\{\omega_1, \omega_2\}$ (koja je ujedno baza realnog vektorskog prostora $\mathbb{C}$). Označimo sa $\mathscr{R}$ skup svih rešetki u $\mathbb{C}$ i neka je

$$M := \left\{(\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} \frac{\omega_1}{\omega_2} > 0\right\}.$$

Uočimo da se svaka rešetka u $\mathbb{C}$ može zapisati u obliku $\Gamma(\omega_1, \omega_2)$ sa $(\omega_1, \omega_2) \in M$. (Naime, za rešetku $\Gamma(\omega_1', \omega_2') = \Gamma(\omega_2', \omega_1')$ točno jedan od brojeva $\frac{\omega_1'}{\omega_2'}$ i $\frac{\omega_2'}{\omega_1'}$ ima strogo pozitivan imaginarni dio.) Dakle, funkcija

$$F : M \to \mathscr{R}, \qquad F(\omega_1, \omega_2) := \Gamma(\omega_1, \omega_2), \quad (\omega_1, \omega_2) \in M,$$

jest surjekcija.

Lema 3.1.5. *Za (ω_1, ω_2), $(\omega_1', \omega_2') \in M$ vrijedi*

$$\Gamma(\omega_1, \omega_2) = \Gamma(\omega_1', \omega_2')$$

ako i samo ako postoji $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ takva da je

$$\begin{pmatrix} \omega_1' \\ \omega_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

Dokaz. Kako su $\Gamma(\omega_1, \omega_2)$ i $\Gamma(\omega_1', \omega_2')$ slobodne Abelove grupe s bazama $\{\omega_1, \omega_2\}$ i $\{\omega_1', \omega_2'\}$, te su grupe jednake ako i samo ako postoji matrica $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ s cjelobrojnim koeficijentima i determinantom ± 1 takva da vrijedi (3.1). Međutim, (3.1) povlači

$$\operatorname{Im} \frac{\omega_1'}{\omega_2'} = \operatorname{Im} \frac{a\frac{\omega_1}{\omega_2} + b}{c\frac{\omega_1}{\omega_2} + d} = \frac{ad - bc}{\left|c\frac{\omega_1}{\omega_2} + d\right|^2} \operatorname{Im} \frac{\omega_1}{\omega_2}, \tag{3.2}$$

za što je nužno $ad - bc > 0$, dakle slučaj determinante -1 nije moguć. Slijedi tvrdnja. $\square$

Neka grupa $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ djeluje na $\mathscr{R}$ sa

$$\lambda\,\Gamma(\omega_1, \omega_2) := \Gamma(\lambda\omega_1, \lambda\omega_2), \qquad \lambda \in \mathbb{C}^*,\ (\omega_1, \omega_2) \in M. \tag{3.3}$$

Teorem 3.1.6. *Funkcija $R : H/G \to \mathscr{R}/\mathbb{C}^*$,*

$$Gz \overset{R}{\longmapsto} \mathbb{C}^*\,\Gamma(z, 1), \qquad z \in H,$$

dobro je definirana bijekcija. Dakle, kvocijent H/G na prirodan se način identificira sa skupom rešetki u $\mathbb{C}$ definiranih do na homotetiju.

Dokaz. Za $z_1, z_2 \in H$, koristeći lemu 3.1.5, imamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}^*\Gamma(z_1, 1) = \mathbb{C}^*\Gamma(z_2, 1) \quad &\Leftrightarrow \quad \Gamma(z_1, 1) = \Gamma(\lambda z_2, \lambda) \quad \text{za neki } \lambda \in \mathbb{C}^* \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} z_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda z_2 \\ \lambda \end{pmatrix} \quad \text{za neke } \lambda \in \mathbb{C}^* \text{ i } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \\
&\Leftrightarrow \quad z_1 = \frac{az_2 + b}{cz_2 + d} \quad \text{za neki } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \\
&\Leftrightarrow \quad Gz_1 = Gz_2.
\end{aligned}$$

Odatle slijedi da je R dobro definirana injekcija. Kako je F surjekcija, a za svaki $(\omega_1, \omega_2) \in M$ vrijedi

$$\mathbb{C}^*\Gamma(\omega_1, \omega_2) = \mathbb{C}^*\Gamma\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}, 1\right) = R\left(G\frac{\omega_1}{\omega_2}\right),$$

R je i surjekcija. Dakle, R je bijekcija. □

3.2 Modularne funkcije i modularne forme

Definicija 3.2.1. *Neka je $k \in \mathbb{Z}$. Za meromorfnu funkciju $f : H \to \overline{\mathbb{C}}$ koja zadovoljava*

$$f(z) = \frac{1}{(cz + d)^{2k}}\, f\left(\frac{az + b}{cz + d}\right), \qquad g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}),\ z \in H, \tag{3.4}$$

kažemo da je ***slabo modularna funkcija težine*** *$2k$.*

Kako je djelovanje grupe G na H vjerno, njene elemente $g \in G$ možemo identificirati s funkcijama $H \to \mathbb{C}$, $z \mapsto gz$. Uz tu identifikaciju, primijetimo da je za svaki $g \in G$

$$g'(z) = \frac{1}{(cz + d)^2}, \qquad z \in H,$$

pa relaciju (3.4) možemo ekvivalentno zapisati u obliku

$$f(z) = g'(z)^k f(gz). \tag{3.5}$$

Lema 3.2.2. *Neka je $k \in \mathbb{Z}$. Meromorfna funkcija $f : H \to \overline{\mathbb{C}}$ slabo je modularna funkcija težine $2k$ ako i samo ako vrijedi*

$$f(z+1) = f(z) \qquad i \qquad f\left(-\frac{1}{z}\right) = z^{2k} f(z), \qquad z \in H. \tag{3.6}$$

Dokaz. Neka je $f : H \to \overline{\mathbb{C}}$ meromorfna funkcija. Označimo sa G_0 skup svih $g \in G$ koji relaciju (3.4), tj. (3.5), zadovoljavaju za sve $z \in H$. Primijetimo da su relacije (3.6) posebni slučajevi relacije (3.4), za $g = T$ odnosno $g = S$, pa je za dokaz leme potrebno pokazati samo da $S, T \in G_0$ povlači $G \subseteq G_0$.

Uočimo da je G_0 podgrupa grupe G: očito je $I \in G_0$; za $g_1, g_2 \in G_0$ imamo, po (3.5),

$$f(z) = g_2'(z)^k f(g_2 z) = g_2'(z)^k g_1'(g_2 z)^k f(g_1 g_2 z) = (g_1 g_2)'(z)^k f(g_1 g_2 z), \qquad z \in H,$$

dakle $g_1 g_2 \in G_0$; napokon, ako je $g \in G_0$, iz (3.5) dobivamo da je

$$f(gz) = \left(\frac{1}{g'(z)}\right)^k f(z) = (g^{-1})'(gz)^k f(g^{-1} g z), \qquad z \in H,$$

što supstitucijom $w := gz$ prelazi u

$$f(w) = (g^{-1})'(w)^k f(g^{-1} w), \qquad w \in H,$$

pa je i $g^{-1} \in G_0$. Zato, ako su $T, S \in G_0$, G_0 sadrži i podgrupu od G generiranu sa S i T, a to je, po teoremu 3.1.3.(iv), cijela grupa G. Slijedi tvrdnja. □

Prva relacija u (3.6) govori da su sve slabo modularne funkcije periodične s periodom 1. Takve funkcije $f : H \to \overline{\mathbb{C}}$ potpuno su određene svojim ponašanjem na vertikalnoj pruzi $\left\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \times \langle 0, +\infty \rangle$. Zamjena varijabli $z \mapsto e^{2\pi i z}$ tu prugu bijektivno transformira u probušen krug $K^\times(0,1)$, tako da intervali $\left\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \times \{y\}$, za $y > 0$, prelaze u kružnice $S(0, e^{-2\pi y})$. Radijus odgovarajuće kružnice strogo je padajuća funkcija od y, i pada prema 0 kad $y \nearrow +\infty$, tako da se, ako postoji $\lim_{\mathrm{Im}\, z \to +\infty} f(z)$, odgovarajuća funkcija $\tilde{f} : K^\times(0,1) \to \overline{\mathbb{C}}$ neprekidno proširuje u 0 vrijednošću tog limesa. Ako je to proširenje meromorfna funkcija, Laurentov razvoj funkcije $\tilde{f}$ u okolini 0 zapravo će biti Fourierov razvoj funkcije f. Uz ovu motivaciju, uvedimo precizno odgovarajuće pojmove i rezultate.

Lema 3.2.3. *Neka je $f : H \to \overline{\mathbb{C}}$ meromorfna funkcija koja je periodična s periodom 1. Tada postoji jedinstvena meromorfna funkcija $\tilde{f} : K^\times(0,1) \to \overline{\mathbb{C}}$ takva da je*

$$f(z) = \tilde{f}\left(e^{2\pi i z}\right), \qquad z \in H. \tag{3.7}$$

Dokaz. Kako je za $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$,

$$e^{2\pi iz} = e^{-2\pi y} e^{2\pi ix},$$

očito je slika poluravnine H po funkciji $z \mapsto e^{2\pi iz}$ probušen krug $K^\times(0, 1)$. Nadalje, kako je za $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

$$e^{2\pi iz_1} = e^{2\pi iz_2} \quad \Leftrightarrow \quad z_1 - z_2 \in \mathbb{Z},$$

a f je periodična s periodom 1 pa $z_1 - z_2 \in \mathbb{Z}$ povlači $f(z_1) = f(z_2)$, zaključujemo da postoji jedinstvena funkcija $\tilde{f} : K^\times(0, 1) \to \overline{\mathbb{C}}$ takva da vrijedi (3.7).

Preostaje pokazati da je $\tilde{f}$ meromorfna funkcija. U tu svrhu, primijetimo da pravilo $z \longmapsto e^{2\pi iz}$ definira holomorfnu bijekciju $\left\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \times \langle 0, +\infty\rangle \to K^\times(0, 1)\backslash\mathbb{R}_{<0}$ s holomorfnim inverzom $w \mapsto \frac{1}{2\pi i} \operatorname{Ln} w$, dakle vrijedi

$$\tilde{f}(w) = f\left(\frac{1}{2\pi i} \operatorname{Ln} w\right), \qquad w \in K^\times(0, 1)\backslash\mathbb{R}_{<0}.$$

Slično se dobije i da vrijedi

$$\tilde{f}(w) = f\left(\frac{1}{2\pi i} \ln_0 w\right), \qquad w \in K^\times(0, 1)\backslash\mathbb{R}_{>0}.$$

Dakle, $\tilde{f}$ je lokalno kompozicija holomorfne bijekcije s holomorfnim inverzom i meromorfne funkcije pa je, po lemi 1.1.50, meromorfna funkcija. □

Definicija 3.2.4. *Neka je $f : H \to \overline{\mathbb{C}}$ meromorfna funkcija koja je periodična s periodom 1. Ako se funkcija $\tilde{f} : K^\times(0, 1) \to \overline{\mathbb{C}}$ proširuje do meromorfne funkcije na $K(0, 1)$, kažemo da je f* ***meromorfna u beskonačnosti*** *i definiramo*

$$v_\infty(f) := v_0(\tilde{f}).$$

Ako je 0 uklonjiv singularitet funkcije $\tilde{f}$, kažemo da je f ***holomorfna u beskonačnosti*** *i definiramo* ***vrijednost funkcije f u beskonačnosti*** *sa*

$$f(\infty) := \lim_{q \to 0} \tilde{f}(q).$$

Definicija 3.2.5. *Neka je $k \in \mathbb{Z}$. Slabo modularnu funkciju $f : H \to \overline{\mathbb{C}}$ težine $2k$ koja je meromorfna u beskonačnosti zovemo* ***modularnom funkcijom težine*** *$2k$.*

Definicija 3.2.6. *Neka je $k \in \mathbb{Z}$. Modularnu funkciju $f : H \to \overline{\mathbb{C}}$ težine $2k$ koja je holomorfna na H i holomorfna u beskonačnosti zovemo* ***modularnom formom težine*** *$2k$. Ako je uz to $f(\infty) = 0$, f zovemo* ***kusp formom težine*** *$2k$.*

Ako je f modularna forma i $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ Taylorov red proširenja funkcije $\tilde{f}$ oko 0, vrijedi

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z}, \quad z \in H, \qquad f(\infty) = a_0.$$

Obratno, ako je $f : H \to \mathbb{C}$ takva da za neki red potencija $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ (s radijusom konvergencije ≥ 1) vrijedi

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z}, \qquad z \in H,$$

tj. vrijedi

$$f(z) = \tilde{f}\left(e^{2\pi i z}\right), \qquad z \in H,$$

gdje je $\tilde{f} : K(0,1) \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija definirana redom potencija $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, tada je f očito holomorfna na H, holomorfna u beskonačnosti i periodična s periodom 1, tj. zadovoljava relaciju $f(Tz) = f(z)$ za sve $z \in H$. Ako za neki $k \in \mathbb{Z}$ vrijedi i $f(Sz) = z^{2k} f(z)$ za sve $z \in H$, po lemi 3.2.2 f je modularna forma težine $2k$. Time smo dokazali sljedeću propoziciju.

Propozicija 3.2.7. *Neka je $k \in \mathbb{Z}$. Funkcija $f : H \to \mathbb{C}$ modularna je forma težine $2k$ ako i samo ako vrijede sljedeće tvrdnje:*

(i) Postoji red potencija $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ takav da je

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z}, \qquad z \in H.$$

(ii) Vrijedi

$$f\left(-\frac{1}{z}\right) = z^{2k} f(z), \qquad z \in H.$$

Modularne funkcije kao funkcije na $\mathscr{R}$

U ovom odjeljku nastavljamo graditi vezu između djelovanja grupe G na H i skupa $\mathscr{R}$, temeljenu na “dobrom” ponašanju baza rešetki u $\mathbb{C}$ u odnosu na djelovanje grupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ (lema 3.1.5), i to na razini modularnih funkcija.

Definicija 3.2.8. *Neka je $k \in \mathbb{Z}$. Za funkciju $F : \mathscr{R} \to \overline{\mathbb{C}}$ koja zadovoljava*

$$F(\lambda\Gamma) = \lambda^{-2k} F(\Gamma), \qquad \lambda \in \mathbb{C}^*, \ \Gamma \in \mathscr{R},$$

kažemo da je ***težine*** *$2k$.*

Propozicija 3.2.9. *Neka je $k \in \mathbb{Z}$. Relacija*

$$F(\Gamma(\omega_1, \omega_2)) = \omega_2^{-2k} f\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right), \qquad (\omega_1, \omega_2) \in M, \tag{3.8}$$

uspostavlja bijekciju između skupa svih funkcija $F : \mathscr{R} \to \overline{\mathbb{C}}$ težine $2k$ i skupa svih funkcija $f : H \to \overline{\mathbb{C}}$ za koje vrijedi

$$f(z) = \frac{1}{(cz+d)^{2k}} f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right), \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G,\ z \in H. \tag{3.9}$$

Dokaz. Neka je $F : \mathscr{R} \to \overline{\mathbb{C}}$ funkcija težine $2k$. Imamo

$$F(\Gamma(\omega_1, \omega_2)) = \omega_2^{-2k} F\left(\Gamma\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}, 1\right)\right), \qquad (\omega_1, \omega_2) \in M,$$

pa iz (3.8) vidimo da je jedini kandidat za odgovarajuću funkciju f funkcija

$$f : H \to \overline{\mathbb{C}}, \qquad f(z) := F(\Gamma(z, 1)), \quad z \in H.$$

Ona zadovoljava i (3.9): imamo

$$\begin{aligned} f(z) &= F(\Gamma(z, 1)) \\ &= F\left(\Gamma\left(az+b, cz+d\right)\right) && \text{(po lemi 3.1.5)} \\ &= \frac{1}{(cz+d)^{2k}} F\left(\Gamma\left(\frac{az+b}{cz+d}, 1\right)\right) && \text{(jer je } F \text{ težine } 2k) \\ &= \frac{1}{(cz+d)^{2k}} f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right), && \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}),\ z \in H. \end{aligned}$$

Time smo pokazali da za danu funkciju $F : \mathscr{R} \to \overline{\mathbb{C}}$ težine $2k$ postoji jedinstvena funkcija $f : H \to \overline{\mathbb{C}}$ takva da vrijede (3.8) i (3.9).

Obratno, neka je $f : H \to \overline{\mathbb{C}}$ takva da vrijedi (3.9). Da bi vrijedilo (3.8), odgovarajuća funkcija F mora biti

$$F : \mathscr{R} \to \overline{\mathbb{C}}, \qquad F(\Gamma(\omega_1, \omega_2)) := \omega_2^{-2k} f\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right), \quad (\omega_1, \omega_2) \in M.$$

Iz leme 3.1.5 vidimo da je, da bismo pokazali da je F dobro definirana, dovoljno provjeriti da za $(\omega_1, \omega_2) \in M$ i $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ vrijedi

$$\omega_2^{-2k} f\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right) = (c\omega_1 + d\omega_2)^{-2k} f\left(\frac{a\omega_1 + b\omega_2}{c\omega_1 + d\omega_2}\right),$$

tj., množenjem sa ω_2^k, da je

$$f\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right) = \frac{1}{\left(c\frac{\omega_1}{\omega_2} + d\right)^{2k}} f\left(\frac{a\frac{\omega_1}{\omega_2} + b}{c\frac{\omega_1}{\omega_2} + d}\right),$$

što vrijedi jer po pretpostavci f zadovoljava (3.9). Imamo i

$$F(\lambda\Gamma(\omega_1, \omega_2)) = F(\Gamma(\lambda\omega_1, \lambda\omega_2)) = (\lambda\omega_2)^{-2k} f\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right) = \lambda^{-2k} F(\omega_1, \omega_2)$$

za sve $\lambda \in \mathbb{C}^*$ i $(\omega_1, \omega_2) \in M$, dakle F je težine $2k$. Time smo pokazali da za danu funkciju $f : H \to \overline{\mathbb{C}}$ koja zadovoljava (3.9) postoji jedinstvena funkcija $F : \mathscr{R} \to \overline{\mathbb{C}}$ težine $2k$ takva da vrijedi (3.8).

Zaključujemo da vrijedi tvrdnja propozicije. □

3.3 Eisensteinov red

Lema 3.3.1. *Neka je $k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_{\geq 3}$. Red*

$$G_k(z) := \sum_{m,n}{}' \frac{1}{(mz + n)^{2k}},$$

pri čemu $\sum'_{m,n}$ označava sumaciju po $(m, n) \in \mathbb{Z}^2 \backslash \{(0, 0)\}$, konvergira apsolutno na H.

Dokaz. Neka je $z \in H$. Neka je $\Gamma := \Gamma(z, 1)$. Primijetimo da je

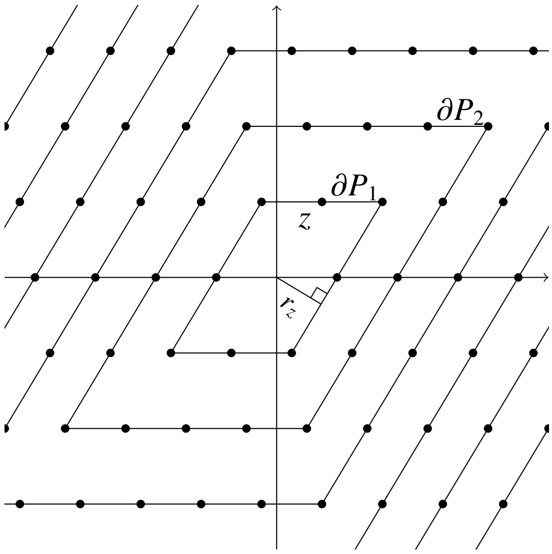
$$G_k(z) = \sum_{\omega \in \Gamma \backslash \{0\}} \frac{1}{\omega^{2k}}.$$

Neka je, za $j \in \mathbb{Z}_{>0}$, P_j paralelogram s vrhovima $j(1 + z)$, $j(-1 + z)$, $j(-1 - z)$ i $j(1 - z)$. Označimo sa r_z udaljenost ishodišta od pravca kroz točke $1-z$ i $1+z$ (slika 3.2). r_z je duljina visine paralelograma s vrhovima 0, 1, $1 + z$ i z. Računanjem površine tog paralelograma kao produkta stranice i pripadne visine na dva načina, dolazimo do formule

$$r_z = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}. \tag{3.10}$$

Stavimo

$$R_z := \min_{w \in \partial P_1} |w| = d(0, \partial P_1) = \min\{r_z, \operatorname{Im} z\} > 0.$$



Slika 3.2: Particija skupa $\Gamma\backslash\{0\}$ pomoću paralelograma P_j, $j \in \mathbb{Z}_{>0}$

Kako su paralelogrami P_j slike paralelograma P_1 po homotetiji s centrom 0 i koeficijentom j, vrijedi

$$\min_{w\in\partial P_j} |w| = j \min_{w\in\partial P_1} |w| = jR_z, \qquad j \in \mathbb{Z}_{>0}. \tag{3.11}$$

Skupovi $A_j := \partial P_j \cap \Gamma$, $j \in \mathbb{Z}_{>0}$, čine particiju skupa $\Gamma\backslash\{0\}$ (slika 3.2). Pritom odgovarajuća particija skupa $\mathbb{Z}^2\backslash\{(0,0)\}$ na skupove

$$B_j := \Big\{(m,n) \in \mathbb{Z}^2\backslash\{(0,0)\} : mz+n \in A_j\Big\}, \qquad j \in \mathbb{Z}_{>0},$$

ne ovisi o izboru $z \in H$, i vrijedi

$$|B_j| = |A_j| = (2j+1)^2 - (2j-1)^2 = 8j, \qquad j \in \mathbb{Z}_{>0}.$$

Imamo

$$\begin{aligned}\sum_{\omega\in\Gamma\backslash\{0\}} \left|\frac{1}{\omega^{2k}}\right| &= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{\omega\in A_j} \frac{1}{|\omega|^{2k}} \overset{(3.11)}{\leq} \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{\omega\in A_j} \frac{1}{(jR_z)^{2k}} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{8j}{(jR_z)^{2k}} = \\ &= \frac{8}{R_z^{2k}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{2k-1}} = \frac{8\zeta(2k-1)}{R_z^{2k}} < \infty,\end{aligned}$$

dakle red $G_k(z)$ konvergira apsolutno. □

Označimo $S := (\mathbb{Z}_{>0} \times \mathbb{Z}) \cup (\{0\} \times \mathbb{Z}_{>0})$. Zbog bezuvjetne konvergencije reda G_k na H, vrijedi

$$G_k(z) = \sum_{(m,n)\in S} \left(\frac{1}{(mz+n)^{2k}} + \frac{1}{(-mz-n)^{2k}} \right), \qquad z \in H,$$

pa je u slučaju $k \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}_{\geq 1}$, tj. kad je $2k$ neparan, $G_k = 0$ na H. Zato ćemo u nastavku gledati samo slučaj $k \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$.

Lema 3.3.2. *Neka je $k \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$. Funkcija $G_k : H \to \mathbb{C}$ je 1-periodična.*

Dokaz. Za $z \in H$, s obzirom da red G_k konvergira apsolutno na H (lema 3.3.1), imamo

$$G_k(z+1) = \sum_{m,n}{}' \frac{1}{(mz+m+n)^{2k}} = \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{n^{2k}} + \sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(mz+m+n)^{2k}},$$

što, supstitucijom $n \mapsto n - m$ u unutarnjim sumama, prelazi u

$$G_k(z+1) = \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{n^{2k}} + \sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(mz+n)^{2k}} = \sum_{m,n}{}' \frac{1}{(mz+n)^{2k}} = G_k(z),$$

dakle G_k je 1-periodična. □

Lema 3.3.3. *Neka je $k \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$. Red G_k konvergira normalno na poluravninama $H_\varepsilon := \mathbb{R} \times [\varepsilon, +\infty\rangle$, $\varepsilon > 0$. Funkcija $G_k : H \to \mathbb{C}$ je holomorfna.*

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$. Zahvaljujući 1-periodičnosti funkcije G_k, da bismo dokazali da red G_k konvergira normalno na H_ε, dovoljno je pokazati da konvergira normalno na skupu $S_\varepsilon := \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \times [\varepsilon, +\infty\rangle$. Uz oznake iz dokaza leme 3.3.1, za sve $z = (x, y) \in S_\varepsilon$ vrijedi

$$r_z \overset{(3.10)}{=} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{y^2}+1}} \geq \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4\varepsilon^2}+1}} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\frac{1}{4}+\varepsilon^2}} \overset{(3.10)}{=} r_{\frac{1}{2}+\varepsilon i}$$

pa je

$$R_z = \min\{r_z, \operatorname{Im} z\} \geq \min\left\{r_{-\frac{1}{2}+\varepsilon i}, \varepsilon\right\} =: R > 0, \qquad z \in S_\varepsilon.$$

Koristeći particiju $\{B_j, j \in \mathbb{Z}_{>0}\}$ skupa $\mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$ iz dokaza leme 3.3.1, dobivamo da za $j \in \mathbb{Z}_{>0}$ i $(m,n) \in B_j$ vrijedi

$$\left| \frac{1}{(mz+n)^{2k}} \right| \leq \frac{1}{(jR_z)^{2k}} \leq \frac{1}{(jR)^{2k}}, \qquad z \in H_\varepsilon,$$

odakle, zbog

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{(m,n)\in B_j} \frac{1}{(jR)^{2k}} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{8j}{(jR)^{2k}} = \frac{8\zeta(2k-1)}{R^{2k}} < \infty,$$

zaključujemo da red G_k konvergira normalno na S_ε.

Dakle, red G_k konvergira normalno na poluravninama $H_\varepsilon := \mathbb{R} \times [\varepsilon, +\infty\rangle$, $\varepsilon > 0$. Zato konvergira normalno i na svakom kompaktu u H. Odavde, s obzirom da su funkcije $z \mapsto \frac{1}{(mz+n)^{2k}}$, $(m, n) \in \mathbb{Z}^2 \backslash \{0\}$, holomorfne na H, po propoziciji 1.1.25 i korolaru 1.1.26.(iii) slijedi da je funkcija G_k holomorfna na H. $\square$

Lema 3.3.4. *Neka je $k \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$. Funkcija $G_k : H \to \mathbb{C}$ holomorfna je u beskonačnosti i vrijedi $G_k(\infty) = 2\zeta(2k)$.*

Dokaz. Trebamo pokazati da je

$$\lim_{\operatorname{Im} z \to +\infty} G_k(z) = 2\zeta(2k). \tag{3.12}$$

To je prirodno očekivati, s obzirom da je

$$\lim_{\operatorname{Im} z \to +\infty} \frac{1}{(mz + n)^{2k}} = \begin{cases} \frac{1}{n^{2k}}, & \text{ako je } m = 0, \\ 0, & \text{ako je } m \neq 0, \end{cases} \qquad (m, n) \in \mathbb{Z}^2 \backslash \{(0, 0)\},$$

pa vrijedi

$$\sum_{m,n}{}' \lim_{\operatorname{Im} z \to +\infty} \frac{1}{(mz + n)^{2k}} = 2\zeta(2k). \tag{3.13}$$

Definirajmo, za $(m, n) \in \mathbb{Z}^2 \backslash \{(0, 0)\}$,

$$f_{m,n} : H \to \mathbb{C}, \qquad f_{m,n}(z) := \frac{1}{(mz + n)^{2k}}, \quad z \in H.$$

Neka je σ proizvoljna bijekcija $\mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}^2 \backslash \{(0, 0)\}$. Imamo

$$G_k(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{\sigma_n}(z), \qquad z \in H.$$

Neka je $\varepsilon > 0$. Upravo smo pokazali da red G_k konvergira normalno na H_1 (lema 3.3.3), pa postoji $N_1 \in \mathbb{Z}_{>0}$ takav da za $N \geq N_1$ vrijedi

$$\left| G_k(z) - \sum_{n=1}^{N} f_{\sigma_n}(z) \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \left| f_{\sigma_n}(z) \right| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad z \in H_1.$$

Zbog (3.13), postoji $N_2 \in \mathbb{Z}_{>0}$ takav da za $N \geq N_2$ vrijedi

$$\left| \sum_{n=1}^{N} \lim_{\operatorname{Im} z \to +\infty} f_{\sigma_n}(z) - 2\zeta(2k) \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Neka je $N_0 := \max\{N_1, N_2\}$. Neka je $y \geq 1$ takav da za svaki $n \in \{1, 2, \ldots, N_0\}$ vrijedi

$$\left| f_{\sigma_n}(z) - \lim_{\operatorname{Im} z \to +\infty} f_{\sigma_n}(z) \right| < \frac{\varepsilon}{3N_0}, \qquad \operatorname{Im} z > y.$$

Tada za $\operatorname{Im} z > y$ vrijedi

$$\begin{aligned}
&|G_k(z) - 2\zeta(2k)| \leq \\
&\quad \leq \left| G_k(z) - \sum_{n=1}^{N_0} f_{\sigma_n}(z) \right| + \sum_{n=1}^{N_0} \left| f_{\sigma_n}(z) - \lim_{\operatorname{Im} z \to +\infty} f_{\sigma_n}(z) \right| + \left| \sum_{n=1}^{N_0} \lim_{\operatorname{Im} z \to +\infty} f_{\sigma_n}(z) - 2\zeta(2k) \right| < \\
&\quad < \frac{\varepsilon}{3} + N_0 \frac{\varepsilon}{3N_0} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Dakle, vrijedi (3.12). □

Teorem 3.3.5. *Neka je $k \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$. Funkcija $G_k : H \to \mathbb{C}$ modularna je forma težine $2k$.*

Dokaz. Dosad smo pokazali da G_k zadovoljava sve uvjete iz definicije modularne forme osim uvjeta modularnosti (3.4). Za provjeru tog uvjeta, po propoziciji 3.2.9 dovoljno je pokazati da je funkcija

$$F : \mathscr{R} \to \mathbb{C}, \qquad F(\Gamma(\omega_1, \omega_2)) := \omega_2^{-2k} G_k\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right) = \sum_{m,n}{}' \frac{1}{(m\omega_1 + n\omega_2)^{2k}}, \quad (\omega_1, \omega_2) \in M,$$

težine $2k$, tj. da vrijedi

$$\sum_{m,n}{}' \frac{1}{(m(\lambda\omega_1) + n(\lambda\omega_2))^{2k}} = \lambda^{-2k} \sum_{m,n}{}' \frac{1}{(m\omega_1 + n\omega_2)^{2k}}, \qquad \lambda \in \mathbb{C}^*,$$

a to je očito. Time je dokaz završen. □

Definicija 3.3.6. *Za $k \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$, modularnu formu G_k zovemo* ***Eisensteinovim redom težine*** *$2k$.*

Bernoullijevi brojevi

Vidjeli smo da je $G_k(\infty) = 2\zeta(2k)$, $k \in \mathbb{Z}_{>1}$. Postavlja se pitanje računanja egzaktnih vrijednosti zeta funkcije u parnim prirodnim brojevima. Pomalo neočekivano rješenje tog problema daje niz Bernoullijevih brojeva.

Definirajmo $P : K(0, 2\pi) \to \mathbb{C}$,

$$P(z) := \begin{cases} \frac{z}{e^z - 1}, & \text{ako je } z \neq 0, \\ 1, & \text{ako je } z = 0, \end{cases} \qquad |z| < 2\pi.$$

Kako je funkcija $z \mapsto \frac{z}{e^z-1}$ holomorfna na $K^\times(0, 2\pi)$, a 0 je njen uklonjiv singularitet sa $\lim_{z \to 0} P(z) = 1$, P je holomorfna funkcija.

Definicija 3.3.7. *Elemente niza* $(B_n, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$*, gdje je*

$$B_n := P^{(n)}(0), \qquad n \in \mathbb{Z}_{\geq 0},$$

*zovemo **Bernoullijevim brojevima**.*

Razvojem funkcije P u Taylorov red oko 0 dobivamo

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n, \qquad |z| < 2\pi. \tag{3.14}$$

Lema 3.3.8. *(i) Vrijedi*

$$B_0 = 1, \qquad B_1 = -\frac{1}{2}, \qquad B_{2n+1} = 0, \quad n \in \mathbb{Z}_{>0}. \tag{3.15}$$

(ii) Bernoullijevi brojevi zadovoljavaju rekurzivnu formulu

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_k = 0, \qquad n \in \mathbb{Z}_{>1}. \tag{3.16}$$

Dokaz. (i) Očito je $B_0 = P(0) = 1$. Uočimo da na $K^{\times}(0, 2\pi)$ vrijedi

$$-z = \frac{z}{e^z - 1} - \frac{-z}{e^{-z} - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} (-z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - (-1)^n) \frac{B_n}{n!} z^n,$$

odakle, po korolaru 1.1.31, slijedi da je $B_1 = -\frac{1}{2}$ dok za neparne $n \geq 3$ vrijedi $B_n = 0$.

(ii) Imamo

$$1 = \frac{e^z - 1}{z} P(z) \overset{(3.14)}{=} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n \right), \quad 0 < |z| < 2\pi.$$

Kako su redovi na desnoj strani apsolutno konvergentni (teorem 1.1.28.(a)), slijedi (propozicija 1.2.10)

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k+1)!} \frac{B_k}{k!} \right) z^n, \qquad 0 < |z| < 2\pi,$$

tj., množenjem sa $(n+1)!$,

$$(n+1)! = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_k \right) z^n, \qquad 0 < |z| < 2\pi.$$

Po korolaru 1.1.31, slijedi (3.16). □

Uvrštavanjem (3.15) u (3.14) dobivamo

$$P(z) = 1 - \frac{z}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} z^{2n}, \qquad |z| < 2\pi. \tag{3.17}$$

Formula (3.16) omogućuje pak prilično lagan izračun vrijednosti B_{2n} za male n. Dobivamo primjerice

$$B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_6 = \frac{1}{42}, \quad B_8 = -\frac{1}{30}, \quad B_{10} = \frac{5}{66}, \quad B_{12} = -\frac{691}{2730}.$$

Propozicija 3.3.9. *Vrijedi*

$$\zeta(2n) = \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n-1}}{(2n)!} B_{2n} \pi^{2n}, \qquad n \in \mathbb{Z}_{>0}. \tag{3.18}$$

Dokaz. Propoziciju ćemo dokazati razvojem funkcije $z \mapsto z \operatorname{ctg} z$, na domeni $K^{\times}(0, \pi)$, u red na dva različita načina. S jedne strane, vrijedi

$$\begin{aligned} z \operatorname{ctg} z &= iz \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}} = iz \frac{e^{2iz} + 1}{e^{2iz} - 1} = iz \left(1 + \frac{2}{e^{2iz} - 1}\right) = iz + P(2iz) = \\ &\overset{(3.17)}{=} 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} (2iz)^{2n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} z^{2n}. \end{aligned} \tag{3.19}$$

S druge strane, imamo

$$\begin{aligned} z \operatorname{ctg} z &\overset{(1.6)}{=} z \left(\frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{z + n\pi} \right) \right) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^2}{z^2 - (n\pi)^2} = \\ &= 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^2}{(n\pi)^2} \frac{1}{1 - \left(\frac{z}{n\pi}\right)^2} = 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{2k}}{n^{2k} \pi^{2k}}. \end{aligned}$$

Primijetimo da dvostruki red na desnoj strani konvergira apsolutno:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{z^{2k}}{n^{2k} \pi^{2k}} \right| \le \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left| \frac{z}{\pi} \right|^{2k} = \zeta(2) \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{z}{\pi} \right|^{2k} = \zeta(2) \left(\frac{1}{1 - \left|\frac{z}{\pi}\right|^2} - 1 \right) < \infty,$$

pa u njemu smijemo promijeniti poredak sumacije. Dobivamo

$$z \operatorname{ctg} z = 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} \frac{z^{2k}}{\pi^{2k}} = 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \zeta(2k) \frac{z^{2k}}{\pi^{2k}} = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\zeta(2k)}{\pi^{2k}} z^{2k}. \tag{3.20}$$

Po korolaru 1.1.31, iz (3.19) i (3.20) slijedi

$$\frac{(-1)^n 2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} = -\frac{2\zeta(2n)}{\pi^{2n}}, \qquad n \in \mathbb{Z}_{>0},$$

tj.

$$\zeta(2n) = \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n-1}}{(2n)!} B_{2n} \pi^{2n}, \qquad n \in \mathbb{Z}_{>0}. \qquad \square$$

Dobivamo primjerice

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \quad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{3^3 \cdot 5 \cdot 7}, \quad \zeta(8) = \frac{\pi^8}{2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7}$$

i, uvrštavanjem u formulu $G_k(\infty) = 2\zeta(2k)$,

$$G_2(\infty) = \frac{\pi^4}{45}, \quad G_3(\infty) = \frac{2\pi^6}{3^3 \cdot 5 \cdot 7}, \quad G_4(\infty) = \frac{\pi^8}{3^3 \cdot 5^2 \cdot 7}. \tag{3.21}$$

Razvoj funkcije G_k u Fourierov red

Radi jednostavnosti zapisa, uvedimo oznaku

$$q := e^{2\pi i z}, \qquad z \in H.$$

Lema 3.3.10. *Neka je $k \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$. Vrijedi*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z+n)^k} = \frac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} q^n, \qquad z \in H. \tag{3.22}$$

Dokaz. Iz (1.6) slijedi

$$\pi \operatorname{ctg} \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n} \right), \qquad z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{Z}.$$

S druge strane, imamo

$$\pi \operatorname{ctg} \pi z = \pi i \frac{q+1}{q-1} = \pi i \left(1 + \frac{2}{q-1} \right) = \pi i - 2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} q^n, \qquad z \in H.$$

Dakle, vrijedi

$$\frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n} \right) = \pi i - 2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} q^n, \qquad z \in H.$$

Po teoremu 1.3.1, odnosno zbog neprekidnosti funkcije $z \mapsto q$ i lokalno uniformne konvergencije geometrijskog reda (Taylorova reda funkcije $z \mapsto \frac{1}{1-z}$) na $K^{\times}(0,1)$ (teorem 1.1.33), oba reda holomorfnih funkcija u gornjoj jednakosti konvergiraju lokalno uniformno pa ih smijemo derivirati član po član (teorem 1.1.21). Dobivamo da za $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ vrijedi

$$(-1)^{k-1}(k-1)!\left(\frac{1}{z^k} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(z-n)^k} + \frac{1}{(z+n)^k}\right)\right) = -(2\pi i)^k \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} q^n, \qquad z \in H.$$

Lako se vidi da u slučaju $k \geq 2$ red $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(z-n)^k} + \frac{1}{(z+n)^k}\right)$ konvergira apsolutno, pa vrijedi i (3.22). □

Za $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ i $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, uvedimo oznaku

$$\sigma_k(n) := \sum_{\substack{d \in \mathbb{Z}_{>0} \\ d \mid n}} d^k.$$

Propozicija 3.3.11. *Za $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ vrijedi*

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}}{}' \frac{1}{(mz+n)^{2k}} = 2\zeta(2k) + 2\frac{(2\pi i)^{2k}}{(2k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{2k-1}(n)\, q^n, \qquad z \in H.$$

Ovdje $\sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}}{}'$ označava uobičajenu dvostruku sumu po m i n, bez člana indeksiranog sa $(m,n) = (0,0)$.

Dokaz. Imamo

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}}{}' \frac{1}{(mz+n)^{2k}} = 2\zeta(2k) + 2\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(mz+n)^{2k}}, \qquad z \in H.$$

Primjenom formule (3.22), uz supstituciju $k \mapsto 2k$ i $z \mapsto mz$, za svaki $m \in \mathbb{Z}_{>0}$, slijedi

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}}{}' \frac{1}{(mz+n)^{2k}} = 2\zeta(2k) + 2\frac{(2\pi i)^{2k}}{(2k-1)!} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} n^{2k-1} q^{mn}, \qquad z \in H. \tag{3.23}$$

Uočimo da red $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} n^{2k-1} q^{mn}$ konvergira apsolutno za $q \in K(0,1)$: vrijedi

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} n^{2k-1} q^{mn} &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{2k-1} \sum_{m=1}^{\infty} (q^n)^m = \sum_{n=1}^{\infty} n^{2k-1}\left(\frac{1}{1-q^n} - 1\right) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{2k-1} \frac{q^n}{1-q^n} \leq \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} (n+2k-1)(n+2k-2)\cdots(n+1)\, \frac{q^n}{1-q} = \\
&= \frac{1}{1-q}\left(\frac{(2k-1)!}{(1-q)^{2k}} - 1\right) < \infty, \qquad 0 \leq q < 1.
\end{aligned}$$

Zbog (3.23), slijedi da red $\sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum'_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(mz+n)^{2k}}$ konvergira čak i u slučaju $k = 1$. Također, na desnoj strani u (3.23) smijemo po volji mijenjati poredak sumacije. Grupiranjem po potencijama od q dobivamo

$$\begin{aligned}\sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}{}' \frac{1}{(mz+n)^{2k}} &= 2\zeta(2k) + 2\frac{(2\pi i)^{2k}}{(2k-1)!}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\substack{d\in\mathbb{Z}_{>0}\\ d|n}} d^{2k-1}q^n\\ &= 2\zeta(2k) + 2\frac{(2\pi i)^{2k}}{(2k-1)!}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{2k-1}(n)\,q^n, \qquad z\in H. \qquad \square\end{aligned}$$

Korolar 3.3.12. *Za $k \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ vrijedi*

$$G_k(z) = 2\zeta(2k) + 2\frac{(2\pi i)^{2k}}{(2k-1)!}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{2k-1}(n)\,q^n, \qquad z\in H.$$

3.4 Prostor modularnih formi

Broj nultočaka i polova modularne funkcije

Propozicija 3.4.1. *Neka je $k \in \mathbb{Z}$ i neka je $f : H \to \overline{\mathbb{C}}$ modularna funkcija težine $2k$. Vrijedi*

$$\nu_{gp}(f) = \nu_p(f), \qquad p\in H,\ g = \begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in G. \tag{3.24}$$

Dokaz. Kako je f meromorfna funkcija, za proizvoljan $n \in \mathbb{Z}$ i funkcije $z \mapsto \frac{f(z)}{(z-p)^n}$ i $z \mapsto \frac{f(z)}{(z-gp)^n}$ su meromorfne, pa u $\overline{\mathbb{C}}$ postoje limesi

$$\lim_{z\to p}\frac{f(z)}{(z-p)^n} \qquad \text{i} \qquad \lim_{w\to gp}\frac{f(w)}{(w-gp)^n}.$$

Vrijedi

$$\lim_{w\to gp}\frac{f(w)}{(w-gp)^n} = \lim_{z\to p}\frac{f(gz)}{(gz-gp)^n} \overset{(3.4)}{=} \lim_{z\to p}(cz+d)^{2k}\frac{f(z)}{(z-p)^n}\left(\frac{z-p}{gz-gp}\right)^n.$$

Direktnim računom vidi se da je

$$\frac{z-p}{gz-gp} = (cz+d)(cp+d).$$

Kad to uvrstimo u gornju jednakost, dobivamo

$$\lim_{w\to gp}\frac{f(w)}{(w-gp)^n} = \lim_{z\to p}(cz+d)^{2k+n}(cp+d)^n\frac{f(z)}{(z-p)^n} = (cp+d)^{2k+2n}\lim_{z\to p}\frac{f(z)}{(z-p)^n}$$

(primijetimo da je $(cp + d)^{2k+2n} \neq 0$). Zaključujemo da je

$$\lim_{z \to p} \frac{f(z)}{(z-p)^n} \in \mathbb{C}\backslash\{0\} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{w \to gp} \frac{f(w)}{(w-gp)^n} \in \mathbb{C}\backslash\{0\}, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Odavde, po propoziciji 1.1.44.(ii), slijedi tvrdnja. □

Definicija 3.4.2. *Za modularnu funkciju $f : H \to \overline{\mathbb{C}}$, sa*

$$\nu_{Gp}(f) := \nu_p(f), \qquad p \in H,$$

*definiramo **red funkcije** f **u orbiti** $Gp \in H/G$.*

Propozicija 3.4.1 pokazuje da je definicija dobra.

Teorem 3.4.3. *Neka je $f : H \to \overline{\mathbb{C}}$ modularna funkcija težine $2k$, $f \not\equiv 0$. Vrijedi*

$$\nu_\infty(f) + \frac{1}{2}\nu_i(f) + \frac{1}{3}\nu_\rho(f) + \sum_{p \in G/H}^{*} \nu_p(f) = \frac{k}{6}. \tag{3.25}$$

Ovdje $\sum_{p \in G/H}^{*}$ označava sumaciju po svim $p \in (G/H) \setminus \{Gi, G\rho\}$ za koje je $\nu_p(f) \neq 0$.

Napomena 3.4.4. *(i) Označimo li, za $p \in G/H$, sa e_p red stabilizatora (proizvoljnog elementa od) p, po teoremu 3.1.3.(iv) formulu* (3.25) *možemo zapisati u obliku*

$$\nu_\infty(f) + \sum_{p \in G/H} \frac{\nu_p(f)}{e_p} = \frac{k}{6}.$$

(ii) Primijetimo da f iz teorema 3.4.3 u D ima samo konačan broj nultočaka i polova, pa je suma u (3.25) *konačna. Naime, kako je $\tilde{f}$ meromorfna i $\tilde{f} \not\equiv 0$, postoji $r > 0$ takav da u $K^\times(0, r)$ $\tilde{f}$ nema nultočaka ni polova, tj. da u $\mathbb{R} \times \left\langle \frac{1}{2\pi} \ln r, +\infty \right\rangle$ f nema nultočaka ni polova. Dakle, i skup polova i skup nultočaka funkcije f u D podskupovi su kompakta $K := D \cap \left(\mathbb{R} \times \left[0, \frac{1}{2\pi} \ln r\right]\right)$. S obzirom da je f meromorfna i $f \not\equiv 0$, nijedan od tih skupova nema gomilište, pa su zbog kompaktnosti od K nužno konačni.*

U dokazu teorema 3.4.3 pomoći će nam sljedeći tehnički rezultat.

Lema 3.4.5. *Neka je Ω otvoren skup u $\mathbb{C}$ i neka je $f : \Omega \to \overline{\mathbb{C}}$ meromorfna funkcija s konačnim skupom nultočaka. Neka je $z_0 \in \Omega$. Neka je $(\gamma_r, r > 0)$ familija parametrizacija kružnih lukova sa središtem u z_0 oblika*

$$\gamma_r : [\alpha_r, \beta_r] \to \Omega, \qquad \gamma_r(t) := z_0 + re^{it}, \quad t \in [\alpha_r, \beta_r],$$

gdje za svaki $r > 0$ vrijedi $\alpha_r < \beta_r$ i postoje

$$\lim_{r \searrow 0} \alpha_r =: \alpha \qquad i \qquad \lim_{r \searrow 0} \beta_r =: \beta.$$

Tada vrijedi

$$\lim_{r \searrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{\beta - \alpha}{2\pi} \nu_{z_0}(f).$$

Dokaz. Kako f ima samo konačno mnogo nultočaka, z_0 nije nultočka beskonačnog reda funkcije f (propozicija 1.1.44.(i)), dakle $n := \nu_{z_0}(f) \in \mathbb{Z}$. Zato (propozicija 1.1.44.(ii)) postoje $r > 0$ i holomorfna funkcija $g : K(z_0, R) \to \mathbb{C}$ takvi da je $K(z_0, R) \subseteq \Omega$, $g(z_0) \neq 0$ i

$$f(z) = (z - z_0)^n g(z), \qquad z \in K^{\times}(z_0, R),$$

Pritom, s obzirom da je skup nultočaka funkcije f konačan, R možemo odabrati tako da $K^{\times}(z_0, R)$ ne sadrži nijednu nultočku funkcije f, tj. da g nema nultočaka u $K(z_0, R)$. Uz tako odabrane R i g, vrijedi

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)}, \quad z \in K^{\times}(z_0, R). \tag{3.26}$$

Kako je $\frac{f'}{f}$ holomorfna (dakle i neprekidna) funkcija na $K^{\times}(z_0, R)$, pa je za $0 < r < R$ integral

$$\int_{\gamma_r} \frac{f'(z)}{f(z)} dz,$$

definiran, iz (3.26) slijedi

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{n}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{1}{z - z_0} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{g'(z)}{g(z)} dz, \qquad 0 < r < R. \tag{3.27}$$

Raspisom prvog pribrojnika na desnoj strani ove jednakosti po definiciji integrala po putu, dobivamo

$$\frac{n}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{1}{z - z_0} dz = \frac{n}{2\pi i} \int_{\alpha_r}^{\beta_r} \frac{1}{(z_0 + re^{it}) - z_0} ire^{it} dt = \frac{n}{2\pi} (\beta_r - \alpha_r) \xrightarrow{r \searrow 0} \frac{n}{2\pi} (\beta - \alpha),$$

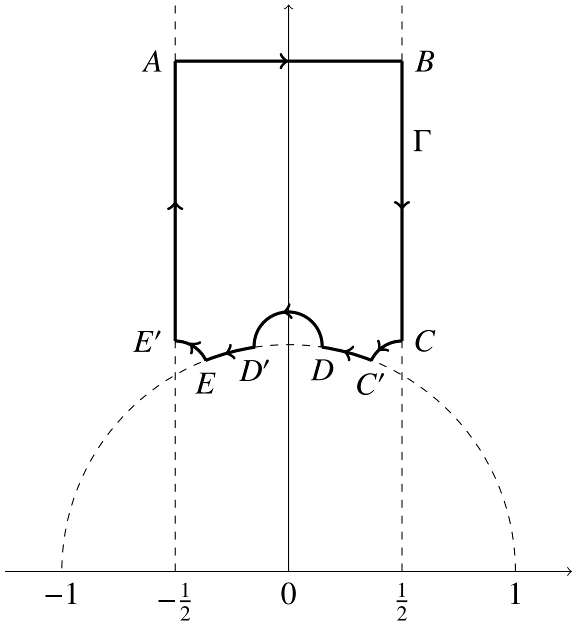
dok drugi pribrojnik možemo ocijeniti Fundamentalnom ocjenom (propozicija 1.1.9) i iskoristiti činjenicu da neprekidna funkcija $\left|\frac{g'}{g}\right|$ na kompaktnom skupu $\overline{K}\left(0, \frac{R}{2}\right)$ postiže maksimum: za $0 < r < \frac{R}{2}$ je

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{g'(z)}{g(z)} dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} l(\gamma_r) \max_{z \in \gamma_r([\alpha_r, \beta_r])} \left| \frac{g'(z)}{g(z)} \right| \leq \frac{1}{2\pi} r\, (\beta_r - \alpha_r) \max_{z \in \overline{K}\left(z_0, \frac{R}{2}\right)} \left| \frac{g'(z)}{g(z)} \right| \xrightarrow{r \searrow 0} 0.$$

Dakle,

$$\lim_{r \searrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{n}{2\pi} (\beta - \alpha) + 0 = \frac{\beta - \alpha}{2\pi} \nu_{z_0}(f). \qquad \square$$

Dokaz teorema 3.4.3. Promotrimo najprije slučaj kad f na rubu skupa D nema nultočaka ni polova različitih od i, ρ i $-\overline{\rho}$. Kako D sadrži samo konačno mnogo nultočaka i polova funkcije f (napomena 3.4.4.(ii)), sve ih možemo obuhvatiti orijentiranom zatvorenom krivuljom Γ kao na slici 3.3.



Slika 3.3: Krivulja Γ

Označimo sa r polumjer kružnih lukova $\Gamma_{CC'}$, $\Gamma_{DD'}$ i $\Gamma_{EE'}$. Po korolaru 1.1.57, za proizvoljnu po dijelovima glatku parametrizaciju γ krivulje Γ vrijedi

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = -\sum_{p\in H/G}^{*} \nu_p(f).$$

Zato i za proizvoljne po dijelovima glatke parametrizacije $\gamma_{AB}, \gamma_{BC}, \ldots, \gamma_{E'A}$ orijentiranih krivulja $\Gamma_{AB}, \Gamma_{BC}, \ldots, \Gamma_{E'A}$ vrijedi

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{AB}} \frac{f'(z)}{f(z)}dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{BC}} \frac{f'(z)}{f(z)}dz + \ldots + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{E'A}} \frac{f'(z)}{f(z)}dz = -\sum_{p\in H/G}^{*} \nu_p(f). \tag{3.28}$$

Izračunajmo vrijednosti pribrojnika na lijevoj strani kad $r \searrow 0$.

(a) Stavimo

$$\gamma_{AB} : \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \to \mathbb{C}, \qquad \gamma_{AB}(x) := x + iy_A,$$

i neka je

$$\omega : \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \to \mathbb{C}, \qquad \omega(x) := e^{2\pi i(x+iy_A)} = e^{-2\pi y_A} e^{2\pi i x},$$

parametrizacija pozitivno orijentirane kružnice $S(0, e^{-2\pi y_A})$. Računamo

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{AB}} \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \int_{\gamma_{AB}} \frac{\tilde{f}'(q)\, q}{\tilde{f}(q)}\, dz = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\tilde{f}'\left(e^{2\pi i(x+iy_A)}\right)}{\tilde{f}\left(e^{2\pi i(x+iy_A)}\right)} e^{2\pi i(x+iy_A)} dx =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\omega} \frac{\tilde{f}'(z)}{\tilde{f}(z)}dz = v_0(\tilde{f}) = v_\infty(f).$$

(b) Stavimo

$$\gamma_{BC} : [y_C, y_B] \to \mathbb{C}, \qquad \gamma_{BC}(y) := x_C + i(y_B + y_C - y),$$
$$\gamma_{E'A} : [y_C, y_B] \to \mathbb{C}, \qquad \gamma_{E'A}(y) := x_C - 1 + iy.$$

Računamo

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{BC}} \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{y_C}^{y_B} \frac{f'(x_C + i(y_B + y_C - y))}{f(x_C + i(y_B + y_C - y))}(-1)dy,$$

što zamjenom varijabli $y \mapsto y_B + y_C - y$ prelazi u

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{BC}} \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{y_B}^{y_C} \frac{f'(x_C + iy)}{f(x_C + iy)}dy,$$

a ovo zbog 1-periodičnosti funkcije f možemo zapisati kao

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{BC}} \frac{f'(z)}{f(z)}dz = -\frac{1}{2\pi i}\int_{y_C}^{y_B} \frac{f'(x_C - 1 + iy)}{f(x_C - 1 + iy)}dy = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{E'A}} \frac{f'(z)}{f(z)}dz.$$

Dakle,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{BC}} \frac{f'(z)}{f(z)}dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{E'A}} \frac{f'(z)}{f(z)}dz = 0.$$

(c) Stavimo

$$\gamma_{DD'} : [\mathrm{Arg}(D - i), \mathrm{Arg}(D' - i) + 2\pi], \qquad \gamma_{DD'}(t) := i + re^{it}.$$

Primijetimo da vrijedi

$$\lim_{r \searrow 0} \mathrm{Arg}(D - i) = 0, \qquad \lim_{r \searrow 0} (\mathrm{Arg}(D' - i) + 2\pi) = \pi,$$

pa je po lemi 3.4.5

$$\lim_{r\searrow 0}\int_{\gamma_{DD'}}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\frac{\nu_i(f)}{2\pi}(\pi-0)=\frac{1}{2}\nu_i(f).$$

Potpuno analogno, stavljanjem

$$\begin{aligned}\gamma_{CC'}&:[\operatorname{Arg}(C+\overline{\rho}),\operatorname{Arg}(C'+\overline{\rho})], & \gamma_{CC'}(t)&:=-\overline{\rho}+re^{it},\\ \gamma_{EE'}&:[\operatorname{Arg}(E-\rho),\operatorname{Arg}(E'-\rho)], & \gamma_{EE'}(t)&:=\rho+re^{it},\end{aligned}$$

dobivamo

$$\lim_{r\searrow 0}\int_{\gamma_{CC'}}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\frac{\nu_{-\overline{\rho}}(f)}{2\pi}\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{6}\nu_{-\overline{\rho}}(f)\overset{(3.24)}{=}\frac{1}{6}\nu_\rho(f)$$

i

$$\lim_{r\searrow 0}\int_{\gamma_{EE'}}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\frac{\nu_\rho(f)}{2\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{6}\nu_\rho(f).$$

(d) Stavimo

$$\begin{aligned}\gamma_{C'D}&:[\operatorname{Arg}C',\operatorname{Arg}D]\to\mathbb{C}, & \gamma_{C'D}(t)&:=e^{it},\\ \gamma_{D'E}&:[\operatorname{Arg}D',\operatorname{Arg}E]\to\mathbb{C}, & \gamma_{D'E}(t)&:=e^{it}.\end{aligned}$$

Uočimo da funkcija $z\mapsto Sz$ lukove $\Gamma_{C'D}$ i $\Gamma_{D'E}$ preslikava jedan u drugi. Koristeći da za $z\in H$ vrijedi

$$\frac{f'(Sz)}{f(Sz)}\frac{1}{z^2}=\frac{f(Sz)'}{f(Sz)}\overset{(3.4)}{=}\frac{\left(z^{2k}f(z)\right)'}{z^{2k}f(z)}=\frac{2k}{z}+\frac{f'(z)}{f(z)},$$

dobivamo

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{D'E}}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{D'E}}\frac{f'(Sz)}{z^2f(Sz)}dz-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{D'E}}\frac{2k}{z}dz. \tag{3.29}$$

Računamo

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{D'E}}\frac{f'(Sz)}{z^2f(Sz)}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\operatorname{Arg}D'}^{\operatorname{Arg}E}\frac{f'(-e^{-it})}{f(-e^{-it})}ie^{-it}dt,$$

što zamjenom varijabli $t\mapsto\pi-t$ prelazi u

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{D'E}}\frac{f'(Sz)}{z^2f(Sz)}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\operatorname{Arg}D}^{\operatorname{Arg}C'}\frac{f'(e^{it})}{f(e^{it})}ie^{it}dt=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{C'D}}\frac{f'(z)}{f(z)}dz.$$

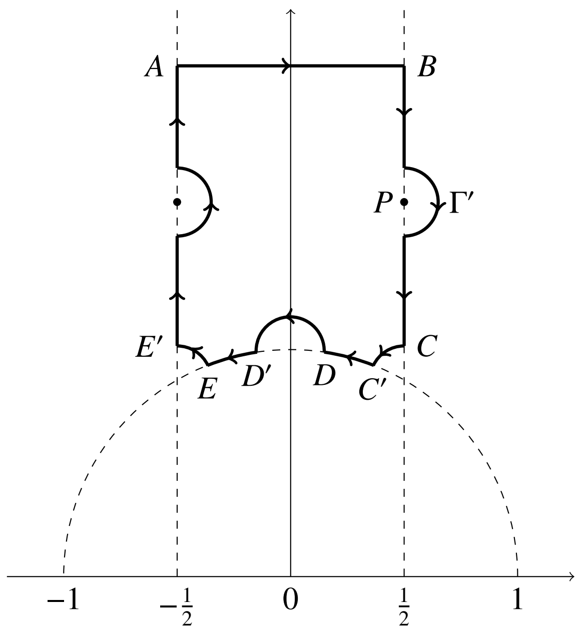
Uvrstimo li ovo u (3.29), dobivamo

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{D'E}}\frac{f'(z)}{f(z)}dz+\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{C'D}}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{D'E}}\frac{2k}{z}dz=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\operatorname{Arg}D'}^{\operatorname{Arg}E}\frac{2k}{e^{it}}ie^{it}dt=$$
$$=-\frac{k}{\pi}(\operatorname{Arg}E-\operatorname{Arg}D')\xrightarrow{r\searrow 0}-\frac{k}{\pi}\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{k}{6}.$$

Napokon, puštanjem limesa kad $r\searrow 0$ u (3.28), iz rezultata koraka (a), (b), (c) i (d) slijedi

$$\nu_\infty(f)+\frac{1}{2}\nu_i(f)+\frac{1}{3}\nu_\rho(f)-\frac{k}{6}=-\sum_{p\in H/G}{}^{*}\nu_p(f),$$

a to je zapravo (3.25).



Slika 3.4: Modificirana krivulja Γ' u slučaju jedne nultočke/pola na pravcu $\operatorname{Re} z=\frac{1}{2}$

U slučaju kad se neke nultočke i/ili polovi funkcije f nalaze u $\partial D\backslash\{i,\rho,-\overline{\rho}\}$, blagom modifikacijom krivulje Γ u okolini problematičnih točaka lako se dobije krivulja koja ima sva dobra svojstva potrebna za dokaz kao u prvom slučaju. Primjerice, “dobra” krivulja u slučaju jedne nultočke/pola P sa $\operatorname{Re}P=\frac{1}{2}$ prikazana je na slici 3.4: Γ' ne prolazi ni kroz jednu nultočku ni pol funkcije f, u svojoj unutrašnjosti ima točno po jednog predstavnika svake orbite $p\in(G/H)\setminus\{Gi,G\rho\}$ takve da je $\nu_p(f)\neq 0$, a modificirani dijelovi krivulje, $\Gamma'_{E'A}$ i Γ'_{BC}, još uvijek se jedan iz drugog dobivaju translacijom za ± 1, tj. vrijedi $T(\Gamma'_{E'A})=\Gamma'_{BC}$. $\square$

Modularna diskriminanta

Za $k \in \mathbb{Z}$, označimo sa M_k skup svih modularnih formi težine $2k$, a sa M_k^0 skup svih kusp formi težine $2k$. Iz definicije modularne forme jasno je da su M_k i M_k^0 kompleksni vektorski prostori i da za $k, l \in \mathbb{Z}$ vrijedi

$$f \in M_k,\ g \in M_l \qquad \Rightarrow \qquad fg \in M_{kl}.$$

Stavimo

$$g_2 := 60G_2, \qquad g_3 := 140G_3.$$

Funkcije g_2 i g_3 modularne su forme težine 4 odnosno 6. Iz (3.21) dobivamo

$$g_2(\infty) = \frac{4}{3}\pi^4, \qquad g_3(\infty) = \frac{8}{27}\pi^6.$$

Definicija 3.4.6. *Funkciju*

$$\Delta := g_2^3 - 27g_3^2$$

*zovemo **modularnom diskriminantom**.*

Kako su $g_2^3, g_3^2 \in M_6$, vrijedi $\Delta \in M_6$, i

$$\Delta(\infty) = \left(\frac{4}{3}\pi^4\right)^3 - 27\left(\frac{8}{27}\pi^6\right)^2 = 0,$$

dakle Δ je kusp forma težine 12. Primjenom formule iz teorema 3.4.3,

$$\nu_\infty(f) + \frac{1}{2}\nu_i(f) + \frac{1}{3}\nu_\rho(f) + \sum_{p \in G/H}^{*} \nu_p(f) = \frac{k}{6}, \tag{3.30}$$

na g_k, $k = 2, 3$, uvažavajući da za sve $z \in H \cup \{\infty\}$ vrijedi $\nu_z(g_k) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, zaključujemo da je

$$\begin{aligned} \nu_\rho(g_2) &= 1, \qquad \nu_p(g_2) = 0, \quad p \in ((G/H)\setminus\{G\rho\}) \cup \{\infty\},\\ \nu_i(g_3) &= 1, \qquad \nu_p(g_3) = 0, \quad p \in ((G/H)\setminus\{Gi\}) \cup \{\infty\}, \end{aligned}$$

pa je posebno

$$g_2(i) \neq 0,\ g_3(i) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \Delta(i) \neq 0, \tag{3.31}$$

dakle $\Delta \not\equiv 0$. Zato i na Δ možemo primijeniti formulu (3.30) (uz $k = 6$) i, zbog $\nu_\infty(\Delta) \geq 1$, zaključiti da je

$$\nu_\infty(\Delta) = 1, \qquad \nu_p(\Delta) = 0, \quad p \in G/H.$$

Time smo dokazali sljedeću propoziciju.

Propozicija 3.4.7. Δ *je kusp forma težine* 12 *koja u* H *nema nultočaka, a u beskonačnosti ima nultočku prvog reda.*

Dimenzije i baze prostora M_k

Propozicija 3.4.8. *(i) Označimo sa G_0 konstantnu funkciju $1 : H \to \mathbb{C}$. Vrijedi*

$$M_k = M_k^0 \oplus \mathbb{C}\, G_k, \quad k \in \{0\} \cup \mathbb{Z}_{\geq 2}.$$

(ii) Množenje sa Δ definira izomorfizam $M_{k-6} \to M_k^0$, $k \in \mathbb{Z}$.

Dokaz. *(i)* Sjetimo se da za $k \geq 2$ vrijedi $G_k \in M_k$ i $G_k(\infty) = 2\zeta(2k)$, a očito je i $G_0 \in M_0$ i $G_0(\infty) = 1$. Dakle, za $k \in \{0\} \cup \mathbb{Z}_{\geq 2}$ vrijedi $M_k^0 + \mathbb{C}\, G_k \subseteq M_k$ i, zbog $G_k(\infty) \neq 0$, $M_k^0 \cap \mathbb{C}\, G_k = \{0\}$. Nadalje, imamo

$$f = \left(f - \frac{f(\infty)}{G_k(\infty)} G_k \right) + \frac{f(\infty)}{G_k(\infty)} G_k \in M_k^0 + \mathbb{C}\, G_k, \qquad f \in M_k,$$

pa vrijedi i $M_k \subseteq M_k^0 + \mathbb{C}\, G_k$. Iz svega toga slijedi $M_k = M_k^0 \oplus \mathbb{C}\, G_k$.

(ii) Jasno je da množenje sa Δ definira linearni operator $\delta : M_{k-6} \to M_k^0$. Nadalje, dijeljenje sa Δ definira preslikavanje $\varepsilon : M_k^0 \to M_{k-6}$. Naime, s obzirom da Δ u H nema nultočaka, za $f \in M_{k-6}^0$ funkcija $\frac{f}{\Delta} : H \to \mathbb{C}$ dobro je definirana i holomorfna te zadovoljava uvjet modularnosti (3.4) težine $2k - 12$, a kako vrijedi i

$$\nu_\infty(f) \geq 1,\ \nu_\infty(\Delta) = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \nu_\infty\left(\frac{f}{\Delta}\right) = \nu_\infty(f) - 1 \geq 0$$

(propozicija 1.1.49), zaključujemo da je $\frac{f}{\Delta} \in M_{k-6}$. Naravno, ε je inverz operatora δ. Dakle, δ je izomorfizam vektorskih prostora $M_{k-6} \to M_k^0$. □

Teorem 3.4.9. *(i) Za $k \in \mathbb{Z}_{<0} \cup \{1\}$ vrijedi $M_k = 0$.*

(ii) M_0 je jednodimenzionalan vektorski prostor konstantnih funkcija $H \to \mathbb{C}$.

(iii) Za $k = 2, 3, 4, 5, 7$, M_k je jednodimenzionalan vektorski prostor s bazom $\{G_k\}$, tj. vrijedi

$$M_k = \mathbb{C}\, G_k.$$

(iv) Vrijedi

$$\dim M_k = \begin{cases} \left\lfloor \frac{k}{6} \right\rfloor, & \text{ako je } k \equiv 1 \pmod 6, \\ \left\lfloor \frac{k}{6} \right\rfloor + 1, & \text{ako je } k \not\equiv 1 \pmod 6, \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

Ovdje $\lfloor \cdot \rfloor$ označava funkciju najveće cijelo.

Dokaz. *(i)* Neka je $k \in \mathbb{Z}_{<0} \cup \{1\}$. Pretpostavimo da postoji $f \in M_k \backslash \{0\}$. Po teoremu 3.4.3, vrijedi

$$\nu_\infty(f) + \frac{1}{2}\nu_i(f) + \frac{1}{3}\nu_\rho(f) + \sum_{p \in G/H}^{*} \nu_p(f) = \frac{k}{6},$$

što je, s obzirom da za sve $p \in G/H \cup \{\infty\}$ vrijedi $\nu_p(f) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, očito nemoguće. Dakle, $M_k = 0$.

(ii) i (iii) Neka je $k \in \{0, 2, 3, 4, 5, 7\}$. Po propoziciji 3.4.8.(i) vrijedi $M_k = M_k^0 \oplus \mathbb{C}\, G_k$. No, po propoziciji 3.4.8.(ii) i tvrdnji (i) vrijedi

$$M_k^0 \cong M_{k-6} = 0,$$

pa je $M_0 = \mathbb{C}\, G_k$. Slijede tvrdnje (ii) i (iii).

(iv) Tvrdnju ćemo dokazati indukcijom po svakoj od klasa kongruentnosti modulo 6. Tvrdnje (i), (ii) i (iii) pokazuju da (iv) vrijedi u slučajevima $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 7$. Preostaje pokazati da, ako (iv) vrijedi za neki $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \backslash \{1\}$, vrijedi i za $k + 6$. Ako (iv) vrijedi za neki $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \backslash \{1\}$, iz propozicije 3.4.8.(i) i (ii) dobivamo

$$\begin{aligned} \dim M_{k+6} &= \dim M_{k+6}^0 + 1 = \dim M_k + 1 = \\ &= \begin{cases} \left\lfloor \frac{k}{6} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{k+6}{6} \right\rfloor, & \text{ako je } k \equiv 1 \pmod 6, \\ \left\lfloor \frac{k}{6} \right\rfloor + 1 + 1 = \left\lfloor \frac{k+6}{6} \right\rfloor + 1, & \text{ako je } k \not\equiv 1 \pmod 6. \end{cases} \end{aligned}$$

Kako je $k + 6 \equiv k \pmod 6$, ovo pokazuje da (iv) vrijedi i za $k + 6$. Time je dokaz tvrdnje (iv) završen. □

Teorem 3.4.10. *Neka je $k \in \mathbb{Z}$. Skup*

$$B_k := \left\{ G_2^\alpha G_3^\beta : \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ 2\alpha + 3\beta = k \right\}$$

baza je vektorskog prostora M_k.

Dokaz. U slučaju $k \in \mathbb{Z}_{<0} \cup \{1\}$ očito je $B_k = \emptyset$, pa, zbog (i), tvrdnja vrijedi. Za ostale k i ovu tvrdnju dokazujemo indukcijom s korakom 6. Pretpostavimo da za neki $k \in \{0\} \cup \mathbb{Z}_{\geq 2}$ vrijedi da je B_{k-6} baza prostora M_{k-6}. Želimo pokazati da je B_k baza prostora M_k.

Pokažimo najprije da je B_k sustav izvodnica za M_k. Neka je $f \in M_k$. Kako je $k \in \{0\} \cup \mathbb{Z}_{\geq 2}$, jednadžba $2\gamma + 3\delta = k$ ima rješenja u $\mathbb{Z}_{\geq 0}$. Neka je (γ, δ) jedno takvo rješenje. Tada je $G_2^\gamma G_3^\delta \in M_k$ pa, zbog $\left(G_2^\gamma G_3^\delta\right)(\infty) \neq 0$, postoji $\lambda \in \mathbb{C}$ takav da je $f - \lambda G_2^\gamma G_3^\delta \in M_k^0$. Po propoziciji 3.4.8.(ii) slijedi da postoji $h \in M_{k-6}$ takav da je

$$f - \lambda G_2^\gamma G_3^\delta = \Delta\, h.$$

Po pretpostavci indukcije, vrijedi

$$h \in \sum_{\substack{\alpha,\beta\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\\ 2\alpha+3\beta=k-6}} \mathbb{C}\, G_2^\alpha G_3^\beta,$$

pa je

$$f = \lambda G_2^\gamma G_3^\delta + \Delta\, h \quad \in \quad \mathbb{C}\, G_2^\gamma G_3^\delta + \left(\mathbb{C}\, G_2^3 + \mathbb{C}\, G_3^2\right) \sum_{\substack{\alpha,\beta\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\\ 2\alpha+3\beta=k-6}} \mathbb{C}\, G_2^\alpha G_3^\beta \quad \subseteq \quad \sum_{\substack{\alpha,\beta\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\\ 2\alpha+3\beta=k}} \mathbb{C}\, G_2^\alpha G_3^\beta,$$

što, zbog proizvoljnosti izbora $f \in M_k$, pokazuje da je B_k sustav izvodnica za M_k.

Pokažimo sada da je B_k linearno nezavisan. Označimo

$$C_k := \{(\alpha,\beta) : \alpha,\beta \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ 2\alpha + 3\beta = k\}.$$

Odaberimo $(\gamma,\delta) \in C_k$ tako da je γ najmanji mogući. Lako se vidi da je

$$C_k = \left\{(\gamma + 3j, \delta - 2j) : j = 0, 1, \ldots, \left\lfloor \frac{\delta}{2} \right\rfloor\right\}.$$

Pretpostavimo da je B_k linearno zavisan. Prema gornjem prikazu skupa C_k, to znači da postoje $a_0, a_1, \ldots, a_{\lfloor \frac{\delta}{2} \rfloor} \in \mathbb{C}$, ne svi jednaki 0, takvi da vrijedi

$$\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{\delta}{2} \rfloor} a_j G_2^{\gamma+3j} G_3^{\delta-2j} = 0,$$

tj., dijeljenjem sa $G_2^\gamma G_3^\delta$,

$$\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{\delta}{2} \rfloor} a_j \left(\frac{G_2^3}{G_3^2}\right)^j = 0.$$

Dakle, meromorfna funkcija $\frac{G_2^3}{G_3^2}$ rješenje je netrivijalne polinomijalne jednadžbe nad $\mathbb{C}$, pa joj je slika konačna, odakle slijedi da je ona konstantna, što je besmislica (npr. iz (3.31) vidimo da $\frac{G_2^3}{G_3^2}$ u točki i ima pol, pa nikako ne može biti konstantna). Zaključujemo da je B_k linearno nezavisan.

Time smo pokazali da je B_k baza prostora M_k, što završava korak indukcije i dokaz teorema. □

3.5 Modularna invarijanta

Definicija 3.5.1. *Funkciju*

$$j := \frac{1728g_2^3}{\Delta}$$

zovemo ***modularnom invarijantom.***

Kako su g_2^3 i Δ modularne forme težine 12, pri čemu Δ nema nultočaka u H i vrijedi $\nu_\infty(g_2^3) = 0$ i $\nu_\infty(\Delta) = 1$ (propozicija 3.4.7), j je modularna funkcija težine 0 koja je holomorfna na H, a u beskonačnosti ima pol prvog reda (vidi propoziciju 1.1.49). Koeficijent 1728 uveden je da bi bilo $\operatorname{Res}\left(\tilde{j}, 0\right) = 1$.

Propozicija 3.5.2. *Modularna invarijanta j prelaskom na kvocijent G/H inducira bijekciju $G/H \to \mathbb{C}$.*

Dokaz. Kako su modularne funkcije težine 0 po definiciji invarijantne na djelovanje grupe G, j prelaskom na kvocijent G/H inducira funkciju $G/H \to \mathbb{C}$. Da bismo pokazali da je ta funkcija bijekcija, trebamo vidjeti da za proizvoljan $\lambda \in \mathbb{C}$ postoji jedinstven $p \in G/H$ takav da za $z \in p$ vrijedi $\left(\frac{1728g_2^3}{\Delta}\right)(z) = \lambda$. Drugim riječima, trebamo pokazati da za modularnu formu $f_\lambda := 1728g_2^3 - \lambda\Delta$ težine 12 postoji jedinstven $p \in G/H$ za koji je $\nu_p(f_\lambda) > 0$. Budući da, zbog $g_2(\infty) \neq 0$ i $\Delta(\infty) = 0$, vrijedi $\nu_\infty(f_\lambda) = 0$, po teoremu 3.4.3 je

$$\frac{1}{2}\nu_i(f_\lambda) + \frac{1}{3}\nu_\rho(f_\lambda) + \sum_{p \in G/H}^{*} \nu_p(f_\lambda) = 1.$$

S obzirom da za sve $p \in G/H$ vrijedi $\nu_p(f_\lambda) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, odavde je odmah jasno da je zaista $\nu_p(f_\lambda) > 0$ za točno jedan $p \in G/H$. □

Propozicija 3.5.3. *Modularne funkcije težine* 0 *točno su racionalne funkcije of j.*

Dokaz. Iz definicije modularne funkcije težine 0 očito je da je skup modularnih funkcija težine 0 ne samo kompleksan vektorski prostor, već i polje, pa su sve racionalne funkcije od j modularne funkcije težine 0.

Obratno, neka je f modularna funkcija težine 0, $f \not\equiv 0$. Želimo pokazati da je f racionalna funkcija od j. Budući da f ima samo konačno mnogo polova modulo G (napomena 3.4.4.(ii)), tvrdnju je dovoljno dokazati za $g := f \prod_{p \in G/H,\ \nu_p(f) < 0} (j - j(p))^{-\nu_p(f)}$, koja je također modularna funkcija težine 0, ali holomorfna na H. Kako je Δ kusp forma težine 12, za dovoljno velik $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ funkcija $h := \Delta^n g$ modularna je forma težine 12n pa je, po teoremu 3.4.10, h linearna kombinacija modularnih formi $G_2^\alpha G_3^\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $2\alpha + 3\beta = 6n$. Dakle, g je linearna kombinacija modularnih funkcija oblika $\frac{G_2^\alpha G_3^\beta}{\Delta^n}$, $\alpha, \beta, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $2\alpha + 3\beta = 6n$. Zato je dovoljno pokazati da su te funkcije racionalne funkcije od j. Iz $2\alpha + 3\beta = 6n$

vidimo da nužno $3|\alpha$ i $2|\beta$, pa su te funkcije zapravo oblika $\frac{G_2^{3p}G_3^{2q}}{\Delta^{p+q}}$ za neke $p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Dakle, dovoljno je pokazati da su funkcije $\frac{G_2^3}{\Delta}$ i $\frac{G_3^2}{\Delta}$ racionalne funkcije od j, što vrijedi jer su one proporcionalne sa $\frac{g_2^3}{\Delta} = \frac{j}{1728}$ odnosno $\frac{27g_3^2}{\Delta} = \frac{g_2^3-\Delta}{\Delta} = \frac{j}{1728} - 1$. □

3.6 Brzina rasta Fourierovih koeficijenata modularnih formi

Neka je $k \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$. Neka je f modularna forma težine $2k$ i neka je

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$$

Fourierov red funkcije f, tj. Laurentov red funkcije $\tilde{f}$ u okolini 0 (vidi propoziciju 3.2.7.(i)).

Propozicija 3.6.1. *Ako je $f = G_k$, postoje $A_k, B_k > 0$ takvi da vrijedi*

$$A_k n^{2k-1} \leq |a_n| \leq B_k n^{2k-1}, \qquad n \in \mathbb{Z}_{>0}.$$

Dokaz. Po korolaru 3.3.12, postoji $C_k > 0$ takav da je

$$|a_n| = C_k\, \sigma_{2k-1}(n), \qquad n \in \mathbb{Z}_{>0}.$$

Kako $\sigma_{2k-1}(n)$ možemo ocijeniti sa

$$n^{2k-1} \leq \sigma_{2k-1}(n) = n^{2k-1} \sum_{\substack{d \in \mathbb{Z}_{>0} \\ d|n}} \frac{1}{d^{2k-1}} \leq n^{2k-1} \sum_{d=1}^{\infty} \frac{1}{d^{2k-1}} = n^{2k-1}\zeta(2k-1), \qquad n \in \mathbb{Z}_{>0},$$

slijedi tvrdnja. □

Teorem 3.6.2 (Hecke)**.** *Ako je f kusp forma, postoji $A > 0$ takav da vrijedi*

$$|a_n| \leq A n^k, \qquad n \in \mathbb{Z}_{>0}.$$

Dokaz. Kako je f kusp forma, tj. $a_0 = 0$, funkcija $q \mapsto \frac{\tilde{f}(q)}{q}$ proširuje se u 0 do holomorfne funkcije na $K(0,1)$. Naravno, ta je funkcija ograničena na skupovima $K^{\times}(0,r)$, $0 < r < 1$, dakle funkcija $z \mapsto \frac{f(z)}{q}$ ograničena je na poluravninama $\mathbb{R} \times \langle \varepsilon, +\infty \rangle$ za $\varepsilon > 0$, pa je ograničena i na fundamentalnoj domeni D. Drugim riječima, postoji $B > 0$ takav da je

$$|f(z)| \leq B\,|q| = Be^{-2\pi y}, \qquad z \in D,\ y = \operatorname{Im} z.$$

Odavde slijedi i

$$|f(z)|\, y^k \leq B\, |q|\, y^k = By^k e^{-2\pi y} \xrightarrow{y\to\infty} 0, \qquad z \in D,\ y = \operatorname{Im} z,$$

što, uz neprekidnost funkcije $z \mapsto |f(z)|\,(\operatorname{Im} z)^k$, povlači da je ona ograničena na D. Primijetimo da je ta funkcija, zbog modularnosti od f, invarijantna na djelovanje grupe G:

$$|f(gz)|\,(\operatorname{Im} gz)^k = \left|(cz+d)^{2k} f(z)\right| \left(\frac{\operatorname{Im} z}{|cz+d|^2}\right)^k = |f(z)|\,(\operatorname{Im} z)^k, \quad g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G,\ z \in H,$$

pa je zapravo ograničena na cijeloj poluravnini H, tj. postoji $C > 0$ takav da je

$$|f(z)| \leq \frac{C}{y^k}, \qquad z \in H,\ y = \operatorname{Im} z. \tag{3.32}$$

Koristeći Teorem o reziduumima (teorem 1.1.56), dobivamo da za $y > 0$ i $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ vrijedi

$$\begin{aligned} |a_n| &= \left|\operatorname{Res}\left(q \mapsto \frac{\tilde{f}(q)}{q^{n+1}}, 0\right)\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|q|=e^{-2\pi y}} \frac{\tilde{f}(q)}{q^{n+1}}dq\right| = \left|\int_0^1 \frac{\tilde{f}\left(e^{2\pi i(x+iy)}\right)}{e^{2\pi i n(x+iy)}}dx\right| \leq \\ &\leq \int_0^1 \left|\frac{\tilde{f}\left(e^{2\pi i(x+iy)}\right)}{e^{2\pi i n(x+iy)}}\right| dx = \int_0^1 |f(x+iy)|\, e^{2\pi n y} dx \overset{(3.32)}{\leq} \int_0^1 \frac{C}{y^k} e^{2\pi n y} dx = \frac{C}{y^k} e^{2\pi n y}. \end{aligned}$$

U slučaju $y = \frac{1}{n}$ ova je ocjena zapravo

$$|a_n| \leq Ce^{2\pi} n^k.$$

Slijedi tvrdnja. □

Korolar 3.6.3. *Postoji konstanta $A > 0$ takva da je*

$$|a_n| \leq An^{2k-1}, \qquad n \in \mathbb{Z}_{>0}.$$

Dokaz. Po propoziciji 3.4.8.(i) vrijedi $f = \lambda G_k + h$ za neke $\lambda \in \mathbb{C}$ i $h \in M_k^0$. Neka su b_n, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, Fourierovi koeficijenti modularne forme λG_k, a c_n, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, Fourierovi koeficijenti kusp forme h. Po propoziciji 3.6.1 i teoremu 3.6.2 postoje $B > 0$ i $C > 0$ takvi da je

$$|b_n| \leq Bn^{2k-1}, \quad |c_n| \leq Cn^k, \qquad n \in \mathbb{Z}_{>0},$$

odakle slijedi ocjena

$$|a_n| = |b_n + c_n| \leq |b_n| + |c_n| \leq Bn^{2k-1} + Cn^k \leq (B+C)n^{2k-1}, \qquad n \in \mathbb{Z}_{>0},$$

koja dokazuje tvrdnju. □

Korolar 3.6.4. *Dirichletov red*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

konvergira apsolutno i definira holomorfnu funkciju na poluravnini $M_{2k} := \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > 2k\}$.

Dokaz. Neka je $A > 0$ konstanta iz korolara 3.6.3. Za $\operatorname{Re} s > 2k$ imamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{a_n}{n^s} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{An^{2k-1}}{n^{\operatorname{Re} s}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A}{n^{\operatorname{Re} s - 2k+1}} = A\zeta(\operatorname{Re} s - 2k + 1) < \infty,$$

dakle red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ na poluravnini M_{2k} konvergira apsolutno. Tvrdnja o holomorfnosti sada je direktna posljedica korolara 2.2.5. □

3.7 Produktna formula za Δ

Označimo

$$G_1(z) := \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}}{}' \frac{1}{(mz+n)^2}, \qquad G(z) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}}{}' \frac{1}{(mz+n)^2},$$

$$H_1(z) := \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}}{}'' \frac{1}{(mz+n-1)(mz+n)}, \qquad H(z) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}}{}'' \frac{1}{(mz+n-1)(mz+n)}.$$

Ovdje, slično kao ranije, znak $'$ iza dvostruke sume označava sumaciju po parovima $(m, n) \neq (0, 0)$, dok $''$ označava sumaciju po $(m, n) \neq (0, 0), (0, 1)$.

Lema 3.7.1. *Vrijedi*

$$H_1(z) = 2, \quad H(z) = 2 - \frac{2\pi i}{z}, \qquad z \in H.$$

Dokaz. Neka je $z \in H$. Imamo

$$\begin{aligned} H_1(z) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}}{}'' \left(\frac{1}{mz+n-1} - \frac{1}{mz+n} \right) = \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{-n-1} - \frac{1}{-n} \right) + \\ &\quad + \sum_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{mz+n-1} - \frac{1}{mz+n} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{mz-n-1} - \frac{1}{mz-n} \right) \right), \end{aligned}$$

odakle teleskopiranjem dobivamo

$$\begin{aligned} H_1(z) &= \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n+1} + 1\right) + \\ &+ \sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{mz-1} - \frac{1}{mz+n}\right) + \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{mz-n-1} - \frac{1}{mz-1}\right)\right) = \\ &= 1 + 1 + \sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(\frac{1}{mz-1} - \frac{1}{mz-1}\right) = 2. \end{aligned}$$

S druge strane, uočimo da za fiksni $n \in \mathbb{Z}$ unutrašnji red u definiciji od H konvergira apsolutno: odaberemo li $m_0 \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ takav da je $m_0\,|z| > |n| + 1$, vrijedi

$$\begin{aligned} \sum_{|m|>m_0} \left|\frac{1}{(mz+n-1)(mz+n)}\right| &\leq \sum_{|m|>m_0} \frac{1}{(|mz| - m_0\,|z|)^2} = \sum_{|m|>m_0} \frac{1}{(|m| - m_0)^2\,|z|^2} \leq \\ &\leq \frac{1}{|z|^2}\cdot 2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^2} = \frac{2\zeta(2)}{|z|^2} < \infty. \end{aligned}$$

Dakle, u svakoj unutrašnjoj sumi iz definicije od H smijemo po volji mijenjati poredak sumacije. Za $n = 0$ dobivamo

$$\begin{aligned} \sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(\frac{1}{mz-1} - \frac{1}{mz}\right) &= \sum_{m=1}^{\infty}\left(\left(\frac{1}{mz-1} - \frac{1}{mz}\right) + \left(\frac{1}{-mz-1} - \frac{1}{-mz}\right)\right) = \\ &= \frac{\pi}{z}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{-\frac{\pi}{z}+m} + \frac{1}{-\frac{\pi}{z}-m}\right) \overset{(1.6)}{=} \frac{\pi}{z}\left(\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{z}\right) - \frac{1}{-\frac{\pi}{z}}\right) = -\frac{\pi}{z}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{z} + 1. \end{aligned}$$

Slično, za $n = 1$ je

$$\begin{aligned} \sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(\frac{1}{mz} - \frac{1}{mz+1}\right) &= \sum_{m=1}^{\infty}\left(\left(\frac{1}{mz} - \frac{1}{mz+1}\right) + \left(\frac{1}{-mz} - \frac{1}{-mz+1}\right)\right) = \\ &= -\frac{\pi}{z}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\frac{\pi}{z}+m} + \frac{1}{\frac{\pi}{z}-m}\right) \overset{(1.6)}{=} -\frac{\pi}{z}\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{z} - \frac{1}{\frac{\pi}{z}}\right) = -\frac{\pi}{z}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{z} + 1, \end{aligned}$$

a za $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0,1\}$ imamo

$$\begin{aligned}
&\sum_{m\in\mathbb{Z}}\left(\frac{1}{mz+n-1}-\frac{1}{mz+n}\right)=\\
&\quad=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}+\sum_{m=1}^{\infty}\left(\left(\frac{1}{mz+n-1}-\frac{1}{mz+n}\right)+\left(\frac{1}{-mz+n-1}-\frac{1}{-mz+n}\right)\right)=\\
&\quad=\frac{\pi}{z}\left(\frac{1}{\frac{(n-1)\pi}{z}}-\frac{1}{\frac{n\pi}{z}}\right)+\frac{\pi}{z}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\left(\frac{1}{\frac{(n-1)\pi}{z}+m\pi}+\frac{1}{\frac{(n-1)\pi}{z}-m\pi}\right)-\left(\frac{1}{\frac{n\pi}{z}+m\pi}+\frac{1}{\frac{n\pi}{z}-m\pi}\right)\right)=\\
&\quad\overset{(1.6)}{=}\frac{\pi}{z}\left(\operatorname{ctg}\frac{(n-1)\pi}{z}-\operatorname{ctg}\frac{n\pi}{z}\right).
\end{aligned}$$

Iz svega navedenog slijedi

$$\begin{aligned}
H(z)=2\left(-\frac{\pi}{z}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{z}+1\right)+\frac{\pi}{z}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\operatorname{ctg}\frac{(n-1)\pi}{z}-\operatorname{ctg}\frac{n\pi}{z}\right)+\\
+\frac{\pi}{z}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{ctg}\frac{(-n-1)\pi}{z}-\operatorname{ctg}\frac{(-n\pi)}{z}\right),
\end{aligned}$$

odakle teleskopiranjem dobivamo

$$H(z)=2\left(-\frac{\pi}{z}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{z}+1\right)+2\,\frac{\pi}{z}\lim_{n\to\infty}\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{z}-\operatorname{ctg}\frac{n\pi}{z}\right).$$

Uočimo da je

$$\lim_{n\to\infty}\operatorname{ctg}\frac{n\pi}{z}=\lim_{n\to\infty}i\,\frac{1+e^{-\frac{2\pi in}{z}}}{1-e^{-\frac{2\pi in}{z}}}=i$$

jer, zbog $\operatorname{Im} z>0$, vrijedi

$$\left|e^{\frac{-2\pi in}{z}}\right|=\left|e^{\frac{-2\pi in\bar{z}}{|z|^2}}\right|=\left|e^{\frac{-2\pi n\operatorname{Im} z}{|z|^2}}\right|\xrightarrow{n\to\infty}0,$$

pa slijedi

$$H(z)=2\left(-\frac{\pi}{z}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{z}+1+\frac{\pi}{z}\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{z}-i\right)\right)=2-\frac{2\pi i}{z}.\qquad\square$$

Propozicija 3.7.2. *Vrijedi*

$$G_1(z)=\frac{2\pi i}{z}+G(z),\qquad z\in H.\tag{3.33}$$

Dokaz. Neka je $z \in H$. Sjetimo se da redovi $G_1(z)$, $H_1(z)$ i $H(z)$ konvergiraju (propozicija 3.3.11 i lema 3.7.1). Osim toga, red $(G_1 - H_1)(z)$ konvergira apsolutno. Naime, vrijedi

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{n\in\mathbb{Z}}{}'' \left| \frac{1}{(mz+n)^2} - \frac{1}{(mz+n-1)(mz+n)} \right| = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{n\in\mathbb{Z}}{}'' \left| \frac{1}{(mz+n)^2(mz+n-1)} \right| \leq$$
$$\leq \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{n\in\mathbb{Z}}{}'' \frac{1}{(\min\{|mz+n|, |mz+n-1|\})^3} \leq$$
$$\leq \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{n\in\mathbb{Z}}{}'' \frac{1}{|mz+n|^3} + \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{n\in\mathbb{Z}}{}'' \frac{1}{|mz+n-1|^3} \leq 2 \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{n\in\mathbb{Z}}{}' \frac{1}{|mz+n|^3} < \infty$$

po lemi 3.3.1. Zaključujemo da je

$$(G_1 - H_1)(z) = (G - H)(z).$$

Odavde slijedi da je i red $G(z)$ konvergentan. Napokon, iz leme 3.7.1 dobivamo

$$G_1(z) - 2 = G(z) - \left(2 - \frac{2\pi i}{z}\right),$$

tj. vrijedi (3.33). □

Teorem 3.7.3 (Jacobi)**.** *Vrijedi*

$$\Delta = (2\pi)^{12} q \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{24}, \qquad z \in H. \tag{3.34}$$

Dokaz. Kako za $|q| < r < 1$ vrijedi

$$|q|^n < r^n, \ n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \qquad \text{i} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r} - 1 < \infty,$$

beskonačan produkt

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n),$$

promatran kao funkcija varijable q, konvergira normalno na $K(0, r)$ za $0 < r < 1$, dakle i na svakom kompaktu u $K(0, 1)$, pa (teorem 1.2.5) definira holomorfnu funkciju $h : K(0, 1) \to \mathbb{C}$. Označimo li desnu stranu u (3.34) sa F, vrijedi

$$F(z) = (2\pi)^{12} q\, h^{24}(q), \qquad z \in H. \tag{3.35}$$

Odavde zaključujemo da je F 1-periodična holomorfna funkcija $H \to \mathbb{C}$, holomorfna u beskonačnosti, i da je $F(\infty) = 0$.

Pretpostavimo da vrijedi i

$$F\left(-\frac{1}{z}\right) = z^{12}F(z), \qquad z \in H. \tag{3.36}$$

Tada je F kusp forma težine 12. Kako je $\dim M_6^0 = \dim M_0 = 1$ (propozicija 3.4.8.(i), teorem 3.4.9.(ii)), nužno je $F = \lambda\Delta$ za neki $\lambda \in \mathbb{C}$. Iz Fourierovih koeficijenata funkcija G_2 i G_3 (korolar 3.3.12), koristeći da je $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$, lako se izračuna da je koeficijent a_1 Fourierova razvoja forme Δ jednak $(2\pi)^{12}$ pa vrijedi

$$\lambda = \lim_{\operatorname{Im} z\to\infty} \frac{F(z)}{\Delta(z)} = \lim_{q\to 0} \frac{\tilde{F}(q)}{\tilde{\Delta}(q)} = \lim_{q\to 0} \frac{\frac{\tilde{F}(q)}{q}}{\frac{\tilde{\Delta}(q)}{q}} = \frac{\lim_{q\to 0}(2\pi)^{12}h(q)}{\lim_{q\to 0}\frac{\tilde{\Delta}(q)}{q}} = \frac{(2\pi)^{12}h(0)}{a_1} = \frac{(2\pi)^{12}}{(2\pi)^{12}} = 1.$$

Dakle, $F = \Delta$.

Preostaje dokazati relaciju (3.36). Kako F nema nultočaka u H (vidi napomenu 1.2.3), logaritamske su derivacije obiju strana u toj relaciji definirane. Pokažemo li da su one jednake, slijedit će da svaka točka poluravnine H ima okolinu na kojoj su lijeva i desna strana relacije (3.36) proporcionalne. Kako je H povezana, to povlači da su one zapravo proporcionalne na cijeloj H, tj. da postoji $C \in \mathbb{C}^*$ takav da je

$$F\left(-\frac{1}{z}\right) = Cz^{12}F(z), \qquad z \in H.$$

Uvrštavanjem $z = i$ dobivamo da je $F(i) = CF(i)$ odakle, s obzirom da je $F(i) \neq 0$, slijedi da je $C = 1$, tj. da vrijedi (3.36).

Izračunajmo logaritamske derivacije lijeve i desne strane u (3.36). Vrijedi

$$\begin{aligned} F(z) &\overset{(3.35)}{=} (2\pi)^{12}q\left(\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)\right)^{24} \overset{(1.3)}{=} (2\pi)^{12}q\left(e^{\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{Ln}(1-q^n)}\right)^{24} = \\ &= (2\pi)^{12}q\,e^{24\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{Ln}(1-q^n)}, \quad z \in H. \end{aligned} \tag{3.37}$$

Primijetimo da red $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{Ln}(1-q^n)$ konvergira lokalno uniformno na H pa ga smijemo derivirati član po član (korolar 1.1.26.(iii)). Da bismo to vidjeli, dovoljno je pokazati da red $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{Ln}(1-q^n)$ konvergira uniformno na poluravninama $\mathbb{R}\times\langle\varepsilon, +\infty\rangle$ za $\varepsilon > 0$, odnosno za $|q| < r < 1$. Neka je $\delta > 0$ takav da za $|z| < \delta$ vrijedi

$$|\operatorname{Ln}(1+z)| \leq 2\,|z|$$

(vidi (1.4)). Ako je $N \in \mathbb{Z}_{>0}$ dovoljno velik da je $r^N < \delta$, za $n \geq N$ i $|q| < r$ vrijedi $|q^n| < r^n \leq r^N < \delta$ pa je

$$|\operatorname{Ln}(1-q^n)| \leq 2|q^n| \leq 2r^n,$$

odakle zbog konvergencije reda $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ slijedi da red $\sum_{n=N}^{\infty} \mathrm{Ln}(1-q^n)$ za $|q| < r$ konvergira normalno, pa red $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Ln}(1-q^n)$ za $|q| < r$ konvergira uniformno.

Sada iz (3.37) dobivamo

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = 2\pi i + 24 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2\pi i n q^n}{1-q^n} = 2\pi i - 24 \cdot 2\pi i \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} n q^{nm}, \qquad z \in H.$$

U dokazu propozicije 3.3.11 pokazali smo da red na desnoj strani konvergira apsolutno, pa u njemu smijemo promijeniti poredak sumacije. Dobivamo

$$\begin{aligned} \frac{F'(z)}{F(z)} &= 2\pi i - 24 \cdot 2\pi i \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} n q^{nm} = \frac{6i}{\pi} \left(2\zeta(2) + 2 \cdot (2\pi i)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n q^{nm} \right) = \\ &\overset{(3.23)}{=} \frac{6i}{\pi} G_1(z), \qquad z \in H. \end{aligned} \tag{3.38}$$

Odavde slijedi da je logaritamska derivacija desne strane u (3.36)

$$\frac{\left(z^{12}F(z)\right)'}{z^{12}F(z)} = \frac{12}{z} + \frac{F'(z)}{F(z)} \overset{(3.38)}{=} \frac{12}{z} + \frac{6i}{\pi} G_1(z), \qquad z \in H,$$

dok je logaritamska derivacija lijeve strane

$$\begin{aligned} \frac{F\left(-\frac{1}{z}\right)'}{F\left(-\frac{1}{z}\right)} &= \frac{F'\left(-\frac{1}{z}\right)}{F\left(-\frac{1}{z}\right)} \cdot \frac{1}{z^2} \overset{(3.38)}{=} \frac{6i}{\pi z^2} G_1\left(-\frac{1}{z}\right) = \frac{6i}{\pi z^2} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{n\in\mathbb{Z}}{}' \frac{1}{\left(-\frac{m}{z} + n\right)^2} = \\ &= \frac{6i}{\pi} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{n\in\mathbb{Z}}{}' \frac{1}{(m+nz)^2} = \frac{6i}{\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{m\in\mathbb{Z}}{}' \frac{1}{(mz+n)^2} = \frac{6i}{\pi} G(z), \qquad z \in H. \end{aligned}$$

Preostaje pokazati da vrijedi

$$\frac{6i}{\pi} G(z) = \frac{12}{z} + \frac{6i}{\pi} G_1(z), \qquad z \in H,$$

tj. dijeljenjem sa $\frac{6i}{\pi}$, da je

$$G_1(z) = \frac{2\pi i}{z} + G(z), \qquad z \in H,$$

a to je upravo tvrdnja propozicije 3.7.2. □

3.8 Heckeovi operatori

Heckeovi operatori kao korespondencije na $\mathscr{R}$

Definicija 3.8.1. *Neka je E skup i neka je X_E slobodna Abelova grupa generirana sa E. Endomorfizam T grupe X_E zovemo* ***korespondencijom*** *na E.*

Kako je E baza slobodne Abelove grupe X_E, svaka funkcija $T : E \to X_E$ na jedinstven se način proširuje do korespondencije na E, po pravilu

$$T\left(\sum_{y\in E} n_y y\right) = \sum_{y\in E} n_y T(y)$$

za sve familije $(n_y,\ y \in E) \subseteq \mathbb{Z}$ u kojima je samo konačno mnogo elemenata različito od 0. Analogno, svaka se funkcija $F : E \to \mathbb{C}$ na jedinstven način proširuje do homomorfizma grupa $X_E \to \mathbb{C}$. U nastavku ćemo radi jednostavnosti notacije u ovim situacijama odgovarajući homomorfizam označavati istim simbolom kao polaznu funkciju.

Definicija 3.8.2. *Neka je E skup i T korespondencija na E. Neka je $F : E \to \mathbb{C}$ funkcija. Definiramo* ***transformaciju funkcije*** *F* ***korespondencijom*** *T kao funkciju*

$$TF : E \to \mathbb{C}, \qquad TF(x) := F(Tx), \qquad x \in E.$$

Za rešetku $\Gamma \in \mathscr{R}$ i $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, uvedimo oznaku

$$\Gamma(n) := \text{skup svih podrešetki od } \Gamma \text{ indeksa } n.$$

Definicija 3.8.3. *Za $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ definiramo* ***Heckeov operator*** *$T(n)$ kao korespondenciju na $\mathscr{R}$ koja svakoj rešetki u $\mathbb{C}$ pridružuje sumu svih njenih podrešetki indeksa n, tj.*

$$T(n)\,\Gamma := \sum_{\Gamma'\in\Gamma(n)} \Gamma', \qquad \Gamma \in \mathscr{R}.$$

Napomena 3.8.4. *Primijetimo da je skup $\Gamma(n)$ uvijek konačan (pa je definicija dobra). Naime, svaka rešetka $\Gamma' \in \Gamma(n)$ zadovoljava*

$$n(\omega + \Gamma') = \Gamma', \qquad \omega \in \Gamma,$$

tj. vrijedi $n\Gamma \subseteq \Gamma'$, pa je

$$\Gamma' \mapsto \Gamma'/n\Gamma$$

bijekcija skupa $\Gamma(n)$ na skup svih podgrupa grupe $\Gamma/n\Gamma$ indeksa n. Kako je grupa $\Gamma/n\Gamma$ konačna (reda n^2), zaključujemo da postoji samo konačno mnogo mogućnosti za Γ'. Precizan opis tih mogućnosti daje lema 3.8.5.

Lema 3.8.5. *Neka je $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Označimo*

$$A_n := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} : a, b, d \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ ad = n,\ b < d \right\}.$$

Neka je $\Gamma = \Gamma(\omega_1, \omega_2) \in \mathscr{R}$. Preslikavanje

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \longmapsto \Gamma\left(a\omega_1 + b\omega_2, d\omega_2\right) \tag{3.39}$$

bijekcija je $A_n \to \Gamma(n)$.

Dokaz. Neka je $\Gamma' \in \Gamma(n)$. Vrijedi

$$n = [\Gamma : \Gamma'] = [\Gamma : \Gamma' + \mathbb{Z}\omega_2]\,[\Gamma' + \mathbb{Z}\omega_2 : \Gamma'] = [\Gamma : \Gamma' + \mathbb{Z}\omega_2]\,[\mathbb{Z}\omega_2 : \Gamma' \cap \mathbb{Z}\omega_2]$$

(posljednja jednakost posljedica je Drugog teorema o izomorfizmu grupa). Grupe $\Gamma/\,(\Gamma' + \mathbb{Z}\omega_2)$ i $\mathbb{Z}\omega_2/\,(\Gamma' \cap \mathbb{Z}\omega_2)$ očito su cikličke grupe s generatorima $\omega_1 + \Gamma' + \mathbb{Z}\omega_2$ odnosno $\omega_2 + (\Gamma' \cap \mathbb{Z}\omega_2)$. Označimo njihove redove, respektivno, sa a i d. Iz gornje jednakosti slijedi $ad = n$, a po definiciji reda elementa grupe vrijedi

$$a = \min\{k \in \mathbb{Z}_{>0} : k\omega_1 \in \Gamma' + \mathbb{Z}\omega_2\}, \tag{3.40}$$

$$d = \min\{k \in \mathbb{Z}_{>0} : k\omega_2 \in \Gamma'\}. \tag{3.41}$$

Posebno vrijedi $d\omega_2 \in \Gamma'$ i postoji $b_1 \in \mathbb{Z}$ takav da je $a\omega_1 + b_1\omega_2 \in \Gamma'$. Neka je $b \in \{0, 1, \ldots, d-1\}$ takav da je $b_1 \equiv b \pmod{d}$. Tada je, zbog $\Gamma' \cap \mathbb{Z}\omega_2 = d\mathbb{Z}\omega_2$, b jedinstven element skupa $\{0, 1, \ldots, d-1\}$ takav da je $a\omega_1 + b\omega_2 \in \Gamma'$. Iz (3.40) i (3.41) lako se vidi da slobodna Abelova grupa generirana sa $\{a\omega_1 + b\omega_2, d\omega_2\}$ sadrži sve elemente rešetke Γ'. Dakle, $\{a\omega_1 + b\omega_2, d\omega_2\}$ baza je rešetke Γ.

Definirajmo preslikavanje

$$F : \Gamma(n) \to A_n, \qquad F(\Gamma') := \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}, \quad \Gamma' \in \Gamma(n),$$

gdje su koeficijenti a, b, d definirani kao gore. Jasno je da je preslikavanje (3.39) lijevi inverz funkcije F. Da bismo dokazali da se radi o bijekcijama, dovoljno je pokazati da je F surjekcija. Neka je $h = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in A_n$. Neka je $\Gamma' \in \mathscr{R}$ s bazom $\{a\omega_1 + b\omega_2, d\omega_2\}$. Tada je, za $k \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} k\omega_2 \in \Gamma' = \mathbb{Z}(a\omega_1 + b\omega_2) + d\mathbb{Z}\omega_2 \quad &\Leftrightarrow \quad d \mid k, \\ k\omega_1 \in \Gamma' + \mathbb{Z}\omega_2 = a\mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 \quad &\Leftrightarrow \quad a \mid k, \end{aligned}$$

pa vrijede (3.40) i (3.41). Slijedi $h = F(\Gamma')$. Prema tome, F je zaista surjekcija, što završava dokaz leme. $\square$

Definicija 3.8.6. *Korespondencije R_λ, $\lambda \in \mathbb{C}^*$, na $\mathscr{R}$ definirane sa*

$$R_\lambda(\Gamma) := \lambda\Gamma, \qquad \Gamma \in \mathscr{R},$$

zovemo ***operatorima homotetije****.*

Propozicija 3.8.7. *Vrijede sljedeće relacije:*

$$\begin{aligned}
R_{\lambda\mu} &= R_\lambda R_\mu, && \lambda, \mu \in \mathbb{C}^*, && (3.42)\\
R_\lambda T(n) &= T(n) R_\lambda, && \lambda \in \mathbb{C}^*, n \in \mathbb{Z}_{>0}, && (3.43)\\
T(m)T(n) &= T(mn), && m, n \in \mathbb{Z}_{>0},\ (m,n) = 1, && (3.44)\\
T(p^n)T(p) &= T(p^{n+1}) + pT(p^{n-1})R_p, && p \in \mathbb{P}, n \in \mathbb{Z}_{>0}. && (3.45)
\end{aligned}$$

Dokaz. Relacije (3.42) i (3.43) su očite.

Dokažimo (3.44). Neka je $\Gamma \in \mathscr{R}$. Jasno je da su i $T(m)T(n)\Gamma$ i $T(mn)\Gamma$ konačne sume podrešetki od Γ indeksa mn. Očito je i da se svaka rešetka iz sume $T(m)T(n)\Gamma$ u sumi $T(mn)\Gamma$ pojavljuje s koeficijentom 1. Da bismo pokazali da su te dvije sume jednake, preostaje provjeriti da za fiksnu podrešetku Γ'' od Γ indeksa mn postoji jedinstvena podrešetka Γ' od Γ indeksa n koja je sadrži, tj. da grupa Γ/Γ'' (reda mn) ima jedinstvenu podgrupu Γ'/Γ'' indeksa n, tj. reda m. Iz Strukturnog teorema za konačno generirane Abelove grupe (teorem 2.1.4) lako slijedi da, zbog $(m,n) = 1$, postoje podgrupe H_m i H_n reda m odnosno n takve da je

$$\Gamma/\Gamma'' = H_m \oplus H_n.$$

Odavde se lako vidi da je

$$H_m = \{h \in \Gamma/\Gamma'' : mh = \Gamma''\},$$

odakle je jasno da je H_m jedina podgrupa grupe Γ/Γ'' reda m, što dokazuje tvrdnju.

Dokažimo sada (3.45). Za $\Gamma \in \mathscr{R}$, i $T(p^n)T(p)$ i $T(p^{n+1}) + pT(p^{n-1})R_p$ očito su konačne sume podrešetki od Γ indeksa p^{n+1}. Da bismo pokazali da su te dvije sume jednake, dovoljno je provjeriti da se proizvoljna fiksna rešetka Γ'' indeksa p^{n+1} u Γ u njima pojavljuje s istim koeficijentom. Neka su a, b i c koeficijenti s kojima se Γ'' pojavljuje u sumi $T(p^n)T(p)$, $T(p^{n+1})$ odnosno $T(p^{n-1})R_p$. Želimo pokazati da vrijedi $a = b + pc$. Očito je $b = 1$.

a je broj podgrupa grupe $\Gamma/p\Gamma$ indeksa p koje sadrže sliku rešetke Γ'' po kanonskom epimorfizmu $\Phi : \Gamma \to \Gamma/p\Gamma$ (vidi bijekciju iz napomene 3.8.4, uz $n = p$). Kako je $p\Gamma'' \subseteq p\Gamma$, $\Phi(\Gamma'')$ je podgrupa grupe $\Gamma/p\Gamma$ reda 1 ili p.

(a) U slučaju reda 1 sve podgrupe od $\Gamma/p\Gamma$ sadrže $\Phi(\Gamma'') = p\Gamma$, pa je a jednak broju podgrupa grupe $\Gamma/p\Gamma \cong (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ indeksa p (tj. reda p), a lako se vidi da je to $p + 1$. Kako je u tom slučaju $\Gamma'' \subseteq p\Gamma = R_p\Gamma$, očito je $c = 1$, pa vrijedi $a = 1 + pc$.

(b) U slučaju reda p, sama $\Phi(\Gamma')$ očito je jedina podgrupa indeksa p u $\Gamma/p\Gamma$ koja sadrži $\Phi(\Gamma')$, pa je $a = 1$. Kako u ovom slučaju $\Gamma' \not\subseteq p\Gamma$, vrijedi $c = 0$, pa i ovdje vrijedi $a = 1 + pc$.

Time je relacija (3.45) dokazana. □

Korolar 3.8.8. *(i) Za svaki $p \in \mathbb{P}$, korespondencije $T(p^n)$, $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, polinomi su u R_p i $T(p)$.*

(ii) Algebra A generirana sa $\{R_\lambda,\ \lambda \in \mathbb{C}^*\} \cup \{T(p),\ p \in \mathbb{P}\}$ komutativna je i sadrži sve $T(n)$, $n \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Dokaz. *(i)* Tvrdnja slijedi induktivnom primjenom relacije (3.45).

(ii) Relacije (3.42), (3.43) i (3.44) pokazuju da je algebra A komutativna, a iz (i) i (3.44) slijedi da je za svaki $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ korespondencija $T(n)$ polinom u R_p i $T(p)$, $p \in \mathbb{P}_{\leq n}$, dakle element algebre A. □

U slučaju korespondencija $T(n)$, $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, odnosno R_λ, $\lambda \in \mathbb{C}^*$, definicija transformacije funkcije korespondencijom (definicija 3.8.2) prirodno se proširuje i na slučaj funkcija s kodomenom $\overline{\mathbb{C}}$.

Propozicija 3.8.9. *Neka je $k \in \mathbb{Z}$ i neka su $m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$.*

(i) Funkcija $F : \mathscr{R} \to \overline{\mathbb{C}}$ težine je $2k$ ako i samo ako vrijedi

$$R_\lambda F = \lambda^{-2k} F, \qquad \lambda \in \mathbb{C}^*.$$

(ii) Ako je $F : \mathscr{R} \to \overline{\mathbb{C}}$ težine $2k$, tada je i $T(n)F : \mathscr{R} \to \overline{\mathbb{C}}$ težine $2k$.

(iii) Vrijede sljedeće relacije:

$$T(m)T(n)F = T(mn)F, \qquad (m,n) = 1, \tag{3.46}$$

$$T(p)T(p^n)F = T(p^{n+1})F + p^{1-2k}T(p^{n-1})F, \qquad p \in \mathbb{P}. \tag{3.47}$$

Dokaz. *(i)* Po definiciji F je težine $2k$ ako i samo ako za sve $\Gamma \in \mathscr{R}$ i $\lambda \in \mathbb{C}^*$ vrijedi $F(\lambda\Gamma) = \lambda^{-2k}F(\Gamma)$, tj. ako i samo ako za sve $\lambda \in \mathbb{C}^*$ vrijedi $R_\lambda F = \lambda^{-2k}F$.

(ii) Ako je F težine $2k$, onda je za sve $\lambda \in \mathbb{C}^*$

$$R_\lambda T(n)F = F \circ T(n)R_\lambda \overset{(3.43)}{=} F \circ R_\lambda T(n) = T(n)R_\lambda F \overset{\text{(i)}}{=} T(n)(\lambda^{-2k}F) = \lambda^{-2k}T(n)F$$

pa je, prema (i), $T(n)F$ funkcija težine $2k$.

(iii) (3.46) direktna je posljedica relacije (3.44). Nadalje, za $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ i prost broj p imamo

$$\begin{aligned} T(p)T(p^n)F &= F \circ T(p^n)T(p) \overset{(3.45)}{=} F \circ \left(T(p^{n+1}) + pT(p^{n-1})R_p\right) = \\ &= F \circ T(p^{n+1}) + pF \circ T(p^{n-1})R_p = T(p^{n+1})F + pR_pT(p^{n-1})F = \\ &\overset{\text{(ii), (i)}}{=} T(p^{n+1})F + p^{1-2k}T(p^{n-1})F, \end{aligned}$$

dakle vrijedi i (3.47). □

Heckeovi operatori kao linearni operatori na prostorima modularnih funkcija

Neka je $k \in \mathbb{Z}$. Po propoziciji 3.2.9 relacija

$$F(\Gamma(\omega_1, \omega_2)) = \omega_2^{-2k} f\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right), \qquad (\omega_1, \omega_2) \in M, \tag{3.48}$$

ostvaruje bijekciju između skupa slabo modularnih funkcija težine $2k$ i odgovarajućeg podskupa skupa funkcija $\mathscr{R} \to \overline{\mathbb{C}}$ težine $2k$.

Neka je $f : H \to \overline{\mathbb{C}}$ slabo modularna funkcija težine $2k$ i neka je $F : \mathscr{R} \to \overline{\mathbb{C}}$ odgovarajuća funkcija težine $2k$. Neka je $n \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Definicija 3.8.10. *Definiramo*

$$T(n)f := \textit{funkcija pridružena funkciji } n^{2k-1}T(n)F \textit{ relacijom } (3.48).$$

Lema 3.8.11. *Vrijedi*

$$(T(n)f)(z) = n^{2k-1} \sum_{\substack{a,b,d \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \\ ad=n,\ b<d}} d^{-2k} f\left(\frac{az+b}{d}\right), \qquad z \in H. \tag{3.49}$$

Dokaz. Koristeći lemu 3.8.5, računamo, za $z \in H$,

$$\begin{aligned} (T(n)f)(z) &= \left(n^{2k-1}T(n)F\right)(\Gamma(z,1)) = n^{2k-1} \sum_{[\Gamma(z,1):\Gamma']=n} F(\Gamma') = \\ &= n^{2k-1} \sum_{\substack{a,b,d \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \\ ad=n,\ b<d}} F(\Gamma(az+b, d)) \overset{(3.48)}{=} n^{2k-1} \sum_{\substack{a,b,d \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \\ ad=n,\ b<d}} d^{-2k} f\left(\frac{az+b}{d}\right). \end{aligned}$$

□

Propozicija 3.8.12. *(i) $T(n)f$ je slabo modularna funkcija težine $2k$.*

(ii) Ako je f holomorfna na H, tada je i $T(n)f$ holomorfna na H.

(iii) Vrijede sljedeće relacije:

$$T(m)T(n)f = T(mn)f, \qquad m,n \in \mathbb{Z}_{>0},\ (m,n) = 1, \tag{3.50}$$

$$T(p)T(p^n)f = T(p^{n+1})f + p^{2k-1}T(p^{n-1})f, \qquad p \in \mathbb{P},\ n \in \mathbb{Z}_{>0}. \tag{3.51}$$

Dokaz. (i) Kako je $n^{2k-1}T(n)F$ funkcija težine $2k$ (propozicija 3.8.9.(ii)), po propoziciji 3.2.9 odgovarajuća funkcija $T(n)f : H \to \overline{\mathbb{C}}$ zadovoljava uvjet modularnosti (3.4). Nadalje, iz (3.49) jasno je da je f, kao konačna suma meromorfnih funkcija, meromorfna funkcija na H. Dakle, f je modularna funkcija težine $2k$.

(ii) Tvrdnja je očita iz (3.49).

(iii) Imamo

$$\begin{aligned} T(m)T(n)f \quad &\leftrightarrow \quad m^{2k-1}T(m)\left(n^{2k-1}T(n)F\right) = (mn)^{2k-1}T(m)T(n)F = \\ &\overset{(3.46)}{=} (mn)^{2k-1}T(mn)F \quad \leftrightarrow \quad T(mn)f, \end{aligned}$$

gdje $\leftrightarrow$ označava bijekciju definiranu relacijom (3.48). Dakle, vrijedi (3.50). Slično, iz

$$\begin{aligned} T(p)T(p^n)f \quad &\leftrightarrow \quad p^{2k-1}T(p)\left(p^{n(2k-1)}T(p^n)F\right) = \\ = p^{(n+1)(2k-1)}T(p)T(p^n)F &\overset{(3.47)}{=} p^{(n+1)(2k-1)}\left(T(p^{n+1})F + p^{1-2k}T(p^{n-1})F\right) = \\ = p^{(n+1)(2k-1)}T(p^{n+1})F + p^{n(2k-1)}T(p^{n-1})F \quad &\leftrightarrow \quad T(p^{n+1})f + p^{2k-1}T(p^{n-1})f \end{aligned}$$

slijedi (3.51). □

Propozicija 3.8.13. *Ako je f modularna funkcija težine $2k$ s Fourierovim razvojem*

$$f(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} c(m)q^m, \qquad z \in H,$$

tada je i $T(n)f$ modularna funkcija težine $2k$, s Fourierovim razvojem

$$(T(n)f)(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \gamma(m)q^m,$$

gdje je

$$\gamma(m) = \sum_{\substack{a \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \\ a | (n,m)}} a^{2k-1} c\left(\frac{mn}{a^2}\right), \qquad m \in \mathbb{Z}. \tag{3.52}$$

Dokaz. U sljedećem raspisu zbog apsolutne konvergencije Fourierova reda funkcije f na H (sjetimo se da je to zapravo Laurentov red funkcije $\tilde{f}$ oko 0 na $K^\times(0,1)$) smijemo po volji mijenjati poredak sumacije. Za $z \in H$ imamo

$$
\begin{aligned}
(T(n)f)(z) &\overset{(3.49)}{=} n^{2k-1} \sum_{\substack{a,b,d\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\\ ad=n,\ b<d}} d^{-2k} \sum_{m\in\mathbb{Z}} c(m) e^{2\pi i m \frac{az+b}{d}} = \\
&= n^{2k-1} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{\substack{a,d\in\mathbb{Z}_{\geq 1}\\ ad=n}} d^{-2k} c(m) e^{2\pi i m \frac{az}{d}} \sum_{b=0}^{d-1} \left(e^{2\pi i \frac{m}{d}}\right)^b .
\end{aligned}
$$

Kako je

$$
\sum_{b=0}^{d-1} \left(e^{2\pi i \frac{m}{d}}\right)^b = \begin{cases} d\cdot 1 = d, & \text{ako } \frac{m}{d} \in \mathbb{Z}, \\ \frac{1-\left(e^{2\pi i \frac{m}{d}}\right)^d}{1-e^{2\pi i \frac{m}{d}}} = 0, & \text{ako } \frac{m}{d} \notin \mathbb{Z}, \end{cases} \qquad d \in \mathbb{Z}_{\geq 1},
$$

slijedi

$$
\begin{aligned}
(T(n)f)(z) &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{\substack{a,d\in\mathbb{Z}_{\geq 1}\\ ad=n,\ d\mid m}} \left(\frac{n}{d}\right)^{2k-1} c(m) e^{2\pi i \frac{m}{d} az} = \quad \left[m' = \frac{m}{d}\right] \quad = \\
&= \sum_{m'\in\mathbb{Z}} \sum_{\substack{a,d\in\mathbb{Z}_{\geq 1}\\ ad=n}} a^{2k-1} c(m'd) q^{m'a} = \quad [m = m'a] \quad = \\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{\substack{a,d\in\mathbb{Z}_{\geq 1}\\ a\mid m,\ ad=n}} a^{2k-1} c\left(\frac{md}{a}\right) q^m = \\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{\substack{a\in\mathbb{Z}_{\geq 1}\\ a\mid (m,n)}} a^{2k-1} c\left(\frac{mn}{a^2}\right) \right) q^m .
\end{aligned}
$$

Time je dokazana tvrdnja o Fourierovu razvoju funkcije $T(n)f$.

Po propoziciji 3.8.12.(i) $T(n)f$ je slabo modularna funkcija težine $2k$. Da bismo dokazali da je modularna, preostaje pokazati da je meromorfna u beskonačnosti, tj. da postoji $m_0 \in \mathbb{Z}$ takav da za $m < m_0$ vrijedi $\gamma(m) = 0$. Neka je $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ takav da je $c(m) = 0$ za $m \leq -N$. Tada za $m \leq -nN$ vrijedi

$$
a \in \mathbb{Z}_{\geq 1},\ a \mid (m,n) \quad \Rightarrow \quad \frac{mn}{a^2} < -\frac{n^2}{a^2} N \leq -N \quad \Rightarrow \quad c\left(\frac{mn}{a^2}\right) = 0
$$

pa je, po (3.52), $\gamma(m) = 0$. Dakle, $T(n)f$ je modularna funkcija težine $2k$. $\square$

Korolar 3.8.14. *Uz oznake propozicije 3.8.13, vrijedi*

$$\gamma(0) = \sigma_{2k-1}(n)\, c(0), \qquad \gamma(1) = c(n),$$

a u slučaju kad je $n = p \in \mathbb{P}$

$$\gamma(m) = \begin{cases} c(mp), & p \nmid m, \\ c(mp) + p^{2k-1} c\left(\frac{m}{p}\right), & p \mid m, \end{cases} \qquad m \in \mathbb{Z}.$$

Dokaz. Sve tvrdnje direktna su posljedica (3.52). □

Korolar 3.8.15. *$T(n)$ je linearan operator na prostorima M_k i M_k^0.*

Dokaz. Linearnost od $T(n)$ je očita. Ako je f modularna forma težine $2k$, tj. za sve $m \in \mathbb{Z}_{<0}$ vrijedi $c(m) = 0$, tada, po (3.52), vrijedi i $\gamma(m) = 0$ za sve $m \in \mathbb{Z}_{<0}$, pa je $T(n)f$ ne samo modularna funkcija težine $2k$ (propozicija 3.8.13), već i modularna forma. Ako je f čak kusp forma, tj. vrijedi i $c(0) = 0$, tada je, po korolaru 3.8.15, i $\gamma(0) = \sigma_{2k-1}(n)\, c(0) = 0$, pa je i $T(n)f$ kusp forma. Slijedi tvrdnja korolara. □

Svojstvene funkcije operatora $T(n)$

Neka je $k \in \mathbb{Z}_{>0}$. Neka je $f = \sum_{m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} c(m) q^m \in M_k \backslash \{0\}$ svojstvena funkcija svih operatora $T(n)$, $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, i neka je $(\lambda(n))_{n \in \mathbb{Z}_{>0}} \subseteq \mathbb{C}$ odgovarajući niz svojstvenih vrijednosti, tj.

$$T(n)f = \lambda(n) f, \qquad n \in \mathbb{Z}_{>0}. \tag{3.53}$$

Lema 3.8.16. *Vrijedi*

$$c(n) = \lambda(n) c(1), \qquad n \in \mathbb{Z}_{>0}.$$

Dokaz. Neka je $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ i neka su $\gamma(m)$, $m \in \mathbb{Z}$, Fourierovi koeficijenti funkcije $T(n)f$. Budući da je f svojstvena funkcija operatora $T(n)$, vrijedi $\gamma(1) = \lambda(n) c(1)$, a po korolaru 3.8.14 je $\gamma(1) = c(n)$. Slijedi tvrdnja. □

Lema 3.8.17. *Vrijedi $c(1) \neq 0$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $c(1) = 0$. Tada je, po lemi 3.8.16, $c(n) = 0$ za sve $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, pa je f konstantna funkcija. Ali to je nemoguće jer u skupu $M_k \backslash \{0\}$ očito nema konstantnih funkcija. Dakle, $c(1) \neq 0$. □

U nastavku pretpostavljamo da je f normalizirana uvjetom $c(1) = 1$.

Teorem 3.8.18. *(i) Vrijedi*

$$c(n) = \lambda(n), \quad n \in \mathbb{Z}_{>0}.$$

(ii) Svojstvene vrijednosti $\lambda(n)$, $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, jedinstveno određuju funkciju f.

Dokaz. (i) Slijedi direktno iz leme 3.8.16.

(ii) Neka je $g = \sum_{m\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} d(m)q^m \in M_k$, pri čemu je $d(1) = 1$ i vrijedi $T(n)g = \lambda(n)g$, $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Tada je, po (i), $c(n) = d(n)$ za sve $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, pa je $g - f$ konstantna funkcija u M_k, dakle $g - f \equiv 0$, tj. $g = f$. □

Korolar 3.8.19. *Vrijedi*

$$c(mn) = c(m)c(n), \qquad m, n \in \mathbb{Z}_{>0},\ (m, n) = 1, \tag{3.54}$$

$$c(p)c(p^n) = c(p^{n+1}) + p^{2k-1}c(p^{n-1}), \qquad n \in \mathbb{Z}_{>0}, p \in \mathbb{P}. \tag{3.55}$$

Dokaz. Uvrštavanjem (3.53) u relacije (3.50) i (3.51) dobivamo

$$\lambda(m)\lambda(n) = \lambda(mn), \qquad m, n \in \mathbb{Z}_{>0},\ (m, n) = 1,$$

$$\lambda(p)\lambda(p^n) = \lambda(p^{n+1}) + p^{2k-1}\lambda(p^{n-1}), \qquad n \in \mathbb{Z}_{>0}, p \in \mathbb{P},$$

odakle primjenom teorema 3.8.18.(i) slijedi tvrdnja. □

Sjetimo se da običan Dirichletov red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c(n)}{n^s}$ konvergira apsolutno za $\operatorname{Re} s > 2k$ i definira holomorfnu funkciju $\Phi_f : \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > 2k\} \to \mathbb{C}$ (korolar 3.6.4).

Teorem 3.8.20. *Vrijedi produktna formula*

$$\Phi_f(s) = \prod_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{1 - \frac{c(p)}{p^s} + p^{2k-1-2s}}, \qquad \operatorname{Re} s > 2k, \tag{3.56}$$

pri čemu beskonačan produkt na desnoj strani konvergira normalno po kompaktima.

Dokaz. Neka je $\operatorname{Re} s > 2k$. Budući da red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c(n)}{n^s}$ konvergira apsolutno, a funkcija $c : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{C}$ je multiplikativna (jer vrijedi $c(1) = 1$ i (3.54)), po lemi 2.2.11 vrijedi

$$\Phi_f(s) = \prod_{p\in\mathbb{P}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c(p^n)}{p^{ns}}.$$

Prema tome, da bismo dokazali (3.56), dovoljno je pokazati da je za svaki $p \in \mathbb{P}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c(p^n)}{p^{ns}} = \frac{1}{1 - \frac{c(p)}{p^s} + p^{2k-1-2s}}, \tag{3.57}$$

tj., uz $X := \frac{1}{p^s}$,

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} c(p^n)X^n\right)\left(1 - c(p)X + p^{2k-1}X^2\right) = 1.$$

Grupiranjem po potencijama od X, dobivamo da je lijeva strana ove jednakosti $\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$, gdje je

$$a_n = \begin{cases} c(1) = 1, & \text{ako je } n = 0, \\ c(p) - c(1)c(p) = 0, & \text{ako je } n = 1, \\ c(p^n) - c(p^{n-1})c(p) + p^{2k-1}c(p^{n-2}) \overset{(3.55)}{=} 0, & \text{ako je } n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}, \end{cases}$$

pa (3.57) zaista vrijedi. Time je dokazana produktna formula (3.56).

Iz ocjene, za $\operatorname{Re} s \geq x > 2k$,

$$\left| \frac{1}{1 - \frac{c(p)}{p^s} + p^{2k-1-2s}} - 1 \right| \overset{(3.57)}{=} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c(p^n)}{p^{ns}} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|c(p^n)|}{p^{nx}}, \qquad p \in \mathbb{P},$$

i

$$\sum_{p \in \mathbb{P}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|c(p^n)|}{p^{nx}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|c(n)|}{n^x} < \infty,$$

vidimo da beskonačan produkt u (3.56) konvergira normalno na poluravninama $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s \geq x\}$, $x > 2k$, pa i na kompaktima u $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > 2k\}$. □

Teorem 3.8.21. *Neka je $k \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$. Eisensteinov red G_k svojstvena je funkcija operatora $T(n)$, $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, sa svojstvenim vrijednostima $\sigma_{2k-1}(n)$, $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Normalizirana svojstvena funkcija je*

$$G_k^{\text{norm}}(z) := \frac{(-1)^k B_k}{4k} + \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{2k-1}(n) q^n, \qquad z \in H, \tag{3.58}$$

a odgovarajući je Dirichletov red

$$\Phi_{G_k^{\text{norm}}}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_{2k-1}(n)}{n^s} = \zeta(s)\zeta(s + 1 - 2k), \qquad \operatorname{Re} s > 2k.$$

Dokaz. Izračunajmo $T(p)G_k$ za $p \in \mathbb{P}$. Modularnoj formi $G_k : H \to \mathbb{C}$ po relaciji (3.48) odgovara funkcija $G_k : \mathscr{R} \to \mathbb{C}$,

$$G_k(\Gamma) := \sum_{\gamma \in \Gamma \setminus \{0\}} \frac{1}{\gamma^{2k}}, \qquad \Gamma \in \mathscr{R},$$

težine $2k$. Iz dokaza leme 3.3.1 lako slijedi da red na desnoj strani za svaki $\Gamma \in \mathscr{R}$ konvergira apsolutno. Za $\Gamma \in \mathscr{R}$ imamo

$$(T(p)G_k)(\Gamma) = \sum_{[\Gamma:\Gamma']=p} \sum_{\gamma \in \Gamma' \setminus \{0\}} \frac{1}{\gamma^{2k}}.$$

Kako se $\gamma \in \Gamma'\backslash\{0\}$ nalazi u svih $p+1$ podrešetki od Γ indeksa p ako je $\gamma \in p\Gamma$ (jer je $p\Gamma \subseteq \Gamma'$ za sve $\Gamma' \in \Gamma(p)$; vidi napomenu 3.8.4), a samo u jednoj takvoj podrešetki (praslici po kanonskom epimorfizmu $\Gamma \to \Gamma/p\Gamma$ podgrupe od $\Gamma/p\Gamma$ generirane sa $\gamma + p\Gamma$) ako $\gamma \notin p\Gamma$, slijedi

$$\begin{aligned}(T(p)G_k)(\Gamma) &= (p+1)\sum_{\gamma\in(p\Gamma)\backslash\{0\}}\frac{1}{\gamma^{2k}} + \sum_{\gamma\in\Gamma\backslash(p\Gamma)}\frac{1}{\gamma^{2k}} = \sum_{\gamma\in\Gamma\backslash\{0\}}\frac{1}{\gamma^{2k}} + p\sum_{\gamma\in(p\Gamma)\backslash\{0\}}\frac{1}{\gamma^{2k}} = \\ &= G_k(\Gamma) + pG_k(p\Gamma) = \left(1 + p^{-2k+1}\right)G_k(\Gamma).\end{aligned}$$

Zato je, po definiciji funkcije $T(n)G_k : H \to \mathbb{C}$,

$$T(n)G_k = p^{2k-1}\left(1 + p^{-2k+1}\right)G_k = \sigma_{2k-1}(p)G_k.$$

Dakle, G_k je svojstvena funkcija operatora $T(p)$, $p \in \mathbb{P}$. Zahvaljujući relacijama (3.50) i (3.51), odatle lako slijedi da je G_k svojstvena funkcija svih $T(n)$, $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Iz Fourierova razvoja funkcije G_k (korolar 3.3.12) čitamo da je normalizirana svojstvena funkcija

$$G_k^{\mathrm{norm}}(z) := \frac{\zeta(2k)(2k-1)!}{(2\pi i)^{2k}} + \sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{2k-1}(n)\,q^n, \qquad z \in H,$$

što pomoću formule (3.18) prelazi u (3.58). Po teoremu 3.8.18.(i) iz koeficijenata tog razvoja čitamo da su pripadne svojstvene vrijednosti $\sigma_{2k-1}(n)$, $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Napokon, kako za $\operatorname{Re} s > 2k$ redovi $\sum_{d=1}^{\infty}\frac{1}{d^s}$ i $\sum_{a=1}^{\infty}\frac{1}{a^{s+1-2k}}$ konvergiraju apsolutno, koristeći propoziciju 1.2.10 dobivamo da za $\operatorname{Re} s > 2k$ vrijedi

$$\zeta(s)\zeta(s+1-2k) = \left(\sum_{d=1}^{\infty}\frac{1}{d^s}\right)\left(\sum_{a=1}^{\infty}\frac{1}{a^{s+1-2k}}\right) = \sum_{a,d\in\mathbb{Z}_{>0}}\frac{a^{2k-1}}{(ad)^s} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_{2k-1}(n)}{n^s} = \Phi_{G_k^{\mathrm{norm}}}(s). \qquad \square$$

Teorem 3.8.22. *Kusp forme Δ, ΔG_2, ΔG_3, ΔG_4, ΔG_5 i ΔG_7 svojstvene su funkcije operatora $T(n)$, $n \in \mathbb{Z}_{>0}$.*

Dokaz. Kako su prostori M_6^0, M_8^0, M_9^0, M_{10}^0, M_{11}^0 i M_{13}^0 jednodimenzionalni (teorem 3.4.9.(iv)), svi njihovi elementi različiti od 0 trivijalno su svojstvene funkcije svih linearnih operatora na tim prostorima. Naravno, to vrijedi i za kusp forme Δ, ΔG_2, ΔG_3, ΔG_4, ΔG_5 i ΔG_7 i operatore $T(n)$, $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. $\square$

Ramanujanova τ funkcija

Definicija 3.8.23. *Neka su $\tau(n)$, $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, Fourierovi koeficijenti kusp forme $(2\pi)^{-12}\Delta$, tj.*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)q^n = (2\pi)^{-12}\Delta \overset{(3.34)}{=} q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24}, \qquad z \in H.$$

*Funkciju $\tau : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{C}$ zovemo **Ramanujanovom τ funkcijom**.*

Ramanujan je proučavao svojstva funkcije τ. Naslutio je, ali nije uspio dokazati, i tvrdnju sljedećeg teorema.

Teorem 3.8.24. *Funkcija τ je multiplikativna i vrijedi*

$$\tau(p^{n+1}) = \tau(p)\tau(p^n) - p^{11}\tau(p^{n-1}), \qquad p \in \mathbb{P},\ n \in \mathbb{Z}_{>0}.$$

Dokaz. Kako je Δ svojstvena funkcija operatora $T(n)$, $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, (teorem 3.8.22), a koeficijent uz q u njezinu Fourierovu razvoju upravo je $(2\pi)^{12}$ (vidi dokaz teorema 3.7.3), $(2\pi)^{-12}\Delta$ je normalizirana svojstvena funkcija operatora $T(n)$. Dakle, $\tau(1) = 1$ i po korolaru 3.8.19 vrijede relacije

$$\begin{aligned} \tau(mn) &= \tau(m)\tau(n), && m, n \in \mathbb{Z}_{>0},\ (m, n) = 1, \\ \tau(p)\tau(p^n) &= \tau(p^{n+1}) + p^{11}\tau(p^{n-1}), && n \in \mathbb{Z}_{>0}, p \in \mathbb{P}, \end{aligned}$$

što dokazuje tvrdnju. □

1974. godine P. Deligne je dokazao da vrijedi

$$|\tau(p)| \leq 2p^{\frac{11}{2}}, \qquad p \in \mathbb{P}.$$

Ni do danas nisu otkrivene sve tajne funkcije τ. Završimo poznatom slutnjom.

Slutnja 3.8.25 (Lehmerova slutnja o Ramanujanovoj τ funkciji)**.** *Vrijedi*

$$\tau(n) \neq 0, \qquad n \in \mathbb{Z}_{>0}.$$

Tvrdnja je dokazana za $n < 22798241520242687999 \approx 2 \cdot 10^{19}$ (J. Bosman 2007.).

Bibliografija

[1] P. G. L. Dirichlet, *There are infinitely many prime numbers in all arithmetic progressions with first term and difference coprime*, arXiv preprint (2008), `http://arxiv.org/abs/0808.1408`.

[2] E. Freitag, R. Busam i D. Fulea, *Complex analysis*, sv. 2, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005.

[3] J. P. Serre, *A course in arithmetic*, sv. 97, Springer-Verlag New York, 1973.

Sažetak

Ovaj je rad uvod u analitičku teoriju brojeva i teoriju modularnih formi. U prvom dijelu rada dokazujemo Dirichletov teorem o prostim brojevima u aritmetičkim nizovima. U drugom dijelu proučavamo modularne forme: konstruiramo osnovne primjere modularnih funkcija i modularnih formi (Eisensteinov red, modularnu diskriminantu i modularnu invarijantu) i istražujemo njihova svojstva; određujemo dimenzije i konstruiramo baze prostora modularnih formi; uvodimo Heckeove operatore kao korespondencije na skupu rešetki u $\mathbb{C}$ i istražujemo svojstva njihovih svojstvenih funkcija.

Summary

This thesis is an introduction to analytic number theory and the theory of modular forms. In the first part of the thesis, we prove the Dirichlet's theorem on primes in arithmetic progressions. In the second part, we study modular forms: we construct basic examples of modular functions and modular forms (the Eisenstein series, the modular discriminant and the modular invariant) and investigate their properties; we find the dimensions and construct bases of spaces of modular forms; we introduce the Hecke operators as correspondences on the set of lattices in $\mathbb{C}$ and investigate properties of their eigenfunctions.

Životopis

Rođena sam 20. veljače 1991. u Varaždinu. Pohađala sam Osnovnu školu Ivana Kukuljevića Sakcinskog u Ivancu i završila opću gimnaziju u Srednjoj školi Ivanec. Zahvaljujući uspjesima na natjecanjima iz matematike i hrvatskog jezika tijekom školovanja, 2009. godine proglašena sam najboljom učenicom završnih razreda srednjih škola Varaždinske županije. Iste sam godine upisala preddiplomski sveučilišni studij *Matematika* na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu, a nakon njega diplomski sveučilišni studij *Teorijska matematika* na istom fakultetu. Tijekom studija bila sam demonstratorica iz kolegija *Diferencijalni račun funkcija više varijabli* i *Kompleksna analiza*. Krajem preddiplomskog i diplomskog studija nagrađena sam Pohvalnicama Fakultetskog vijeća za izuzetan uspjeh u studiju.