Povezanost interesa i konceptualne promjene pri učenju matematike

Kurtović, Anamarija

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Anamarija Kurtović

POVEZANOST INTERESA I KONCEPTUALNE PROMJENE PRI UČENJU MATEMATIKE

Diplomski rad

Voditeljice rada:
Prof. dr. sc. Aleksandra Čižmešija
Doc. dr. sc. Daria Rovan

Zagreb, 2016.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ______________________________________ pred nastavničkim povjerenstvom u sastavu:

1. ____, predsjednik

2. ____, član

3. ____, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom __________________________________ .

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____

2. ____

3. ____

Zahvaljujem se mentoricama prof. dr. sc. Aleksandri Čižmešiji i doc. dr. sc. Dariji Rovan na pomoći, suradnji, strpljenju i savjetima tijekom izrade ovog rada.

Zahvaljujem se svim ravnateljima i učenicima koji su sudjelovali u istraživanju.

Zahvaljujem se suprugu, obitelji i prijateljima na podršci koju su mi pružili tijekom izrade diplomskog rada.

Sadržaj

UVOD ... **5**

1. INTERES I KONCEPTUALNA PROMJENA ... **7**

1.1 Razvoj koncepta interesa ... 7

1.2 Teorijski pristupi interesu ... 9

1.3 Četverofazni model razvoja interesa ... 12

1.4 Učinci interesa na procese i ishode učenja ... 15

1.5 Teorijski pristupi konceptualnoj promjeni ... 16

1.6 Okvirna teorija kao pristup razumijevanju konceptualne promjene ... 19

1.7 Pristup okvirne teorije u razumijevanju konceptualne promjene u matematici ... 24

1.8 Povijesni pregled i porijeklo imena hiperbole ... 27

2. CILJ, PROBLEM I HIPOTEZE ISTRAŽIVANJA ... **34**

3. METODOLOGIJA ISTRAŽIVANJA ... **35**

3.1 Sudionici ... 35

3.2 Postupak ... 35

3.3 Instrumenti ... 36

4. REZULTATI I DISKUSIJA ... **39**

4.1 Kvalitativna analiza rezultata po zadacima vezanima uz koncept hiperbole ... 39

4.2 Osobni i situacijski interes za učenje matematike ... 56

4.3 Povezanost interesa i konceptualne promjene ... 57

5. UČENIČKO OTKRIVANJE KONCEPTA HIPERBOLE U NASTAVI ... **60**

5.1 Nastavni sat uvođenja koncepta hiperbole ... 61

5.1.1 Aktivnost *Otkrij hiperbolu* ... 61

5.1.2 Druga aktivnost ... 67

5.1.3 Aktivnost *Otkrij vezu između točaka hiperbole i istaknutih fiksnih točaka* ... 70

5.1.4 Aktivnost *Otkrij vezu između* $|F_1F_2|$ i $|r_1 - r_2|$ ... 73

5.1.5 Aktivnost *Crtaj hiperbolu* ... 75

5.1.6 Završni dio sata ... 80

5.2 Nastavni sat otkrivanja jednadžbe hiperbole ... 83

5.2.1 Aktivnost *Otkrij osi simetrije hiperbole* ... 83

5.2.2 Aktivnost *Hiperbola u koordinatnom sustavu* ... 87

5.2.3 Aktivnost *Otkrij koordinate istaknutih točaka* ... 89

5.2.4 Aktivnost *Otkrijmo jednadžbu hiperbole* ... 90

5.2.5 Aktivnost *Odredi elemente hiperbole* ... 96

5.2.6 Završni dio sata ... 98

Zaključak ... **105**

Literatura ... **106**

Sažetak ... **108**

Summary ... **109**

Životopis ... **110**

Prilozi ... **111**

UVOD

Interes učenika je vrlo snažan poticaj za učenje te značajno doprinosi uspješnosti nastave matematike. Međutim, dio učenika matematiku smatra teškom, suhoparnom, predmetom koji zamara um te koji mnogima neće trebati u životu. Tu leži jedna od krivih predodžbi o matematici. Matematika pomaže učenicima razviti sposobnost rješavanja problema i logičkog zaključivanja. Rješavanjem problema učenici mogu doživjeti moć matematike, njezinu važnost i široku primjenu. Mnogi matematički sadržaji mogu se povezati s problemima iz realnog života i predočiti na zabavan način. Ovakav pristup sigurno može pobuditi veći interes za rješavanje matematičkih problema. Na taj način zabavni zadaci postaju i izvrsna motivacija za razvijanje interesa za učenje matematike.

Dosad provedena edukacijska istraživanja pokazuju kako interes pozitivno utječe na pažnju i učenje te da ga potiču različiti čimbenici kao što je prethodno znanje, neočekivan i zanimljiv sadržaj ili tekst. Istraživanja dostižu vrhunac radom Renninger i suradnika (1992) koji su postavili teorijski okvir interesa utemeljen na razlici između situacijskog i osobnog interesa.

Matematika obiluje sadržajima koji zahtijevaju, ne samo njihovo poznavanje, nego i razumijevanje. Znanje u matematici zahtijeva da se činjenice i zakoni razumiju, primijenjuju u drugim područjima u matematici, fizici i ostalim područjima. Djeca su od malena izložena matematici te već u predškolskoj dobi uče brojati, zbrajati i oduzimati na raznim modelima, uočavaju različite geometrijske oblike oko sebe stvarajući određene predodžbe i matematičke koncepte, iako toga nisu svjesni. Tijekom formalnog obrazovanja, na nastavi matematike susreću se s informacijama koje često nisu u skladu s njihovim predodžbama te im je teško prihvatiti nove ideje koje se protive njihovim uvjerenjima koje su sami izgradili. Kako bi se izbjegle poteškoće u savladavanju novog sadržaja, potrebno je potaknuti konceptualnu promjenu kod učenja.

Cilj diplomskog rada je utvrditi povezanost situacijskog i osobnog interesa s usvajanjem koncepta hiperbola. Istraživanje je provedeno u trećim razredima opće gimnazije. Prikupljanje podataka se sastojalo od ispunjavanja upitnika kojima je ispitan interes učenika za matematiku općenito, analitičku geometriju i temu hiperbola te je dio učenika rješavao ispit iz matematike sa zadacima vezanim uz hiperbolu.

Diplomski rad organiziran je u pet poglavlja raspoređenih po odgovarajućim tematskim dijelovima. Na početku prvog poglavlja prikazana su teorijska razmatranja i istraživanja interesa kao važne motivacijske varijable u obrazovnom okruženju te njegova uloga u učenju. U nastavku prvog poglavlja opisani su teorijski pristupi konceptualnoj promjeni među kojima se ističe okvirna teorija kao pristup razumijevanja konceptualne promjene. Prvo poglavlje završava povijesnim pregledom i porijeklom imena hiperbole. Drugo poglavlje bavi se ciljem, problemom i hipotezama istraživanja, dok su u trećem poglavlju opisani sudionici, postupak i instrumenti istraživanja koje je provedeno među učenicima trećih razreda općih gimnazija u Zagrebu i Samoboru. U četvrtom poglavlju opisani su rezultati istraživanja, odnosno prikazani su rezultati kvalitativne analize po zadacima vezanim uz koncept hiperbola te rezultati triju skala interesa kojima su mjereni osobni interes za matematiku te situacijski interes za analitičku geometriju i za hiperbolu. Peto poglavlje bavi se uvođenjem koncepta hiperbola u nastavi, odnosno napisana je metodička priprema za dva nastavna sata u trećem razredu opće gimnazije za nastavnu temu *Hiperbola*.

1. INTERES I KONCEPTUALNA PROMJENA

Interes je energizirajući činitelj koji je povezan s odabirom i ustrajnošću pri aktivnostima koje uključuju procesiranje informacija (Hidi, 1990; prema Pahljina-Reinić, 2014).
Za razliku od drugih motivacijskih konstruktora, interes je uvijek vezan uz specifičan objekt, aktivost ili predmet pa je ovaj teorijski okvir posebno prikladan za ispitivanje kako učenje novih nastavnih sadržaja može utjecati na kasniju motivaciju učenika i njihov uspjeh.

Konceptualna promjena se definira kao proces koji dovodi do mijenjanja postojećeg koncepta (Davis, 2001; prema Petrović, 2013); učenje koje podrazumijeva mijenjanje pogrešne ideje ili zablude (Chi, 2008; prema Petrović, 2013) ili kao proces koji modificira pogrešne ideje u znanstveno prihvatljive koncepte (diSessa, 2006; prema Petrović, 2013).

1.1 Razvoj koncepta interesa

Istraživanje interesa u okviru pedagoške psihologije i pedagogije dugo je vremena bilo zanemarivano. Osnovni razlozi zanemarivanja krili su se u udovoljavanju strogom znanstvenom bihevioristčkom kriteriju kako emocije i vrijednosni sudovi ne mogu biti predmet istraživanja te u neizgrađenosti pedagoško-psihološke teorije interesa. Početkom i sredinom dvadesetog stoljeća nastalo je samo nekoliko priloga o interesima s psihologijskog stajališta. Istraživanje motivacije, a ne interesa, bio je dominantan problem psihologijskih istraživanja.

Prvi koji naglašava ključnu ulogu interesa u učenju je Dewey (1913; prema Svedružić, 2012) koji radi razliku između pojmova interesa i truda jer interes potiče dublju spoznaju i učenje. Dewey daje dvije pretpostavke o interesu. Prvo, interes mora biti prisutan u razrednom okružju kako bi se ostvarile intelektualne potrebe učenika i drugo, interes potiče učenike različitih obrazovnih mogućnosti da ostvare osobni napredak.

Među prvima koji uspostavljaju vezu između interesa i učenja bio je Kintsch (1980; prema Svedružić, 2012). Kintsch razlikuje dvije vrste situacijskog interesa koje naziva emocionalnim i kognitivnim interesom. Emocionalni interes javlja se kad informacija potiče snažan afektivni odgovor učenika, dok kognitivni interes započinje uključivanjem učenika u problem. Kintsch pokazuje kako prosječno predznanje doprinosi povećanom interesu, dok visoko ili nisko predznanje može smanjiti interes. Alexsander i Jetton (1996; prema Svedružić, 2012) su empirijskim istraživanjima potvrdili da interes ovisi o predznanju.

Sedamdesetih godina nastupa promjena u psihologiji motivacije. Pozornost je stavljena na sadržajne aspekte motivacije i njezine vrijednosne aspekte. Događaju se i promjene u poimanju učenja i poučavanja, ne samo iz tradicionalne perspektive prenošenja znanja, nego i iz novije perspektive konstruktivističkog procesa stjecanja znanja.

Tijekom 80-tih godina prošlog stoljeća zabilježen je značajniji porast empirijskih istraživanja koncepta interesa. Rezultati istraživanja pokazuju kako interes pozitivno utječe na pažnju i učenje te da je različit kod učenika i da ga potiču različiti čimbenici kao što je prethodno znanje, neočekivan i zanimljiv sadržaj ili tekst.

Iako se tijekom znanstvene povijesti u okvirima psihologije i pedagogije mogu identificirati autori koji su tematizirali i istraživali pojam interesa, tek je grupa autora okupljena oko Schiefela i Krappa (1986; prema Svedružić, 2012) ponudila teorijsku konceptualizaciju interesa i njegovu empirijsku operacionalizaciju. Na njihov prijedlog, danas je u literaturi prihvaćena podjela interesa na situacijski i osobni interes. Suvremena istraživanja interesa i čimbenika koji utječu na njegov razvoj u zadnjih 20-ak godina obilježena su teorijskim okvirom koji su postavili Krapp i sur. (1992). Istraživanja dostižu vrhunac radom Renninger i sur. (1992) koji su postavili teorijski okvir interesa utemeljen na razlici između situacijskog i osobnog interesa.

Većina istraživača 90-tih godina bila je usmjerena ili na sadržaj i čimbenike okružja koji povećavaju interes ili na ulogu zanimljivih detalja u sadržaju koji se proučava.

1.2 Teorijski pristupi interesu

Dosada provedena istraživanja o utjecaju interesa na učenje pokazuju kako motivacija temeljena na interesu ostvaruje brojne pozitivne učinke na proces učenja i njegove ishode (Hidi i Renninger, 2006). Usprkos različitim teorijskim pristupima interesu, Hidi i Renninger (2006) ističu kako se većina teoretičara slaže u pogledu nekoliko karakteristika interesa kao motivacijske varijable.

Prvo, interes je fenomen koji proizlazi iz interakcije između pojedinca i njegove okoline. Okolina su objekti koji okružuju pojedinca i/ili aktivnosti kojima je izložen. Interes je stoga sadržajno specifičan, a ne predispozicija primjenjiva kroz sve aktivnosti. Čak i učenici koji su vrlo motivirani imaju interes samo za specifične sadržaje. Potencijal za interes je u samom pojedincu, ali sadržaj i okolina definiraju smjer interesa i doprinose razvoju interesa. Drugo, interes uključuje i afektivne i kognitivne komponente kao odvojene, ali interaktivne sustave. Afektivna se komponenta interesa odnosi na pozitivne emocije koje prate uključivanje u aktivnost, dok se kognitivna komponenta odnosi na perceptivne i reprezentacijske aktivnosti povezane s uključenošću. Treće, afektivna i kognitivna komponenta interesa imaju svoju neurološku osnovu. Ovo stajalište podržavaju neuroznanstvena istraživanja (Panksepp, 1998, prema Hidi i Renninger 2006).

U literaturi je prihvaćena podjela na dva temeljna tipa interesa: situacijski i osobni interes. Situacijski interes javlja se kao odgovor na okolinske značajke i obilježja, dok osobni interes predstavlja dispozicijsku kvalitetu pojedinca. Ako osoba u čekaonici uzme časopis sa stola te čita članak o temi koja joj je nepoznata, tada je interes te osobe potaknut situacijom u kojoj se našla. Međutim, ako osoba prepoznaje temu o kojoj čita kao temu koju već duže vremena pokušava razumijeti i osjeća val uzbuđenja, tada ta osoba ima osobni interes za tu temu.

Situacijski interes uključuje usmjerenu pažnju i afektivnu reakciju koju generiraju specifični aspekti okoline, koji može, ali i ne mora trajati tijekom vremena (Hidi i Renninger, 2006). Aspekti okoline mogu uključivati obilježja ili karakteristike sadržaja i strukturalna obilježja poput, na primjer načina na koji je zadatak organiziran ili prezentiran. Kao emocionalno stanje izazvano specifičnim obilježjima aktivnosti ili zadatka, situacijski interes je praćen odgovarajućim fiziološkim, subjektivnim, ciljnim i ponašajnim komponentama (Renninger, 2000; Silvia, 2006; prema Hidi i Renninger, 2006). Hidi i Renninger (2006) razlikuju potaknuti i zadržani situacijski interes koji će detaljnije biti objašnjeni u četverofaznom modelu razvoja ineresa.

Obzirom na teme, istraživanja su pokazala kako postoji više čimbenika koji utječu na situacijski interes, što uključuje prethodna znanja, neočekivanost informacija, konkretnost i slikovitost, neizvjesnost, uključenost i značajnost. Situacijski interes je uvijek potaknut okolinom i ostaje postojan toliko dugo koliko ga okolina potiče. Može ga potaknuti bilo što iz okoline poput, na primjer, časopisa na stolu u čekaonici, teksta o nogometu koji učitelj daje učeniku, matematički program koji omogućava lakše rješavanje matematičkih zadataka, prethodno pozitivno iskustvo s nekim događajem ili objektom, genetske predispozicije i sl. Na primjer, dijete s talentom za glazbu može poželjeti naučiti svirati klavir, osoba s dobrim matematičkim vještinama i znanjem može se zainteresirati za tehnologiju jer ona omogućava lakše rješavanje matematičkih problema, dok se učenici kojima matematika nije zanimljiva mogu zaintesirati za neki matematički program koji im omogućava lakše razumijevanje matematike.

U nastavnom procesu situacijski interes inicira se nastavnim aktivnostima poput određene akcije kao što su istraživački rad, rad na eksperimentu, zanimljiv video, tekst, glazba, računarski program i slično. U razrednom okružju situacijski je interes pod utjecajem učitelja koji može poticati zainteresiranost učenika osjetilno, npr. privlačan pokus ili misaono, npr. zanimljiv problem.

Istraživanja su potvrdila kako situacijski interes ima pozitivan utjecaj na kognitivni učinak kao što je čitanje s razumijevanjem, utječe na rad s računalom, održavanje pažnje, integraciju podataka i na povećavanje razine učenja.

Osobni interes Hidi i Renninger (2006) konceptualiziraju kao dugoročnu, progresivnu osobnu povezanost s određenom domenom. Kod učenika osobni interes se razvija tijekom školovanja tako što učenik stječe određeno znanje o domeni i pridaje joj vrijednost, a to rezultira daljnjom znatiželjom i istraživanjem domene. Učenik se uključuje u aktivnost ako je unaprijed zainteresiran za temu ili je potaknut motivacijskom aktivnošću iz okoline. Tako je učenik razvijenog osobnog interesa za matematiku i prije nastave okupiran temama iz matematike, a karakterizira ga usredotočenost i zadovoljstvo koje pokazuje pri radu na temi. Obzirom kako osobni interes uglavnom nije određen trenutnim stanjem, odnosno aktivnostima kojima je pojedinac izložen, osobni interes se razvija vrlo sporo. No, kad se jednom ostvari, osobni interes je relativno trajan. To znači da izloženost neinteresantnoj okolini neće značajno utjecati na osobni interes pojedinca. Osobni interes se temelji na onome što osoba percipira, spoznajno predstavlja sebi i smatra kao mogućnost za aktivnost. Hidi i Renninger (2006) razlikuju početni i zreli osobni interes koji će detaljnije biti objašnjeni u četverofaznom modelu razvoja ineresa.

Istraživanja su potvrdila povezanost osobnog interesa s pozitivnim osjećajima, povećanom vrijednošću i znanjem, pozornošću i prepoznavanjem, upornošću i trudom, akademskom motivacijom i razinom obrazovanja.

Razmatrajući odnos između situacijskog, osobnog interesa i intrinzične motivacije, Schiefele (1999; prema Pahljina-Reinić, 2014) konceptualizira osobni interes kao motivacijsku karakteristiku koja uključuje valencije povezane s emocijama i valencije povezane s vrijednostima. Valencije povezane s emocijama odnose se na afektivna iskustva povezana s objektom (uključenost, stimulacija, uživanje), dok se valencije povezane s vrijednostima odnose na pripisivanje osobnog značaja ili važnosti objektu.

Schiefele (1999; prema Pahljina-Reinić, 2014) smatra da aktivacija osobnog interesa izravno utječe na intrinzičnu motivaciju. Intrinzična se motivacija u literaturi najčešće definira kao motivacija za uključivanjem u aktivnost radi zadovoljstva koje proizlazi iz same uključenosti u aktivnost (Pintrich i Schunk, 1996; Ryan i Deci, 2000; prema Pahljina-Reinić, 2014). Naime, osobni interes je prethodnik kognicija koje određuju snagu aktualne intrinzične motivacije tj. namjere za djelovanjem u konkretnoj situaciji. Stoga, osobni interes predstavlja preduvjet intrinzične motivacije (Schiefele, 1999).

Neki teorijski pristupi interesu usmjereni su na stanje interesa kao emocije. Ainley (2006; prema Pahljina-Reinić, 2014) razmatra interes kao afektivno stanje pojedinca koje reprezentira subjektivno iskustvo učenja. Unutar ovoga teorijskog okvira stanje interesa se, potaknuto određenim zadatkom, očituje preko pobuđenosti ili dimenzije aktivacije te uključuje usmjerenu energiju, pažnju, koncentraciju i pozitivan afekt. Pozitivna pobuđenost je usmjerena k istraživanju ili daljnjoj interakciji sa specifičnim zadatkom pri čemu se razina interesa, koja je potaknuta pri prvom susretu sa zadatkom, u daljnjoj interakciji može mijenjati (Ainley i Patrick, 2006; prema Pahljina-Reinić, 2014).

Razmatrajući prirodu afektivnih procesa kroz stadije prolaznog stanja interesa i stadije interesa kao razvijene predispozicije, modeli razvoja interesa koje predlažu Krapp (2005, 2007; prema Pahljina-Reinić, 2014) te Hidi i Renninger (2006) sugeriraju da je interes opravdano smatrati emocijom u početnom stadiju, dok je osobni interes složenija jedinica koja nastaje iz dinamičnih kombinacija afekta i kognicija stečenih kroz iskustvo.

Postojeće konceptualizacije interesa definiraju interes kao složene dinamičke organizacije afekta, znanja i vrijednosti pri čemu zahvaćaju različite, ali ujedno i komplementarne aspekte ovog fenomena. Stoga, jednoznačni zaključci o primarnosti pojedinih konceptualizacija interesa nisu mogući, nego se kao ključna smjernica za razvoj potpunijeg razumijevanja interesa i njegove uloge u učenju i razvoju ističe potreba za sagledavanjem i razmjenom različitih teorijskih pristupa te boljim usklađivanjem konceptualizacija i odabranih mjera i metoda u istraživanju interesa i izvještavanju rezultata tih istraživanja (Renninger i Hidi, 2011; prema Pahljina-Reinić, 2014).

1.3 Četverofazni model razvoja interesa

U literaturi o razvoju interesa postoje dva različita pristupa fenomenu razvoja. Prvi pristup se odnosi na istraživanje promjena koje se, neovisno o dobi, događaju na razini pojedinca tijekom njegove interakcije s objektom interesa, a drugi pristup se odnosi na istraživanje razvojnih promjena interesa u funkciji dobi (Frenzel, Pekrun, Dicke i Goetz, 2012; prema Pahljina-Reinić, 2014).

U okviru prvog pristupa, istraživači se bave različitim fazama interesa pri čemu se dosljedno pokazuje kako se pojedinci u različitim fazama razvoja interesa bitno razlikuju u pogledu širokog raspona varijabli povezanih s učenjem i postignućem (Lipstein i Renninger, 2007; prema Pahljina-Reinić, 2014). Najnoviji model u okviru ovog pristupa, u kojem su proširene i integrirane postojeće konceptualizacije situacijskog i osobnog interesa, predstavlja četverofazni model razvoja interesa Hidi i Renninger (2006).

Prema modelu razvoja interesa kojeg su predstavile Hidi i Renninger (2006) postoje četiri faze razvoja interesa: potaknuti situacijski interes, zadržani situacijski interes, početni (ili slabije razvijen) osobni interes i zreli (ili dobro razvijeni) osobni interes. Model pretpostavlja kako su faze sekvencijalne i međusobno distinktivne te da predstavljaju oblik kumulativnog, progresivnog razvoja u slučajevima kada je interes pobuđen i zadržan tako da se svaka faza može shvatiti kao posrednik sljedeće faze, ali i kao ishod prethodne faze. Svaka faza uključuje različitu količinu afekta, znanja i vrijednosti. Ranije faze (potaknuti i zadržani situacijski interes) se sastoje od usmjerene pažnje i pozitivnog afekta izazvanih neposrednom okolinom. Kasnije faze (početni i zreli osobni interes) se sastoje od pozitivnih osjećaja, pohranjenih znanja o sadržaju interesa i vrijednosti koje im pojedinac pridaje. Iako ne isključivo, faze situacijskog interesa su u pravilu vanjski podržane, a faze osobnog interesa su tipično samostalno generirane.

Prema četverofaznom modelu razvoja interesa, u prvoj fazi, potaknuti situacijski interes je potaknut određenim sadržajem, objektom, okolinom. Potaknuti situacijski interes se odnosi na interes koji je rezultat kratkoročnih promjena u afektivnoj i kognitivnoj aktivnosti. Ako se uspije zadržati potaknuti situacijski interes, onda se razvija druga faza, tzv. zadržani situacijski interes. Nakon empirijske potvrde ovih faza situacijskog interesa, ispitivani su načini na koje je moguće generirati situacijski interes te čimbenici koji mogu pridonositi njegovu zadržavanju i to osobito u okviru istraživanja čiji rezultati pokazuju kako situacijski interes pridonosi razumijevanju pri učenju iz teksta (Schraw i Lahman, 2001; prema Hidi i Renninger, 2006). Utvrđeno je da na razvoj situacijskog interesa utječu socijalni aspekti okoline poput obrazovnog okruženja koje uključuje suradničko učenje, projektnu nastavu, igre i zagonetke, upotrebu računala ili tutorstvo (Minnaert, Boekaerts i DeBrabander, 2007; Palmer, 2009; prema Pahljina-Reinić, 2014). Situacijski interes može potaknuti i sposobnost samoregulacije interesa u vidu namjernog osmišljavanja i upotrebe strategija usmjerenih na povećavanje interesa tijekom uključenosti u relativno nezanimljive, ali važne aktivnosti.

Treću fazu razvoja interesa (početni osobni interes) obilježava početna faza relativno trajne predispozicije za traženjem opetovanog uključivanja u određeni sadržaj tijekom vremena. Početni osobni interes konceptualizira se kao povezanost između osobe i sadržaja koju karakteriziraju jaki pozitivni osjećaji i pohranjeno znanje o sadržaju interesa. Za razliku od početnog osobnog interesa, zreli osobni interes, kao četvrta faza razvoja interesa, odnosi se na povezanost s određenim sadržajem o kojem pojedinac posjeduje značajne razine pohranjenog znanja i vrijednosti. Pojava osobnog interesa se pripisuje sposobnosti za traženjem odgovora na pitanja koja se temelje na znatiželji (Renninger, 2000; prema Hidi i Renninger, 2006). Takva pitanja omogućuju organiziranje informacija o sadržaju interesa i ona se nadovezuju na metakognitivnu svjesnost pojedinca o tome što zna, a što još treba otkriti. Baveći se sadržajem osobnog interesa, pojedinac se uključuje u samoregulacijska ponašanja (traženje dodatnih informacija), doživljava osjećaje samodjelotvornosti i posjeduje razumijevanje korisnosti i važnosti aktivnosti (Hidi i sur., 2004; prema Hidi i Renninger, 2006).

Hidi i Renninger (2006) ističu kako ovaj model razvoja interesa ne podrazumijeva automatsko razvojno napredovanje interesa kroz pojedine faze. Nakon potaknutog situacijskog interesa ne mora se razviti zadržani situacijski interes. Također, ako dođe do zadržanog situacijskog interesa ne mora se razviti početni osobni interes, a ako se razvije početni osobni interes, moguć je izostanak razvoja zrelog osobnog interesa. To možemo vidjeti u sljedećem primjeru.

U čekaonici liječničke ordinacije Ivana, studentica zadnje godine pravnog fakulteta, čeka na pregled. Na stolu ugleda časopis koji uzme i prelistava. Pozornost joj zaokupi članak o čovjeku koji je po profesiji medijator. Iako Ivana do tog trenutka nije znala čime se bavi medijator, znatiželjno čita članak jer jako voli raditi s ljudima. Dok je čitala članak, pozvana je na pregled. Nakon pregleda Ivana nastavlja s čitanjem članka kako bi što više saznala o tome čime se bavi medijator. Sljedeći dan u istu čekaonicu je došao Ivan, student završne godine pravnog fakulteta. Ivan je čekajući pregled uzeo isti magazin kao Ivana i počeo čitati isti članak. Napeto je čitao članak sve dok nije otišao na pregled. Za razliku od Ivane, nakon što je završio s pregledom, Ivan nije pročitao članak do kraja. Kod oboje studenata došlo do potaknutog situacijskog interesa koji je potaknut situacijom u kojoj su se našli. Kod Ivane se potaknuti situacijski interes zadržao i nakon liječničkog pregleda te je došlo do razvoja zadržanog situacijskog interesa koji može voditi do razvoja osobnog interesa. Nakon što su Ivana pozvali na liječnički pregled, njegov potaknuti situacijski interes se nije zadržao pa nije došlo do sljedeće faze razvoje interesa.

1.4 Učinci interesa na procese i ishode učenja

Interes je važna motivacijska varijabla u obrazovnom okruženju. Istraživanja interesa kao motivacijske varijable osigurala su značajan doprinos razumijevanju odnosa između motivacije, učenja i emocija. Općenito, pokazalo se da interes pozitivno utječe na kvantitetu i razinu učenja. Interes je pozitivno, ali umjereno, povezan s postignućem, dok je u većoj mjeri povezan s pokazateljima dubinskog učenja poput dosjećanja glavnih ideja ili konceptualnog razumijevanja, a u manjoj mjeri je povezan s pokazateljima površinskog učenja poput odgovora na jednostavna pitanja ili doslovne reprezentacije teksta (Schiefele, 1999; prema Pahljina-Reinić, 2014).

Iznimno vrijedan heuristički okvir za izučavanje učinaka interesa na procese i ishode učenja u novije vrijeme predstavlja četverofazni model razvoja interesa (Hidi i Renninger, 2006). U okviru ovog modela proveden je izvjestan broj istraživanja povezanih s fazama situacijskog i osobnog interesa čiji nalazi osiguravaju sve bolju osnovu za razumijevanje procesa uključenih u prijelaze između pojedinih faza interesa. Također, ovaj je model omogućio preciznija istraživanja doprinosa interesa u učenju, ne samo u terminima izučavanja odnosa između faza situacijskog i osobnog interesa tijekom vremena, već i u terminima njihova odnosa s drugim motivacijskim varijablama. Pokazalo se da je svaka faza razvoja interesa tijekom vremena popraćena promjenama u razinama zalaganja, samodjelotvornosti, postavljanja ciljeva i sposobnosti za samoregulaciju ponašanja.

Postojeća istraživanja učinaka interesa na procese i ishode učenja općenito potvrđuju da interes predstavlja jednu od ključnih determinanti kvalitete obrazovnih iskustava. Istraživanja odnosa interesa s drugim motivacijskim varijablama pokazuju da interes ostvaruje iznimno važnu ulogu u procesima samoregulacije učenja. Naime, pored toga što i sam predstavlja važan ishod učenja, interes podržava učenje i postignuće posredujući učinke prethodnih stanja i općih predispozicija na učenje.

Iako je interes učenika prema predmetu prepoznat kao važan preduvjet za učenje i uspješnju nastavu, profesori se i dalje bore s poteškoćama u radu s nemotiviranim učenicima. Česta pretpostavka profesora je kako učenici imaju ili nemaju interes za akademsku aktivnost te ne prepoznaju kako oni imaju značajnu ulogu u razvoju učeničkog akademskog interesa. Najveća zabluda je pretpostavka da, ukoliko interes ne postoji, on se ni ne može razviti. Kako bi učenička postignuća, koja ne ovise samo o načinu na koji učenici pristupaju učenju, njihovim sposobnostima, konstantnom radu, trudu, uloženom vremenu, bila što veća i bogatija potrebno je i nešto što ih potiče na učenje, a to je motivacija. Učenici koji imaju interes za određeno područje motiviraniji su naučiti više o tom području, odnosno usvojiti ciljeve učenja. Upravo zbog toga što zadacima pristupaju u okvirima ciljeva učenja, razvijaju s vremenom još veći interes. Nerealno je očekivati da će svi učenici imati podjednak interes za učenje i rad. Netko će učiti zbog znanja, a netko zbog ocjena ili nagrade.

1.5 Teorijski pristupi konceptualnoj promjeni

Ideja konceptualne promjene se prvo pojavila kod povjesničara i filozofa znanosti čiji je interes bio usmjeren ka objašnjavanju fenomena znanstvenih revolucija i promjene znanstvenih teorija. Termin konceptualne promjene je prvi uveo Thomas Kuhn (1962; prema Vosniadou, 2013) kako bi pokazao da se koncepti u znanstvenim teorijama mijenjaju kad se teorija tj. paradigma promijeni. Prema Kuhnu, normalna znanost djeluje u sklopu seta zajedničkih uvjerenja, teorija, primjena, pretpostavki i prakse koji čine paradigme. Tijekom vremena dolazi do otkrića novih paradigmi u znanosti koje se ne mogu smjestiti unutar postojeće paradigme pa zbog toga dolazi do promjene paradigme. Svijest o nepravilnosti postojeće paradigme je preduvjet za promjenu postojeće paradigme i nastanak nove paradigme. Teorije poput Darwinove teorije evolucije, Kopernikova sustava, Newtonovih zakona mogu se promatrati kao proizvodi radikalne konceptualne promjene jer su u tim slučajevima nove teorije nastale kako bi objasnile poznate i nove fenomene te su pritom formirani novi koncepti. Kroz rad Susan Carey (1985; prema Vosniadou, 2013) ideja o konceptualnoj promjeni uvedena je u područje razvojne psihologije, a u područje edukacijske psihologije uvedena je kroz rad Michael Posnera i njegovih suradnika (Posner, Strike, Hewson i Gertzog, 1982; prema Vosniadou, 2013).

Tijekom 1970-tih provedena su različita istraživanja na području učeničkog razumijevanja fenomena fizike (Vosniadou, 2013). Rezultati istraživanja pokazali su kako djeca od ranog uzrasta, kroz svoje praktično i socijalno iskustvo, izgrađuju funkcionalna, pojednostavljena znanja, koja im omogućavaju razumijevanje i predviđanje događaja u svojoj neposrednoj okolini. Uočila se stabilnost i ustrajnost učeničkih intuitivnih ideja te njihova sličnost s ranijim netočnim znanstvenim teorijama. Obzirom na svoju intuitivnu prirodu i iskustveno porijeklo, ova vrsta znanja se značajno razlikuje i nekompatibilna je s odgovarajućim znanstvenim spoznajama te se tijekom procesa učenja mora zamijeniti znanstvenim spoznajama ili transformirati u skladu s njima. Kada se kaže da učenik treba razumijeti fizičke fenomene kao što su, na primjer, sila i gibanje, ili funkcioniranje bioloških procesa kao što je respiratorni sustav kod čovjeka, ili zašto gravitacija zadržava objekte na Zemlji ili zbrajanje razlomaka, on mora proći kroz mijenjanje postojećeg razumijevanja koje je prethodno već spontano razvio. Učeničke intuitivne ideje dobivaju razna imena, kao što su predkoncepcije, miskoncepcije, alternativne ideje, naivna znanost.

Publicirani rezultati izazivaju veliko zanimanje, a posebnu pozornost izazivaju učeničke intuitivne ideje u mehanici, osobito odnos sile i gibanja na koje se fokusira velik broj istraživača. To proizlazi iz činjenice da je mehanika temeljno područje fizike te da je dobro konceptualno razumijevanje mehanike temelj razumijevanja u drugim područjima. S druge strane, mehanika je vrlo bliska svakodnevnom iskustvu te se ona može smatrati i svojevrsnom kolijevkom učeničkih intuitivnih ideja. Uz istraživanja u mehanici krenula su i istraživanja učeničkih intuitivnih ideja u drugim područjima fizike. Na početku je osnovni cilj istraživanja bilo dokumentiranje i identificiranje učeničkih intuitivnih znanja, ali već krajem osamdesetih, a osobito početkom devedesetih godina prešlo se na drugu fazu istraživanja u kojoj se počelo tragati za logičkom strukturom učeničkih intuitivnih znanja.

Osamdesetih godina razvijaju se teorijski pristupi konceptualnoj promjeni u kontekstu znanosti fizike. Naglasak se sve više pomiče prema traženju učinkovitih nastavnih strategija koje mogu inducirati konceptualnu promjenu kod učenika i razviti dublje konceptualno razumijevanje. Iako je proces konceptualne promjene prvo vezan uz područje fizike, konceptualne promjene su istraživane na području biologije, psihologije, povijesti, političkih znanosti, medicine i matematike.

Posner i suradnici (Posner, Strike, Hewson i Gertoog 1982; prema Vosniadou, 2013) napravili su analogiju između Piagetovih koncepata asimilacije i akomodacije s Kuhnovim konceptom znanstvene revolucije te iz ove analogije stvorili teorijski okvir poznat kao klasični pristup konceptualnoj promjeni. U ovom teorijskom okviru, miskoncepcije su netočne spoznaje koje je potrebno zamijeniti znanstvenim spoznajama, a to se postiže kognitivnim konfliktom. Kognitivni konflikt inducira konceptualnu promjenu, odnosno proces nagle i brze zamjene učeničkih miskoncepcija s točnim znanstvenim spoznajama. Suština tehnike kognitivnog konflikta je u tome da se učeničke miskoncepcije o nekoj pojavi direktno sukobe sa znanstvenim idejama te nesklad između tih ideja dovodi do kognitivnog konflikta. Kako bi učenici riješili kognitivni konflikt, napuštaju staru koncepciju i prihvaćaju novu. U kontekstu klasičnog pristupa konceptualnoj promjeni nezadovoljstvo prijašnjoj koncepcijom je važan preduvjet za stvaranje konceptualne promjene, a stvaranje kognitivnog konflikta postaje glavna nastavna strategija. Posner i suradnici smatraju kako postoje četiri temeljna uvjeta koji trebaju biti ispunjenji kako bi došlo do konceptualne promjene: nezadovoljstvo postojećom koncepcijom, nova koncepcija mora biti razumljiva, nova koncepcija mora biti uvjerljiva i nova koncepcija mora biti primjenjiva.

Klasični pristup konceptualnoj promjeni je tijekom vremena sve više bio izložen kritikama drugih istraživača. Istraživači su tvrdili kako je konceptualna promjena dugotrajan i postepen proces, a ne dramatična nagla zamjena netočnih koncepcija (Caravita i Halden, 1994; Vosniadou i Brewer, 1992; prema Vosniadou, 2013). Kritičari ove teorije su smatrali kako miskoncepcije nisu netočne ili krivo shvaćene teorije, već da ih treba promatrati kao pogrešna proširenja produktivnog znanja (Smith, diSessa i Roschelle 1993; prema Vosniadou, 2013). Pristaše klasične teorije konceptualne promjene smatraju kako samo kognitivni faktori utječu na proces konceptualne promjene, dok kritičari te teorije smatraju kako emocionalni i motivacijski faktori imaju veliku ulogu u procesu konceptualne promjene (Pintrich, Marx i Boyle, 1993; Sinatra i Pintrich, 2003; prema Vosniadou, 2013) te da je konceptualna promjena pod velikim utjecajem socijalnih i situacijskih čimbenika (Hatano i Inagaki, 2003; prema Vosniadou, 2013).

Smith i suradnici (1993; prema Vosniadou, 2013) kritizirali su upotrebu kognitivnog konflikta jer on predstavlja uzak pogled prema učenju koje je fokusirano samo na netočnim učeničkim idejama ignorirajući učeničke produktivne ideje koje mogu postati osnova za postizanje sofisticiranog znanstvenog razumijevanja, tj. mogu biti najbolji alat u poučavanju i kreiranju uspješnog učenja i usvajanja gradiva koje odgovara znanstvenim spoznajama.

Istraživanja procesa konceptualne promjene istražuju učenje koje zahtijeva znatnu reviziju prethodnog znanja zbog stjecanja novih koncepata (Hatano i Inagaki, 2003; Vosniadou i Ioannides, 1998; prema Vosniadou, 2013). Koceptualna promjena zahtijeva temeljite promjene u sadržaju i organizaciji postojećeg znanja kao i razvoj novih strategija učenja za namjerno rekonstruiranje znanja i stjecanje novih koncepata

U najopćenitijem smislu konceptualna promjena se definira kao proces koji dovodi do mijenjanja postojećeg koncepta ili učenje koje podrazumijeva mijenjanje pogrešne ideje ili kao proces koji modificira pogrešne ideje u znanstveno prihvatljive koncepte (prema Petrović, 2013).

1.6 Okvirna teorija kao pristup razumijevanju konceptualne promjene

Vosniadou i suradnici su godinama sudjelovali u istraživanjima koja su proučavala razvoj dječjeg konceptualnog znanja nakon izlaganja znanstvenom poučavanju u različitim područjima poput astronomije, mehanike, geologije, biologije te matematike. Rezultati istraživanja doveli su do definiranja pojma okvirne teorije na temelju kojeg se objašnjava konceptualna promjena (Vosniadou, Baltas i Vamvakoussi, 2007; Vosniadou, Vamvakoussi i Skopeliti, 2008; prema Vosniadou, 2013).

Istraživanja kognitivnog razvoja pokazala su kako mala djeca upotrebljavaju svoja svakodnevna iskustva za kreiranje naivne fizike prije nego su izložena nastavnom procesu. Prema stanovištu ove teorije, naivna fizika nije skup fragmentiranih opažanja, nego je organizirana u jedinstven i koherentan sustav nalik teoriji, tj. naivna fizika je okvirna teorija te funkcionira u vidu organizirane mreže perceptivnih podataka i njihovih generalizacija. Izraz "okvirna teorija" prvi je upotrijebio Wellman (Wellman i Gelman 1992; prema Vosniadou, 2013) kako bi opisao strukturu apstraktnih znanja koja su temelj naših najdubljih ontoloških opredjeljenja pomoću kojih razumijemo svijet. Zastupnici ove teorije ističu kako se okvirne teorije razlikuju od znanstvenih teorija po tome što im nedostaje sistematičnost, apstraktnost, metakognitivna svijest te socijalni/institucionalni karakter. Ipak, one se nazivaju teorijama jer su relativno koherentne i karakterizirane su jasnom ontologijom i uzročnosti te mogu dovesti do predviđanja i objašnjenja.

Prema Vosniadou, istraživači kognitivnog razvoja pružili su empirijske dokaze koji podržavaju stajalište po kojem je dijete sposobno izvoditi generalizacije na temelju svakodnevnog iskustva (Vosniadou i Brewer, 1994; Stathopoulou i Vosniadou, 2007; prema Vosniadou, 2013). Ove generalizacije imaju status epistemoloških i ontoloških pretpostavki nalik aksiomima u znanstvenim teorijama i organizirane su u četiri različite domene znanja i smatraju se okvirnim teorijama, a to su fizika, psihologija, matematika i jezik.

Svaka od ovih domena posjeduje svoju jedinstvenu ontologiju koja se primijenjuje kako bi se razlikovali i tumačili određeni skupovi entiteta. Fizička ontologija se primijenjuje na fizičke entitete, psihologijska ontologija se primijenjuje opet na fizičke, ali samo pokretne entitete, matematika se primijenjuje na brojeve i njihove operacije, a jezik na leksičke jedinice. Prema tome, koncepti su smješteni u okvirne teorije ili domene kao što su naivna fizika, naivna psihologija i naivna matematika i kao takvi koncepti imaju karakteristike teorijskog okvira kojem pripadaju. Također, koncepti imaju i za sebe specifične pretpostavke koje se organiziraju u formi specifične teorije.

Naprimjer, u istraživanjima koja su provedena na području astronomije uočeno je kako mala djeca kategoriziraju koncept Zemlja kao ontološku kategoriju fizičkog objekta koji je različit od solarnih objekta poput Sunca, Mjeseca ili zvijezda (Vosniadou, 2013). Kategorizacija Zemlje kao fizičkog objekta omogućava prikaz koncepta Zemlja kao ravnog, čvrstog, stabilnog fizičkog objekta s gravitacijom gore – dolje i nebom i solarnim objektima iznad Zemlje. Djeca vjeruju kako je smjena dana i noći posljedica gibanja Sunca i/ili Mjeseca, a ne kretanja Zemlje. Kao što je prikazano u *Tablici 1.6.1*, razumijevanje znanstvenog koncepta Zemlja zahtijeva da djeca ponovo kategorizaciju koncept Zemlja u ontološku kategoriju astronomskog objekta. Takva ponovna kategorizacija događa se u konceptualnom sustavu školske djece između trećeg i šestog razreda. Kategorizacija Zemlje kao astronomskog objekta omogućava novi prikaz Zemlje kao sferičnog, rotacijskog i revolucijskog planeta heliocentričkog sustava. Djeca trebaju spoznati kako se Zemlja čini kao ravna ploča nekom tko ju promatra sa Zemlje, ali da je Zemlja sfera nekom tko ju promatra s Mjeseca ili nekog drugog objekta Sunčeva sustava. Vosniadu i Skopeliti su testirale pretpostavku kako usvajanje znanstvenog modela Zemlje zahtijeva konceptualnu promjenu na nivou okvirne teorije, odnosno promjenu u kategorizaciji Zemlje, od fizičkog u astronomski objekt. Promjena u kategoriziranju Zemlje, od fizičkog objekta u solarne objekte, predstavljala je preduvjet za razumijevanje znanstvenog modela.

Naivne spoznaje	**Znanstvene spoznaje**
Zemlja je fizički objekt	Zemlja je astronomski objekt
Zemlja je ravna. Zemlja je poduprijeta zemljom, vodom... Zemlja je statični objekt. Nebo i solarni objekti su iznad zemlje. Geocentrični sustav	Zemlja je sferična. Zemlja je okružena svemirom. Zemlja je rotacijski i revolucijski objekt. Svemir i solarni objekti okružuju zemlju. Heliocentrični sustav

Tablica 1.6.1. *Naivne i znanstvene spoznaje o Zemlji (Vosniadou, 2013)*

Konceptualna promjena je dugotrajan i postepen proces koji zahtijeva fundamentalnu promjenu u učeničkim ontološkim i epistemološkim opredjeljenjima i njihovim reprezentacijama koje čine okvirnu teoriju.

Prema okvirnom teorijskom pristupu, postoje fundamentalne razlike između predkoncepcija i miskoncepcija. Predkoncepcije su dječje intuitivne ideje izgrađene na temelju svakodnevnog iskustava te se formiraju prije izlaganja formalnom obrazovanju, a služe za razumijevanje fizikalnih fenomena. Miskoncepcije su pogrešna proširenja produktivnog znanja koje nastaju tijekom nastavnog procesa. Tijekom nastavnog procesa učenik se susreće sa znanstvenim informacijama koje nisu u suglasnosti s postojećim sustavom znanja. U nastojanju da se pomiri inicijalno i znanstveno objašnjenje, inicijalna objašnjenja postaju fragmentirana i formira se nova, prelazna, ali konzistentna forma objašnjenja koja se naziva sintetička koncepcija ili model.

Naprimjer, neka djeca koja vjeruju kako je noć posljedica toga što Sunce odlazi iza planine, iskrivljuju znanstvenu informaciju da se Zemlja okreće i formiraju novu ideju kako se Mjesec i Sunce okreću oko Zemlje svakih 24 sata. Ova djeca su kreirala novo, sintetičko objašnjenje koje je zadržalo dio njihova inicijalnog objašnjenja (Sunce i Mjesec se gibaju), ali istovremeno se inicijalno objašnjenje promijenilo u smislu s gore-dolje gibanja u rotacijsko gibanje.

Sintetička koncepcija predstavlja netočno, ali ipak kreativno rješenje problema neskladnosti između intuitivne koncepcije i znanstvene spoznaje. Ona predstavlja most između intuitivnog i znanstvenog znanja koje još nije dostupno učeniku. Sintetičke koncepcije su nestabilne, ali dinamične i stalno se mijenjaju obzirom na razvoj dječjeg znanja. Iako netočne, sintetičke koncepcije često predstavljaju napredak u procesu konceptualne promjene jer one olakšavaju učeniku da znastvene ideje uklopi u svoje prethodno znanje.

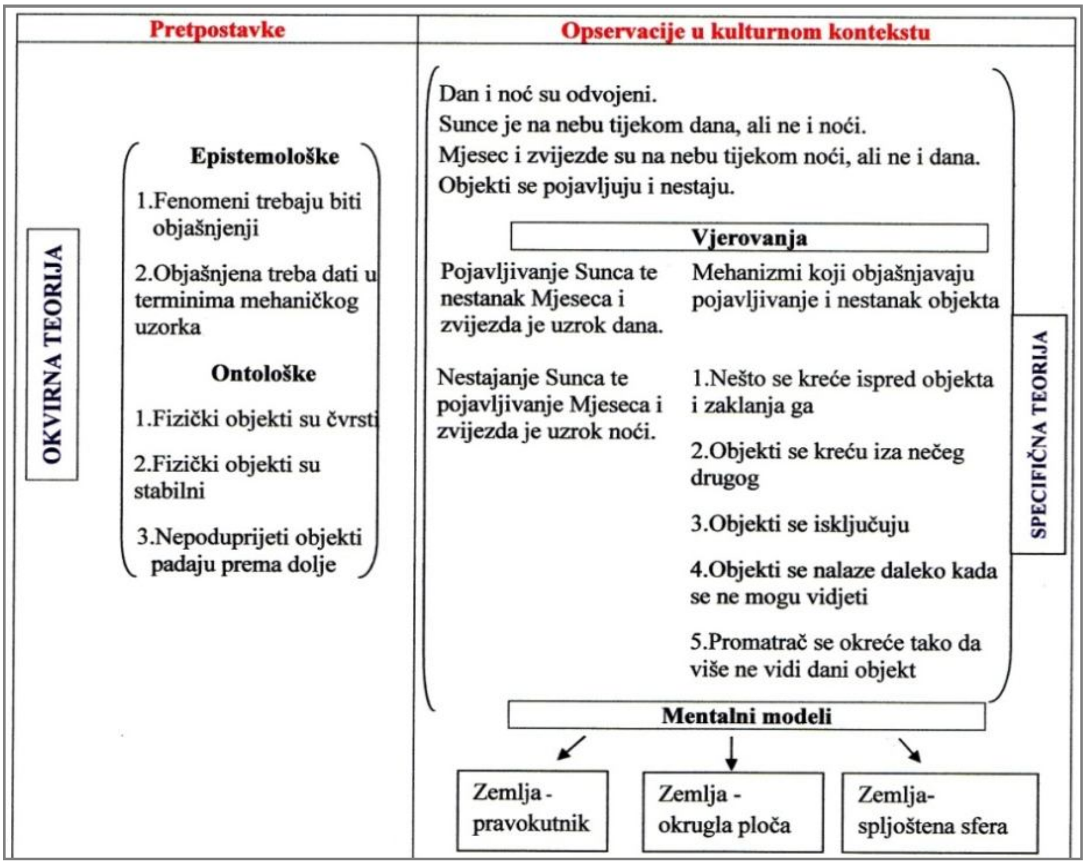
Prema ovom teorijskom pristupu, tijekom istraživanja važna je upotreba tzv. generativnih pitanja za koja se pretpostavlja kako potiču formiranje mentalnih modela. Ako su djeca i odrasli laici suočeni sa situacijama za koje nemaju gotova rješenja, onda oni trebaju uložiti napor da pronađu relevantnu informaciju ili konstruiraju objašnjenje u okviru postojećeg sustava naivnih pretpostavki. U ovom nastojanju, osoba kreira osobnu vrstu dinamičke mentalne reprezentacije koja se naziva mentalnim modelom. Prema Vosniadou (2013), mentalni modeli imaju tri funkcije u ljudskom kognitivnom sustavu.

Prva funkcija se odnosi na pomoć mentalnih modela u konstrukciji objašnjenja. Mentalni modeli se izgrađuju na temelju sadržaja okvirnih i specifičnih naivnih teorija i omogućavaju manipuliranje fenomenom na mentalnom planu kako bi se stvorila predviđanja rezultata ili objašnjenja fizičkih fenomena. Na primjer, učenik kreira određeni mentalni model Zemlje poput *Zemlja je pravokutnik* ili *Zemlja je okrugla ploča* ili *Zemlja je sfera* (Slika 1.6.1). Učenik se tim modelom koristi kako bi odgovorio na pitanja kao što su: Ima li Zemlja kraj? Možeš li pasti s tog kraja? Ovisno o odabranom mentalnom modelu Zemlje, učenici bi na ova pitanja ponudili različite odgovore.

Prema svojoj drugoj funkciji, mentalni modeli čuvaju strukturu specifičnih i okvirnih teorija u kojima se nalaze. Mentalni modeli djeluju kao posrednici između ovih temeljnih struktura i novih informacija.

Prema svojoj trećoj funkciji, mentalni modeli predstavljaju oruđa koja omogućavaju promjenu okvirne teorije, tj. konceptualnu promjenu. Oni posjeduju barem dvije osnovne karakteristike koje ih čine ključnom karikom u procesu konceptualne promjene. Pomoću mentalnih modela, intuitivna učenička znanja postaju eksplicitno kodirana i dostupna za korištenje. Istovremeno, u odnosu na sustav okvirnih i specifičnih teorija, mentalni modeli zadržavaju izvjestan stupanj nezavisnosti koji im omogućava da posreduju i konačno omoguće konceptualnu promjenu.

Hipotetička struktura inicijalnog koncepta *Smjene dana i noći na Zemlji* opisana je na Slici 1.6.1. Okvirna teorija ima ontološke pretpostavke da su fizički objekti čvrsti, stabilni i da su odozdo poduprijeti i epistemološke ideje ili preferencija fizičkog tipa objašnjenja. Informacije koje dolaze iz opservacija i socijalnih interakcija (na primjer, Zemlja je ravna, Sunce je na nebu u toku dana, ali ne i u toku noći, itd.) interpretiraju se u granicama okvirne teorije i grade drugi, niži nivo naivnih ideja, tzv. specifične teorije (Vosniadou i Brewer, 1994; Vosniadou, 2002; prema Vosniadou, 2013).



Slika 1.6.1. *Hipotetička struktura koncepta Smjene dana i noći (Vosniadou, 2013)*

Prema okvirnom teorijskom pristupu, opisani sustavi intuitivnih učeničkih ideja pokazuju veliki otpor prema promjenama i utjecajima nastavnog procesa iz dva osnovna razloga. Kao prvo, unutar okvira naivnih teorija, koncepti su međusobno tijesno povezani i koherentni, otud promjena jednog određenog koncepta zahtijeva reviziju u drugim, sa njim povezanim konceptima. Primjerice, konstrukcija mentalnog modela *Smjene dana i noći* ovisi o individualnoj reperezentaciji većeg broja interaktivnih koncepta kao što su koncepti Zemlja, Sunce i Mjesec.

Kao drugo, promjena jednog posebnog koncepta zahtijeva radikalnu promjenu ontoloških i epistemoloških pretpostavki koje čine okvirnu teoriju. Kada djeca mijenjaju početni model ravne Zemlje u tzv. sintetički model okrugle ravne ploče, promjene su isključivo ograničene na nivou mentalnih modela. Ono što se u ovim slučajevima mijenja jesu pojedinačna naivna vjerovanja iz domena specifične teorije (da je Zemlja ploča), dok ontološke pretpostavke o ravnoj, stabilnoj i poduprijetoj Zemlji iz domena okvirne teorije ostaju sačuvane i nepromijenjene (Slika 1.6.1). Prema tome, u okviru sintetičkih mentalnih modela Zemlje, koncept Zemlje je kategoriziran kao fizički umjesto astronomski objekt.

Konceptualna promjena se ne može postići kroz neku vrstu iznenadne zamjene intuitivne koncepcije sa znanstvenom koncepcijom kada učenici postanu nezadovoljni inicijalnom koncepcijom. Ona je obično spor i postepen proces, ne samo zato što uključuje veliku mrežu međusobno povezanih koncepata, već i zbog toga što zahtijeva izgradnju potpuno novog konceptualnog prikaza koji uključuje radikalne promjene u ontologiji i epistemologiji naivne teorije. Promjena jednog određenog koncepta pretpostavlja promjenu u čitavom sustavu hijerarhijski nadređenih mentalnih modela, kategorija ili premisa. U odnosu na to, konceptualna promjena pretpostavlja radikalnu teorijsku promjenu, koja se u strukturalnom i spoznajnom smislu definira kao holistički i dramatičan ili revolucionaran proces.

1.7 Pristup okvirne teorije u razumijevanju konceptualne promjene u matematici

Primjena pristupa konceptualne promjene na učenje matematike je relativno nov pokušaj. Iako je provedeno mnogo istraživanja o tradiciji miskoncepcija tijekom 1970-tih i 1980-tih, matematička obrazovna zajednica nerado je prihvatila pristup konceptualnoj promjeni. Razlog tome je što se matematika tradicionalno smatra disciplinom koja se temelji na deduktivnim dokazima, a ne na eksperimentima pa je time otpornija na anomalije te ne pokazuje radikalne nekompatibilnosti teorije prije i poslije revolucije (Kuhn, 1962; prema Vosniadou, 2013).

Međutim, sa stajališta učenja, čini se kako učenici tijekom učenja matematičkih koncepata imaju slične poteškoće koje su se javljale i tijekom usvajanja znanstvenih koncepata iz područja fizike. Kao što učenici razvijaju naivnu fiziku na temelju svakodnevnog iskustva, također razvijaju i naivnu matematiku koja se sastoji od nekih temeljnih načela i pretpostavki koje ponekad olakšavaju učenje, a ponekad ga sprječavaju (Gelman, 2000, Lipton i Spelke 2005; prema Vosniadou, 2013).

Posljednjih godina pristup okvirne teorije je primijenjen na učenje matematike kako bi se objasnile poteškoće koje učenici imaju u konceptualnom razumijevanju racionalnih brojeva (Vosniadou i Verschaffel, 2004; prema Vosniadou, 2013). Okvirna teorija objašnjava učeničke poteškoće s racionalnim brojevima zbog toga jer je koncept razlomka nekompatibilan konceptu prirodnog broja. Za vrijeme predškolskih godina, djeca formiraju inicijalni koncept broja koji je u suštini ekvivalentan matematičkom konceptu prirodnog broja. Naime, djeca su do pete godine u stanju brojati na standardni način, uočiti pogreške u koracima brojanja koje su napravili drugi i pronaći algoritme prebrojavanja kako bi riješili jednostavne probleme zbrajanja i oduzimanja za ograničeni raspon brojeva. Osnovne karakteristike inicijalnog razumijevanja broja su da svaki broj ima jedinstveni simbolički zapis, brojevi imaju jedinstvenog prethodnika i sljedbenika (Dehaene, Dehaene-Lambert i Cohen, 1998; Gelman, 2000; prema Vosniadou, 2013), brojevima s više znamenki odgovaraju veći brojevi (Smith, Solomon i Carey, 2005; prema Vosniadou, 2013), računske operacije su predvidive (Fischbein i sur., 1985; Moskal i Magone, 2000; prema Vosniadou, 2013). Razlomci krše sve spomenute osnovne principe koncepta prirodnog broja. Skup racionalnih brojeva je gust, nije diskretan, odnosno između dva različita racionalna broja postoji beskonačno mnogo racionalnih brojeva, računske operacije nisu predvidljive. Učenicima je teško razumijeti kako su razlomci i decimalni brojevi alternativne prezentacije racionalnih brojeva, a ne različiti skupovi brojeva.

Razumijevanje matematičkog koncepta racionalnog broja zahtijeva radikalne konceptualne promjene u inicijalnom konceptu prirodnog broja. Empirijski rezultati pokazuju kako je taj proces dugotrajan i postepen tijekom kojeg se stvaraju sintetičke koncepcije koje su rezultat učeničkog pokušaja prilagodbe nekompatibilne informacije o racionalnom broju s inicijalnim konceptom prirodnog broja. Mnogi učenici vjeruju kako su dulji decimalni brojevi ujedno i veći decimalni brojevi. Osnovnoškolci, srednjoškolci pa čak i neki studenti ne shvaćaju kako je skup racionalnih brojeva gust. Učenici teško razumiju kako različiti simbolički zapisi mogu predstavljati isti broj pa često tretiraju različite simboličke reprezentacije kao različite brojeve.

Vamvakoussi i Vosniadou (2004, 2010; prema Vosniadou, 2013) su provele istraživanje u kojem su htjele saznati koje poteškoće imaju srednjoškolci u razumijevanju gustoće racionalnih brojeva. Rezultati su potvrdili kako je pretpostavka o diskretnosti jaka kod učenika sedmog razreda te ostaje snažna i kod starijih učenika unatoč uočljivim razvojnim razlikama. Učenici svih dobnih skupina često su odgovorili kako postoji konačno mnogo racionalnih brojeva u zadanom intervalu. Nadalje, rezultati su potvrdili kako učenici pojam beskonačnosti prvo primijenjuju na decimalne brojeve, a zatim na razlomke.

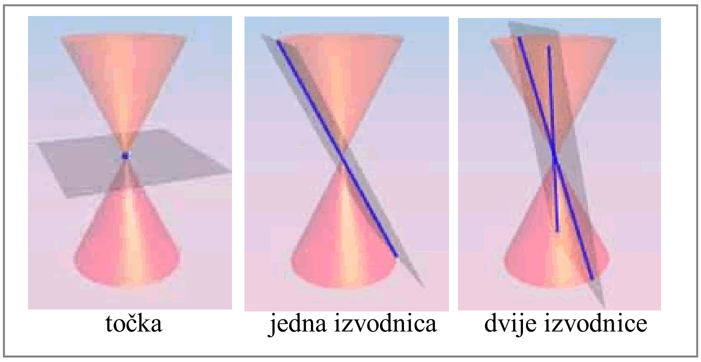
Unatoč velikim razlikama u procesima prikupljanja znanja iz fizike i matematike, mogu se primijetiti bitne sličnosti. U oba područja postoje dokazi kako djeca konstruiraju inicijalne, sistematske i organizirane strukture znanja na temelju svog svakodnevnog iskustva prije nego započne sistematsko izlaganje matematičkom i znanstvenom poučavanju. Novi, znanstveni koncepti prezentirani tijekom poučavanja često su kontradiktorni s dobro utvrđenim pretpostavkama početnih, naivnih okvirnih teorija. Ovo nije iznenađujuće, uzevši u obzir kako je većina znanstvenih koncepata produkt znatnih znanstvenih revolucija kojima je trebalo stotine godina da se razviju. Obzirom kako su učenici nesvjesni konflikta između znanstvenih i naivnih ideja, oni prilagođavaju nove informacije u svoju postojeću bazu znanja te se tijekom tog procesa stvaraju sintetičke koncepcije. Mnoga istraživanja su pokazala kako naivne teorije opstaju i nakon stjecanja međusobno nekompatibilne znanstvene teorije te da s njom koegzistiraju kroz mnogo godina (Dunbar, Fugelsang i Stein, 2007; Inagaki i Hatano, 2008; Shtulman i Valcarcel, 2012; prema Vosniadou, 2013). Također, mnoga istraživanja su pokazala kako inicijalni koncepti i dalje postoje u odrasloj dobi i sprječavaju pristup znanstvenim konceptima i objašnjenjima (Vosniadou, Chountala i Lepenenioti, 2013; prema Vosniadou, 2013).

1.8 Povijesni pregled i porijeklo imena hiperbole

Konike su bile područje poučavanja mnogih velikana matematike poput Menehma, Euklida, Arhimeda, Apolonija sve do Papusa. Pronalazak konika pripisuje se Menehmu (380. - 320. god. prije Krista) pripadniku Platonove Akademije u Ateni. Baveći se problemom udvostručenja kocke otkrio je da se presjekom uspravnog stošca i ravnine koje je okomita na izvodnicu stošca dobiju do tada nepoznate krivulje. Prema Menehmu, vrsta krivulje je ovisila o vrsti stošca, odnosno kod stošca koji ima šiljasti kut pri vrhu osnog presjeka dobiva se elipsa, kod stošca pravokutnog osnog presjeka parabola i tupokutnog presjeka hiperbola. Ove nazive nije dao Menehmo, imena pripadajućim krivuljama su pridružena kasnije. Konikama su se bavili i Euklid (325. - 265. god. prije Krista) čija su djela o konikama izgubljena te Arhimed (287. - 212. god. prije Krista), u čijim djelima nalazimo neke važne rezultate o svojstvima konika, posebice parabole. Najveći antički pisac o konikama je Apolonije iz Perge (262. - 190. god. prije Krista) koji je o konikama napisao opsežnu studiju i to čisto geometrijskim pristupom, a njegovi su rezultati bili toliko podrobni i potpuni da se današnja euklidska geometrija nije mnogo odmakla od njegovih spoznaja. Međutim, Apolonije nije svojstva čunjosječnica opisivao algebarski, kao što se to danas radi u školama. Trebalo je proći skoro 2000 godina da bi matematičari postigli veliki pomak u razumijevanju čunjosječnica povezivanjem geometrijskih i algebarskih tehnika. Apolonije je prvi uvidio da se na jednom te istom stošcu mogu kao presjek stošca i ravnine dobiti sve tri krivulje. Novost kod Apolonija je da ne promatra samo presjeke uspravnog stošca, nego i kosih stožaca i to proizvoljnom ravninom. On je i uveo nazive za elipsu, hiperbolu i parabolu. Posljednji veliki antičkogrčki matematičar, Papus iz Aleksandrije (290. - 350. god.) bavio se konikama te je uveo pojam žarišta i ravnalice. Papus je konike shvatio kao geometrijsko mjesto točaka u ravnini kojima je omjer udaljenosti do čvrste točke (fokusa) i čvrstog pravca (ravnalice) konstantan. Njegova će postignuća kasnije koristiti Ruđer Bošković.

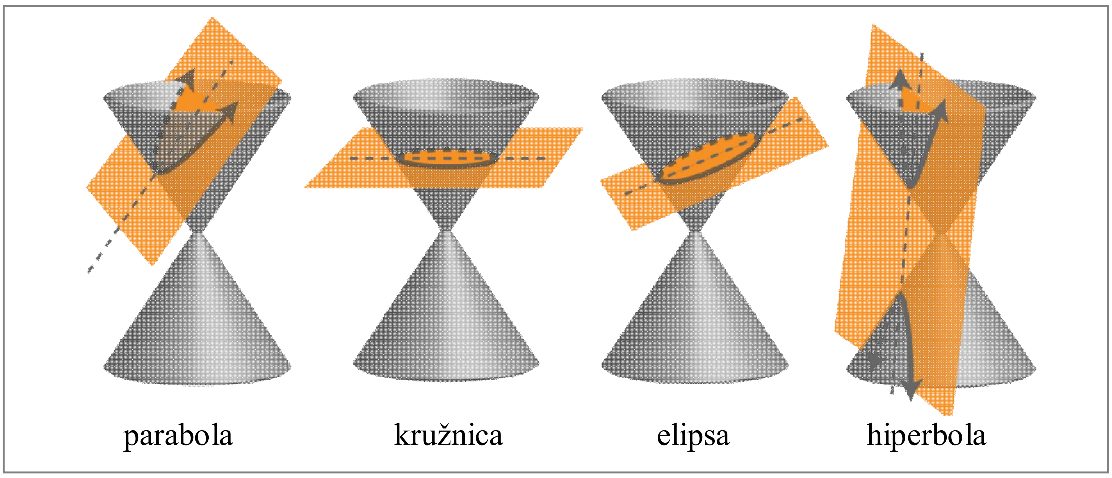
Od tada je povijest konika gotovo prazna sve do petnaestog stoljeća. Renesansa je donijela oživljavanje interesa za grčko znanje što je za posljedicu imalo povećan interes za konike i ostale krivulje. Prvo originalno djelo o konikama u kršćanskoj Europi se zove *"Libellus super viginti duobus elementis conicis"* čiji autor je Johannes Werner (1468. –1528.). Bavio se samo parabolom i hiperbolom jer je njegovo glavno zanimanje bilo udvostručavanje kocke, pri čemu mu elipsa nije imala značaja. Procvat astronomije, kao i proučavanje optičkih zakona potiču zanimanje za konike. Nikola Kopernik (1473. – 1543.) je ostao pri uvjerenju da je kružnica glavna kada se govori o gibanju nebeskih tijela, ali Johannes Kepler (1571-1630) je prvi prepoznao da se nebeska tijela gibaju oko Sunca po eliptičkim putanjama. U svojoj knjizi *"Astronomiae pars Optica"* jedno je poglavlje posvetio konikama. Kepler razlikuje pet vrsta konika, a to su kružnica, elipsa, parabola, hiperbola i pravac. Začetnikom modernog poimanja krivulja drugog reda smatra se Rene Descartes, koji 1637. godine objavljuje djelo "*La Géométrie*". Descartes je shvatio krivulje kao geometrijsko mjesto točaka kojima koordinate zadovoljavaju određenu jednadžbu. Za razliku od Descartesa, Ruđer Bošković 1754. izgradio je geometrijsku teoriju konika i objavio ju u djelu "*Sectionum conicarum*".

Kružnica, elipsa, hiperbola i parabola nazivaju se konike zbog toga što se te krivulje dobivaju kao presjeci stožaste (konusne) plohe i ravnine. Odatle potječe i hrvatski naziv čunjosječnice. Prolazi li ravnina vrhom stošca, onda će presjek biti samo točka ili jedan pravac ili pak dva para ukrštenih pravaca (Slika 1.8.1).



Slika 1.8.1. *Presjeci stošca i ravnine koja prolazi vrhom stošca*

Pretpostavimo zato da ravnina ne prolazi vrhom stošca. Ako je ravnina okomita na os stošca, onda je njezin presjek s plohom kružnica. Ako ravnina nije okomita na os, a siječe sve izvodnice stošca, onda će presjek biti elipsa. Ako je ravnina paralelna s jednom izvodnicom, presjek će biti parabola. Ako je ravnina paralelna s dvije izvodnice stošca, onda će presjek biti hiperbola (Slika 1.8.2).



Slika 1.8.2. *Presjeci stošca i ravnine koja ne prolazi vrhom stošca*

Hiperbola kojoj središte leži u ishodištu koordinatnog sustava, a realna os leži na osi apscisa, ima *kanonsku jednadžbu*

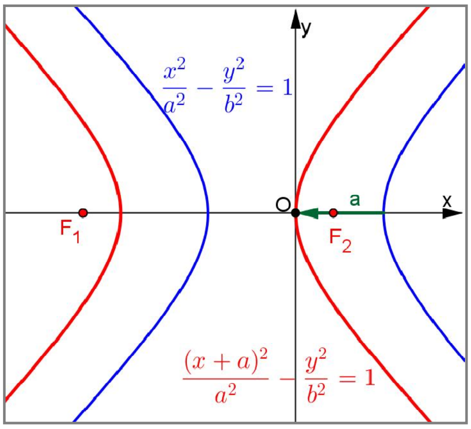
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{1.1}$$

Translatiramo li hiperbolu zadanu jednažbom (1.1) u negativnom smjeru osi x za $x_0 = -a$ tako da je novo središte hiperbole u točki $S(-a, 0)$, dolazimo do jednadžbe hiperbole

$$\frac{(x-a)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{1.2}$$

Izrazimo y^2 iz (1.2) pa dobivamo

$$y^2 = 2\frac{b^2}{a}x + \frac{b^2}{a^2}x^2. \tag{1.3}$$



Slika 1.8.3. *Translacija hiperbole dane jednadžbom* $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ *duž osi x*

Kako bismo pojednostavnili navedene izraze, definirajmo poluparametar hiperbole. Duljinu tetive koja prolazi jednim od fokusa hiperbole i okomita je na realnu os hiperbole nazivamo parametrom hiperbole i označavamo s $2p$. Duljinu p nazivamo poluparametrom hiperbole. Kao što vidimo na Slici 1.8.4 vrijedi:

$$\begin{cases} p^2 + 4e^2 = m^2 \\ |p - m| = 2a. \end{cases}$$

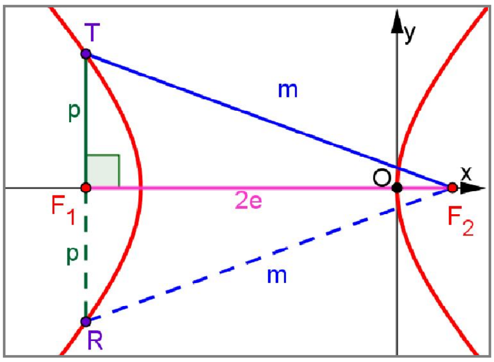
Rješavajući sustav jednadžbi, dobivamo

$$p = \frac{b^2}{a}.$$

Sada iz (1.3) dobivamo

$$y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2, \tag{1.4}$$

a tu jednadžbu nazivamo jednadžba hiperbole u vršnom ili tjemenom obliku.



Slika 1.8.4. *Parametar hiperbole*

Elipsa kojoj središte leži u ishodištu koordinatnog sustava, a velika os leži na osi apscisa, ima kanonsku jednadžu

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{1.5}$$

Translatiramo li elipsu čija je jednadžba (1.5) u pozitivnom smjeru osi x za $x_0=a$ tako da je novo središte elipse u točki $S(a,0)$, dolazimo do jednadžbe elipse

$$\frac{(x-a)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{1.6}$$

Izrazimo y^2 iz (1.5) pa dobivamo

$$y^2=2\frac{b^2}{a}x-\frac{b^2}{a^2}x^2. \tag{1.7}$$

Duljinu tetive koja prolazi jednim od žarišta elipse i okomita je na veliku os elipse nazivamo parametrom elipse i označavamo s $2p$. Duljinu p nazivamo poluparametrom elipse. Analogno, kao kod hiperbole dobit ćemo da je parametar p dan izrazom

$$p=\frac{b^2}{a}.$$

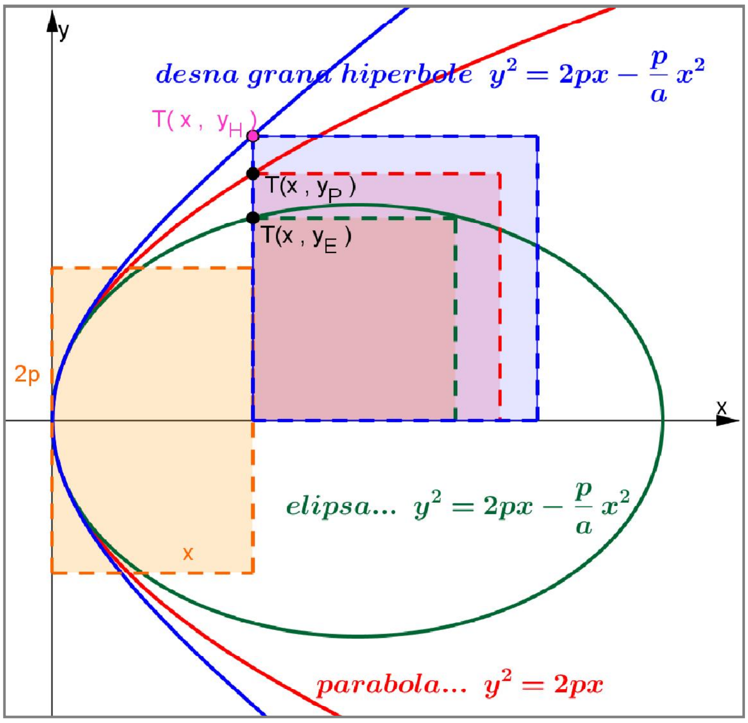
Sada iz (1.7) dobivamo jednadžba elipse u vršnom ili tjemenom obliku

$$y^2=2px-\frac{p}{a}x^2. \tag{1.8}$$

Parabola kojoj tjeme leži u ishodištu, a žarište na pozitivnom dijelu x-osi ima kanonsku i tjemenu jednadžbu

$$y^2=2px. \tag{1.9}$$

Geometrijski interpretiramo jednadžbe dane s (1.4), (1.8) i (1.9) i usporedimo površinu kvadrata određenog točkom $T(x,y)$ na krivulji s površinom pravokutnika kojem je duljina jedne stranice pravokutnika je jednaka apscisi točke T, a duljina druge stranice pravokutnika je jednaka fiksnom parametaru $2p$ (Slika 1.8.5).



Slika 1.8.5. *Porijeklo imena konika*

Površina traženog kvadrata jednaka je y^2, a površina traženog pravokutnika je $2px$. Za točku na elipsi površina kvadrata je manja od površine pravokutnika jer vrijedi

$$y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2 < 2px.$$

Za točku na paraboli površine kvadrata i pravokutnika su jednake. Za točku na hiperboli površina kvadrata je veća od površine pravokutnika jer vrijedi

$$y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2 > 2px.$$

Ovi rezultati su naveli Apolonija iz Perge da čunjosječnicama nadjene imena elipsa, hiperbola i parabola. Riječ kružnica je hrvatska riječ slavenskog podrijetla, a elipsa, hiperbola i parabola su grčki nazivi. Naime, elipsa na grčkom znači "manjak", parabola znači "jednakost", a hiperbola znači "višak".

Uvedemo li oznaku $\varepsilon = \frac{e}{a}$ za hiperbolu dobivamo

$$\varepsilon^2 = 1 + \frac{b^2}{a^2}. \tag{1.10}$$

Iz (1.10) dobivamo

$$\frac{b^2}{a^2} = -(1 - \varepsilon^2),$$

a kako je $p = \frac{b^2}{a}$ slijedi

$$\frac{p}{a} = \frac{b^2}{a^2} = -(1 - \varepsilon^2).$$

Analogno, za elipsu slijedi

$$\varepsilon^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} \;\; i \;\; \frac{p}{a} = \frac{b^2}{a^2} = 1 - \varepsilon^2.$$

Zajednička jednadžba elipse, hiperbole i parabole u vršnom obliku dana je s

$$y^2 = 2px - (1 - \varepsilon^2)x^2,$$

pri čemu je za parabolu $\varepsilon = 1$.

2. CILJ, PROBLEM I HIPOTEZE ISTRAŽIVANJA

Interes je energizirajući činitelj koji je povezan s odabirom i ustrajnošću pri aktivnostima koje uključuju procesiranje informacija. Kako je interes uvijek vezan uz specifičan objekt, aktivnost ili predmet, model razvoja interesa je posebno prikladan za ispitivanje kako je učenje novih nastavnih sadržaja povezano s motivacijom učenika. Cilj diplomskog rada je utvrditi povezanost situacijskog i osobnog interesa s usvajanjem koncepata iz matematike, specifičnije s usvajanjem koncepta hiperbole.

S obzirom na navedeno, formulirani su sljedeći problemi istraživanja:

1. utvrditi uspješnost učenika u rješavanju zadataka koji zahtijevaju poznavanje i razumijevanje koncepta hiperbole
2. ispitati interes učenika za matematiku općenito te analitičku geometriju i hiperbolu specifično
3. utvrditi povezanost situacijskog i osobnog interesa s postignutom konceptualnom promjenom u razumijevanju koncepta hiperbole

3. METODOLOGIJA ISTRAŽIVANJA

U ovom poglavlju bit će opisani sudionici, postupak i instrumenti istraživanja koje je provedeno u svibnju i lipnju 2015. u šest trećih razreda opće gimnazije.

3.1 Sudionici

U istraživanju je sudjelovalo 160 učenika trećih razreda iz šest razrednih odjeljenja tri opće gimnazije u Zagrebu i Samoboru. Među njima je bilo 74 mladića (46.3%) te 84 djevojke (52.5%), dok dvoje učenika nije naznačilo spol. Iz obrade podataka su izostavljeni rezultati učenika koji nisu bili potpuni. Prosječna dob učenika bila je 17.3 godine.

3.2 Postupak

Ispitivanje je provedeno grupno u dogovoru s profesorima matematike i stručnom službom škole. Prikupljanje podataka sastojalo se od ispunjavanja upitnika kojima je ispitan interes učenika za matematiku općenito, analitičku geometriju i temu hiperbole, a dio učenika je i rješavao ispit sa zadacima vezanim uz temu hiperbole. Osim toga, prikupljeni su i osnovni demografski podaci te podaci o prethodnoj uspješnosti u matematici i podaci o očekivanoj ocjeni iz ispita kojim su obuhvaćeni zadaci vezani uz hiperbolu. Ispitivanje interesa učenika je trajalo u prosjeku 15 minuta, a rješavanje ispita sa zadacima vezanim uz hiperbolu je trajalo u prosjeku 20 minuta. Prije samog početka ispitivanja učenicima je ukratko objašnjena svrha istraživanja. Uz to, učenicima je istaknuto da je istraživanje dobrovoljno te da u bilo kojem trenutku mogu odustati od ispitivanja i da su podaci dobiveni istraživanjem povjerljivi, a bit će dostupni samo istraživačima. Od učenika se tražilo da navede svoje ime na upitniku radi povezivanja svih učenikovih odgovora.

3.3 Instrumenti

Skala interesa. Tvrdnje korištene u ovoj skali formirane su za potrebe ovog istraživanja u skladu s modelom razvoja interesa (Hidi i Renninger, 2006) te prethodnim istraživanjima interesa u području matematike (Rovan, Šikić, Vlahović-Štetić i Pavlin-Bernardić, 2014). Formirane su tri skale: skala osobnog interesa za matematiku te skale situacijskog interesa za analitičku geometriju i za hiperbolu. Sve tri skale sačinjavale su slične čestice, ali koje su se razlikovale po tome na koji se sadržaj odnose. U upitniku su učenici za svaku tvrdnju trebali označiti u kojoj se mjeri slažu s njom, a stupanj slaganja bio je u rasponu od 1 (uopće se ne slažem) do 5 (u potpunosti se slažem). Rezultati na pojedinim skalama formirani su kao aritmetičke sredine procjena na pripadajućim česticama.

Skalu osobnog interesa za matematiku sačinjavalo je 11 čestica (primjer čestice: "*Sadržaji koje učimo iz matematike su mi zanimljivi.*"), a pouzdanost te skale izražena koeficijentom unutarnje konzistencije je $\alpha = 0.90$. Skalu situacijskog interesa za analitičku geometriju također je sačinjavalo 11 čestica (primjer čestice: "*U odnosu na gradivo koje inače učimo iz matematike gradivo vezano uz analitičku geometriju mi je zanimljivo.*"), dok je skalu situacijskog interesa za hiperbolu sačinjavalo 10 čestica (primjer čestice: "*U odnosu na gradivo koje inače učimo iz matematike današnja tema bila mi je zanimljiva.*"). Pouzdanost ovih skala bila je za analitičku geometriju $\alpha = 0.89$ te za hiperbolu $\alpha = 0.88$.

Ispit. Ispit iz matematike sastojao se od četiri zadatka, a prvi zadatak od tri podzadatka. Ispitni zadaci su bili zatvorenoga i otvorenoga tipa. Prvi, drugi i treći zadatak bili su zadaci otvorenoga tipa u kojima je trebalo konstruirati rješenje zadatka. Treći zadatak bio je zadatak zatvorenog tipu u kojem je među šest ponuđenih odgovora, više točnih odgovora, tj. to je bio zadatak složenog višestrukoga izbora.

	ishodi učenja	**centralnost s obzirom na ishode učenja**	**razina složenosti misaonih procesa**	**procijenjena težina zadatka**
prvi zadatak	- očitati elemente hiperbole iz zadane jednadžbe hiperbole - očitati koordinate tjemena hiperbole iz zadane jednadžbe hiperbole - očitati koordinate žarišta hiperbole iz zadane jednadžbe hiperbole - napisati jednadžbe asimptota iz zadane jednadžbe hiperbole	nužno	složenost 1	lagan
drugi zadatak	- interpretirati zadani uvjet kao granu hiperbole	vrijedno	složenost 3	vrlo težak
treći zadatak	- razlikovati hiperbolu prikazanu u koordinatnom sustavu od drugih sličnih krivulja	nužno	složenost 1	težak
četvrti zadatak	- interpretirati elemente hiperbole prikazane u koordinatnom sustavu s istaknutom kvadratnom mrežom cjelobrojnih točaka - sastaviti jednadžbu hiperbole pomoću njenih elemenata	važno	složenost 2	srednje težine

Tablica 3.3.1. *Opis ispita iz matematike*

U Tablici 3.3.1 je za svaki od postavljenih zadataka prikazan ishod učenja i razina znanja koji s njime provjeravaju, razina složenosti misaonih procesa koji su nužni za rješavanje zadatka (poznavanje osnovnih činjenica i postupaka (složenost 1), jednostavnije povezivanje i rješavanje rutinskih problema (složenost 2), složenije povezivanje i rješavanje nerutinskih problema (složenost 3)) i procijenjena težina zadatka (vrlo lagan, lagan, srednje težine, težak i vrlo težak).

Svaki zadatak je bio politoman, odnosno točno riješen prvi zadatak donosio je 6 bodova, drugi zadatak 4 boda, treći zadatak 2 boda i četvrti zadatak 4 boda pa je ukupni maksimalni broj bodova ispita iznosio 16 bodova. Ispit nije ocijenjivan, odnosno zadaci su bodovani samo za potrebe lakše analize podataka.

4. REZULTATI I DISKUSIJA

U ovom poglavlju opisani su rezultati istraživanja, odnosno prikazani su radovi sudionika i rezultati kvalitativne analize rezultata po zadacima vezanim uz koncept hiperbola te rezultati triju skala interesa kojima su mjereni osobni interes za matematiku te situacijski interes za analitičku geometriju i za hiperbolu.

4.1 Kvalitativna analiza rezultata po zadacima vezanima uz koncept hiperbole

Kvalitativna analiza rezultata ispita iz matematike provedena je na temelju rezultata 72 sudionika. Među njima je bilo 29 učenika (40,28%) i 42 učenice (58,33%), dok jedan sudionik (1,39%) nije naznačio spol. U trećem zadatku iz obrade podataka izostavljeni su rezultati sudionika koji su zaokružili sve ponuđene odgovore, odnosno u analizu rezultata trećeg zadatka uključeni su podaci 70 sudionika (28 učenika, 41 učenica i jedan sudionik bez naznačenog spola). U nastavku je prikazana kvalitativna analiza rezultata po zadacima.

Prvi zadatak:

Hiperbola je zadana jednadžbom $9x^2 - 4y^2 - 36 = 0$.

a) Odredi koordinate tjemena te hiperbole.

b) Odredi koordinate žarišta te hiperbole.

c) Odredi jednadžbe asimptota te hiperbole.

Rješenje:

a) Tjemena hiperbole su točke $A(-a, 0)$ i $B(a, 0)$ pa iz dane jednadžbe hiperbole očitamo da je $a^2 = 4$, odnosno $a = 2$ pa dobijemo $A(-2,0)$ i $B(2,0)$.

b) Fokusi hiperbole su točke $F_1(-e, 0)$ i $F_2(e, 0)$ pa ćemo odrediti linearni ekscentricitet hiperbole iz jednakosti $a^2 + b^2 = e^2$.

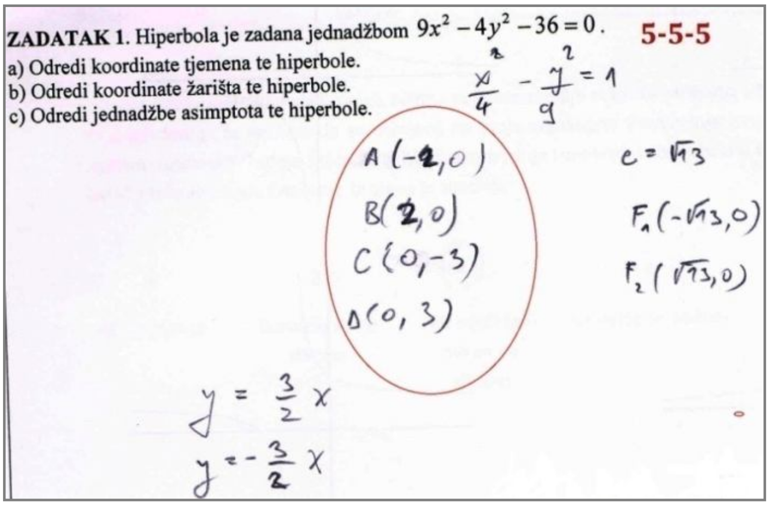
Iz dane jednadžbe hiperbole očitamo da je $b^2 = 9$ pa dobijemo $e^2 = 13$. Kako je linearni ekscentricitet pozitivan broj, slijedi da je $e = \sqrt{13}$. Fokusi hiperbole su točke $F_1(-\sqrt{13}, 0), F_2(\sqrt{13}, 0)$.

c) Jednadžbe asimptota hiperbole su pravci zadani jednadžbama $y = \pm\frac{b}{a}x$, odnosno

$$y = \pm\frac{3}{2}x.$$

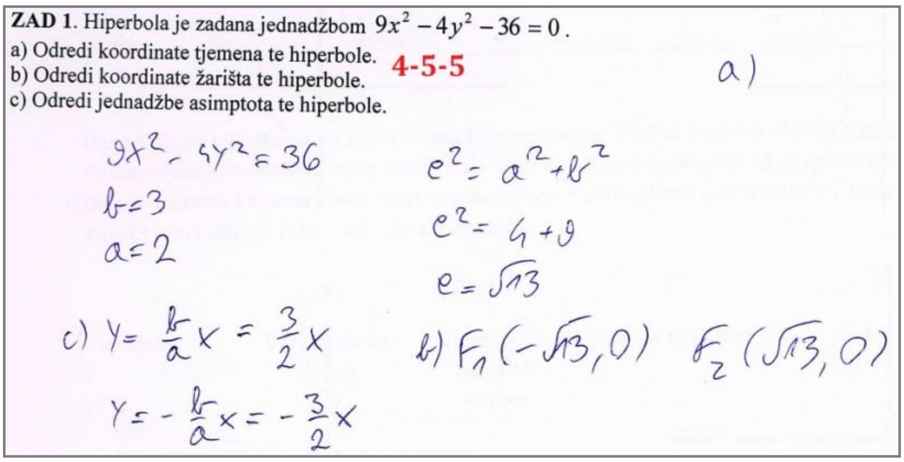
U prvom zadatku mjerene su tri varijable*: točnost rješenja, skica i kanonski oblik jednadžbe hiperbole*. Varijabla *točnost rješenja* mjeri koliko je sudionika točno riješilo zadatak, započelo rješavati zadatak ili ga nije uopće pokušalo riješiti te koje su bile najčešće pogreške prilikom njegova rješavanja. Varijabla *kanonski oblik jednadžbe pravca* mjeri koliko je sudionika zadanu jednadžbu pravca točno ili pogrešno svelo na kanonski oblik te koliko sudionika zadanu jednadžbu hiperbole nije napisalo u kanonskom obliku. Varijabla *skica* mjeri koliko je sudionika nacrtalo skicu te što su sudionici nacrtali.

Koordinate tjemena hiperbole točno je odredilo 20 sudionika (27,78%; 10 učenika, 9 učenica i jedan sudionik bez naznačenog spola), a 10 sudionika (13,89%; 2 učenika i 8 učenica) je odredilo i realna i imaginarna tjemena hiperbole. Činjenica da su učenici odredili i imaginarna tjemena nije iznenađujuća jer pronalaze analogiju s prethodno obrađenom elipsom. Primjer takvog učeničkog rada prikazan je na Slici 4.1.1. Na svakom primjeru učeničkog rada nalaze se tri broja crvene boje. Prvi broj je očekivana ocjena iz ispita znanja koji sadrži zadatke vezane uz hiperbolu, drugi broj je zaključna ocjena iz matematike na kraju školske godine 2013./2014., dok je treći broj očekivana završna ocjena iz matematike na kraju školske godine 2014./2015.



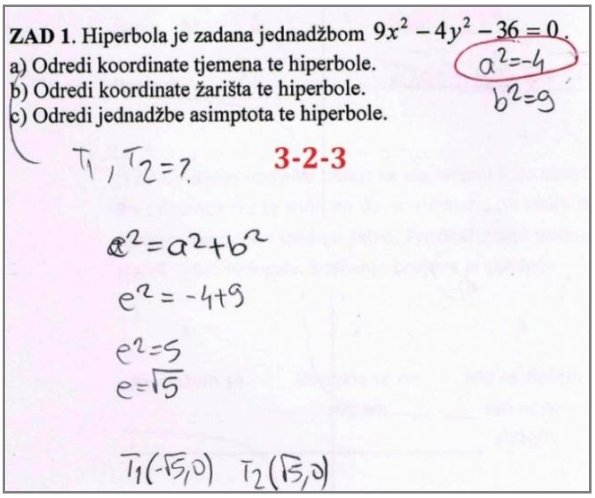
Slika 4.1.1. *Primjer učeničkog rada: Koordinate tjemena hiperbole*

Duljinu realne poluosi točno je odredilo 15 sudionika (20,83%; 8 učenika i 7 učenica) koji nisu uopće pokušali odrediti koordinate tjemena hiperbole. Jedan takav učenički rad prikazan je na Slici 4.1.2.



Slika 4.1.2. *Primjer učeničkog rada: Duljina realne poluosi hiperbole*

Koordinate žarišta hiperbole točno je odredio 31 sudionik (43,06%; 16 učenika, 14 učenica i jedan sudionik bez naznačenog spola), dok je 5 sudionika (6,94%; 2 učenika i 3 učenice) točno odredilo linearni ekscentricitet, a 5 sudionika (6,94%; 1 učenik i 4 učenice) točno napisalo jednadžbu $e^2 = 13$. Na Slici 4.1.3 prikazan je rad učenice koja je napisala kako je kvadrat duljine realne osi jednak negativnom broju, čime pokazuje nerazumijevanje koncepta duljine.



ZAD 1. Hiperbola je zadana jednadžbom $9x^2 - 4y^2 - 36 = 0$.
a) Odredi koordinate tjemena te hiperbole.
b) Odredi koordinate žarišta te hiperbole.
c) Odredi jednadžbe asimptota te hiperbole.

3-2-3

$a^2=-4$
$b^2=9$

$T_1, T_2 = ?$

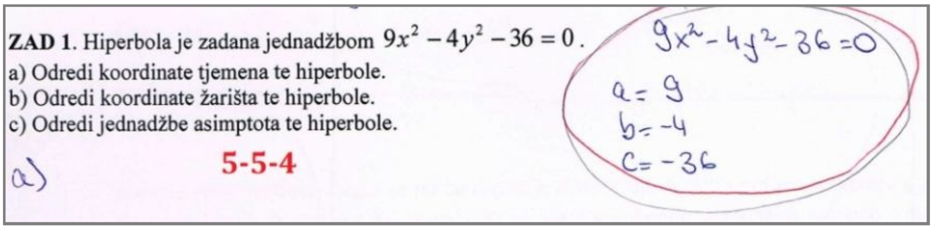
$e^2=a^2+b^2$
$e^2=-4+9$
$e^2=5$
$e=\sqrt{5}$

$T_1(-\sqrt{5},0)$ $T_2(\sqrt{5},0)$

Slika 4.1.3. *Primjer učeničkog rada: Koordinate žarišta hiperbole*

Jednadžbe asimptota točno je odredilo 36 sudionika (50%; 17 učenika, 18 učenica i jedan sudionik bez naznačenog spola), dok su tri učenice (4,17%) napravile pogrešku i napisale kako su asimptote pravci $y = \pm\frac{9}{4}$.

Danu je jednadžbu hiperbole 37 sudionika (51,39%; 16 učenika i 21 učenica) zapisalo u kanonskom obliku, a 3 učenice su je promatrale kao kvadratnu jednadžbu $ax^2 + bx + c = 0$, što je pokazatelj potpunog nerazumijevanja jednadžbe hiperbole. Jedan od takvih učeničkih radova prikazan je na Slici 4.1.4.



ZAD 1. Hiperbola je zadana jednadžbom $9x^2 - 4y^2 - 36 = 0$.
a) Odredi koordinate tjemena te hiperbole.
b) Odredi koordinate žarišta te hiperbole.
c) Odredi jednadžbe asimptota te hiperbole.

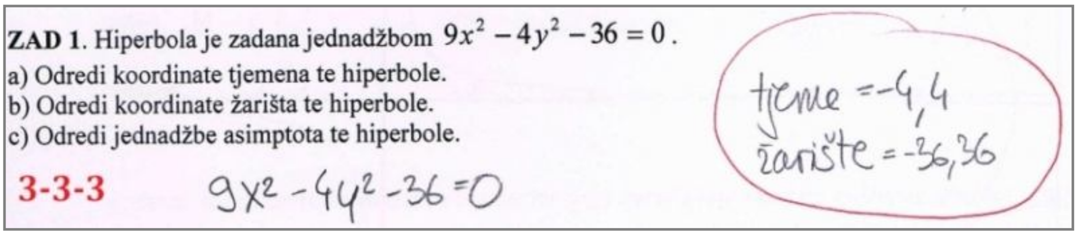
5-5-4

a)

$9x^2-4y^2-36=0$
$a=9$
$b=-4$
$c=-36$

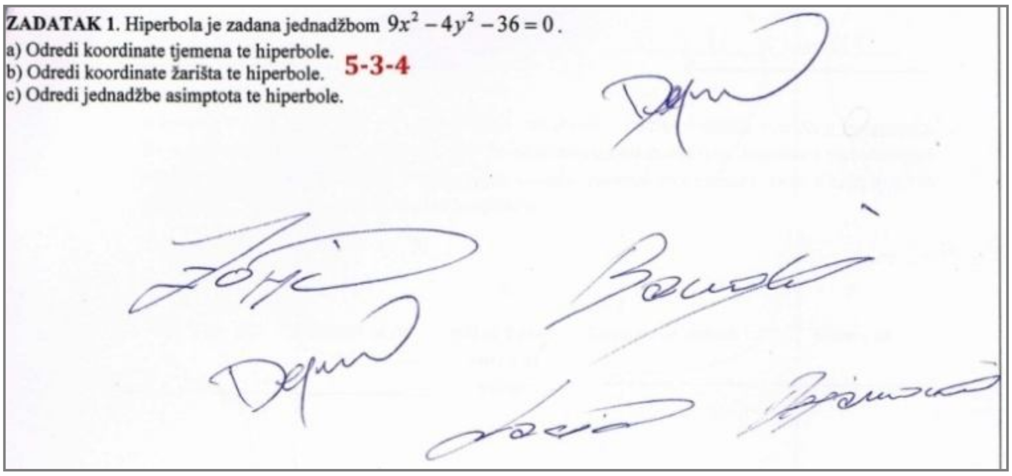
Slika 4.1.4. *Primjer učeničkog rada: Jednadžba hiperbole*

Prvi zadatak 14 sudionika (19,44%, 5 učenika i 9 učenica) nije uopće pokušalo riješiti, a 3 učenice (4,17%) dale su nesuvisao pokušaj rješavanja, kao što je npr. rad prikazan na Slici 4.1.5.



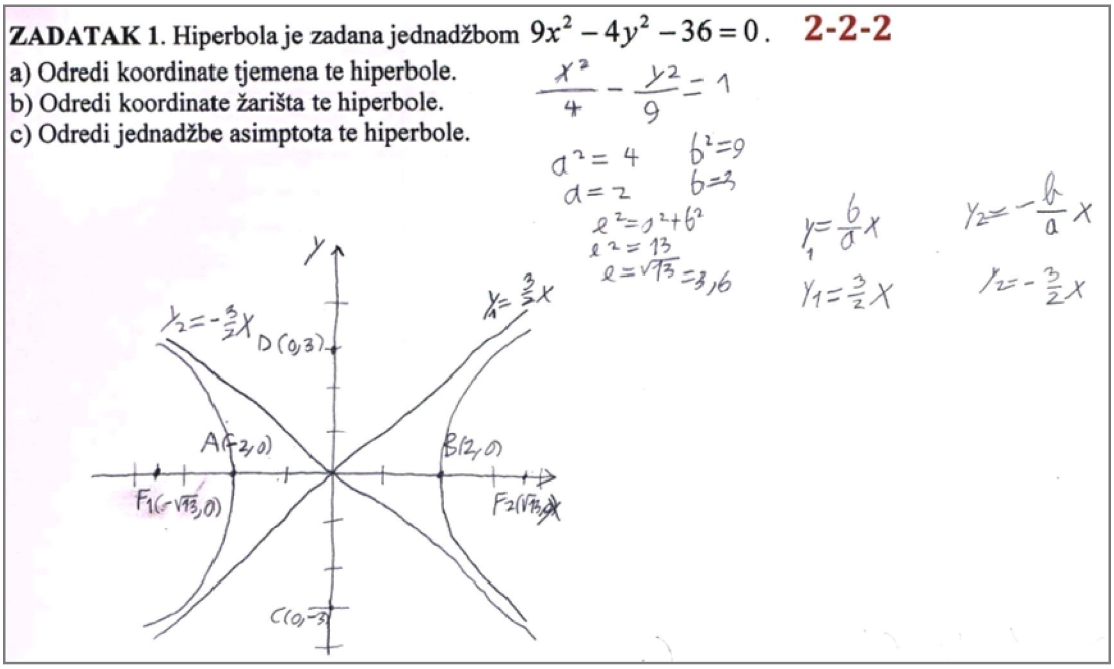
Slika 4.1.5. *Nesuvisao pokušaj rješavanja prvog zadatka*

Pojedinim je učenicima rješavanje ispita bilo nezanimljivo i naporno, što možemo zaključiti promatrajući učenički rad prikazan na Slici 4.1.6. Obzirom da ovaj način provjere znanja nije rezultirao ocjenom, očekivano je da učenici imaju manji interes za rješavanjem zadataka.



Slika 4.1.6. *Primjer učeničkog rada*

Skicu za prvi zadatak nije nacrtalo 68 sudionika (94,44%; 26 učenika, 41 učenica i jedan sudionik bez naznačenog spola). Samo jedan učenik nacrtao je hiperbolu u koordinatnom sustavu, označio njena tjemena i žarišta, nacrtao njene asimptote. Taj rad prikazan je na Slici 4.1.7.

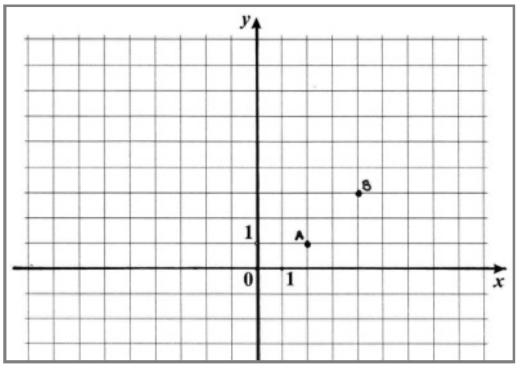


Slika 4.1.7. *Primjer učeničkog rada: Skica prvog zadatka*

Rezultati prvog zadatka pomalo su neočekivani s obzirom da je zadatak rutinski. Naime, samo je 17 učenika (23,61%) na njemu postiglo maksimalni broj bodova (6). Moguć razlog tome je učenička nezainteresiranost za rješavanje zadatka, prije nego li nepoznavanje osnovnih činjenica i postupaka vezanih uz hiperbolu. U jednom razredu učenici su izjavili kako nisu imali pisanu provjeru vezanu uz hiperbolu te da tek pred pisanu provjeru vježbaju zadatke koje su radili na satovima pa da je to razlog zbog kojeg ne znaju riješiti zadatke.

Drugi zadatak:

U koordinatnoj ravnini dane su točke A i B. U istoj koordinatnoj ravnini nacrtaj skup svih točaka T za koje je $|TA| - |TB| = 2$. Ne moraš odrediti jednadžbu tog skupa točaka.



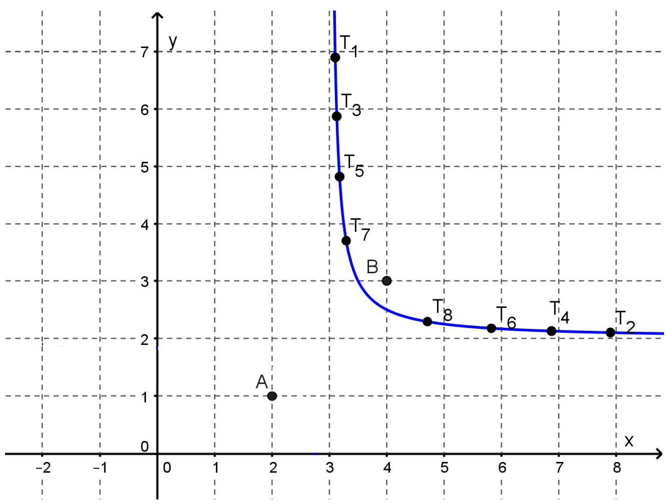
Rješenje:

U tablici su napisane neke udaljenosti točke T od točaka A i B tako da je zadovoljena jednakost $|TA| - |TB| = 2$.

	$\|TA\|$	$\|TB\|$	$\|TA\| - \|TB\| = 2$
a)	6	4	6 – 4 = 2
b)	5	3	5 – 3 = 2
c)	4	2	4 – 2 = 2
d)	3	1	3 – 1 = 2

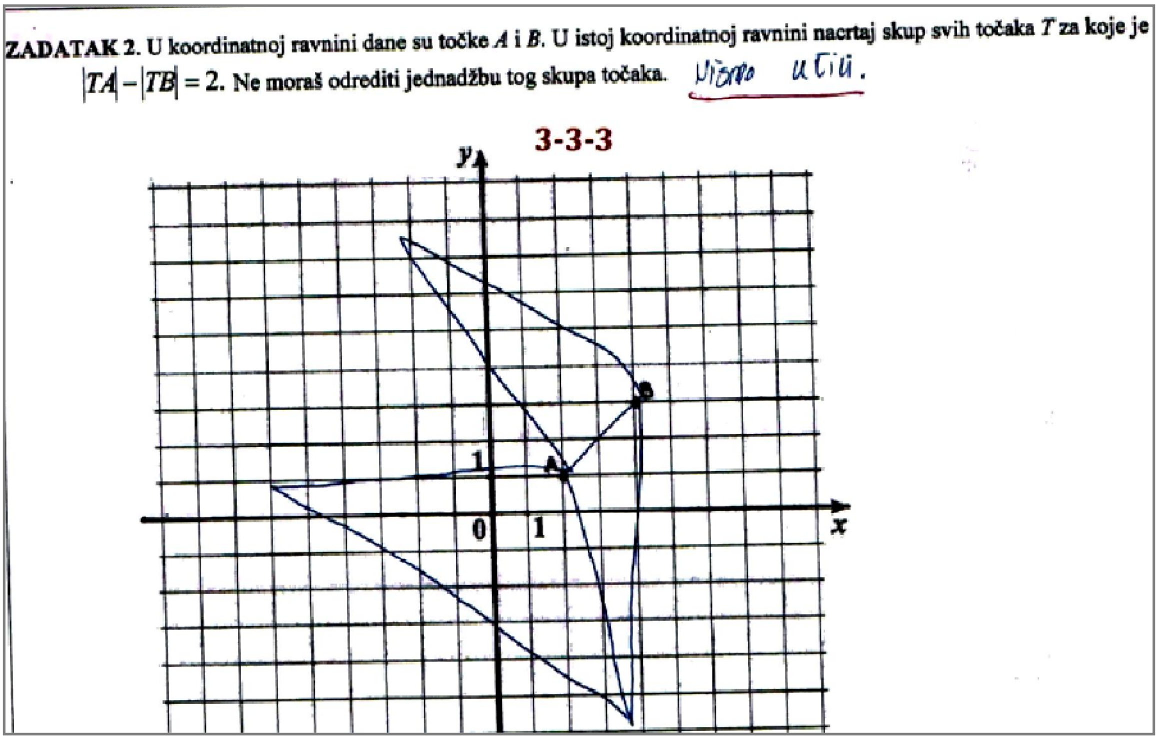
Nacrtamo kružnicu sa središtem u točki A i polumjerom 6 jediničnih duljina, a zatim kružnicu sa središtem u točki B i polumjerom 4. Označimo sjecišta tih kružnica s T_1 i T_2. Ponovimo postupak za ostale slučajeve.

Spojimo li sve točke sjecišta dobit ćemo da je navedeni skup točaka jedna grana hiperbole kojoj su točke A i B fokusi.



U drugom zadatku mjerene su dvije varijable: *točnost rješenja i hiperbola*. Varijabla *točnost rješenja* mjeri koliko je sudionika točno riješilo zadatak ili ga započelo rješavati ili ga nije uopće pokušalo riješiti te koje su bile najčešće pogreške prilikom njegova rješavanja. Varijablom *hiperbola* mjereno je koliko sudionika je nacrtalo hiperbolu ili neku drugu krivulju.

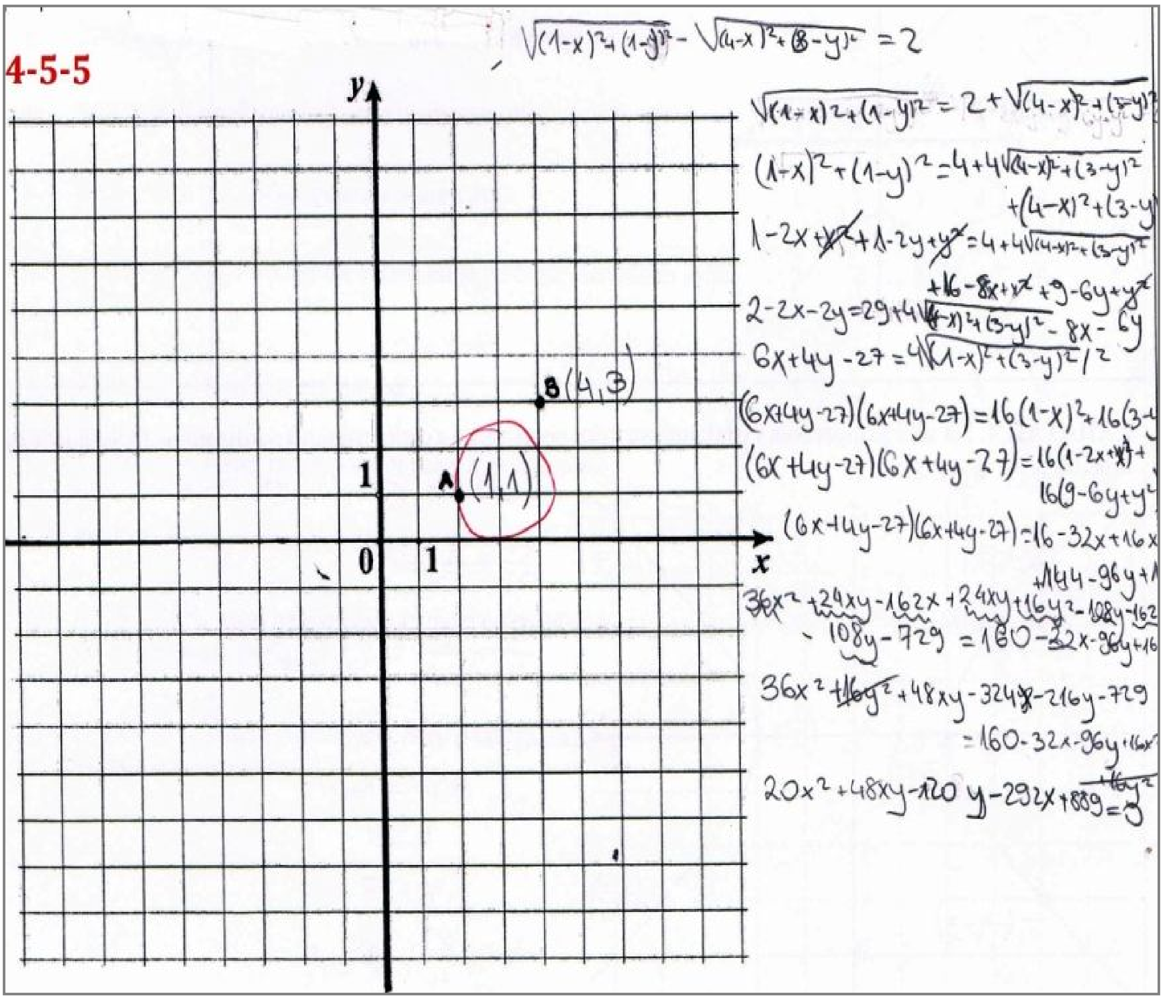
Nitko od sudionika nije točno riješio zadatak, dok ga je 17 sudionika (7 učenika i 10 učenica) započelo rješavati. Zadatak nije pokušalo riješiti 46 sudionika (63,89%; 18 učenika, 27 učenica i jedan sudionik bez naznačenog spola), dok je 4 sudionika (1 učenik i 3 učenice) prikazalo nesuvisao pokušaj rješavanja., a jedan od nesuvislih pokušaja je prikazan na Slici 4.1.8.



Slika 4.1.8. *Nesuvisao pokušaj rješavanja drugog zadatka*

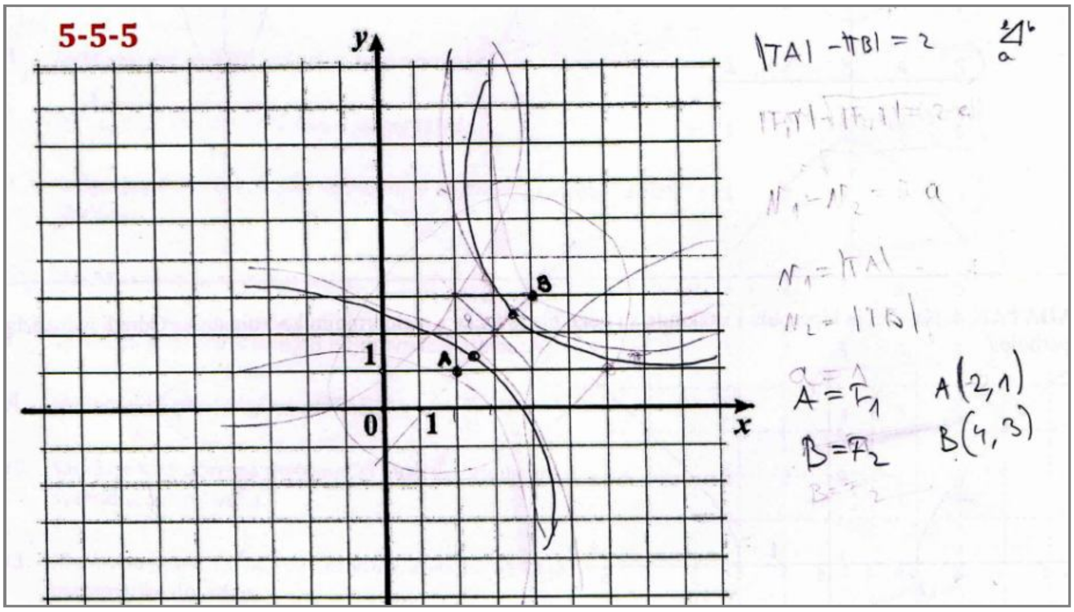
Najčešće pogreške, onih koji su zadatak pokušali riješiti, su interpretacija zadanog skupa točaka kao hiperbole ili pogreške u algebarskim manipulacijama prilikom određivanja jednadžbe danog skupa točaka.

Dvije učenice su pokušale algebarskom metodom odrediti jednadžbu zadanog skupa točaka, ali su tijekom rješavanja pogriješile u algebarskim manipulacijama. Jedan od tih radova prikazan je na Slici 4.1.9.



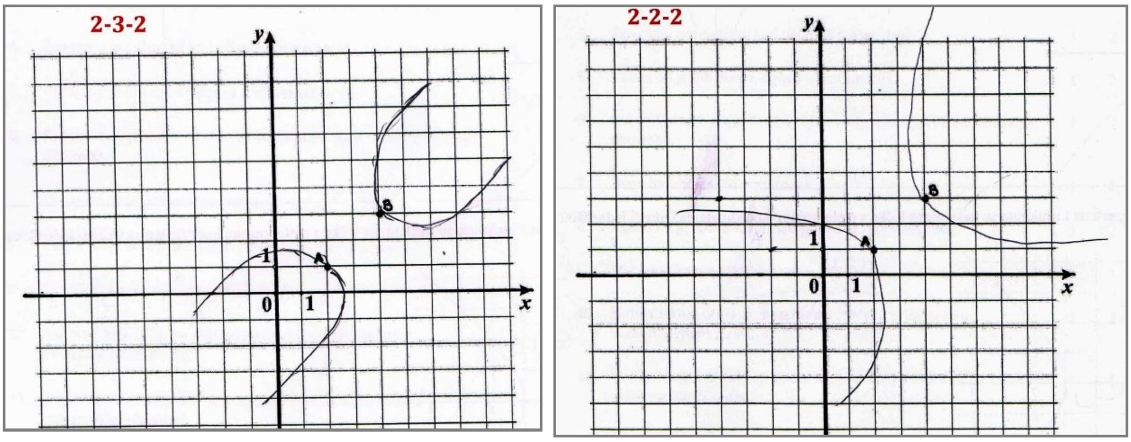
Slika 4.1.9. *Pokušaj rješavanja drugog zadatka algebarskom metodom*

Hiperbolu je nacrtalo 8 sudionika (11,11%; 6 učenika i 2 učenice), dok 58 sudionika (20 učenika, 37 učenica i jedan sudionik bez naznačenog spola) nije ništa nacrtalo. U učeničkim rezultatima izdvojio se jedan učenik koji je zadani skup točaka interpretirao kao hiperbolu kojoj su zadane točke *A* i *B* fokusi. Njegov je rad prikazan na Slici 4.1.10.



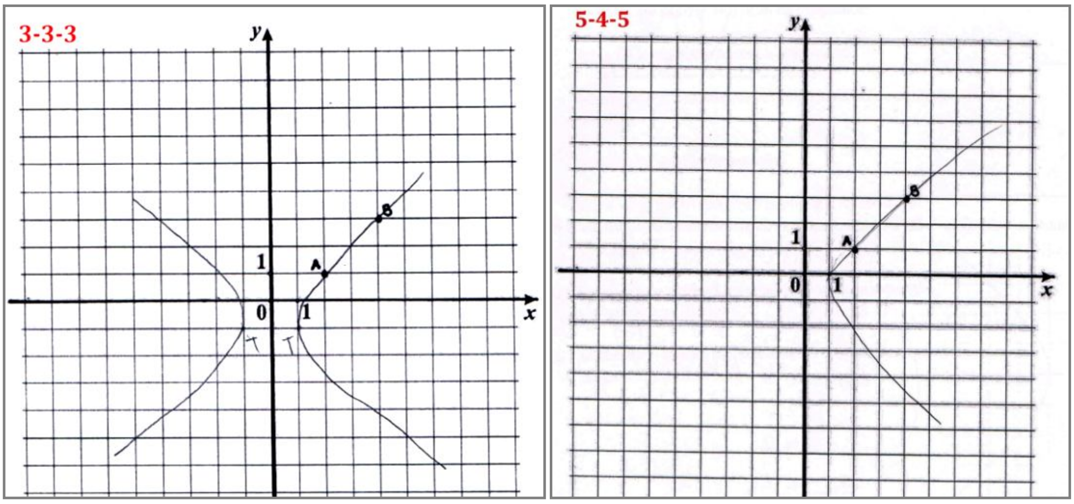
Slika 4.1.10. *Primjer učeničkog rada: Rješenje drugog zadatka*

Dva učenika nacrtala su hiperbolu kojoj su zadane točke tjemena, dok su 3 učenika nacrtala hiperbolu koja je nalikovala dvjema parabolama kojima su zadane točke tjemena. Ti radovi prikazani su na Slici 4.1.11.



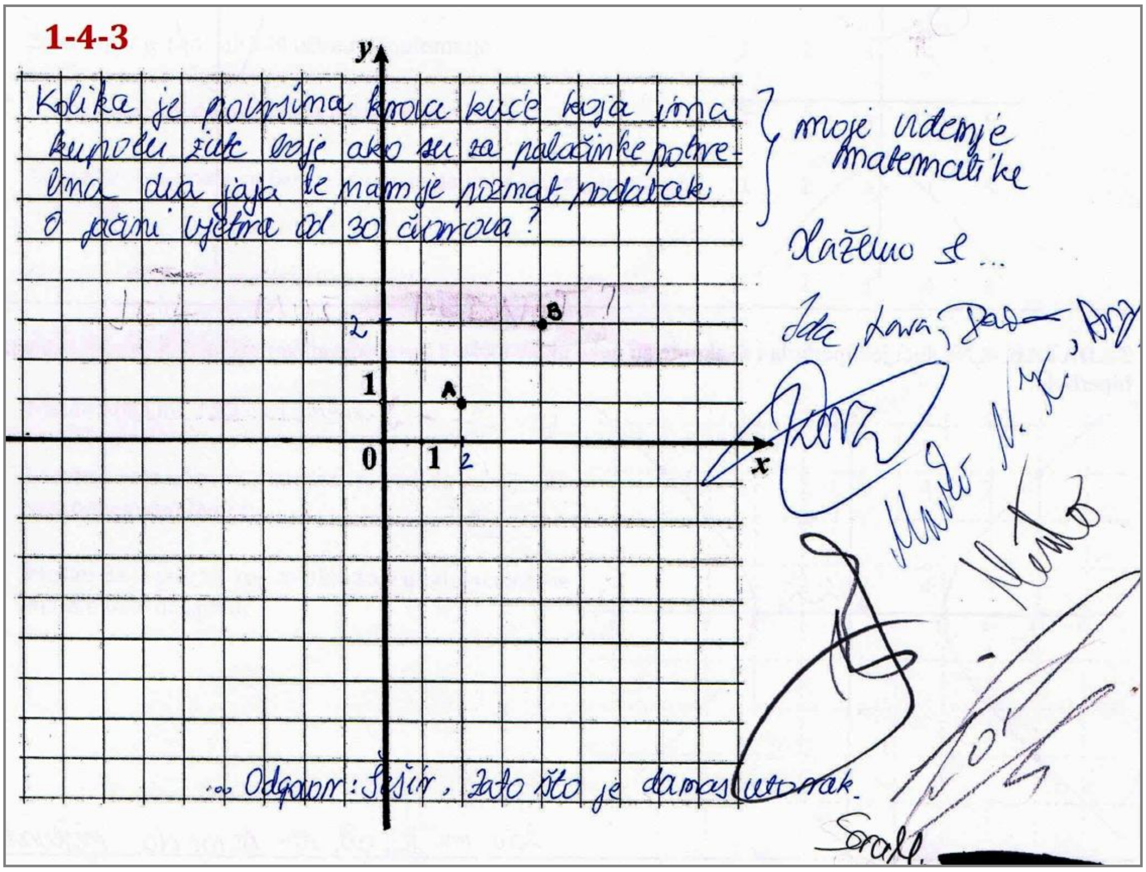
Slika 4.1.11. *Primjer učeničkih radova: Hiperbola koja sliči dvjema parabolama*

Dvije učenice nacrtale su hiperbolu koja prolazi točkama A i B, s tjemenima na pravcu $y = -1$, a dvoje sudionika (1 učenik i 1 učenica) nacrtalo je krivulju koja prolazi točkama A i B. Ti radovi prikazani su na Slici 4.1.12.



Slika 4.1.12. *Primjer učeničkih radova: Drugi zadatak*

Na Slici 4.1.13 prikazan je učenički rad na kojem je jedna učenica napisala kako doživljava matematiku, a nekoliko učenika se složilo s danim viđenjem matematike.



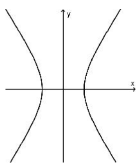
Slika 4.1.13. *Primjer učeničkog rada: Kako doživljavam matematiku*

Loša riješenost drugog zadatka očekivana je obzirom da se u nastavnom procesu hiperboli uglavnom pristupa analitički, preko algebarske jednadžbe hiperbole, pa je većina učenika prepoznaje prema njenoj jednadžbi. Učenici najčešće imaju problema s razumijevanjem definicije hiperbole koju često nauče napamet. U nastavnom procesu se najčešće susreću s hiperbolom kojoj je središte u ishodištu koordinatnog sustava, a tjemena i žarišta na osi apscisa, pa smo mogli pretpostaviti kako će zadane točke A i B, koje pripadaju prvom kvadrantu, učenicima uzrokovati veće poteškoće prilikom rješavanja zadatka. Također, s obzirom da ovaj zadatak nije rutinski zadatak s kojim su učenici upoznati tijekom nastavnog procesa, mogli smo pretpostaviti kako će riješenost ovog zadatka biti jako loša. Jedna od učenica napisala je kako ovaj zadatak nisu učili na satu pa ga zbog toga nije znala riješiti. Također, u ovom zadatku učenici su trebali pokazati konceptualno razumijevanje, odnosno morali su uočiti da je zadanim skupom točaka u ravnini određena samo jedna grana hiperbole.

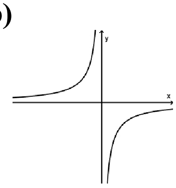
Treći zadatak:

Zaokruži slovo ispred svih slika na kojima je prikazana hiperbola.

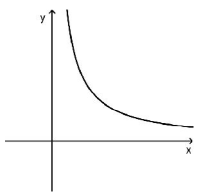
a)



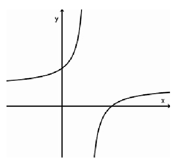
b)



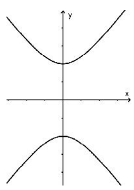
c)



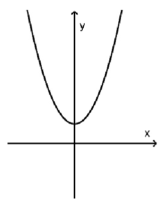
d)



e)



f)



Rješenje: Na slikama a, b, d i e je prikazana hiperbola.

U trećem zadatku iz obrade podataka izostavljeni su rezultati dvoje učenika koji su zaokružili sve ponuđene odgovore pa su u obradu podataka uključeni rezultati 70 sudionika (41 učenik, 28 učenica i jedan sudionik bez naznačenog spola).

Ovim zadatkom željelo se ispitati do koje su mjere učenici vezani uz hiperbolu kojoj je središte u ishodištu koordinatnog sustava i realna os na osi apscisa, a koja se obrađuje tijekom nastavnog procesa. U trećem zadatku mjerena je samo varijabla *točnost rješenja*. Budući da se radi o zadatku složenog višestrukog izbora, većina ga je učenika pokušala riješiti, odnosno nije ga pokušao riješiti samo 1 učenik.

67 sudionika (95,71%; 26 učenika, 40 učenica i jedan sudionik bez naznačenog spola) prepoznalo je kako je na prvoj slici (a) prikazana hiperbola. To je očekivani rezultat jer je na prvoj slici prikazana hiperbola kojoj je središte u ishodištu koordinatnog sustava i realna os na osi apscisa.

49 sudionika (70%; 18 učenika, 30 učenica i jedan sudionik bez naznačenog spola) uočilo je da je na drugoj slici (b) prikazana hiperbola.

69 sudionika (98,57%; 27 učenika, 41 učenica i jedan sudionik bez naznačenog spola) uočilo je da na trećoj slici (c) nije prikazana hiperbola što su očekivani rezultati, a osnovni razlog tome je što su učenici usvojili da se hiperbola sastoji od dviju grana.

32 sudionika (45,71%; 11 učenika, 20 učenica i jedan sudionik nije naznačio spol) uočilo je kako je na četvrtoj slici (d) prikazana hiperbola.

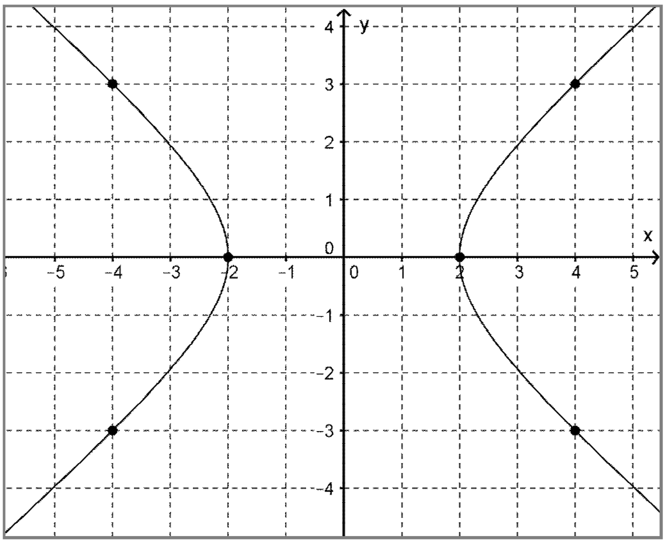
61 sudionik (87,14%; 21 učenik, 39 učenica i jedan sudionik nije naznačio spol) je uočilo kako je na petoj slici (e) prikazana hiperbola. U odnosu na rezultate vezane uz prvu sliku, manje učenika je prepoznalo kako je na petoj slici prikazana hiperbola, a osnovni razlog tome je što nisu svi učenici, tijekom nastavnog procesa, obradili hiperbolu kojoj je realna os na osi ordinata.

67 sudionika (95,71%; 27 učenika, 39 učenica i jedan sudionik nije naznačio spol) je uočilo kako na petoj slici (f) nije prikazana hiperbola što su očekivani rezultati obzirom da je na slici prikazan graf kvadratne funkcije (parabola) s kojom se učenici susreću u drugom razredu.

Učenici su najviše poteškoća imali s krivuljama koje su prikazane na slikama b i d, a to su očekivani rezultati obzirom da se većina učenika tijekom nastavnog procesa nije susrela s tim hiperbolama.

Četvrti zadatak:

Na slici je hiperbola i istaknute su neke njene točke s cjelobrojnim koordinatama. Odredi jednadžbu te hiperbole.



Rješenje:

Hiperbola kojoj središte leži u ishodištu koordinatnog sustava, a realna os leži na osi apscisa, ima jednadžbu $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ pa je potrebno odrediti duljine realne i imaginarne poluosi.

S dane slike očitamo duljinu realne poluosi $a = 2$, koordinate jedne istaknute cjelobrojne točke, npr. (4,3) te uvrstimo u jednadžbu hiperbole kako bi odredili duljinu realne poluosi. Dobijemo

$$16b^2 - 36 = 4b^2, \text{ odakle je}$$

$$b^2 = 3$$

pa je tražena jednadžba hiperbole

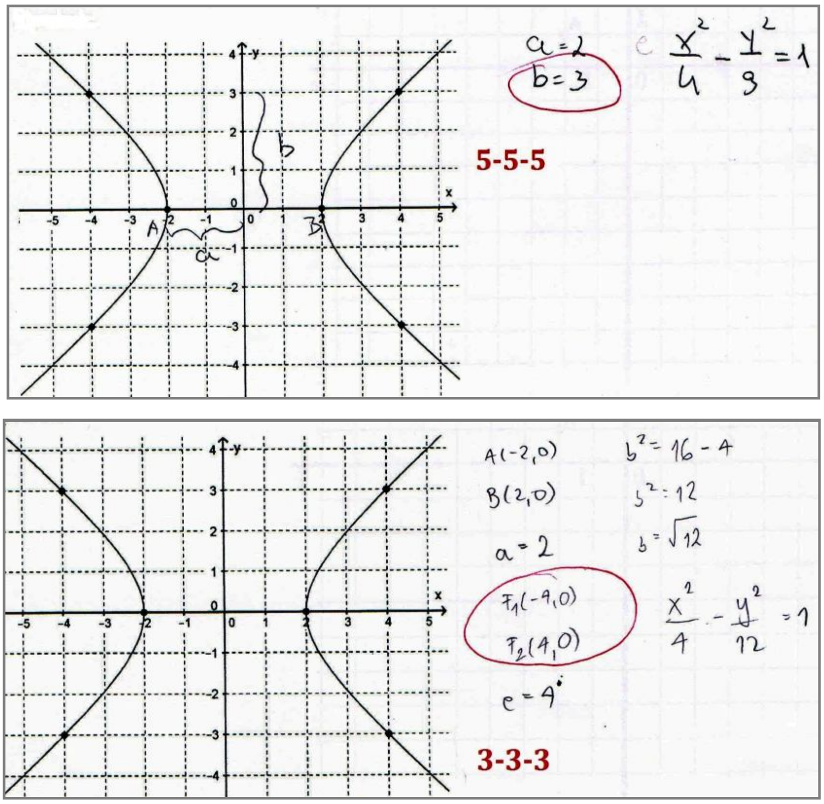
$$3x^2 - 4y^2 = 12, \text{ odnosno}$$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1.$$

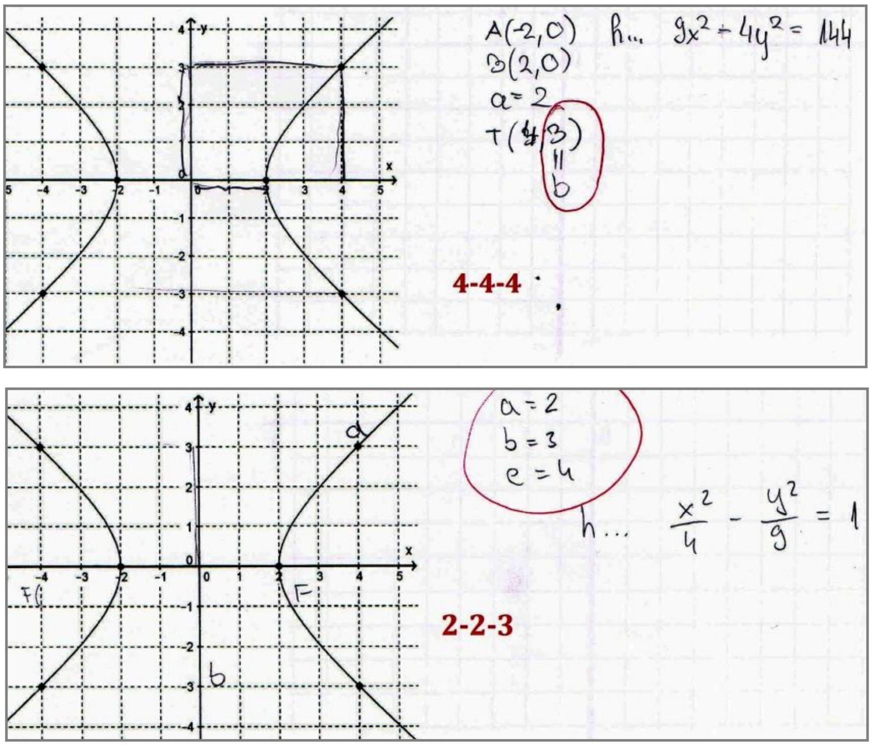
U četvrtom zadatku mjerene su dvije varijable: *točnost rješenja i slika*. Varijabla *točnost rješenja* mjeri koliko je sudionika točno riješilo zadatak, koliko ih je započelo ga rješavati ili ga nije uopće pokušalo riješiti te koje su bile najčešće pogreške prilikom rješavanja. Varijablom *slika* mjereno je što su sudionici označili na zadanoj slici te jesu li elemente hiperbole korektno i precizno označili.

Jednadžbu hiperbole prikazane na slici točno je odredilo 7 sudionika (5 učenika i 2 učenice), dok je 41 sudionik (56,94%; 14 učenika, 26 učenica i jedan sudionik bez naznačenog spola) započeo rješavati zadatak. Zadatak nije ni pokušalo riješiti 20 sudionika (27,78%; 8 učenika i 12 učenica), a 4 sudionika (1 učenik i 3 učenice) je prikazalo nesuvisao pokušaj rješavanja.

Duljinu realne poluosi točno je odredilo 34 sudionika (13 učenika, 20 učenica i jedan sudionik bez naznačenog spola) koji su pogrešno odredili jednadžbu hiperbole zbog krivih prepostavki, poput zaključka da je duljina imaginarne osi jednaka 3 i/ili da je linearni ekscentricitet jednak 4. Neki od tih radova prikazani su na Slici 4.1.14 i 4.1.15.

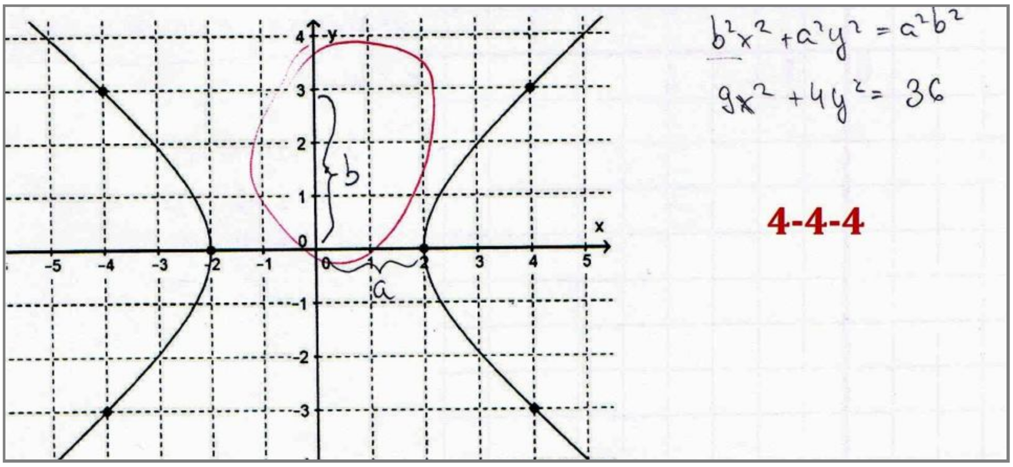


Slika 4.1.14. *Primjeri učeničkih radova: Četvrti zadatak*



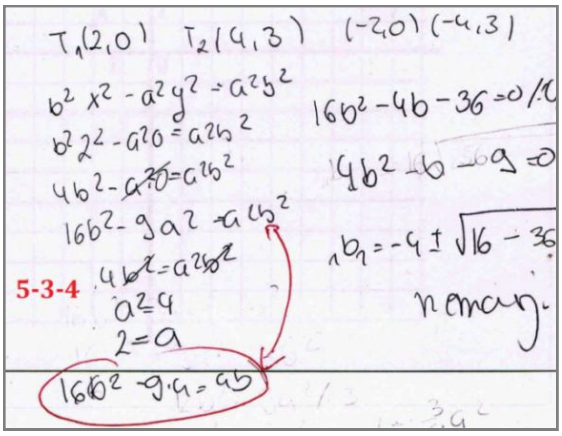
Slika 4.1.15. *Primjeri učeničkih radova: Četvrti zadatak*

Opću jednadžbu elipse koristilo je 6 sudionika (1 učenik i 5 učenica) prilikom rješavanja zadatka, a primjeri takvih radova prikazani su na Slici 4.1.16.



Slika 4.1.16. *Primjer učeničkog rada: Jednadžba elipse prilikom rješavanja 4. zadatka*

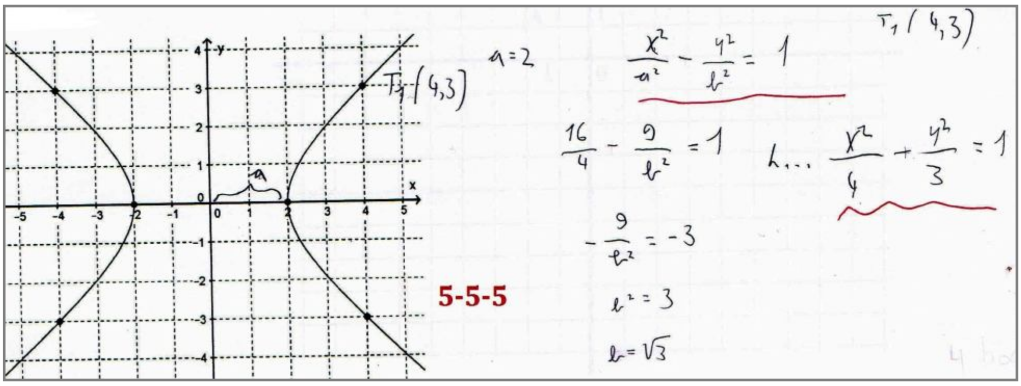
Dvoje sudionika (1 učenik i 1 učenica) je prilikom rješavanja sustava dviju jednadžbi s dvjema nepoznanicama napravilo pogrešku prilikom određivanja duljine imaginarne osi. Jedan od tih radova prikazan je na Slici 4.1.17.



Slika 4.1.17. *Primjer učeničkog rad: Rješavanje sustava*

Na danoj slici 11 sudionika (5 učenika i 6 učenica) korektno je označilo duljinu realne osi kao udaljenosti tjemena od ishodišta koordinatog sustava, 8 sudionika (2 učenika i 6 učenica) označilo je kako je duljina imaginarne poluosi jednaka 3, a 52 sudionika (23 učenika i 28 učenica i jedan sudionik bez naznačenog spola) nije ništa nacrtalo.

Prilikom sastavljanja zadatka pretpostavljena je veća riješenost zadatka. Taj je zadatak rutinski i vrlo često se ovakav zadatak pojavljuje na državnoj maturi. Budući da ga je točno riješilo samo 9.72% sudionika, očito je kako zadaci u kojima učenici moraju očitati podatke koji su zadani u pravokutnom koordinatnom sustavu, ipak nisu rutinski Slika 4.1.18.



Slika 4.1.18. *Primjer učeničkog rad: Točno riješen 4. zadatak*

4.2 Osobni i situacijski interes za učenje matematike

Kako bismo utvrdili kakav je situacijski interes za učenje hiperbole i analitičke geometrije te osobni interes za matematiku općenito, izračunate su prosječne vrijednosti za svaku od varijabli iz Tablice 4.2.1. Osim toga, izračunate su njihove međusobne povezanosti, kao i njihove povezanosti s prethodnom i očekivanom ocjenom iz matematike. Rezultati su prikazani u Tablici 4.2.1.

	Varijabla	*M*	*SD*	1.	2.	3.	4.	5.	6.
1.	Osobni interes za matematiku	2.79	0.90	-	0.82**	0.79**	0.68**	0.59**	0.56**
2.	Situacijski interes za analitičku geometriju	2.73	0.83		-	0.89**	0.57**	0.48**	0.52**
3.	Sit uacijski interes za hiperbolu	2.54	0.85			-	0.49**	0.41**	0.47**
4.	Prethodna ocjena iz matematike	3.15	1.12				-	0.75**	0.62**
5.	Očekivana ocjena iz matematike	3.02	1.04					-	0.74**
6.	Očekivana ocjena iz analitičke geometrije	3.17	1.19						-

* $p<0.05$; ** $p<0.01$

Tablica 4.2.1. *Deskriptivna statistika i međusobne korelacije interesa i ocjena iz matematike (N = 133)*

Na temelju prikazanih rezultata možemo zaključiti da ispitani učenici u prosjeku imaju relativno nizak interes, kako za matematiku općenito, tako i za analitičku geometriju i hiperbolu specifično, jer su aritmetičke sredine na sve tri varijable manje od teorijske sredine korištene ljestvice (3). Matematika se ubraja u teže nastavne predmete, zahtijeva neprekidan rad u koji je potrebno uložiti dosta vremena, truda i napora. Učenici nisu uvijek spremni tako raditi i svladavanje matematičkih sadržaja zadaje im dosta teškoća tako da nisu iznenađujući rezultati kako učenici imaju relativno nizak interes prema matematici.

Možemo uočiti i da su rezultati na sve tri skale interesa u vrlo visokim korelacijama, što ukazuje na to da su učenici u trenutku provođenja istraživanja imali usklađen situacijski interes za nastavne sadržaje koje su upravo obrađivali sa svojim osobnim interesom za matematiku.

Rezultati također ukazuju da su različiti aspekti interesa značajno povezani, kako s prethodnom ocjenom iz matematike, tako i s očekivanom ocjenom iz testa iz analitičke geometrije i iz matematike općenito. Učenici koji imaju veći interes za matematiku postižu bolje rezultate na ispitima i bolju završnu ocjenu. U skladu s očekivanjima, prethodna ocjena iz matematike ipak je snažnije povezana s osobnim interesom za matematiku nego sa situacijskim interesom za hiperbolu.

Glavni preduvjet za uspješnu nastavu matematike je interes učenika prema predmetu, jer je interes najveći poticaj za učenje. Nastava matematike mora biti takva da kod učenika budi interes prema predmetu.

4.3 Povezanost interesa i konceptualne promjene

Kako bismo utvrdili povezanost situacijskog i osobnog interesa s postignutom konceptualnom promjenom u razumijevanju koncepta hiperbole, utvrđene su međusobne korelacije tih varijabli. S obzirom da su distribucije rezultata na testu odstupale od normalne, korišten je neparametrijski postupak te su izračunati Spearmanovi koeficijenti korelacije. Rezultati su prikazani u Tablici 4.3.1.

	Varijabla	*M*	*SD*	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
1.	Osobni interes za matematiku	2.76	0.83	-	0.77**	0.75**	0.45**	0.40**	0.19	0.22
2.	Situacijski interes za analitičku geometriju	2.75	0.82		-	0.85**	0.46**	0.35**	0.09	0.19
3.	Situacijski interes za hiperbolu	2.55	0.84			-	0.46**	0.35**	- 0.01	0.24*
4.	1, zadatak	3.12	2.43				-	0.26*	- 0.16	0.59**
5.	2. zadatak	0.09	0.41					-	0.06	0.20
6.	3. zadatak	0.32	0.74						-	- 0.13
7.	4. zadatak	0.93	1.09							-

* $p<0.05$; ** $p<0.01$

Tablica 4.3.1. Deskriptivna statistika i međusobne korelacije interesa i rezultata na testu (N = 69)

Dobiveni rezultati ukazuju da nisu svi zadaci podjednako povezani s interesom za matematiku. Prvi i drugi zadatak značajno su povezani i s osobnim interesom za matematiku, kao i sa situacijskim interesom za analitičku geometriju i hiperbolu. Treći zadatak nije značajno povezan s interesom što se moglo i pretpostaviti obzirom da se radi o zadatku složenog višestrukog izbora pa je većina učenika pokušala riješiti zadatak. Četvrti zadatak je povezan samo sa situacijskim interesom za hiperbolu. Učenici koji imaju veći interes za hiperbolu i matematiku bili su uspješniji u rješavanju tih zadataka, dok učenici čiji interes nije značajan su bili manje uspješni ili uopće nisu pokušali riješiti zadatak, što je u skladu s očekivanjima.

Prvim zadatkom je provjeravano jesu li učenici usvojili osnovne pojmove vezane uz hiperbolu. Zadatak se sastojao od tri podzadatka i učenici su iz dane jednadžbe hiperbole trebali odrediti neke elemente hiperbole. Ovaj zadatak je rutinski zadatak s kojim se učenici susreću tijekom obrade nastavne jedinice *Hiperbola*. Obzirom da su učenici u ovom zadatku suočeni s kompleksnijom situacijom koja od njih zahtijeva više vremena za rješavanje zadatka, kao i veću potrebu za samoregulacijom usmjerenosti pažnje na zahtjeve zadatka, zaključujemo kako je to najvjerojatnije razlog značajne povezanosti s interesom.

S drugim zadatkom smo htjeli provjeriti znaju li učenici zadani skup točaka nacrtati u pravokutnom koordinatnom susutavu, odnosno učenici su trebali zaključiti kako je zadani skup točaka jedna grana hiperbole. Ovaj zadatak nije rutinski zadatak i njegova riješenost je bila jako loša, ali učenici koji su rješavali zadatak su raznim podpitanjima pokušali doći do rješenja zadataka. Dapače, neke učenike je zadatak zainteresirao u toj mjeri da su većinu vremena, koje su imali na raspolaganju za rješavanje ispita, posvetili upravo rješavanju drugog zadatka. Stoga, zaključujemo kako je ovaj zadatak značajno povezan s interesom jer zahtijeva intenzivniju kognitivnu uključenost učenika prilikom rješavanja zadatka.

Trećim zadatkom smo htjeli provjeriti znaju li učenici razlikovati hiperbolu od drugih sličnih krivulja koje su prikazane u pravokutnom koordinatnom sustavu. Učenici su trebali prepoznati da je na četiri od šest ponuđenih slika prikazana hiperbola. Obzirom da se radi o zadatku složenog višestrukog izbora u kojem su učenici trebali zaokružiti točne odgovore, od učenika se nije zahtijevalo da duže vremena bude uključen u rješavanje zadatka, već da na temelju usvojenog znanja prepozna točne odgovore. S obzirom da je prepoznavanje (bez obzira rezultira li točnim rješenjem ili ne) puno jednostavniji kognitivni proces od rješavanja problema ili davanja objašnjenja, pretpostavljamo da pri rješavanju nije bilo potrebno da učenici koriste složenije procese samoregulacije. To je najvjerojatnije razlog nepovezanosti interesa s rješavanjem ovog zadatka.

U četvrtom zadatku je provjeravano znaju li učenici odrediti jednadžbu hiperbole koja je prikazana u pravokutnom koordinatnom sustavu. Ovakav zadatak se najčešće pojavljuje na državnoj maturi, ali ne i u udžbenicima za treći razred opće gimnazije. Rješavanje ovog zadatka također zahtijeva značajnu kognitivnu i ponašajnu uključenost učenika te je bilo očekivano da će uspješnost u rješavanju ovog zadatka biti značajno povezana s interesom, iako je razina te povezanosti nešto niža i značajna samo za situacijski interes.

Na temelju dobivenih rezultata možemo zaključiti da bi interes mogao imati važnu ulogu u situacijama kad je učenik suočen s kompleksnijim zahtjevima koji od njega traže intenzivniju kognitivnu ukjučenosti ili duže vrijeme za rješavanje zadatka, a da interes nema značajan doprinos u situacijama gdje nije potrebna značajnija samoregulacija ponašanja.

Na kraju treba spomenuti i metodološka ograničenja ovog istraživanja. Jedno ograničenje predstavlja odabir uzorka jer su ispitani samo učenici triju općih gimnazija pa ne možemo sa sigurnošću generalizirati rezultate i na učenike drugih škola, posebno na one koji matematiku slušaju prema drugačijem nastavnom planu i programu. Također, učenici su bili izloženi poučavanju različitih nastavnika te ne možemo znati u kolikoj mjeri je na rezultate istraživanja utjecao stil poučavanja pojedinog nastavnika. U budućim istraživanjima bi svakako bilo zanimljivo preciznije istražiti ulogu pristupa poučavanja u postizanju konceptualne promjene, ali i u razvoju interesa.

5. UČENIČKO OTKRIVANJE KONCEPTA HIPERBOLE U NASTAVI

S vezom oblika $x \cdot y = a,\ a \epsilon Q^{+}$ učenici se prvi put susreću u sedmom razredu osnovne škole pri obradi obrnute proporcionalnosti pri čemu se, unazad nekoliko godina, ne obrađuje grafički prikaz takve veze.

Slično se ponavlja i u prvom razredu gimnazije. Sustavnija obrada hiperbole, s naglaskom na njenu algebarsku jednadžbu u pravokutnom koordinatnom sustavu, se provodi u trećem razredu gimnazije.

Prema Nacionalnom planu i programu za gimnazije jedna od zadaća za učenike, vezano uz ovu temu, jest definirati i crtati hiperbolu na osnovi njenih metričkih svojstava, a ostale zadaće će rješavati na osnovi jednadžbe hiperbole.

U aktualnim udžbenicima za matematiku, krivuljama drugog reda uglavnom se pristupa analitički, putem algebarske jednadžbe tih krivulja, iz čega se onda izvode i njihova svojstva.

Koncept hiperbole se najčešće uvodi između 88. i 92. nastavnog sata u trećem razredu gimnazije. Za obradu nastavne jedinice *Hiperbola* predviđena su četiri nastavna sata, a za uvođenje koncepta hiperbole predviđena su dva nastavna sata. U nastavku je napisana metodička priprema za dva nastavna sata na kojima se uvodi koncept hiperbola.

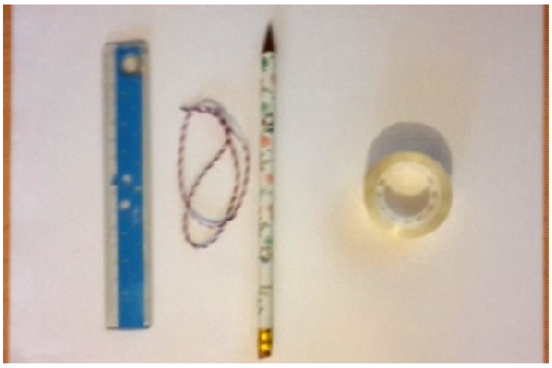
5.1 Nastavni sat uvođenja koncepta hiperbole

U uvodnom dijelu nastavnog sata provodi se analiza domaće zadaće i ponavljanje osnovnih pojmova vezanih uz elipsu, nakon čega slijedi prva praktična aktivnost za motivaciju i najavu glavnog dijela sata. U motivacijskoj aktivnosti učenici će pomoću konca i ravnala otkriti hiperbolu, a zatim će nastavnik putem računalne prezentacije prikazati primjere hiperbole u realnom životu. Na glavnom dijelu sata provest će se četiri aktivnosti. U prvoj od njih učenici će otkriti kako duljina konca i ravnala te međusobni položaj fiksnih točaka iz motivacijske aktivnosti određuju izgled i položaj hiperbole. Tijekom druge aktivnosti učenici će otkriti vezu između točaka hiperbole i istaknutih fiksnih točaka, dok će u trećoj aktivnosti učenici otkriti vezu između apsolutne vrijednosti razlike udaljenosti bilo koje točke hiperbole od fokusa i udaljenosti fokusa. U četvrtoj aktivnosti učenici će konstruirati hiperbolu pomoću ravnala i šestara. U završnom dijelu nastavnog sata nastavnik će zadati domaću zadaću, nakon čega slijedi provjera postavljenih ciljeva i ishoda učenja nastavnog sata. Ishodi učenja nastavnog sata su:

- učenik/ca će definirati hiperbolu
- učenik/ca će konstruirati hiperbolu pomoću šestara i ravnala

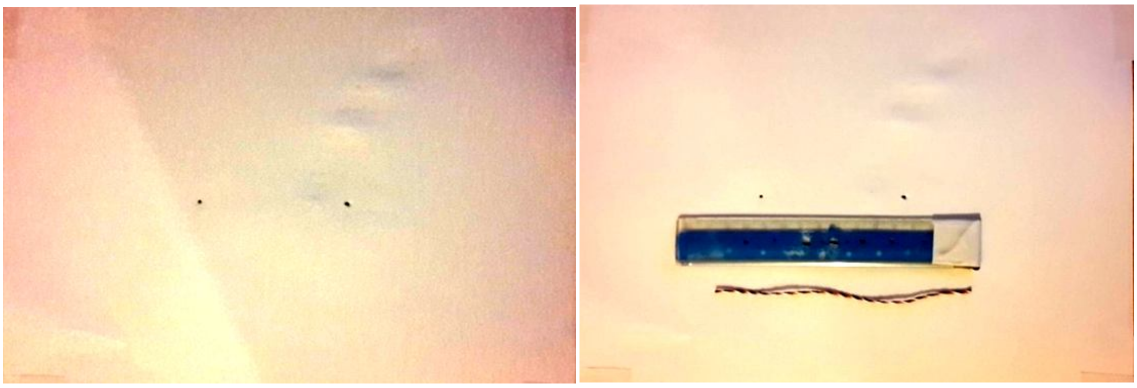
5.1.1 Aktivnost *Otkrij hiperbolu*

Cilj prve praktične aktivnosti je da učenici, radeći u paru, otkriju hiperbolu kao krivulju u ravnini. Potrebni materijali za ovu aktivnost su olovka, list papira, konac, ravnalo i ljepljiva traka koje dobiva svaki par učenika (Slika 5.1.1.1).



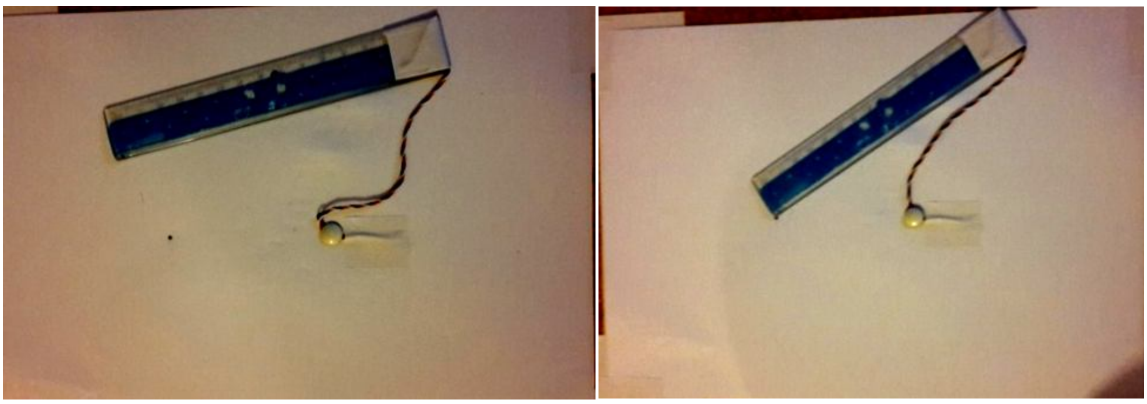
Slika 5.1.1.1. *Potrebni materijali za aktivnost Otkrij hiperbolu*

Slijedeći nastavnikove upute, učenici na papiru ističu dvije različite točke. Nakon toga odrežu komad konca duljine manje od duljine ravnala (Slika 5.1.1.2).



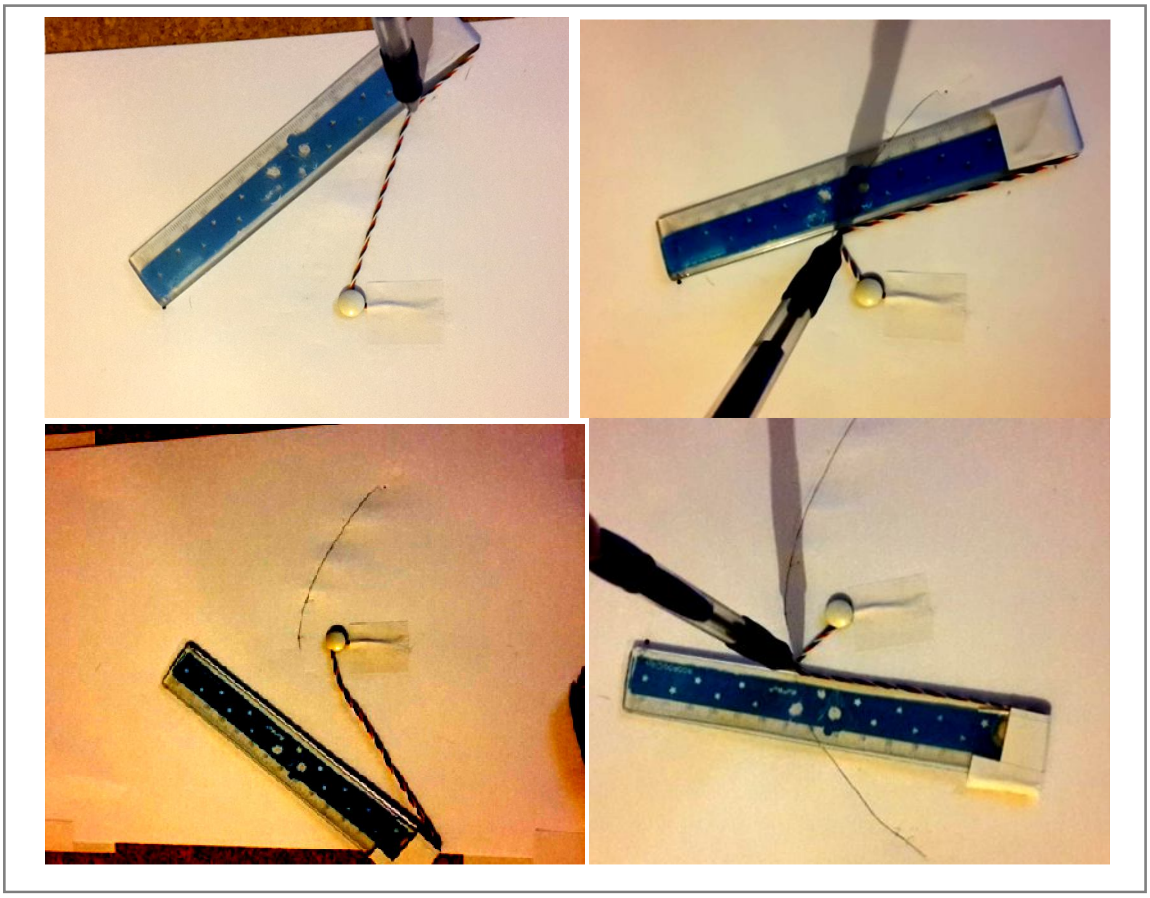
Slika 5.1.1.2. *Crtanje hiperbole pomoću konca i ravnala*

Jedan kraj konca zalijepe na jednu od istaknutih točaka, a drugi kraj konca zalijepe u jedan vrh ravnala. Potom učenici prislone slobodan vrh na istoj duljoj stranici ravnala na slobodnu istaknutu točku, a vrh ravnala s pričvršćenim koncem odmaknu od druge istaknute točke (Slika 5.1.1.3).



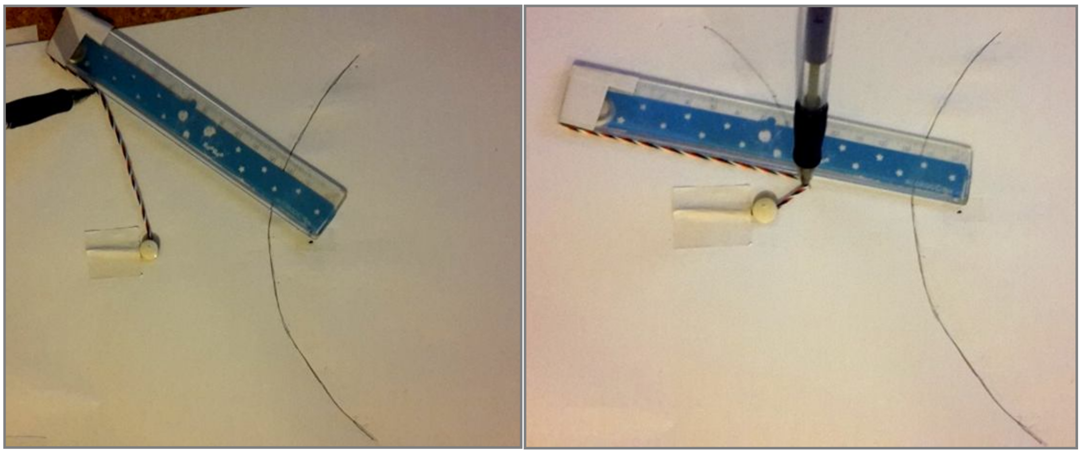
Slika 5.1.1.3. *Crtanje hiperbole pomoću konca i ravnala*

Učenici olovkom primaknu konac uz rub ravnala tako da bude zategnut. Rotiraju ravnalo oko istaknute točke u kojoj je pričvršćen konac tako da je on cijelo vrijeme zategnut, a olovka pritom ostavlja trag. Pritom je vrh ravnala stalno u istoj točki (Slika 5.1.1.4).

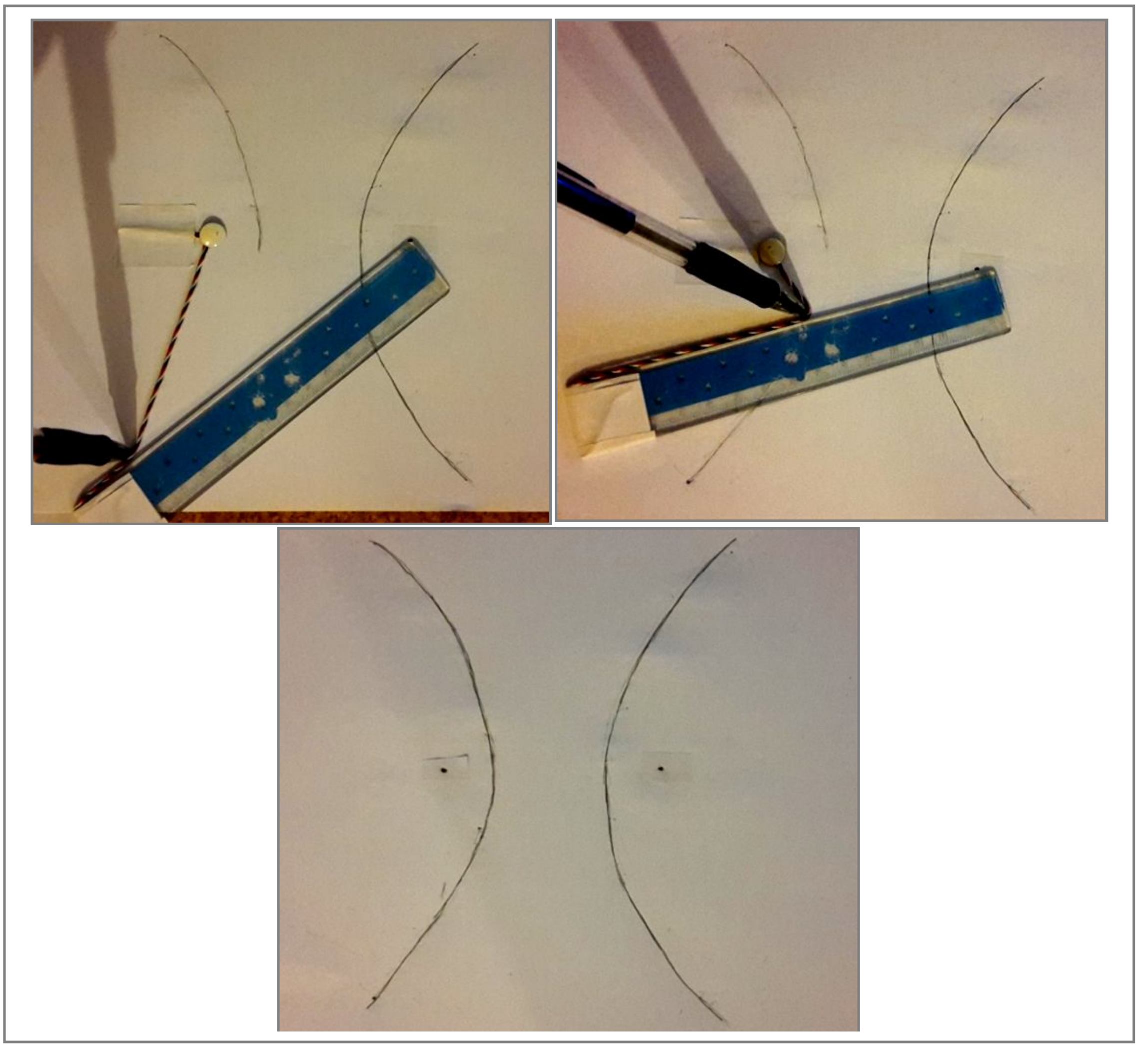


Slika 5.1.1.4. *Desna grana hiperbole*

Nakon što su nacrtali dio krivulje, učenici konac pričvrste u drugu istaknutu točku te ponavljaju isti postupak (Slika 5.1.1.5 i Slika 5.1.1.6).



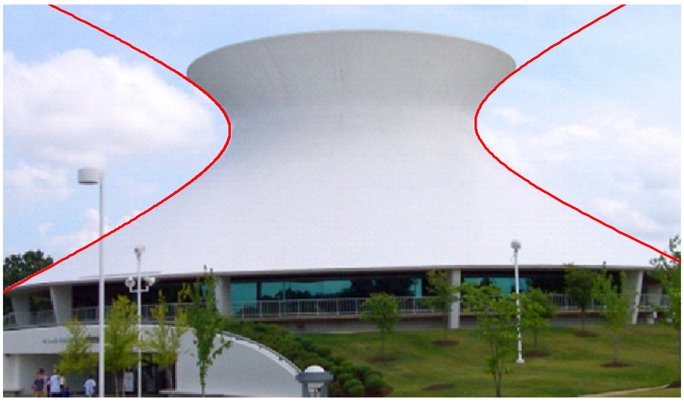
Slika 5.1.1.5. *Hiperbola nacrtana pomoću konca i ravnala*



Slika 5.1.1.6. *Hiperbola nacrtana pomoću konca i ravnala*

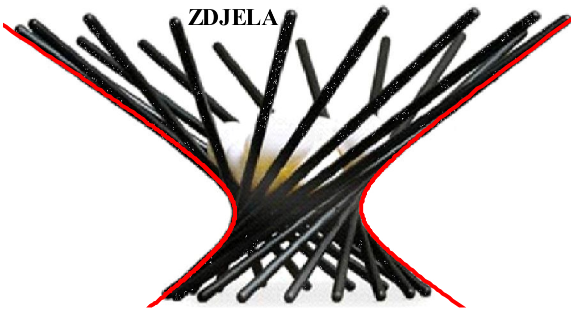
U nastavku prve aktivnosti odvija se diskusija u kojoj učenici saznaju da se krivulja koju su nacrtali naziva hiperbola te da se ona sastoji od dva jednaka dijela koji se nazivaju grane hiperbole, a fiksirane točke se nazivaju fokusi ili žarišta hiperbole i najčešće ih označavamo s F_1 i F_2.

Nakon toga, učenici se pokušavaju prisjetiti jesu li se u svakodnevnom životu susreli s objektima ili predmetima koji sadrže hiperbolu. Neke primjere prikazuje nastavnik putem računalne prezenatacije. Na sljedećim slikama hiperbola je istaknuta crvenom bojom.

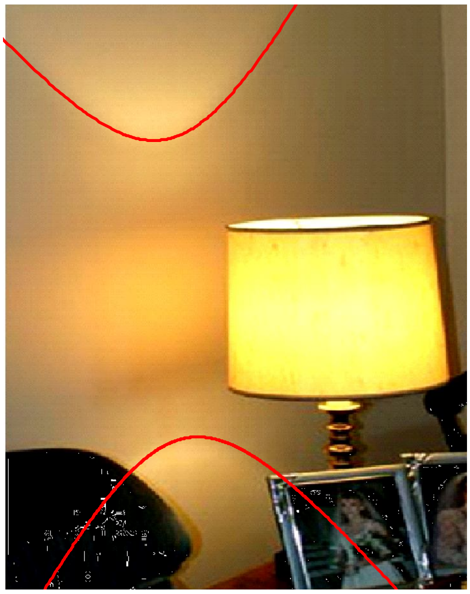


Slika 5.1.1.7. *McDonnell planetarij u Saint Louis-u*

Slika 5.1.1.8. *Rashladni toranj nuklearne elektrane*

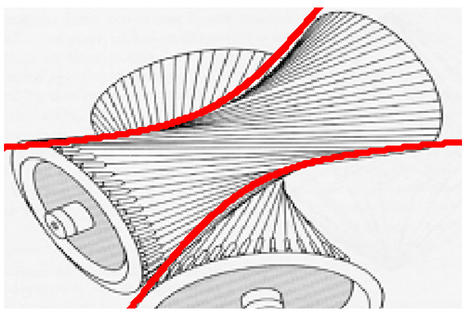


Slika 5.1.1.9. *Zdjela*



Slika 5.1.1.10. *Odsjaj svjetiljke na zidu*

Slika 5.1.1.11. *Pješčani sat*

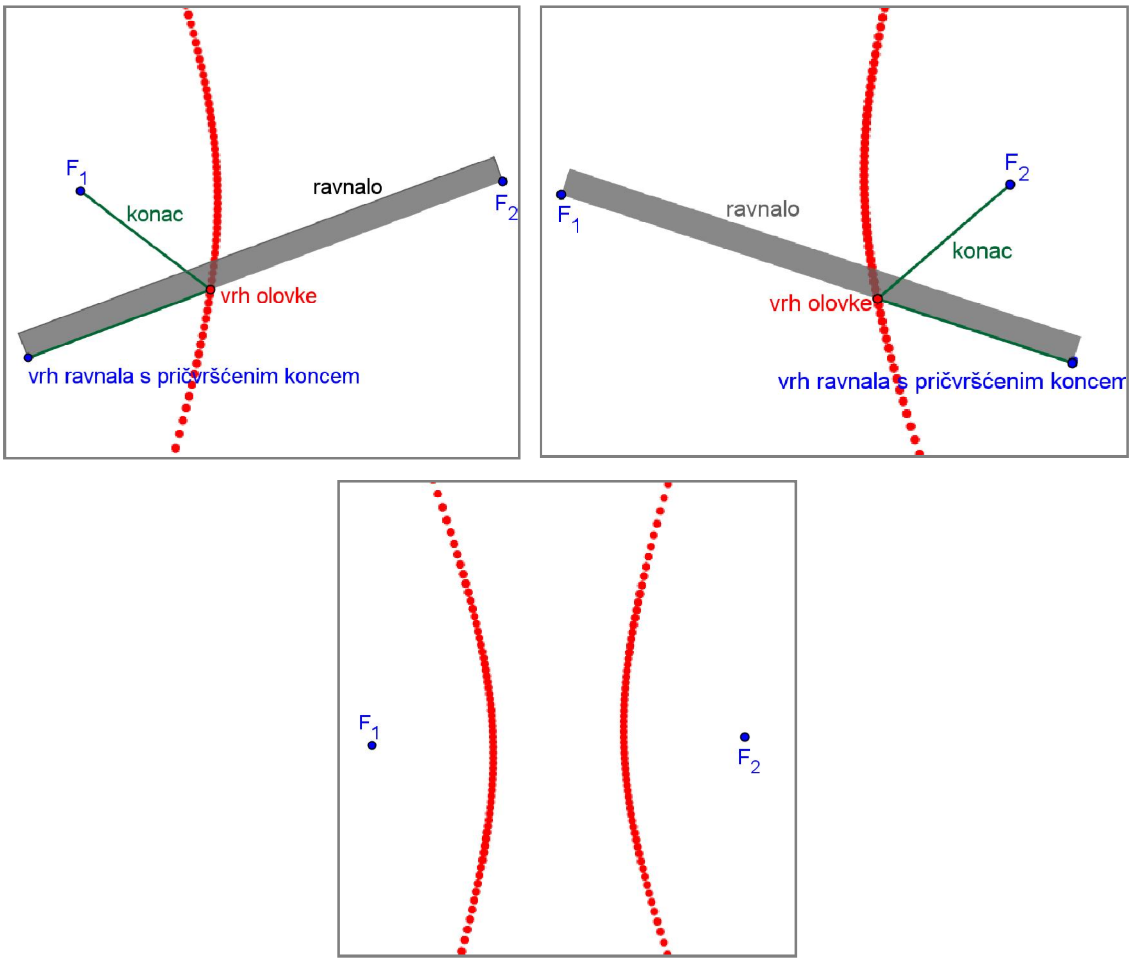


Slika 5.1.1.12. *Dio u motoru automobila*

5.1.2 Druga aktivnost

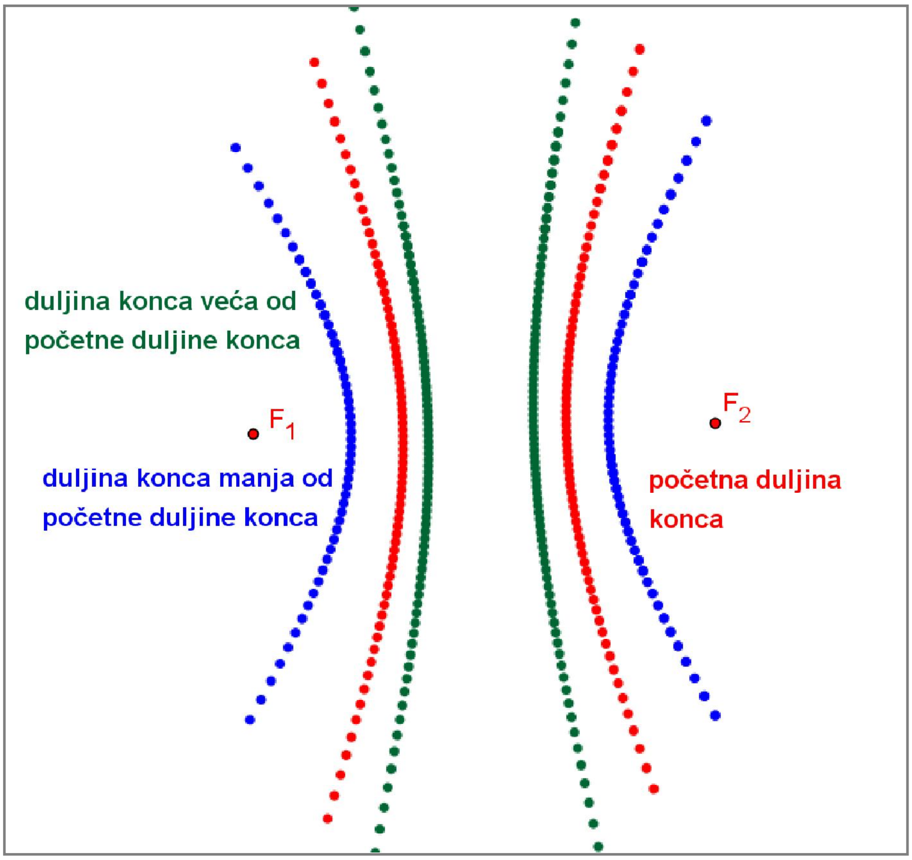
U ovoj aktivnosti učenici će potvrditi da se postupkom iz aktivnosti *Otkrijmo hiperbolu* primijenjenim na različito odabrane fiksne točke, duljinu konca i ravnala uvijek dobije isti oblik krivulje. Njezin cilj je da učenici, tijekom diskusije, otkriju kako duljina konca i ravnala te međusobni položaj fokusa određuju samo izgled krivulje. Potrebni materijal za ovu aktivnost je radna bilježnica pripremljena u alatu dinamične geometrije.

Na početku aktivnosti učenici se prisjećaju kako se duljina konca i ravnala te međusobni položaj fokusa u prethodnoj aktivnosti nisu mijenjali. Nastavnik u alatu dinamične geometrije otvori materijale te uključi animaciju, a učenici promatraju simulaciju crtanja jedne pa zatim druge grane hiperbole (Slika 5.1.2.1).



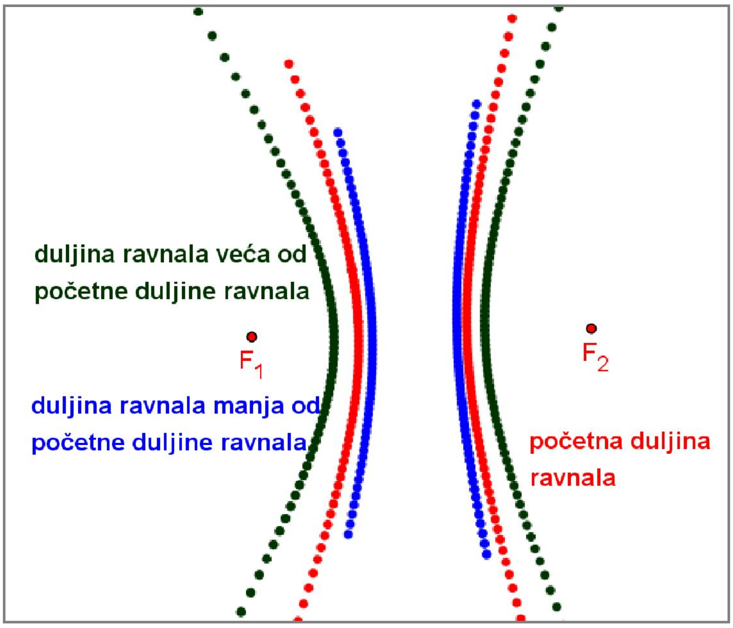
Slika 5.1.2.1. *Simulacija crtanja hiperbole pomoću ravnala i konca*

U nastavku aktivnosti učenici će otkriti što se događa ako se promijeni duljina konca i duljina ravnala. Nastavnik ponovno pokreće animaciju, ali promijeni duljinu konca. Učenici promatrajući simulaciju zaključuju da krivulja i dalje ostaje hiperbola, ali je promijenila izgled. Produljivanjem konca, zakrivljenost hiperbole je manja od zakrivljenosti hiperbole s početnom duljinom konca, dok je skraćivanjem konca zakrivljenost hiperbole veća (Slika 5.1.2.3).



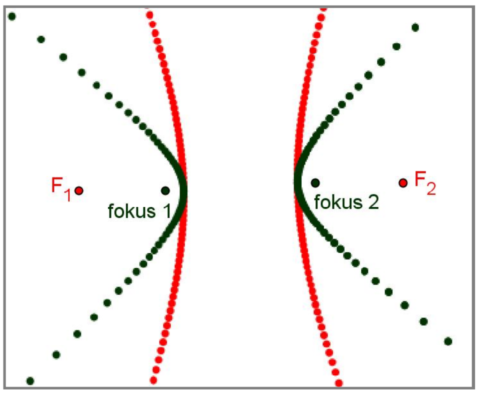
Slika 5.1.2.3. *Promjena duljine konca pri crtanju hiperbole pomoću konca i ravnala*

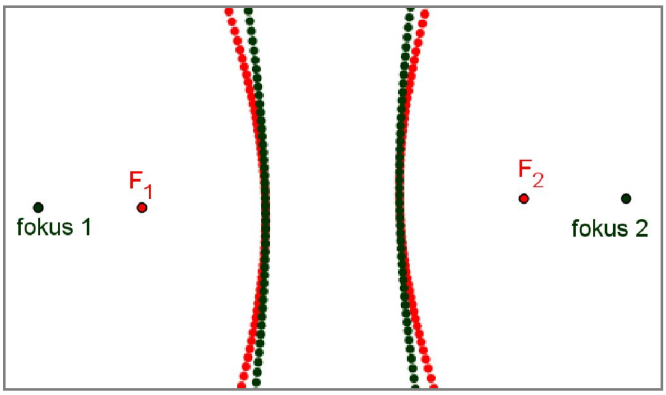
Nastavnik ponovno pokreće animaciju, ali promijeni duljinu ravnala. Učenici promatrajući simulaciju zaključuju da krivulja i dalje ostaje hiperbola, ali je promijenila izgled. Produljivanjem ravnala, zakrivljenost hiperbole je veća od zakrivljenosti hiperbole s početnom duljinom ravnala, dok je skraćivanjem ravnala zakrivljenost hiperbole manja (Slika 5.1.2.4).



Slika 5.1.2.4. *Promjena duljine ravnala pri crtanju hiperbole pomoću konca i ravnala*

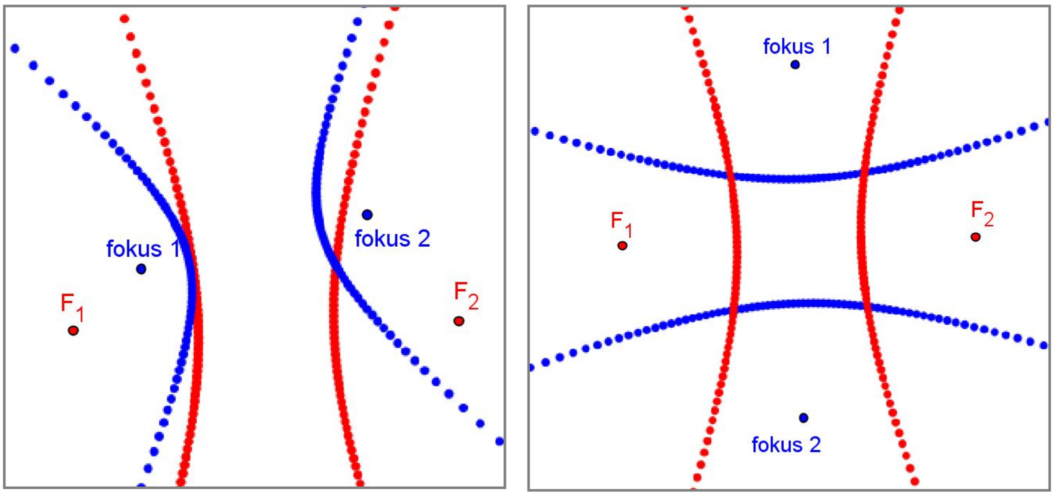
U nastavku aktivnosti, učenici će otkriti što se događa ako se promijeni međusobni položaj fiksiranih točaka uz fiksiranu duljinu konca. Nastavnik ponovno pokreće animaciju, ali promijeni međusobni položaj fiksiranih točaka. Učenici promatrajući simulaciju zaključuju kako međusobni položaj fiksiranih točaka utječe na izgled i položaj hiperbole. Ako fiksirane točke "približavamo" ili "udaljavamo", promijenit će se samo izgled hiperbole. Smanjivanjem međusobne udaljenosti fiksnih točaka, zakrivljenost hiperbole se povećava, dok se povećavanjem međusobne udaljenosti fiksnih točaka zakrivljenost hiperbole smanjuje (Slika 5.1.2.5).





Slika 5.1.2.5. *Promjena međusobnog položaja fokusa hiperbole pri crtanju hiperbole pomoću konca i ravnala*

Ako fiksne točke uz navedeno i rotiramo, mijenat će se i položaj hiperbole u ravnini (Slika 5.1.2.6).

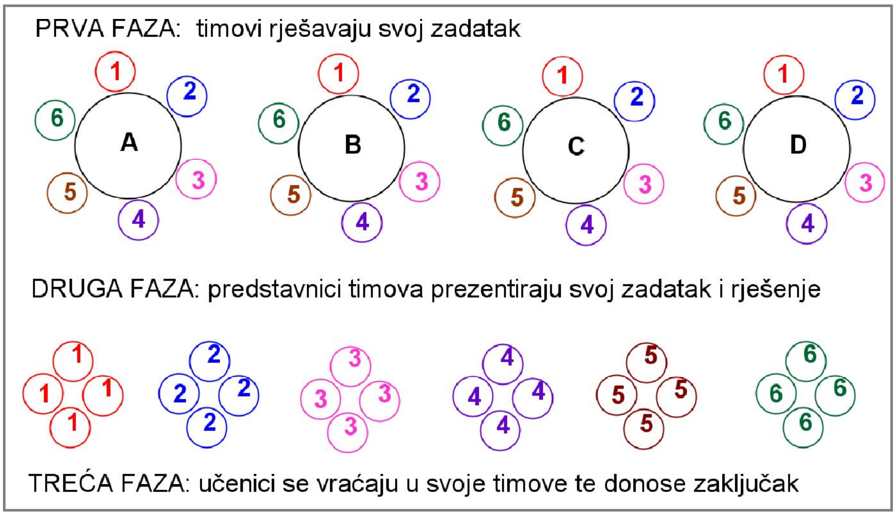


Slika 5.1.2.5. *Promjena međusobnog položaja fiksiranih točaka pri crtanju hiperbole pomoću konca i ravnala*

5.1.3 Aktivnost *Otkrij vezu između točaka hiperbole i istaknutih fiksnih točaka*

U ovoj aktivnost učenici će otkriti numeričku vezu udaljenosti između točaka hiperbole i istaknutih fiksnih točaka pomoću kojih su crtali hiperbolu. Cilj treće aktivnosti je da učenici, mjerenjem u skupinama, otkriju da je apsolutna vrijednost razlike udaljenosti bilo koje točke hiperbole od fokusa hiperbole uvijek ista.

Potrebni materijali za ovu aktivnost su ravnalo za mjerenje udaljenosti, nastavni listić s uputama te dodatni papir na kojem je tablica. Na nastavnom listiću su napisane upute, nacrtana je hiperbola i istaknute su fiksne točke, a na papir s grupnom tablicom učenici će upisati rezultate mjerenja. Nastavnik podijeli učenike u četiri tima, a timovi dobiju nastavni listić s hiperbolom različitog izgleda i položaja na papiru. Svaki tim će dobiti po jedan listić s tablicom i identične nastavne listiće na kojima je nacrtana hiperbola. U prvoj fazi aktivnosti učenici rješavaju svoj zadatak. Nakon popunjavanja tablice, timovi u drugoj fazi idu u goste. Predstavnici svakog tima prezentiraju svoj zadatak i rješenje te učenici uspoređuju zadatke i rješenja te uočavaju pravilnost. U trećoj fazi učenici se vraćaju u svoje timove, raspravljaju o onome što su čuli u gostima i na temelju uočene pravilnosti, zapisuju zaključak (Slika 5.1.3.1).

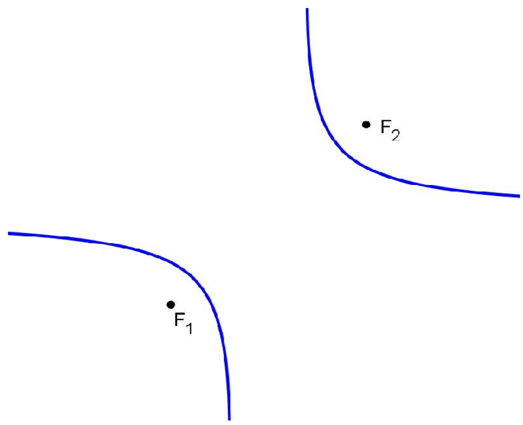


Slika 5.1.3.1. *Tijek aktivnosti Otkrij vezu između točaka hiperbole i fokusa*

Nastavni listić *Otkrij vezu između točaka hiperbole i istaknutih fiksnih točaka*

Na slici je nacrtana hiperbola s istaknutim fokusima. Odaberi po jednu točku na svakoj grani hiperbole.

a) Izmjeri udaljenost svake odabrane točke od fiksnih točaka.
b) Upiši rezultate mjerenja u zajedničku grupnu tablicu.
c) Izračunaj zbroj, razliku, umnožak i količnik dobivenih vrijednosti. Možeš li uočiti pravilnost?
d) Razmijeni zaključke s ostalim skupinama tako da svaki član tima formira svoju novu četveročlanu grupu u kojoj će biti on i još po jedan član iz ostalih triju timova. Zatim se vrati u svoju skupinu i zapiši zaključak riječima i matematičkim simbolima.



Zaključak:

Primjer riješenog nastavnog listića "Otkrij vezu između točaka hiperbole i istaknutih fiksnih točaka"

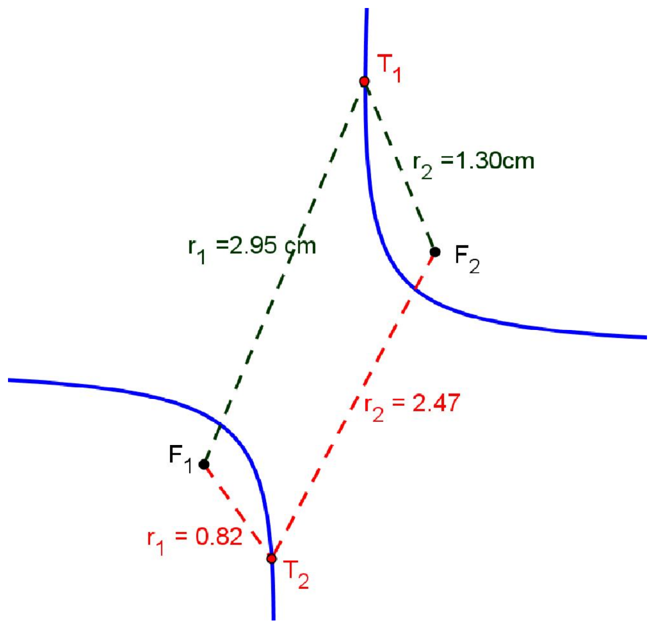
Na slici je nacrtana hiperbola s istaknutim fokusima. Odaberi dvije točke na svakoj grani hiperbole.

a) Izmjeri udaljenost svake odabrane točke od fiksnih točka.

b) Upiši rezultate mjerenja u zajedničku grupnu tablicu.

c) Izračunaj zbroj, razliku, umnožak i količnik dobivenih vrijednosti i uoči pravilnost.

e) Razmijeni zaključke s ostalim skupinama tako da svaki član tima formira svoju novu četveročlanu grupu u kojoj će biti on i još po jedan član iz ostalih triju timova. Zatim se vrati u svoju skupinu i zapiši zaključak riječima i matematičkim simbolima.



Zaključak:

Pravilnost se pojavljuje u stupcu razlike udaljenosti. Apsolutna vrijednost razlike udaljenosti bilo koje točke hiperbole od fiksnih točaka je stalna, tj.

$$|r_1 - r_2| = const.$$

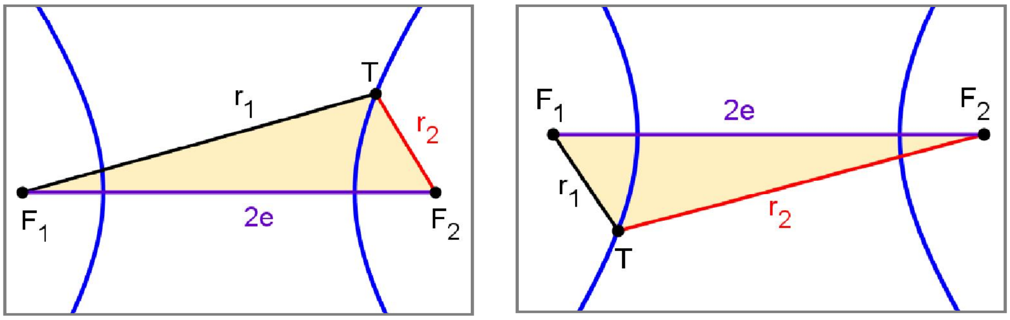
Pritom se konstanta mijenja od hiperbole do hiperbole.

Grupna tablica: Rezultati mjerenja						
Učenik	r_1	r_2	$r_1 + r_2$	$\boldsymbol{r_1 - r_2}$	$r_1 \cdot r_2$	$\frac{r_1}{r_2}$
1.						
2.						
3.						
4.						
r_1 je udaljenost proizvoljne točke T hiperbole od F_1 r_2 je udaljenost proizvoljne točke T hiperbole od F_2						

Primjer ispunjene grupne tablice: Rezultati mjerenja						
Učenik	r_1	r_2	$r_1 + r_2$	$\boldsymbol{r_1 - r_2}$	$r_1 \cdot r_2$	$\frac{r_1}{r_2}$
1.	3,0	1,3	4,3	**1,6**	3,9	2,3
	0,6	2,2	2,8	**-1,6**	1,3	0,3
2.	1,7	3,3	5,0	**-1,6**	5,5	0,5
	3,7	2,1	5,8	**1,6**	7,6	1,8
3.	4,1	2,5	6,6	**1,6**	10,1	1,7
	0,5	2,2	2,7	**-1,6**	1,1	0,2
4.	1,0	2,7	3,7	**-1,6**	2,7	0,4
	2,8	1,1	3,9	**1,6**	3,1	2,5
r_1 je udaljenost proizvoljne točke T hiperbole od F_1 r_2 je udaljenost proizvoljne točke T hiperbole od F_2						

5.1.4 Aktivnost *Otkrij vezu između* $|\boldsymbol{F_1F_2}|$ *i* $|\boldsymbol{r_1 - r_2}|$

Cilj ove aktivnosti je da učenici, heurističkim razgovorom, otkriju vezu između apsolutne vrijednost razlike udaljenosti bilo koje točke hiperbole od fiksnih točaka i udaljenosti fiksnih točaka.. Potrebni materijal za četvrtu aktivnost je pripremljeni materijal u alatu dinamične geometrije. Nastavnik otvara pripremljeni materijal te zajedno s učenicima dolazi do niza zaključaka.



Slika 5.1.4.1. *Veza između* $|F_1F_2|$ *i* $|r_1 - r_2|$

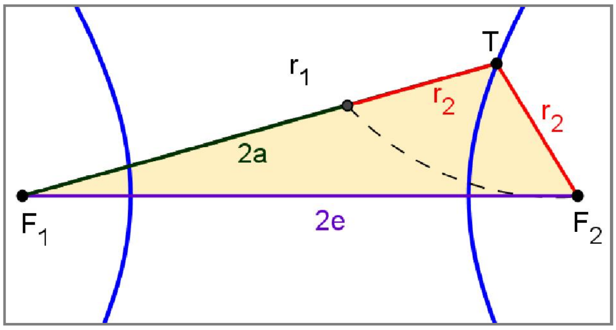
Prema Slici 5.1.4.1 F_1 *i* F_2 su dvije fiksne točke ravnine te udaljenost između njih označimo s *2e*, tj. $|F_1F_2| = 2e$. Udaljenost proizvoljne točke T hiperbole od točaka F_1 i F_2 redom označimo s $r_1 = |F_1T|$ i $r_2 = |F_2T|$. Primjenimo nejednakost trokuta na trokut F_1F_2T.

$$r_1 < 2e + r_2 \Rightarrow r_1 - r_2 < 2e$$
$$r_2 < 2e + r_1 \Rightarrow r_2 - r_1 < 2e,$$

odakle slijedi

$$|r_1 - r_2| < 2e = |F_1F_2|.$$

Označimo $|r_1 - r_2| = 2a$ pa dobivamo $2a < 2e$, odnosno $a < e$ (Slika 5.1.4.2).



Slika 5.1.4.2. *Veza između udaljenosti fiksnih točaka i konstante a*

U nastavku aktivnosti učenici će zajedno s nastavnikom definirati hiperbolu.
Neka je *a* pozitivan realan broj manji od *e*. Hiperbola je skup svih točaka *T* u ravnini za koje vrijedi

$$|r_1 - r_2| = 2a.$$

5.1.5 Aktivnost *Crtaj hiperbolu*

Crtanje hiperbole pomoću ravnala i konca nije praktično pa će učenici u ovoj aktivnosti konstruirati hiperbolu individualnim radom. Potrebni materijal za ovu aktivnost su dva različita nastavna listića s istim uputama, bilježnica, olovka, ravnalo i šestar. Na svakom nastavnom listiću je po jedan zadatak u kojem se pomoću zadanih podataka može konstruirati hiperbola i po jedan zadatak u kojem se iz zadanih podataka hiperbola ne može konstruirati.

A. nastavni listić *Crtaj hiperbolu*

Zadatak 1. Konstruiraj hiperbolu čiji su fokusi udaljeni 5 cm, a apsolutna vrijednost razlike udaljenosti bilo koje točke te hiperbole od njenih fokusa je 3 cm.

Zadatak 2. Konstruiraj hiperbolu čiji su fokusi udaljeni 3 cm, a apsolutna vrijednost razlike udaljenosti bilo koje točke te hiperbole od njenih fokusa je 5 cm.

Opis konstrukcije za zadatak 1:

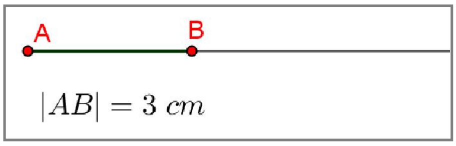
1. Konstruiraj proizvoljni polupravac s početkom u proizvoljnoj točki A i dužinu $\overline{AB}$ duljine 3 cm tako da pripada polupravcu.
2. Konstruiraj dvije točke F_1 i F_2 koje ne pripadaju tom polupravcu i koje su međusobno udaljene 5 cm.
3. Na polupravcu označi proizvoljnu točku *C* tako da je $|AC| > |AB|$ i označi $r_1 = d(A, C)$ i $r_2 = d(B, C)$.
4. Konstruiraj kružnice $k_1(F_1, r_1)$, $k_2(F_2, r_1)$, $k_3(F_1, r_2)$ i $k_4(F_2, r_2)$.
5. Označi sjecišta kružnica k_2 i k_3 redom s T_1 i T_2, a sjecišta kružnica k_1 i k_4 redom s T_3 i T_4.
6. Postupak ponovi 5 puta za različite točke *C*.
7. Nacrtaj hiperbolu spajanjem dobivenih točaka.

B. nastavni listić *Crtaj hiperbolu*

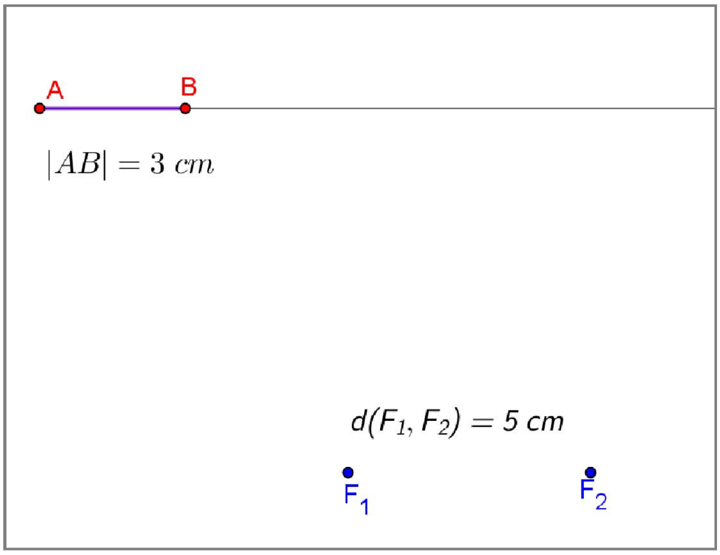
Zadatak 1. Konstruiraj hiperbolu čiji su fokusi udaljeni 5 cm, a apsolutna vrijednost razlike udaljenosti bilo koje točke te hiperbole od njenih fokusa je 4 cm.

Zadatak 2. Konstruiraj hiperbolu čiji su fokusi udaljeni 4 cm, a apsolutna vrijednost razlike udaljenosti bilo koje točke te hiperbole od njenih fokusa je 5 cm.
Opis konstrukcije je isti kao u A. verziji nastavnog listića.

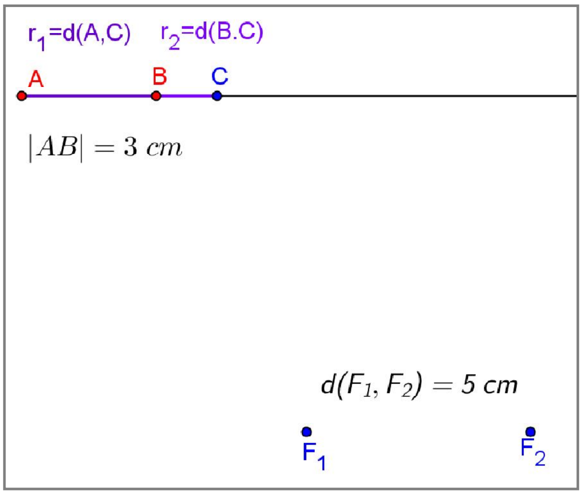
U nastavku su prikazani koraci konstrukcije A varijante nastavnog listića *Crtaj hiperbolu*. Njegova B varijanta rješava se analogno. Sljedeći niz slika prikazuje konstrukciju prvog zadataka.



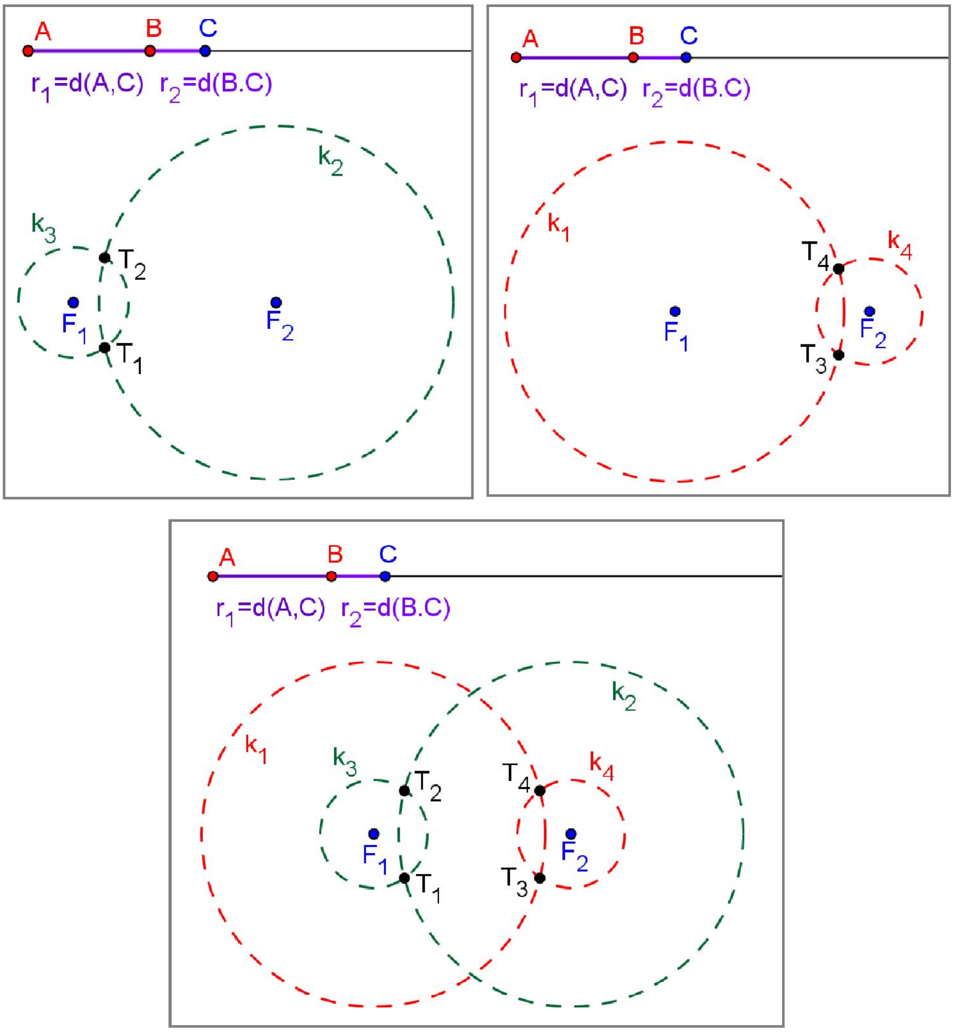
Slika 5.1.5.1. Prvi korak konstrukcije



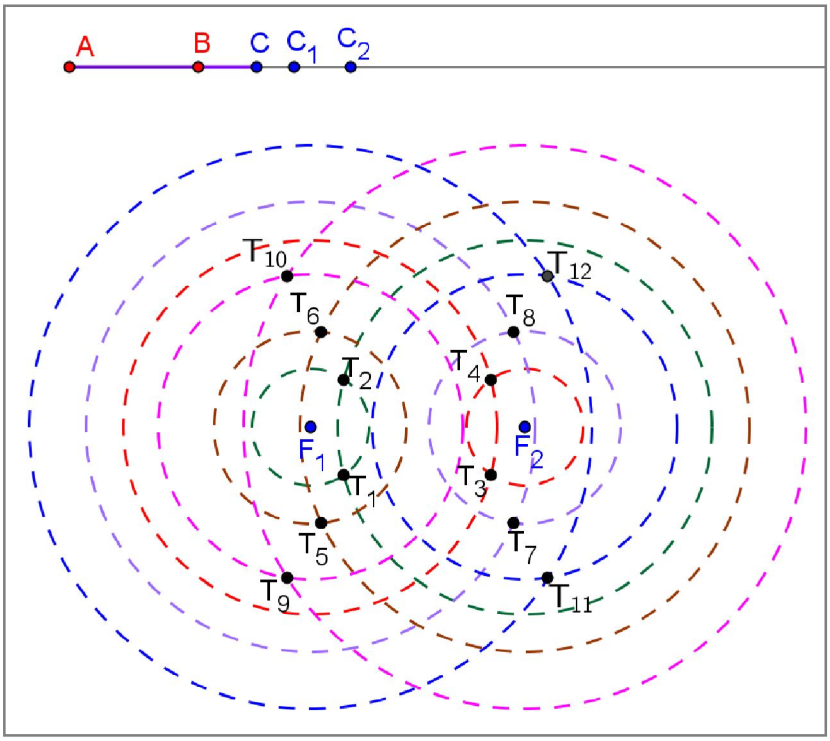
Slika 5.1.5.2. Drugi korak konstrukcije



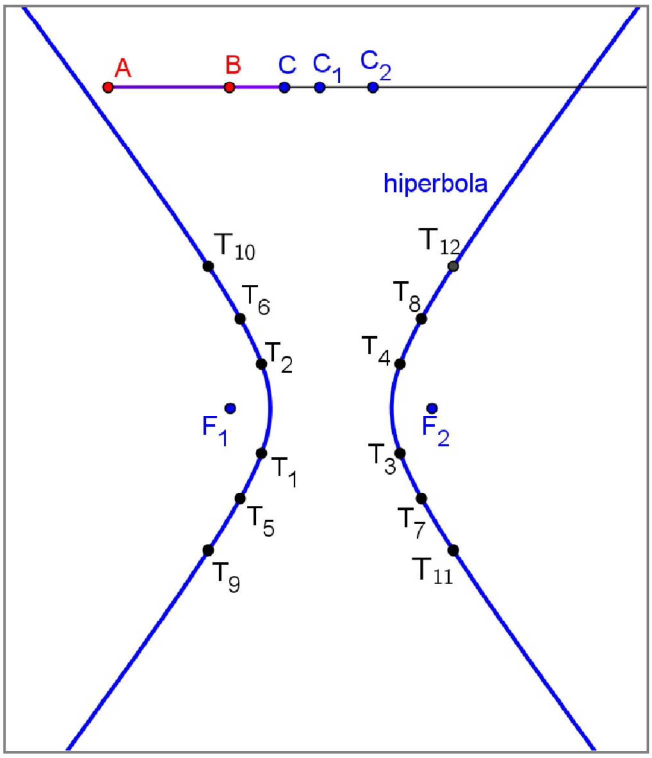
Slika 5.1.5.3. Treći korak konstrukcije



Slika 5.1.5.4. Četvrti i peti korak konstrukcije

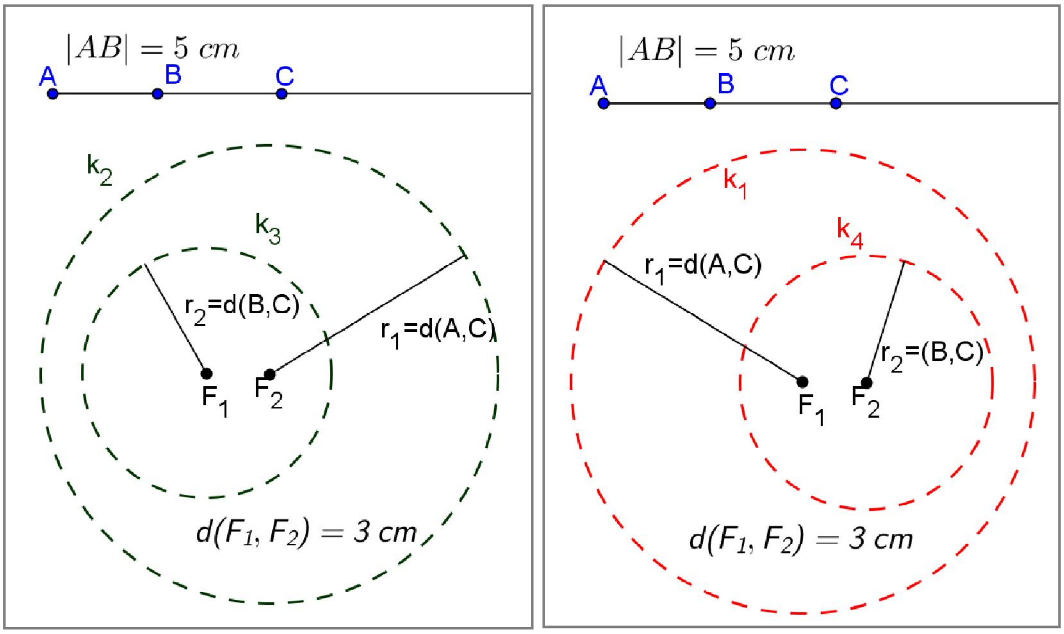


Slika 5.1.5.5. Šesti korak konstrukcije



Slika 5.1.5.6. Konstrukcija hiperbole pomoću šestara

Tijekom rješavanja drugog zadatka s nastavnog listića učenici će uočiti da kružnice k_2 i k_3 nemaju zajedničkih točaka i da je kružnica k_3 unutar kružnice k_2 te da analogno vrijedi i za kružnice k_1 i k_4 (Slika 5.1.5.7). Na temelju toga, zaključit će da ne mogu konstruirati hiperbolu u tom slučaju.



Slika 5.1.5.7. *Nemoguća konstrukcija hiperbole*

U nastavku aktivnosti učenici se prisjećaju u kakvom međusobnom položaju mogu biti dvije kružnice. Jedan od položaja je da se dvije kružnice ne dodiruju te je jedna kružnica unutar druge ako vrijedi

$$|F_1F_2| < |r_1 - r_2|,$$

gdje su F_1 i F_2 središta kružnica, a r_1 i r_2 polumjeri kružnica. Učenici se prisjećaju veze između $|F_1F_2|$ i $2a$. Kako su F_1 i F_2 fokusi hiperbole, onda za njih vrijedi

$$|F_1F_2| > |r_1 - r_2| = 2a.$$

Obzirom da u ovom zadatku vrijedi

$$|F_1F_2| < |r_1 - r_2|,$$

onda je nemoguće konstruirati hiperbolu.

5.1.6 Završni dio sata

U završnom dijelu sata nastavnik prvo zadaje domaću zadaću. Za domaću zadaću učenici dobiju nastavni listić na kojem su upute za rješavanje zadatka i bijeli prozirni, voštani papir na kojemu je konstruiran krug.

Nastavni listić – domaća zadaća

Zadatak 1.

Na prozrnom papiru nacrtan je krug i označeno je njegovo središte S. Izvan kruga odaberi proizvoljnu točku i označi je s F. Presavijaj papir tako da se bilo koja točka s kružnog luka preklopi s točkom F. Taj postupak ponavljaj dok pregibima ne "obiđeš" cijeli krug. Nakon toga rastvori papir. Što uočavaš na rastvorenom papiru?

Pogledaj video na https://www.youtube.com/watch?v=nEISCCjObPg

Zadatak 2.

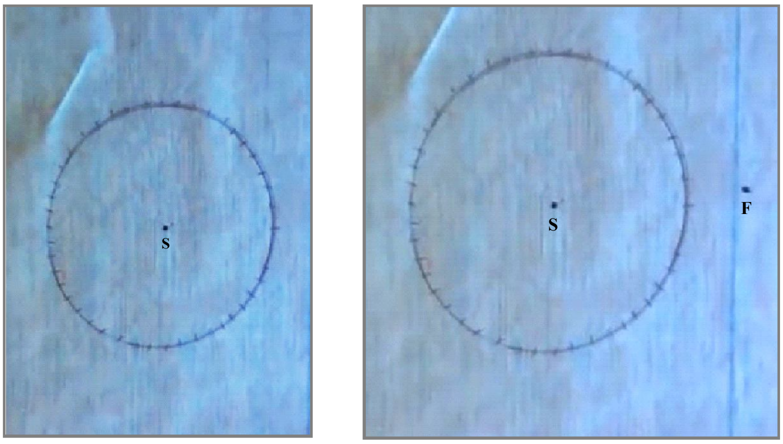
Konstruiraj hiperbolu čija je udaljenost fokusa jednaka 10 cm, a apsolutna vrijednost razlike udaljenosti bilo koje točke te hiperbole od fokusa hiperbole je 6 cm.

Nakon zadavanja domaće zadaće slijedi provjera postavljenih ciljeva i učeničkih postignuća nastavnog sata. Nastavnik otvara pripremljene materijale u alatu dinamičke geometrije koje je koristio tijekom sata te putem pitanja i odgovora saznaje u kojoj mjeri su učenici usvojili postavljene ciljeve.

Rješenje domaće zadaće:

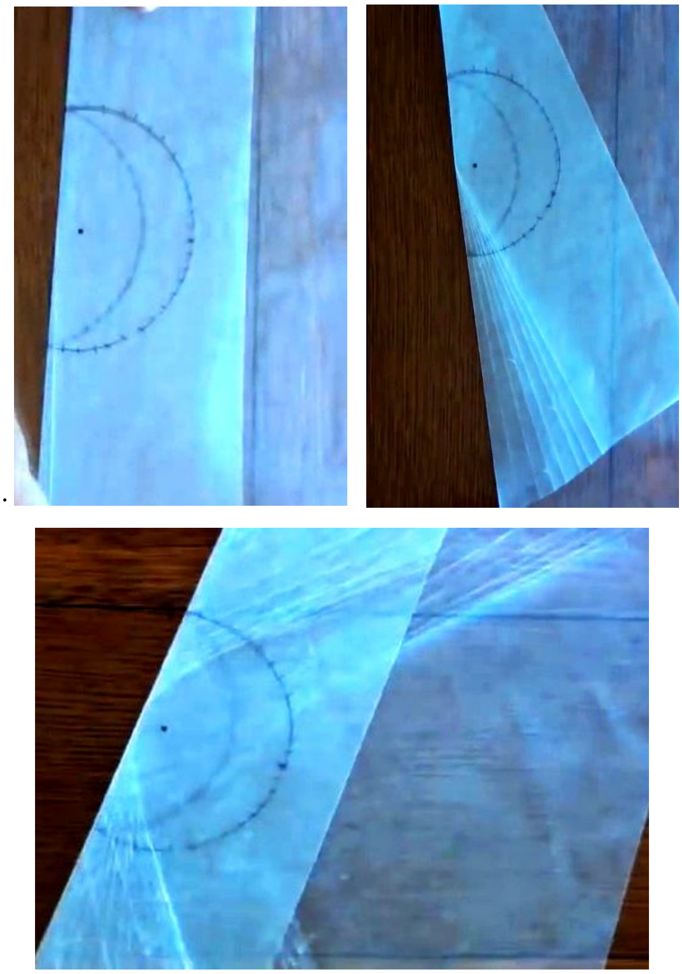
Zadatak 1.

Na prozrnom papiru nacrtan je krug i označeno je njegovo središte S. Izvan kruga odaberemo proizvoljnu točku i označimo je s F (Slika 5.1.6.1).



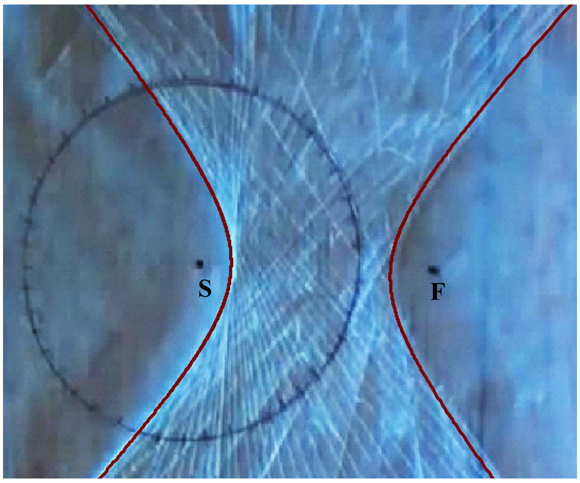
Slika 5.1.6.1. *Hiperbola dobivena presavijanjem papira*

Presavijajmo papir tako da se bilo koja točka s kružnog luka preklopi s točkom F. Taj postupak ponavljamo dok pregibima ne "obiđemo" cijeli krug (Slika 5.1.6.2).



Slika 5.1.6.2. *Hiperbola dobivena presavijanjem papira*

Nakon što rastvorimo papir, uočit ćemo da se presavijanjem papira dobije hiperbola kojoj su točke S i F fokusi (Slika 5.1.6.3).

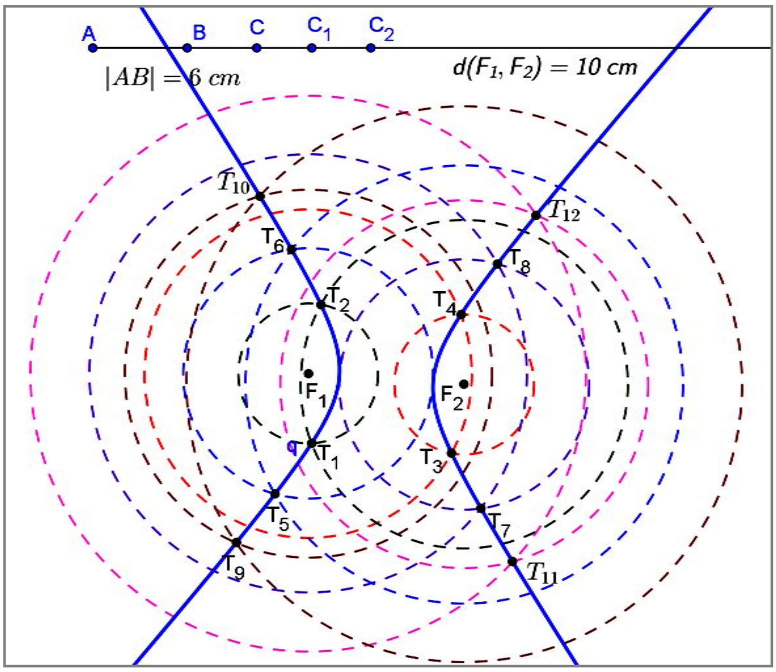


Slika 5.1.6.3. Hiperbola dobivena presavijanjem papira

Zadatak 2.

Ovaj zadatak se rješava analogno kao konstrukcija hiperbole koja je napravljena na satu tijekom četvrte aktivnosti, ali treba promijeniti duljinu dužine $\overline{AB}$ i međusobnu udaljenost fokusa (Slika 5.1.6.4).

Rješenje:



Slika 5.1.6.4. *Domaća zadaća: Konstrukcija hiperbole šestaro*

5.2 Nastavni sat otkrivanja jednadžbe hiperbole

U uvodnom dijelu nastavnog sata provodi se analiza domaće zadaće i ponavljanje osnovnih zaključaka vezanih uz hiperbolu koje su učenici otkrili na prethodnom nastavnom satu. Nakon ponavljanja slijedi glavni dio sata na kojem se provodi pet aktivnost. U prvoj aktivnosti učenici će otkriti dvije međusobno okomite osi simetrije hiperbole, a u drugoj aktivnosti učenici će smjestiti hiperbolu u koordinatni sustav. Tijekom treće aktivnosti učenici će odrediti koordinate istaknutih točaka, dok će u četvrtoj aktivnosti učenici odrediti jednadžbu hiperbole kojoj je središte u ishodištu koordinatnog sustava, a realna os na osi apscisa. U petoj aktivnosti učenici će odrediti elemente hiperbole koja je prikazana u koordinatnom sustavu. U završnom dijelu nastavnog sata nastavnik će zadati domaću zadaću nakon čega slijedi provjera postavljenih ciljeva i ishoda učenja nastavnog sata. Ishodi učenja drugog nastavnog sata su:

- učenik/ca će precizno opisati hiperbolu
- učenik/ca će razlikovati jednadžbu središnje hiperbole od jednadžbi drugih krivulja
- učenik/ca će iz dane jednadžbe hiperbole odrediti koordinate žarišta, koordinate tjemena, linearni ekscentricitet i numerički ekscentricitet hiperbole

5.2.1 Aktivnost *Otkrij osi simetrije hiperbole*

Cilj ove aktivnosti je da učenici, radeći u četveročlanim skupinama, presavijanjem papira otkriju dvije međusobno okomite osi simetrije hiperbole. Potrebni materijal za ovu aktivnost je nastavni listić s uputama i papir A5 formata na kojem je nacrtana hiperbola i istaknuti su njeni fokusi, ravnalo ili trokut. Nastavnik učenike podijeli u četveročlane skupine. Svaka skupina će dobiti četiri A5 papira na kojima su nacrtane hiperbole u različitim položajima na papiru i jedan nastavni listić s uputama.

Učenici će presavijanjem papira otkriti kako postoje dvije osi simetrije svake nacrtane hiperbole, a zatim će uz pomoć ravnala otkriti kako su osi simetrije hiperbole međusobno okomite.

Nastavni listić s uputama i zadaćama

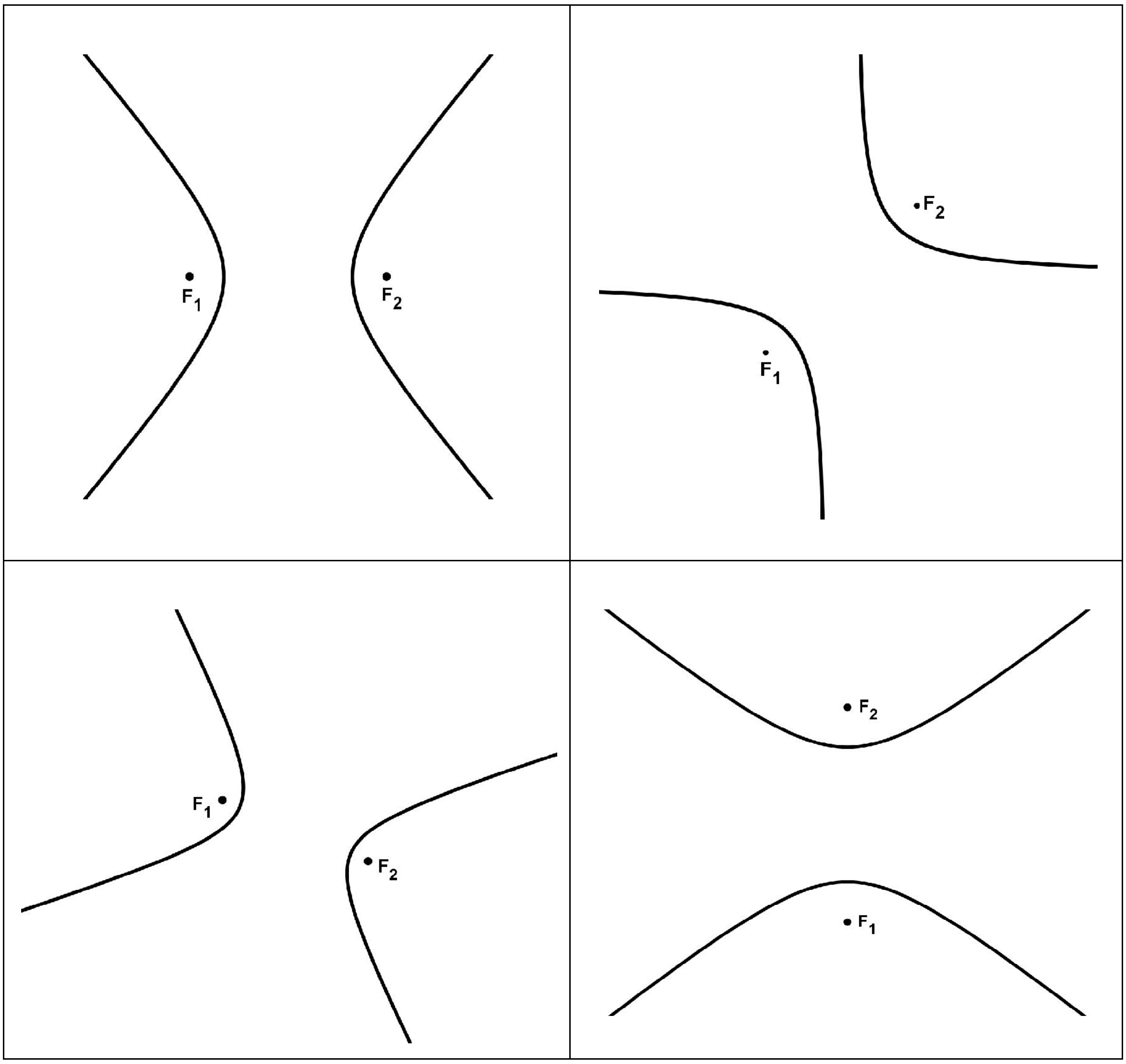
Na papiru je nacrtana hiperbola i istaknuti su njeni fokusi.

a) Presavijanjem papira otkrij osi simetrije nacrtane hiperbole.

b) Dobivene osi simetrije označi olovkom, a njihovo sjecište označi slovom S.

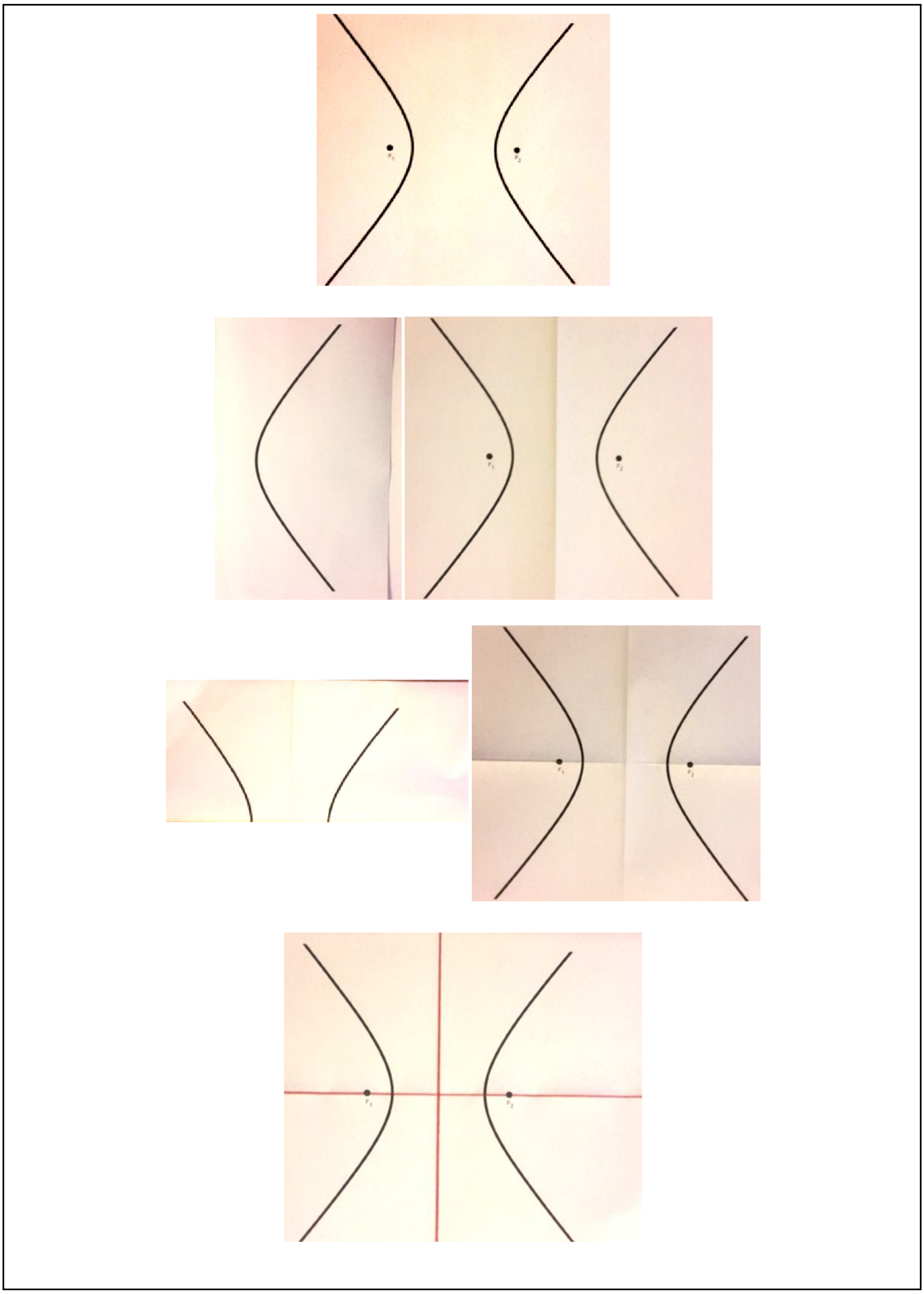
c) Izmjeri duljine dužina $\overline{F_1S}$ i $\overline{F_2S}$.

d) U kakvom su međusobnom položaju osi simetrije hiperbole?



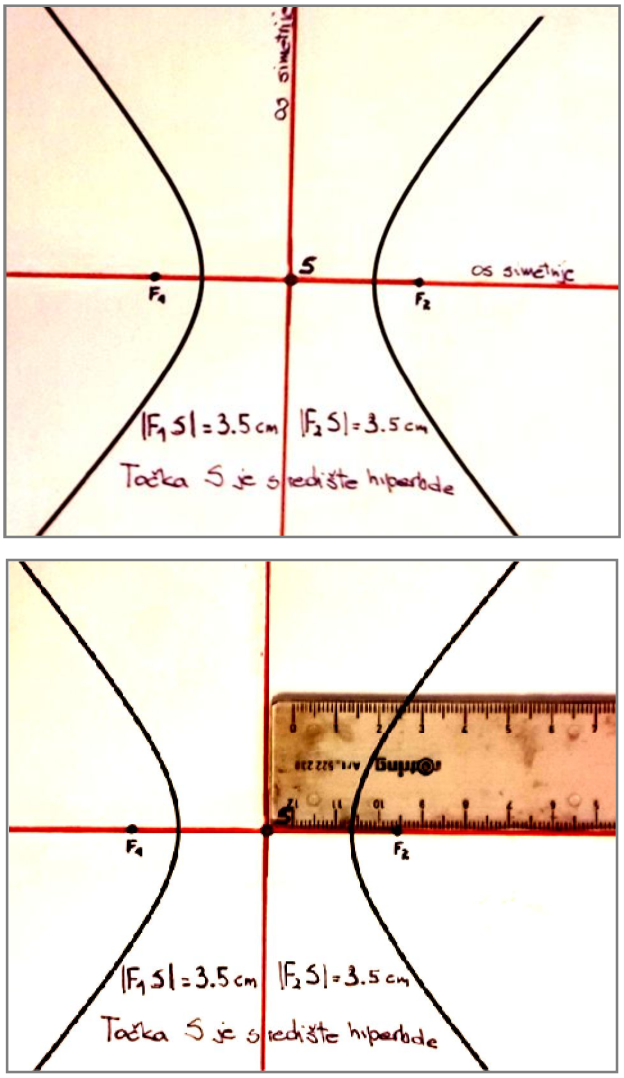
Slika 5.2.1.1. *Predlošci hiperbola na papiru*

U nastavku je primjer rješavanja jedne od zadanih hiperbola, a analogno se rješavaju ostala tri slučaja na kojima je hiperbola na papiru u drukčijem položaju (Slika 5.2.1.2).



Slika 5.2.1.2. *Dvije osi simetrije hiperbole dobivene presavijanjem papira*

Nakon što učenici završe s presavijanjem papira te otkriju kako hiperbola ima dvije osi simetrije, učenici će otkriti u kakvom su međusobnom položaju osi simetrije hiperbole. Označit će sjecište dviju osi simetrija sa S. Zatim će izmjeriti duljine dužina $\overline{F_1S}$ i $\overline{F_2S}$ te zaključiti kako je točka S polovište dužine $\overline{F_1F_2}$. Točku S zovemo središte hiperbole. Pomoću ravnala, otkrit će kako je kut između osi simetrija pravi kut (Slika 5.2.1.3).

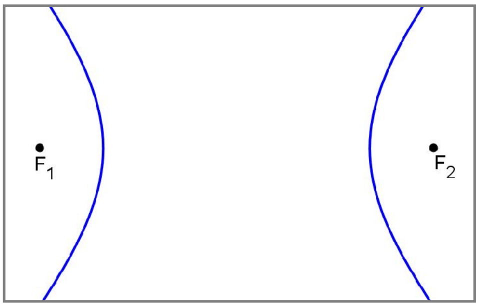


Slika 5.2.1.3. *Osi simetrije hiperbole su međusobno okomite*

Učenici donose zaključak kako su osi simetrije hiperbole međusobno okomite te da je jedna os simetrije pravac koji prolazi fokusima, a druga je simetrala dužine $\overline{F_1F_2}$. Na kraju aktivnosti učenici zalijepe nastavni listić u svoje bilježnice.

5.2.2 Aktivnost *Hiperbola u koordinatnom sustavu*

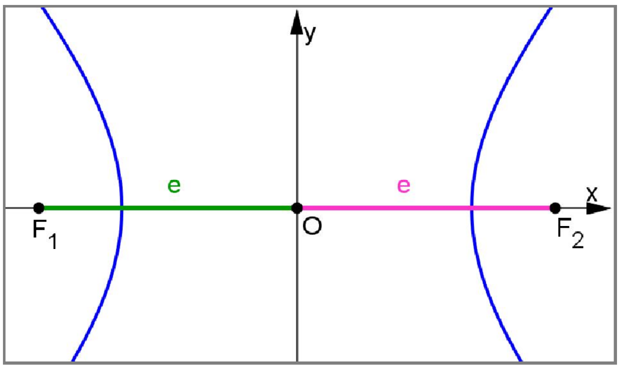
Cilj ove aktivnosti je da učenici, razrednom diskusijom, smjeste hiperbolu u pravokutni koordinatni sustav. Potrebni materijal je pripremljena radna bilježnica u alatu dinamične geometrije gdje je nacrtana hiperbola i njeni fokusi koju nastavnik otvara na početku aktivnosti (Slika 5.2.2.1).



Slika 5.2.2.1. *Hiperbola*

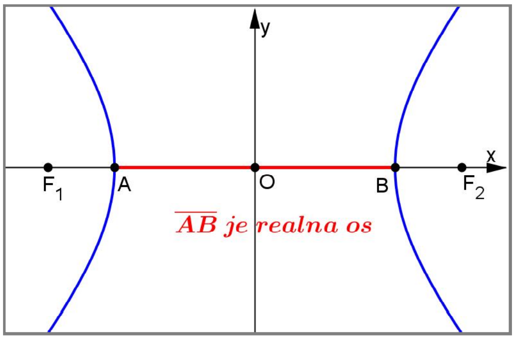
Tijekom diskusije učenici zaključe kako je najprikladnije odabrati koordinatne osi u odnosu na hiperbolu tako da se pravac koji prolazi fokusima hiperbole podudara (jedna os simetrije) s *x*-osi, a simetrala dužine $\overline{F_1F_2}$ (druga os simetrije) se podudara s *y*-osi. Ishodište *O* koordinatnog sustava je polovište dužine $\overline{F_1F_2}$.

Nastavnik postavlja pitanje kako je definirano središte hiperbole u prethodnoj aktivnosti pa učenici zaključuju kako za danu hiperbolu ishodište *O* koordinatnog sustava je ista točka kao i središte *S* hiperbole. Udaljenost fokusa do središta *S* hiperbole naziva se linearni ekscentricitet i označava s *e* (Slika 5.2.2.2), odnosno zapisano matematičkim simbolima vrijedi $d(F_1, S) = d(F_2S) = e$.



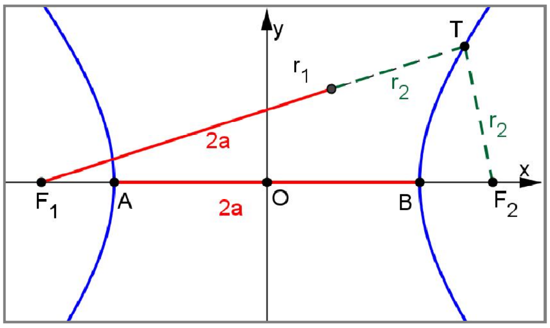
Slika 5.2.2.2. *Linearni ekscentricitet hiperbole*

U nastavku aktivnosti učenici će uočiti kako postoje još dvije istaknute točke hiperbole, tj. točke u kojima hiperbola siječe *x*-os. Točke u kojima hiperbola siječe *x*-os nazivamo tjemena hiperbole i označavamo ih najčešće s A i B. Dužinu kojoj su krajnje točke tjemena hiperbole nazivamo realna os hiperbole (Slika 5.2.2.3).



Slika 5.2.2.3. *Tjemena i realna os hiperbole*

Nastavnik u dijalogu s učenicima dolazi do sljedećeg niza zaključaka. Udaljenost tjemena A ili tjemena B od središta O hiperbole naziva se duljina realne poluosi hiperbole i označava se s a, odnosno $d(A,O)=d(O,B)=a$. Duljina realne poluosi je pozitivan realan broj koji je manji od linearnog ekscentriciteta, tj. vrijedi da je $a<e$. Kako je $d(A,O)+d(O,B)=d(A,B)$, onda je $d(A,B)=2a$, odnosno duljina realne osi je $2a$.



Slika 5.2.2.4.

Prema Slici 5.2.2.4 za točku A hiperbole, vrijedi

$$\begin{aligned}|d(A,F_1)-d(A,F_2)| &= |d(A,F_1)-(d(A,O)+\ d(O,B)+d(B.F_2)| \\ &= |d(A,F_1)-d(A,O)-d(O,B)-d(B.F_2)|.\end{aligned}$$

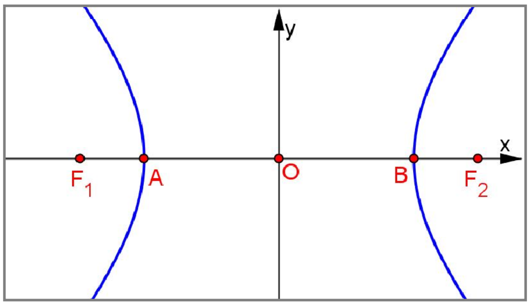
Kako zbog simetrije vrijedi $d(A,F_1)=d(B.F_2)$, onda slijedi

$$|d(A,F_1)-d(A,F_2)| = |-d(A,O)-d(O,B)| = d(A,O)+d(O,B) = d(A,B) = 2a.$$

Isti zaključak vrijedi i za točku B pa hiperbolu možemo definirati na sljedeći način: Hiperbola s fokusima $F_1 i\ F_2$ i duljinom realne poluosi a je skup svih točaka T ravnine za koje vrijedi $|r_1 - r_2| = 2a$.

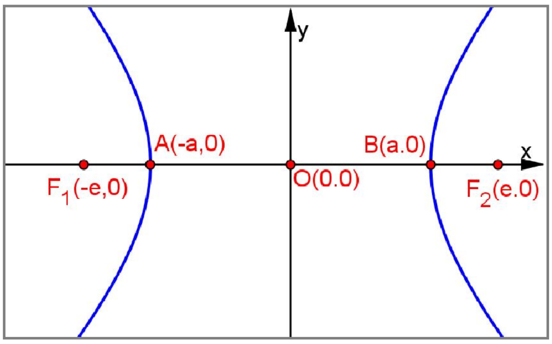
5.2.3 Aktivnost *Otkrij koordinate istaknutih točaka*

Cilj treće aktivnosti je da učenici, tijekom heurističkog razgovora, otkriju koordinate istaknutih točaka hiperbole. Potrebni materijal za ovu aktivnost je pripremljeni materijal u alatu dinamične geometrije gdje je nacrtana hiperbola u koordinatnom sustavu te su istaknuti fokusi, tjemena i središte hiperbole (Slika 5.2.3.1).



Slika 5.2.3.1. *Koordinate istaknutih točaka hiperbole*

Nastavnik otvara pripremljeni materijal, a učenici koristeći zaključke iz prethodne aktivnosti otkrivaju koordinate svih istaknutih točaka hiperbole. Središte hiperbole je ujedno i ishodište koordinatnog sustava pa je središte hiperbole točka *O(0,0)*. Udaljenost fokusa od središte hiperbole jednaka je *e* pa su fokusi hiperbole točke $F_1(-e, 0)$ i $F_2(e, 0)$. Udaljenost točaka *A* i *B* od središte hiperbole jednaka je *a* pa su tjemena hiperbole točke $A(-a, 0), B(a, 0)$ (Slika 5.2.3.2).

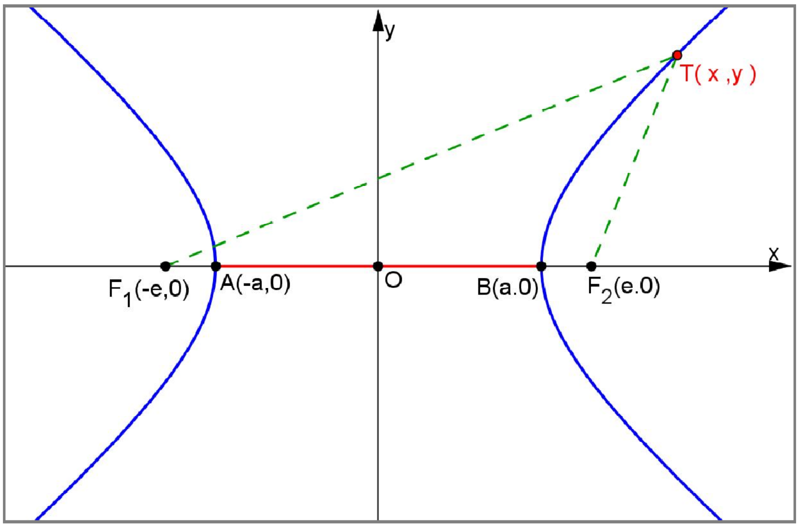


Slika 5.2.3.2. *Koordinate fokusa, tjemena i središta hiperbole*

5.2.4 Aktivnost *Otkrijmo jednadžbu hiperbole*

Cilj ove aktivnosti je da učenici, heurističkim razgovorom, otkriju jednadžbu hiperbole u najjednostavnijem položaju: središte hiperbole bit će u ishodištu koordinatnog sustava, a realna os na osi apscisa. Potrebni materijal za ovu aktivnost je pripremljeni materijal u alatu dinamične geometrije.

Nastavnik otvara pripremljeni materijal gdje je nacrtana hiperbola, fokusi i tjemena hiperbole te odabere proizvoljnu točku T na hiperboli, a učenici zaključe kako se koordinate te točke mogu označiti s x i y, odnosno $T(x, y)$ (Slika 5.2.4.1).



Slika 5.2.4.1.

Po definiciji hiperbole za točku T koja pripada hiperboli vrijedi da je apsolutna vrijednost razlike udaljenosti te točke od fokusa jednaka $2a$, odnosno zapisano matematičkim simbolima vrijedi

$$|d(F_1, T) - d(F_2, T)| = 2a \ .$$

Udaljenost dviju točaka $M(x_1, y_1)\ i\ N(x_2, y_2)$ u koordinatnom sustavu u ravnini računamo pomoću formule

$$|MN| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \ . \tag{5.1}$$

Koristeći formulu (5.1) jednakost $|d(T, F_1) - d(T, F_2)| = 2a$ možemo napisati kao

$$\sqrt{(x + e)^2 + y^2} - \sqrt{(x - e)^2 + y^2} = \pm 2a.$$

Pribrojimo $-\sqrt{(x-e)^2+y^2}$ na obje strane stranu pa dobivamo

$$\sqrt{(x+e)^2+y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-e)^2+y^2}.$$

Kvadriranjem dobivene jednakosti dalje je

$$(x+e)^2+y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-e)^2+y^2} + (x-e)^2+y^2,$$

odakle je primjenom formule kvadrata binoma

$$x^2+2ex+e^2+y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-e)^2+y^2} + x^2-2ex+e^2+y^2.$$

Pribrojimo $4a^2+x^2-2ex+e^2+y^2$ na obje strane pa dobivamo

$$4ex-4a^2 = \pm 4a\sqrt{(x-e)^2+y^2}.$$

Dijeljenjem dobivene jednakosti s 4 dalje je

$$ex-a^2 = \pm a\sqrt{(x-e)^2+y^2}\,,$$

zatim kvadriranjem obiju strana slijedi

$$e^2x^2-2ea^2x+a^4 = a^2((x-e)^2+y^2).$$

Primjenom formule kvadrata binoma na prethodnu jednakost dobivamo

$$e^2x^2-2ea^2x+a^4 = a^2(x^2-2ex+e^2+y^2),$$

odakle primjenom distributivnost na desnoj strani jednakosti slijedi

$$e^2x^2-2ea^2x+a^4 = a^2x^2-2ea^2x+a^2e^2+a^2y^2.$$

Oduzimamo $a^2x^2+a^2y^2+a^4$ na obje strane pa dobivamo

$$e^2x^2-a^2x^2-a^2y^2 = a^2e^2-a^4, \text{ odakle je}$$
$$(e^2-a^2)x^2-a^2y^2 = a^2(e^2-a^2).$$

Označimo $(e^2 - a^2) = b^2$, te uvrstimo u prethodnu jednakost pa dobivamo

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2.$$

odakle dijeljenjem s a^2b^2 slijedi

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ako točka $T(x, y)$ pripada hiperboli sa središtem u ishodištu, realnom poluosi duljine a, onda koordinate točke T zadovoljavaju jednadžbu $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Hiperbola kojoj središte leži u ishodištu koordinatnog sustava, a realna os leži na osi apscisa, ima jednadžbu

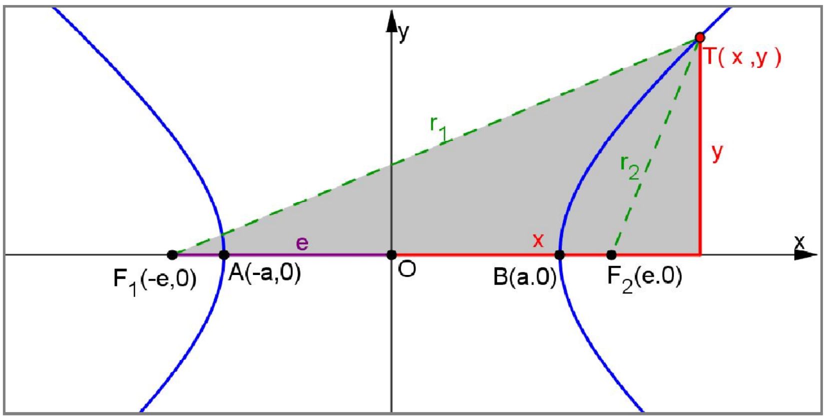
$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2,$$

odnosno,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

koju nazivamo kanonska jednadžba hiperbole.

U nastavku aktivnosti učenici će, tijekom diskusije, otkriti vrijedi li obrat. Odnosno, ako koordinate točke T zadovoljavaju jednadžbu $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, pripada li točka T hiperboli sa središtem u ishodištu i realnom polusi duljine a? Učenici će pretpostaviti kako točka T tada pripada hiperboli sa središtem u ishodištu i realnom polusi duljine a pa u nastavku aktivnosti dokažemo tu tvrdnju promatrajući (Sliku 5.2.4.2).



Slika 5.2.4.2. *Pripada li točka T danoj hiperboli?*

Prema Slici 5.2.4.2, označimo duljine radijvektora hiperbole s $r_1 = |F_1T|$, $r_2 = |F_2T|$. Tada vrijedi

$$r_1{}^2 = (x+e)^2 + y^2. \tag{5.2}$$

Izrazimo y^2 iz jednadžbe

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

pa dobivamo

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2. \tag{5.3}$$

Uvrštavanjem jednakosti (5.3) u jednakost (5.2) slijedi

$$r_1{}^2 = (x+e)^2 + \frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2,$$

odakle primjenom formule kvadrata binoma dobivamo

$$r_1{}^2 = x^2 + 2ex + e^2 + \frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2,$$

odakle je

$$r_1{}^2 = \frac{a^2+b^2}{a^2}x^2 + 2ex + e^2 - b^2.$$

Označimo $e^2 - b^2 = a^2$ pa slijedi

$$r_1{}^2 = \frac{e^2}{a^2}x^2 + 2ex + a^2,$$

Dalje primijenimo formulu kvadrata binoma na desnoj strani pa dobivamo

$$r_1{}^2 = \left(\frac{e}{a}x + a\right)^2. \tag{5.4}$$

Prema Slici 5.2.4.2 vrijedi

$$r_2{}^2 = (x-e)^2 + y^2. \tag{5.5}$$

Analognim postupkom dobivamo

$$r_2{}^2 = \left(\frac{e}{a}x - a\right)^2. \tag{5.6}$$

U prethodnim izrazima pojavio se količnik $\frac{e}{a}$. Označavamo ga s ε i zovemo numerički ekscentricitet hiperbole. Budući da vrijedi $e > a$, onda je $\varepsilon > 1$.

Iz jednadžbe hiperbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

možemo zaključiti da je $|x| \geq a$ jer u suprotnom ta jednadžba ne bi imala smisla. Dijeljenjem nejednakosti s pozitivnim brojem a dobivamo

$$\frac{|x|}{a} \geq 1,$$

odnosno, vrijedi

$$\left|\frac{x}{a}\right| \geq 1, a > 0.$$

Množenjem nejednakosti s pozitivnim brojem $e, e > a$ slijedi

$$\left|\frac{ex}{a}\right| \geq e. \tag{5.7}$$

Tada slijedi

$$\frac{e}{a}x + a > 0 \ \ i \ \ \frac{e}{a}x - a > 0,$$

odakle rješavanjem (5.4) i (5.6) dobivamo

$$r_1 = \frac{e}{a}x + a \ \ i \ \ r_2 = \frac{e}{a}x - a.$$

Oduzimanjem tih vrijednosti slijedi

$$|r_1 - r_2| = \left|\frac{e}{a}x + a - \frac{e}{a}x + a\right| = 2a.$$

Ovim smo dokazali tvrdnju: ako točka $T(x, y)$ zadovoljava jednadžbu $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, onda točka $T(x, y)$ pripada hiperboli sa središtem u ishodištu i realnom poluosi duljine a.

U nastavku aktivnosti učenici će zajedno s nastavnikom definirati imaginarnu poluos hiperbole. Iz jednadžbe hiperbole

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

dobivamo

$$a^2y^2 = b^2x^2 - a^2b^2,$$

odakle faktorizacijom desne strane slijedi

$$a^2y^2 = b^2(x^2 - a^2).$$

Dijeljenjem obiju strana s a^2, dobivamo

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2),$$

odakle je

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{(x^2 - a^2)}.$$

Funkcija drugog korijena definirana je na $[0, +\infty\rangle$. Prema tome, za točke hiperbole vrijedi $|x| \geq a$.

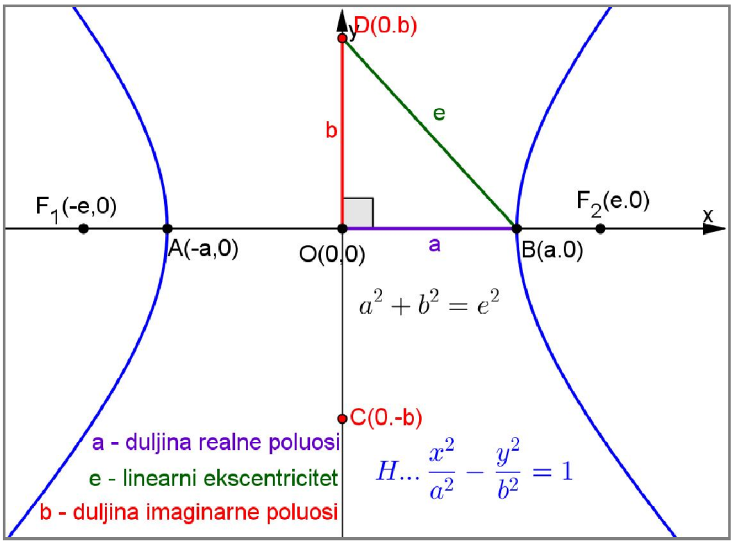
1. Za $x = a\ i\ x = -a$ dobivamo $y = 0$. Točke $(-a, 0)\ i\ (a, 0)$ su tjemena hiperbole.
2. Ako je $-a < x < a$ tada ne postoji točka na hiperboli s tom apscisom.
3. Ako je $x > a\ ili\ x < -a$, onda postoje dvije točke hiperbole s apscisom x, a ordinatu računamo iz formule $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{(x^2 - a^2)}$

Zbog toga se hiperbola sastoji od dvije odvojene grane:

1. Za desna granu vrijedi $r_1 - r_2 = 2a$, odnosno $x \geq a$
2. Za lijeva granu vrijedi $r_2 - r_1 = 2a$, odnosno $x \leq -a$

Ako uvrstimo $x = 0$ u $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{(x^2 - a^2)}$, dobit ćemo $y = \pm bi$.

Točke $C(0, -b)\ i\ D(0, b)$ nazivamo imaginarnim tjemenima hiperbole, a dužinu $\overline{CD}$ nazivamo imaginarna os hiperbole. Duljina imaginarne osi je *2b* pa je duljina imaginarne poluosi *b*. Broj *b* nije ničim uvjetovan, on može biti veći ili manji od *a* (Slika 5.2.4.3).



Slika 5.2.4.3. *Imaginarna poluos hiperbole i imaginarna tjemena hiperbole*

5.2.5 Aktivnost *Odredi elemente hiperbole*

Cilj ove aktivnosti je da učenici, individualnim radom, odrede elemente hiperbole koja je nacrtana u pravokutnom koordinatnom sustavu. Potrebni materijal je nastavni listić sa zadatkom.

Nastavnik podijeli učenicima nastavni listić te nakon što učenici riješe zadatak, nastavnik proziva učenike koji rješavaju zadatak na ploči

Nastavni listić

Zadatak 1.

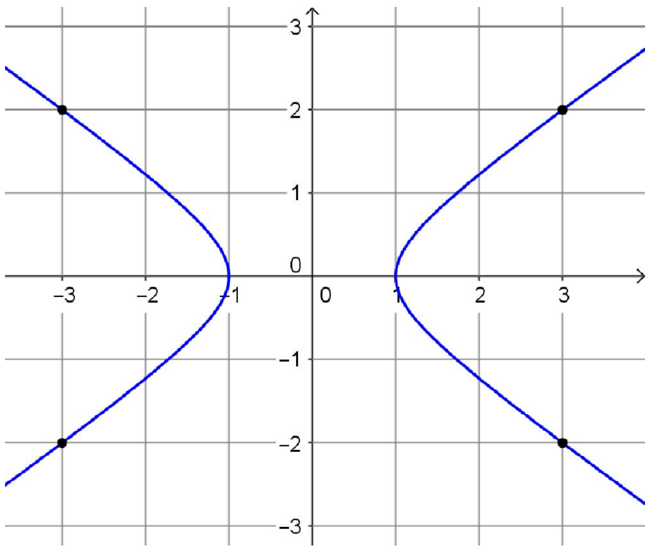
Na slici je hiperbola i istaknute su neke njene točke s cjelobrojnim koordinatama.

a) Odredi koordinate tjemena te hiperbole.

b) Odredi koordinate žarišta te hiperbole.

c) Numerički ekscentricitet te hiperbole.

d) Odredi jednadžbu te hiperbole.



Primjer riješenog nastavnog listića

Zadatak 1.

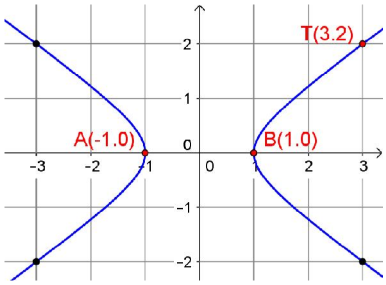
Na slici je hiperbola i istaknute su neke njene točke s cjelobrojnim koordinatama.

a) Odredi koordinate tjemena te hiperbole.

b) Odredi koordinate žarišta te hiperbole.

c) Numerički ekscentricitet te hiperbole.

d) Odredi jednadžbu te hiperbole.



a) Tjemena hiperbole su točke $A(-a,0)$ i $B(a,0)$ pa ih očitamo s dane slike i dobijemo $A(-1,0)$ i $B(1,0)$.

b) Fokusi hiperbole su točke $F_1(-e,0)$ i $F_2(e,0)$ pa moramo odrediti linearni ekscentricitet hiperbole kojeg ćemo dobiti iz $a^2+b^2=e^2$. Duljinu realne osi smo očitali s dane slike pa dobijemo $a=1$, odnosno $a^2=1$. Kako bi odredili b^2, uvrstit ćemo koordinate jedne cjelobrojne točke hiperbole u jednadžbu hiperbole. Iz slike očitamo koordinate jedne od četiri istaknute točke hiperbole, npr. koordinate točke $T(3,2)$. Uvrštavanjem poznatih podataka u jednadžbu hiperbole $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$, dobivamo

$$9b^2-4=b^2, \text{ odakle je}$$

$$8b^2=4 \text{ pa je}$$

$$b^2=\frac{1}{2}.$$

Sada iz $a^2+b^2=e^2$, dobivamo $e^2=\frac{3}{2}$. Kako je linearni ekscentricitet pozitivan broj, slijedi da je $e=\frac{\sqrt{6}}{2}$ pa su fokusi hiperbole točke $F_1(-\frac{\sqrt{6}}{2},0)$, $F_2(\frac{\sqrt{6}}{2},0)$.

c) Numerički ekscentricitet hiperbole $\varepsilon=\frac{e}{a}$, odnosno,

$$\varepsilon=\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

d) Dana hiperbola ima jednadžbu $x^2-2y^2=1$.

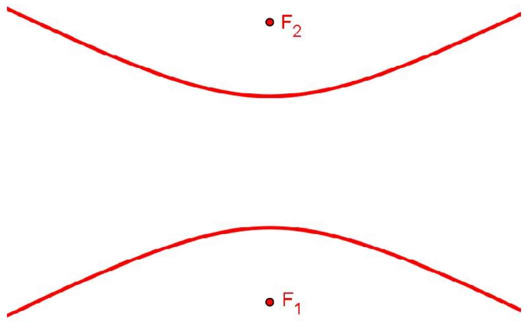
5.2.6 Završni dio sata

U završnom dijelu sata nastavnik prvo zadaje domaću zadaću. Na nastavnom listiću su zadaci za domaću zadaću. Nakon zadavanja domaće zadaće slijedi provjera postavljenih ciljeva i učeničkih postignuća nastavnog sata tako što nastavnik otvara pripremljene materijale u alatu dinamičke geometrije i putem pitanja i odgovora saznaje u kojoj mjeri su učenici usvojili postavljene ciljeve.

Nastavni listić - Domaća zadaća

Zadatak 1.

Kako bismo mogli dobiti hiperbolu, koja je prikazana na slici, pomoću hiperbole čija je jednadžba $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$? Kako bismo odredili koordinatni sustav i jednadžbu hiperbole prikazane na slici?



Zadatak 2.

Hiperbola je zadana jednadžbom $16y^2 - 9x^2 = 144$. Odredi koordinate žarišta i koordinate tjemena te hiperbole.

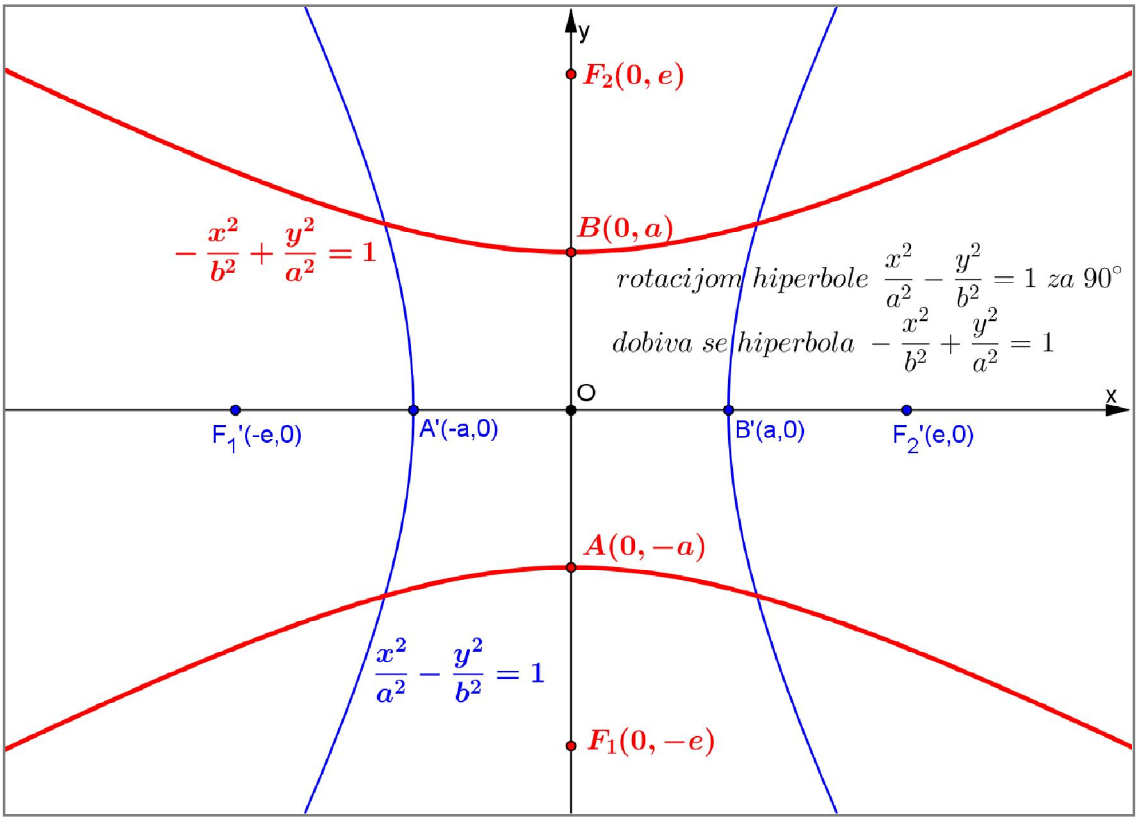
Zadatak 3.

Znamo da je elipsa omeđena krivulja, tj. pravokutnik sa stranicama duljina 2a i 2b paralelnih s osima i središtem u središtu elipse potpuno obuhvaća elipsu. Vrijedi li isti zaključak za hiperbolu?

Rješenje domaće zadaće:

Zadatak 1.

Hiperbolu na slici dobivamo rotacijom za 90 ° hiperbole kojoj središte leži u ishodištu koordinatnog sustava, a fokusi i realna os leže na osi apscisa, tj. rotacijom hiperbole čija je jednadžba $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Koordinatni sustav određujemo tako da se pravac koji prolazi fokusima hiperbole podudara s *y*-osi, a simetrala dužine čije su krajnje točke fokusi podudara se s *x*-osi. Zbog toga tjemena tražene hiperbole pripadaju *y*-osi, tj. realna os leži na osi ordinata. Ishodište *O(0,0)* koordinatnog sustava je središte hiperbole, fokusi zadane hiperbole su točke $F_1(0, -e)\ i\ F_2(0, e)$, a tjemena hiperbole su točke $A(0, -a)\ i\ B(0, a)$ (Slika 5.2.6.1).



Slika 5.2.6.1. *Jednadžba hiperbole kojoj je središte u ishodištu koordinatnog sustava, a realna os na y-osi*

Po definiciji hiperbole za točku T koja pripada hiperboli vrijedi da je apsolutna vrijednost razlike udaljenosti te točke od fokusa jednaka $2a$, odnosno zapisano matematičkim simbolima vrijedi

$$|d(F_1,T)-d(F_2,T)|=2a.$$

Koristeći formulu (5.1) prethodnu jednakost možemo napisati kao

$$\sqrt{x^2+(y+e)^2}-\sqrt{x^2+(y-e)^2}=\pm 2a.$$

Pribrojimo $-\sqrt{(y-e)^2+x^2}$ na obje strane pa dobivamo

$$\sqrt{x^2+(y+e)^2}=\pm 2a+\sqrt{x^2+(y-e)^2}\,.$$

Kvadriranjem dobivene jednakosti dalje je

$$(y+e)^2+x^2=4a^2\pm 4a\sqrt{(y-e)^2+x^2}+(y-e)^2+x^2,$$

odakle je primjenom formule kvadrata binoma

$$y^2+2ey+e^2+x^2=4a^2\pm 4a\sqrt{(y-e)^2+x^2}+y^2-2ey+e^2+x^2.$$

Pribrojimo $4a^2+y^2-2ey+e^2+x^2$ na obje strane pa dobivamo

$$4ey-4a^2=\pm 4a\sqrt{(y-e)^2+x^2}.$$

Dijeljenjem dobivene jednakosti s 4 dalje je

$$ey-a^2=\pm a\sqrt{(y-e)^2+x^2},$$

odakle je kvadriranjem obiju strana

$$e^2y^2-2ea^2y+a^4=a^2((y-e)^2+x^2).$$

Primjenom formule kvadrata binoma na prethodnu jednakost dobivamo

$$e^2y^2 - 2ea^2y + a^4 = a^2(y^2 - 2ey + e^2 + x^2),$$

odakle primjenom distributivnost na desnoj strani jednakosti slijedi

$$e^2y^2 - 2ea^2y + a^4 = a^2y^2 - 2ea^2y + a^2e^2 + a^2x^2.$$

Oduzmemo $a^2x^2 + a^2y^2 + a^4$ na obje strane pa dobivamo

$$e^2y^2 - a^2y - a^2x^2 = a^2e^2 - a^4,$$

odakle je

$$(\ e^2 - a^2)y^2 - a^2x^2 = a^2(e^2 - a^2)$$

Označimo $(e^2 - a^2) = b^2$ te uvrstimo u prethodnu jednakost pa dobivamo

$$b^2y^2 - a^2x^2 = a^2b^2,$$

odakle dijeljenjem s a^2b^2 slijedi

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

Hiperbola kojoj središte leži u ishodištu koordinatnog sustava, a realna os leži na osi ordinata, ima jednadžbu

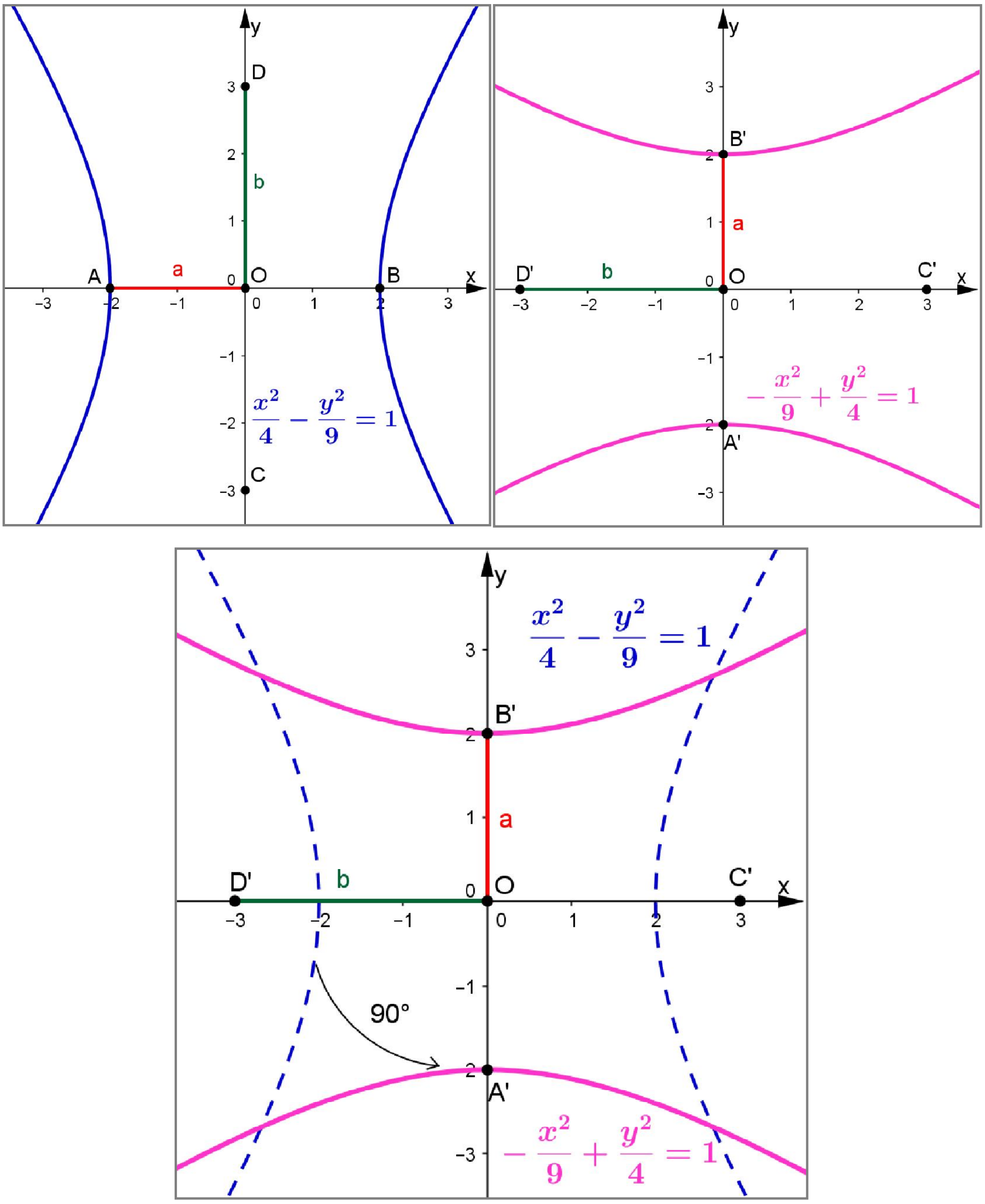
$$b^2y^2 - a^2x^2 = a^2b^2,$$

odnosno

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

koju nazivamo kanonska jednadžba hiperbole.

Npr., hiperbolu čija je jednadžba $-\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, dobit ćemo rotacijom hiperbole čija je jednadžba $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ za 90 ° (Slika 5.2.6.2).



Slika 5.2.6.2. *Hiperbola* $-\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ *dobivena rotacijom hiperbole* $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$ za 90 °

Zadatak 2.

Tjemena zadane hiperbole su točke $A(0,-a)$ i $B(0,a)$. Iz dane jednadžbe hiperbole uočimo kako je $a^2=9$. Iz toga slijedi da je duljina realne poluosi jednaka 3 pa su tjemena hiperbole točke $A(0,-3)$ i $B(0,3)$. Žarišta hiperbole su točke $F_1(0,-e), F_2(0,e)$

pa moramo odrediti linearni ekscentricitet hiperbole. Već smo rekli kako je $a^2 = 9$ te iz dane jednadžbe hiperbole uočimo kako je $b^2 = 16$ te uvrstimo dobivene vrijednosti u $a^2 + b^2 = e^2$. Iz toga slijedi

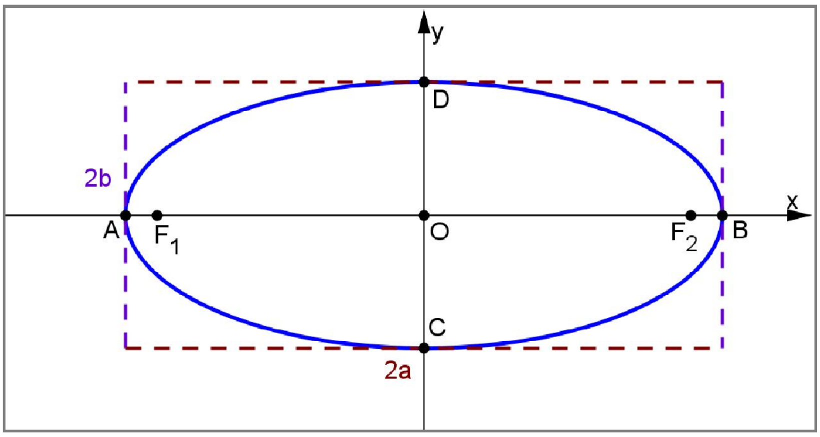
$$e^2 = 9 + 16, \text{ odnosno}$$

$$e^2 = 25.$$

Kako je linearni ekscentricitet pozitivan broj, slijedi da je $e = 5$ pa su žarišta hiperbole točke $F_1(0, -5), F_2(0,5)$.

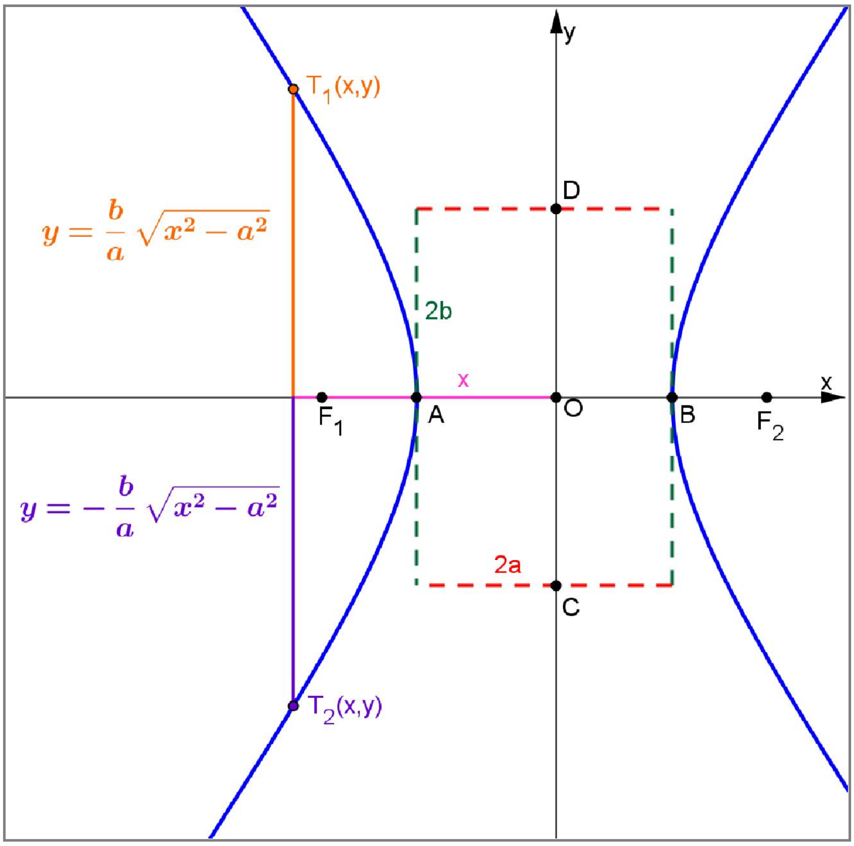
Zadatak 3.

Pravokutnik sa stranicama duljina *2a* i *2b* paralelnih s osima i središtem u središtu elipse potpuno obuhvaća elipsu (Slika 5.2.6.3).



Slika 5.2.6.3. *Elipsa*

Pravokutnik sa stranicama duljina *2a* i *2b* paralelnih s osima i središtem u središtu hiperbole ne obuhvaća hiperbolu. Naime, za ma kako veliku apsolutnu vrijednost apscise *x* neke točke *T(x,y)* hiperbole može se odrediti ordinata te točke pomoću formule $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{(x^2 - a^2)}$ (Slika 5.2.6.4).



Slika 5.2.6.4. *Hiperbola*

Zaključak

Cilj diplomskog rada je utvrditi povezanost situacijskog i osobnog interesa s usvajanjem koncepata hiperbola. Na temelju rezultata provedenog istraživanja u trećim razredima opće gimnazije možemo zaključiti da ispitani učenici u prosjeku imaju relativno nizak interes, kako za matematiku općenito, tako i za analitičku geometriju i hiperbolu specifično, jer su aritmetičke sredine na sve tri varijable manje od teorijske sredine korištene ljestvice (3). Možemo uočiti i da su rezultati na sve tri skale interesa u vrlo visokim korelacijama, što ukazuje na to da su učenici u trenutku provođenja istraživanja imali usklađen situacijski interes za nastavne sadržaje koje su upravo obrađivali sa svojim osobnim interesom za matematiku.

Rezultati također ukazuju da su različiti aspekti interesa značajno povezani, kako s prethodnom ocjenom iz matematike, tako i s očekivanom ocjenom iz testa iz analitičke geometrije i iz matematike općenito. U skladu s očekivanjima, prethodna ocjena iz matematike ipak je snažnije povezana s osobnim interesom za matematiku nego sa situacijskim interesom.

Dobiveni rezultati ukazuju da nisu svi zadaci podjednako povezani s interesom za matematiku. Prvi i drugi zadatak značajno su povezani i s osobnim interesom za matematiku, kao i sa situacijskim interesom za analitičku geometriju i hiperbolu. Odnosno, učenici koji imaju veći interes za hiperbolu i matematiku bili su uspješniji u rješavanju tih zadataka. Treći zadatak nije značajno povezan s interesom što se moglo i pretpostaviti obzirom da se radi o zadatku složenog višestrukog izbora pa je većina učenika pokušala riješiti zadatak. Četvrti zadatak je povezan samo sa situacijskim interesom za hiperbolu.

Rezultati istraživanja vode ka zaključku da se u nastavi matematike treba primijenjivati aktivno učenje koje bi učenicima pomoglo u boljem razumijevanju matematičkih koncepata. Također, je potrebno uvoditi promjene u nastavnom procesu kroz nove metode poučavanja. Učenike treba poticati da iznose svoja mišljenja i stavove, da budu samokritični, te da više uče putem otkrića, rješavanja problema, te raznih sekvenci aktivnog učenja.

Literatura

1. L. Cohen, L. Manion, K. Morrison, *Research methods in education*, Routledge, New York, 2005.

2. B. Dakić, N. Elezović, *Matematika 3, 2.dio*, Element, Zagreb, 2008.

3. D. Garašić, Ž. Lukša, I. Radanović, *Konceptualni pristup poučavanju uz definiranje makrokonceptnog okvira za biologiju,* Život i škola, 30 (2013.), 156.-171

4. S. Hidi, K. Ann Renninger, *The Four-Phase Model of Interest Development,* Educational psychologist, 41 (2006), 111–127.

5. R. Pahljina-Reinić, *Interes, učenje i postignuće*, Psihologijske teme, 23 (2014), 3, 461-480.

6. V. M. Petrović, *Dva određenja pojmovne promene: teorija koherencije i teorija elemenata*, Psihološka istraživanja, 16 (2013), 29-55.

7. A. Svedružić, *Razvoj interesa u konstruktivističkoj nastavi fizike*, Život i škola, 27 (2012), 134. – 152.

8. Š.Šuljić, *Čunjosječnice*, Matematika i škola, 11 (2001), 42-45.

9. S.Vosniadou, *International Handbook of Research on Conceptual Change*, Routledge, New York, 2013.

10. S. Vosniadou, *Examining cognitive development from a conceptual change point of view: The framework theory approach*, European Journal of Developmental Psychology, 11 (2014), 645-661.

11. Nacionalni okvirni kurikulum za predškolski odgoj i obrazovanje te opće obvezno i srednjoškolsko obrazovanje, Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa, dostupno na: http://www.azoo.hr/images/stories/dokumenti/Nacionalni_okvirni_kurikulum.pdf (travanj, 2015.)

12. Nastavni plan i program za gimnaziju, Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa, dostupno na: http://dokumenti.ncvvo.hr/Nastavni_plan/gimnazije/obvezni/matematika.pdf (travanj, 2015.)

Sažetak

Matematika se ubraja među teže nastavne predmete jer zahtijeva neprekidan i konstantan rad, trud te puno uloženog vremena. Potrebno je učenike poticati na učenje kako bi ostvarili bolje akademske rezultate, a jedan od načina je potaknuti interes učenika za matematiku. Interes pozitivno utječe na pažnju i učenje te ga potiču različiti čimbenici kao što je prethodno znanje, neočekivan i zanimljiv sadržaj ili tekst.

Cilj diplomskog rada bio je utvrditi povezanost situacijskog i osobnog interesa s usvajanjem koncepta hiperbola. U tu svrhu je provedeno istraživanje u trećim razredima opće gimnazije. Učenici su ispunjavali upitnike kojima je ispitan interes učenika za matematiku općenito, analitičku geometriju i temu hiperbola te je dio učenika rješavao ispit iz matematike sa zadacima vezanim uz hiperbolu.

Prema rezultatima istraživanja možemo zaključiti da ispitani učenici u prosjeku imaju relativno nizak interes, kako za matematiku općenito, tako i za analitičku geometriju i hiperbolu specifično te da su učenici u trenutku provođenja istraživanja imali usklađen situacijski interes za nastavne sadržaje koje su upravo obrađivali sa svojim osobnim interesom za matematiku. Rezultati također ukazuju da su različiti aspekti interesa značajno povezani, kako s prethodnom ocjenom iz matematike, tako i s očekivanom ocjenom iz testa iz analitičke geometrije i iz matematike općenito.Također, rezultati pokazuju kako nisu svi zadaci podjednako povezani s interesom za matematiku, odnosno čini se kako interes ima važnu ulogu u zadacima koji zahtijevaju veću kognitivnu uključenost učenika.

Ključne riječi: situacijski i osobni interes, koncept, hiperbola

Summary

Maths belongs to more difficult subject because it requires constant and continuous hard work and lot of invested time. Students should be encouraged to learn to achieve better academic results and one way is to stimulate student's interest in mathematics. Interes has a positive impact on attention and learning and it's sparked by different factors such as prior knowledge, unexpected and interesting content or text.

The goal of this thesis was to establish connection of situational and individual interest with learning maths concepts, especiall with learning the concept of hyperbole. For that purpose, a research was conducted in the third grades of general gymnasium. Students were asked to complete questionnaires which tested student´s interest in mathematics in general, analytic geometry and the theme of hyperbole. Also part of the students solved math test with tasks related to hyperbole.

According to the research, we can conclude that tested students have relatively low interest, both for mathematics in general, and for analytic geometry and hyperbolic specific and that the students at the time of the study had coordinated situational interest in the educational content that they have just dealt with their individual interest in mathematics. Results also show that different aspects of interest substantially connected to the previous grade in mathematics, and with the expected grade of the test from analytical geometry and of mathematics in general. Also, the results show that not all tasks are equally related to the interest in mathematics, and it appears that interest has an important role in tasks that require greater cognitive involvement of students.

Key words: situational and individual interest, concept, hyperbole

Životopis

Rođena sam 01.07.1982. u Splitu gdje sam završila osnovnu i srednju školu. Pohađala sam osnovnu školu "Petar Kružić" u Klisu i završila ju 1997. godine. Potom sam upisala opću gimnaziju "Marko Marulić" u Splitu gdje sam maturirala 2001. godine. Iste godine upisala sam studij fizike na PMF-u, a 2002. prebacila sam se na matematički odsjek gdje sam upisala studij matematike te nisam diplomirala. Preddiplomski studij matematike nastavničkog usmjerenja na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu upisala sam 2013. godine, nakon čega sam 2014. godine upisala diplomski studij matematike čijom ću diplomom steći zvanje magistra edukacije matematike.

Prilozi

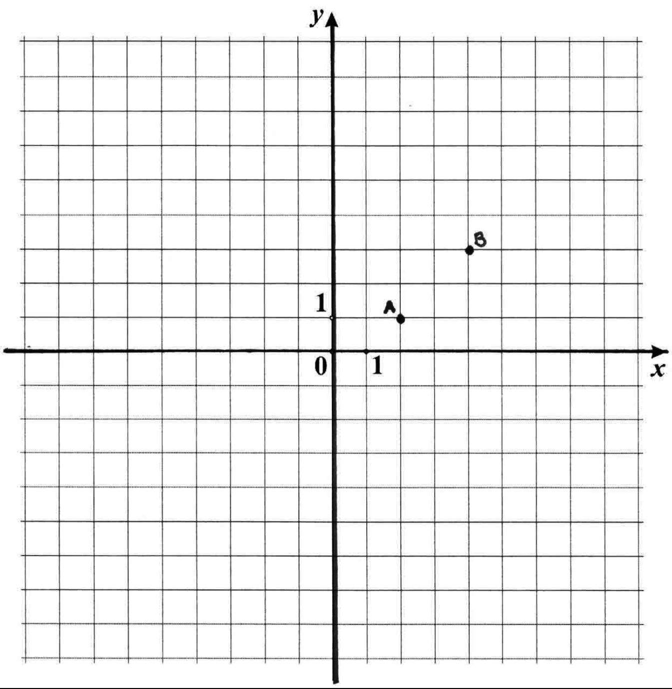
Upitnik s matematičkim zadacima vezanim uz hiperbolu

Ime i prezime:		**Razred:**	
Škola:			

ZADATAK 1. Hiperbola je zadana jednadžbom $9x^2 - 4y^2 - 36 = 0$.

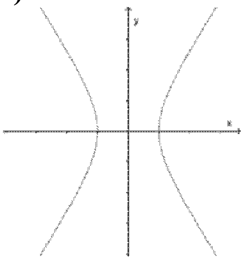
a) Odredi koordinate tjemena te hiperbole.
b) Odredi koordinate žarišta te hiperbole.
c) Odredi jednadžbe asimptota te hiperbole.

ZADATAK 2. U koordinatnoj ravnini dane su točke A i B. U istoj koordinatnoj ravnini nacrtaj skup svih točaka T za koje je $|TA| - |TB| = 2$. Ne moraš odrediti jednadžbu tog skupa točaka.

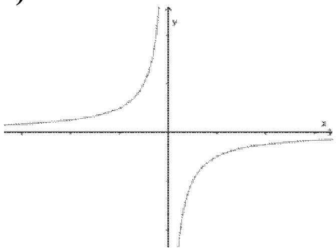


ZADATAK 3. Zaokruži slovo ispred svih slika na kojima je prikazana hiperbola.

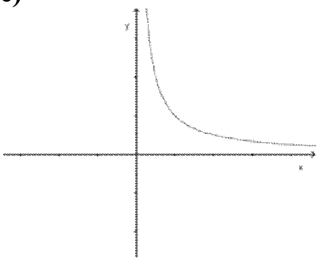
a)



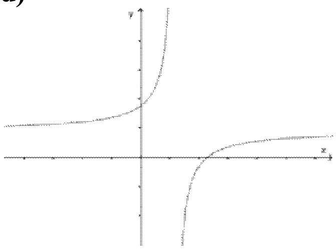
b)



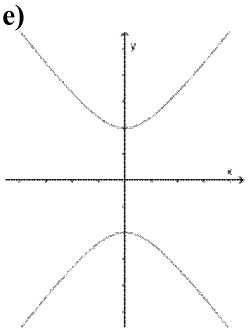
c)



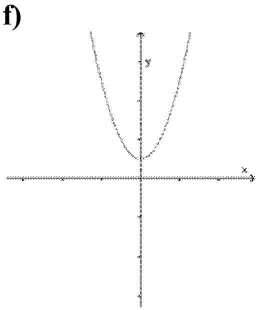
d)



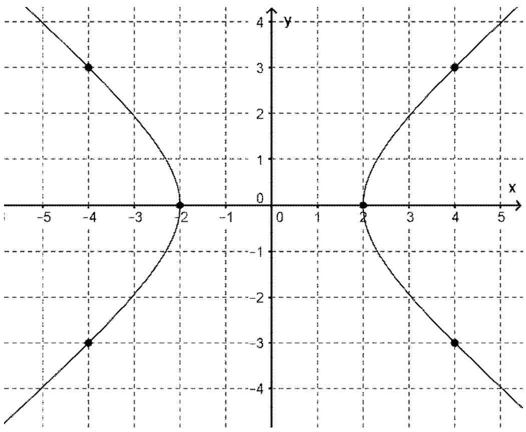
e)



f)



ZADATAK 4. Na slici je hiperbola i istaknute su neke njene točke s cjelobrojnim koordinatama.Odredi jednadžbu te hiperbole.



Prilog 2 . Kvalitativna analiza rezultata upitnika s matematičkim zadacima vezanim uz hiperbu

ZADATAK 1. a - KVALITATIVNA ANALIZA PODATAKA						
VARIJABLA		**OBJAŠNJENJE KODA**	**M**	**Ž**	**N**	**Ukupno**
Točnost rješenja	11	Korektnim postupkom točno su određene koordinate (realnih) tjemena hiperbole. Iz dane jednadžbe hiperbole određena je duljina realne poluosi hiperbole, a zatim tjemena hiperbole kao točke (*a*, 0) i (- *a*, 0, gdje je *a* duljina realne poluosi hiperbole.	9	8	1	18
	12	Korektnim postupkom točno su određene koordinate (realnih) tjemena hiperbole. Tjemena hiperbole su točke (-*x*, 0), (*x*, 0) čije su koordinate uvrštene u jednadžbu hiperbole kako bi se odredile *x*-koordinate tjemena hiperbole.	0	1	0	1
	13	Točno su napisane koordinate (realnih) tjemena hiperbole bez prikazanog postupka.	1	0	0	1
	21	Započeto rješavanje zadatka. Točno je napisan kanonski oblik jednadžbe hiperbole bez daljneg rješavanja zadatka.	3	0	0	3
	22	Započeto rješavanje zadatka. Točno je napisana jednadžba $a^2 = 4$, ali nije određena duljina realne poluosi niti koordinate tjemena hiperbole.	0	1	0	1
	23	Započeto rješavanje zadatka. Točno je određena duljina realne poluosi hiperbole, ali nisu određene koordinate tjemena hiperbole.	8	7	0	15
	31	Pogrešno riješen zadatak. Pogrešno je napisana jednadžba $a^2 = -4.$	0	2	0	2
	32	Pogrešno riješen zadatak.Određene su koordinate realnih i imaginarnih tjemena hiperbole.	2	8	0	10
	33	Pogrešno riješen zadatak. Pogrešno je napisana jednadžba $a^2 = 9$ i određene su koordinate tjemena hiperbole kao točke $(-\sqrt{13},0),(\sqrt{13},0)$	0	1	0	1
	34	Pogrešno riješen zadatak. Jednadžba hiperbole $9x^2 - 4y^2 - 36 = 0$ je zamijenjena s kvadratnom jednadžbom $ax^2 + bx + c = 0$ te su duljine poluosi *a* i *b* napisane kao koeficijenti *a* i *b* iz kvadratne jednadžbe.	0	3	0	3
	9	Nesuvisao ili izbrisan pokušaj rješavanja zadatka.	0	3	0	3
	0	Prazno, ništa nije napisano.	5	9	0	14
Kanonski oblik jednadžbe hiperbole	11	Hiperbola zadana jednadžbom $9x^2 - 4y^2 - 36 = 0$ točno je svedena na kanonski oblik $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1.$	16	21	0	37
	31	Hiperbola zadana jednadžbom $9x^2 - 4y^2 - 36 = 0$ pogrešno je svedena na kanonski oblik.	0	1	0	1
		Zadana hiperbola nije napisana u kanonskom obliku	7	9	1	17

ZADATAK 1. b - KVALITATIVNA ANALIZA PODATAKA						
VARIJABA	**KOD**	**OBJAŠNJENJE KODA**	**M**	**Ž**	**N**	**Ukupno**
Točnost rješenja	11	Korektnim postupkom točno su određene koordinate žarišta hiperbole. Iz dane jednadžbe hiperbole određene su duljine poluosi hiperbole, linearni ekscentricitet hiperbole pomoću formule $e^2 = a^2 + b^2$ te koordinate žarišta kao točke (*e*, 0) i (- *e*, 0).	14	14	1	29
	12	Točno su napisane koordinate žarišta hiperbole bez prikazanog postupka.	2	0	0	2
	21	Započeto rješavanje zadatka. Točno je napisan kanonski oblik jednadžbe hiperbole bez daljneg rješavanja zadatka.	3	0	0	3
	22	Započeto rješavanje zadatka. Točno su napisane jednadžbe $a^2 = 4$, $b^2 = 9$ i $e^2 = a^2 + b^2$ bez daljneg rješavanja zadatka.	0	1	0	1
	23	Započeto rješavanje zadatka. Točno su određene duljine poluosi hiperbole bez daljneg rješavanja zadatka.	1	0	0	1
	24	Započeto rješavanje zadatka. Napisana je jednadžba $e^2 = 13$ bez daljneg rješavanja zadatka.	1	4	0	5
	25	Započeto rješavanje zadatka. Točno je određen linearni ekscentricitet hiperbole bez daljneg rješavanja zadatka.	2	3	0	5
	31	Pogrešno riješen zadatak. Korištena je formula $e^2 = b^2 - a^2$ za određivanje linearnog ekscentriciteta pa su pogrešno određene koordinate žarišta hiperbole.	0	1	0	1
	32	Pogrešno riješen zadatak. Određene su koordinate žarišta hiperbole kao točke $(-\sqrt{13},0), (0,\sqrt{13})$.	0	1	0	1
	33	Pogrešno riješen zadatak. Određene su koordinate žarišta hiperbole kao točke (13,0) i (-13,0).	0	1	0	1
	34	Pogrešno riješen zadatak. Napisano je jednadžba $a^2 = -4$ pa su pogrešno određeni linearni ekscentricitet i koordinate žarišta hiperbole.	0	1	0	1
	35	Pogrešno riješen zadatak. Napisane su jednadžbe $a^2 = -4$, $b^2 = 9$ te je uvštavanjem u formulu $e^2 = b^2 + a^2$ određeno kako je $e^2 = 13$ te nisu određene koordinate žarišta hiperbole.	0	1	0	1
	36	Pogrešno riješen zadatak. Pogrešno je napisana jednadžba $a^2 = 9$ i $b^2 = 4$ te je uvštavanjem u formulu $e^2 = b^2 + a^2$ određen linearni ekscentricitet te nisu određene koordinate žarišta.	0	1	0	1
	37	Pogrešno riješen zadatak. Jednadžba hiperbole $9x^2 - 4y^2 - 36 = 0$ zamijenjena je s kvadratnom jednadžbom $ax^2 + bx + c = 0$ te su duljine poluosi *a* i *b* napisane kao koeficijenti *a* i *b* iz kvadratne jednadžbe.	0	3	0	3
	9	Nesuvisao ili izbrisan pokušaj rješavanja zadatka.	0	3	0	3
	0	Prazno, ništa nije napisano.	5	9	0	14

ZADATAK 1. c) - KVALITATIVNA ANALIZA PODATAKA						
VARIJABLA	**KOD**	**OBJAŠNJENJE KODA**	**M**	**Ž**	**N**	**Ukupno**
Točnost rješenja	11	Korektnim postupkom točno su određene jednadžbe asimptota hiperbole. Iz dane jednadžbe hiperbole određene su duljine poluosi hiperbole te su određene jednadžbe asimptota kao pravci $y=\pm\frac{b}{a}$ gdje su a i b duljine poluosi hiperbole.	15	18	1	34
	12	Točno su napisane jednadžbe asimptota bez prikazanog postupka.	2	0	0	2
	21	Započeto rješavanje zadatka. Točno je napisan kanonski oblik jednadžbe hiperbole bez daljneg rješavanja zadatka.	3	0	0	3
	22	Započeto rješavanje zadatka. Točno su napisane jednadžbe $a^2=4\ i\ b^2=9$ bez daljneg rješavanja zadatka.	0	1	0	1
	23	Započeto rješavanje zadatka. Točno su određene duljine poluosi hiperbole bez daljneg rješavanja zadatka.	0	2	0	2
	31	Pogrešno riješen zadatak. Točno su određene duljine poluosi hiperbole te su asimptote hiperbole određene kao pravci $y=\pm\frac{b}{a}$, ali su pogrešno uvrštene duljine poluosi.	1	0	0	1
	32	Pogrešno riješen zadatak. Točno su određene asimptote hiperbole kao pravci $y=\pm\frac{b}{a}$, ali su pogrešno određene duljine poluosi hiperbole.	0	1	0	1
	33	Pogrešno riješen zadatak. Točno su određene duljine poluosi hiperbole, ali je određena samo jedna asimptota hiperbole, pravac.$y=\frac{b}{a}$.	1	0	0	1
	34	Pogrešno riješen zadatak. Asimptote hiperbole su pravci $y=\frac{9}{4}\ i\ y=-\frac{9}{4}$	0	3	0	3
	35	Pogrešno riješen zadatak. Asimptote hiperbole su pravci $y=\frac{b}{a}\ i\ \frac{a}{b}$.	1	0	0	1
	36	Pogrešno riješen zadatak. Pogrešno su napisane jednadžbe $a^2=9$ i $b^2=4$ i asimptote hiperbole su pravci $y=\pm\frac{2}{3}$	0	1	0	1
	37	Pogrešno riješen zadatak. Pogrešno su napisane jednadžbe $a^2=-4\ i\ b^2=9$, i asimptote hiperbole su pravci, $y=\pm\frac{3}{2}$	0	2	0	2
	38	Pogrešno riješen zadatak. Jednadžba hiperbole $9x^2-4y^2-36=0$ zamijenjena je s kvadratnom jednadžbom $ax^2+bx+c=0$ te su duljine poluosi a i b napisane kao koeficijenti a i b iz kvadratne jednadžbe.	0	3	0	3
	9	Nesuvisao ili izbrisan pokušaj rješavanja zadatka.	0	3	0	3
	0	Prazno, ništa nije napisano.	5	9	0	14

ZADATAK 1. - KVALITATIVNA ANALIZA PODATAKA						
VARIJABLA	**KOD**	**Objašnjenje koda**	**M**	**Ž**	**N**	**Ukupno**
Skica	11	Na skici je korektno i precizno nacrtan koordinatni sustav	2	2	2	4
	12	Na skici su korektno i precizno označena tjemena hiperbole	1	2	0	3
	13	Na skici su korektno i precizno označena imaginarna tjemena hiperbole	1	1	0	2
	14	Na skici su korektno i precizno označeni fokusi hiperbole	1	0	0	1
	15	Na skici su korektno i precizno nacrtane asimptote hiperbole	1	0	0	1
	16	Na skici je pokraj asimptota napisana odgovarajuća jednadžba asimptote	1	0	0	1
	17	Na skici je korektno i precizno nacrtana hiperbola	2	1	0	3
	9	Izbrisan pokušaj rješavanja zadatka.	0	0	0	0
	0	Prazno, ništa nije nacrtano.	26	41	1	68

ZADATAK 2. - KVALITATIVNA ANALIZA PODATAKA-						
VARIJABLA	**KOD**	**Objašnjenje koda**	**M**	**Ž**	**N**	**Ukupno**
Točnost rješenja	11	Korektnim postupkom točno je riješen zadatak.	0	0	0	0
	21	Započeto rješavanje zadatka. Napisane koordinate točaka A i B.	1	5	0	6
	22	Započeto rješavanje zadatka. Algebarskom metodom određivana jednadžba zadanog skupa točaka.	0	2	0	2
	23	Započeto rješavanje zadatka. Korištena pretpostavka kako je navedeni skup točaka hiperbola te je određena duljina realne polusi *a*.	0	1	0	1
	31	Pogrešno riješen zadatak. Nacrtana hiperbola.	6	2	0	8
	9	Nesuvisao ili izbrisan pokušaj rješavanja zadatka.	3	6	0	9
	0	Prazno, ništa nije napisano.	18	27	1	46
Hiperbola	31	Nacrtana hiperbola kojoj su točke A i B fokusi.	1	0	0	1
	32	Nacrtana hiperbola kojoj su točke A i B tjermena.	2	0	0	2
	33	Nacrtana hiperbola kojoj su točke A i B tjemena, a hiperbola izgleda kao dvije parabole.	3	0	0	3
	34	Nacrtana parabola $y^2 = 2px$ koja prolazi točkama A i B, a tjeme joj pripada x- osi.	1	1	0	2
	35	Nacrtana hiperbola koja prolazi točkama A i B, a tjemena su joj na pravcu y= -1	0	2	0	2
	9	Nesuvisao ili izbrisan pokušaj crtanja	1	3	0	4
	0	Prazno, ništa nije nacrtano.	20	37	1	58

ZADATAK 3 - KVALITATIVNA ANALIZA PODATAKA-							
VARIJABLA		**KOD**	**Objašnjenje kodova**	**M**	**Ž**	**N**	**Ukupno**
Točnost rješenja	a)	1	Točno riješen zadatak.	26	40	1	67
		3	Netočno riješen zadatak.	1	1	0	2
	b)	1	Točno riješen zadatak.	18	30	1	49
		3	Netočno riješen zadatak.	9	11	0	20
	c)	1	Točno riješen zadatak.	27	41	1	69
		3	Netočno riješen zadatak.	0	0	0	0
	d)	1	Točno riješen zadatak.	11	20	1	32
		3	Netočno riješen zadatak.	16	21	0	37
	e)	1	Točno riješen zadatak.	21	39	1	61
		3	Netočno riješen zadatak.	6	2	0	8
	f)	1	Točno riješen zadatak.	27	39	1	67
		3	Netočno riješen zadatak.	0	2	0	2
		9	Učenik je zaokružio svih šest ponuđenih odgovora.	1	1	0	2
		0	Učenik nije zaokružio niti jedan od ponuđenih odgovora.	0	1	0	1

ZADATAK 4. - KVALITATIVNA ANALIZA PODATAKA						
VARIJABLA	**KOD**	**Objašnjenje kodova**	**M**	**Ž**	**N**	**Ukupno**
Točnost rješenja	11	Korektnom algebarskom metodom točno je određena jednadžba hiperbole. Koordinate dviju točaka uvštene su u jednadžbu hiperbole te se rješavanjem sustava dviju jednadžbi s dvije nepoznanice odrede duljine poluosi hiperbole kako bi se odredila jednadžba tražene hiperbole.	1	1	0	2
	12	Korektnim postupkom točno je određena jednadžba hiperbole .Na slici se uoči kako je realna poluos duljine 2 te se u jednadžbu hiperbole uvrsti duljinu realne poluosi i koordinate jedne od točaka koje leže u kvadrantima kako bi se odredila duljinu imaginarne poluosi. Zatim se odredi jednadžba tražene hiperbole.	4	1	0	5
	21	Započeto rješavanje zadatka.Napisana opća jednadža hyperbole $b^2x^2 - a^2y^2 = 1$ bez daljnjeg rješavanja zadatka.	0	3	0	3
	22	Započeto rješavanje zadatka.Napisana opća jednadža hiperbole $b^2x^2 - a^2y^2 = 1$te određena duljina realne poluosi.	1	0	0	1
	31	Pogrešno riješen zadatak .Napisana opća jednadža elipse $b^2x^2 - a^2y^2 = 1$ bez daljnjeg rješavanja zadatka.	0	2	0	2
	32	Pogrešno riješen zadatak . Prilikom rješavanja sustava dviju jednadžbi s dvije nepoznanice, učinjenja greška prilikom određivanja nepoznanice b	1	1	0	2
	33	Pogrešno riješen zadatak. Točno je određena duljina realne poluosi hiperbole, ali je korištena pogrešna pretpostavka kako je duljina imaginarne polusi jednaka 3.	9	8	1	18
	34	Pogrešno riješen zadatak. Točno je određena duljina realne poluosi hiperbole, ali je korištena pogrešna pretpostavka kako je duljina imaginarne polusi jednaka 3 te je korištena jednadžba elipse.	1	3	0	4
	35	Pogrešno riješen zadatak. Točno je određena duljina realne poluosi hiperbole, ali je korištena pogrešna pretpostavka kako je duljina imaginarne polusi jednaka 2.	1	0	0	1
	36	Pogrešno riješen zadatak. Točno je određena duljina realne poluosi hiperbole, ali je korištena pogrešna pretpostavka kako je linearni ekscentricitet jednak 4.	1	6	0	7
	37	Pogrešno riješen zadatak. Točno je određena duljina realne poluosi hiperbole, ali su korištene pogrešne pretpostavka kako je duljina imaginarne polusi jednaka 3 i kako je linearni ekscentricitet jednak 4.	0	3	0	3
	9	Nesuvisao ili izbrisan pokušaj rješavanja zadatka.	1	3	0	4
	0	Prazno.	8	12	0	20

ZADATAK 4. - KVALITATIVNA ANALIZA PODATAKA						
VARIJABLA	**KOD**	**Objašnjenje kodova**	**M**	**Ž**	**N**	**Ukupno**
Slika	11	Na slici korektno i precizno označena realna tjemena	1	2	0	3
	12	Na slici korektno i precizno pridružene koordinate svih točka u kvadrantima.	1	2	0	3
	13	Na slici korektno i precizno pridružene koordinate jedne od točaka u kvadrantima.	2	0	0	2
	14	Na slici korektno i precizno označna duljina realne poluosi.	5	6	0	11
	31	Na slici neprecizno nacrtane asimptote.	1	2	0	3
	32	Na slici netočno nacrtane asimptote kao pravci koji ne prolaze kroz ishodište.	0	1	0	1
	33	Na slici neprecizno nacrtana jedna asimptota, pravac $y = \frac{b}{a}$	0	1	0	1
	34	Na slici označeno kako je duljina imaginarne polusi jednaka 3.	2	5	0	7
	35	Na slici označena imaginarna tjemena kao točke (0,3) i (0,-3).	0	1	0	1
	36	Na slici označen jedan od fokusa kao točka (-4,0).	0	1	0	1
	37	Na slici označen linearni ekscentricitet kao duljina dužine kojoj su krajnje točke točke (2,0) i (0,3)	0	1	0	1
	9	Izbrisan pokušaj rješavanja zadatka.	0	0	0	0
	0	Prazno.	23	28	1	52

Prilog 3.

Powerpoint prezentacija: Hiperbola oko nas

Alat dinamičke geometrije:

- translacija hiperbole i parametar hiperbole.ggb
- translacija elipse i parametar hiperbole.ggb
- porijeklo imena konika.ggb
- prvi sat aktivnost *2. crtanje hiperbole pomoću ravnala i konca*.ggb
- prvi sat aktivnost *Otkrij vezu između točaka hiperbole i fiksnih točaka*.ggb
- prvi sat aktivnost *Otkrij vezu između* $|F_1F_2|$ i $|r_1 - r_2|$.ggb
- prvi sat aktivnost *Crtaj hiperbolu*.ggb
- prvi sat domaća zadaća.ggb
- drugi sat aktivnost *Otkrij osi simetrije hiperbole*.ggb
- drugi sat aktivnost *Hiperbola u koordinatnom sustavu*.ggb
- drugi sat aktivnost *Otkrij koordinate istaknutih točaka hiperbole*.ggb
- drugi sat aktivnost *Otkrijmo jednadžbu hiperbole*.ggb
- drugi sat aktivnost *Otkrij elemente hiperbole*.ggb
- drugi sat domaća zadaća.ggb