Izračunljivi metrički prostori

Kuruc, Anita

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Anita Kuruc

IZRAČUNLJIVI METRIČKI PROSTORI

Diplomski rad

Voditelj rada:
Doc.dr.sc. Zvonko Iljazović

Zagreb, rujan, 2015.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Tebi na ponos...

Sadržaj

Uvod

Teorija izračunljivosti, koja uključuje teoriju rekurzivnih funkcija, je grana matematičke logike i teorijskog računalstva. Nastala je tridesetih godina prošlog stoljeća proučavanjem izračunljivih funkcija i Turingovih strojeva.
Iako teorija izračunljivosti pokriva veliko područje znanosti, u ovom diplomskom radu ograničiti ćemo se na izračunljivost na skupu prirodnih brojeva, na skupu racionalnih brojeva, na skupu realnih brojeva pa sve do izračunljivosti metričkog prostora. Između ostalog baviti ćemo se pojmom struktura izračunljivosti i pojmom linearne metrike.
Svi pojmovi korišteni u radu precizno su definirani, a sve tvrdnje iskazane u radu su detaljno dokazane.

Poglavlje 1

Rekurzivne funkcije $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$

1.1 Inicijalne funkcije

Neka su $z, s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcije definirane sa $z(x) = 0$, $s(x) = x+1$, za svaki $x \in \mathbb{N}$. Nadalje, za $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i $j \in \{1, \ldots, n\}$ neka je $I_j^n : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ projekcija na j-tu koordinatu, to jest funkcija definirana sa

$$I_j^n(x_1, \ldots, x_n) = x_j.$$

Za funkcije z, s, I_j^n, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i $j \in \{1, \ldots, n\}$ kažemo da su **incijalne funkcije**. Neka su $n, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka su $g_1, g_2, \ldots, g_n : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ i $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$. Definiramo funkciju $h : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ sa

$$h(x) = f(g_1(x), \ldots, g_n(x)).$$

Tada za h kažemo da je **dobivena kompozicijom** funkcija $f, g_1, \ldots, g_n$.

Primjer 1.1.1. *1. Neka je $g : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa $g(a, b, c) = a + 1$. Vrijedi*

$$g(a, b, c) = s(I_1^3(a, b, c))$$

dakle g je kompozicija funkcija s i I_1^3.

2. Neka je $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ te neka je $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa $h(x, y) = f(y, x)$. Tada je

$$h(x, y) = f(I_2^2(x, y), I_1^2(x, y)).$$

Prema tome, h je dobivena kompozicijom funkcija f, I_2^2, I_1^2.

Neka je $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka su $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ i $g : \mathbb{N}^{n+2} \to \mathbb{N}$ funkcije. Definiramo $h : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ na sljedeći način. Neka su $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{N}$. Definiramo $h(y, x_1, \ldots, x_n)$ induktivno po y. Neka je

$$h(0, x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n).$$

Pretpostavimo da smo definirali $h(y, x_1, \ldots, x_n)$ za neki $y \in \mathbb{N}$. Definiramo

$$h(y + 1, x_1, \ldots, x_n) = g(h(y, x_1, \ldots, x_n), y, x_1, \ldots, x_n).$$

Tada za h kažemo da je **dobivena primitivnom rekurzijom** od funkcija f i g.

Primjer 1.1.2. *Neka je $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa $h(y, x) = y + x$. Vrijedi:*

$$h(0, x) = x,$$

$$h(y + 1, x) = y + 1 + x = (y + x) + 1 = h(y, x) + 1.$$

Neka je $g : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa $g(a, b, c) = a + 1$. Tada je:

$$h(0, x) = I_1^1(x),$$

$$h(y + 1, x) = g(h(y, x), y, x).$$

Iz ovoga zaključujemo da je h dobivena primitivnom rekurzijom od funkcija I_1^1, g.

Primjer 1.1.3. *Neka je $v : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa $v(y, x) = x \cdot y$. Imamo:*

$$v(0, x) = 0 = z(x),$$

$$v(y + 1, x) = (y + 1) \cdot x = y \cdot x \ + x = g(v(y, x), y, x)$$

gdje je $g : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ definirana sa $g(a, b, c) = a + c$. Dakle, $v(0, x) = z(x)$, $v(y + 1, x) = g(v(y, x), y, x)$. Prema tome, v je dobivena primitivnom rekurzijom od funkcija z i g. Neka je h funkcija iz primjera 1.1.2. Tada je

$$g(a, b, c) = h(a, c) = h(I_1^3(a, b, c), I_3^3(a, b, c))$$

za sve $a, b, c \in \mathbb{N}$. Dakle, g je dobivena kompozicijom funkcija h, I_1^3, I_3^3.

Neka je $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je $g : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ funkcija takva da za sve $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{N}$ postoji $y \in \mathbb{N}$ takav da je $g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$. Definiramo funkciju $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ sa $f(x_1, \ldots, x_n, y) = \min\{y \in \mathbb{N} \mid g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0\}$. Za funkciju f kažemo da je **dobivena primjenom** μ *− operatora* na funkciju g. Broj $\min\{y \in \mathbb{N} \mid g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0\}$ označavamo sa $\mu y(g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0)$. Dakle,

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \mu y(g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0)$$

Primjer 1.1.4. *Neka je $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$,*

$$g(x, y) = |x - y|.$$

Uočimo da za svaki $x \in \mathbb{N}$ postoji $y \in \mathbb{N}$ takav da je $g(x, y) = 0$. Neka je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcija dobivena primjenom μ − operatora na funkciju g. Tada je

$$f(x) = \mu y(g(x, y) = 0) = x.$$

Definicija 1.1.5. *Definirajmo niz skupova $\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_p, \dots$ induktivno na sljedeći način. Neka je $\mathcal{R}_0$ skup svih inicijalnih funkcija. Pretpostavimo da smo definirali $\mathcal{R}_p$ za neki $p \in \mathbb{N}$. Tada definiramo $\mathcal{R}_{p+1}$ kao skup svih funkcija h koje zadovoljavaju jedno od četiri sljedeća svojstva*

1. *Postoji $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i funkcije $f, g_1, \dots, g_n \in \mathcal{R}_p$ tako da je h dobivena kompozicijom funkcija $f, g_1, \dots, g_n$.*
2. *Postoje $f, g \in \mathcal{R}_p$ tako da je h dobivena primitivnom rekurzijom od funkcija f, g.*
3. *Postoji $g \in \mathcal{R}_p$ takva da je h dobivena primjenom μ-operatora na funkciju g*
4. *$h \in \mathcal{R}_p$*

Za funkciju h kažemo da je ***rekurzivna*** *ako postoji $p \in \mathbb{N}$ takav da je $h \in \mathcal{R}_p$. Uočimo da je $\mathcal{R}_p \subseteq \mathcal{R}_{p+1}$, za svaki $p \in \mathbb{N}$. Nadalje, uočimo da je svaka inicijalna funkcija rekurzivna.*

Primjer 1.1.6. *Neka je $g : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$,*

$$g(a, b, c) = a + 1.$$

Funkcija g je kompozicija inicijalnih funkcija (primjer 1.1.1), stoga je $g \in \mathcal{R}_1$. Neka je $\mathrm{zb} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$,

$$\mathrm{zb}(y, x) = y + x.$$

Prema primjeru 1.1.2 zb *je dobivena primitivnom rekurzijom od funkcija I_1^1, g. Imamo $I_1^1, g \in \mathcal{R}_1$ (jer je $I_1^1 \in \mathcal{R}_0 \subseteq \mathcal{R}_1$), stoga je* $\mathrm{zb} \in \mathcal{R}_2$. *Slijedi da su g i* zb *rekurzivne funkcije.*

Propozicija 1.1.7.
1. *Neka je $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka su $f, g_1, \dots, g_n$ rekurzivne funkcije. Pretpostavimo da je h dobivena kompozicijom funkcija $f, g_1, \dots, g_n$.Tada je h rekurzivna funkcija.*
2. *Neka je $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ te neka su f, g rekurzivne funkcije. Pretpostavimo da je h dobivena primitivnom rekurzijom od funkcija f i g. Tada je h rekurzivna funkcija.*
3. *Neka je g rekurzivna funkcija. Pretpostavimo da je f dobivena primjenom $\mu -$ operatora na g. Tada je f rekurzivna funckija.*

Dokaz. 1. Budući da su $f, g_1, \dots, g_n$ rekurzivne postoje $p, l_1, \dots, l_n \in \mathbb{N}$ takvi da je $f \in \mathcal{R}_p, g_1 \in \mathcal{R}_{l_1}, \dots, g_n \in \mathcal{R}_{l_n}$. To slijedi iz činjenice da je $\mathcal{R}_i \subseteq \mathcal{R}_{i+1}$, za svaki $i \in \mathbb{N}$. Neka je $v = \max\{p, l_1, \dots, l_n\}$. Općenito, ako su $i, j \in \mathbb{N}, i \leq j$ onda je $\mathcal{R}_i \subseteq \mathcal{R}_j$. Imamo:

$$p \leq v, l_1 \leq v, \dots, l_n \leq v$$

pa je

$$\mathcal{R}_p \subseteq \mathcal{R}_v, \mathcal{R}_{l_1} \subseteq \mathcal{R}_v, \ldots, \mathcal{R}_{l_n} \subseteq \mathcal{R}_v.$$

Iz ovoga slijedi da su $f, g_1, \ldots, g_n \in \mathcal{R}_v$. Stoga je $h \in \mathcal{R}_{v+1}$. Dakle, h je rekurzivna funkcija.

2. Neka su $l_1, l_2 \in \mathbb{N}$ takvi da je $f \in \mathcal{R}_{l_1}, g \in \mathcal{R}_{l_2}$. Neka je $v = \max\{l_1, l_2\}$. Tada je

$$\mathcal{R}_{l_1} \subseteq \mathcal{R}_v \text{ i } \mathcal{R}_{l_2} \subseteq \mathcal{R}_v$$

iz čega slijedi da su $f, g \in \mathcal{R}_v$ pa je $h \in \mathcal{R}_{v+1}$. Dakle, h je rekurzivna funkcija.

3. Neka je $p \in \mathbb{N}$ takav da je $g \in \mathcal{R}_p$. Tada je očito $f \in \mathcal{R}_{p+1}$. Dakle, f je rekurzivna funkcija.

□

Primjer 1.1.8. *Neka je $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Za $m \in \mathbb{N}$, neka je $c_m : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa*

$$c_m(x) = m,$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^n$. Dokažimo indukcijom da je za svaki $m \in \mathbb{N}$ funkcija c_m rekurzivna.
Za $m = 0$ imamo

$$c_0(x) = 0 = z(I_1^n(x)).$$

Stoga je c_0 rekurzivna funkcija kao kompozicija rekurzivnih funkcija (propozicija 1.1.7).
Prepostavimo da je c_m rekurzivna za neki $m \in \mathbb{N}$.
Vrijedi:

$$c_{m+1}(x) = m + 1 = s(m) = s(c_m(x)).$$

Prema tome c_{m+1} je dobivena kompozicijom funkcija s i c_m pa iz propozicije 1.1.7 slijedi da je c_{m+1} rekurzivna funkcija.
Time smo dokazali da je c_m rekurzivna funkcija za svaki $m \in \mathbb{N}$.

Primjer 1.1.9. *Neka je $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija. Definiramo funkciju $G : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$, $G(a, b, c) = g(a, b)$. Tada je*

$$G(a, b, c) = g(I_1^3(a, b, c), I_2^3(a, b, c)).$$

Iz ovoga slijedi da je G rekurzivna funkcija kao kompozicija rekurzivnih funkcija prema propoziciji 1.1.7.

Propozicija 1.1.10. *Neka je $m \in \mathbb{N}$ te neka je $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija. Neka je $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa:*

$$h(0) = m,$$

$$h(y + 1) = g(h(y), y)$$

Tada je h rekurzivna funkcija.

Dokaz. Definirajmo $h' : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ sa $h'(y, x) = h(y)$. Imamo

$$h'(0, x) = h(0) = m = c_m(x)$$

gdje je $c_m : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ konstantna funkcija sa vrijednošću m. Nadalje

$$h'(y + 1, x) = h(y + 1) = g(h(y), y) = g(h'(y, x), y) = g'(h'(y, x), y, x)$$

pri čemu je $g' : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa $g'(a, b, c) = g(a, b)$. Prema primjeru 1.1.9 slijedi da je g' rekurzivna funkcija, a vrijedi

$$h'(0, x) = c_m(x),$$

$$h'(y + 1, x) = g'(h'(y, x), y, x).$$

Iz ovoga zaključujemo da je h' dobivena primitivnom rekurzijom od funkcija c_m i g'. Stoga zaključujemo da je h' rekurzivna funkcija.
Iz definicije funkcije h' slijedi da je $h(y) = h'(y, 0)$ za svaki $y \in \mathbb{N}$. Dakle,

$$h(y) = h'(I_1^1(y), z(y)),$$

za svaki $y \in \mathbb{N}$. Ovo znači da je h kompozicija funkcija h', I_1^1 i z. Iz ovoga slijedi da je h rekurzivna. □

Neka je pred : $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa

$$\operatorname{pred}(y) = \begin{cases} y - 1, & \text{ako je } y \geq 1 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}.$$

Propozicija 1.1.11. *Funkcija* pred *je rekurzivna.*

Dokaz. Imamo

$$\operatorname{pred}(0) = 0,$$

$$\operatorname{pred}(y + 1) = y = I_2^2(\operatorname{pred}(y), y).$$

Iz propozicije 1.1.10 slijedi da je pred rekurzivna. □

Neka su $x, y \in \mathbb{N}$. Neka je

$$x \dot{-} y = \begin{cases} x - y, & \text{ako je } x \geq y \\ 0, & \text{ako je } x < y \end{cases}$$

Za funkciju $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $(x, y) \mapsto x \dot{-} y$ kažemo da je **modificirano oduzimanje**.

Propozicija 1.1.12. *Modificirano oduzimanje je rekurzivna funkcija.*

Dokaz. Neka je $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ modificirano oduzimanje. Dakle, $f(x, y) = x\dot{-}y$, za sve $x, y \in \mathbb{N}$.
Definirajmo funkciju $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ sa

$$h(x, y) = y\dot{-}x,$$

za sve $x, y \in \mathbb{N}$. Za sve $x, y \in \mathbb{N}$ vijedi

$$f(x, y) = x\dot{-}y = h(y, x) = h(I_2^2(x, y), I_1^2(x, y)).$$

Iz ovoga slijedi da je f kompozicija funkcija h, I_2^2, I_1^2. Stoga je prema propoziciji 1.1.7 dovoljno pokazati da je h rekurzivna funkcija.
Uočimo da za sve $x, y \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$x\dot{-}(y + 1) = \text{pred}(x\dot{-}y).$$

Naime, ako je $x \geq y + 1$ onda je $x - y \geq 1$, pa je

$$\text{pred}(x\dot{-}y) = \text{pred}(x - y) = x - y - 1 = x - (y + 1) = x\dot{-}(y + 1).$$

Ako je $x < y + 1$ onda je $x \leq y$ pa je

$$\text{pred}(x\dot{-}y) = 0 \text{ i } x\dot{-}(y + 1) = 0.$$

Za sve $x, y \in \mathbb{N}$ vrijedi $h(y, x) = x\dot{-}y$, pa slijedi

$$h(0, x) = x$$

$$h(y + 1, x) = x\dot{-}(y + 1) = \text{pred}(x\dot{-}y) = \text{pred}(h(y, x)) = g(h(y, x), y, x)$$

gdje je $g : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa $g(a, b, c) = \text{pred}(a)$. Funkcija g je kompozicija funkcija pred i I_1^3 pa je stoga g rekurzivna funkcija. Vrijedi

$$h(0, x) = I_1^1(x),$$

$$h(y + 1, x) = g(h(y, x), y, x).$$

Ovo znači da je funkcija h dobivena primitivnom rekurzijom od funkcija I_1^1 i g. Prema propoziciji 1.1.7 h je rekurzivna funkcija. Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Propozicija 1.1.13. *Neka je $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa*

$$f(x, y) = |x - y|.$$

Tada je f rekurzivna funkcija.

Dokaz. Neka su $x, y \in \mathbb{N}$. Pretpostavimo da je $x \geq y$. Tada je $x - y > 0$ pa vrijedi

$$|x - y| = x - y = (x \dot{-} y) + 0 = (x \dot{-} y) + (y \dot{-} x).$$

Ako je $x < y$ onda je $x - y < 0$ pa je

$$|x - y| = -(x - y) = y - x = 0 + (y \dot{-} x) = (x \dot{-} y) + (y \dot{-} x).$$

U svakom slučaju vrijedi

$$|x - y| = (x \dot{-} y) + (y \dot{-} x). \tag{1.1}$$

Neka je $\mathrm{mo} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ modificirano oduzimanje.
Neka je $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa

$$h(x, y) = y \dot{-} x.$$

Imamo:

$$h(x, y) = \mathrm{mo}(y, x) = \mathrm{mo}(I_2^2(x, y), I_1^2(x, y)),$$

iz čega slijedi da je h rekurzivna kao kompozicija rekurzivnih funkcija mo, I_2^2, I_1^2.
Neka je zb funkcija iz primjera 1.1.6. Iz (1.1) slijedi

$$f(x, y) = \mathrm{zb}(\mathrm{mo}(x, y), h(x, y)).$$

Iz ovoga slijedi da je f rekurzivna funkcija jer je dobivena kompozicijom rekurzivnih funkcija zb, mo, h. □

Propozicija 1.1.14. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka su $f, g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije. Tada su i $f + g, f \cdot g : \mathbb{N}^k \to N$ rekurzivne funkcije.*

Dokaz. Neka je zb funkcija iz primjera 1.1.6 te neka je $\mathrm{mn} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa $\mathrm{mn}(a, b) = a \cdot b$. Funkcija mn je rekurzivna prema primjeru 1.1.3. Za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = \mathrm{zb}(f(x), g(x)),$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \mathrm{mn}(f(x), g(x)).$$

Prema tome, $f + g$ je dobivena kompozicijom funkcija zb, f, g, a $f \cdot g$ je dobivena kompozicijom funkcija mn, f, g.
Stoga su $f + g$ i $f \cdot g$ rekurzivne funkcije. □

Korolar 1.1.15. *Neka su $n, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka su $f_1, \dots, f_n : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije. Tada su i funkcije $f_1 + f_2 + ... + f_n$ i $f_1 \cdot f_2 \cdot ... \cdot f_n$ isto rekurzivne.*

Dokaz. Slijedi lako iz propozicije 1.1.14. □

Definicija 1.1.16. *Neka su* $\mathrm{sg}, \overline{\mathrm{sg}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *funkcije definirane sa*

$$\mathrm{sg}\,(y) = \begin{cases} 0, y = 0 \\ 1, y \neq 0 \end{cases}, \tag{1.2}$$

$$\overline{\mathrm{sg}}\,(y) = \begin{cases} 1, y = 0 \\ 0, y \neq 0 \end{cases}. \tag{1.3}$$

Propozicija 1.1.17. *Funkcije* $\mathrm{sg}, \overline{\mathrm{sg}}$ *su rekurzivne.*

Dokaz. Neka je $y \in \mathbb{N}$. Vrijedi:

$$\mathrm{sg}(0) = 0,$$

$$\mathrm{sg}(y + 1) = 1.$$

Neka je $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $g(a, b) = 1$. Funkcija g je rekurzivna prema primjeru 1.1.8. Vrijedi

$$\mathrm{sg}(0) = 0,$$

$$\mathrm{sg}(y + 1) = g(sg(y), y).$$

Iz propozicije 1.1.10 slijedi da je sg rekurzivna funkcija.
Analogno dobivamo da je $\overline{\mathrm{sg}}$ rekurzivna funkcija. □

1.2 Rekurzivni skupovi

Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je $S \subseteq \mathbb{N}^k$. Za S kažemo da je **rekurzivan skup** u $\mathbb{N}^k$ ako je $\chi_S : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija. Pri tome sa χ_S označavamo karakterističnu funkciju skupa S u $\mathbb{N}^k$ to jest funkciju takvu da je

$$\chi_S\,(x) = \begin{cases} 1, x \in S \\ 0, x \notin S \end{cases}, \tag{1.4}$$

$x \in \mathbb{N}^k$.

Primjer 1.2.1. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Promotrimo funkciju $\chi_{\mathbb{N}^k} : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$. Očito je $\chi_{\mathbb{N}^k}(x) = 1$, za svaki $x \in \mathbb{N}$. Prema primjeru 1.1.8 $\chi_{\mathbb{N}^k}$ je rekurzivna funkcija. To znači da je $\mathbb{N}^k$ rekurzivan skup.*
S druge strane $\chi_\emptyset : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ je konstantna funkcija s vrijednošću 0 *pa iz primjera 1.1.8 slijedi da je $\chi_\emptyset$ rekurzivna funkcija. Stoga je $\emptyset$ rekurzivan skup u $\mathbb{N}^k$.*

Primjer 1.2.2. *Neka je* $S = \{0\}$. *Neka je* $x \in \mathbb{N}$. *Tada je*

$$\chi_S(x) = \begin{cases} 1, x = 0 \\ 0, x \neq 0 \end{cases} \quad (1.5)$$

Prema tome

$$\chi_S(x) = \overline{\text{sg}}(x),$$

za svaki $x \in \mathbb{N}$ *to jest* $\chi_S = \overline{\text{sg}}$. *To znači da je* χ_S *rekurzivna funkcija, a* S *rekurzivan skup.*

Propozicija 1.2.3. *Neka su* $k, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ *te neka su* $S_1, ..., S_n$ *rekurzivni skupovi u* $\mathbb{N}^k$. *Neka su* $f_1, ..., f_n : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ *rekurzivne funkcije. Pretpostavimo da za svaki* $x \in \mathbb{N}^k$ *postoji jedinstveni* $i \in \{i, \ldots, n\}$ *takav da je* $x \in S_i$. *Neka je* $F : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ *funkcija definirana sa*

$$F(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{ako je } x \in S_1 \\ f_2(x), & \text{ako je } x \in S_2 \\ \quad\vdots & \\ f_n(x), & \text{ako je } x \in S_n \end{cases}.$$

Tada je F *rekurzivna funkcija.*

Dokaz. Neka je $x \in \mathbb{N}^k$. Tada je

$$F(x) = f_1(x) \cdot \chi_{S_1}(x) + \cdots + f_n(x) \cdot \chi_{S_n}(x). \quad (1.6)$$

Zašto?
Neka je $i \in \{1, \ldots, n\}$ takav da je $x \in S_i$. Tada je $F(x) = f_i(x)$.
S druge strane za svaki $j \in \{1, \ldots, n\}$ takav da je $j \neq i$ vrijedi da $x \notin S_j$ pa je $\chi_{S_j}(x) = 0$. Stoga je

$$F(x) = f_i(x) = f_i(x) \cdot \chi_{S_i}(x) = f_1(x) \cdot \chi_{S_1}(x) + \cdots + f_n(x) \cdot \chi_{S_n}(x).$$

Prema tome (1.6) vrijedi.
Dakle, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi $F(x) = (f_1 \cdot \chi_{S_1})(x) + \cdots + (f_n \cdot \chi_{S_n})(x)$ odnosno

$$F = f_1 \cdot \chi_{S_1} + \cdots + f_n \cdot \chi_{S_n}.$$

Prema korolaru 1.1.15 F je rekurzivna funkcija. □

Propozicija 1.2.4. *Neka je* $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ *te neka je* $S \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$ *rekurzivan skup koji ima svojstvo da za svaki* $x \in \mathbb{N}^k$ *postoji* y *takav da je* $(x, y) \in S$. *Neka je* $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ *funkcija definirana sa*

$$f(x) = \mu y((x, y) \in S),$$

$x \in \mathbb{N}^k$ *odnosno*

$$f(x) = \min\{y \in \mathbb{N} \mid (x, y) \in S\}.$$

Tada je f *rekurzivna funkcija.*

Dokaz. Neka je $g : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa

$$g(x, y) = \overline{\text{sg}}(\chi_S(x, y)),$$

$x \in \mathbb{N}^k, y \in \mathbb{N}$. Funkcija g je rekurzivna kao kompozicija rekurzivnih funkcija. Uočimo sljedeće: ako su $x \in \mathbb{N}^k$ i $y \in \mathbb{N}$ onda je

$$g(x, y) = 0 \Leftrightarrow (x, y) \in S.$$

Stoga je

$$f(x) = \mu y(g(x, y) = 0).$$

Prema tome funkcija f je dobivena primjenom μ-operatora na funkciju g. Stoga je f rekurzivna. □

Lema 1.2.5. *Neka je*

$$S = \left\{(x, y, k) \in N^3 \mid k + 1 > \frac{x}{y + 1}\right\}.$$

Tada je S rekurzivan skup u $\mathbb{N}^3$

Dokaz. Neka su $x, y, k \in \mathbb{N}$. Tada je

$$(x, y, k) \in S \Leftrightarrow k + 1 > \frac{x}{y + 1} \Leftrightarrow (k + 1)(y + 1) > x$$

Stoga je

$$\chi_S(x, y, k) = \text{sg}((k + 1)(y + 1) \dot{-} x)$$

Neka je $h : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa

$$h(x, y, k) = (k + 1)(y + 1) \dot{-} x$$

Tada je χ_S kompozicija funkcija sg i h. Stoga je dovoljno pokazati da je h rekurzivna funkcija.
Neka je mo modificirano oduzimanje te neka su $h_1, h_2 : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ funckije definirane sa

$$h_1(x, y, k) = (k + 1)(y + 1),$$

$$h_2(x, y, k) = x.$$

Tada je

$$h(x, y, k) = \text{mo}(h_1(x, y, k), h_2(x, y, k)).$$

Stoga je dovoljno pokazati da su h_1 i h_2 rekurzivne funkcije.
Funkcija h_1 je produkt funkcija $s \circ I_3^3$ i $s \circ I_2^3$ pa je h_1 rekurzivna prema propoziciji 1.1.14.
Funkcija h_2 je očito rekurzivna, stoga je h rekurzivna funkcija, odnosno χ_S je rekurzivna funkcija, odnosno S je rekurzivan skup. □

Propozicija 1.2.6. *Neka je $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa*

$$f(x, y) = \left\lfloor \frac{x}{y+1} \right\rfloor.$$

Tada je f rekurzivna.

Dokaz. Neka su $x, y \in \mathbb{N}$. Tada je

$$\left\lfloor \frac{x}{y+1} \right\rfloor \leq \frac{x}{y+1} < \left\lfloor \frac{x}{y+1} \right\rfloor + 1.$$

Stoga je

$$\left\lfloor \frac{x}{y+1} \right\rfloor = \min \left\{ k \in \mathbb{N} \mid \frac{x}{y+1} < k+1 \right\}.$$

Neka je

$$S = \left\{ (x, y, k) \in \mathbb{N}^3 \mid \frac{x}{y+1} < k+1 \right\}.$$

Imamo da je

$$f(x, y) = \mu k((x, y, k) \in S).$$

Iz leme 1.2.5 i propozicije 1.2.4 slijedi da je f rekurzivna funkcija. $\square$

Propozicija 1.2.7. *Neka je*

$$D = \left\{ (y, x) \in \mathbb{N}^2 \mid y \mid x \right\}.$$

Tada je D rekurzivan skup.

Dokaz. Neka su $y, x \in \mathbb{N}$. Pretpostavimo da je $y \geq 1$. Tada je

$$\begin{gathered}
(y, x) \in D \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow y \mid x \\
\Leftrightarrow \text{postoji } k \in \mathbb{N} \text{ takav da je } x = y \cdot k \\
\Leftrightarrow \text{postoji } k \in \mathbb{N} \text{ takav da je } \frac{x}{y} = k \\
\Leftrightarrow \frac{x}{y} \in \mathbb{N} \\
\Leftrightarrow \left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor = \frac{x}{y} \\
\Leftrightarrow \left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor \cdot y = x
\end{gathered}$$

$$\Leftrightarrow |\left(\left\lfloor \frac{x}{(y \dot{-} 1) + 1} \right\rfloor \cdot y\right) - x = 0$$

$$\Leftrightarrow \overline{sg}\left(\left|\left(\left\lfloor \frac{x}{(y \dot{-} 1) + 1} \right\rfloor \cdot y\right) - x\right|\right) = 1.$$

Stoga je

$$\chi_D(y, x) = \overline{sg}(|f(x, y \dot{-} 1) \cdot y - x|)\ ,\ za\ y \geq 1$$

pri čemu je f funkcija iz propozicije 1.2.6.
Neka su

$$S_1 = \left\{(y, x) \in \mathbb{N}^2 \mid y \geq 1\right\},$$

$$S_2 = \left\{(y, x) \in \mathbb{N}^2 \mid y = 0\ ,\ x > 0\right\},$$

$$S_3 = \{(0, 0)\}.$$

Neka je $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa

$$g(y, x) = \overline{sg}(|f(x, y \dot{-} 1) \cdot y - x|)\ .$$

Neka su $x, y \in \mathbb{N}$. Tada je

$$\chi_D(y, x) = \begin{cases} g(y, x), & \text{ako je } (y, x) \in S_1 \\ 0, & \text{ako je } (y, x) \in S_2 \\ 1, & \text{ako je } (y, x) \in S_3 \end{cases}.$$

Dokažimo da su skupovi S_1, S_2, S_3 rekurzivni te da je funkcija g rekurzivna. Tada će iz propozicije 1.2.3 slijediti da χ_D rekurzivna funkcija čime će tvrdnja propozicije biti dokazana.
Za sve $y, x \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\chi_{S_1}(y, x) = \mathrm{sg}(y)$$

pa je χ_{S_1} rekurzivna funkcija kao kompozicija funkcija sg i I_1^2.
Vrijedi:

$$\chi_{S_2}(y, x) = \overline{\mathrm{sg}}(y) \cdot \mathrm{sg}(x)$$

pa je χ_{S_2} rekurzivna funkcija kao produkt rekurzivnih funkcija.
Isto tako iz

$$\chi_{S_3}(y, x) = \overline{\mathrm{sg}}(y) \cdot \overline{\mathrm{sg}}(x)$$

slijedi da je χ_{S_3} rekurzivna funkcija. Dakle, S_1, S_2, S_3 su rekurzivni skupovi.
Preostaje nam pokazati da je g rekurzivna funkcija. Neka je $g_1 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa

$$g_1(y, x) = |f(x, y \dot{-} 1) \cdot y - x|\ .$$

Budući da je g kompozicija funkcija $\overline{\text{sg}}$ i g_1 dovoljno je dokazati da je g_1 rekurzivna.
Neka je $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa

$$h(a, b) = |a - b|$$

te neka je $g_2 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa

$$g_2(y, x) = f(x, y \dot{-} 1) \cdot y.$$

Tada je

$$g_1(y, x) = h(g_2(y, x), I_2^2(y, x)).$$

Stoga je dovoljno dokazati da je g_2 rekurzivna funkcija.
Neka je $g_3 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ definirana sa

$$g_3(y, x) = f(x, y \dot{-} 1),$$

tada je

$$g_2 = g_3 \cdot I_1^2$$

pa se problem sveo na dokazivanje rekurzivnosti funkcije g_3.
Neka je $g_4 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$,

$$g_4(y, x) = y \dot{-} 1.$$

Tada je g_3 kompozicija funkcija f, I_2^2, g_4.
Preostaje još pokazati da je g_4 rekurzivna funkcija. No, g_4 je kompozicija modificiranog oduzimanja, funkcije I_1^2 i konstantne funkcije $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $(y, x) \longmapsto 1$. Stoga je g_4 rekurzivna funkcija. Time smo pokazali da je funkcija g rekurzivna.
Slijedi da je χ_D rekurzivna funkcija, odnosno D je rekurzivan skup. $\square$

Primjer 1.2.8. *Skup* $2\mathbb{N} = \{2x \mid x \in \mathbb{N}\}$ *je rekurzivan jer je* $\chi_{2\mathbb{N}}(x) = \chi_D(2, x)$*, pri čemu je D skup iz propozicije 1.2.7, a iz čega slijedi da je* $\chi_{2\mathbb{N}}$ *rekurzivna kao kompozicija rekurzivnih funkcija.*
Skup $2\mathbb{N} + 1$ *je rekurzivan kao komplement skupa* $2\mathbb{N}$.

Napomena 1.2.9. *Skup*

$$D' = \left\{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid y \mid x\right\}$$

je rekurzivan jer je

$$\chi_{D'}(x, y) = \chi_D(y, x) = \chi_D(I_2^2(x, y), I_1^2(x, y)),$$

pri čemu je D skup iz propozicije 1.2.7.

Lema 1.2.10. *Neka je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa:*

$$f(x) = \begin{cases} \text{najmanji } y > 1 \text{ takav da } y \mid x, & \text{ako je } x \geq 2 \\ 2, & \text{ako je } x < 2 \end{cases}.$$

Tada je f rekurzivna funkcija.

Dokaz. Za svaki $x \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$f(x) = \mu y(y > 1 \ i \ (y \mid x \ ili \ y > x))$$

Neka je

$$S_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid y > 1\right\}.$$

Neka je D' skup iz napomene 1.2.9 te neka je

$$S_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid y > x\right\}.$$

Tada je

$$f(x) = \mu y((x, y) \in S_1 \cap (D' \cup S_2)).$$

Prema propoziciji 1.2.4 dovoljno je pokazati da je skup $S_1 \cap (D' \cup S_2)$ rekurzivan, odnosno da su S_1 i S_2 rekurzivni skupovi (D' je rekurzivan prema napomeni 1.2.9).
Vrijedi

$$\chi_{S_1}(x, y) = \mathrm{sg}(y \dot{-} 1)$$

pa slijedi da je χ_{S_1} rekurzivna funkcija, odnosno S_1 je rekurzivan skup.
Vrijedi

$$\chi_{S_2}(x, y) = \mathrm{sg}(y \dot{-} x)$$

pa slijedi da je χ_{S_2} rekurzivna funkcija, odnosno S_2 je rekurzivan skup.
Time je tvrdnja leme dokazana. □

Neka je $\mathcal{P}$ **skup svih prostih brojeva**.

Propozicija 1.2.11. *Skup $\mathcal{P}$ je rekurzivan.*

Dokaz. Neka je f funkcija iz leme 1.2.10. Neka je $x \in \mathbb{N}$. Tada je x prost ako i samo ako je $x = f(x)$.
Naime, ako je x prost onda je $x \geq 2$ i ne postoji broj $y > 1$ takav da $y \mid x$ i $y < x$. Stoga je $f(x) = x$.
S druge strane ako je $f(x) = x$ onda iz definicije funkcije f zaključujemo da je $x \geq 2$ i ne postoji $y > 1$ takav da $y \mid x$ i $y < x$. Stoga je x prost.
Dakle, $x \in \mathcal{P}$ ako i samo ako je $x = f(x)$ pa je

$$\chi_{\mathcal{P}}(x) = \overline{\mathrm{sg}}\, |f(x) - x|.$$

Neka je $f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$,
$$f_1(x) = |f(x) - x|\,.$$
Tada je $\chi_{\mathcal{P}}$ kompozicija funkcija $\overline{\text{sg}}$ i f_1 pa ako dokažemo da je f_1 rekurzivna funkcija slijediti će da je $\chi_{\mathcal{P}}$ rekurzivna funkcija odnosno da je $\mathcal{P}$ rekurzivan skup.
Neka je $A : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$,
$$A(x, y) = |x - y|\,.$$
Tada je f_1 kompozicija funkcija A, f, I_1^1 pa iz činjenice da su f i A (lema 1.2.10 i propozicija 1.1.13) rekurzivne slijedi da je f_1 rekurzivna. $\square$

Neka je $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcija definirana tako da su $p(0), p(1), p(2), ...$ svi prosti brojevi i pri tome je $p(0) < p(1) < p(2) < ...$
Dakle,
$$p(0) = 2, p(1) = 3, p(2) = 5, ...$$

Za $i \in \mathbb{N}$ umjesto $p(i)$ pišemo i p_i.

Propozicija 1.2.12. *Funkcija p je rekurzivna.*

Dokaz. Neka je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa
$$f(x) = \mu y(y \text{ prost i } \ y > x).$$
Neka je
$$S_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid y \text{ prost}\right\},$$
$$S_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid y > x\right\}.$$
Tada je
$$f(x) = \mu y((x, y) \in S_1 \cap S_2). \tag{1.7}$$
Imamo
$$\chi_{S_1}(x, y) = \chi_{\mathcal{P}}(y)$$
pa je χ_{S_1} rekurzivna kao kompozicija funkcija $\chi_{\mathcal{P}}$ i I_2^2. Stoga je skup S_1 rekurzivan.
U dokazu leme 1.2.10 smo vidjeli da je skup S_2 rekurzivan. Stoga je i $S_1 \cap S_2$ rekurzivan skup, pa iz (1.7) i propozicije 1.2.4 slijedi da je f rekurzivna.
Očito je $p(0) = 2$, a iz definicije funkcije f slijedi da za svaki $y \in \mathbb{N}$ vrijedi
$$p(y + 1) = f(p(y)).$$
Definirajmo $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ sa
$$g(a, b) = f(a).$$

Tada je g rekurzivna funkcija te vrijedi

$$p(0) = 2,$$

$$p(y+1) = g(p(y), y).$$

Iz propozicije 1.1.10 slijedi da je p rekurzivna funkcija. □

Neka je $e : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija zadana sa

$$e(x,i) = \begin{cases} \text{eksponent kojim prost broj } p_i \text{ ulazi u rastav od } x \text{ na proste faktore}, & \text{ako je } x \geq 1 \\ 0, & \text{ako je } x = 0 \end{cases}.$$

Lema 1.2.13. *Funkcija* $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ *definirana sa*

$$f(y,x) = x^y$$

je rekurzivna.

Dokaz. Za sve $x, y \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$f(0,x) = 1 \tag{1.8}$$

$$f(y+1,x) = x^{y+1} = x^y \cdot x = x \cdot f(y,x) \tag{1.9}$$

Definirajmo $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sa $F(x) = 1$ i $G : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ sa $G(a,b,c) = c \cdot a$. Jasno je da su F i G rekurzivne funkcije, a iz (1.8) i (1.9) slijedi da je

$$f(0,x) = F(x),$$

$$f(y+1,x) = G(f(y,x), y, x).$$

Stoga zaključujemo da je f funkcija dobivena primitivnom rekurzijom od funkcija F i G. Stoga je f rekurzivna funkcija. □

Propozicija 1.2.14. *Funkcija e je rekurzivna.*

Dokaz. Neka su $x, i \in \mathbb{N}$. Pretpostavimo da je $x \geq 1$. Neka je $k = e(x,i)$. Tada je k eksponent kojim prost broj p_i ulazi u rastav od x na proste faktore pa imamo da $p_i^k \mid x$, ali $p_i^{k+1} \nmid x$. Stoga je k najmanji broj $y \in \mathbb{N}$ takav da

$$p_i^{y+1} \nmid x.$$

Naime, ako je $y \in \mathbb{N}$ takav da je $y < k$, onda je $y + 1 \leq k$ pa $p_i^{y+1} \mid x$ jer $p_i^k \mid x$.
Uočimo da je $x = x + \overline{\text{sg}}(x)$. Imamo dakle da je

$$e(x, i) = \mu y(p_i^{y+1} \nmid (x + \overline{\text{sg}}(x))). \tag{1.10}$$

Uočimo da ova jednakost vrijedi i za $x = 0$.
Neka je

$$S = \left\{(x, i, y) \mid p_i^{y+1} \nmid (x + \overline{\text{sg}}(x))\right\}$$

Prema (1.10) vrijedi:

$$e(x, i) = \mu y((x, i, y) \in S).$$

Dovoljno je sada dokazati da je S rekurzivan skup. Naime tada će iz propozicije 1.2.4 slijediti da je e rekurzivna funkcija.
Neka je D skup iz propozicije 1.2.7. Neka su $x, y \in \mathbb{N}$. Tada je

$$\begin{aligned}(x, i, y) \in S &\Leftrightarrow p_i^{y+1} \nmid (x + \overline{\text{sg}}(x)) \\ &\Leftrightarrow (p_i^{y+1}, x + \overline{\text{sg}}(x)) \notin D \\ &\Leftrightarrow (p_i^{y+1}, x + \overline{\text{sg}}(x)) \in D^c.\end{aligned}$$

Prema tome

$$\chi_S(x, i, y) = \chi_{D^c}(p_i^{y+1}, x + \overline{\text{sg}}(x)). \tag{1.11}$$

Prema propoziciji 1.2.7 skup D je rekurzivan. Stoga je i skup D^c rekurzivan pa je χ_{D^c} rekurzivna funkcija.
Neka su $f_1, f_2 : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ funkcije takve da je

$$f_1(x, i, y) = p_i^{y+1},$$

$$f_2(x, i, y) = x + \overline{\text{sg}}(x).$$

Prema (1.11) χ_S je kompozicija funkcija χ_{D^c}, f_1, f_2. Stoga da bismo dokazali da je S rekurzivan skup dovoljno je dokazati da su f_1 i f_2 rekurzivne funkcije.
Funkcija f_2 je zbroj funkcija I_1^3 i $\overline{\text{sg}} \circ I_1^3$, stoga je f_2 rekurzivna funkcija.
Neka je $\varphi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$,

$$\varphi(y, x) = x^y.$$

Prema lemi 1.2.13 φ je rekurzivna funkcija.
Imamo

$$f_2(x, i, y) = \varphi(y + 1, p_i)$$

iz čega zaključujemo da je f_1 kompozicija funkcija $\varphi, s \circ I_3^3$ i $p \circ I_2^3$. Prema tome f_1 je rekurzivna funkcija. Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Definicija 1.2.15. *Neka su $n, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ funkcija. Neka su $f_1, ..., f_n : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$* ***komponentne funkcije*** *od f, to jest funkcije takve da je*

$$f(x) = (f_1(x), ..., f_n(x)),$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Za funkciju f kažemo da je ***rekurzivna*** *ako su $f_1, ..., f_n$ rekurzivne funkcije.*

Primjer 1.2.16. *Neka je $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^3$ definirana sa*

$$f(x, y) = (x + 1,\ x \cdot y,\ 2y).$$

Neka su $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ komponentne funkcije od f. Tada za sve $x, y \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$f_1(x, y) = x + 1,$$

$$f_2(x, y) = x \cdot y,$$

$$f_3(x, y) = 2y.$$

Očito su f_1, f_2, f_3 rekurzivne funkcije pa je stoga f rekurzivna funkcija.

Neka su $n, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka su $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ i $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ funkcije. Neka su $g_1, \ldots, g_n$ komponentne funkcije od g. Tada za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(g_1(x), \ldots, g_n(x)).$$

Prema tome $f \circ g$ je kompozicija funkcija $f, g_1, \ldots, g_n$. Iz ovoga slijedi da je $f \circ g$ rekurzivna funkcija ako su f i g rekurzivne funkcije.
Nadalje, neka su $n, m, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka su $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ i $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}^m$ rekurzivne funkcije. Tada je i

$$f \circ g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^m$$

rekurzivna funkcija.

To slijedi iz činjenice da su $f_1 \circ g, \ldots, f_m \circ g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ komponentne funkcije od $f \circ g$ pri čemu su $f_1, \ldots, f_m$ komponentne funkcije od f.
Naime, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (f_1(g(x)), \ldots, f_m(g(x))) = ((f_1 \circ g)(x), \ldots, (f_m \circ g)(x)),$$

a iz prethodne napomene slijedi da su $f_1 \circ g, \ldots, f_m \circ g$ rekurzivne funkcije.

Poglavlje 2

Rekurzivne funkcije $\mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$

2.1 Rekurzivne funkcije $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$

Definicija 2.1.1. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$. Za f kažemo da je rekurzivna ako postoje rekurzivne funkcije $u, v : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ takve da je*

$$f(x) = (-1)^{u(x)} \cdot v(x),$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$.

Primjer 2.1.2. *Neka je $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{Z}$ funkcija definirana sa*

$$f(x, y) = x - y.$$

Tvrdimo da je f rekurzivna.
Neka je $u : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa

$$u(x, y) = \begin{cases} 0, x \geq y \\ 1, x < y \end{cases},$$

te neka je $v : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa

$$v(x, y) = |x - y|.$$

Tada za sve $x, y \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$f(x, y) = (-1)^{u(x,y)} \cdot v(x, y).$$

Prema propoziciji 1.1.13 v je rekurzivna. Ostaje dokazati da je u rekurzivna.
Za sve $x, y \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$u(x, y) = \mathrm{sg}(y \dot{-} x). \tag{2.1}$$

Naime, ako je $x \geq y$ onda je $u(x, y) = 0$ i

$$\mathrm{sg}(y \dot{-} x) = \mathrm{sg}(0) = 0,$$

a ako je $x < y$ onda je $u(x, y) = 1$ i

$$\mathrm{sg}(y \dot{-} x) = \mathrm{sg}(y - x) = 1$$

jer je $y - x > 0$.
Neka je $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa

$$h(x, y) = y \dot{-} x.$$

U dokazu propozicije 1.1.12 vidjeli smo da je h rekurzivna funkcija.
Prema (2.1) vrijedi

$$u(x, y) = \mathrm{sg}(h(x, y))$$

što znači da je u kompozicija funkcija sg *i h. Prema tome u je rekurzivna funkcija.*

Propozicija 2.1.3. *Neka su $n, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka su $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ i $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{Z}$ rekurzivne funkcije. Tada je i*

$$f \circ g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$$

rekurzivna funkcija.

Dokaz. Budući da je f rekurzivna postoje rekurzivne funkcije $u, v : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ takve da vrijedi

$$f(x) = (-1)^{u(x)} \cdot v(x),$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^n$. Stoga za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (-1)^{u(g(x))} \cdot v(g(x)) = (-1)^{(u \circ g)(x)} \cdot (v \circ g)(x).$$

Iz ovoga slijedi da je $f \circ g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ rekurzivna funkcija. □

Propozicija 2.1.4. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ funkcija. Tada je f rekurzivna ako i samo ako postoje rekurzivne funkcije $a, b : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je*

$$f(x) = a(x) - b(x),$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$.

Dokaz. Pretpostavimo da je f rekurzivna. Tada postoje rekurzivne funkcije $u, v : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je

$$f(x) = (-1)^{u(x)} \cdot v(x),$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Neka su $a, b : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ funkcije definirane sa

$$a(x) = v(x) \cdot \chi_{2\mathbb{N}}(u(x)),$$

$$b(x) = v(x) \cdot \chi_{2\mathbb{N}+1}(u(x)).$$

Neka je $x \in \mathbb{N}^k$. Ako je $u(x)$ paran broj onda je

$$f(x) = v(x),$$

$$a(x) = v(x),$$
$$b(x) = 0,$$

a ako je $u(x)$ neparan broj onda je

$$f(x) = -v(x),$$

$$a(x) = 0,$$
$$b(x) = v(x).$$

U svakom slučaju vrijedi $f(x) = a(x) - b(x)$.
Funkcija a je rekurzivna jer je ona umnožak funckija v i $\chi_{2\mathbb{N}} \circ u$. Na isti način zaključujemo da je b rekurzivna.
Pretpostavimo da postoje rekurzivne funkcije $a, b : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je $f(x) = a(x) - b(x)$, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$.
Neka je $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{Z}$ funkcija definirana sa $h(x, y) = x - y$. Funkcija h je rekurzivna prema primjeru 2.1.2.
Neka je $c : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^2$ funkcija definirana sa

$$c(x) = (a(x), b(x)), x \in \mathbb{N}^k.$$

Tada su komponentne funkcije od c upravo a i b, prema tome c je rekurzivna funkcija.
Neka je $x \in \mathbb{N}^k$. Vrijedi

$$f(x) = a(x) - b(x) = h(a(x), b(x)) = h(c(x)) = (h \circ c)(x).$$

Dakle

$$f = h \circ c.$$

Iz propozicije 2.1.3 slijedi da je f rekurzivna funkcija. $\square$

Propozicija 2.1.5. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka su $f, g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ rekurzivne funkcije. Tada su i funkcije*

$$-f, f + g, f \cdot g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$$

rekurzivne.

Dokaz. Budući da su f i g rekurzivne postoje rekurzivne funkcije $u_1, u_2, v_1, v_2 : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da su

$$f(x) = (-1)^{u_1(x)} \cdot v_1(x),$$

$$g(x) = (-1)^{u_2(x)} \cdot v_2(x)$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Imamo

$$(-f)(x) = -f(x) = -((-1)^{u_1(x)} \cdot v_1(x)) = (-1)^{u_1(x)+1} \cdot v_1(x).$$

Dakle

$$(-f)(x) = (-1)^{(s \circ u_1)(x)} \cdot v_1(x).$$

Prema tome, $(-f)$ je rekurzivna funkcija.

Nadalje, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$(f \cdot g)(x) = (-1)^{u_1(x)} \cdot v_1(x) \cdot (-1)^{u_2(x)} \cdot v_2(x) = (-1)^{u_1(x)+u_2(x)} \cdot v_1(x) \cdot v_2(x).$$

Dakle

$$(f \cdot g)(x) = (-1)^{(u_1+u_2)(x)} \cdot (v_1 \cdot v_2)(x),$$

pa je očito da je $f \cdot g$ rekurzivna funkcija.
Prema propoziciji 2.1.4 postoje rekurzivne funkcije $a_1, b_1, a_2, b_2 : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je

$$f(x) = a_1(x) - b_1(x),$$

$$g(x) = a_2(x) - b_2(x),$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Imamo

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = a_1(x) + a_2(x) - (b_1(x) + b_2(x)).$$

Dakle

$$(f + g)(x) = (a_1 + a_2)(x) - (b_1 + b_2)(x)$$

pa iz propozicije 2.1.4 slijedi da je $f + g$ rekurzivna funkcija. □

2.2 Rekurzivne funkcije $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$

Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ funkcija. Za f kažemo da je rekurzivna (kao funkcija sa $\mathbb{N}^k$ u $\mathbb{Q}$) ako postoje rekurzivne funkcije $u, v, w : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je $w(x) \neq 0$ i

$$f(x) = (-1)^{u(x)} \cdot \frac{v(x)}{w(x)},$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$.
Uočimo sljedeće: Ako je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivna funkcija onda postoje rekurzivne funkcije $\widetilde{v} : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ i $w : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je $w(x) \neq 0$ i

$$f(x) = \frac{\widetilde{v}(x)}{w(x)},$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$.
Obratno, ako takve funkcije $\widetilde{v}$ i w postoje onda je f rekurzivna.

Primjer 2.2.1. *Neka je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ funkcija definirana sa*

$$f(x) = \frac{1}{x+1}.$$

Tada je

$$f(x) = (-1)^{u(x)} \cdot \frac{v(x)}{w(x)}$$

gdje su $u, v : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ konstantne funkcije sa vrijednostima 0 i 1, a $w = s$.

Uočimo sljedeće: ako je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija onda je f rekurzivna i kao funkcija sa $\mathbb{N}^k$ u $\mathbb{Z}$. Nadalje, ako je $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ rekurzivna funkcija onda je g rekurzivna i kao funkcija sa $\mathbb{N}^k$ u $\mathbb{Q}$.

Propozicija 2.2.2. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka su $f, g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivne funkcije. Tada su i funkcije*

$$-f, |f|, f + g, f \cdot g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$$

rekurzivne.

Dokaz. Budući da je f rekurzivna postoje rekurzivne funkcije $u, v, w : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je $w(x) \neq 0$ i

$$f(x) = (-1)^{u(x)} \cdot \frac{v(x)}{w(x)}.$$

Tada je

$$-f(x) = (-1)^{u(x)+1} \cdot \frac{v(x)}{w(x)}$$

pa je jasno da je $-f$ rekurzivna funkcija.
Nadalje, imamo

$$|f|(x) = |f(x)| = \left|(-1)^{u(x)} \cdot \frac{v(x)}{w(x)}\right| = \left|(-1)^{u(x)}\right| \cdot \left|\frac{v(x)}{w(x)}\right| = \frac{v(x)}{w(x)} = (-1)^2 \cdot \frac{v(x)}{w(x)}.$$

Stoga je $|f|$ rekurzivna funkcija.
Budući da su f i g rekurzivne postoje rekurzivne funkcije $\widetilde{v_1}, \widetilde{v_2} : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ i $w_1, w_2 : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je

$$f(x) = \frac{\widetilde{v_1}(x)}{w_1(x)} \text{ i } g(x) = \frac{\widetilde{v_2}(x)}{w_2(x)}.$$

Vrijedi

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x) = \frac{\widetilde{v_1}(x)}{w_1(x)}+\frac{\widetilde{v_2}(x)}{w_2(x)} = \frac{(\widetilde{v_1} \cdot w_2)(x) + (\widetilde{v_2} \cdot w_1)(x)}{w_1(x) \cdot w_2(x)} = \frac{(\widetilde{v_1} \cdot w_2 + \widetilde{v_2} \cdot w_1)(x)}{(w_1 \cdot w_2)(x)}$$

pri čemu u brojnicima ovih razlomaka na w_1 i w_2 gledamo kao na funkcije sa $\mathbb{N}^k$ u $\mathbb{Z}$. Iz propozicije 2.1.5 slijedi da je $f + g$ rekurzivna funkcija.
Analogno dobivamo da je $f \cdot g$ rekurzivna funkcija. □

Iz prethodne propozicije lagano dobivamo sljedeću tvrdnju:

Korolar 2.2.3. *Neka su $n, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka su $f_1, \dots, f_n : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivne funkcije. Tada su i funkcije $f_1 + f_2 + ... + f_n$ i $f_1 \cdot f_2 \cdot ... \cdot f_n$ isto rekurzivne.*

Dokaz. Slijedi lako indukcijom iz prethodne propozicije. □

Propozicija 2.2.4. *Neka su $n, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka su $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ i $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{Q}$ rekurzivne funkcije. Tada je i*

$$f \circ g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$$

rekurzivna funkcija.

Dokaz. Budući da je f rekurzivna, postoje rekurzivne funkcije $u, v, w : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ takve da je $w(x) \neq 0$ i

$$f(x) = (-1)^{u(x)} \cdot \frac{v(x)}{w(x)}$$

, za svaki $x \in \mathbb{N}^n$. Vrijedi

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (-1)^{u(g(x))} \cdot \frac{v(g(x))}{w(g(x))} = (-1)^{(u \circ g)(x)} \cdot \frac{(v \circ g)(x)}{(w \circ g)(x)}.$$

Zaključujemo da je $f \circ g$ rekurzivna jer su $u \circ g, v \circ g, w \circ g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije. □

2.3 Rekurzivne funkcije $\mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$

Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ funkcija. Za f kažemo da je **rekurzivna funkcija** ako postoji rekurzivna funkcija $F : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ takva da je

$$|f(x) - F(x,i)| < 2^{-i},$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ i za svaki $i \in \mathbb{N}$. Za takvu funkciju F kažemo da je **rekurzivna aproksimacija** od f.

Primjer 2.3.1. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivna funkcija. Tada je f rekurzivna i kao funkcija sa $\mathbb{N}^k$ u $\mathbb{R}$.*
Naime, neka je $F : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ funkcija definirana sa

$$F(x,i) = f(x),$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ i za svaki $i \in \mathbb{N}$. Tada je $F = f \circ g$, gdje je $g : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}^k$ funkcija definirana sa

$$g(x_1, \ldots, x_k, i) = (x_1, \ldots, x_k).$$

Funkcija g je rekurzivna jer su njene komponentne funkcije rekurzivne. Stoga je i F rekurzivna funkcija (propozicija 2.2.4).
Iz definicije funkcije F očito je da vrijedi

$$|f(x) - F(x,i)| < 2^{-i},$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ i za svaki $i \in \mathbb{N}$. Prema tome F je rekurzivna aproksimacija od f, to jest f je rekurzivna kao funkcija sa $\mathbb{N}^k$ u $\mathbb{R}$.

Lema 2.3.2. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$. Pretpostavimo da je $F : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ rekurzivna funkcija takva da je*

$$|f(x) - F(x,i)| < 2 \cdot 2^{-i},$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ i za svaki $i \in \mathbb{N}$. Tada je f rekurzivna funkcija.

Dokaz. Neka je $G : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ funkcija definirana sa

$$G(x,i) = F(x, i+1),$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ i za svaki $i \in \mathbb{N}$. Imamo $G = F \circ H$ gdje je $H : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}^{k+1}$ funkcija definirana sa

$$H(x,i) = (x, i+1).$$

Funkcija H je očito rekurzivna pa je stoga i G rekurzivna funkcija.
Neka su $x \in \mathbb{N}^k$, $i \in \mathbb{N}$. Tada je

$$|f(x) - G(x,i)| = |f(x) - F(x,i+1)| < 2 \cdot 2^{-(i+1)} = 2^{-i}.$$

Dakle

$$|f(x) - G(x,i)| < 2^{-i}$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ i za svaki $i \in \mathbb{N}$. Prema tome, f je rekurzivna funkcija. □

Propozicija 2.3.3. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka su $f, g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ rekurzivne funkcije. Tada su i funkcije*

$$-f, |f|, f + g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$$

rekurzivne.

Dokaz. Neka su $F, G : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivne aproksimacije od f, g.
Neka su $x \in \mathbb{N}^k$, $i \in \mathbb{N}$. Tada je

$$|(-f)(x) - (-F)(x,i)| = |-f(x) - (-F(x,i))| = |-f(x) + F(x,i)| = |f(x) - F(x,i)| < 2^{-i}.$$

Prema tome $-F$ je rekurzivna aproksimacija od $-f$.
Nadalje

$$||f|(x) - |F|(x,i)| = ||f(x)| - |F(x,i)|| \le |f(x) - F(x,i)| < 2^{-i}.$$

Stoga je $|F|$ rekurzivna aproksimacija od $|f|$.
Vrijedi

$$\begin{aligned} &|(f+g)(x) - (F+G)(x,i)| \\ &= |f(x) + g(x) - F(x,i) - G(x,i)| \\ &= |f(x) - F(x,i) + g(x) - G(x,i)| \\ &\le |f(x) - F(x,i)| + |g(x) - G(x,i)| \\ &< 2^{-i} + 2^{-i} = 2 \cdot 2^{-i}. \end{aligned}$$

Dakle,

$$|(f+g)(x) - (F+G)(x,i)| < 2 \cdot 2^{-i}$$

pa iz činjenice da je $F+G$ rekurzivna funkcija i prethodne leme slijedi da je $F+G$ rekurzivna funkcija. □

Propozicija 2.3.4. *Neka su $k, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, neka je $g : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}^k$ rekurzivna funkcija te neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ rekurzivna funkcija. Tada je $f \circ g : \mathbb{N}^n \to \mathbb{R}$ rekurzivna funkcija.*

Dokaz. Budući da je f rekurzivna postoji rekurzivna funkcija $F : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ takva da za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ i za svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$|f(x) - F(x,i)| < 2^{-i}.$$

Tada za svaki $x \in \mathbb{N}^n$ i za svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$|f(g(x)) - F(g(x),i)| < 2^{-i} \tag{2.2}$$

Definirajmo funkciju $H : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{Q}$ sa

$$H(x,i) = F(g(x),i)$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^n$ i za svaki $i \in \mathbb{N}$. Tada iz (2.2) slijedi

$$|(f \circ g)(x) - H(x,i)| < 2^{-i},$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^n$ i za svaki $i \in \mathbb{N}$. Preostaje još dokazati da je H rekurzivna. Vrijedi $H = F \circ h$ gdje je $h : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}^{k+1}$ funkcija definirana sa

$$h(x,i) = (g(x),i),$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^n$ i za svaki $i \in \mathbb{N}$. Stoga je dovoljno pokazati da je h rekurzivna funkcija. Tada će iz propozicije 2.2.4 slijediti da je H rekurzivna.
Neka su $h_1, ..., h_{k+1} : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ komponentne funkcije od h. Tada je

$$h_1(x_1, ..., x_n, i) = g_1(x_1, ..., x_n),$$

$$\vdots$$

$$h_k(x_1, ..., x_n, i) = g_k(x_1, ..., x_n),$$

$$h_{k+1}(x_1, ..., x_n, i) = i.$$

Iz ovoga je jasno da su komponentne funkcije od h rekurzivne. Dakle, h je rekurzivna i time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Lema 2.3.5. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je $S \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$ rekurzivan skup takav da za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $(x,i) \in S$. Tada postoji rekurzivna funkcija $\varphi : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takva da je*

$$(x, \varphi(x)) \in S,$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$.

Dokaz. Definirajmo $\varphi : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ sa

$$\varphi(x) = \mu i((x, i) \in S).$$

Funkcija je rekurzivna prema propoziciji 1.2.4 i to je tražena funkcija. $\square$

Propozicija 2.3.6. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka su A, B rekurzivni podskupovi od $\mathbb{N}^k$. Tada su i*

$$A \cup B, A \cap B \text{ i } A^c$$

rekurzivni podskupovi od $\mathbb{N}^k$.

Dokaz. Neka je $x \in \mathbb{N}^k$. Tada je

$$\chi_{A \cup B}(x) = \mathrm{sg}(\chi_A(x) + \chi_B(x)).$$

Dakle

$$\chi_{A \cup B} = \mathrm{sg} \circ (\chi_A + \chi_B)$$

što znači da je $\chi_{A \cup B}$ rekurzivna funkcija, odnosno $A \cup B$ rekurzivan skup.
Nadalje

$$\chi_{A \cap B}(x) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x),$$

$$\chi_{A^c}(x) = \overline{\mathrm{sg}}(\chi_A(x)).$$

Iz ovoga zaključujemo da su $\chi_{A \cap B}$ i χ_{A^c} rekurzivne funkcije odnosno $A \cap B$ i A^c rekurzivni skupovi. $\square$

Propozicija 2.3.7. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je $h : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivna funkcija. Neka su*

$$A = \left\{x \in \mathbb{N}^k \mid h(x) > 0\right\},$$

$$B = \left\{x \in \mathbb{N}^k \mid h(x) = 0\right\},$$

$$C = \left\{x \in \mathbb{N}^k \mid h(x) \geq 0\right\}.$$

Tada su A, B i C rekurzivni skupovi.

Dokaz. Budući da je h rekurzivna, postoje rekurzivne funkcije $u, v, w : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je $w(x) \neq 0$ i

$$h(x) = (-1)^{u(x)} \cdot \frac{v(x)}{w(x)}.$$

Imamo

$$A = \left\{x \in \mathbb{N}^k \mid h(x) > 0\right\}$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{N}^k \mid (-1)^{u(x)} \cdot \frac{v(x)}{w(x)} > 0 \right\}$$
$$= \left\{ x \in \mathbb{N}^k \mid v(x) > 0 \text{ i } u(x) \in 2\mathbb{N} \right\}.$$

Stoga za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$\chi_A(x) = \mathrm{sg}(v(x)) \cdot \chi_{2\mathbb{N}}(u(x)).$$

Iz ovoga slijedi da je χ_A umnožak funkcija $\mathrm{sg} \circ v$ i $\chi_{2\mathbb{N}} \circ u$ koje su rekurzivne ($2\mathbb{N}$ je rekurzivan skup prema primjeru 1.2.8). Stoga je χ_A rekurzivna funkcija odnosno A je rekurzivan skup.
Vrijedi

$$B = \left\{ x \in \mathbb{N}^k \mid h(x) = 0 \right\}$$
$$= \left\{ x \in \mathbb{N}^k \mid (-1)^{u(x)} \cdot \frac{v(x)}{w(x)} = 0 \right\}$$
$$= \left\{ x \in \mathbb{N}^k \mid v(x) = 0 \right\},$$

pa je $\chi_B(x) = \overline{\mathrm{sg}}(v(x))$. Prema tome χ_B je rekurzivna funkcija što povlači da je B rekurzivan skup. Očito je $C = A \cup B$ pa iz propozicije 2.3.6 slijedi da je C rekurzivan skup. $\square$

Korolar 2.3.8. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka su $f, g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivne funkcije. Neka su*

$$A = \left\{ x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) < g(x) \right\},$$
$$B = \left\{ x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) = g(x) \right\},$$
$$C = \left\{ x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) \leq g(x) \right\}.$$

Tada su A, B i C rekurzivni skupovi.

Dokaz. Definirajmo $h : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ sa

$$h(x) = g(x) - f(x).$$

Vrijedi

$$h = g + (-f)$$

pa iz propozicije 2.2.2 slijedi da je h rekurzivna funkcija. Imamo

$$A = \left\{ x \in \mathbb{N}^k \mid h(x) > 0 \right\},$$
$$B = \left\{ x \in \mathbb{N}^k \mid h(x) = 0 \right\},$$
$$C = \left\{ x \in \mathbb{N}^k \mid h(x) \geq 0 \right\},$$

pa iz propozicije 2.3.7 slijedi da su A, B i C rekurzivni skupovi. $\square$

Primjer 2.3.9. *Neka je $h : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ funkcija definirana sa*

$$h(x) = (-1)^{e(x,0)} \cdot \frac{e(x,1)}{e(x,2)+1}.$$

Tada je h rekurzivna funkcija prema propoziciji 1.2.14. Tvrdimo da je h surjekcija. Neka je $y \in \mathbb{Q}$. Tada je

$$y = (-1)^a \cdot \frac{b}{c+1}$$

gdje su $a, b, c \in \mathbb{N}$. Neka je $x = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$. Tada je

$$e(x,0) = a,$$

$$e(x,1) = b,$$

$$e(x,2) = c$$

pa je

$$h(x) = (-1)^a \cdot \frac{b}{c+1}$$

to jest $h(x) = y$.

Primjer 2.3.10. *Neka je $h : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ funkcija definirana sa*

$$h(x) = \frac{e(x,0)}{e(x+1)+1}.$$

Očito je h rekurzivna funkcija. Tvrdimo da je

$$Im\ h = [0, \infty\rangle \cap \mathbb{Q}.$$

Očito je $h(x) \geq 0$, za svaki $x \in \mathbb{N}$, stoga je

$$Im\ h \subseteq [0, \infty\rangle \cap \mathbb{Q}.$$

Obratno neka je $y \in [0, \infty\rangle \cap \mathbb{Q}$. Tada je

$$y = \frac{a}{b+1},$$

gdje su $a, b \in \mathbb{N}$. Neka je

$$x = 2^a \cdot 3^b.$$

Tada je

$$h(x) = \frac{a}{b+1} = y.$$

Prema tome, $y \in Im\ h$.. Time smo pokazali da je $Im\ h = [0, \infty\rangle \cap \mathbb{Q}$.

Lema 2.3.11. *Neka je* $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$ *te neka je* $\epsilon > 0$. *Tada postoji nenegativan racionalan broj* r *takav da je*

$$r \leq x < r + \epsilon.$$

Dokaz. Ako je $x = 0$ onda uzmemo $r = 0$ i tvrdnja je jasna.
Pretpostavimo da je $x > 0$. Promotrimo prvo slučaj kada je

$$0 \leq x - \epsilon.$$

Vrijedi $x - \epsilon < x$ pa postoji racionalan broj r takav da je

$$x - \epsilon < r < x$$

iz čega slijedi da je

$$r \leq x < r + \epsilon.$$

Uzmimo sada da je

$$x - \epsilon < 0.$$

Tada uzmemo $r = 0$ i imamo

$$r \leq x < \epsilon = r + \epsilon.$$

Time je tvrdnja leme dokazana. □

Teorem 2.3.12. *Neka je* $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ *te neka je* $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ *rekurzivna funkcija takva da je* $f(x) \geq 0$ *za svaki* $x \in \mathbb{N}^k$. *Tada je funkcija* $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ *definirana sa*

$$g(x) = \sqrt{f(x)}$$

rekurzivna.

Dokaz. Neka je $h : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ rekurzivna funkcija takva da je $Im\, h = [0, \infty\rangle \cap \mathbb{Q}$. Takva funkcija postoji prema primjeru 2.3.10.
Neka su $x \in \mathbb{N}^k$, $i \in \mathbb{N}$. Prema lemi 2.3.11 postoji $r \in [0, \infty\rangle \cap \mathbb{Q}$. takav da je

$$r \leq \sqrt{f(x)} < r + 2^{-i} \tag{2.3}$$

Imamo $r = h(j)$, za neki $j \in \mathbb{N}$ pa iz (2.3) slijedi

$$h(j)^2 \leq f(x) < (h(j) + 2^{-i})^2.$$

Neka je

$$S = \left\{(x, i, j) \in \mathbb{N}^{k+2} \mid x \in \mathbb{N}^k, i, j \in \mathbb{N} \text{ i } h(j)^2 \leq f(x) < (h(j) + 2^{-i})^2\right\}.$$

Dakle, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ i svaki $i \in \mathbb{N}$ postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je $(x, i, j) \in S$.
Neka je

$$S_1 = \left\{(x, i, j) \in \mathbb{N}^{k+2} \mid x \in \mathbb{N}^k, i, j \in \mathbb{N} \text{ i } f(x) < (h(j) + 2^{-i})^2\right\}.$$

Neka su $F, G : \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{Q}$ funkcije definirane sa

$$F(x, i, j) = f(x),$$

$$G(x, i, j) = h(j) + 2^{-i}.$$

Funkcija F je kompozicija funkcije $\mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N}^k, (x, i, j) \longmapsto x$ (koja je rekurzivna jer su joj komponentne funkcije projekcije) i funkcije $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$. Stoga je F rekurzivna funkcija prema propoziciji 2.2.4.
Slično zaključujemo da je G rekurzivna kao zbroj rekurzivnih funkcija.
No, tada je i

$$G \cdot G : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$$

rekurzivna funkcija. Uočimo da je

$$S_1 = \left\{y \in \mathbb{N}^{k+2} \mid F(y) < (G \cdot G)(y)\right\}.$$

Iz korolara 2.3.8 slijedi da je S_1 rekurzivan skup. Analogno zaključujemo da je skup

$$S_2 = \left\{(x, i, j) \in \mathbb{N}^{k+2} \mid x \in \mathbb{N}^k, i, j \in \mathbb{N} \text{ i } h(j)^2 < f(x)\right\}$$

rekurzivan. Vrijedi $S = S_1 \cap S_2$ pa iz propozicije 2.3.6 slijedi da je S rekurzivan skup.
Budući da za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ i za svaki $i \in \mathbb{N}$ postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je $(x, i, j) \in S$, prema lemi 2.3.5 postoji rekurzivna funkcija $\varphi : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ takva da je

$$(x, i, \varphi(x, i)) \in S,$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ i za svaki $i \in \mathbb{N}$.
Neka su $x \in \mathbb{N}^k, i \in \mathbb{N}$. Iz definicije skupa S slijedi da je tada

$$(h(\varphi(x, i)))^2 \leq f(x) < (h(\varphi(x, i)) + 2^{-i})^2$$

pa je

$$h(\varphi(x, i)) \leq \sqrt{f(x)} < h(\varphi(x, i)) + 2^{-i}.$$

Stoga je

$$0 \leq \sqrt{f(x)} - h(\varphi(x, i)) < 2^{-i},$$

to jest

$$|g(x) - (h \circ \varphi)(x, i)| < 2^{-i}.$$

Prema propoziciji 2.2.4 $h \circ \varphi : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ je rekurzivna funkcija pa imamo da je $h \circ \varphi$ rekurzivna aproksimacija od g. Prema tome, g je rekurzivna funkcija. $\square$

Poglavlje 3

Izračunljivi metrički prostori

3.1 Metrički prostori

Neka je X neprazan skup te neka je $d : X \times X \to \mathbb{R}$ funkcija. Za d kažemo da je **metrika** na skupu X ako za sve $x, y, z \in X$ vrijedi sljedeće:

1. $d(x, y) \geq 0$
2. $d(x, y) = 0$ ako i samo ako $x = y$
3. $d(x, y) = d(y, x)$
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Ako je d metrika na X onda za uređeni par (X, d) kažemo da je **metrički prostor**.

Primjer 3.1.1. *Ako je $(V, +, \cdot)$ realni vektorski prostor onda je norma na $(V, +, \cdot)$ svaka funkcija $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ koja ima sljedeća svojstva (za $x \in V$ sa $\|x\|$ označavamo vrijednost funkcije $\|\cdot\|$ na X):*

1. $\|x\| \geq 0$, *za svaki* $x \in V$
2. $\|x\| = 0 \iff x = 0_v$
3. $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$, *za svaki* $x \in V$ *i za svaki* $\lambda \in \mathbb{R}$
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, *za sve* $x, y \in V$

Pretpostavimo da je $(V, +, \cdot)$ realni vektorski prostor te da je $\|\cdot\|$ norma na $(V, +, \cdot)$. Definirajmo funkciju $d : V \times V \to \mathbb{R}$ sa

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Tada je d metrika na V. Provjerimo to:
Očito je $d(x, y) \geq 0$ za sve $x, y \in V$.
Nadalje, ako su $x, y \in V$ onda je

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow \|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0_v \Leftrightarrow x = y$$

Za sve $x, y \in V$ vrijedi

$$d(x, y) = \|x - y\| = \|(-1) \cdot (y - x)\| = |-1| \cdot \|y - x\| = \|y - x\| = d(y, x).$$

Neka su $x, y, z \in V$. Imamo

$$d(x, y) = \|x - y\| = \|x - z + z - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| = d(x, z) + d(z, y),$$

dakle

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

*Za d kažemo da je **metrika inducirana normom** $\|\cdot\|$.*

Primjer 3.1.2. *Neka je $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa*

$$\|(x_1, x_2, ..., x_n)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 ... + x_n^2}.$$

Tada je $\|\cdot\|$ norma na $\mathbb{R}^n$ (pri čemu na $\mathbb{R}^n$ promatramo standardnu strukturu vektorskog prostora).
Naime, svojstva $1, 2, 3$ iz definicije norme (primjer 3.1.1) se lako provjere.
Da bismo dokazali svojstvo 4 potrebno je dokazati da za sve $x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\sqrt{(x_1 + y_1)^2 + ... + (x_n + y_n)^2} \leq \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2} + \sqrt{y_1^2 + ... + y_n^2}.$$

Kvadriranjem i sređivanjem dobiva se da je ova nejednakost ekvivalentna sa

$$x_1 y_1 + ... + x_n y_n \leq \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + ... + y_n^2}.$$

Stoga je dovoljno dokazati da je

$$(x_1 y_1 + ... + x_n y_n)^2 \leq (x_1^2 + ... + x_n^2) \cdot (y_1^2 + ... + y_n^2). \tag{3.1}$$

Za fiksirane $x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n \in \mathbb{R}$ definirajmo funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sa

$$f(t) = (x_1 + t y_1)^2 + ... + (x_n + t y_n)^2.$$

Očito je

$$f(t) \geq 0,$$

za svaki $t \in \mathbb{R}$. S druge strane f možemo zapisati i kao

$$f(t) = t^2 \cdot (y_1^2 + ... + y_n^2) + 2 \cdot t \cdot (x_1 y_1 + ... + x_n y_n) + x_1^2 + ... + x_n^2.$$

Dakle, f je kvadratna funkcija pa iz $f(t) \geq 0$ za svaki $t \in \mathbb{R}$ slijedi da je diskriminanta kvadratne funkcije manja ili jednaka od 0. To povlači da vrijedi nejednakost (3.1).
Dakle, $\|\cdot\|$ je zaista norma na $\mathbb{R}^n$.
*Za $\|\cdot\|$ kažemo da je **euklidska norma** na $\mathbb{R}^n$.*
*Neka je $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ metrika inducirana ovom normom. Za d kažemo da je **euklidska metrika** na $\mathbb{R}^n$.*
Uočimo da za $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n)$ vrijedi

$$d(x, y) = \|x - y\| = \|(x_1 - y_1, ..., x_n - y_n)\|,$$

pa je

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}.$$

Uočimo da za $n = 1$ imamo da je

$$d(x, y) = \sqrt{(x - y)^2} = |x - y|.$$

Primjer 3.1.3. *Neka je X neprazan skup. Neka je $d : X \times X \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa*

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, x \neq y \\ 0, x = y \end{cases},$$

Dokažimo da je d metrika na X. Svojstva $1 - 3$ iz definicije metrike su očita.
Neka su $x, y, z \in X$. Nejednakost

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

je jasna u slučaju kada je $x = y$, a ako je $x \neq y$ onda je $z \neq x$ ili $z \neq y$ pa je jasno da je bar jedan od brojeva $d(x, z)$ i $d(z, y)$ jednak 1, iz čega zaključujemo da navedena nejednakost vrijedi. Dakle, d je metrika na X.
*Za d kažemo da je **diskretna metrika** na X.*

Definicija 3.1.4. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je $G \subseteq X$. Za G kažemo da je **gust skup** u metričkom prostoru (X, d) ako za svaki $x \in X$ i za svaki $\epsilon > 0$ postoji $g \in G$ takav da je*

$$d(x, g) < \epsilon.$$

Uočimo sljedeće: ako je (X, d) metrički prostor onda je X gust u (X, d).

Primjer 3.1.5. *Neka je d euklidska metrika na* $\mathbb{R}$ *te neka je* $G = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. *Tada je G gust skup u* $(\mathbb{R}, d)$.
To vidimo na sljedeći način: ako su $x \in \mathbb{R}$ *i* $\epsilon > 0$, *onda uzmemo* $g = x$, *ako je* $x \neq 0$ *i* $g = \frac{\epsilon}{2}$,*ako je* $x = 0$, *tada je* $g \in G$ *i* $d(x, g) < \epsilon$.
Dakle, G je gust u $(\mathbb{R}, d)$.

Dokažimo sada da je $\mathbb{Q}$ *gust skup u* $(\mathbb{R}, d)$. *Neka su* $x \in \mathbb{R}$ *i* $\epsilon > 0$. *Vrijedi* $x < x + \epsilon$ *pa postoji racionalan broj q takav da je*

$$x < q < x + \epsilon.$$

Slijedi da je $0 < q - x < \epsilon$. *Stoga je*

$$d(x, q) = |x - q| = |q - x| = q - x < \epsilon.$$

Dakle, za svaki $x \in \mathbb{R}$ *i za svaki* $\epsilon > 0$ *postoji* $q \in \mathbb{Q}$ *takav da je* $d(x, q) < \epsilon$. *Prema tome,* $\mathbb{Q}$ *je gust u* $(\mathbb{R}, d)$.

Primjer 3.1.6. *Neka je* $n \in \mathbb{N}$ *te neka je d euklidska metrika na* $\mathbb{R}^n$. *Tvrdimo da je* $\mathbb{Q}^n$ *gust skup u* $(\mathbb{R}^n, d)$.
Neka je $x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, ..., x_n)$ *te* $\epsilon > 0$. *Neka je* $i \in \{1, ..., n\}$.
Budući da je $\mathbb{Q}$ *gust u* $(\mathbb{R}, p)$ *pri čemu je p euklidska metrika na* $\mathbb{R}$, *postoji racionalan broj* q_i *takav da je*

$$p(x_i, q_i) < \frac{\epsilon}{\sqrt{n}},$$

to jest

$$|x_i - q_i| < \frac{\epsilon}{\sqrt{n}}.$$

Neka je $q = (q_1, ..., q_n)$. *Imamo*

$$d(x, q) = \sqrt{(x_1 - q_1)^2 + ... + (x_n - q_n)^2} < \sqrt{\frac{\epsilon^2}{n} + ... + \frac{\epsilon^2}{n}} = \sqrt{n \cdot \frac{\epsilon^2}{n}} = \sqrt{\epsilon^2} = \epsilon.$$

Dakle, $d(x, q) < \epsilon$ *i* $q \in \mathbb{Q}^n$. *Prema tome,* $\mathbb{Q}^n$ *je gust u* $\mathbb{R}^n$.

Definicija 3.1.7. *Neka je* (X, d) *metrički prostor te neka je* (a_n) *niz u X. Za niz* (a_n) *kažemo da je* ***gust*** *u* (X, d) *ako je njegova slika, skup* $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ *gust u* (X, d). *Dakle, niz* (a_n) *u X je gust u metričkom prostoru* (X, d) *ako i samo ako za svaki* $x \in X$ *i za svaki* $\epsilon > 0$ *postoji* $n \in \mathbb{N}$ *takav da je*

$$d(a_n, x) < \epsilon.$$

Primjer 3.1.8. *Neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}$. Neka je (a_i) niz u $\mathbb{R}$ definiran sa*

$$a_i = (-1)^{e(i,0)} \cdot \frac{e(i,1)}{e(i,2)+1}.$$

Tada je $\{a_i \mid i \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Q}$ (primjer 2.3.10). Iz primjera 3.1.6 slijedi da je (a_i) gust niz u $(\mathbb{R}, d)$.

Primjer 3.1.9. *Neka je $n \in \mathbb{N}$ te neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}^n$. Neka je (a_i) niz u $\mathbb{R}^n$ definiran sa*

$$a_i = \left((-1)^{e(i,0)} \cdot \frac{e(i,1)}{e(i,2)+1}, \cdots, (-1)^{e(i,3j-3)} \cdot \frac{e(i,3j-2,)}{e(i,3j-1)+1}, \cdots, (-1)^{e(i,3n-3)} \cdot \frac{e(i,3n-2,)}{e(i,3n-1)+1} \right).$$

Očito je $a_i \in \mathbb{Q}^n$, za svaki $i \in \mathbb{N}$. Dokažimo sada da je svaki element iz $\mathbb{Q}^n$ oblika a_i za neki $i \in \mathbb{N}$.
Ako je $q \in \mathbb{Q}^n$ onda postoje brojevi $a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n, c_1, \cdots, c_n$ takvi da je

$$q = \left((-1)^{a_1} \cdot \frac{b_1}{c_1+1}, \cdots, (-1)^{a_j} \cdot \frac{b_j}{c_j+1}, \cdots, (-1)^{a_n} \cdot \frac{b_n}{c_n+1} \right).$$

Definirajmo

$$i = p_0^{a_1} \cdot p_1^{b_1} \cdot p_2^{c_1} \cdot, \cdots, p_{3j-3}^{a_j} \cdot p_{3j-2}^{b_j} \cdot p_{3j-1}^{c_j} \cdot, \cdots, p_{3n-3}^{a_n} \cdot p_{3n-2}^{b_n} \cdot p_{3n-1}^{c_n}.$$

Tada je $a_i = q$. Prema tome $\{a_i \mid i \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Q}^n$. Iz primjera 3.1.6 slijedi da je niz (a_i) gust u $(\mathbb{R}^n, d)$.

Primjer 3.1.10. *Neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}$ te neka je (a_i) niz iz primjera 3.1.8. Neka je $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa*

$$h(i,j) = d(a_i, a_j).$$

Tvrdimo da je h rekurzivna funkcija. Za sve $i, j \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$h(i,j) = \left| a_i - a_j \right|.$$

Definirajmo $f, g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{Q}$ sa

$$f(i,j) = a_i,$$
$$g(i,j) = a_j.$$

Tada je f kompozicija funkcija a i I_1^2, a g je kompozicija funkcija a i I_2^2. Stoga su f i g rekurzivne (iz definicije funkcije a, to jest niza a, jasno je da je a rekurzivna kao funkcija sa $\mathbb{N}$ u $\mathbb{Q}$). Vrijedi

$$h = |f + (-g)|,$$

pa iz propozicije 2.2.2 slijedi da je h rekurzivna kao funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{Q}$. Stoga je h rekurzivna kao funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$.

Napomena 3.1.11. *U prethodnom primjeru smo zapravo dokazali sljedeću tvrdnju:*
Ako je a_i niz u $\mathbb{R}$ koji je rekurzivan kao funkcija sa $\mathbb{N}$ u $\mathbb{Q}$ onda je funkcija $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$,

$$h(i, j) = d(a_i, a_j)$$

rekurzivna pri čemu je d euklidska metrika na $\mathbb{R}$. Zapravo iz propozicije 2.3.3 slijedi da je za rekurzivnost funkcije h dovoljno da je a rekurzivna kao funkcija sa $\mathbb{N}$ u $\mathbb{R}$.

Propozicija 3.1.12. *Neka je $n \in \mathbb{N}$ te d euklidska metrika na $\mathbb{R}^n$. Neka su $a^1, \dots, a^n : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ rekurzivne funkcije. Definirajmo niz (a_i) u $\mathbb{R}^n$ sa*

$$a_i = \left(a_i^1, \dots, a_i^n\right).$$

Tada je funkcija $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$ definirana sa

$$h(i, j) = d(a_i, a_j)$$

rekurzivna.

Dokaz. Neka su $i, j \in \mathbb{N}$. Tada je $h(i, j) = d(\left(a_i^1, \dots, a_i^n\right), \left(a_j^1, \dots, a_j^n\right))$ to jest

$$h(i, j) = \sqrt{(a_i^1 - a_j^1)^2 + \dots + (a_i^n - a_j^n)^2}.$$

Definirajmo funkciju $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{Q}$ sa

$$f(i, j) = (a_i^1 - a_j^1)^2 + \dots + (a_i^n - a_j^n)^2.$$

Tada je

$$h(i, j) = \sqrt{f(i, j)}$$

za sve $i, j \in \mathbb{N}$ pa je prema teoremu 2.3.12 funkcija h rekurzivna ako je funkcija f rekurzivna.
Dokažimo da je f rekurzivna. Za $k \in \{1, \dots, n\}$ neka je $g_k : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{Q}$ funkcija definirana sa

$$g_k(i, j) = (a_i^k - a_j^k)^2,$$

za sve $i, j \in \mathbb{N}$. Očito je da je g_k rekurzivna funkcija za svaki $k \in \{1, \dots, n\}$. Iz $f = g_1 + \dots + g_n$ i korolara 2.2.3 slijedi da je f rekurzivna funkcija. Prema tome h je rekurzivna funkcija. $\square$

3.2 Izračunljivi metrički prostori

Definicija 3.2.1. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je α gust niz u (X, d) takav da je funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$,*

$$(i, j) \longmapsto d\left(\alpha_i, \alpha_j\right)$$

rekurzivna. Tada za (X, d, α) kažemo da je ***izračunljiv metrički prostor****.*

Primjer 3.2.2. *Neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}$. Neka je α niz u $\mathbb{R}$ definiran sa*

$$\alpha_i = (-1)^{e(i,0)} \cdot \frac{e(i, 1)}{e(i, 2) + 1}.$$

Tada je prema primjeru 3.1.8 α gust niz u $(\mathbb{R}, d)$, a prema primjeru 3.1.10 funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$, $(i, j) \longmapsto d\left(\alpha_i, \alpha_j\right)$ je rekurzivna. Prema tome $(\mathbb{R}, d, \alpha)$ je izračunljiv metrički prostor.

Primjer 3.2.3. *Neka je $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}^n$. Neka su $a_1, \ldots, a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ funkcije definirane sa*

$$a^k(i) = (-1)^{e(i,3k-3)} \cdot \frac{e(i, 3k-2)}{e(i, 3k-1) + 1},$$

$k \in \{1, \ldots, n\}, i \in \mathbb{N}$. Uočimo da su $a_1, \ldots, a_n$ rekurzivne funkcije.
Neka je α niz u $\mathbb{R}^n$ definiran sa

$$\alpha_i = \left(a_i^1, \ldots, a_i^n\right),$$

$i \in \mathbb{N}$. Prema primjeru 3.1.9 niz α je gust u $(\mathbb{R}^n, d)$.
Iz propozicije 3.1.12 slijedi da je funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$, $h(i, j) \longmapsto d(a_i, a_j)$ rekurzivna.
Prema tome $(\mathbb{R}^n, d, \alpha)$ je izračunljiv metrički prostor.

Definicija 3.2.4. *Neka je $x \in \mathbb{R}$. Za x kažemo da je* ***rekurzivan broj*** *ako postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ takva da je*

$$|x - f(i)| < 2^{-i},$$

za svaki $i \in \mathbb{N}$.

Primjer 3.2.5. *Svaki racionalan broj je rekurzivan.*
Uočimo prije svega ovo: ako je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ onda je svaka konstantna funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivna.
Naime, ako je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ konstantna funckija, onda postoje $a, b, c \in \mathbb{N}, c \geq 1$, takvi da je

$$f(x) = (-1)^a \cdot \frac{b}{c},$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$.
Definirajmo funkcije $u, v, w : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ *sa*

$$u(x) = a, v(x) = b, w(x) = c,$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. *Funkcije* u, v, w *su kao konstantne funkcije rekurzivne, a vrijedi*

$$f(x) = (-1)^{u(x)} \cdot \frac{v(x)}{w(x)},$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ *pa zaključujemo da je* f *rekurzivna funkcija.*
Neka je x *racionalan broj. Neka je* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ *funkcija definirana sa* $f(i) = x$, *za svaki* $i \in \mathbb{N}$. *Tada je* f *rekurzivna funkcija i vrijedi*

$$|x - f(i)| = 0 < 2^{-i},$$

za svaki $i \in \mathbb{N}$ *iz čega zaključujemo da je* x *rekurzivan broj.*

Primjer 3.2.6. *Neka je* $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ *te neka je* $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ *rekurzivna funkcija. Neka je* $a \in \mathbb{N}^k$. *Tada je* $g(a)$ *rekurzivan broj.*
Naime, budući da je g *rekurzivna postoji rekurzivna funkcija* $G : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ *takva da je*

$$|g(x) - G(x, i)| < 2^{-i},$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ *i za svaki* $i \in \mathbb{N}$.
Posebno, za $x = a$ *dobivamo*

$$|g(a) - G(a, i)| < 2^{-i},$$

za svaki $i \in \mathbb{N}$.
Neka je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ *funkcija definirana sa*

$$f(i) = G(a, i).$$

Funkcija f *je rekurzivna kao kompozicija rekurzivnih funkcija i vrijedi*

$$|g(a) - f(i)| < 2^{-i},$$

za svaki $i \in \mathbb{N}$. *Ovo znači da je* $g(a)$ *rekurzivan broj.*

Primjer 3.2.7. *Neka je* $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *funkcija definirana sa*

$$g(x) = \sqrt{2},$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. *Iz teorema 2.3.12 slijedi da je* g *rekurzivna funkcija. Prema prethodnom primjeru* $g(a)$ *je rekurzivan broj za svaki* $a \in \mathbb{N}$. *Dakle,* $\sqrt{2}$ *je rekurzivan broj.*

Uočimo sljedeće: ako je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor te $x \in X$ onda za svaki $i \in \mathbb{N}$ postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je
$$d(x, \alpha_j) < 2^{-i}.$$

Definicija 3.2.8. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor te $x \in X$. Kažemo da je x* ***izračunljiva točka*** *u (X, d, α) ako postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je*

$$d(x, \alpha_{f(i)}) < 2^{-i},$$

za svaki $i \in \mathbb{N}$.

Propozicija 3.2.9. *Neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}$ te neka je α niz iz primjera 3.2.2. Neka je $x \in \mathbb{R}$. Tada je x rekurzivan broj ako i samo ako je x izračunljiva točka u izračunljivom metričkom prostoru $(\mathbb{R}, d, \alpha)$.*

Dokaz. Pretpostavimo prvo da je x izračunljiva točka u $(\mathbb{R}, d, \alpha)$. Tada postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je
$$d(x, \alpha_{f(i)}) < 2^{-i},$$
za svaki $i \in \mathbb{N}$. Dakle,
$$|x - (\alpha \circ f)(i)| < 2^{-i},$$
za svaki $i \in \mathbb{N}$ pa budući da je $\alpha \circ f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ rekurzivna funkcija prema propoziciji 2.2.4 imamo da je x rekurzivan broj.
Obratno, pretpostavimo da je x rekurzivan broj. Tada postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ takva da je
$$|x - f(i)| < 2^{-i},$$
za svaki $i \in \mathbb{N}$. Neka je
$$S = \left\{(i, k) \in \mathbb{N}^2 \mid f(i) = \alpha(k)\right\}.$$
Imamo
$$S = \left\{(i, k) \in \mathbb{N}^2 \mid \left(f \circ I_1^2\right)(i, k) = \left(\alpha \circ I_2^2\right)(i, k)\right\}$$
pa iz korolara 2.3.8 i činjenice da su $f \circ I_1^2, \alpha \circ I_2^2 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{Q}$ rekurzivne funkcije slijedi da je S rekurzivan skup.
Nadalje, za svaki $i \in \mathbb{N}$ postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $(i, k) \in S$ (zato što je svaki racionalni broj oblika α_k za neki $k \in \mathbb{N}$). Iz leme 2.3.5 slijedi da postoji rekurzivna funkcija $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je
$$(i, g(i)) \in S,$$
za svaki $i \in \mathbb{N}$. To znači da je $f(i) = \alpha(g(i))$, za svaki $i \in \mathbb{N}$ pa slijedi da je
$$\left|x - \alpha_{g(i)}\right| < 2^{-i}$$

to jest
$$d\left(x, \alpha_{g(i)}\right) < 2^{-i},$$
za svaki $i \in \mathbb{N}$. Prema tome, x je izračunljiva točka u $(\mathbb{R}, d, \alpha)$. □

Definicija 3.2.10. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor te neka je $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ niz u X. Za (x_i) kažemo da je* ***izračunljiv niz*** *u (X, d, α) ako postoji rekurzivna funkcija $F : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da je*
$$d\left(x_i, \alpha_{F(i,k)}\right) < 2^{-k},$$
za sve $i, k \in \mathbb{N}$.

Propozicija 3.2.11. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor.*

1. *Ako je (x_i) izračunljiv niz u (X, d, α) onda je x_i izračunljiva točka u (X, d, α), za svaki $i \in \mathbb{N}$.*

2. *Ako je a izračunljiva točka u (X, d, α) onda je niz (x_i) definiran sa $x_i = a$, za svaki $i \in \mathbb{N}$ izračunljiv u (X, d, α).*

Dokaz. 1. Neka je (x_i) izračunljiv niz u (X, d, α). Tada postoji rekurzivna funkcija $F : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da je
$$d\left(x_i, \alpha_{F(i,k)}\right) < 2^{-k},$$
za sve $i, k \in \mathbb{N}$. Fiksirajmo $i \in \mathbb{N}$. Definirajmo funkciju $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sa
$$f(k) = F(i, k).$$
Funkcija f je kompozicija funkcija F, konstantne funkcije $\mathbb{N} \to \mathbb{N}, k \longmapsto i$ i funkcije I_1^1. Stoga je f rekurzivna funkcija. Iz definicije f je očito da je
$$d\left(x_i, \alpha_{f(k)}\right) < 2^{-k},$$
za svaki $k \in \mathbb{N}$. Prema tome, x_i je izračunljiva točka u (X, d, α).

2. Vrijedi $d\left(a, \alpha_{f(k)}\right) < 2^{-k}$, za svaki $k \in \mathbb{N}$ pri čemu je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija. Definirajmo $F : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ sa
$$F(i, k) = f(k).$$
Funkcija F je rekurzivna jer je kompozicija funkcija f i I_2^2. Nadalje, očito je
$$d\left(x_i, \alpha_{F(i,k)}\right) < 2^{-k},$$
za sve $i, k \in \mathbb{N}$. Prema tome, (x_i) je izračunljiv niz u (X, d, α).

□

Primjer 3.2.12. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Tada za sve $i, k \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$d\left(\alpha_i, \alpha_{I_1^2(i,k)}\right) = 0 < 2^{-k}.$$

Iz ovoga zaključujemo da je α izračunljiv niz u (X, d, α).
Posebno, α_i je izračunljiva točka za svaki $i \in \mathbb{N}$.

3.3 Rekurzivno prebrojivi skupovi

Definicija 3.3.1. *Neka je $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je $S \subseteq \mathbb{N}^n$. Za S kažemo da je* ***rekurzivno prebrojiv skup*** *u $\mathbb{N}^n$ ako je $S \neq \emptyset$ ili ako postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^n$ takva da je*

$$S = \{f(i) \mid i \in \mathbb{N}\}$$

(to jest takva da je S slika funkcije f).

Primjer 3.3.2. *Neka je S rekurzivan skup u $\mathbb{N}$, $S \neq \emptyset$. Odaberimo $a \in S$. Definirajmo funkciju $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sa*

$$f(x) = \begin{cases} x, x \in S \\ a, x \notin S \end{cases},$$

Tada je f rekurzivna prema propoziciji 1.2.3, a slika funkcije f je S.
Naime, za svaki $x \in \mathbb{N}$ je očito $f(x) \in S$. S druge strane, za svaki $x \in S$ vrijedi $x = f(x)$. Prema tome

$$\{f(x) \mid x \in \mathbb{N}\} = S.$$

Dakle, S je rekurzivno prebrojiv skup.

Lema 3.3.3. *Neka su $n, k, l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, neka su $f_1, \ldots, f_n : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^l$ rekurzivne funkcije te neka su $S_1, \ldots, S_n$ rekurzivni skupovi u N^k takvi da za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ postoji jedinstveni $i \in \{1, \ldots, n\}$ takav da je $x \in S_i$. Neka je $F : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^l$ funkcija definirana sa*

$$F_j(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{ako je } x \in S_1 \\ f_2(x), & \text{ako je } x \in S_2 \\ \quad\vdots & \\ f_n(x), & \text{ako je } x \in S_n \end{cases}.$$

Tada je F rekurzivna.

Dokaz. Za $j \in \{1, \ldots, l\}$ neka je F_j $j - ta$ komponentna funkcija od F te za $i \in \{1, \ldots, n\}$ neka je $(f_i)_j$ $j - ta$ komponentna funkcija od f_i. Tada za svaki $j \in \{1, \ldots, l\}$ i svaki $x \in \mathbb{N}^k$

vrijedi

$$F_j(x) = \begin{cases} (f_1)_j(x), & \text{ako je } x \in S_1 \\ (f_2)_j(x), & \text{ako je } x \in S_2 \\ \quad \vdots & \\ (f_n)_j(x), & \text{ako je } x \in S_n \end{cases}.$$

Iz propozicije 1.2.3 slijedi da je F_j rekurzivna funkcija. Dakle, $F_1, \dots, F_l$ su rekurzivne funkcije pa slijedi da je F rekurzivna. □

Lema 3.3.4. *Neka su $k, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, neka je S rekurzivan skup u $\mathbb{N}^n$ te neka je $a : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ rekurzivna funkcija. Tada je skup $\left\{x \in \mathbb{N}^k \mid a(x) \in S\right\}$ rekurzivan.*

Dokaz. Označimo ovaj skup sa T. Tada za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$\chi_T(x) = \chi_S(a(x))$$

pa zaključujemo da je $\chi_T(x)$ rekurzivna funkcija. Prema tome, T je rekurzivan skup. □

Propozicija 3.3.5. *Neka je $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je S rekurzivan skup u $\mathbb{N}^n$. Tada je S rekurzivno prebrojiv.*

Dokaz. Tvrdnja je jasna ako je S prazan skup.
Pretpostavimo da je S neprazan. Neka je $a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^n$ funkcija definirana sa

$$a(x) = (e(x, 1), e(x, 2), \dots, e(x, n)).$$

Očito je a rekurzivna funkcija.
Nadalje, a je surjekcija: ako je $(y_1, \dots, y_n)$ onda za $x = p_1^{y_1}, \dots, p_n^{y_n}$ vrijedi $a(x) = (y_1, \dots, y_n)$.
Odaberimo $b \in S$, $b = (b_1, \dots, b_n)$. Definirajmo funkciju $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^n$ sa

$$f(x) = \begin{cases} a(x), a(x) \in S \\ \quad b, a(x) \notin S \end{cases}.$$

Iz leme 3.3.3 i leme 3.3.4 slijedi da je F rekurzivna funkcija.
Tvrdimo da je

$$\{f(x) \mid x \in \mathbb{N}\} = S. \tag{3.2}$$

Jasno je da je $f(x) \in S$, za svaki $x \in \mathbb{N}$.
Obratno, neka je $y \in S$. Budući da je a surjekcija postoji $x \in \mathbb{N}$ takav da je $a(x) = y$.
Imamo $f(x) = a(x)$, to jest

$$f(x) = y.$$

Prema tome, (3.2) vrijedi. Iz (3.2) zaključujemo da je S rekurzivno prebrojiv skup. □

Teorem 3.3.6. *Neka su $k, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je T rekurzivno prebrojiv skup u $\mathbb{N}^{k+n}$. Neka je $S \subseteq \mathbb{N}^k$ takav da za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi ekvivalencija*

$$x \in S \Leftrightarrow \text{postoji } y \in \mathbb{N}^n \text{ takav da je } (x, y) \in T \tag{3.3}$$

Tada je S rekurzivno prebrojiv skup.

Dokaz. Neka je $p : \mathbb{N}^{k+n} \to \mathbb{N}^k$ funkcija definirana sa

$$p(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n) = (x_1, \ldots, x_k).$$

Očito je p rekurzivna funkcija. Tvrdimo da je

$$S = p(T). \tag{3.4}$$

Neka je $x \in S$. Tada postoji $y \in \mathbb{N}^n$ takav da je $(x, y) \in T$. Očito je $x = p(x, y)$. Stoga je $x \in p(T)$.
Obratno, ako je $x \in p(T)$ onda je $x = p(t), t \in T$. Imamo $t = (t_1, t_2)$, gdje su $t_1 \in \mathbb{N}^k$,$t_2 \in \mathbb{N}^n$. Imamo

$$x = p(t) = p(t_1, t_2) = t_1,$$

dakle $x = t_1$ pa je

$$(x_1, t_2) = (t_1, t_2) \in T.$$

Iz (3.3) slijedi $x \in S$. Time smo dokazali da vrijedi (3.4).
Ako je $T = \emptyset$ onda je $S = \emptyset$ pa je tvrdnja jasna.
Pretpostavimo da je T neprazan. Tada postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^{k+n}$ takva da je

$$T = f(\mathbb{N}).$$

Iz (3.4) slijedi

$$S = p(T) = p(f(\mathbb{N})) = (p \circ f)(\mathbb{N}).$$

To znači da je S slika funkcije $p \circ f$ koja je očito rekurzivna.
Prema tome, S je rekurzivno prebrojiv skup. □

Lema 3.3.7. *Neka je $\epsilon > 0$. Tada postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $2^{-i} < \epsilon$.*

Dokaz. Dokažimo prvo indukcijom da je

$$i \leq 2^i, \tag{3.5}$$

za svaki $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
Za $i = 1$ tvrdnja je jasna.
Pretpostavimo da je $i \leq 2^i$ za neki $i \in \mathbb{N}$.

Imamo $1 \leq i$ pa je $i + 1 \leq i + i = 2i$. Dakle $i + 1 \leq 2i \leq 2 \cdot 2^i = 2^{i+1}$. Zaključak (3.5) vrijedi za svaki $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
Odaberimo sada $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ takav da je

$$\frac{1}{\epsilon} < i.$$

Slijedi $\frac{1}{\epsilon} < 2^i$ pa je $\frac{1}{2^i} < \epsilon$. □

Teorem 3.3.8. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ rekurzivna funkcija. Neka je*

$$S = \left\{ x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) > 0 \right\}.$$

Tada je S rekurzivno prebrojiv skup.

Dokaz. Neka je $F : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ rekurzivna aproksimacija od f. Dakle, F je rekurzivna funkcija i za sve $x \in \mathbb{N}^k, i \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$|F(x) - F(x, i)| < 2^{-i}.$$

Iz ovoga slijedi $f(x, i) - f(x) < 2^{-i}$ pa je

$$F(x, i) - 2^{-i} < f(x). \tag{3.6}$$

Također imamo $f(x) - F(x, i) < 2^{-i}$ pa je

$$f(x) - 2^{-i} < F(x, i). \tag{3.7}$$

Neka je $x \in \mathbb{N}^k$. Pretpostavimo da postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $2^{-i} < F(x, i)$. Tada je

$$0 < F(x, i) - 2^{-i}$$

pa iz (3.6) slijedi da je

$$0 < f(x),$$

to jest x.
Obratno, pretpostavimo da je $x \in S$. Tada je $0 < f(x)$ pa postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je

$$2^{-i} < \frac{f(x)}{2}.$$

Slijedi

$$2 \cdot 2^{-i} < f(x)$$

pa je

$$2^{-i} < f(x) - 2^{-i}.$$

Iz (3.7) zaključujemo da je

$$2^{-i} < F(x, i).$$

Neka je $T = \left\{(x_1, \ldots, x_k, i) \in \mathbb{N}^{k+1} \mid 2^{-i} < F(x_1, \ldots, x_k, i)\right\}$. Za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$x \in S \Leftrightarrow \text{postoji } i \in \mathbb{N} \text{ takav da je } (x, i) \in T \tag{3.8}$$

Definirajmo $G : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ sa

$$G(x_1, \ldots, x_k, i) = \frac{1}{2^i}.$$

Očito je G rekurzivna funkcija. Vrijedi

$$T = \left\{z \in \mathbb{N}^{k+1} \mid G(z) < F(z)\right\}.$$

Iz korolora 2.3.8 slijedi da je T rekurzivan skup.
Posebno, T je rekurzivno prebrojiv pa iz (3.8) i teorema 3.3.6 slijedi da je S rekurzivno prebrojiv skup. □

Korolar 3.3.9. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka su $f, g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ rekurzivne funckije. Neka je*

$$S = \left\{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) < g(x)\right\}.$$

Tada je S rekurzivno prebrojiv skup.

Dokaz. Funkcija $g + (-f) : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ je rekurzivna prema propoziciji 2.3.3, a za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$x \in S \Leftrightarrow (g + (-f))(x) > 0,$$

dakle

$$S = \left\{x \in \mathbb{N}^k \mid (g + (-f))(x) > 0\right\}$$

pa tvrdnja slijedi iz prethodnog teorema. □

Lema 3.3.10. *Neka su $k, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka su $f, g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ rekurzivne funkcije. Neka je*

$$S = \left\{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) = g(x)\right\}.$$

Tada je S rekurzivan skup.

Dokaz. Neka su $f_1, \ldots, f_n : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ te $g_1, \ldots, g_n : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ komponentne funkcije od f i g. Za $i \in \{1, \ldots, n\}$ neka je

$$S_i = \left\{x \in \mathbb{N}^k \mid f_i(x) = g_i(x)\right\}.$$

Neka je $x \in \mathbb{N}^k$. Vrijede ekvivalencije

$$x \in S \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) = g(x)$$

$$\Leftrightarrow (f_1(x), \ldots, f_n(x)) = (g_1(x), \ldots, g_n(x))$$

$$\Leftrightarrow f_1(x) = g_1(x), \ldots, f_n(x) = g_n(x)$$

$$\Leftrightarrow x \in S, \ldots, x \in S_n$$

$$x \in S_1 \cap \ldots \cap S_n.$$

Iz propozicije 2.3.6 lako indukcijom slijedi da je presjek konačno mnogo rekurzivnih skupova rekurzivan skup. Stoga je dovoljno pokazati da su $S_1, \ldots, S_n$ rekurzivni skupovi. Neka je $i \in \{1, \ldots, n\}$. Funkcije $f_i, g_i : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ su rekurzivne i kao funkcije sa $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ pa rekurzivnost skupa S_i slijedi iz korolara 2.3.8. Time je lema dokazana. □

Teorem 3.3.11. *Neka su $k, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je $S \subseteq \mathbb{N}^{k+n}$ rekurzivno prebrojiv skup takav da za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ postoji $y \in \mathbb{N}^n$ takav da je $(x, y) \in S$. Tada postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ takva da je*

$$(x, f(x)) \in S,$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$.

Dokaz. Očito je S neprazan skup pa stoga postoji rekurzivna funkcija $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^{k+n}$ takva da je

$$S = \{h(i) \mid i \in \mathbb{N}\}.$$

Stoga za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ postoje $y \in \mathbb{N}^n$ i $i \in \mathbb{N}$ takvi da je

$$(x, y) = h(i). \tag{3.9}$$

Imamo $y = (y_1, \ldots, y_n)$. Definirajmo

$$z = p_0^i \cdot p_1^{y_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{y_n}.$$

Tada je

$$e(z, 1) = y_1, \ldots, e(z, n) = y_n, e(z, 0) = i$$

pa iz (3.9) slijedi

$$(x, e(z, 1), \ldots, e(z, n)) = h(e(z, 0)). \tag{3.10}$$

Dakle, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ postoji $z \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi (3.10).
Neka je T skup svih $(x, z) \in \mathbb{N}^{k+1}, x \in \mathbb{N}^k, z \in \mathbb{N}$ takvih da vrijedi (3.10). Neka su $a, b : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}^{k+n}$ funckije definirane sa

$$a(x_1, \ldots, x_k, z) = (x_1, \ldots, x_k, e(z, 1), \ldots, e(z, n)),$$

$$b(x_1, \dots, x_k, z) = h(e(z, 0)),$$

$x_1, \dots, x_k, z \in \mathbb{N}$. Neka su $a_1, \dots, a_{k+n} : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ komponentne funkcije od a. Tada je

$$a_1 = I_1^{k+1}, \dots, a_k = I_k^{k+1}$$

pa su $a_1, \dots, a_k$ rekurzivne funckije.
Za $i \in \{1, \dots, n\}$ funkcija a_{k+i} je kompozicija funkcija e, I_{k+1}^{k+1} i konstantne funkcije $\mathbb{N}^{k+1} \longmapsto \mathbb{N}, (x_1, \dots, x_k, z) \longmapsto i$. Stoga je a_{k+i} rekurzivna funkcija. Prema tome, a je rekurzivna funkcija..
Neka je $h' : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa

$$h'(x_1, \dots, x_k, z) = e(z, 0).$$

Tada je h' rekurzivna funkcija te vrijedi $b = h \circ h'$ pa slijedi da je b rekurzivna funkcija.
Iz definicije funkcija a i b te skupa T slijedi da je

$$T = \left\{ v \in \mathbb{N}^{k+1} \mid a(v) = b(v) \right\}.$$

Iz leme 3.3.10 slijedi da je T rekurzivan skup.
Znamo da za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ postoji $z \in \mathbb{N}$ takav da je $(x, z) \in T$. Iz leme 2.3.5 slijedi da postoji rekurzivna funkcija $\varphi : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takva da je

$$(x, \varphi(x)) \in T,$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Stoga, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ prema definiciji skupa T vrijedi

$$(x, e(\varphi(x), 1), \dots, (\varphi(x), n)) = h(e(\varphi(x), 0))$$

pa slijedi

$$(x, e(\varphi(x), 1), \dots, (\varphi(x), n)) \in S.$$

Definirajmo funkciju $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ sa

$$f(x) = (e(\varphi(x), 1), (\varphi(x), n)).$$

Tada je $(x, f(x)) \in S$, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Očito su komponentne funkcije od f rekurzivne pa je f rekurzivna funkcija. $\square$

Lema 3.3.12. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka su $a, a', b, b' \in X$. Tada je*

$$|d(a, b) - d(a', b')| \leq d(a, a') + d(b, b').$$

Dokaz. Koristeći nejednakost trokuta dobivamo

$$d(a,b) \le d(a,a') + d(a',b) \le d(a,a') + d(a',b') + d(b,b').$$

Iz toga slijedi

$$d(a,b) - d(a',b') \le d(a,a') + d(b,b'). \tag{3.11}$$

Analogno dobivamo

$$d(a',b') - d(a,b) \le d(a',a) + d(b',b). \tag{3.12}$$

Iz (3.11) i (3.12) zaključujemo da je

$$|d(a,b) - d(a',b')| \le d(a,a') + d(b,b').$$

□

Lema 3.3.13. *Neka je (X,d) metrički prostor te neka su $a,a',b,b' \in X$. Tada je*

$$|d(a,b) - d(a',b)| \le d(a,a').$$

Dokaz. Ovo slijedi iz prethodne leme za $b' = b$. □

Propozicija 3.3.14. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$, te neka je $F : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{R}$ rekurzivna funkcija takva da je*

$$|f(x) - F(x,i)| < 2^{-i}, \tag{3.13}$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ i za svaki $i \in \mathbb{N}$. Tada je f rekurzivna funkcija.

Dokaz. Neka je $\Phi : \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{Q}$ rekurzivna aproksimacija od F. Tada za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ i za sve $i, l \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$|F(x,i) - \Phi(x,i,l)| < 2^{-l}.$$

Posebno, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ i svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$|F(x,i) - \Phi(x,i,i)| < 2^{-i}.$$

Koristeći ovo i (3.13) dobivamo da za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ i svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\begin{aligned} |f(x,i) - \Phi(x,i,i)| &= \\ &= |f(x) - F(x,i) + F(x,i) - \Phi(x,i,i)| \\ &\le |f(x) - F(x,i)| + |F(x,i) - \Phi(x,i,i)| \\ &< 2^{-i} + 2^{-i} = 2 \cdot 2^{-i}. \end{aligned}$$

Dakle,

$$|f(x,i) - \Phi(x,i,i)| < 2 \cdot 2^{-i}.$$

Posebno, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ i svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$|f(x) - \Phi(x, i+1, i+1)| < 2 \cdot 2^{-(i+1)} = 2^{-i}. \tag{3.14}$$

Definirajmo funkciju $G : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ sa

$$G(x,i) = \Phi\,(x, i+1, i+1)\,.$$

Funkcija G je kompozicija funkcije $\mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}^{k+2}$,

$$(x_1, \ldots, x_k, i) \longmapsto (x_1, \ldots, x_k, i+1, i+1)$$

koja je očito rekurzivna i funkcije Φ. Stoga je G rekurzivna.
Prema (3.14) vrijedi

$$|f(x) - G(x,i)| < 2^{-i},$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ i za svaki $i \in \mathbb{N}$.
Zaključujemo da je f rekurzivna funkcija. □

Propozicija 3.3.15. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Neka je $x \in X$. Tada je x izračunljiva točka u (X, d, α) ako i samo ako je funkcija $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$,*

$$g(i) = d(x, \alpha_i)$$

rekurzivna.

Dokaz. Pretpostavimo da je x izračunljiva točka.
Tada postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je

$$d(x, \alpha_{f(k)}) < 2^{-k},$$

za svaki $k \in \mathbb{N}$. Neka su $i, k \in \mathbb{N}$. Koristeći lemu 3.3.13 dobivamo

$$\left| d(x, \alpha_i) - d(\alpha_{f(k)}, \alpha_i) \right| < 2^{-k}.$$

Dakle

$$\left| g(i) - d(\alpha_{f(k)}, \alpha_i) \right| < 2^{-k} \tag{3.15}$$

Definirajmo funkciju $G : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$ sa

$$G(i,k) = d(\alpha_{f(k)}, \alpha_i).$$

Neka je $\gamma : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa

$$\gamma(i, j) = d(\alpha_i, \alpha_j).$$

Tada je γ rekurzivna funkcija te za sve $i, k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$G(i, k) = \gamma(f(k), i).$$

Stoga je G kompozicija funkcije $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^2, (i, k) \longmapsto (f(k), i)$ i funkcije γ. Zaključujemo da je G rekurzivna funkcija. Prema (3.15) vrijedi

$$|g(i) - G(i, k)| < 2^{-k}.$$

Iz propozicije 3.3.14 slijedi da je g rekurzivna funkcija.
Obratno, pretpostavimo da je g rekurzivna. Definirajmo

$$S = \left\{(k, i) \mid g(i) < 2^{-k}\right\}.$$

Neka su $h, h' : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$ funkcije definirane sa

$$h(k, i) = g(i),$$

$$h'(k, i) = 2^{-k},$$

za sve $k, i \in \mathbb{N}$. Vrijedi

$$h = g \circ I_2^2$$

pa iz propozicije 2.3.4 slijedi da je h rekurzivna funkcija.
Definirajmo funkciju $H : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ sa

$$H(y, x) = x^y.$$

Znamo da je H rekurzivna. Neka je $\Phi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa

$$\Phi(k, i) = 2^k.$$

Imamo

$$\Phi(k, i) = H(I_1^2(k, i), 2)$$

iz čega zaključujemo da je Φ kompozicija funkcija H, I_1^2 i konstantne funkcije $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ s vrijednosšću 2. Prema tome Φ je rekurzivna funkcija. Vrijedi

$$h'(k, i) = (-1)^0 \frac{1}{\Phi(k, i)}$$

pa je očito h' rekurzivna kao funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{Q}$. Stoga je h' rekurzivna (kao funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$). Uočimo da je

$$S = \left\{(k, i) \in \mathbb{N}^2 \mid h(k, i) < h'(k, i)\right\}.$$

Iz korolara 3.3.9 slijedi da je S rekurzivno prebrojiv skup.
Neka je $k \in \mathbb{N}$. Budući da je α gust niz u (X, d) postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je

$$d(x, \alpha_i) < 2^{-k}$$

to jest

$$g(i) < 2^{-k}$$

što povlači da je $(k, i) \in S$. Dakle, za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $(k, i) \in S$. Prema teoremu 3.3.11 postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je

$$(k, f(k)) \in S,$$

za svaki $k \in \mathbb{N}$. Dakle, za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$g(f(k)) < 2^{-k},$$

to jest

$$d(x, \alpha_{f(k)}) < 2^{-k}.$$

Prema tome, x je izračunljiva točka u (X, d, α). □

Propozicija 3.3.16. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor te neka je (x_j) niz u X. Tada je (x_j) izračunljiv niz u (X, d, α) ako i samo ako je funkcija $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$,*

$$g(j, i) = d(x_j, \alpha_i)$$

rekurzivna.

Dokaz. Pretpostavimo da je (x_j) izračunljiv niz. Tada postoji rekurzivna funkcija $F : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da je

$$d(x_j, \alpha_{F(j,k)}) < 2^{-k}.$$

Neka su $i, j, k \in \mathbb{N}$. Iz leme 3.3.13 slijedi

$$\left|d(x_j, \alpha_i) - d(\alpha_{F(j,k)}, \alpha_i)\right| \leq d(x_j, \alpha_{F(j,k)}) < 2^{-k}.$$

Definirajmo $g : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{R}$ sa

$$G(j, i, k) = d(\alpha_{F(j,k)}, \alpha_i).$$

Analogno kao u dokazu prethodne propozicije dobivamo da je G rekurzivna funkcija.
Za sve $j, i, k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$|g(j, i) - G(j, i, k)| < 2^{-k}$$

pa iz propozicije 3.3.14 slijedi da je g rekurzivna funkcija.
Pretpostavimo sada da je g rekurzivna funkcija. Definirajmo

$$S = \left\{(j, k, i) \mid g(j, i) < 2^{-k}\right\}.$$

Neka su $h, h' : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{R}$ funkcije definirane sa

$$h(j, k, i) = g(j, i) \text{ i } h'(j, k, i) = 2^{-k},$$

$j, k, i \in \mathbb{N}$. Vrijedi

$$h = g \circ p$$

gdje je $p : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}^2$ funkcija definirana sa

$$p(j, k, i) = (j, i).$$

Očito je p rekurzivna funkcija pa iz propozicije 2.3.4 slijedi da je h rekurzivna. Analogno kao u dokazu prethodne propozcije vidimo da je h' rekurzivna funkcija.
Vrijedi

$$S = \{(j, k, i) \mid h(j, k, i) < h'(j, k, i)\}$$

pa iz korolara 3.3.9 slijedi da je S rekurzivno prebrojiv skup.
Neka su $j, k \in \mathbb{N}$. Budući da je α gust niz u (X, d) postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je

$$d(x_j, \alpha_i) < 2^{-k},$$

to jest

$$g(j, i) < 2^{-k}$$

pa slijedi da je $(j, k, i) \in S$. Dakle, za sve $j, k \in \mathbb{N}$ postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $(j, k, i) \in S$.
Prema teoremu 3.3.11 postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da je

$$(j, k, f(j, k)) \in S,$$

za sve $j, k \in \mathbb{N}$. Iz definicije skupa S slijedi da je

$$g(j, f(j, k)) < 2^{-k},$$

to jest

$$d(x_j, \alpha_{F(j,k)}) < 2^{-k},$$

za sve $j, k \in \mathbb{N}$. Stoga je (x_j) izračunljiv niz. $\square$

Propozicija 3.3.17. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor te neka su (x_i) i (y_j) izračunljivi nizovi u (X, d, α). Neka je $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa*

$$g(i, j) = d(x_i, y_j).$$

Tada je g rekurzivna funkcija.

Dokaz. Budući da su (x_i) i (y_j) izračunljivi nizovi postoje rekurzivne funkcije $f, h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takve da je

$$d(x_i, \alpha_{f(i,k)}) < 2^{-k} \text{ i } d(y_j, \alpha_{h(j,k)}) < 2^{-k},$$

za sve $i, j, k \in \mathbb{N}$.
Neka su $i, j, k \in \mathbb{N}$. Koristeći lemu 3.3.12 dobivamo

$$\left|d(x_i, y_j) - d(\alpha_{f(i,k)}, \alpha_{h(j,k)})\right| \leq d(x_i, \alpha_{f(i,k)}) + d(y_j, \alpha_{h(j,k)}) < 2^{-k} + 2^{-k}.$$

Dakle,

$$\left|d(x_i, y_j) - d(\alpha_{f(i,k)}, \alpha_{h(j,k)})\right| < 2 \cdot 2^{-k}. \tag{3.16}$$

Neka je $G : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa

$$G(i, j, k) = d(\alpha_{f(i,k)}, \alpha_{h(j,k)}).$$

Neka je $E : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa

$$E(u, v) = d(\alpha_u, \alpha_v).$$

Funkcija E je rekurzivna po definiciji izračunljivog metričkog prostora. Za sve $i, j, k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$G(i, j, k) = E(f(i, k), h(j, k)).$$

Stoga je $G = E \circ A$ gdje je $G : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}^2$ funkcija definirana sa

$$A(i, j, k) = (f(i, k), h(j, k)).$$

Očito je A rekurzivna funkcija pa iz propozicije 2.3.4 slijedi da je G rekurzivna. Iz (3.16) slijedi da je

$$|g(i, j) - G(i, j, k)| < 2 \cdot 2^{-k},$$

za svaki $i, j, k \in \mathbb{N}$.
Posebno, za sve $i, j, k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$|g(i, j) - G(i, j, k + 1)| < 2 \cdot 2^{-(k+1)} = 2^{-k} \tag{3.17}$$

Funkcija $\mathbb{N}^3 \to \mathbb{R}$, $(i, j, k) \longmapsto G(i, j, k + 1)$ je rekurzivna kao kompozicija rekurzivnih funkcija pa iz (3.17) i propozicije 3.3.14 slijedi da je g rekurzivna funkcija. $\square$

Poglavlje 4

Strukture izračunljivosti

4.1 Efektivni separirajući nizovi

Definicija 4.1.1. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je $\mathcal{S}$ neprazan skup čiji elementi su nizovi u X. Za $\mathcal{S}$ kažemo da je* ***struktura izračunljivosti*** *na (X, d) ako vrijede sljedeća svojstva:*

1. *Ako su $(x_i), (y_j) \in \mathcal{S}$ onda je funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}, (i, j) \longmapsto d(x_i, y_j)$ rekurzivna.*

2. *Ako je $(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}$ te $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija onda je $(x_{f(i)})_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}$.*

3. *Ako je (y_i) niz u X takav da je $d(y_i, x_{F(i,k)}) < 2^{-k}$, za sve $i, k \in \mathbb{N}$ gdje je $F : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija i $(x_i) \in \mathcal{S}$ onda je $(y_i) \in \mathcal{S}$.*

4. *Postoji $(x_i) \in \mathcal{S}$ takav da je (x_i) gust niz u (X, d).*

Definicija 4.1.2. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je α niz u X. Kažemo da je α* ***efektivan separirajući niz*** *u (X, d) ako je α gust u (X, d) i funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$, $(i, j) \longmapsto d(\alpha_i, \alpha_j)$ je rekurzivna.*

Uočimo sljedeće: ako je (X, d) metrički prostor i α niz u X onda je α efektivan separirajući niz (X, d) ako i samo ako je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor.

Neka je (X, d) metrički prostor te neka je α efektivan separirajući niz (X, d). Označimo sa $\mathcal{S}_\alpha$ skup svih nizova (x_i) koji su izračunljivi u izračunljivom metričkom prostoru (X, d, α).

Propozicija 4.1.3. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je α efektivan separirajući niz u (X, d). Tada je $\mathcal{S}_\alpha$ struktura izračunljivosti na (X, d).*

Dokaz. Dokažimo da vrijede svojstva 1-4 iz definicije strukture izračunljivosti.
Neka su $(x_i), (y_j) \in \mathcal{S}_l$. Tada su (x_i),(y_j) izračunljivi nizovi u (X, d, α) pa iz propozicije 3.3.17 slijedi da je funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$, $(i, j) \longmapsto d(x_i, y_j)$ rekurzivna. Prema tome, svojstvo 1 vrijedi.
Iz primjera 3.2.12 slijedi da je α izračunljiv niz u (X, d, α), odnosno $\alpha \in \mathcal{S}_\alpha$. Znamo da je α gust niz u (X, d). Prema tome, svojstvo 4 vrijedi.
Neka je $(x_i) \in \mathcal{S}_l$ te neka je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija. Slijedi da je (x_i) izračunljiv niz u (X, d, α), to jest postoji rekurzivna funkcija $F : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da vrijedi

$$d(x_i, \alpha_{F(i,k)}) < 2^{-k},$$

za sve $i, k \in \mathbb{N}$. Iz ovoga slijedi da za sve $i, k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$d(x_{f(i)}, \alpha_{F(f(i),k)}) < 2^{-k} \tag{4.1}$$

Definirajmo funkciju $G : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ sa

$$G(i, k) = F(f(i), k).$$

Vrijedi

$$G(i, k) = F((f \circ I_1^2)(i, k), I_2^2(i, k))$$

iz čega slijedi da je G rekurzivna kao kompozicija rekurzivnih funkcija. Iz (4.1) slijedi

$$d(x_{f(i)}, \alpha_{G(i,k)}) < 2^{-k},$$

odnosno $(x_{f(i)})$ je izračunljiv niz u (X, d, α), to jest $(x_{f(i)}) \in \mathcal{S}_\alpha$. Time smo dokazali da vrijedi svojstvo 2.
Dokažimo sada da vrijedi svojstvo 3. Pretpostavimo da su (x_i) i (y_i) nizovi u X pri čemu je $(x_i) \in \mathcal{S}_\alpha$ te da je $F : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija takva da je

$$d(y_i, x_{F(i,k)}) < 2^{-k}, \tag{4.2}$$

za sve $i, k \in \mathbb{N}$. Slijedi da je (x_i) izračunljiv niz (X, d, α) pa postoji rekurzivna funkcija $G : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da je

$$d(x_i, \alpha_{G(i,k)}) < 2^{-k}, \tag{4.3}$$

za sve $i, k \in \mathbb{N}$.
Neka su $i, k \in \mathbb{N}$. Iz (4.2) slijedi

$$d(y_i, x_{F(i,k+1)}) < 2^{-(k+1)} \tag{4.4}$$

Nadalje, iz (4.3) slijedi

$$d(x_{F(i,k+1)}, \alpha_{G(F(i,k+1),k+1)}) < 2^{-(k+1)} \tag{4.5}$$

Koristeći (4.4) i (4.5) dobivamo

$$\begin{aligned} d(y_i, \alpha_{G(F(i,k+1),k+1)}) &\leq d(y_i, x_{F(i,k+1)}) + d(x_{F(i,k+1)}, \alpha_{G(F(i,k+1),k+1)}) \\ &< 2^{-(k+1)} + 2^{-(k+1)} = 2^{-k}. \end{aligned}$$

Odnosno

$$d(y_i, \alpha_{G(F(i,k+1),k+1)}) < 2^{-k} \tag{4.6}$$

Neka je $H : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa

$$H(i, k) = G(F(i, k + 1), k + 1).$$

Neka je $F' : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa

$$F'(i, k) = F(i, k + 1).$$

Funkcija F' je kompozicija funkcija F, I^2_1 i $s \circ I^2_2$. Stoga je F' rekurzivna. Imamo

$$H(i, k) = G(F'(i, k), (s \circ I^2_2)(i, k)),$$

stoga je H rekurzivna funkcija. Iz(4.6) slijedi da je

$$d(y_i, \alpha_{H(i,k)}) < 2^{-k},$$

odnosno $(y_i) \in \mathcal{S}_\alpha$. Time je svojstvo 3 dokazano. □

Neka je (X, d) metrički prostor te neka su α i β efektivni separirajući nizovi u (X, d). Kažemo da su α i β **ekvivalentni** i pišemo $\alpha \sim \beta$ ako je α izračunljiv u (X, d, β).

Lema 4.1.4. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka su α i β efektivni separirajući nizovi u (X, d). Pretpostavimo da je $\alpha \sim \beta$. Tada je $\beta \sim \alpha$.*

Dokaz. Imamo da je α izračunljiv niz u (X, d, β) pa iz propozicije 3.3.16 da je funkcija $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$ definirana sa

$$g(i, j) = d(\alpha_i, \beta_j)$$

rekurzivna. Želimo dokazati da je β izračunljiv niz u (X, d, α). Prema propoziciji 3.3.16 trebamo dokazati da je funkcija $\gamma : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$ definirana sa

$$\gamma(i, j) = d(\beta_i, \alpha_j)$$

rekurzivna. Za sve $i, j \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\gamma(i, j) = d(\beta_i, \alpha_j) = d(\alpha_j, \beta_i) = g(j, i) = g(H(i, j)),$$

gdje je $H : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^2$ funkcija definirana sa

$$H(i, j) = (j, i).$$

Dakle, $\gamma = g \circ H$, a očito je h rekurzivna funkcija pa iz propozicije 2.3.4 slijedi da je γ rekurzivna funkcija. Prema tome β je izračunljiv niz u (X, d, α), odnosno $\beta \sim \alpha$. □

Propozicija 4.1.5. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka su α i β efektivni separirajući nizovi u (X, d). Tada je $\alpha \sim \beta$ ako i samo ako je $\mathcal{S}_\alpha = \mathcal{S}_\beta$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $\alpha \sim \beta$. Dokažimo da je $\mathcal{S}_\alpha \subseteq \mathcal{S}_\beta$. Neka je $(x_i) \in \mathcal{S}_\alpha$. Tada je (x_i) izračunljiv niz u (X, d, α) pa postoji rekurzivna funkcija $F : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da je

$$d(x_i, \alpha_{F(i,k)}) < 2^{-k}, \tag{4.7}$$

za sve $i, k \in \mathbb{N}$.
Zbog $\alpha \sim \beta$ imamo da je α izračunljiv u (X, d, β), odnosno $\alpha \in \mathcal{S}_\beta$. Prema propoziciji 4.1.3 $\mathcal{S}_\beta$ je struktura izračunljivosti na (X, d) pa iz (4.7) i $\alpha \in \mathcal{S}_\beta$ i svojstva 3 definicije strukture izračunljivosti slijedi da je $(x_i) \in \mathcal{S}_\beta$.
Prema tome je $\mathcal{S}_\alpha \subseteq \mathcal{S}_\beta$. Nadalje, iz $\alpha \sim \beta$ i leme 4.1.4 slijedi $\beta \sim \alpha$ pa prema dokazanom vrijedi $\mathcal{S}_\beta \subseteq \mathcal{S}_\alpha$. Stoga je $\mathcal{S}_\alpha = \mathcal{S}_\beta$.
Pretpostavimo sada da je $\mathcal{S}_\alpha = \mathcal{S}_\beta$. Znamo da je α izračunljiv niz u (X, d, α) to jest da je $\alpha \in \mathcal{S}_\alpha$. Slijedi $\alpha \in \mathcal{S}_\beta$ pa je α izračunljiv u (X, d, β) odnosno $\alpha \sim \beta$. □

Korolar 4.1.6. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka su α, β i γ efektivni separirajući nizovi u (X, d). Pretpostavimo da je $\alpha \sim \beta$ te da je $\beta \sim \gamma$. Tada je $\alpha \sim \gamma$.*

Dokaz. Prema prethodnoj propoziciji vrijedi $\mathcal{S}_\alpha = \mathcal{S}_\beta$ i $\mathcal{S}_\beta = \mathcal{S}_\gamma$ pa je $\mathcal{S}_\alpha = \mathcal{S}_\gamma$. Slijedi da je $\alpha \sim \gamma$. □

Propozicija 4.1.7. *Neka je (X, d) metrički prostor, $\mathcal{S}$ struktura izračunljivosti na (X, d) te neka je α gust niz u (X, d) takav da je $\alpha \in \mathcal{S}$. Tada je α efektivan separirajući niz u (X, d) te je $\mathcal{S}_\alpha = \mathcal{S}$.*

Dokaz. Iz definicije strukture izračunljivosti na (X, d) slijedi da je funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$, $(i, j) \longmapsto d(\alpha_i, \alpha_j)$ rekurzivna. Prema tome, α je efektivan separirajući niz u (X, d). Neka je $(x_i) \in \mathcal{S}_\alpha$. Tada je (x_i) izračunljiv niz u (X, d, α) pa postoji rekurzivna funkcija $F : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da je

$$d(x_i, \alpha_{F(i,k)}) < 2^{-k},$$

za sve $i, k \in \mathbb{N}$. Iz ovoga i svojstva 3 definicije strukture izračunljivosti slijedi da je $(x_i) \in \mathcal{S}$.
Prema tome $\mathcal{S}_\alpha \subseteq \mathcal{S}$.
Obratno, neka je $(x_i) \in \mathcal{S}$. Tada iz svojstva 3 definicije strukture izračunljivosti slijedi da je funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$

$$(i, j) \longmapsto d(x_i, \alpha_j)$$

rekurzivna. Iz propozicije 3.3.16 slijedi da je (x_i) izračunljiv u (X, d, α). Stoga je $(x_i) \in \mathcal{S}_\alpha$.
Zaključak, $\mathcal{S}_\alpha = \mathcal{S}$ □

Korolar 4.1.8. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je $\mathcal{S}$ struktura izračunljivosti na (X, d). Tada postoji efektivan separirajući niz α u (X, d) takav da je $\mathcal{S}_\alpha = \mathcal{S}$.*

Dokaz. Ovo slijedi iz prethodne propozicije i svojstva 4 definicije strukture izračunljivosti. □

Neka je (X, d) metrički prostor te neka je Y neprazan podskup od X. Definirajmo funkciju $d' : Y \times Y \to \mathbb{R}$ sa

$$d'(x, y) = d(x, y).$$

Tada je d' metrika na Y. Za (Y, d') kažemo da je **potprostor metričkog prostora** (X, d).

Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Za izračunljiv metrički prostor (Y, d', β) kažemo da je potprostor od (X, d, α) ako je (Y, d') potprostor metričkog prostora (X, d) te ako je β izračunljiv niz u (X, d, α).

Propozicija 4.1.9. *Neka su (X, d, α) i (Y, d', β) izračunljivi metrički prostori pri čemu je (Y, d') potprostor metričkog prostora (X, d). Tada je (Y, d', β) potprostor izračunljivog metričkog prostora (X, d, α) ako i samo ako je $\mathcal{S}_\beta \subseteq \mathcal{S}_\alpha$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je (Y, d', β) potprostor od (X, d, α). Tada je β izračunljivi niz u (X, d, α), to jest $\beta \in \mathcal{S}_\alpha$. Neka je $(x_i) \in \mathcal{S}_\beta$. Tada je (x_i) izračunljiv niz u (Y, d', β) pa postoji rekurzivna funkcija $F : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da je

$$d(x_i, \beta_{F(i,k)}) < 2^{-k},$$

za sve $i, k \in \mathbb{N}$. Iz ovoga i $\beta \in \mathcal{S}_\alpha$ te svojstva 3 definicije strukture izračunljivosti slijedi da je $(x_i) \in \mathcal{S}_\alpha$. Zaključak $\mathcal{S}_\beta \subseteq \mathcal{S}_\alpha$.

Obratno, pretpostavimo da je $\mathcal{S}_\beta \subseteq \mathcal{S}_\alpha$. Vrijedi $\beta \in \mathcal{S}_\beta$ pa slijedi $\beta \in \mathcal{S}_\alpha$ što znači da je β izračunljiv u (X, d, α), odnosno (Y, d', β) je potprostor izračunljivog metričkog prostora (X, d, α). □

Neka je X neprazan skup te neka su d i d' metrike na X. Za d i d' kažemo da su ekvivalentne metrike ako postoji pozitivni brojevi M i N takvi da je

$$d(x, y) \leq M \cdot d'(x, y) \text{ i } d'(x, y) \leq N \cdot d(x, y),$$

za sve $x, y \in X$.

Propozicija 4.1.10. *Neka je X skup te neka su d i d' ekvivalentne metrike na X. Neka je $S \subseteq X$. Tada je S gust skup u metričkom prostoru (X, d) ako i samo ako je S gust skup u metričkom prostoru (X, d').*

Dokaz. Pretpostavimo da je S gust u (X, d). Budući da su d i d' ekvivalentne metrike postoji pozitivan broj N takav da je

$$d'(x, y) \leq N \cdot d(x, y), \tag{4.8}$$

za sve $x, y \in X$. Neka su $x \in X$ i $\epsilon > 0$. Budući da je S gust u (X, d) postoji $s \in S$ takav da je

$$d(x, s) < \frac{\epsilon}{N}.$$

Iz ovoga slijedi da

$$Nd(x, s) < \epsilon$$

pa je prema (4.8)

$$d'(x, s) < \epsilon.$$

Zaključujemo da je S gust skup u (X, d'). Analogno dobivamo da je S gust u (X, d) ako je S gust u (X, d'). $\square$

4.2 Linearna metrika

Definicija 4.2.1. *Neka je d metrika na $\mathbb{R}$. Za d kažemo da je* ***linearna metrika*** *ako za sve $x, y, z \in \mathbb{R}$ takve da je $x \leq y \leq z$ vrijedi*

$$d(x, z) = d(x, y) + d(y, z).$$

Uočimo da je euklidska metrika na $\mathbb{R}$ linearna metrika. Nadalje, uočimo da diskretna metrika na $\mathbb{R}$ nije linearna metrika.

Propozicija 4.2.2. *Neka je $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija. Tada je d linearna metrika ako i samo ako postoji strogo rastuća funkcija $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takva da je*

$$d(x, y) = |f(x) - f(y)|, \tag{4.9}$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$.

Dokaz. Pretpostavimo da je d linearna metrika. Definirajmo funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sa

$$f(x) = \begin{cases} d(0, x), x \geq 0 \\ -d(0, x), x < 0 \end{cases}. \tag{4.10}$$

Tvrdimo da je f strogo rastuća funkcija. Neka su $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$. Dokažimo da je $f(x) < f(y)$. Imamo tri slučaja:

1. $0 \leq x < y$
   Tada je $d(0, y) = d(0, x) + d(x, y)$ pa je
   $$d(0, x) < d(0, y),$$
   to jest $f(x) < f(y)$.

2. $x < y \leq 0$
   Tada je $d(0, x) = d(x, y) + d(0, y)$ pa je
   $$d(0, y) < d(0, x),$$
   to jest $-d(0, x) < -d(0, y)$. Slijedi $f(x) < f(y)$.

3. $x < 0 < y$
   Tada je $f(x) < 0 < f(y)$, to jest $f(x) < f(y)$.

Prema tome, f je strogo rastuća funkcija.
Dokažimo da vrijedi (4.9). Dovoljno je dokazati da za sve $x, y \in \mathbb{R}$ takve da je $x < y$ vrijedi
$$d(x, y) = f(y) - f(x).$$
Neka su $x, y \in \mathbb{R}$ takvi da je $x < y$.

1. $0 \leq x < y$
   Koristeći činjenicu da je d linearna metrika dobivamo $f(y) = f(x) + d(x, y)$ pa je
   $$d(x, y) = f(y) - f(x).$$

2. $x < y \leq 0$
   Tada je $-f(x) = d(x, y) - f(y)$ pa je
   $$d(x, y) = f(y) - f(x).$$

3. $x < 0 < y$
   Tada je
   $$d(x, y) = -f(x) + f(y).$$

Obratno, pretpostavimo da je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strogo rastuća funkcija te da vrijedi (4.9). Želimo dokazati da je d linearna metrika. Očito je da za sve $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi
$$d(x, y) \geq 0 \ , \ d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \ \text{ i } \ d(x, y) = d(y, x).$$
Neka su $x, y, z \in \mathbb{R}$. Tada je
$$\begin{aligned} d(x, z) = |f(x) - f(z)| &= \\ = |f(x) - f(y) + f(y) - f(z)| \\ \leq |f(x) - f(y)| + |f(y) - f(z)| \end{aligned}$$
Dakle
$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

Prema tome, d je metrika na $\mathbb{R}$.
Neka su $x, y, z \in \mathbb{R}$ takvi da je $x \leq y \leq z$. Budući da je f strogo rastuća funkcija imamo $f(x) \leq f(y) \leq f(z)$ pa je

$$\begin{aligned} d(x, y) + d(y, z) &= |f(x) - f(y)| + |f(y) - f(z)| = \\ &= f(y) - f(x) + f(z) - f(y) \\ &= f(z) - f(x) = d(x, z). \end{aligned}$$

Prema tome, d je linearna metrika. □

Lema 4.2.3. *Neka je d linearna metrika na $\mathbb{R}$. Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Neka je $x \in \mathbb{R}$. Tada je $a < x$ ako i samo ako je $d(x, b) < d(a, b)$ ili $d(x, b) < d(x, a)$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $a < x$.

1. $x \leq b$
   Tada je $a < x \leq b$ pa je $d(a, b) = d(a, x) + d(x, b)$. Budući da je $d(a, x) > 0$ imamo $d(x, b) < d(a, b)$.

2. $b < x$
   Tada je $a < b < x$ pa je $d(a, x) = d(a, b) + d(b, x)$, to jest $d(b, x) < d(a, x)$.

Obratno, pretpostavimo da je

$$d(x, b) < d(a, b) \text{ ili } d(x, b) < d(x, a) \tag{4.11}$$

Tvrdimo da je $a < x$. Pretpostavimo suprotno, tada je $x \leq a$ pa imamo $x \leq a < b$ što povlači

$$d(x, b) > d(x, a) \text{ i } d(x, b) \geq d(a, b).$$

Kontradikcija s (4.11). Dakle, $a < x$. □

Lema 4.2.4. *Neka je d linearna metrika na $\mathbb{R}$. Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Neka je $x \in \mathbb{R}$. Tada je $x < b$ ako i samo ako*

$$d(x, a) < d(a, b) \textit{ ili } d(x, a) < d(x, b). \tag{4.12}$$

Dokaz. Pretpostavimo da je $x < b$. Tada je

$$a \leq x < b \text{ ili } x < a < b,$$

a u oba slučaja lako slijedi (4.12).
Obratno, neka vrijedi (4.12). Tvrdimo da je $x < b$. Pretpostavimo suprotno, to jest $b \leq x$. Imamo $a < b \leq x$ pa je

$$d(a, x) > d(b, x) \text{ i } d(a, x) \geq d(a, b)$$

što je u kontradikciji sa (4.12). Prema tome, $x < b$. □

Propozicija 4.2.5. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka su S i T rekurzivno prebrojivi podskupovi od $\mathbb{N}^k$. Tada su i skupovi $S \cup T$ i $S \cap T$ rekurzivno prebrojivi u $\mathbb{N}^k$.*

Dokaz. Ako je $S = \emptyset$ i $T = \emptyset$ tvrdnja je jasna. Pretpostavimo da je $S \neq \emptyset$ ili $T \neq \emptyset$. Tada postoje rekurzivne funkcije $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^k$ takve da je

$$S = \{f(i) \mid i \in \mathbb{N}\} \text{ i } T = \{g(i) \mid i \in \mathbb{N}\}.$$

Definirajmo $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^k$ sa

$$h(i) = \begin{cases} f(e(i,0)), & e(i,1) \quad \text{paran} \\ g(e(i,0)), & e(i,1) \quad \text{neparan} \end{cases}. \tag{4.13}$$

Neka je $S_1 = \{i \in \mathbb{N} \mid e(i,1) \text{ paran}\}$. Vrijedi

$$\chi_{S_1}(i) = \chi_{2\mathbb{N}}(e(i,1))$$

pa zaključujemo da je χ_{S_1} rekurzivna funkcija. Prema tome, S_1 je rekurzivan skup. Vrijedi

$$h(i) = \begin{cases} f(e(i,0)), & i \in S_1 \\ g(e(i,0)), & i \in S_1^c \end{cases}. \tag{4.14}$$

Iz leme 3.3.3 slijedi da je h rekurzivna funkcija. Očito je $\{h(i) \mid i \in \mathbb{N}\}$ podskup od $S \cup T$. Obratno, neka je $y \in S \cup T$. Tada je $y \in S$ ili $y \in T$. Ako je $y \in S$ onda je $y = f(i)$, za neki $i \in \mathbb{N}$, te imamo

$$y = f(i) = h(2^i \cdot 3^0).$$

Ako je $y \in T$ onda je $y = g(i)$, za neki $i \in \mathbb{N}$ pa je

$$y = g(i) = h(2^i \cdot 3^1).$$

U svakom slučaju $y \in \{h(i) \mid i \in \mathbb{N}\}$. Prema tome

$$\{h(i) \mid i \in \mathbb{N}\} = S \cup T.$$

Zaključak, $S \cup T$ je rekurzivno prebrojiv skup.
Neka je $x \in \mathbb{N}^k$. Tada je

$$x \in S \cap T \Leftrightarrow x \in S \text{ i } x \in T$$

$$\Leftrightarrow \text{postoji } i \in \mathbb{N} \text{ takav da je } x = f(i) \text{ i postoji } j \in \mathbb{N} \text{ takav da je } x = g(j)$$

Dakle,

$$x \in S \cap T \Leftrightarrow \text{postoji } (i,j) \in \mathbb{N}^2 \text{ takav da je } x = f(i) \text{ i } x = g(j) \tag{4.15}$$

Definirajmo

$$\Omega = \left\{(x,i,j) \in \mathbb{N}^{k+2} \mid x = f(i) \text{ i } x = g(j)\right\}.$$

Tada je $\Omega = \Omega' \cap \Omega''$ gdje je

$$\Omega' = \left\{(x, i, j) \in \mathbb{N}^{k+2} \mid x = f(i)\right\},$$

$$\Omega'' = \left\{(x, i, j) \in \mathbb{N}^{k+2} \mid x = g(j)\right\}.$$

Neka su $f_1, \ldots, f_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ komponentne funkcije od f. Za svaki $l \in \{1, \ldots, k\}$ neka je

$$\Omega'_l = \left\{(x_1, \ldots, x_k, i, j) \in \mathbb{N}^{k+2} \mid x_l = f_l(i)\right\}.$$

Za svaki $l \in \{1, \ldots, k\}$ i sve $x_1, \ldots, x_k, i, j \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\chi_{\Omega'_l}(x_1, \ldots, x_k, i, j) = \overline{\mathrm{sg}}(|x_l - f_l(i)|).$$

Stoga je $\chi_{\Omega'_l}$ rekurzivna funkcija. Dakle Ω'_l je rekurzivan skup.
Budući da je $\Omega' = \Omega'_1 \cap \ldots \cap \Omega'_k$ imamo da je Ω' rekurzivan skup (propozicija 2.3.6).
Analogno dobivamo da je Ω'' rekurzivan skup. Iz $\Omega = \Omega' \cap \Omega''$ slijedi da je Ω rekurzivan skup, stoga je i Ω rekurzivno prebrojiv skup (propozicija 3.3.5).
Iz (4.15) slijedi da za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$x \in S \cap T \Leftrightarrow \text{postoji } (i, j) \in \mathbb{N}^2 \text{ takav da je } (x, i, j) \in \Omega.$$

Iz teorema 3.3.6 slijedi da je $S \cap T$ rekurzivno prebrojiv skup. □

Propozicija 4.2.6. *Neka je d linearna metrika te neka je α efektivan separirajući niz u metričkom prostoru $(\mathbb{R}, d)$. Neka je x_0 izračunljiva točka u $(\mathbb{R}, d, \alpha)$. Tada su skupovi*

$$S = \{i \in \mathbb{N} \mid x_0 < \alpha_i\} \text{ i } T = \{i \in \mathbb{N} \mid \alpha_i < x_0\}$$

rekurzivno prebrojivi.

Dokaz. Odaberimo $y_0 \in \mathbb{R}$ takav da je $x_0 < y_0$. Neka je $r = d(x_0, y_0)$. Očito je $r > 0$. Budući da je α gust niz u (X, d) postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je

$$d(y_0, \alpha_n) < r.$$

Imamo

$$d(\alpha_n, y_0) < d(x_0, y_0)$$

pa iz leme 4.2.3 slijedi da je $x_0 < \alpha_n$. Neka je $i \in \mathbb{N}$. Iz leme 4.2.3 slijedi da je

$$x_0 < \alpha_i \Leftrightarrow d(\alpha_i, \alpha_n) < d(x_0, \alpha_n) \text{ ili } d(\alpha_i, \alpha_n) < d(\alpha_i, x_0) \tag{4.16}$$

Definirajmo funkcije $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sa

$$f(i) = d(\alpha_i, \alpha_n),$$

$$g(i) = d(\alpha_i, x_0).$$

Iz propozicije 3.3.15 slijedi da su f i g rekurzivne funkcije. Neka je $h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa

$$h(i) = d(x_0, \alpha_n).$$

Uočimo da je $h(i) = g(n)$ pa je h rekurzivna kao kompozicija rekurzivnih funkcija. Iz (4.16) slijedi da je

$$i \in S \Leftrightarrow f(i) < h(i) \text{ ili } f(i) < g(i) \tag{4.17}$$

Neka je

$$S' = \{i \in \mathbb{N} \mid f(i) < h(i)\} \text{ i } S'' = \{i \in \mathbb{N} \mid f(i) < g(i)\}.$$

Prema korolaru 3.3.9 S' i S'' su rekurzivno prebrojivi. Iz (4.17) jasno je da je $S = S' \cup S''$ pa iz propozicije 4.2.5 slijedi da je S rekurzivno prebrojiv skup.
Analogno, koristeći lemu 4.2.4 dobivamo da je T rekurzivno prebrojiv skup. □

Lema 4.2.7. *Neka je d linearna metrika. Neka su $a, b, x \in \mathbb{R}$. Pretpostavimo da je $x \leq a$ i $x \leq b$ ili $a \leq x$ i $b \leq x$. Tada je*

$$|d(x, a) - d(x, b)| = d(a, b). \tag{4.18}$$

Dokaz. Uzmimo da je $x \leq a$ i $x \leq b$. Ako je $a \leq b$, tada je $x \leq a \leq b$ pa je

$$d(x, b) = d(x, a) + d(a, b).$$

Iz ovoga slijedi da je

$$d(a, b) = |d(x, b) - d(x, a)|.$$

Do istog zaključka dolazimo ako je $b < a$.
Analogno dobivamo da nejednakosti $a \leq x$ i $b \leq x$ povlače (4.18). □

Propozicija 4.2.8. *Neka su $k, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ rekurzivna funkcija. Neka je S rekurzivno prebrojiv skup u $\mathbb{N}^n$. Tada je $f^{-1}(S)$ rekurzivno prebrojiv skup u $\mathbb{N}^k$.*

Dokaz. Ako je $S = \emptyset$ onda je $f^{-1}(S) = \emptyset$.
Pretpostavimo da je $S \neq \emptyset$. Tada postoji rekurzivna funkcija $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^n$ takva da je

$$S = \{g(i) \mid i \in \mathbb{N}\}.$$

Neka je $x \in \mathbb{N}^k$. Tada je

$$x \in f^{-1}(S) \Leftrightarrow f(x) \in S \Leftrightarrow \text{ postoji } i \in \mathbb{N} \text{ takav da je } f(x) = g(x). \tag{4.19}$$

$$\Omega = \left\{(x_1, \ldots, x_k, i) \in \mathbb{N}^{k+1} \mid f(x_1, \ldots, x_k) = g(i)\right\}.$$

Iz leme 3.3.10 lako zaključujemo da je Ω rekurzivan skup. Iz 3.3.6 slijedi da je $f^{-1}(S)$ rekurzivno prebrojiv skup. □

Teorem 4.2.9. *Neka je d linearna metrika te neka su α i β efektivni separirajući nizovi u $(\mathbb{R}, d)$ takvi da izračunljivi metrički prostori $(\mathbb{R}, d, \alpha)$ i $(\mathbb{R}, d, \beta)$ imaju zajedničku izračunljivu točku. Tada je $\alpha \sim \beta$.*

Dokaz. Neka je x_0 zajednička izračunljiva točka od $(\mathbb{R}, d, \alpha)$ i $(\mathbb{R}, d, \beta)$. Neka su

$$S^+ = \{i \in \mathbb{N} \mid x_0 < \alpha_i\} \text{ i } S^- = \{i \in \mathbb{N} \mid \alpha_i < x_0\}$$

$$T^+ = \{i \in \mathbb{N} \mid x_0 < \beta_i\} \text{ i } T^- = \{i \in \mathbb{N} \mid \beta_i < x_0\}.$$

Prema propoziciji 4.2.6 ti skupovi su rekurzivno prebrojivi.
Neka su $i, k \in \mathbb{N}$. Tvrdimo da postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\left| d(x_0, \beta_i) - d(x_0, \alpha_j) \right| < 2^{-k} \tag{4.20}$$

$$(j \in S^+ \text{ i } i \in T^+) \text{ ili } (j \in S^- \text{ i } i \in T^-) \text{ ili } (d(x_0, \beta_i) < 2^{-(k+1)} \text{ i } d(x_0, \alpha_j) < 2^{-(k+1)}). \tag{4.21}$$

Prema propoziciji 4.2.6 ti skupovi su rekurzivno prebrojivi.
Neka su $i, k \in \mathbb{N}$. Tvrdimo da postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\left| d(x_0, \beta_i) - d(x_0, \alpha_j) \right| < 2^{-k}, \tag{4.22}$$

$$(j \in S^+ \text{ i } i \in T^+) \text{ ili } (j \in S^- \text{ i } i \in T^-) \text{ ili } (d(x_0, \beta_i) < 2^{-(k+1)} \text{ i } d(x_0, \alpha_j) < 2^{-(k+1)}). \tag{4.23}$$

Da bismo ovo dokazali pretpostavimo prvo da je $x_0 < \beta_i$. Neka je

$$r = d(x_0, \beta_i).$$

Budući da je α gust niz postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je

$$d(\alpha_j, \beta_i) < \min\left\{2^{-k}, r\right\}. \tag{4.24}$$

Imamo

$$d(\alpha_j, \beta_i) < r = d(x_0, \beta_i)$$

pa iz leme 4.2.3 slijedi da je $x_0 < \alpha_j$. Dakle, $i \in T^+$ i $j \in S^+$.
Nadalje

$$\left| d(x_0, \beta_i) - d(x_0, \alpha_j) \right| \leq d(\beta_i, \alpha_j),$$

a prema (4.24) vrijedi

$$d(\beta_i, \alpha_j) < 2^{-k}.$$

Prema tome

$$\left| d(x_0, \beta_i) - d(x_0, \alpha_j) \right| < 2^{-k}.$$

Zaključak, vrijede (4.22) i (4.23).
Na isti način dobivamo da postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da vrijede (4.22) i (4.23) u slučaju kada je $\beta_i < x_0$.
Ako je $\beta_i = x_0$ onda odaberemo $j \in \mathbb{N}$ takav da je

$$d(x_0, \alpha_j) < 2^{-(k+1)}.$$

Tada je očito da vrijede (4.22) i (4.23).
Prema tome, za sve $i, k \in \mathbb{N}$ postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi (4.22) i (4.23).
Pretpostavimo sada da su $i, j, k \in \mathbb{N}$ takvi da vrijede (4.22) i (4.23). Dokažimo da je

$$d(\beta_i, \alpha_j) < 2^{-k}.$$

Imamo tri slučaja:

1. $i \in T^+$ i $j \in S^+$
   Tada je $x_0 < \alpha_j$ i $x_0 < \beta_i$ pa iz leme 4.2.7 slijedi da je
   $$\left| d(x_0, \beta_i) - d(x_0, \alpha_j) \right| = d(\beta_i, \alpha_j).$$
   Iz (4.22) slijedi da $d(\beta_i, \alpha_j) < 2^{-k}$.

2. $i \in T^-$ i $j \in S^-$
   Tada je $\alpha_j < x_0$ i $\beta_i < x_0$ pa analogno zaključujemo da je $d(\beta_i, \alpha_j) < 2^{-k}$.

3. $d(x_0, \beta_i) < 2^{-(k+1)}$ i $d(x_0, \alpha_j) < 2^{-(k+1)}$
   Tada je
   $$\begin{aligned} d(\beta_i, \alpha_j) &\leq d(\beta_i, x_0) + d(x_0, \alpha_j) \\ &< 2^{-(k+1)} + 2^{-(k+1)} = 2^k. \end{aligned}$$

Dakle, ako su $i, j, k \in \mathbb{N}$ takvi da vrijede (4.22) i (4.23) onda je $d(\beta_i, \alpha_j) < 2^{-k}$.
Neka je Ω skup svih $(i, k, j) \in \mathbb{N}^3$ takvih da vrijede (4.22) i (4.23).
Neka je Ω' skup svih $(i, k, j) \in \mathbb{N}^3$ takvih da vrijedi (4.22). Nadalje, neka je Ω'' skup svih $(i, k, j) \in \mathbb{N}^3$ takvih da vrijedi (4.23).
Očito je

$$\Omega = \Omega' \cap \Omega''. \tag{4.25}$$

Neka su $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ funkcije definirane sa

$$f(i) = d(x_0, \beta_i) \text{ i } g(j) = d(x_0, \alpha_j), \tag{4.26}$$

za sve $i, j \in \mathbb{N}$. Funkcije f i g su rekurzivne prema propoziciji 3.3.15.
Imamo

$$\Omega' = \left\{ (i, k, j) \in \mathbb{N}^3 \mid |f(i) - g(i)| < 2^{-k} \right\}.$$

Definirajmo funkcije $h, h' : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{R}$ sa

$$h(i,k,j) = |f(i) - g(i)| \text{ i } h'(i,k,j) = 2^{-k}.$$

Očito je h' rekurzivna funkcija, a iz

$$h = \left| f \circ I_1^3 - g \circ I_2^2 \right|,$$

propozicije 2.3.4 i propozicije 2.3.3 slijedi da je h rekurzivna funkcija.
Vrijedi

$$\Omega' = \left\{ (i,k,j) \in \mathbb{N}^3 \mid h(i,k,j) < h'(i,k,j) \right\}$$

pa iz korolara 2.3.8 slijedi da je Ω' rekurzivno prebrojiv skup.
Neka je

$$\Gamma_1 = \left\{ (i,k,j) \in \mathbb{N}^3 \mid j \in S^+ \text{ i } i \in T^+ \right\},$$

$$\Gamma_2 = \left\{ (i,k,j) \in \mathbb{N}^3 \mid j \in S^- \text{ i } i \in T^- \right\},$$

$$\Gamma_3 = \left\{ (i,k,j) \in \mathbb{N}^3 \mid d(x_0, \beta_i) < 2^{-(k+1)} \text{ i } d(x_0, \alpha_j) < 2^{-(k+1)} \right\}.$$

Tada je

$$\Omega'' = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \tag{4.27}$$

Neka je

$$U = \left\{ (i,k,j) \in \mathbb{N}^3 \mid i \in T^+ \right\} \text{ i } V = \left\{ (i,k,j) \in \mathbb{N}^3 \mid j \in S^+ \right\}.$$

Imamo

$$U = \left\{ (i,k,j) \in \mathbb{N}^3 \mid I_1^3 \in T^+ \right\} = (I_1^3)^{-1}(T^+)$$

pa iz propozicije 4.2.8 slijedi da je U rekurzivno prebrojiv skup. Analogno dobivamo da je V rekurzivno prebrojiv skup.
Budući da je $\Gamma_1 = U \cap V$ prema propoziciji 4.2.5 dobivamo da je Γ_1 rekurzivno prebrojiv skup. Analogno zaključujemo da je Γ_2 rekurzivno prebrojiv skup.
Neka je

$$A = \left\{ (i,k,j) \in \mathbb{N}^3 \mid d(x_0, \alpha_j) < 2^{-(k+1)} \right\} \text{ i } B = \left\{ (i,k,j) \in \mathbb{N}^3 \mid d(x_0, \beta_i) < 2^{-(k+1)} \right\}.$$

Neka je $H : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa

$$H(i,k,j) = 2^{-(k+1)}.$$

Očito je H rekurzivna funkcija. Imamo

$$A = \left\{ (i,k,j) \in \mathbb{N}^3 \mid (g \circ I_3^3)(i,k,j) < H(i,k,j) \right\}$$

pri čemu je g funkcija iz (4.26). Iz korolara 2.3.8 slijedi da je A rekurzivno prebrojiv skup. Analogno dobivamo da je B rekurzivno prebrojiv skup.
Iz $\Gamma_3 = A \cap B$ slijedi da je Γ_3 rekurzivno prebrojiv skup. Iz (4.27) slijedi da je Ω'' rekurzivno prebrojiv.
Konačno iz (4.25) zaključujemo da je Γ rekurzivno prebrojiv.
Znamo da za sve $i, k \in \mathbb{N}$ postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da vrijede (4.22) i (4.23). Prema tome, za sve $i, k \in \mathbb{N}$ postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je $(i, k, j) \in \Omega$.
Iz teorema 3.3.11 slijedi da postoji rekurzivna funkcija $F : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da je

$$(i, k, F(i, k)) \in \Omega, \tag{4.28}$$

za sve $i, k \in \mathbb{N}$. Također znamo da ako su $i, k, j \in \mathbb{N}$ takvi da je $(i, k, j) \in \Omega$ onda je $d(\beta_i, \alpha_j) < 2^{-k}$. Iz (4.28) slijedi da je

$$d(\beta_i, \alpha_{F(i,k)}) < 2^{-k},$$

za sve $i, k \in \mathbb{N}$.
Prema tome, β je izračunljiv niz u (X, d, α) to jest $\beta \sim \alpha$.
Dakle, $\alpha \sim \beta$. □

Bibliografija

[1] Iljazović, Z., *Rekurzivnost lančastih i cirkularno lančastih kontinuuma*, doktorska disertacija, PMF-MO, Zagreb, 2009.,

[2] Iljazović, Z., *Isometries and Computability Structures*, journal of Universal Computer science, 2010.,

[3] Melnikov, A.G., *Computably isometric spaces*, journal of Symbolic Logic, 2013.,

[4] Pour-El, M.B., Richards, I., *Computability in Analysis and Physics*, Springer-Verlag, Berlin-Heielberg-New York, 1989.,

[5] Vuković, M., *Izračunljivost*, skripta, 2009.

[6] Weihrauch, K., *Computable Analysis*, Springer, Berlin, 2000.,

[7] Yasugi, M., Mori, T.,Tsujji, Y., *Effective properties of sets and functions in metric spaces with computability structure*, Theoretical Computer Science, 1999.

Sažetak

U ovom diplomskom radu pokazali smo kako je teorija izračunljivosti dobila primjenu i na metričke prostore. Prije toga izveli smo neke bitne zaključke kako ona djeluje na skup prirodnih brojeva, skup racionalnih brojeva, skup cijelih brojeva i skup realnih brojeva. Kasnije smo promatrali strukture izračunljivosti te pojam linearne metrike. Bitno je napomenuti da iako relativno nova grana znanosti, teorija izračunljivosti poprima široke primjene kako u matematici tako i u ostalim znanostima i zasigurno će još neko vrijeme ostati zanimljiv predmet istraživanja.

Summary

In this master thesis, we have shown how the theory of computation was included in the field of metric space. Before that, we carried out some important conclusions how this theory acts on the set of natural numbers, the set of rational numbers, the set of integers and the set of real numbers. Later we watched the structure of computation and the term of linear metrics. It is important to mention that, although a relatively new branch of science, the theory of computation has wide applications both in mathematics and in other sciences, and it will certainly remain an interesting object of study for time to come.

Životopis

Anita Kuruc rođena je 12.prosinca 1990. godine u Zagrebu. Pohađala je Osnovnu školu Sesvetski Kraljevec te Opću gimnaziju Sesvete. Obrazovanje je nastavila na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno matematičkog fakulteta u Zagrebu, na kojem upisuje preddiplomski studij 2009. godine te diplomski studij Matematika, smjer nastavnički 2013. godine. Diplomski studij završila je u rujnu 2015. godine. Nakon Prirodoslovno matematičkog fakulteta obrazovanje je nastavila na Ekonomskom fakultetu u Zagrebu, smjer Poslovna ekonomija, koji je upisala 2014. godine.