SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Petra Lazić

BROWNOVO GIBANJE I HAUSDORFFOVA DIMENZIJA

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Ante Mimica

Zagreb, rujan 2015.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Glavni je cilj ovog rada istražiti svojstva trajektorija Brownova gibanja. Osim osnovnih svojstava poput neprekidnosti i diferencijabilnosti proučit ćemo i ostala obilježja kao što su α-Hölder neprekidnost, veličina skupa nultočki i veličina skupa na koji se preslikava Brownovo gibanje. Jedan od osnovnih alata kojim ćemo se koristiti, uz temeljne rezultate teorije mjere i teorije vjerojatnosti, bit će koncept Hausdorffove dimenzije kao prirodne generalizacije dimenzije koju poznajemo iz klasične geometrije. Proučavanje Brownova gibanja dovest će nas do zanimljivih svojstava raznih skupova i procesa izvedenih iz Brownova gibanja kao što su skup maksimuma ili reflektirano Brownovo gibanje. Na kraju ćemo dati dokaz dvaju klasičnih rezultata iz područja Hausdorffove dimenzije, Frostmanove leme i McKeanova teorema o dimenziji skupa na koji se preslikava Brownovo gibanje.

U prvom poglavlju dat ćemo kratki pregled osnovnih pojmova i rezultata koji su nužan preduvjet za proučavanje Brownova gibanja i Hausdorffove dimenzije. U drugom poglavlju predstavit ćemo Brownovo gibanje kao slučajan proces i razmotriti njegova svojstva. Proučit ćemo neprekidnost, diferencijabilnost, skup lokalnih maksimuma i skup nultočki Brownova gibanja. U sklopu te rasprave dokazat ćemo egzistenciju samoga Brownova gibanja, jako Markovljevo svojstvo te princip refleksije. U posljednjemu, trećem poglavlju definirat ćemo Hausdorffovu dimenziju te opisati glavne tehnike za njezino računanje. Te ćemo tehnike zatim primijeniti na grafu, slici i skupu nultočki Brownova gibanja.

Poglavlje 1

Osnovni pojmovi i postavke

Na početku rada dajemo pregled osnovnih pojmova, teorema i rezultata koji su nužan preduvjet za definiranje i proučavanje Brownova gibanja i Hausdorffove dimenzije.

1.1 Metrički prostor

Definicija 1.1.1. *Neka je X skup.* ***Metrika*** *na X je funkcija $d\colon X \times X \mapsto \mathbb{R}$ takva da vrijedi:*

(i.) $d(x, y) \geqslant 0$*, za sve* $x, y \in X$*,*

(ii.) $d(x, y) = 0$ *ako i samo ako je* $x = y$*,*

(iii.) $d(x, y) = d(y, x)$*, za sve* $x, y \in X$*,*

(iv.) $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$*, za sve* $x, y, z \in X$*.*

(X, d) *zovemo* ***metrički prostor****.*

Sada ćemo definirati svojstvo α-Hölder neprekidnosti koje će se pokazati jednim od ključnih svojstava Brownova gibanja u nastavku.

Definicija 1.1.2. *Kažemo da je funkcija $f\colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$* ***lokalno α-Hölder neprekidna*** *u točki $x \in \mathbb{R}$ ako postoje $\varepsilon > 0$ i konstanta $c > 0$ takvi da je*

$$|f(x) - f(y)| \leqslant c|x - y|^{\alpha}, \quad \text{za sve } y \in \mathbb{R} \text{ takve da je } |y - x| < \varepsilon.$$

Takav $\alpha > 0$ zovemo ***Hölderovim ekponentom****, a $c > 0$* ***Hölderovom konstantom****.*

Definicija 1.1.3. *Neka je $0 < \alpha \leqslant 1$. Preslikavanje $f: (E_1, d_1) \mapsto (E_2, d_2)$ između dva metrička prostora zovemo* ***α-Hölder neprekidno*** *ako postoji (globalna) konstanta $C > 0$ takva da je*

$$d_2(f(x), f(y)) \leqslant C d_1(x, y)^{\alpha}, \quad \text{za sve } x, y \in E_1.$$

Ovakvu konstantu C zovemo ***Hölderovom konstantom****.*

Jedan od pojmova koji ćemo često koristiti je i Borelova σ-algebra i Borelovi skupovi. Fiksirajmo skup X.

Definicija 1.1.4. ***Topološli prostor*** *je uređen par $(X, \mathcal{T})$, gdje je $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$, takav da vrijedi:*

(i.) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$,

(i.) $\mathcal{T}$ *je zatvorena na proizvoljne unije,*

(i.) $\mathcal{T}$ *je zatovorena na konačne presjeke.*

$\mathcal{T}$ *zovemo* ***topologijom****, a skupove $A \in \mathcal{T}$ otvorenim skupovima.*

Definicija 1.1.5. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološli prostor. Tada familiju $\mathcal{B}(X) = \sigma(\mathcal{T})$ zovemo* ***Borelovom σ-algebrom****. Skupove $B \in \mathcal{B}(X)$ zovemo* ***Borelovim skupovima****.*

U nastavku ćemo s $\mathcal{B}$ označavati Borelovu σ-algebru generiranu svim otvorenim skupovima na $\mathbb{R}$, a elemente od $\mathcal{B}$ Borelovim skupovima. Dakle, $\mathcal{B}$ je Borelova σ-algebra na $\mathbb{R}$. Analogno, $\mathcal{B}^n$ će označavati Borelovu σ-algebru na $\mathbb{R}^n$.

1.2 Osnovni pojmovi teorije mjere

Fiksirajmo skup X.

Definicija 1.2.1. *Neprazna familija $\mathscr{R}$ podskupova od X je* ***prsten skupova*** *(na X) ako vrijedi:*

(i.) $A \cup B \in \mathscr{R}$, *za* $A, B \in \mathscr{R}$,

(ii.) $A \setminus B \in \mathscr{R}$, *za* $A, B \in \mathscr{R}$.

Iz definicije slijedi da je $\emptyset \in \mathscr{R}$, jer je $\emptyset = A \setminus A \in \mathscr{R}$, te $A \cap B \in \mathscr{R}$, jer je $A \cap B = A \cup B \setminus [(A \setminus B) \cup (B \setminus A)] \in \mathscr{R}$. Dakle, prsten je zatvoren na konačne presjeke.

Definicija 1.2.2. *Familija $\mathscr{S}$ podskupova od X je* ***poluprsten skupova*** *(na X) ako vrijedi:*

(i.) $\emptyset \in \mathscr{S}$,

(ii.) $A \cap B \in$ ß, *za* $A, B \in \mathscr{S}$,

(iii.) $A \setminus B = \bigcup_{k=1}^{n} E_k$, *za* $A, B \in \mathscr{S}$, *pri čemu su* $E_1, \dots, E_n \in \mathscr{S}$ *i međusobno disjunktni.*

Fiksirajmo prsten $\mathscr{R}$ podskupova od X. Neka je μ nenegativna funkcija na $\mathscr{R}$, odnosno, svakom $A \in \mathscr{R}$ μ pridruzuje nenegativan broj $\mu(A) < \infty$.

Definicija 1.2.3. *Kažemo da je funkcija* μ ***aditivna*** *ako je* $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$*, ako je* $A \cap B = \emptyset$*.*

Definicija 1.2.4. *Neka je* μ *nenegativna aditivna funkcija na* $\mathscr{R}$*. Kažemo da je* μ σ***-aditivna*** *na* $\mathscr{R}$ *ako, za svaku prebrojivu familiju* $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathscr{R}$ *takvu da su* A_i *međusobno disjunktni i* $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{R}$*, vrijedi*

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Svaku nenegativnu, σ*-aditivnu funkciju na prstenu* $\mathscr{R}$ *zovemo* ***mjerom****.*

Neka je $\mathscr{R}$ prsten skupova i μ mjera na $\mathscr{R}$.

Definicija 1.2.5. *Neka je A poskup od X. Broj* $L > 0$ *je približna vanjska mjera od A ako postoji prebrojiv pokrivač* $A_1, A_1, \dots$ *od A takava da je* $A_i \in \mathscr{R}$ *i* $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \leqslant L$*.*

Vanjska mjera *od A, u oznaci* $\mu^*(A)$*, je broj*

$$\inf\{L\colon L \text{ je približna vanjska mjera od } A\}.$$

Ako je gornju skup prazan, definiramo $\mu^*(A) = \infty$*.*

Propozicija 1.2.6. *Neka je* $(X, \mathscr{R}, \mu)$ *izmjeriv prostor. Tada vrijedi:*

(a) $\mu^*(\emptyset) = 0$,

(b) $\mu^*(A) \leqslant \mu^*(B)$, *za* $A \subset B$,

(c) μ^* *je* σ*-aditivna:* $\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$, *za niz* $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$.

Napomena 1.2.7. *Svojstva (a) - (c) iz prethodnog teorema su i dovoljna za odabir vanjske mjere.*

Mjera μ definirana na prstenu skupova $\mathscr{R}$ prostora X je σ-konačna ako postoji niz $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, $A_i \in \mathscr{R}$, takav da je $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ i $\mu(A_i) < \infty$.

Teorem 1.2.8 (**Carathéodory**). *Neka je μ nenegativna, prebrojivo aditivna funkcija definirana na poluprstenu skupova $\mathscr{R}$. Tada μ možemo proširiti do mjere na σ-algebri generiranoj s $\mathscr{R}$.*

Dokaz. Dokaz teorema nalazi se u [1, Teorem 6.3.6.]. □

Carathéodoryjev teorem proširenja daje dokaz postojanja Lebesgueove mjere. Naime, iz teorema slijedi da svaka mjera na prostoru koji sadrži sve intervale realnih brojeva može biti proširena do Borelove algebre na skupu realnih brojeva.

1.3 Vjerojatnosni prostor i slučajne varijable

Krenut ćemo s pojmovima σ-algebre, vjerojatnosti i vjerojatnosnog prosotora. Zatim ćemo definirati slučajnu varijablu i vektor te dati neke osnovne primjere i svojstva normalnih slučajnih varijabli i vektora.

Neka je Ω neprazan skup (koji predstavlja prostor elementarnih događaja) i $\mathcal{P}(\Omega)$ skup podskupova od Ω. Prvo ćemo definirati familiju koja će nam predstavljati familiju događaja (jer ne mogu svi podskupovi od Ω biti događaji). Inkluzija $A \subset B$ uključuje i slučaj $A = B$.

Definicija 1.3.1. *Familija $\mathscr{A}$ podskupova od Ω ($\mathscr{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$) jest* ***algebra skupova*** *na Ω ako vrijedi:*

(i.) $\emptyset \in \mathscr{A}$,

(ii.) ako je $A \in \mathscr{A}$, *onda je i* $A^{\mathrm{c}} \in \mathscr{A}$,

(iii.) ako je $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{A}$, *onda je i* $\bigcup_{i=1}^{n} \in \mathscr{A}$.

Dakle, $\mathscr{A}$ je algebra ako je zatvorena na komplementiranje i konačne unije. Iz definicije algebre također slijedi da je algebra zatvorena na konačne presjeke i skupovne razlike. Odnosno,

$$\Omega = \emptyset^{\mathrm{c}} \in \Omega,$$
$$A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{A} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} A_i = \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i^{\mathrm{c}}\right)^{\mathrm{c}} \in \mathscr{A},$$
$$A, B \in \mathscr{A} \Rightarrow A \setminus B = A \cap B^{\mathrm{c}} \in \mathscr{A}.$$

Definicija 1.3.2. *Familija $\mathscr{F}$ podskupova od Ω jest* ***σ-algebra akupova*** *ako vrijedi:*

(i.) $\emptyset \in \mathscr{F}$,

(ii.) ako je $A \in \mathscr{F}$, *onda je i* $A^{\mathrm{c}} \in \mathscr{F}$,

(iii.) ako je $A_i \in \mathscr{F}$, za $i \in \mathbb{N}$, onda je i $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{F}$.

Analogno se dokazuje da je σ-algebra zatvorena na prebrojive presjeke, skupovne razlike i da sadrži Ω. Dvije trivijalne σ-algebre su $\{\emptyset, \Omega\}$ i $\mathcal{P}(\Omega)$.

Definicija 1.3.3. *Neka je $\mathscr{F}$ σ-algebra na skupu Ω. Uređen par $(\Omega, \mathscr{F})$ se zove* ***izmjeriv prostor****.*

Definicija 1.3.4. *Neka je $(\Omega, \mathscr{F})$ izmjeriv prostor. Funkcija $\mathbb{P}\colon \mathscr{F} \mapsto \mathbb{R}$ se zove* ***vjerojatnost*** *ako vrijedi:*

(i.) (nenegativnost vjerojatnosti) $\mathbb{P}(A) \geqslant 0$, za $A \in \mathscr{F}$,

(ii.) (normiranost vjerojatnosti) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,

(iii.) (prebrojiva aditivnost) ako su $A_i \in \mathscr{F}$, za $i \in \mathbb{N}$, takvi da je $A_i \cap A_j = \emptyset$, za $i \neq j$, onda je $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$.

Definicija 1.3.5. *Uređena trojka $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, gdje je $\mathscr{F}$ σ-algebra na Ω i $\mathbb{P}$ vjerojatnost na $\mathscr{F}$, se zove* ***vjerojatnosni prostor****.*

Neka je S proizvoljan neprazan skup i $\mathscr{A}$ familija podskupova od S ($\mathscr{A} \subset \mathcal{P}(S)$). σ-algebra generirana sa $\mathscr{A}$, u oznaci $\sigma(\mathscr{A})$, je najmanja σ-algebra poskupova od S koja sadrži $\mathscr{A}$. Takva σ-algebra postoji, jedinstvena je i jednaka presjeku svih σ-algebri koje sadrže $\mathscr{A}$.

Označimo sa $\mathcal{B}$ Borelovu σ-algebru, odnosno najmanju σ-algebru koja sadrži sve Borelove (otvorene) skupove.

Definicija 1.3.6. *Neka je $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor i $X\colon \Omega \mapsto \mathbb{R}$. X je* ***slučajna varijabla*** *(na Ω) ako vrijedi:*

$$X^{-1}(B) \in \mathscr{F}, \quad \text{za svaki } B \in \mathcal{B}.$$

Drugim riječima, X je slučajna varijabla ako je $X^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathscr{F}$. Pojam slučajne varijable možemo generalizirati na $\mathbb{R}^n$. Tako dolazimo do pojma slučajnog vektora.

Definicija 1.3.7. *Neka je $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor i $X\colon \Omega \mapsto \mathbb{R}^n$. Kažemo da je X* ***n-dimenzionalni slučajni vektor*** *(na Ω) ako vrijedi:*

$$X^{-1}(B) \in \mathscr{F}, \quad \text{za svaki } B \in \mathcal{B}^n.$$

Definicija 1.3.8. *Neka je $(\Omega, \mathscr{F})$ izmjeriv prostor i X_n slučajne varijable na tom prostoru, za svaki $n \geqslant 0$. Familija $X = (X_n)_{n \geqslant 0}$ se zove* ***slučajan proces*** *(s diskretnim vremenom).*

Još jedan pojam vezan uz slučajne varijable koji ćemo koristiti je slučajna mjera. Fiksirajmo skup X i neka je $\mathcal{S}$ σ-algebra podskupova od X. Promatrajmo mjere na $\mathcal{S}$. Slučajnu mjeru definirat ćemo kao slučajnu varijablu čije vrijednosti su mjere na $\mathcal{S}$.

Definicija 1.3.9. *Neka je $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor. Funkciju $\mu\colon \Omega \times \mathcal{S} \mapsto [0, \infty]$ zovemo* ***slučajnom mjerom*** *ako je, za svaki $\omega \in \Omega$, funkcija*

$$A \mapsto \mu(\omega, A), \text{ za } A \in \mathcal{S},$$

mjera na $\mathcal{S}$, a, za svaki $A \in \mathcal{S}$, funkcija

$$\omega \mapsto \mu(\omega, A), \text{ za } \omega \in \Omega,$$

slučajna varijabla (odnosno, $\mathscr{F}$-izmjeriva).

Slijede dva važna rezultata teorije mjere: Borel-Cantellijeve leme, koje ćemo izreći u specijalnom slučaju za vjerojatnosni prostor. Neka je $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$vjerojatnosni prostor.

Definicija 1.3.10. ***Limes superior*** *niza $\{B_1, B_2, \ldots\} \subset \mathscr{F}$ definiramo s*

$$\limsup_n B_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n \geqslant k} B_n.$$

Definicija 1.3.11. *Niz $\{A_1, A_2, \ldots\} \subset \mathscr{F}$ zovemo* ***nezavisnim*** *ako, za svaki izbor $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_n$, vrijedi*

$$\mathbb{P}\left(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_n}\right) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \cdots \mathbb{P}(A_{i_n}).$$

Lema 1.3.12 (Prva Borel-Cantellijeva lema). *Neka su $B_1, B_2, \ldots$ $\mathscr{F}$-izmjerivi skupovi i $B = \limsup_i \{B_i\}$. Tada $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_i) < \infty$ povlači da je $\mathbb{P}(B) = 0$.*

Lema 1.3.13 (Druga Borel-Cantellijeva lema). *Neka je $A_1, A_2, \ldots$ niz izmjerivih i nezavisnih skupova i $A = \limsup_i \{A_i\}$. Ako je $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) = \infty$, onda je $\mathbb{P}(A) = 1$.*

U nastavku ćemo promatrati svojstva i pojmove vezane uz n-dimenzionalne slučajne vektore. Očito, iste definicije i rezultati mogu se primijeniti i u jednodimenzionalnom slučaju, odnosno na slučajne varijable.

Neka je $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor. Ako neko svojstvo, koje ovisi o točkama skupa Ω, vrijedi u svim točkama od Ω, osim eventualno na podskupu od Ω koji je događaj i ima vjerojatnost nula, tada kažemo da je to svojstvo ispunjeno gotovo sigurno na Ω. Kraće, označavamo da to svojstvo vrijedi $\mathbb{P} - g.s.$ Za dva n-dimenzionalna slučajna vektora X i Y kažemo da su jednaki gotovo sigurno, i pišemo $X = Y$ $(g.s.)$, ako je

$$\mathbb{P}\left(\omega \in \Omega\colon X(\omega) = Y(\omega)\right) = 1.$$

Nije teško pokazati da vjerojatnost ima svojstvo σ-poluaditivnosti, odnosno da za niz $(A_n : n \in \mathbb{N}) \subset \mathscr{F}$ vrijedi $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$. Iz ove relacije slijedi da je unija prebrojivo mnogo događaja vjerojatnosti nula ponovo događaj vjerojatnosti nula, odnosno da je presjek prebrojivo mnogo događaja vjerojatnosti jedan događaja vjerojatnosti jedan.

Definicija 1.3.14. *Kažemo da niz $(X_n : n \in \mathbb{N})$ slučajnih vektora na Ω* ***konvergira gotovo sigurno*** *prema funkciji $X\colon \Omega \mapsto \mathbb{R}^n$ (ili $\overline{\mathbb{R}}^n$) ako je:*

$$\mathbb{P}\left(\omega \in \Omega\colon \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right) = 1.$$

Oznaka: $X = \lim_{n\to\infty} X_n$ $(g.s)$ ili $X_n \xrightarrow{g.s.} X$, kada $n \to \infty$.

Može se pokazati da je takav limes, gotovo sigurno, jedinstven. Odnosno, ako vrijedi $X_n \xrightarrow{g.s.} X$ i $X_n \xrightarrow{g.s.} X'$, onda je $X = X'$, gotovo sigurno.

Neka je sada $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor i X slučajan vektor na Ω. Definiramo funkciju $\mathbb{P}_X\colon \mathscr{B}^n \mapsto [0,1]$ s

$$\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B)) = \mathbb{P}(\omega \in \Omega\colon X(\omega) \in B) = [\text{oznaka}] = \mathbb{P}(X \in B) \text{ za } B \in \mathscr{B}^n.$$

$\mathbb{P}_X$ je vjerojatnost, a zovemo je *vjerojatnost inducirana slučajnim vektorom X* ili *zakon razdiobe* od X. Dakle, slučajnom vektoru X možemo pridružiti vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathscr{B}^n, \mathbb{P}_X)$ koji zovemo *vjerojatnosni prostor induciran sa X*.

Definicija 1.3.15. *Neka je X slučajni vektor na Ω. Funkciju $F_X\colon \mathbb{R}^n \mapsto [0,1]$ definiranu s*

$$F_X(x) = \mathbb{P}_X((-\infty, x]), \ \text{za } x \in \mathbb{R}^n,$$

zovemo ***funkcijom distribucije*** *od X, gdje je $(-\infty, x] = (-\infty, x_1] \times \ldots \times (-\infty, x_n]$.*

Teorem 1.3.16 (Svojstva funkcije distribucije). *Funkcija distribucije F_X slučajnog vektora X ima sljedeća svojstva:*

(a) *F_X je monotono rastuća na $\mathbb{R}^n$,*

(b) *F_X je neprekidna zdesna,*

(c) *(neprekidnost vjerojatnosti u odnosu na padajuće nizove događaja)*

$$F_X(x_1, \ldots, x_n) \to 0, \ \text{ako } x_i \to -\infty \text{ za barem jedan } i = 1, \ldots, n,$$

(d) *(neprekidnost vjerojatnosti u odnosu ns rastuće nizove događaja)*

$$F_X(x_1, \ldots, x_n) \to 1, \ \text{ako } x_i \to \infty \text{ za sve } i = 1, \ldots, n.$$

Svaku funkciju $F\colon \mathbb{R}^n \mapsto [0,1]$ koja zadovoljava uvjete (a) - (d) iz prethodnog teorema zovemo *vjerojatnosna funkcija distribucije*.

Za $g\colon \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ i $a, b \in \mathbb{R}^n$ definiramo:

$$\Delta_{b_i - a_i} g(a_1, \dots, a_n) := g(a_1, \dots, a_{i-1}, b_i, a_{i+}, \dots, a_n) - g(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+}, \dots, a_n),$$
$$\Delta_{b-a} g(a) := \Delta_{b_1 - a_1}(\Delta_{b_2 - a_2}(\dots(\Delta_{b_n - a_n} g(a))\dots)) \geqslant 0.$$

Indukcijom se lako pokaže da za $a, b \in \mathbb{R}^n$ i $F\colon \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ vrijedi:

$$\Delta_{b-a} F(a) = \sum_{\substack{x_I \in \{a_i, b_i\} \\ i=1,\dots,n}} \pm F(x_1, \dots, x_n), \tag{1.1}$$

pri čemu predznak + stoji ako u nizu $(x_1, \dots, x_n)$ ima parni broj a_i-ova i predznak − ako u nizu $(x_1, \dots, x_n)$ ima neparni broj a_i-ova.

Teorem 1.3.17. *Neka je F vjerojatnosna funkcija distribucije na $\mathbb{R}^n$. Tada postoji vjerojatnosna mjera $\mathbb{P}_F$ na $\mathcal{B}^n$ koja je jednoznačno određena s F relacijom*

$$\mathbb{P}_F((a, b]) = \Delta_{b-a} F(a), \ \text{za } a, b \in \mathbb{R}^n, \ a \leqslant b.$$

Iz (1.1) slijedi da je

$$\mathbb{P}_F((-\infty, x]) = \lim_{a \to -\infty} \mathbb{P}_F((a, x]) = [\text{Tm. } 1.3.17] = \lim_{a \to -\infty} \Delta_{x-a} F(a) = F(x), \ \text{za } x \in \mathbb{R}^n.$$

Dakle, vjerojatnosna mjera $\mathbb{P}_F$ je u potpunosti određena s F relacijom iz Teorema 1.3.17.

Sjetimo se, ako je $X\colon \Omega \mapsto \mathbb{R}^n$ sa zakonom razdiobe $\mathbb{P}_X$, definicija funkcije distribucije daje $F_X(x) = \mathbb{P}_X((-\infty, x])$. Iz prethodne relacije vidjeli smo da je $\mathbb{P}_X$ u potpunosti određena s F_X. Dakle, zaključujemo da postoji 1-1 korespondencija između P_X i F_X.

Definicija 1.3.18. *Lebesgue-Stieltjesova mjera na $\mathbb{R}^n$ je mjera $\mu\colon \mathcal{B}^n \mapsto [0, \infty]$ takva da je $\mu(I) < \infty$, za svaki ograničen interval I u $\mathbb{R}^n$.*

Funkciju $F\colon \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ koja je neprekidna zdesna i zadovoljava $\Delta_{b-a} F(a) \geqslant 0$, za $a, b \in \mathbb{R}^n$, $a \leqslant b$, zovemo *poopćenom funkcijom distribucije*.

Može se pokazati da postoji jedinstvena L-S mjera μ na $\mathbb{R}^n$ koja je određena sa F relacijom

$$\mu((a, b]) = \Delta_{b-a} F(a), \ \text{za } a, b \in \mathbb{R}^n, \ a \leqslant b.$$

Obratno, proizvoljnoj L-S mjeri μ na $\mathbb{R}^n$ možemo pridružiti funkciju $F\colon \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ koja je poopćenje funkcije distribucije na $\mathbb{R}^n$. Dakle, postoji 1-1 korespondencija između L-S mjera na $\mathbb{R}^n$ i relanih funkcija na $\mathbb{R}^n$ koje su neprekidne zdesna i imaju nenegativne priraste $\Delta_{b-a} F(a)$, za $a \leqslant b$, pri čemu dvije takve funkcije s istim prirastima identificiramo.

Definicija 1.3.19. *Neka je X n-dimenzinalni slučajni vektor i F_X njegova funkcija distribucije. Kažemo da je X* ***(apsolutno) neprekidan*** *slučajan vektor ako je F_X apsoluno neprekidna u odnosu na Lebesgueovu mjeru u $\mathbb{R}^n$, odnosno ako postoji nenegativna Borelova funkcija $f_X \colon \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ takva da je*

$$F_X(x) = \int_{(-\infty,x]} f_X(t) d\mathcal{L}^n(t), \text{ za svaki } x \in \mathbb{R}^n.$$

Funkciju f_X zovemo ***gustoćom*** *slučajnog vektora X.*

Sada ćemo definirati jedan od najvažnijih pojmova vezanih uz slučajne varijable i vektore - matematičko očekivanje. Promatrajmo slučajnu varijablu X na vjerojatnosnom prostrou $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$.

Definicija 1.3.20. *Kažemo da je slučajna varijable $X = X^+ - X^-$ ima matematičko očekivanje ukoliko je barem jedan od integrala $\mathbb{E}[X^+] = \int_\Omega X^+ d\mathbb{P}$, $\mathbb{E}[X^-] = \int_\Omega X^- d\mathbb{P}$ konačan. U tom slučaju je* ***matematičko očekivanje*** *od X, u oznaci $\mathbb{E}[X]$, jednako : $\mathbb{E}[X] := \mathbb{E}[X^+] - \mathbb{E}[X^-]$. X je integrabila slučajna varijabla, odnosno ima konačno matematičko očekivanje, ako je $\mathbb{E}|X| < \infty$.*

Teorem o zamjeni varijabli povlači da je

$$\mathbb{E}X = \int_\Omega X d\mathbb{P} = \int_{-\infty}^{\infty} x \, d\mathbb{P}_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x \, dF_X(x),$$

gdje posljednja jednakost vrijedi jer su funkcije P_X i F_X u 1-1 korespondenciji.

Ako je X neprekidna slučajna varijabla s gustoćom f, onda je $\mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) \, dx$.

Definicija 1.3.21. *Slučajni vektor $X = (X_1, \ldots, X_n)$ ima matematičko očekivanje ako svaka komponenta X_i ima matematičko očekivanje. U tom slučaju je $\mathbb{E}X = (\mathbb{E}X_1, \ldots, \mathbb{E}X_n)$.*

Slijedi primjer osnovnog tipa neprekidnih slučajnih varijabli, normalnih slučajnih varijabli, te nekoliko tvrdnji vezanih uz njih koje će nam biti kasnije potrebne.

Definicija 1.3.22. *Neka su $m \in \mathbb{R}$ i $\sigma > 0$. Kažemo da slučajna varijabla X ima* ***normalnu razdiobu*** *s očekivanjem m i varijancom σ ako joj je gustoća f_X zadana s*

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \text{ za } x \in \mathbb{R}.$$

Ako je $m = 0$ i $\sigma = 1$, X zovemo ***jediničnom normalnom*** *slučajnom varijablom.*

Lema 1.3.23. *Neka je X jedinična normalna slučajna varijabla. Tada, za sve $x > 0$, vrijedi*

$$\frac{x}{x^2+1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \leqslant \mathbb{P}(X > x) \leqslant \frac{1}{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

Definicija 1.3.24. *Slučajan vektor $X = (X_1, \cdot, X_d)^\mathsf{T}$ s vrijednostima u $\mathbb{R}^d$ ima **d-dimenzionalnu standardnu Gaussovsku distribuciju** ako svih njegovih d komponenata ima jediničnu normalnu razdiobu i međusobno je nezavisno.*

Definicija 1.3.25. *Slučajni vektor $X = (X_1, \cdot, X_d)^\mathsf{T}$ je **Gaussovski slučajni vektor** ako postoji $n \times m$ matrica A i n-dimenzionalni vektor b takvi da je $X^\mathsf{T} = AY + b$, gdje je Y m-dimenzionalni vektor međusobno nezavisnih jediničnih normalnih slučajnih varijabli.*

Dakle, općenitije Gaussovske distribucije mogu se dobiti kao linearna slika standardne Gaussovske distribucije. Kovarijacijska matrica vektora X je dana s

$$\mathrm{Cov}(X) = \mathbb{E}\left[(Y - \mathbb{E}Y)(Y - \mathbb{E}Y)^\mathsf{T}\right] = AA^\mathsf{T},$$

gdje je očekivanje definirano po komponentama.

Propozicija 1.3.26. *Neka su X_1 i X_2 nezavisne, normalno distribuirane s očekivanjem 0 i varijancom $\sigma^2 > 0$. Tada su $X_1 + X_2$ i $X_1 - X_2$ također nezavisne i normalno distribuirane s očekivanjem 0 i varijancom $2\sigma^2$.*

Propozicija 1.3.27. *Neka je $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ niz Gaussovskih slučajnih vektora i neka je $\lim_{n\to\infty} X_n = X$, gotovo sigurno. Ako $b := \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}X_n$ i $C := \lim_{n\to\infty} \mathrm{Cov}\, X_n$ postoje, tada je X isto Gaussovski s očekivanjem b i kovarijacijskom matricom C.*

Definicija 1.3.28. *Neka je $X_1, X_2, \ldots$ niz slučajnih varijabli na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ i neka je A skup nizova takav da je $\{X_1, X_2, \ldots \in A\} \in \mathscr{F}$. Tada događaj $\{X_1, X_2, \ldots \in A\}$ zovemo **izmjenjivim** ako vrijedi*

$$\{X_1, X_2, \ldots \in A\} \subset \{X_{\sigma_1}, X_{\sigma_2}, \ldots \in A\},$$

za sve konačne permutacije $\sigma\colon \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$. Drugim riječima, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\sigma_n = n$, za sve $n \geqslant n_0$.

Lema 1.3.29 (Hewitt-Savageov zakon 0-1). *Ako je E izmjenjiv događaj za neki nezavisan, jednako distribuiran niz, onda je $\mathbb{P}(E)$ jednako 0 ili 1.*

1.4 Uvod u teoriju grafova

Frostmanovu lemu, kao jedan od glavnih rezultata ovoga rada, dokazat ćemo pomoću tehnika teorije grafova. U ovom dijelu dajemo osnovne definicije i činjenice iz toga područja koje ćemo koristiti.

Definicija 1.4.1. ***Stablo*** *$T = (V, E)$ je povezan graf sa konačnim ili prebrojivim skupom vrhova V, koji sadrži poseban vrh q koji nazivamo korijenom, i skupom usmjerenih bridova $E \subset V \times V$ takvima da vrijedi:*

(i.) *za svaki vrh $v \in V$, skup $\{w \in V : (w, v) \in E\}$ sadrži točno jedan element $\bar{v}$ koji zovemo* roditeljem*, osim korijena $q \in V$, koji nema roditelja,*

(ii.) *zas svaki vrh $v \in V$ postoji jedinstven nepresijecajući put od korijena do v, a broj bridovaa na tom putu* redom *ili* generacijom *vrha v i označavamo s $|v|$,*

(iii.) *za svaki vrh $v \in V$, skup* djece *od v je skup $\{w \in V : (v, w) \in E\}$ i on je konačan.*

Slijedi pregled još nekih oznaka. Za vrhove $v, w \in V$, s $v \wedge w$ označavamo vrh na presjeku puteva od korijena do v, odnosno w, koji ima maksimalan red. Drugim riječima, to je posljednji zajednički predak od v i w. Ako je v predak od w, pišemo $v \leqslant w$, što je ekvivalentno izrazu $v = v \wedge w$.

Red $|e|$ luka $e = (v, w)$ je red njegovog krajnjeg vrha w. Svaki beskonačan nepresijecajući put koji počinje s početkom u korijenu zovemo **zraka**. Skup svih zraka označavamo s ∂T i zovemo **granicom** stabla T. Za svake dvije zrake ξ i η, s $\xi \wedge \eta$ definiramo vrh na presjeku zraka maksimalnog reda. Dakle, $|\xi \wedge \eta|$ je broj lukova koji su zajednički zrakama ξ i η. Udaljenost između dvije zrake ξ i η definiramo s $|\xi - \eta| := 2^{-|\xi \wedge \eta|}$. Lako se pokaže da je uz ovu definiciju granica ∂T kompaktni metrički prostor.

U slučaju beskonačnih stabala ima smisla definirati tok stabla. Neka je dano preslikavanje $C : E \mapsto [0, \infty)$ koje bridu e stabla T pridružuje **kapacitet** $C(e)$. **Tok snage** $c > 0$ kroz stablo kapaciteta C je preslikavanje $\theta : E \mapsto [0, c]$ takvo da:

(i.) u slučaju korijena vrijedi $\sum_{\bar{w}=q} \theta(q, w) = c$, a u slučaju ostalih vrhova $v \neq q$ vrijedi

$$\theta(\bar{v}, v) = \sum_{w : \bar{w}=v} \theta(v, w),$$

(ii.) za svaki brid $e \in E$ vrijedi $\theta(E) \leqslant C(e)$.

Dakle, tok iz i u svaki vrh osim korijena je sačuvan (ne gubi se), a tok kroz svaki brid je ograničen njegovim kapacitetom.

Skup bridova Π je **prerez** ako svaka zraka $\xi \in \partial T$ sadrži brid iz Π.

Na kraju ovog uvodnog poglavlja dajemo poznati teorem teorije grafova, tzv. teorem maksimalnog toka i minimalnog prereza za beskonačna stabla. Dokaz teorema pripada Fordu i Fulkersonu.

Teorem 1.4.2 (Teorem maksimalnog toka i minimalnog prereza). *Za beskonačno stablo T kapaciteta C vrijedi:*

$$\max\{snaga(\theta)\colon \theta \text{ } je \text{ } tok\} = \inf\left\{\sum_{e\in\Pi} C(e)\colon \Pi \text{ } je \text{ } prerez\right\}.$$

Dokaz. Dokaz teorema se nalazi u [2, Teorem 12.36.]. □

Poglavlje 2

Brownovo gibanje

2.1 Definicija i konstrukcija Brownova gibanja

Definicija 2.1.1. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor. Realan slučajan proces $\{B(t) : t \geqslant 0\}$ zovemo **(linearno) Brownovo gibanje** s početkom u $x \in \mathbb{R}$ ako vrijedi:*

(i.) $B(0) = x$,

(ii.) *(nezavisnost prirasta) za svaki $n \in \mathbb{N}$ i za sva vremena $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_n$ su prirasti $B(t_n) - B(t_{n-1}), B(t_{n-1}) - B(t_{n-2}), \ldots, B(t_2) - B(t_1)$ nezavisne slučajne varijable,*

(iii.) *(normalnost prirasta) za svaki $t \geqslant 0$ i $h > 0$ su prirasti $B(t + h) - B(t)$ normalno distribuirani s očekivanjem nula i varijancom h,*

(iv.) *(neprekidnost trajektorija) funkcije (trajektorije) $t \mapsto B(t)$ su gotovo svugdje neprekidne.*

*Kažemo da je $\{B(t) : t \geqslant 0\}$ **standardno Brownovo gibanje** ako je $x = 0$.*

Dakle, definirali smo Brownovo gibanje kao slučajan proces $\{B(t) : t \geqslant 0\}$, odnosno kao familiju (neprebrojivo mnogo) slučajnih varijabli $\omega \mapsto B(t, \omega)$ definiranih na jednom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. S druge strane, slučajan proces možemo interpretirati i kao slučajnu funkciju čije trajektorije su definirane s $t \mapsto B(t, \omega)$. Svojstva puteva (trajektorija) slučajnog procesa su svojstva ovih slučajnih funkcija i upravo su to svojstva koja ćemo promatrati u nastavku ovog poglavlja.

Familija konačnodimenzionalnih distribucija slučajnog procesa $\{B(t) : t \geqslant 0\}$ je familija razdioba svih konačnodimenzionalnih slučajnih vektora

$$(B(t_1), B(t_2), \ldots, B(t_n)), \quad \text{za sve } n \in \mathbb{N} \text{ i } 0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_n.$$

Da bismo opisali ove zajedničke razdiobe dovoljno je opisati zajedničku razdiobu od $B(0)$ i prirasta $(B(t_1) - B(0), B(t_2) - B(t_1), \ldots, B(t_n) - B(t_{n-1}))$, $\forall n \in \mathbb{N}$ i $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_n$. Ovo je učinjeno u prva tri uvjeta definicije: oni definiraju konačnodimenzionalne distribucije Brownova gibanja. Četvrti uvjet, gotovo sigurna neprekidnost trajektorija, je također važan jer ne slijedi nužno iz poznavanja konačnodimenzionalnih distribucija slučajnog procesa. Preciznije, skup $\{\omega \in \Omega : t \mapsto B(t, \omega)$ je neprekidna$\}$ općenito ne pripada σ-algebri generiranoj slučajnim varijablama $(B(t_1), B(t_2), \ldots, B(t_n))$, $n \in \mathbb{N}$, kao što ilustrira idući primjer.

Primjer 2.1.2. *Neka je $\{B(t)\colon t \geqslant 0\}$ Brownovo gibanje i U nezavisna slučajna varijabla, uniformno distribuirana na $[0, 1]$. Promotrimo slučajan proces $\{\tilde{B}(t) : t \geqslant 0\}$ definiran s*

$$\tilde{B}(t) = \begin{cases} B(t) & ako\ t \neq U \\ 0 & ako\ t = U \end{cases}.$$

$\tilde{B}$ ima jednake konačnodimenzionalne distribucije kao i Brownovo gibanje, ali ima prekid ako je $B(U) \neq 0$, dakle s vjerojatnošću 1. Naime, vrijedi

$$\mathbb{P}(B(U) = 0) = \int_0^1 \mathbb{P}(B(t) = 0)dt = 0,$$

jer je gustoća slučajne varijable U jednaka 1. Stoga taj proces nije Brownovo gibanje.

Dakle, prethodni primjer pokazuje da je, za slučajni proces X, vjerojatnost događaja

$$\{\omega \in \Omega : t \mapsto X(t, \omega) \text{ je neprekidna}\}$$

jednaka jedan ako je X Brownovo gibanje, a nula ako je X proces $\tilde{B}$, iako ti procesi imaju jednake konačnodimenzionalne distribucije. Stoga ovaj skup sigurno ne pripada σ-algebri generiranoj slučajnim varijablama $(B(t_1), B(t_2), \ldots, B(t_n))$, $n \in \mathbb{N}$. Zaključujemo da za proučavanje svojstava puteva slučajnog procesa neće biti dovoljno zadati samo njegove konačnodimenzionalne distribucije.

S druge strane se nameće pitanje postojanja Brownova gibanja: omogućuju li uvjeti postavljeni na konačnodimenzionalne distribucije u definiciji Brownova gibanja da proces doista ima neprekidne puteve? Potvrdan odgovor, tj. dokaz da Brownovo gibanje doista postoji, dan je u idućem teoremu. Postoji puno načina za konstrukciju Brownova gibanja. U dokazu teorema slijedimo pristup velikog pionira Brownova gibanja, francuskog matematičara Paula Lévyja.

Teorem 2.1.3 (Wiener 1923.). *Standardno Brownovo gibanje postoji.*

Napomena. U dokazu ćemo konstruirati Brownovo gibanje kao uniformni limes neprekidnih funkcija čime ćemo automatski osigurati neprekidnost puteva.
Također, primijetimo da je dovoljno konstruirati standardno Brownovo gibanje $\{B(t) \colon t \geqslant 0\}$ jer $X(t) = x + B(t)$ definira Brownovo gibanje s početkom u točki x.

Dokaz. Prvo ćemo konstruirati Brownovo gibanje na intervalu $[0, 1]$ kao slučajan element prostora $\mathcal{C}[0, 1]$ svih neprekidnih funkcija na $[0, 1]$. Ideja je prvo korak po korak konstruirati zajedničku distribuciju Brownova gibanja na konačnim skupovima dijadskih točaka

$$\mathcal{D}_n = \left\{ \frac{k}{2^n} \colon 0 \leqslant k \leqslant 2^n \right\},$$

a zatim te dobivene vrijednosti linearno interpolirati. Na kraju ćemo provjeriti da uniformni limes ovih neprekidnih funkcija doista postoji i da je to Brownovo gibanje.

Neka je $\mathcal{D} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{D}_n$ i $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor na kojem možemo definirati skup $\{Z_t \colon t \in \mathcal{D}\}$ nezavisnih, standarnih normalnih slučajnih varijabli. Neka je $B(0) := 0$ i $B(1) := Z_1$. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ induktivno definiramo slučajne varijable $B(d), d \in \mathcal{D}_n$ tako da je zadovoljeno:

(i.) za sve $r < s < t$ iz $\mathcal{D}_n$ su slučajne varijable $B(t) - B(s)$ normalno distribuirane s očekivanjem 0 i varijancom $t - s$ te nezavisne od $B(s) - B(r)$,

(ii.) familije slučajnih varijabli $\{B(d) : d \in \mathcal{D}_n\}$ i $\{Z_t \colon t \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_n\}$ su nezavisne.

Uočimo da smo ovo već napravili na skupu $\mathcal{D}_0 = \{0, 1\}$. Pretpostavimo da smo to uspjeli napraviti za neki $n - 1$. Sada za svaki $d \in \mathcal{D}_n \setminus \mathcal{D}_{n-1}$ definiramo $B(d)$ s

$$B(d) = \frac{B(d - 2^{-n}) + B(d + 2^{-n})}{2} + \frac{Z_d}{2^{(n+1)/2}}.$$

Uočimo da je prvi pribrojnik dobiven linearnom interpolacijom vrijednosti od B u točkama iz $\mathcal{D}_{n-1}$ koje su susjedne od d, a koje su, kako slijedi iz drugog svojstva, nezavisne od $\{Z_t \colon t \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_{n-1}\}$ pa i od $\{Z_t \colon t \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_n\}$. Stoga je $B(d)$ nezavisna od $\{Z_t \colon t \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_n\}$ i drugo svojstvo vrijedi.
Promotrimo dvije slučajne varijable: $\frac{1}{2}[B(d + 2^{-n}) - B(d - 2^{-n})]$ i $Z_d/2^{(n+1)/2}$. Obje su normalno distribuirane s očekivanjem 0 i varijancom $2^{-(n+1)}$. Također, $\frac{1}{2}[B(d+2^{-n})-B(d-2^{-n}))]$ ovisi samo o $\{Z_t \colon t \in \mathcal{D}_{n-1}\}$ pa je nezavisna od $Z_d/2^{(n+1)/2}$. Zato su, prema Propoziciji 1.3.26, njihova suma $B(d) - B(d - 2^{-n})$ i njihova razlika $B(d + 2^{-n}) - B(d)$ nezavisne i normalno distribuirane s očekivanjem 0 i varijancom 2^{-n}.
Također vrijedi da su svi prirasti $B(d) - B(d - 2^{-n})$, za $d \in \mathcal{D}_n \setminus \{0\}$ nezavisni. Da bismo to pokazali dovoljno je provjeriti da su nezavisni u parovima jer je kod Gaussovskog slučajnog vektora nezavisnost ekvivalentna s nekoreliranošću. Dakle, nezavisnost prirasta će povlačiti nekoreliranost. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n - 1 \in \mathbb{N}$. Vidjeli

smo da su $B(d) - B(d - 2^{-n})$ i $B(d + 2^{-n}) - B(d)$ za $d \in \mathcal{D}_n \setminus \mathcal{D}_{n-1}$ nezavisni. Druga mogućnost je da su prirasti nad intervalima koji su odvojeni nekim $d \in \mathcal{D}_{n-1}$. Uzmimo takav $d \in \mathcal{D}_|$, gdje je j minimalan takav da su ta dva intervala sadržana u $[d - 2^{-j}, d]$, odnosno $[d, d + 2^{-j}]$. Pretpostavka indukcije daje da su prirasti nad ova dva intervala duljine 2^{-j} nezavisni. Uočimo da su prirasti nad intervalima duljine 2^{-n} konstruirani iz nezavisnih prirasta $B(d) - B(d - 2^{-j})$, odnosno $B(d + 2^{-j}) - B(d)$ koristeći različite varijable iz skupa $\{Z_t : t \in \mathcal{D}_n\}$. Stoga su i oni nezavisni. Zaključujemo da vrijedi i prvo svojstvo što završava korak indukcije.

Odabrane vrijednosti procesa u svim dijadskim točkama sada interpoliramo (v. Sliku 2.1). Formalno, definiramo

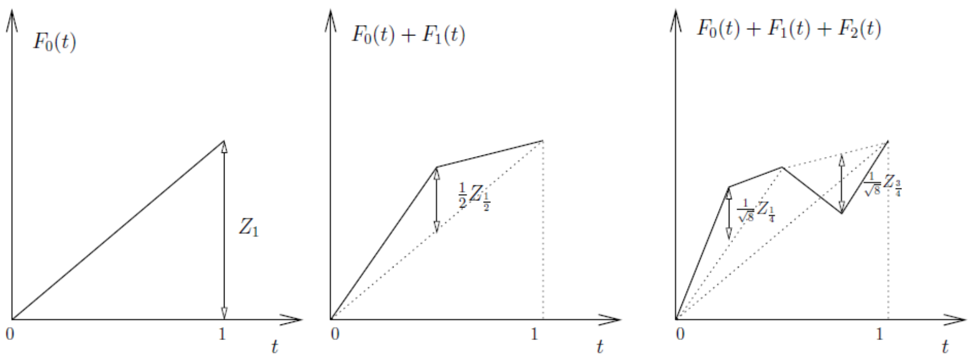
$$F_0(t) = \begin{cases} Z_1 & \text{za } t = 1, \\ 0 & \text{za } t = 0, \\ \text{linearna između,} & \end{cases}$$

a za $n > 1$,

$$F_n(t) = \begin{cases} 2^{-(n+1)/2} Z_t & \text{za } t \in \mathcal{D}_n \setminus \mathcal{D}_{n-1}, \\ 0 & \text{za } t \in \mathcal{D}_{n-1}, \\ \text{linearna između susjednih točaka iz } \mathcal{D}_n. & \end{cases}$$

Ove funkcije su neprekidne na $[0, 1]$ i za sve $n \in \mathbb{N}$ i $d \in \mathcal{D}_n$ vrijedi:

$$B(d) = \sum_{i=0}^{n} F_i(d) = \sum_{i=0}^{\infty} F_i(d). \tag{2.1}$$



Slika 2.1: Prva tri koraka konstrukcije Brownova gibanja.

Ovo ćemo pokazati indukcijom. Za $n = 0$ tvrdnja očito vrijedi (zbog $B(0) := 0$ i $B(1) := Z_1$). Pretpostavimo da vrijedi za $n-1$ i uzmimo $d \in \mathcal{D}_n \setminus \mathcal{D}_{n-1}$. Funkcija F_i je linearna na $[d-2^{-n}, d+2^n]$, za $0 \leqslant i \leqslant n-1$ (jedna granica intervala je točka iz $\mathcal{D}_{n-1} \setminus \mathcal{D}_{n-2}$, a druga točka iz $\mathcal{D}_{n-2}$) pa slijedi

$$\sum_{i=0}^{n-1} F_i(d) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{F_i(d-2^{-n}) + F_i(d+2^{-n})}{2} = \frac{B(d-2^{-n}) + B(d+2^{-n})}{2}.$$

Budući da je $F_n(d) = 2^{-(n+1)/2} Z_d$, vrijedi (3.3).
S druge strane, definicija od Z_d i Lema 1.3.23 povlače da za $c > 1$ i dovoljno veliki n vrijedi

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{|Z_d| \geqslant c\sqrt{n}\} &= \mathbb{P}\{Z_d \geqslant c\sqrt{n}\} + \mathbb{P}\{Z_d \leqslant -c\sqrt{n}\} \\
&\leqslant \frac{1}{c\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-c^2 n}{2}\right) + \frac{c\sqrt{n}}{c^2 n + 1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-c^2 n}{2}\right) \\
&\leqslant \exp\left(\frac{-c^2 n}{2}\right).
\end{aligned}$$

Slijedi da red

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(\exists d \in \mathcal{D}_n \text{ t.d. } |Z_d| \geqslant c\sqrt{n}\right) &\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{d \in \mathcal{D}_n} \mathbb{P}\left(|Z_d| \geqslant c\sqrt{n}\right) \\
&\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} (2^n + 1) \exp\left(\frac{-c^2 n}{2}\right).
\end{aligned}$$

konvergira za $c > \sqrt{2\log 2}$. Fiksirajmo takav c. Na osnovu Borel-Cantellijeve leme postoji slučajan (ali gotovo sigurno konačan) N tako da za sve $n \geqslant N$ i $d \in \mathcal{D}_n$ vrijedi $|Z_d| < c\sqrt{n}$. Stoga, za sve $n \geqslant N$,

$$\|F_n\|_\infty < c\sqrt{n} 2^{-n/2}. \tag{2.2}$$

Ova gornja ograda sada povlači da je, gotovo sigurno, red

$$B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(t)$$

uniformno konvergentan na $[0,1]$. Označimo taj neprekidni limes s $\{B(t) \colon t \in [0,1]\}$.
Da bismo pokazali da je taj proces zaista Brownovo gibanje, potrebno je još provjeriti da prirasti imaju odgovarajuće konačnodimenzionalne distribucije. Ovo slijedi direktno iz svojstava procesa B na skupu $\mathcal{D}$ koji je gust u $[0,1]$ te neprekidnosti puteva. Da bismo to

vidjeli, uzmimo proizvoljne $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ iz $[0,1]$ te $t_{1,k} \leqslant t_{2,k} \leqslant \cdots \leqslant t_{n,k}$ iz $\mathcal{D}$ takve da je $\lim_{k\to\infty} t_{i,k} = t_i, \forall i$. Neprekidnost procesa B povlači da za $1 \leqslant i \leqslant n-1$ vrijedi:

$$B(t_{i+1}) - B(t_i) = \lim_{k\to\infty} B(t_{i+1,k}) - B(t_{i,k}).$$

Budući da je $\lim_{k\to\infty} \mathbb{E}[B(t_{i+1,k}) - B(t_{i,k})] = 0$ (svojstvo *(i.)*) i

$$\lim_{k\to\infty} \mathrm{Cov}(B(t_{i+1,k}) - B(t_{i,k}), B(t_{j+1,k}) - B(t_{j,k})) = \lim_{k\to\infty} \mathbb{1}_{\{i=j\}}(t_{i+1,k} - t_{i,k}) = \mathbb{1}_{\{i=j\}}(t_{i+1} - t_i),$$

prirasti $B(t_{i+1}) - B(t_i)$ su, prema Propoziciji 1.3.27, nezavisne Gaussovske slučajne varijable s očekivanjem 0 i varijancom $t_{i+1} - t_i$.

Prema tome, konstruirali smo neprekidan proces $B : [0,1] \to \mathbb{R}$ koji ima jednake konačnodimenzionalne distribucije kao i Brownovo gibanje. Uzmimo niz $B_0, B_1, \ldots$ nezavisnih slučajnih varijabli s vrijednostima u $\mathcal{C}[0,1]$ koje su distribuirane kao ovaj proces i definirajmo $\{B(t) \colon t \geqslant 0\}$ spajajući zajedno dijelove, preciznije

$$B(t) = B_{\lfloor t \rfloor}(t - \lfloor t \rfloor) + \sum_{t=0}^{\lfloor t \rfloor - 1} B_i(1), \quad \text{za } t \geqslant 0.$$

Ovime smo definirali neprekidnu slučajnu funkciju $B : [0,\infty) \to \mathbb{R}$. Sada se lako provjeri, pomoću onoga što smo do sada dokazali, da je to standardno Brownovo gibanje. □

Napomena 2.1.4. *Iz Lévyjeve konstrukcije Brownova gibanja slijedi da je preslikavanje* $(t,\omega) \mapsto B(t,\omega)$ *izmjerivo na produktnom prostoru* $[0,\infty) \times \Omega$.

2.2 Svojstva Brownova gibanja

Slijedi pregled osnovnih svojstava Brownova gibanja koja će biti ključan alat za računanje Hausdorffove dimenzije i proučavanje trajektorija Brownova gibanja.

Invarijantnost Brownova gibanja

Jedna od tema ovoga rada je proučavanje prirodnih skupova koji su izvedeni iz trajektorija Brownova gibanja, poput skupa $\{t \geqslant 0 \colon B(t) = 0\}$. Pokazuje se da su to primjeri fraktalnih skupova. Intuitivno, to su skupovi koji imaju zanimljivu geometrijsku strukturu inavarijantnu na skaliranje. Ovdje se ključnim pokazuje skalirajuće svojstvo Brownova gibanja koje formulira sljedeća propozicija. Radi se o transformaciji na prostoru funkcija koja mijenja pojedinu slučajnu funkciju Brownova gibanja ne mijenjajući njezinu distribuciju.

Propozicija 2.2.1 (Skalirajuće svojstvo). *Neka je* $\{B(t) \colon t \geqslant 0\}$ *standardno Brownovo gibanje i neka je* $a > 0$. *Tada je proces* $\{X(t) \colon t \geqslant 0\}$ *definiran s* $X(t) = \frac{1}{a}B(a^2 t), t \geqslant 0$, *također standardno Brownovo gibanje.*

Dokaz. Moramo provjeriti da ovaj novi proces zadovoljava sva svojstva iz definicije Brownova gibanja.
Trajektorije su očito gotovo sigurno neprekidne, $X(0) = 0$, a prirasti su nezavisni. Naime, za $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_n$ vrijedi:

$$\begin{aligned}(X(t_n) - X(t_{n-1}), \ldots, X(t_2) - X(t_1)) &= \left(\frac{1}{a}B(a^2 t_n) - B(a^2 t_{n-1}), \ldots, \frac{1}{a}B(a^2 t_2) - B(a^2 t_1)\right) \\ &= \frac{1}{a}\Big(B(t'_n) - B(t'_{n-1}), \ldots, B(t'_2) - B(t'_1)\Big),\end{aligned}$$

a $B(t'_n) - B(t'_{n-1}), \ldots, B(t'_2) - B(t'_1)$ su nezavisne prema definiciji standardnoga Brownova gibanja za proces B.
Preostaje pokazati normalnost prirasta: $X(t) - X(s) = \frac{1}{a}(B(a^2 t) - B(a^2 s))$ je normalno distribuirana s očekivanjem $\frac{1}{a} \cdot 0 = 0$ i varijancom $\left(1/a^2\right)\left(a^2 t - a^2 s\right) = t - s$, što je i trebalo pokazati.
Dakle, proces $\{X(t) \colon t \geqslant 0\}$ je standardno Brownovo gibanje. □

Iduće korisno svojstvo Brownova gibanja koje ćemo promotriti je invarijantnost na vremensku inverziju. Ponovno se radi o transformaciji na prostoru funkcija koja mijenja individualne slučajne funkcije procesa ne mijenjajući pritom njihovu distribuciju.

Teorem 2.2.2 (Vremenska inverzija). *Neka je $\{B(t) \colon t \geqslant 0\}$ standardno Brownovo gibanje. Tada je proces $\{X(t) \colon t \geqslant 0\}$ definiran s*

$$X(t) = \begin{cases} 0, & za\ t = 0, \\ tB(\frac{1}{t}), & za\ t > 0, \end{cases}$$

također standardno Brownovo gibanje.

Dokaz. Prisjetimo se da su konačnodimenzionalne distribucije $(B(t_1), \ldots, B(t_n))$ Brownova gibanja Gaussovski slučajni vektori takvi da je $\mathbb{E}\,[B(t_i)] = 0$ i $\mathrm{Cov}\left(B(t_i), B(t_j)\right) = t_i$, za $0 \leqslant t_i \leqslant t_j$. Očito je $\{X(t) \colon t \geqslant 0\}$ također Gaussovski proces (njegove konačnodimenzionalne distribucije su višedimenzionalne normalne), a Gaussovski slučajni vektori $(X(t_1), \ldots, X(t_n))$ imaju očekivanje nula i kovarijancu, za $t > 0$ i $h \geqslant 0$,

$$\mathrm{Cov}\,(X(t+h), X(t)) = (t+h)t\,\mathrm{Cov}\left(B\left(\frac{1}{t+h}\right), B\left(\frac{1}{t}\right)\right) = t(t+h)\frac{1}{t+h} = t.$$

Stoga je razdioba svih konačnodimenzionalnih distribucija

$$(X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n))\,, \text{ za } 0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_n$$

jednaka kao kod Brownova gibanja. Nadalje, trajektorije $t \mapsto X(t)$ su očito gotovo sigurno neprekidne za $t > 0$. Pokažimo još da su neprekidne i u $t = 0$. Budući da je skup racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$ prebrojiv, konačnodimenzionalne distribucije slučajnih procesa $\{X(t)\colon t \geqslant 0,\ t \in \mathbb{Q}\}$ i $\{B(t)\colon t \geqslant 0,\ t \in \mathbb{Q}\}$ su jednake pa slijedi

$$\lim_{\substack{t\downarrow 0\\ t\in\mathbb{Q}}} X(t) = 0, \text{ gotovo sigurno.}$$

Kako je $\mathbb{Q} \cap (0, \infty)$ gust u $(0, \infty)$ i $\{X(t)\colon t \geqslant 0\}$ gotovo sigurno neprekidan na $(0, \infty)$, zaključujemo da je

$$X(0) = 0 = \lim_{\substack{t\downarrow 0\\ t\in\mathbb{Q}}} X(t) = \lim_{t\downarrow 0} X(t), \quad \text{g.s..}$$

Dakle, $\{X(t)\colon t \geqslant 0\}$ ima gotovo sigurno neprekidne trajektorije pa je to Brownovo gibanje. □

U nastavku ćemo proučiti dva osnovna analitička svojstva Brownova gibanja kao slučajne funkcije: neprekidnost i nediferencijabilnost.

Neprekidnost Brownova gibanja

Definicija Brownova gibanja zahtijeva gotovo sigurnu neprekidnost trajektorija Brownova gibanja. Ovo povlači da su na intervalu $[0, 1]$, odnosno na svakom kompaktnom intervalu, trajektorije uniformno neprekidne. Dakle, postoji neka slučajna funkcija φ takva da je $\lim_{h\to 0} \varphi(h) = 0$ i vrijedi:

$$\limsup_{h\to 0} \sup_{0\leqslant t\leqslant 1-h} \frac{|B(t+h) - B(t)|}{\varphi(h)} \leqslant 1 \tag{2.3}$$

Funkciju koja zadovoljava (2.3) nazivamo **modulom neprekidnosti** funkcije $B : [0, 1] \to \mathbb{R}$. Možemo li postići takvu ogradu s nekom neslučajnom funkcijom φ, odnosno ima li Brownovo gibanje neslučajni modul neprekidnosti? Potvrdan odgovor daje sljedeći teorem.

Teorem 2.2.3. *Postoji konstanta $C > 0$ takva da, gotovo sigurno, za svaki dovoljno mali $h > 0$ i sve $0 \leqslant t \leqslant 1 - h$ vrijedi:*

$$|B(t + h) - B(t)| \leqslant C \sqrt{h \log(1/h)}.$$

Dokaz. Tvrdnja slijedi vrlo elegantno iz Lévyjeve konstrukcije Brownova gibanja. Prisjetimo se: Brownovo gibanje reprezentirano je redom

$$B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(t),$$

gdje su F_n po dijelovima linearne funkcije. Derivacija od F_n postoji gotovo svugdje te iz definicije i (2.2) slijedi da za svaki $c > \sqrt{2\log 2}$ postoji (slučajan) $N \in \mathbb{N}$ takav da, za sve $n > N$,

$$\|F_n'\|_\infty \leqslant \frac{2\|F_n\|_\infty}{2^{-n}} \leqslant 2c\sqrt{n}2^{n/2}.$$

Slijedi da za sve $t, t+h \in [0,1]$, koristeći teorem srednje vrijednosti, vrijedi:

$$|B(t+h) - B(t)| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |F_n(t+h) - F_n(t)| \leqslant \sum_{n=0}^{l} h\|F_n'\|_\infty + 2\sum_{n=l+1}^{\infty} \|F_n\|_\infty.$$

Koristeći ponovno (2.2) dobijemo da je za $l > N$ ovo ograničeno s

$$h\sum_{n=0}^{N} \|F_n'\|_\infty + 2ch\sum_{n=N+1}^{l} \sqrt{n}2^{-n/2} + 2c\sum_{n=l+1}^{\infty} \sqrt{n}2^{-n/2}.$$

Uzmimo sada h (slučajan i) dovoljno mali tako da je prvi pribrojnik u gornjem izrazu manji od $\sqrt{h\log(1/h)}$ i $l > N$ takav da je $2^{-l} < h \leqslant 2^{-l+1}$. Za ovakav l su drugi i treći pribrojnik također ograničeni s konačnim umnoškom od $\sqrt{h\log(1/h)}$ jer su obje sume dominirane svojim najvećim elementom. Stoga dobijemo (2.3) za determinističku funkciju $\varphi(h) = C\sqrt{h\log(1/h)}$. □

Gornja ograda iz teorema brlo je blizu optimalne vrijednosti. Naime, nije teško pokazati da za svaku konstantu $c < \sqrt{2}$, gotovo sigurno, i za svaki $\varepsilon > 0$ postoje $0 < h < \varepsilon$ i $t \in [0, 1-h]$ takvi da je $|B(t+h) - B(t)| \geqslant c\sqrt{h\log(1/h)}$, vidi

Sjetimo se definicije lokalne α-Hölder neprekidnosti. Gornji rezultati također sugeriraju da se prijelaz između puteva koji su α-Hölder neprekidni i puteva koji nisu događa za $\alpha = 1/2$.

Korolar 2.2.4. *Ako je $\alpha < 1/2$, onda je, gotovo sigurno, Brownovo gibanje svugdje lokalno α-Hölder neprekidno.*

Dokaz. Neka je $C > 0$ kao u Teoremu 2.2.3. Primijenjujući taj teorem na Brownovo gibanje $\{B(t) - B(k) \colon t \in [k, k+1]\}$, gdje je k nenegativan cijeli broj, vidimo da, gotovo sigurno, za svaki k postoji $h(k) > 0$ takav da za sve $t \in [k, k+1]$ i $0 < h < (k+1-t) \wedge h(k)$ vrijedi:

$$|B(t+h) - B(t)| \leqslant C\sqrt{h\log(1/h)} \leqslant Ch^\alpha.$$

Primjenjujući ovo i na Brownovo gibanje $\left\{\tilde{B}(t) \colon t \in [k, k+1]\right\}$, defnirano s $\tilde{B}(t) = B(k+1-t) - B(k+1)$, daje puni rezultat. □

Napomena 2.2.5. *Rezultat ovog korolara je optimalan u smislu da za $\alpha > 1/2$, gotovo sigurno, Brownovo gibanje nije lokalno α-Hölder neprekidno. Također, točke u kojima je Brownovo gibanje lokalno 1/2-Hölder neprekidno postoje gotovo sigurno, no one su jako rijetke.*

Pokažimo prvu tvrdnju. Neka je $\alpha > 1/2$ i pretpostavimo suprotno, odnosno pretpostavimo da postoji $\varepsilon > 0$ i $C > 0$ takvi da je

$$|B(t+h) - B(t)| \leqslant Ch^{\alpha}, \quad \text{za } |h| < \varepsilon,$$

za neki $t > 0$. Zbog skalirajućeg svojstva smijemo pretpostaviti da je $\varepsilon = 1$. Dakle, pretpostavili smo da vrijedi:

$$\sup_{h\in(0,1)} \frac{|B(t+h) - B(t)|}{h^{\alpha}} \leqslant C.$$

Možemo pretpostaviti da je $t \in [0,1)$. Fiksirajmo $l \geqslant 1/(\alpha - \frac{1}{2})$. Slijedi da je $t \in \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right)$, za neki (veliki) n i $0 \leqslant k < 2^n - l$. Tada za sve $1 \leqslant j \leqslant 2^n - k$ vrijedi:

$$\left|B\left(\frac{k+j}{2^n}\right) - B\left(\frac{k+j-1}{2^n}\right)\right| \leqslant \left|B\left(\frac{k+j}{2^n}\right) - B(t)\right| + \left|B(t) - B\left(\frac{k+j-1}{2^n}\right)\right| \leqslant C\left(\frac{2j+1}{2^n}\right)^{\alpha}.$$

Definirajmo sada, za $0 \leqslant k < 2n - l$, događaj $\Omega_{n,k}$ sa:

$$\Omega_{n,k} = \left\{\left|B\left(\frac{k+j}{2^n}\right) - B\left(\frac{k+j-1}{2^n}\right)\right| \leqslant C\left(\frac{2j+1}{2^n}\right)^{\alpha}, \text{ za } j = 1, 2, \ldots, l\right\}.$$

Pokazat ćemo da je, gotovo sigurno te za dovoljno velike n i sve $k \in \{0, \ldots, 2^n - l\}$, vjerojatnost događaja $\Omega_{n,k}$ jednaka nuli. Uočimo da je, zbog nezavisnosti prirasta i skalirajućeg svojstva,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\Omega_{n,k}) &\leqslant \prod_{j=1}^{l} \mathbb{P}\left\{\left|B\left(\frac{k+j}{2^n}\right) - B\left(\frac{k+j-1}{2^n}\right)\right| \leqslant C\left(\frac{2j+1}{2^n}\right)^{\alpha}\right\} \\
&\leqslant \left[\mathbb{P}\left\{|B(1)| \leqslant 2^{n/2} C\left(\frac{2l+1}{2^n}\right)^{\alpha}\right\}\right]^{l} \\
&\leqslant \left[2^{n/2} C\left(\frac{2l+1}{2^n}\right)^{\alpha}\right]^{l},
\end{aligned}$$

gdje zadnja nejednakost slijedi iz činjenice da je gustoća normalne razdiobe ograničena s 1/2. Dakle, za odgovarajuću konstantu C vrijedi:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{2^n-l} \Omega_{n,k}\right) \leqslant 2^n \left[2^{n/2} C\left(\frac{2l+1}{2^n}\right)^{\alpha}\right]^{l} = M\left[2^{(1-l(\alpha-1/2))}\right]^{n},$$

što je sumabilno po n. Sada iz Borel-Cantellijeve leme slijedi

$$\mathbb{P}\left(\exists t \in [0,1] \;\; t.d. \; \sup_{h\in(0,1)} \frac{|B(t+h)-B(t)|}{h^\alpha} \leqslant C\right) \leqslant \mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} \bigcup_{k=0}^{2^n-l} \Omega_{n,k}\right) = 0,$$

što je i trebalo pokazati.

Nediferencijabilnost Brownova gibanja

Pokazali smo da je Brownovo gibanje u određenom smislu regularno. Sada ćemo proučiti drugu stranu. Pokazuje se da putevi Brownova gibanja nemaju intervale monotonosti te da nisu nigdje diferencijabilni.

Teorem 2.2.6. *Za sve* $0 < a < b < \infty$*, gotovo sigurno, Brownovo gibanje nije monotno na intervalu* $[a, b]$.

Dokaz. Fiksirajmo nedegenerirani interval $[a, b]$, odnosno interval pozitivne duljine, i pretpostavimo da je to interval monotonosti. Na primjer, $B(s) \leqslant B(t)$, za sve $a \leqslant s \leqslant t \leqslant b$. Uzmimo brojeve $a = a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_{n+1} = b$ i podijelimo interval $[a, b]$ na n podintervala $[a_i, a_{i+1}]$. Svaki prirast $B(a_i) - B(a_{i+1})$ mora imati isti predznak. Kako su prirasti nezavisni, taj događaj ima vjerojatnost $2 \cdot 2^{-n}$. Puštanjem $n \to \infty$ vidimo da je vjerojatnost da je $[a, b]$ interval monotonosti Brownova gibanja jednaka nuli. Uzimajući prebrojivu uniju vidimo da, gotovo sigurno, ne postoji nedegenerirani interval monotonosti s racionalnim granicama. Budući da svaki nedegenerirani interval ima nedegenerirani podinterval s racionalnim granicama, slijedi tvrdnja teorema. □

Za proučavanje diferencijabilnosti Brownova gibanja poslužit ćemo se vremenskom inverzijom. Ovo svojstvo nam omogućava da povežemo diferencijabilnost u $t = 0$ s ponašanjem funkcije u beskonačnosti. Obrnuto, vremenska inverzija ključ je i za dokazivanje komplementarnog rezultata - zakona velikih brojeva. Taj rezultat pokazuje da Brownovo gibanje raste sporije od linearnog. S druge strane, Propozicija 2.2.8 pokazuje da je limes superior rasta $B(t)$ brži od $\sqrt{t}$.

Korolar 2.2.7 (Zakon velikih brojeva). *Gotovo sigurno,* $\lim_{t\to\infty} \frac{B(t)}{t} = 0$.

Dokaz. Neka je $\{X(t) : t \geqslant 0\}$ vremenski invertiran slučajan proces, definiran u Teoremu 2.2.2. Koristeći taj teorem vidimo da je

$$\lim_{t\to\infty} \frac{B(t)}{t} = \lim_{t\to\infty} X\left(\tfrac{1}{t}\right) = [\text{neprekidnost Brownova gibanja}] = X(0) = 0, \quad \text{g.s.}.$$

□

Propozicija 2.2.8. *Gotovo sigurno, vrijedi:*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{B(n)}{\sqrt{n}} = +\infty \quad i \quad \liminf_{n\to\infty} \frac{B(n)}{\sqrt{n}} = -\infty. \tag{2.4}$$

Napomena. U dokazu Propozicije 2.2.8 koristit ćemo Hewitt-Savageov zakon 0-1 za promjenjive događaje, vidi 1.3.29

Dokaz. Fatouova lema povlači da je:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(B(n) > c\sqrt{n} \text{ za beskonačno mnogo n}\right) &= \mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty}\left\{B(n) > c\sqrt{n}\right\}\right)\\ &\geqslant \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(B(n) > c\sqrt{n}\right).\end{aligned}$$

Prema skalirajućem svojstvu $\mathbb{P}\left(B(n) > c\sqrt{n}\right) = \mathbb{P}\left(B(1) > c\right)$, što je pozitivno. Neka je sada $X_n = B(n) - B(n-1)$. Vrijedi:

$$\left\{B(n) > c\sqrt{n} \text{ za beskonačno mnogo n}\right\} = \left\{\sum_{j=1}^{n} X_j > c\sqrt{n} \text{ za beskonačno mnogo n}\right\}$$

i to je izmjenjiv događaj. Kako je $\mathbb{P}\left(B(n) > c\sqrt{n} \text{ za beskonačno mnogo n}\right) > 0$, Lema 1.3.29 (Hewitt-Savageov zakon 0-1) povlači da je to događaj vjerojatnosti 1. Uzimajući presjek po svim prirodnim brojevima c i koristeći tvrdnju da je presjek prebrojivo mnogo događaja vjerojatnosti 1 ponovno događaj vjerojatnosti 1, dobijamo prvi dio tvrdnje. Drugi dio se dokazuje analogno. □

Napomena 2.2.9. *Idući logičan korak je ispitati postojanje determinističke funkcije* $\varphi : [0,+\infty) \mapsto [0,+\infty)$ *takve da je* $\limsup_{t\to\infty} B(t)/\varphi(t)$ *veći od 0, ali manji od* ∞. *Odgovor daje tzv.* zakon iteriranog logaritma *koji pokazuje da vrijedi:*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{B(t)}{\sqrt{2t\log\log(t)}} = 1.$$

Za funkciju f definiramo **gornju** i **donju derivaciju zdesna** kao:

$$D^*f(t) = \limsup_{h\searrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h},$$

odnosno

$$D_*f(t) = \liminf_{h\searrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}.$$

Sada ćemo pokazati da za fiksni t, gotovo sigurno, Brownovo gibanje nije diferencijabilno u t.

Teorem 2.2.10. *Fiksirajmo $t \geqslant 0$. Tada, gotovo sigurno, Brownovo gibanje nije diferencijabilno u t. Štoviše, $D^* B(t) = +\infty$, a $D_* B(t) = -\infty$*

Dokaz. Neka je $\{X(t) \colon t \geqslant 0\}$ Brownovo gibanje dobiveno vremenskom inverzijom standardnog Brownova gibanja B. Tada vrijedi:

$$D^* X(0) \geqslant \limsup_{n\to\infty} \frac{X\left(\frac{1}{n}\right) - X(0)}{\frac{1}{n}} = \limsup_{n\to\infty} nX\left(\frac{1}{n}\right) \geqslant \limsup_{n\to\infty} \sqrt{n} X\left(\frac{1}{n}\right) = \limsup_{n\to\infty} \frac{B(n)}{\sqrt{n}},$$

što je jednako $+\infty$ prema Propoziciji 2.2.8. Slično, $D_* X(0) = -\infty$. Zaključujemo da X nije diferencijabilan u 0.

Uzmimo sada proizvoljan $t > 0$ i neka je $\{B(t) \colon t \geqslant 0\}$ Brownovo gibanje. Tada $X(s) = B(t+s) - B(t)$ definira standardno Brownovo gibanje. Uočimo da je diferencijabilnost od X u 0 ekvivalentna diferencijabilnosti od B u t, što dokazuje tvrdnju. □

Prethodni teorem pokazuje da je svaki t gotovo sigurno točka nediferencijabilnosti Brownova gibanja. Međutim, to ne znači da je, gotovo sigurno, *svaki* t točka nediferencijabilnosti. Naime, teorem nam za svaki t daje skup vjerojatnosti nula izvan kojeg su trajektorije Brownova gibanja nediferencijabilne u t. Ali taj skup može ovisiti o t. Kako unija svih tih skupova vjerojatnosti nula ne mora nužno biti skup vjerojatnosti 0, ne možemo zaključiti da je, gotovo sigurno, svaki t točka nediferencijabilnosti. Idući primjer pokazuje da postoje slučajna vremena gdje Brownovo gibanje pokazuje atipično ponašanje. Ipak, ti trenuci su toliko rijetki da svaka fiksna (tj. neslučajna) točka gotovo sigurno nije tog tipa.

Primjer 2.2.11. *Iz dokaza Teorema 2.2.10 vidi se da Brownovo gibanje X prolazi točkom 0 za proizvoljno mali $s > 0$. Naime, to je neprekidan proces koji poprima i pozitivne i negativne vrijednosti u svakoj okolini nule. Definirajmo skup razina $Z(t) = \{s > 0 \colon X(s) = X(t)\}$. Slijedi da je svaki fiksan $t > 0$ (zapravo je dovoljno da je t vrijeme zaustavljanja) gotovo sigurno gomilište zdesna od $Z(t)$. Ali nije svaki slučajan $t \in [0,1]$ gomilište zdesna od $Z(t)$. Primjerice zadnja nula od $\{X(t) \colon t \geqslant 0\}$ prije vremena 1 (koja je slučajna, jer ovisi o trajektoriji). Prema definiciji to ne može biti gomilište zdesna za $Z(t) = Z(0)$. Također, primijetimo da to slučajno vrijeme nije vrijeme zaustavljanja.*

Dakle, iz primjera vidimo da postoje točke u kojima ponašanje Brownova gibanja nije tipično. Također se može pokazati da, gotovo sigurno, postoje vremena $t_*, t^* \in [0,1)$ takva da je $D_* B(t_*) \geqslant 0$ i $D^* B(t^*) \leqslant 0$. Stoga se gotovo sigurno ponašanje u fiksnoj toči t, koje je dokazano u Teoremu 2.2.10, ne ostvaruje istovremeno u svim točkama.

Ipak, može se pokazati da je tvrdnja da, gotovo sigurno, Brownovo gibanje nije nigdje diferencijabilno, točna. Prvi dokaz te tvrdnje dali su Paley, Wiener i Zygmnud 1933. godine. Ovdje taj rezultat dajemo bez dokaza.

Teorem 2.2.12. *Gotovo sigurno, Brownovo gibanje nije nigdje diferencijabilno. Nadalje, gotovo sigurno, za svaki t, vrijedi*

$$\text{ili} \quad D^*B(t) = +\infty \quad \text{ili} \quad D_*B(t) = -\infty \quad \text{ili oboje}.$$

Napomena 2.2.13. *Lako se pokazuje nešto slabija tvrdnja da, gotovo sigurno, trajektorija Brownova gibanja nije diferencijabilna u Lebesgue-gotovo svakom t. Da bismo to vidjeli, pretpostavimo da je $\mathfrak{X}$ izmjeriv događaj (skup puteva) takav da je $\{B(t)\colon t \geqslant 0\} \in \mathfrak{X}$ gotovo sigurno. Stacionarnost prirasta povlači da je $\mathbb{P}(\{B(t+s) - B(t)\colon s \geqslant 0\} \in \mathfrak{X}) = 1$, za sve fiskne $t \geqslant 0$. Nadalje, gotovo sigurno, skup iznimnih točaka $\{t\colon \{B(t+s) - B(t)\colon s \geqslant 0\} \notin \mathfrak{X}\}$ je Lebesgueove mjere 0. Doista, koristeći zajedničku izmjerivost spomenutu u Napomeni 2.1.4 i Fubinijev teorem, slijedi:*

$$\mathbb{E}\int_0^\infty \mathbb{1}_{\{t\colon \{B(t+s)-B(t)\colon s\geqslant 0\} \notin \mathfrak{X}\}}\, dt = \int_0^\infty \mathbb{P}(\{B(s)\colon s \geqslant 0\} \notin \mathfrak{X})\, dt = 0.$$

Primijenimo li ovo na $\mathfrak{X} = \{\omega\colon \{B(t,\omega)\colon t \geqslant 0\}$ nije diferencijabilna u $0\}$, što vrijedi gotovo sigurno prema Teoremu 2.2.10, slijedi tvrdnja napomene.

Lokalni maksimum

U ovom dijelu ćemo promatrati lokalne ekstreme Brownova gibanja. Pokazat ćemo da je za gotovo sve trajektorije Brownova gibanja skup vremena u kojima se postiže lokalni maksimum gust u $(0, \infty)$. Zbog simetrije, isto vrijedi i za lokalne minimume.

Prisjetimo se, funkcija f ima *lokalni maksimum* u $t \in (a, b)$ ako postoji neki $\varepsilon > 0$ takav da je $f(s) \leqslant f(t)$, za sve $s \in (t-\varepsilon, t+\varepsilon)$. Ako je $f(s) < f(t)$, za sve $s \in (t-\varepsilon, t+\varepsilon)$, $s \neq t$, kažemo da je t *strogi lokalni maksimum* funkcije f.

Lema 2.2.14. *Pretpostavimo da $f \in \mathcal{C}[a, b]$ nije nigdje monotona, odnosno da ne postoji interval $I \subset (a, b)$ takav da je $f|_I$ monotona. Tada f ima barem jedan lokalni maksimum u (a, b).*

Dokaz. Pretpostavimo da je $f(b) > f(a)$ i stavimo $t = \max\{s \in [a, b] : f(s) = f(a)\}$. Budući da f nije nigdje monotona, slijedi da postoje $t < t_1 < t_2 < b$ takvi da je $f(t_1) > f(t)$ i $f(t_2) < f(t_1)$. Sada neprekidnost od f povlači da postoji barem jedan (lokalni) maksimum u $[t, t_2]$.

Slično zaključujemo i u slučaju da je $f(b) < f(a)$. Ako je $f(b) = f(a)$, onda postoji $c \in (a, b)$ takav da je $f(c) \neq f(a)$ pa smo u jednom od prijašnjih slučajeva. □

Teorem 2.2.15. *Za linerano Brownovo gibanje $\{B(t)\colon 0 \leqslant t \leqslant 1\}$, gotovo sigurno, vrijedi:*

(a) *svaki lokalni maksimum je strogi lokalni maksimum;*

(b) *skup vremena gdje se lokalni maksimumi postižu je prebrojiv i gust;*

(c) *globalni maksimum se postiže u jedinstveno vrijeme.*

Dokaz. (a) Označimo s I zatvoren interval u $[0,\infty)$ te s $M(I) := \sup_{t\in I} B_t$. Neka je Ω_0 skup svih ω za koje je svaki lokalni maksimum od $t \mapsto B_t(\omega)$ strogi lokalni maksimum. Tada je

$$\Omega_1 := \bigcap_{\substack{I\cap I'=\emptyset,\ I,I'\subset[0,\infty)\\ I,I'\text{racionalni intervali}}} \{M(I) \neq M(I')\} \subset \Omega_0, \tag{2.5}$$

pri čemu je racionalni interval onaj koji ima racionalne granice. Ako bi neprekidna funkcija $f : [0,\infty) \mapsto \mathbb{R}$ imala lokalni maksimum u $t > 0$ koji nije striktni lokalni maksimum, onda bi postojao neki $\varepsilon > 0$ takav da je $f(s) \leqslant f(t)$, za sve $s \in (t-\varepsilon, t+\varepsilon)$ i niz $(s_j)_{j\geqslant 1}$ takav da je $\lim_{j\to\infty} s_j = t$ i $f(s_j) = f(t)$, za svaki $j \geqslant 1$. Stoga postoje racionalni intervali I, I' takvi da je $I \cap I' = \emptyset$ i $M(I) = \sup_I f = \sup_{I'} f = M(I')$.

Neka je $I = [a,b]$, $I' = [c,d]$ i neka je $a < b < c < d$. Nezavisnost prirasta Brownovog gibanja povlači da je:

$$M(I') - M(I) = \sup_{s\in I'} B_s - \sup_{s\in I} B_s = \sup_{s\in I'} (B_s - B_c) + (B_c - B_b) + \inf_{s\in I} (B_b - B_s)$$

suma tri nezavisne slučajne varijable. Budući da je $B_c - B_b$ apsolutno neprekidna, isto vrijedi i za cijelu sumu pa slijedi $\mathbb{P}((M(I') - M(I)) \neq 0) = 1$. Presjek u (2.5) uzimamo po prebrojivom skupu zbog čega je $\mathbb{P}(\Omega_1) = 1$ (prebrojiv presjek skupova vjerojatnosti 1 je ponovno skup vjerojatnosti 1). Konačno, kako je početni vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ potpun, slijedi $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$.

(b) Tvrdnja slijedi iz činjenice da, prema Teoremu 2.2.6, Brownovo gibanje gotovo sigurno nije monotono na svakom intervalu $[a,b] \subset [0,\infty)$, za $a, b \in \mathbb{Q}$. Stoga prema Lemi 2.2.14 svaki takav interval sadrži lokalni maksimum i zaključujemo da je skup vremena u kojima se postiže lokalni maksimum gust. Također, kako je svaki lokalni maksimum strogi lokalni maksimum, kardinalnost tog skupa nije veća od kardinalnosti skupa koji sadrži sve te intervale, a njih ima prebrojivo mnogo.

(c) $\{B(t) - B(a) \colon t \geqslant a\}$ je Brownovo gibanje pa Teorem 2.2.12 povlači da je

$$\mathbb{P}(B(a) \geqslant B(t),\ \forall t \in [a,b]) = \mathbb{P}(B(b) \geqslant B(t),\ \forall t \in [a,b]) = 0,$$

iz čega slijedi da se, gotovo sigurno, globalni maksimum od $t \mapsto B(t)$ postiže unutar intervala (a,b). Pokazali smo da za svaki $\omega \in \Omega_0$ put $t \mapsto B(t,\omega)$ ima samo stroge lokalne maksimume te da je $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$. Zato slijedi

$$\begin{aligned}\Omega_0 \cap \left\{\omega \mid \exists s, t \in [a,b]\,,\ s \neq t \ \text{ t.d. } B(s,\omega) = B(t,\omega) = \sup_{u\in[a,b]} B(u,\omega)\right\} \\ \subset \ \Omega_0 \cap \bigcup_{\substack{I\cap I'=\emptyset,\ I,I'\subset[0,\infty)\\ I,I' \text{racionalni intervali}}} \{M(I) = M(I')\} = \Omega_0 \cap \Omega_1^{\mathrm{c}}.\end{aligned} \tag{2.6}$$

Desna strana je sadržana u Ω_1^{c}. U dokazu prvog dijela teorema pokazali smo da je $\mathbb{P}\left(\Omega_1^{\mathrm{c}}\right) = 0$, što dokazuje tvrdnju.

□

2.3 D-dimenzionalno Brownovo gibanje

U ovom dijelu uvest ćemo pojam višedimenzionalnog Brownovog gibanja. Zahtijevat ćemo da svaka njegova komponenta ima karakteristike linearnog Brownovog gibanja te da su komponente međusobno nezavisne.

Definicija 2.3.1. *Neka su $B_1, \dots, B_d$ nezavisna linearna Brownova gibanja s počecima u točama $x_1, \dots, x_d$. Tada slučajan proces $\{B(t)\colon t \geqslant 0\}$ definiran s*

$$B(t) = \left(B_1(t), \cdots, B_d(t)\right)^{\tau}$$

*zovemo **d-dimenzionalno Brownovo gibanje** s početkom u $(x_1, \dots, x_d)^{\tau}$.*

*D-dimenzionalno Brownovo gibanje koje počinje u ishodištu zovemo **standardno Brownovo gibanje**.*

*Jednodimenzionalno Brownovo gibanje zovemo **linearno**, a dvo-dimenzionalno Brownovo gibanje zovemo **planarno Brownovo gibanje**.*

Napomena 2.3.2. *S $\mathbb{P}_x$ označavat ćemo vjerojatnosnu mjeru induciranu d-dimenzionalnim Brownovim gibanjem $\{B(t)\colon t \geqslant 0\}$ s početkom u $x \in \mathbb{R}^d$, a s $\mathbb{E}_x$ odgovarajuće očekivanje. Dakle, $\mathbb{P}_x : \mathscr{B}^d \mapsto [0,1]$, je definirana s:*

$$\mathbb{P}_x(A) := \mathbb{P}(B \in A) = \mathbb{P}(B^{-1}(A)), \quad \textit{za } A \in \mathscr{B}^d.$$

Neka je $\{X(t)\colon t \geqslant 0\}$ slučajan proces. Intuitivno, Markovljevo svojstvo kaže da je u trenutku s za predikciju budućnosti važno znati samo krajnju vrijednost $X(s)$, a ne vrijednosti procesa $\{X(t)\colon t \geqslant 0\}$ na cijelom intervalu $[0,s]$. Također, proces zovemo **(vremenski homogenim) Markovljevim procesom** ako u svakoj fiksnoj točki s počinje ispočetka. Preciznije, uz pretpostavku da proces može početi u bilo kojoj točki $X(0) = x \in \mathbb{R}^d$, vremenski pomaknuti proces $\{X(s+t)\colon t \geqslant 0\}$ je jednako distribuiran kao i proces koji počinje u $X(0) \in \mathbb{R}^d$.

Ključan pojam kod proučavanja Markovljevog svojstva je nezavisnost slučajnih procesa. Dva slučajna procesa $\{X(t)\colon t \geqslant 0\}$ i $\{Y(t)\colon t \geqslant 0\}$ su **nezavisna** ako su za sve skupove $t_1, \dots, t_n \geqslant 0$ i $s_1, \dots, s_m \geqslant 0$ vremena slučajni vektori $(X(t_1), \dots, X(t_n))$ i $(Y(s_1), \dots, Y(s_m))$ nezavisni.

Teorem 2.3.3 (**Markovljevo svojstvo**). *Neka je $\{B(t)\colon t \geqslant 0\}$ Brownovo gibanje s početkom u $x \in \mathbb{R}^d$ i neka je $s > 0$. Tada je proces $\{B(t+s) - B(s)\colon t \geqslant 0\}$ ponovno Brownovo gibanje s početkom u ishodištu i nezavisno je od procesa $\{B(t)\colon 0 \leqslant t \leqslant s\}$.*

Dokaz. Provjerimo da $\{B(t+s) - B(s)\colon t \geqslant 0\}$ zadovoljava svojstvo iz definicije d-dimenzionalnog Brownova gibanja. Označimo $X(t) = B(t+s) - B(s)$, za $t \geqslant 0$. Pokazat ćemo da je prva komponenta procesa X, $X_1(t) = B_1(t+s) - B_1(s)$ linearno standardno Brownovo gibanje.

(i.) Očito je $X_1(0) = B_1(t) - B_1(t) = 0$.

(ii.) Uzmimo $t_1, \dots, t_n \geqslant 0$. Tada je

$$(X_1(t_2) - X(t_1), \dots, X_1(t_n) - X(t_{n-1})) = (B_1(t_2+s) - B_1(t_1+s), \dots, B_1(t_n+s) - B_1(t_{n-1}+s)),$$

što je nezavisno prema definiciji Brownova gibanja B.

(iii.) Uzmimo $0 \leqslant r < t$. Tada je $X_1(t) - X_1(r) = B_1(t+s) - B_1(s) - B_1(r+s) + B_1(s) = B_1(t+s) - B_1(r+s)$, što je normalna slučajna varijabla s očekivanjem 0 i varijancom $t + s - (r+s) = t - r$.

(iv.) Gotovo sigurna neprekidnost trajektorija slijedi iz gotovo sigurne neprekidnosti trajektorija Brownova gibanja B_1.

Dakle, sve komponente proces X su standardna Brownova gibanja pa zaključujemo da je X standardno Brownovo gibanje.

Nezavisnost od procesa $\{B(t)\colon 0 \leqslant t \leqslant s\}$ slijedi direktno iz nezavisnosti prirasta Brownova gibanja. □

Sada ćemo uvesti još neke pojmove koji će nam biti važni kod proučavanja Markovljevih procesa.

Definicija 2.3.4. ***(a)*** ***Filtracija*** *na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ je familija $\mathbb{F} = (\mathscr{F}(t)\colon t \geqslant 0)$ σ-algebri takvih da je $\mathscr{F}(s) \subset \mathscr{F}(t) \subset \mathscr{F}$, za sve $s < t$.*

(b) *Vjerojatnosni prostor zajedno s filtracijom zovemo* ***filtrirani vjerojatnosni prostor*** *i označavamo s $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$.*

(c) *Slučajan proces $\{X(t)\colon t \geqslant 0\}$ definiran na filtriranom vjerojatnosnom prostoru s filtracijom $\mathbb{F} = (\mathscr{F}(t)\colon t \geqslant 0)$ je* ***adaptiran*** *s obzirom na filtarciju $\mathbb{F}$ ako je $X(t)$ $\mathscr{F}(t)$-izmjeriva za sve $t \geqslant 0$.*

Za Brownovo gibanje $\{B(t) : t \geqslant 0\}$ definirano na nekom vjerojatnosnom prostoru definiramo njegovu *prirodnu filtraciju* $\left(\mathscr{F}^0(t) : t \geqslant 0\right)$ s $\mathscr{F}^0(t) = \sigma\left(B(s) : 0 \leqslant s \leqslant t\right)$. Drugim riječima, to je σ-algebra generirana slučajnim varijablama $B(s)$, za $0 \leqslant s \leqslant t$. Stoga je Brownovo gibanje očito adaptirano s obzirom na svoju prirodnu filtraciju. Intuitivno, ova σ-algebra sadrži sve informacije koje se dobiju promatranjem procesa do trenutka t. Uočimo da je, prema Teoremu 2.3.3 proces $\{B(t+s) - B(s) : t \geqslant 0\}$ nezavisan od $\mathscr{F}^0(s)$, za svaki $s \geqslant 0$.

Promotrimo sada nešto veću (proširenu) σ-algebru $\mathscr{F}^+(s)$ definiranu s

$$\mathscr{F}^+(s) = \bigcap_{t>s} \mathscr{F}^0(t).$$

To je očito filtracija ($\mathscr{F}^+(s) \subset \mathscr{F}^+(t)$, za $s < t$, jer kod $\mathscr{F}^+(t)$ uzimamo presjek po poskupu skupa kojeg uzimamo kod $\mathscr{F}^0(s)$, dakle po manjem skupu) i vrijedi $\mathscr{F}^+(s) \supset \mathscr{F}^0(s)$. Intuitivno, $\mathscr{F}^+(s)$ je malo veći od $\mathscr{F}^0(s)$ jer omogućuje infitezimalno mali pogled u budućnost.

Teorem 2.3.5. *Za svaki $s \geqslant 0$ proces $\{B(t+s) - B(s) : t \geqslant 0\}$ je nezavisan od σ-algebre $\mathscr{F}^+(s)$.*

Dokaz. Neka je $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strogo padajući niz koji konvergira prema s. Neprekidnost slučajnog procesa $\{B(t+s) - B(s) : t \geqslant 0\}$, pokazana u Teoremu 2.3.3, povlači da je $B(t+s) - B(s) = \lim_{n\to\infty}(B(s_n + t) - B(s_n))$. Također, za sve $t_1, \ldots, t_m \geqslant 0$, je slučajni vektor

$$(B(t_1+s) - B(s), \ldots, B(t_m+s) - B(s)) = \lim_{n\nearrow\infty} (B(t_1+s_n) - B(s_n), \ldots, B(t_m+s_n) - B(s_n))$$

nezavisan od $\mathscr{F}^+(s)$, zato što je $B(t_i+s_j) - B(s_j)$ nezavisno od $\mathscr{F}(s_j) \supset \mathscr{F}^+(s)$ zbog $s_j > s$. Stoga je i proces $\{B(t+s) - B(s) : t \geqslant 0\}$ nezavisan od $\mathscr{F}^+(s)$. $\square$

2.4 Jako Markovljevo svojstvo i princip refleksije

Markovljevo svojstvo kaže da Brownovo gibanje počinje ispočetka u svakom determinističkom vremenskom trenutku. Jedno od ključnih svojstava Brownova gibanja je da isto vrijedi i za određenu klasu slučajnih vremena koje nazivamo *vremenima zaustavljanja*. Osnovna ideja je da je slučajno vrijeme T vrijeme zuastavljanja ako možemo znati vrijedi li $\{T \leqslant t\}$ poznavajući samo put slučajnog procesa do trenutka t.

Definicija 2.4.1. *Slučajna varijabla $T : \Omega \mapsto [0,\infty]$ definirana na vjerojatnosnom prostoru s filtracijom $(\mathscr{F}(t) : t \geqslant 0)$ se zove **vrijeme zaustavljanja** s obzirom na $(\mathscr{F}(t) : t \geqslant 0)$ ako vrijedi*

$$\{T \leqslant t\} \in \mathscr{F}, \quad t \geqslant 0.$$

Napomena 2.4.2. *Slijedi pregled nekih osnovnih činjenica o vremenima zaustavljanja.*

(a) Svako determinističko vrijeme $t \geqslant 0$ je vrijeme zaustavljanja s obzirom na svaku filtraciju $(\mathscr{F}(t)\colon t \geqslant 0)$.

(b) Ako je $(T_n\colon n = 1, 2, \ldots)$ rastući niz vremena zaustavljanja s obzirom na $(\mathscr{F}(t)\colon t \geqslant 0)$ takav da $T_n \nearrow T$, onda je T također vrijeme zaustavljanja s obzirom na $(\mathscr{F}(t)\colon t \geqslant 0)$. Naime, vrijedi

$$\{T \leqslant t\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{T_n \leqslant t\} \in \mathscr{F}(t).$$

(c) Neka je T vrijeme zaustavljanja s ozirom na $(\mathscr{F}(t)\colon t \geqslant 0)$. Definirajmo T_n s

$$T_n = (m+1)2^{-n}, \text{ za } m2^{-n} \leqslant T < (m+1)2^{-n}. \tag{2.7}$$

Drugim riječima, zaustavimo se u prvom vremenu oblika $k2^{-n}$ nakon T. Da bismo pokazali da je to vrijeme zaustavljanja, uočimo da je

$$\{T_n \leqslant t\} = \bigcup_{m=0}^{\infty} \{T \geqslant m2^{-n}\} \cap \{T < (m+1)2^{-n}\} \cap \{(m+1)2^{-n} \leqslant t\}.$$

Skup s desne strane je ili prazan (i vrijedi $\emptyset \in \mathscr{F}(t)$) ili vrijedi:

$$\{T \geqslant m2^{-n}\} = \{T < m2^{-n}\}^{\mathsf{c}} \in \mathscr{F}(t),$$

jer je $\{T < m2^{-n}\} \subset \{T \leqslant m2^{-n}\} \in \mathscr{F}(m2^{-n}) \subset \mathscr{F}(t)$, i

$$\{T < (m+1)2^{-n}\} \subset \{T \leqslant (m+1)2^{-n}\} \in \mathscr{F}((m+1)2^{-n}) \subset \mathscr{F}(t).$$

Dakle, $\{T_n \leqslant t\} \in \mathscr{F}(t)$ pa je T_n vrijeme zaustavljanja.

Za vrijeme zaustavljanja T definirajmo σ-algebru

$$\mathscr{F}^+(T) := \{A \in \mathcal{F}\colon A \cap \{T \leqslant t\} \in \mathscr{F}^+(t),\ \forall t \geqslant 0\}.$$

Drugim riječima, dio od A koji se nalazi u skupu $\{T \leqslant t\}$ treba biti izmjeriv u odnosu na informacije dostupne do trenutka t. Intuitivno, to je skup događaja koji su se dogodili prije vremena zaustavlja T.

Može se pokazati da je slučajan put $\{B(t)\colon t \leqslant T\}$ $\mathscr{F}^+(T)$-izmjeriv. Također, lako se pokaže da za filtracije koje su neprekidne zdesna, poput $(\mathscr{F}^+(t)\colon t \geqslant 0)$, događaj $\{T \leqslant t\}$ možemo zamijeniti s $\{T < t\}$ bez mijenjanja definicije. Naime, vrijedi

$$\{T \leqslant t\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{T \leqslant t + \frac{1}{n}\right\} = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} \left\{T \leqslant t + \frac{1}{n}\right\}.$$

Kako je $\bigcap_{n=m}^{\infty}\left\{T \leqslant t+\frac{1}{n}\right\} \in \mathscr{F}\left(t+\frac{1}{m}\right)$, za sve $m \in \mathbb{N}$, slijedi

$$\{T \leqslant t\} \in \bigcap_{m=1}^{\infty} \mathscr{F}\left(t+\frac{1}{m}\right)=\mathscr{F}^{+}(t).$$

Sada ćemo iskazati i dokazati najvažniji rezultat ovog poglavlja: *jako Markovljevo svojstvo* za Brownovo gibanje. Zanimljivo je da su ovu tvrdnju prvi iznijeli i dokazali Gilbert Hunt i Eugene Dynkin, nezavisno jedan od drugoga.

Teorem 2.4.3 (Jako Markovljevo svojstvo). *Za svako gotovo sigurno konačno vrijeme zaustavljanja T, proces*

$$\{B(T+t)-B(T)\colon t \geqslant 0\}$$

je standardno Brownovo gibanje nezavisno od $\mathscr{F}^{+}(T)$.

Dokaz. Prvo ćemo pokazati da tvrdnja vrijedi za vrijeme zaustavljanja T_n koje aproksimira T odozgo, a koje smo definirali u Napomeni 2.4.2. Za $k \geqslant 0$ definiramo Brownova gibanja $B_k=\{B_k(t)\colon t \geqslant 0\}$ s $B_k(t)=B(t+k/2^n)-B(k/2^n)$ te proces $B_*=\{B_*(t)\colon t \geqslant 0\}$ s $B_*(t)=B(t+T_n)-B(T_n)$. Neka je $E \in \mathscr{F}^{+}(T_n)$. Tada, za svaki događaj $\{B_* \in A\}$, imamo

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\{B_* \in A\} \cap E\right) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(\{B_k \in A\} \cap E \cap \{T_n=k2^{-n}\}\right)\\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(B_k \in A\right) \mathbb{P}\left(E \cap \{T_n=k2^{-n}\}\right),\end{aligned}$$

jer je $\{B_k \in A\}$ nezavisan od $E \cap \{T_n=k2^{-n}\} \in \mathscr{F}^{+}(k2^{-n})$ prema Teoremu 2.3.5.
Teorem 2.3.3 daje da $\mathbb{P}\left(B_k \in A\right)=\mathbb{P}\left(B \in A\right)$ ne ovisi o k (svi B_k su standardna Brownova gibanja) pa slijedi

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(B_k \in A\right) \mathbb{P}\left(E \cap \{T_n=k2^{-n}\}\right) &= \mathbb{P}\left(B \in A\right) \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(E \cap \{T_n=k2^{-n}\}\right)\\ &= \mathbb{P}\left(B \in A\right) \mathbb{P}(E).\end{aligned}$$

Dakle, za $E=\Omega$ vrijedi $\mathbb{P}\left(B_* \in A\right)=\mathbb{P}\left(B \in A\right)$ pa je B_* Brownovo gibanje. Zato vrijedi:

$$\mathbb{P}\left(\{B_* \in A\} \cap E\right)=\mathbb{P}\left(B_* \in A\right) \mathbb{P}(E).$$

Dakle, B_* Brownovo gibanje i nezavisno je od E pa i od $\mathscr{F}^{+}(T_n)$.

Preostaje dokazati tvrdnju za općenito vrijeme zaustavljanja T. Kako $T_n \searrow T$, slijedi da je $\{B(s+T_n)-B(T_n)\colon s \geqslant 0\}$ Brownovo gibanje nezavisno od $\mathscr{F}^{+}(T_n) \supset \mathscr{F}^{+}(T)$. Tvrdimo da je proces $\{B(r+T)-B(T)\colon r \geqslant 0\}$ Brownovo gibanje. Prirasti

$$B(s+t+T)-B(t+T)=\lim_{n \to \infty}\left(B(s+t+T_n)-B(t+T_n)\right) \tag{2.8}$$

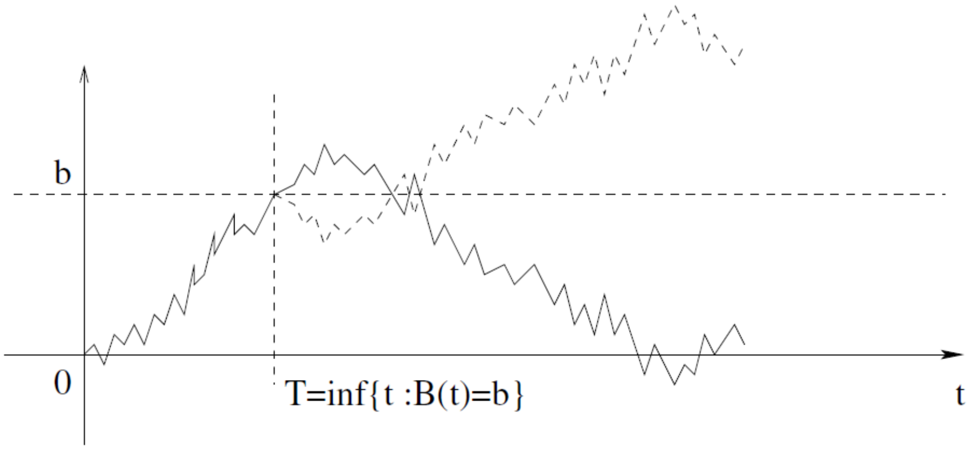
su nezavisni i normalno distribuirani s očekivanjem nula i varijancom s (što slijedi iz svojstava prirasta Brownova gibanja $\{B(s + T_n) - B(T_n)\colon s \geqslant 0\}$). Također, proces $\{B(r + T) - B(T)\colon r \geqslant 0\}$ je očito gotovo sigurno neprekidan pa možemo zaključiti da je to Brownovo gibanje. Nadalje, njegovi prirasti su, zbog (2.8), nezavisni od $\mathscr{F}^+(T)$ pa isto vrijedi i za sam proces. □

Sada ćemo vidjeti nekoliko primjena jakog Markovljevog svojstva. Jedna od njih je princip refleksije koji kaže da je Brownovo gibanje reflektirano u nekom vremenu zaustavljanja T opet Brownovo gibanje.

Teorem 2.4.4 (Princip refleksije). *Neka je T vrijeme zaustavljanja i $\{B(t)\colon t \geqslant 0\}$ standardno Brownovo gibanje. Proces $\{B^*(t)\colon t \geqslant 0\}$ definiran s*

$$B^*(t) = B(t)\mathbb{1}_{\{t\leqslant T\}} + (2B(T) - B(t))\,\mathbb{1}_{\{t>T\}}$$

*zovemo **Brownovo gibanje reflektirano u T** i to je standardno Brownovo gibanje.*



Slika 2.2: Brownovo gibanje reflektirano u prvom vremenu prolaska razine b.

Dokaz. Ako je T konačno, onda su prema jakom Markovljevom svojstvu putevi

$$\{B(t + T) - B(T)\colon t \geqslant 0\} \text{ i } \{-(B(t + T) - B(T))\colon t \geqslant 0\} \tag{2.9}$$

standardna Brownova gibanja nezavisna od početka $\{B(t)\colon 0 \leqslant t \leqslant T\}$. Preslikavanje koje uzima neprekidan put $\{g(t)\colon t \geqslant 0\}$ i lijepi ga na zadnju točku konačnog neprekidnog puta $\{f(t)\colon 0 \leqslant t \leqslant T\}$, stvarajući novi neprekidan put, je izmjerivo. Stoga su proces dobiven ljepljenjem prvog puta u (2.9) na $\{B(t)\colon 0 \leqslant t \leqslant T\}$ i proces dobiven ljepljenjem drugog puta u (2.9) na $\{B(t)\colon 0 \leqslant t \leqslant T\}$ jednako distribuirani (jer su oba puta u (2.9) jednako distribuirana). Prvi je samo proces $\{B(t)\colon t \geqslant 0\}$, a drugi $\{B^*(t)\colon t \geqslant 0\}$, čime smo dokazali tvrdnju. $\square$

Sada ćemo primijeniti princip refleksije na linearno Brownovo gibanje. Definirajmo maksimum Brownova gibanja:

$$M(t) = \max_{0 \leqslant s \leqslant t} B(s). \tag{2.10}$$

Princip refleksije omogućuje nam da odredimo razdiobu ove slučaje varijable.

Teorem 2.4.5. *Ako je $a > 0$, onda je:*

$$\mathbb{P}_0\left(M(t) > a\right) = 2\mathbb{P}_0\left(B(t) > a\right) = \mathbb{P}_0\left(|B(t)| > a\right).$$

Dokaz. Neka je $T = \inf\{t \geqslant 0\colon B(t) = a\}$ i neka je $\{B^*(t)\colon t \geqslant 0\}$ Brownovo gibanje reflektirano u vremenu zausatvljanja T. Vrijedi:

$$\begin{aligned}
\{M(t) \geqslant a\} &= \{M(t) \geqslant a,\ B(t) > a\} \cup \{M(t) \geqslant a,\ B(t) \leqslant a\} \\
&= \{B(t) \geqslant a\} \cup \{T \leqslant t,\ B(t) \leqslant a\} \\
&= \{B(t) \geqslant a\} \cup \{T \leqslant t,\ 2B(T) - B(t) \geqslant a\} \\
&= \{B(t) \geqslant a\} \cup \{T \leqslant t,\ 2a - B(t) \geqslant a\} \\
&= \{B(t) \geqslant a\} \cup \{T \leqslant t,\ B^*(t) \geqslant a\} \\
&= \{B(t) \geqslant a\} \cup (\{B^*(t) \geqslant a\} \setminus \{T > t,\ B^*(t) \geqslant a\}) \\
&= \{B(t) \geqslant a\} \cup (\{B^*(t) \geqslant a\} \setminus \emptyset) \\
&= \{B(t) \geqslant a\} \cup \{B^*(t) \geqslant a\}.
\end{aligned}$$

Kako je to disjunktna unija, slijedi:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_0\left(M(t) \geqslant a\right) &= \mathbb{P}_0\left(B(t) \geqslant a\right) + \mathbb{P}_0\left(B^*(t) \geqslant a\right) \\
&= [\text{Princip refleksije: } B \text{ i } B^* \text{ su standardna Brownova gibanja}] \\
&= \mathbb{P}_0\left(B(t) \geqslant a\right) + \mathbb{P}_0\left(B(t) \geqslant a\right) \\
&= 2\mathbb{P}_0\left(B(t) \geqslant a\right),
\end{aligned}$$

odakle slijedi tvrdnja.

Također, kako je $\mathbb{P}\left(B(t) < -a\right) = \mathbb{P}\left(-B(t) < -a\right) = \mathbb{P}\left(B(t) > a\right)$, slijedi i drugi dio tvrdnje: $\mathbb{P}_0\left(M(t) > a\right) = \mathbb{P}_0\left(|B(t)| > a\right)$. $\square$

Napomena 2.4.6. *Iz teorema 2.4.5 slijedi da je $m_t := \inf_{0 \leqslant s \leqslant t} B(s) \sim -|B(t)|$.*

Još jedna primjena jakog Markovljevog svojstva je kod proučavanja svojstava skupa nula Brownova gibanja, odnosno skupa vremena u kojima Brownovo gibanje ima vrijednost 0: $\{t \geqslant 0\colon B(t) = 0\}$. Pokazat ćemo da je taj skup savršen (zatvoren i bez izoliranih točaka). Ovo je možda iznenađujuće s obzirom na to da, gotovo sigurno, Brownovo gibanje ima izolirane nule s lijeva, primjerice prva nula nakon 1/2, ili zdesna, primjerice zadnja nula prije 1/2.

Napomena 2.4.7. *Već smo vidjeli da standardno Brownovo gibanje, gotovo sigurno, prolazi nulom u svakoj okolini oko ishodišta. Ovu činjenicu sada možemo dokazati i koristeći razdiobe slučajnih varijabli M_t i m_t. Definirajmo skup $T(0,\omega) := \{t \in [0,\infty) : B(t,\omega) = 0\}$. Drugim riječima, definirali smo slučajan skup vremena u kojim Brownovo gibanje postiže vrijednost 0. Želimo pokazati da vrijedi*

$$\mathbb{P}\left(0 \textit{ je gomilište skupa } T(0,\cdot)\right) = 1.$$

Da bismo to pokazali stavimo $A_n := \left\{\omega \in \Omega\colon T(0,\omega) \cap \left[0, \frac{1}{n}\right) = \{0\}\right\}$, $n \geqslant 1$ i $\Omega_0 := \{\omega \in \Omega\colon$ je gomilište skupa $T(0,\omega)\}$. Tada je $\Omega \setminus \Omega_0 \subset \bigcup_{n\geqslant 1} A_n$.
Budući da vrijedi $A_n \subset \{M_{1/n} = 0\} \cup \{m_{1/n} = 0\}$, slijedi

$$\mathbb{P}\left(A_n\right) \leqslant \mathbb{P}\left(M_{\frac{1}{n}} = 0\right) + \mathbb{P}\left(m_{\frac{1}{n}} = 0\right) = \mathbb{P}\left(|B_{\frac{1}{n}}| = 0\right) + \mathbb{P}\left(-|B_{\frac{1}{n}}| = 0\right) = 0, \quad \forall n \geqslant 1,$$

gdje posljednja jednakost slijedi iz Teorema 2.4.5 i Napomene 2.4.6. Kako je unija prebrojivo mnogo skupova vjerojatnosti nula ponovno skup vjerojatnosti nula, slijedi $\mathbb{P}\left(\Omega_0\right) = 1$, što smo i htjeli pokazati.

Prisjetimo se vremenski invertiranog Brownova gibanja X definiranog u Teoremu 2.2.2. Označimo s $T^X(0,\omega)$ njegov skup nula. Kako je X standardno Brownovo gibanje, prethodna napomena pokazuje da je 0 gomilište tog skupa, za gotovo sve $\omega \in \Omega$. To povlači da, za gotovo svaki $\omega \in \Omega$, postoji niz $(t_j)_{j\geqslant 1}$ takav da je $B(t_j,\omega) = 0$, $\lim_{j\to\infty} t_j = \infty$ i $\lim_{j\to\infty} B(t_j,\omega) = 0$. Dakle, možemo zaključiti da skup nula $T(0,\omega)$ gotovo sigurno neograničen.

Teorem 2.4.8. *Neka je $\{B(t)\colon t \geqslant 0\}$ jednodimenzionalno Brownovo gibanje i neka je*

$$Zer = \{t \geqslant 0\colon B(t) = 0\}$$

njegov skup nula. Tada je, gotovo sigurno, Zer zatvoren skup bez izoliranih točaka.

Dokaz. Kako je Brownovo gibanje gotovo sigurno neprekidno, Zer je gotovo sigurno zatvoren ($Zer = B^{-1}(\{0\})$).

Pokažimo sada da skup Zer gotovo sigurno nema izoliranih točaka. U stvari, svaki se $t \in Zer$ može aproksimirati slijeva nizom slučajnih vremena koja nisu vremena zaustavljanja te zdesna nizom slučajnih vremena koja jesu vremena zaustavljanja. Pokazat ćemo drugu tvrdnju.

Neka je $q \geqslant 0$ racionalan broj i označimo s

$$\tau_q := \inf\{t > q \colon B(t) = 0\},$$

uz konvenciju $\inf \emptyset := \infty$, vrijeme prvog prolaska razine 0 nakon vremena q. Vrijedi

$$\left\{\tau_q \leqslant t\right\} = \begin{cases} \emptyset, & \text{ako } t < q, \\ \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{s \in (q,t] \cap \mathbb{Q}} \left\{B(s) > \frac{-1}{n}\right\} \cap \left\{B(s) < \frac{1}{n}\right\}, & \text{ako } t \geqslant q. \end{cases}$$

Kako je svaki od skupova $\left\{B(s) > \frac{-1}{n}\right\}$ i $\left\{B(s) < \frac{1}{n}\right\} \in \mathscr{F}(s) \subset \mathscr{F}(t)$, $\forall s \in (q,t] \cap \mathbb{Q}$, te $\emptyset \in \mathscr{F}(t)$, slijedi $\left\{\tau_q \leqslant t\right\} \in \mathscr{F}(t)$, $\forall t \geqslant 0$. Dakle, τ_q je vrijeme zaustavljanja. Također, pokazali smo da je skup nula gotovo sigurno neograničen pa vrijedi $\mathbb{P}\left(\tau_q < \infty\right) = 1$.

Stavimo $A_q := \left\{\omega \in \Omega \colon \tau_q(\omega) \text{ je gomilište od } T(0,\omega)\right\}$. Vrijedi

$$\bigcap_{q \in [0,\infty) \cap \mathbb{Q}} A_q \subset \{T(0,\cdot) \text{ nema izoliranih točaka}\}. \tag{2.11}$$

Da bismo to pokazali, fiksirajmo ω i pretpostavimo da je $t_0 \in T(0,\omega)$ izolirana točka. Dakle, postoji neki racionalni broj $q \geqslant 0$ takav da je $(q,t_0) \cap T(0,\omega) = \emptyset$, što povlači $\tau_q(\omega) = t_0$ (t_0 je prva točka nakon q u kojoj proces prolazi nulom). Budući da t_0 nije gomilište od $T(0,\omega)$, zato što je izolirana točka, slijedi $\omega \notin A_q$. Dakle, (2.11) vrijedi.

Prema jakom Markovljevom svojstvu, $B(\tau_q + t) - B(\tau_q) = B(\tau_q + t)$ je ponovo Brownovo gibanje pa je prema Napomeni 2.4.7 točka 0 gotovo sigurno gomilište njegovog skupa nula, odnosno, τ_q je gomilište skupa $T(0,\omega)$. Dakle, $\mathbb{P}(A_q) = 1$, za sve racionalne $q \geqslant 0$. Kako je presjek u (2.11) prebrojiv, slijedi da je $\mathbb{P}\left(T(0,\cdot) \text{ nema izoliranih točaka}\right) = 1$, što smo i trebali pokazati. □

2.5 Markovljevi procesi izvedeni iz Brownova gibanja

U ovom dijelu ćemo definirati koncept Markovljevog procesa koji smo ranije spomenuli. Puno procesa izvedenih iz Brownova gibanja upravo su Markovljevi procesi. Neki od primjera su refleksija Brownova gibanja u nuli i proces $\{T_a \colon a \geqslant 0\}$, gdje je T_a prvo vrijeme u kojem Brownovo gibanje dostiže razinu a.

Definicija 2.5.1. *Funkciju $p : [0,\infty) \times \mathbb{R}^d \times \mathscr{B} \mapsto \mathbb{R}$, gdje je $\mathscr{B}$ Borelova σ-algebra u $\mathbb{R}^d$, zovemo **Markovljeva prijelazna jezgra** ako vrijedi:*

(i.) $p(\cdot,\cdot,A)$ je izmjeriva kao funkcija od (t,x), za svaki $A \in \mathscr{B}$,

(ii.) $p(t,x,\cdot)$ *je Borelova vjerojatnosna mjera na* $\mathbb{R}^d$*, za sve* $t \geqslant 0$ *i* $x \in \mathbb{R}^d$*,*

(iii.) *za sve* $A \in \mathscr{B}$*,* $x \in \mathbb{R}^d$ *i* $t, s > 0$*,*

$$p(t+s,x,A) = \int_{\mathbb{R}^d} p(t,y,A)p(s,x,dy).$$

Adaptirani proces $\{X(t)\colon t \geqslant 0\}$ *je* ***(vremenski homogen) Markovljev proces*** *s prijelaznom jezgrom* p *s obzirom na filtraciju* $(\mathscr{F}(t)\colon t \geqslant 0)$ *ako za sve* $t \geqslant s$ *i Borelove skupove* $A \in \mathscr{B}$ *vrijedi, gotovo sigurno,*

$$\mathbb{P}\left(X(t) \in A \mid \mathscr{F}(s)\right) = p(t-s, X(s), A).$$

Napomena 2.5.2. *Integriranje funkcije* f *u odnosu na mjeru* p*, u smislu svojstva (ii.), označavamo s*

$$\int f(y)p(t,x,dy).$$

Prijelazna jezgra $p(t,x,A)$ predstavlja vjerojatnost da proces poprimi vrijednost iz skupa A u vremenu t, ako je počeo u točki x. Markovljeva prijelazna jezgra p igra ulogu prijelazne matrice P Markovljevog lanca. Slijede dva primjera koja pokazuju jednostavne posljedice Markovljevog svojstva za Brownovo gibanje.

Primjer 2.5.3. *Linearno Brownovo gibanje je Markovljev proces. Promotrimo njegovu prijelaznu jezgru:* $p(t,x,\cdot)$ *je normalna razdioba s očekivanjem* x *i varijancom* t*.*

Slično, d*-dimenzionalno Brownovo gibanje je Markovljev proces i* $p(t,x,\cdot)$ *je Gaussovski vektor s očekivanjem* x *i kovarijacijskom matricom jednakom* t *puta identiteta. Uočimo da svojstvo (iii.) u definiciji Markovljeve prijelazne jezgre označava činjenicu da je suma dva nezavisna Gaussovska slučajna vektora ponovo Gaussovski slučajni vektor čija kovarijacijska matrica je jednaka sumi kovarijacijskih matrica.*

Prijelazna jezgra d-dimenzionalnog Brownova gibanja dana je vjerojatnosnom mjerom $p(t,x,\cdot)$ čija je gustoća dana s

$$\mathfrak{p}(t,x,y) = (2\pi t)^{-d/2} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{2t}\right).$$

Primjer 2.5.4. *Reflektirano jednodimenzionalno Brownovo gibanje* $\{X(t)\colon t \geqslant 0\}$ *definirano s* $X(t) = |B(t)|$ *je Markovljev proces. Njegova prijelazna jezgra* $p(t,x,\cdot)$ *je razdioba od* $|Y|$ *gdje je* Y *normalno distibuirana s očekivanjem* x *i varijancom* t *(*$|Y|$ *zovemo modulom normalne razdiobe s parametrima* x *i* t*). Pokažimo da je zadovoljeno svojstvo (iii.). Za* $a > 0$ *imamo:*

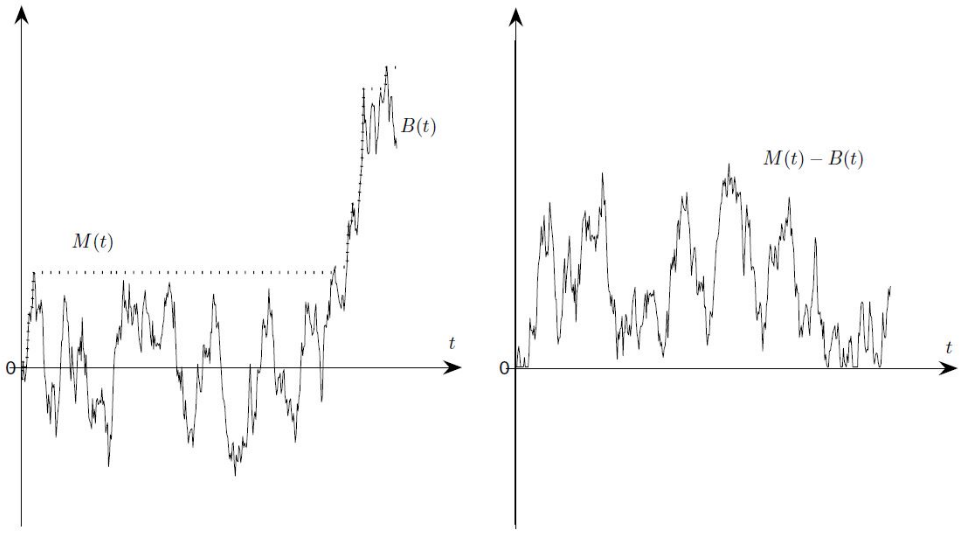
$$p(t,0,[a,\infty)) = \mathbb{P}\left(|B(t)| \geqslant a\right) = 2\mathbb{P}\left(B(t) \geqslant a\right) = \int_{[a,\infty)} \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{y^2}{2t}}\, dy.$$

Idući teorem pokazuje da je razlika dva procesa - procesa maksimuma Brownova gibanja i samoga Brownova gibanja - reflektirano Brownovo gibanje. To znači da razlika ta dva procesa ima jednake konačnodimenzionalne distribucije kao i reflektirano Brownovo gibanje te je gotovo sigurno neprekidno. Dokaz teorema pripada Paulu Lévyju.

Teorem 2.5.5 (Lévy). *Neka je* $\{M(t)\colon t \geqslant 0\}$ *proces maksimuma linearnog standardnog Brownova gibanja* $\{B(t)\colon t \geqslant 0\}$*, tj. proces definiran s*

$$M(t) = \max_{0 \leqslant s \leqslant t} B(s).$$

Tada je proces $\{Y(t)\colon t \geqslant 0\}$ *definiran s* $Y(t) = M(t) - B(t)$ *reflektirano Brownovo gibanje.*



Slika 2.3: Na lijevoj slici prikazan je proces $\{B(t)\colon t \geqslant 0\}$ s pripadnim procesom maksimuma $\{M(t)\colon t \geqslant 0\}$, koji je označen iscrtkanom linijom. Na desnoj strani je prikazan proces $\{M(t) - B(t)\colon t \geqslant 0\}$.

Dokaz. Pokazat ćemo da je proces $\{Y(t)\colon t \geqslant 0\}$ Markovljev proces i da njegova prijelazna jezgra $p(t, x, \cdot)$ ima modul normalnu razdiobu s parametrima x i t. Iz toga direktno slijedi da proces ima jednake konačnodimenzionalne distribucije kao i reflektirano Brownovo gibanje. Kako je proces $\{Y(t)\colon t \geqslant 0\}$ očito gotovo sigurno neprekidan, slijedi tvrdnja.

Fiksirajmo $s > 0$ i promotrimo proces $\left\{\hat{B}(t)\colon t \geqslant 0\right\}$ definiran s

$$\hat{B}(t) = B(t + s) - B(s), \text{ za } t \geqslant 0,$$

te proces $\left\{\hat{M}(t)\colon t \geqslant 0\right\}$ definiran s

$$\hat{M}(t) = \max_{0 \leqslant u \leqslant t} \hat{B}(u), \ \text{za } t \geqslant 0.$$

Budući da je $Y(s)$ $\mathscr{F}^+(s)$-izmjeriva, dovoljno je pokazati da, za svaki $t \geqslant 0$, uvjetna distribucija slučajne varijable $Y(t+s)$ s obzirom na $\mathscr{F}^+(s)$ jednaka distribuciji varijable $|Y(s) + \hat{B}(t)|$. Naime, to direktno povlači da je $\{Y(t)\colon t \geqslant 0\}$ Markovljev proces s jednakom prijelaznom jezgrom kao i reflektirano Brownovo gibanje. Fiksirajmo $s, t \geqslant 0$ i uočimo da vrijedi $M(s+t) = M(s) \vee \left(B(s) + \hat{M}(t)\right)$ pa vrijedi

$$\begin{aligned} Y(s+t) &= M(s+t) - B(s+t) \\ &= \left(M(s) \vee B(s) + \hat{M}(t)\right) - \left(\hat{B}(t) + B(s)\right) \\ &= (M(s) - B(s)) \vee (B(s) + \hat{M}(t) - B(s)) - \hat{B}(t) \\ &= Y(s) \vee \hat{M}(t) - \hat{B}(t), \end{aligned}$$

gdje pretposljednja jednakost slijedi iz činjenice da je $a \vee b - c = (a-c) \vee (b-c)$. Dakle, potrebno je još provjeriti da je, za svaki $y \geqslant 0$, $y \vee \hat{M}(t) - \hat{B}(t)$ jednako distribuirana kao i $|y + \hat{B}(t)|$. Za $a \geqslant 0$ stavimo:

$$P_1 = \mathbb{P}\left(y - \hat{B}(t) > a\right), \quad P_2 = \mathbb{P}\left(y - \hat{B}(t) \leqslant a, \ \hat{M}(t) - \hat{B}(t) > a\right).$$

Tada je

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(y \vee \hat{M}(t) - \hat{B}(t) > a\right) &= \mathbb{P}\left(y \vee \hat{M}(t) - \hat{B}(t) > a, \ y - \hat{B}(t) > a\right) \\ &\quad + \mathbb{P}\left(y \vee \hat{M}(t) - \hat{B}(t) > a, \ y - \hat{B}(t) \leqslant a\right) \\ &= \mathbb{P}\left(y - \hat{B}(t) > a\right) + \mathbb{P}\left(\hat{M}(t) - \hat{B}(t) > a, \ y - \hat{B}(t) \leqslant a\right) \\ &= P_1 + P_2. \end{aligned}$$

Kako $\left\{\hat{B}(t)\colon t \geqslant 0\right\}$ ima jednaku distribuciju kao $\left\{-\hat{B}(t)\colon t \geqslant 0\right\}$, vrijedi $P_1 = \mathbb{P}\left(y + \hat{B}(t) > a\right)$. Kako bismo proučili drugi izraz, definirajmo proces $\{W(u)\colon 0 \leqslant u \leqslant t\}$ s $W(u) = \hat{B}(t-u) - \hat{B}(t)$, za $0 \leqslant u \leqslant t$. Taj proces zovemo obrnuto Brownovo gibanje. Uočimo kako se doista radi o Brownovom gibanju za $0 \leqslant u \leqslant t$ jer je to neprekidan proces i njegove konačnodimenzionalne distribucije su Gaussovske s odgovarajućim kovarijancama. Naime, za $r < s$ je

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(W(r), W(s)) &= \mathrm{Cov}(\hat{B}(t-r) - \hat{B}(t), \hat{B}(t-s) - \hat{B}(t)) \\ &= \mathrm{Cov}(\hat{B}(t-r), \hat{B}(t-s)) - \mathrm{Cov}(\hat{B}(t-r), \hat{B}(t)) - \\ &\quad - \mathrm{Cov}(\hat{B}(t), \hat{B}(t-s)) + \mathrm{Var}(\hat{B}(t)) \\ &= \left[\text{Proces } \hat{B} \text{ je Brownovo gibanje}\right] \\ &= (t-s) - (t-r) - (t-s) + t = r = r \wedge s. \end{aligned}$$

Neka je $M_W(t) = \max_{0 \leqslant u \leqslant t} W(u)$. Tada je $M_W(t) = \hat{M}(t) - \hat{B}(t)$. Kako je $W(t) = -\hat{B}(t)$, vrijedi:

$$P_2 = \mathbb{P}\left(y + W(t) \leqslant a \text{ i } M_W(t) > a\right).$$

Neka je proces $\{W^*(u) \colon 0 \leqslant u \leqslant t\}$ dobiven refleksijom procesa $\{W(u) \colon 0 \leqslant u \leqslant t\}$ u odnosu na prvo vrijeme prolaska razinom a. Prema principu refleksije to je ponovo Brownovo gibanje i vrijedi $P_2 = \mathbb{P}\left(W^*(t) \geqslant a + y\right)$. Naime, imamo:

$$\begin{aligned} P_2 &= \mathbb{P}\left\{y + a \leqslant 2a - W(t),\ M_W(t) > a\right) \\ &= \mathbb{P}\left(y + a \leqslant W^*(t),\ T < t\right) \\ &= \mathbb{P}\left(W^*(t) \geqslant y + a\right). \end{aligned}$$

Također, to Brownovo gibanje ima istu distribuciju kao i proces $\left\{-\hat{B}(t) \colon t \geqslant 0\right\}$ pa slijedi: $P_2 = \mathbb{P}\left(y + \hat{B}(t) \leqslant -a\right)$. Kako Brownovo gibanje $\left\{\hat{B}(t) \colon t \geqslant 0\right\}$ ima neprekidnu distribuciju, zbrajanjem P_1 i P_2 dobivamo:

$$\mathbb{P}\left(y + \hat{B}(t) > a\right) + \mathbb{P}\left(y \vee \hat{M}(t) - \hat{B}(t) > a\right) = \mathbb{P}\left(|y + \hat{B}(t)| > a\right).$$

Ovo dokazuje glavni korak dokaza, a time i teorem. □

Na kraju ovog poglavlja dajemo iskaz jednog tehničkog rezultata, tzv. Doobove maksimalne nejednakosti, koja će nam biti korisna u nastavku.

Propozicija 2.5.6 (**Doobova maksimalna nejednakost**). *Neka je $\{X(t) \colon t \geqslant 0\}$ neprekidan martingal i $p > 1$. Tada, za svaki $t \geqslant 0$, vrijedi*

$$\mathbb{E}\left[\left(\sup_{0 \leqslant s \leqslant t} |X(s)|\right)^p\right] \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}\left[|X(t)|^p\right].$$

Dokaz. Dokaz propozicije se nalazi u [5]. □

Poglavlje 3

Hausdorffova dimenzija

3.1 Minkowskijeva dimenzija

Kako možemo izmjeriti dimenziju geometrijskog objekta i koja svojstva bi ona trebala imati? Korisno je zahtijevati da definicija dimenzije bude intrinzična, odnosno neovisna o položaju objekta u prostoru kao što je $\mathbb{R}^d$. U ovom dijelu ćemo definirati Minkowskijevu dimenziju koja ima ovo svojstvo i može se primijeniti na proizvoljnom metričkom prostoru. Definicija Minkowskijeve dimenzije bazira se na pojmu pokrivača metričkog prostora E.

Neka je E ograničen metrički prostor s metrikom ρ. Pri tome metrički prostor E zovemo ograničenim ako je njegov dijametar $|E| = \sup\{\rho(x,y)\colon x,y \in E\}$ konačan. Jedan primjer takvog prostora je ograničen podskup od $\mathbb{R}^d$. **Pokrivač** od E je konačna ili prebrojiva familija skupova

$$E_1, E_2, \ldots \text{ takvih da je } E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i.$$

Definirajmo još, za $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} M(E,\varepsilon) = \min\Big\{k \geqslant 1\colon & \text{ postoji konačan pokrivač} \\ & E_1, \ldots, E_k \text{ od } E \text{ takav da je } |E_i| \leqslant \varepsilon, \text{ za } i = 1, \ldots, k\Big\}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

gdje je $|A|$ dijametar skupa $A \subset E$. Intuitivno, ako E ima dimenziju s, onda bi broj $M(E,\varepsilon)$ trebao biti reda veličine ε^{-s}. Na primjer, u slučaju intervala duljine 1, minimalan pokrivač sastoji se od $1/\varepsilon$ mnogo intervala dijametra (duljine) ε. Slično, da bismo pokrili jedinični kvadrat u $\mathbb{R}^2$, potrebno je najmanje $\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon} = \frac{2}{\varepsilon^2}$ manjih kvadrata čiji je dijametar (dijagonala) jednak ε. Ovaj intuitivni rezultat motivira definiciju Minkowskijeve dimenzije.

Definicija 3.1.1. *Za ograničen metrički prostor E definiramo **donju Minkowskijevu di-***

menziju *kao*

$$\underline{\dim}_M E := \liminf_{\varepsilon\to 0} \frac{\log M(E,\varepsilon)}{\log 1/\varepsilon},$$

a ***gornju Minkowskijevu dimenziju*** *kao*

$$\overline{\dim}_M E := \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{\log M(E,\varepsilon)}{\log 1/\varepsilon}.$$

Ako vrijedi $\underline{\dim}_M E = \overline{\dim}_M E$*, onda definiramo*

$$\dim_M E := \underline{\dim}_M E = \overline{\dim}_M E,$$

i zovemo ***Minkowskijevom dimenzijom*** *metričkog prostora* E.

Napomena 3.1.2. *Uočimo da uvijek vrijedi* $\underline{\dim}_M E \leqslant \overline{\dim}_M E$.

Primjer 3.1.3. *Skup* $E = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$ *ima dimenziju* $\frac{1}{2}$.

Pokažimo ovu tvrdnju. Uzmimo proizvoljan $\varepsilon \in (0,1)$ *i* n *takav da je* $1/(n+1)^2 < \varepsilon \leqslant 1/n^2$*. Da bismo pokrili skup* $(1/k \colon k \geqslant n+1\}$*, dovoljno je uzeti* $\frac{1}{(n+1)\varepsilon} \leqslant (n+1)$ *intervala duljine* ε*. Za pokriti ostalih* n *elemenata skupa* E *trebamo još* n *takvih intervala. Dakle, slijedi:*

$$M(E,\varepsilon) \leqslant 2n+1 = \frac{2n+1}{n} n \leqslant \frac{2n+1}{n}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(2+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant 3\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Logaritmiranjem i dijeljenjem s $\log\frac{1}{\varepsilon}$ *dobivamo:*

$$\frac{\log M(E,\varepsilon)}{\log\frac{1}{\varepsilon}} \leqslant \frac{\log 3}{\log\frac{1}{\varepsilon}} + \frac{1}{2} \to 0 + \frac{1}{2}, \text{ za } \varepsilon \to 0.$$

Slijedi da je $\overline{\dim}_M E \leqslant \frac{1}{2}$.

S druge strane, budući da je razlika između dva susjedna elemenat skupa E

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)} \geqslant \frac{1}{(k+1)^2},$$

slijedi da je prvih $n-1$ *elemenata skupa* E *udaljeno za više od* ε*. Dakle, pokrivač skupa* E *ima najmanje* $n-1$ *elemenata pa vrijedi:*

$$M(E,\varepsilon) \geqslant n-1 = \frac{n-1}{n+1}(n+1) \geqslant \frac{n-1}{n+1}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(1-\frac{2}{n+1}\right)\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}} \geqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ponovno logaritmiranjem i dijeljenjem s $\log \frac{1}{\varepsilon}$ *slijedi:*

$$\frac{\log M(E,\varepsilon)}{\log \frac{1}{\varepsilon}} \geqslant \frac{\log \frac{1}{2}}{\log \frac{1}{\varepsilon}} + \frac{1}{2} \to 0 + \frac{1}{2}, \ za\ \varepsilon \to 0.$$

Ovo povlači da je $\underline{\dim}_M E \geqslant \frac{1}{2}$. *Dakle,* $\dim_M E = \frac{1}{2}$.

Prethodni primjer ukazuje na jedan nedostatak Minkowskijeve dimenzije koji navodi na proširivanje konteksta u kojem promatramo skupove i njegove pokrivače te dovodi do definicije Hausdorffove dimenzije. Naime, uočimo da skupovi koji se sastoje od jedne točke, $S = \{x\}$, imaju Minkowskijevu dimenziju 0 (jer je $M(S,\varepsilon) = 1$, za svaki $\varepsilon > 0$), dok skup $E = \left\{\frac{1}{n} \colon n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$, kao što smo vidjeli u prethodnom primjeru, ima pozitivnu dimenziju. Stoga Minkowskijeva dimenzija nema *svojstvo prebrojive stabilnosti*, odnosno ne vrijedi

$$\dim\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sup\left\{\dim E_k \colon k \geqslant 1\right\}.$$

Ovaj problem možemo riješiti na dva načina.

(i.) Definiciju dimenzije možemo proširiti uzimajući u obzir razlike u veličini skupova koji čine pokrivač. Na ovaj način ćemo uhvatiti sitnije detalje o skupu, odnosno prikupiti više informacija. Ovo će nas dovesti do definicije Hausdorffove dimenzije.

(ii.) Svojstvo prebrojive stabilnosti možemo dobiti tako da svaki skup podijelimo na prebrojivo mnogo ograničenih dijelova i uzmemo njihovu maksimalnu dimenziju. Na kraju izračunamo infimum svih tako dobivenih brojeva. Ovaj način vodi na definiciju tzv. *packing dimension*.

U nastavku slijedimo prvi put, odnosno idemo na definiciju Hausdorffove dimenzije.

3.2 Hausdorffova dimenzija

Hausdorffovu dimenziju i Hausdorffovu mjeru uveo je Felix Hausdorff 1919. godine. Kao i Minkowskijeva dimenzija, i Hausdorffova dimenzija temelji se na pojmu pokrivača metričkog prostora E. Za računanje Minkowskijeve dimenzije je bilo potrebno jednostavno izračunati broj skupova pokrivača. Sada ćemo ovaj postupak generalizirati tako da ćemo dopustiti korištenje beskonačnih pokrivača te u obzir uzeti veličinu skupova u pokrivaču. Veličinu skupova i dalje ćemo mjeriti njihovim dijametrom.

Primjer 3.2.1. *Promotrimo ponovno skup* $E = \left\{\frac{1}{n} \colon n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$ *iz Primjera 3.1.3 i prisjetimo se pokrivača kojeg smo definirali. Uočimo da skup E možemo na efektivniji način* *pokriti beskonačnim pokrivačem tako da smanjujemo veličinu skupova u pokrivaču kako se pomičemo s desna na lijevo. Na primjer, točku* $\{1\}$ *pokrijemo intervalom* $\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right)$*, koji ima dijametar 1/2, točku* $\{1/2\}$ *intervalom* $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{12}, \frac{1}{2} + \frac{1}{12}\right)$*, koji ima dijamtar 1/6, točku* $\{1/n\}$ *intervalom* $\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n(n+1)}, \frac{1}{n} + \frac{1}{2n(n+1)}\right)$*, koji ima dijametar* $1/n(n+1)$*, za* $n \in \mathbb{N}$*. Dakle, svaku točku pokrijemo intervalom čiji je dijametar jednak udaljenosti te točke od prve točke slijeva. Kako je* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} < \infty$*, ovaj pokrivač zauzima konačnu "duljinu" i u tom smislu nije lošiji od prethodnog. Međutim, vidimo da nije svejedno koristimo li metodu za procjenu pokrivača koja uzima u obzir to da svo koristili male skupove za pokrivanje ili metodu koja se temelji na jednostvnom prebrojavanju skupova koji čine pokrivač.*

Jedna korisna metoda za procjenu pokrivača je računanje α-vrijednosti pokrivača. Za svaki $\alpha \geqslant 0$ i pokrivač $E_1, E_2, \dots$ kažemo da je α-**vrijednost** pokrivača broj

$$\sum_{i=1}^{\infty} |E_i|^{\alpha}.$$

Pojam α-vrijednosti pokrivača omogućuje nam da definiramo koncept dimenzije koji će moći uhvatiti finija svojstva skupa.

Definicija 3.2.2. *Za svaki* $\alpha \geqslant 0$*, vrijednost*

$$\mathscr{H}_{\infty}^{\alpha}(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |E_i|^{\alpha} \colon E_1, E_2, \dots \text{ je pokrivač od } E \right\}$$

zovemo α***-Hausdorff sadržaj*** *metričkog prostora E.*

Hausdorffova dimenzija *skupa E je vrijednost:*

$$\dim E = \inf \{\alpha \geqslant 0 \colon \mathscr{H}_{\infty}^{\alpha}(E) = 0\} = \sup \{\alpha \geqslant 0 \colon \mathscr{H}_{\infty}^{\alpha}(E) > 0\}.$$

Napomena 3.2.3. *Drugim riječima,* α*-Hausdorff sadržaj je* α*-vrijednost najefikasnijeg pokrivača prostora E.*

Također, uočimo da je definicija Hausdorffove dimenzije dobra jer vrijedi

$$\mathscr{H}_{\infty}^{\alpha}(E) = 0 \;\Rightarrow\; \mathscr{H}_{\infty}^{\beta}(E) = 0, \quad \text{za } 0 \leqslant \alpha \leqslant \beta. \tag{3.2}$$

Naime, fiksirajmo $\alpha > 0$ *takav da je* $\mathscr{H}_{\infty}^{\alpha}(E) = 0$ *(*α *je očito* > 0*). Tada za svaki* $\beta \geqslant 0$*, takav da je* $\mathscr{H}_{\infty}^{\beta}(E) > 0$*, nužno vrijedi* $\beta < \alpha$*, prema* (3.2)*. Uzimajući supremum po svim takvim* β *slijedi da je* $\sup\left\{\beta \geqslant 0 \colon \mathscr{H}_{\infty}^{\beta}(E) > 0\right\} \leqslant \alpha$*. Kako je* α *sa svojstvom da je* $\mathscr{H}_{\infty}^{\alpha}(E) = 0$ *bio proizvoljan, uzimajući infimum po svim takvim* α *slijedi*

$$\sup \{\alpha \geqslant 0 \colon \mathscr{H}_{\infty}^{\alpha}(E) > 0\} \leqslant \inf \{\alpha \geqslant 0 \colon \mathscr{H}_{\infty}^{\alpha}(E) = 0\}.$$

Uočimo da stroga nejednakost ne može vrijediti jer je, za $\alpha \geqslant 0$, $\mathscr{H}^\alpha_\infty \geqslant 0$. *Kada bi vrijedila stroga nejednakost, postojao bi* $\beta \geqslant 0$ *takav da* $\mathscr{H}^\beta_\infty \notin [0,\infty]$, *što nije moguće. Dakle, definicija Hausdorffove dimenzije je dobra.*

Pokažimo relaciju (3.2). *Uzmimo* $\alpha \geqslant 0$ *takav da je* $\mathscr{H}^\alpha_\infty(E) = 0$ *i neka je* $\beta \geqslant \alpha$. *Kako je* $\mathscr{H}^\alpha_\infty(E) = 0$, *iz definicije infimuma slijedi da za svaki* $\varepsilon > 0$ *postoji pokrivač* $E_1, E_2, \dots$ *takav da je*

$$\sum_{i=1}^{\infty} |E_i|^\alpha < \varepsilon. \tag{3.3}$$

Promatrajmo male ε, *takve da je* $\varepsilon < 1$. *Iz* (3.3) *slijedi* $|E_i| < 1$, *za svaki i. Kako je* $\beta \geqslant \alpha$, *slijedi da je* $|E_i|^\beta \leqslant |E_i|^\alpha$, *odnosno* $\sum_{i=1}^{\infty} |E_i|^\beta \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} |E_i|^\alpha < \varepsilon$. *Uzmimanjem infimuma u prethodnoj nejednakosti dobivamo da vrijedi* $\mathscr{H}^\beta_\infty \leqslant \mathscr{H}^\alpha_\infty = 0$, *odnosno* $\mathscr{H}^\beta_\infty = 0$, *što je i trebalo pokazati.*

Napomena 3.2.4. *Hausdorffova dimenzija može biti beskonačna.*
Ipak, Hausdorffova dimezija poskupova od $\mathbb{R}^d$ *je manja ili jednaka od d. Pokažimo ovu tvrdnju za podskupove* $A \subset \mathbb{R}^d$ *konačne Lebesgueove vanjske mjere. Dakle, tvrdimo da za svaki* $\alpha > d$ *vrijedi*

$$\mathscr{H}^\alpha_\infty(A) = 0.$$

Sjetimo se Lebesgueove vanjske mjere definirane s

$$\mathcal{L}^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{L}(B_n) \colon A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n,\ B_n \textit{ je poluotvoreni kvadar} \right\}.$$

Pri tome $\mathcal{L}$ *označava d-dimenzionalnu Lebesgueovu mjeru, a poluotvoreni kvadar B je definiran s* $B = \prod_{i=1}^{d} (a_i, b_i]$. *Neka je* $\varepsilon > 0$. *Iz definicije infimuma slijedi da postoji niz* $\{B_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ *poluotvorenih kvadara takvih da vrijedi*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{L}(B_n) \leqslant \mathcal{L}^*(A) + \varepsilon.$$

Prema definiciji Lebesgueove mjere je $\mathcal{L}(B_n) = c_d(|B_n|)^d$, *za neku konstantu* c_d, *pa slijedi*

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} |B_n|^\alpha &\leqslant (\sup_n |B_n|)^{\alpha-d} \sum_{n=1}^{\infty} |B_n|^d \\
&\leqslant c_d^{-1} (\sup_n |B_n|)^{\alpha-d} \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{L}(B_n) \\
&\leqslant c_d^{-1} (\sup_n |B_n|)^{\alpha-d} (\mathcal{L}^*(A) + \varepsilon).
\end{aligned}$$

Uzmimo proizvoljan $\delta > 0$. *Ako je* $\mathcal{L}^*(A) < \infty$, *onda možemo odabrati takav pokrivač* $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ *poluotvorenim kvadrima da je* $|B_n| < \delta$, *za svaki* $n \in \mathbb{N}$. *Naime, red* $\sum_{n=1}^{\infty} |B_n|^d$ *je konvergentan pa* $|B_n|^d \to 0$, *kada* $n \to \infty$. *Slijedi da postoji* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takav da je* $|B_n| < \delta$, *za svaki* $n \geqslant n_0$. *Kvadre* $B_1, \ldots, B_{n_0}$ *podijelimo na manje kvadre dijametra manjeg od* δ. *Dakle, imamo pokrivač* $\left\{\tilde{B}_n : n \in \mathbb{N}\right\}$ *koji se sastoji od kvadara dijametra manjeg od* δ. *Zato je*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\tilde{B}_n|^{\alpha} \leqslant c_d^{-1} (\sup_n |\tilde{B}_n|)^{\alpha-d} (\mathcal{L}^*(A) + \varepsilon) \leqslant c_d^{-1} (\mathcal{L}^*(A) + \varepsilon) \delta^{\alpha-d} = \tilde{c}\delta^{\alpha-d}.$$

Uzimajući infimum po svim pokrivačima dobivamo

$$\mathscr{H}_{\infty}^{\alpha}(A) \leqslant \tilde{c}\delta^{\alpha-d} \to 0, \text{ kada } \delta \to 0.$$

Dakle, $\mathscr{H}_{\infty}^{\alpha}(A) = 0$, *za svaki* $\alpha > d$ *pa je* $\dim A = \inf\{\alpha \geqslant 0 : \mathscr{H}_{\infty}^{\alpha}(A) = 0\} \leqslant d$, *što smo i trebali pokazati.*

Primjer 3.2.5. *Za svaki ograničen metrički prostor E, Hausdorffova dimenzija je ograničena odozgo s donjom Minkowskijevom dimenzijom.*

Primjer 3.1.3 je pokazao jedno ograničenje Minkowskijeve dimenzije: ona nije imala svojstvo prebrojive stabilnosti. Pokazuje se da Hausdorffova dimenzija ima to svojstvo te je ona i u tom smislu pogodnija od Minkowskijeve dimenzije.

Definicija Hausdorffove dimenzije temelji se na pojmu α-Hausdorffovog sadržaja. Iako je izuzetno važan, koncept α-Hausdorffovog sadržaja je nepogodan jer ne razlikuje veličine skupova različitih dimenzija. Na primjer, promotrimo tri skupa u $\mathbb{R}^2$: kuglu i sferu dijametra 1 te interval duljine 1. Sva tri skupa imaju 1-Hausdorffov sadržaj jednak 1. Naime, i kugla i sfera mogu se pokriti kuglom dijametra 1 i ne postoji efektivniji pokrivač pa je njihov 1-Hausdorffov sadržaj jednak 1. Slično, interval duljine 1 također ne dopušta efektivnije pokrivanje i njegov 1-Hausdorffov sadržaj također jednak 1. Ovaj problem riješit ćemo uvođenjem novog, poboljšanog koncepta, Hausdorffove mjere. Glavna ideja bit će promatranje samo onih pokrivača koji se sastoje od "malih"skupova.

Definicija 3.2.6. *Neka je X metrički prostor i* $E \subset X$. *Za svaki* $\alpha \geqslant 0$ *i* $\delta > 0$ *definiramo*

$$\mathscr{H}_{\delta}^{\alpha}(E) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} |E_i|^{\alpha} : E_1, E_2, \ldots \text{ je pokrivač od } E \text{ i } |E_i| \leqslant \delta\right\},$$

odnosno promatramo samo pokrivače od E koji se sastoje od skupova dijametra manjeg ili jednakog od δ. *Tada*

$$\mathscr{H}^{\alpha}(E) = \sup_{\delta > 0} \mathscr{H}_{\delta}^{\alpha}(E) = \lim_{\delta \to 0} \mathscr{H}_{\delta}^{\alpha}(E)$$

zovemo ***α-Hausdorffovom mjerom*** *skupa E.*

Napomena 3.2.7. *Definija α-Hausdorffove mjere je dobra. Da bismo to vidjeli, uzmimo $0 < \delta_1 < \delta_2$. Tada očito vrijedi*

$$\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}|E_i|^{\alpha} \colon E_1, E_2, \dots \ \text{t.d.}\ |E_i| \leqslant \delta_2\right\} \leqslant \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}|E_i|^{\alpha} \colon E_1, E_2, \dots \ \text{t.d.}\ |E_i| \leqslant \delta_1\right\},$$

jer infimum u slučaju δ_2 uzmimamo po nadskupu skupa kojeg uzimamo u slučaju δ_1. Dakle, vrijedi $\mathscr{H}^{\alpha}_{\delta_2}(E) \leqslant \mathscr{H}^{\alpha}_{\delta_1}(E)$, odnosno niz $(\mathscr{H}^{\alpha}_{\delta} \colon \delta > 0)$ je monotono padajuć.

Napomena 3.2.8. *α-Hausdorffova mjera ima dva svojstva, prebrojivu subaditivnost i monotonost, koja je čine vanjskom mjerom. Dakle, vrijedi:*

(i.) *(prebrojiva subaditivnost)*

$$\mathscr{H}^{\alpha}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty}\mathscr{H}^{\alpha}(E_i), \quad \text{za svaki niz } E_1, E_2, \dots \subset X,$$

(ii.) *(monotonost)*

$$\mathscr{H}^{\alpha}(E) \leqslant \mathscr{H}^{\alpha}(D), \quad \text{za sve } E \subset D \subset X,$$

(iii.) $\mathscr{H}^{\alpha}(\emptyset) = 0$.

Iduća propzicija pokazuje da Hausdorffovu dimenziju možemo izraziti u terminu Hausdorffove mjere.

Propozicija 3.2.9. *Za svaki metrički prostor E vrijedi:*

$$\mathscr{H}^{\alpha}(E) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathscr{H}^{\alpha}_{\infty}(E) = 0.$$

Nadalje, vrijedi:

$$\begin{aligned}\dim E &= \inf\{\alpha \colon \mathscr{H}^{\alpha}(E) = 0\} = \inf\{\alpha \colon \mathscr{H}^{\alpha}(E) < \infty\} \\ &= \sup\{\alpha \colon \mathscr{H}^{\alpha}(E) > 0\} = \sup\{\alpha \colon \mathscr{H}^{\alpha}(E) = \infty\}.\end{aligned}$$

Dokaz. $\boxed{\Rightarrow}$ Pretpostavimo da je $\mathscr{H}^{\alpha}_{\infty}(E) = c > 0$. Slijedi da je $\mathscr{H}^{\alpha}_{\delta}(E) \geqslant c$, za sve $\delta > 0$ (jer kod računanja $\mathscr{H}^{\alpha}_{\infty}(E)$ promatramo sve porkivače skupa E, dok kod računanja $\mathscr{H}^{\alpha}_{\delta}(E)$ promatramo samo jedan dio tih pokrivača). Uzimanjem supremuma dobivamo da vrijedi $\mathscr{H}^{\alpha}(E) \geqslant c > 0$, što dokazuje prvi smjer.

$\boxed{\Leftarrow}$ Obrnuto, pretpostavimo da je $\mathscr{H}^{\alpha}_{\infty}(E) = 0$. Za svaki $\delta > 0$, postoji pokrivač $E_1, E_2, \dots$ takav da je $\sum_{i=1}^{\infty}|E_i|^{\alpha} < \delta$. Dakle, $|E_i|^{\alpha} < \delta$, za svaki i pa ovi skupovi imaju dijametar manji od $\delta^{1/\alpha}$. Stoga je $\mathscr{H}^{\alpha}_{\delta^{1/\alpha}}(E) < \delta$ pa puštanjem $\delta \to 0$ dobivamo $\mathscr{H}^{\alpha}(E) = 0$, čime smo dokazali traženu ekvivalenciju.

Ova ekvivalencija sada povlači da je

$$\begin{aligned}\dim E &= \inf\{\alpha \geqslant 0\colon \mathscr{H}^\alpha_\infty(E) = 0\} = \inf\{\alpha \geqslant 0\colon \mathscr{H}^\alpha(E) = 0\}\\ &= \sup\{\alpha \geqslant 0\colon \mathscr{H}^\alpha_\infty(E) > 0\} = \sup\{\alpha \geqslant 0\colon \mathscr{H}^\alpha(E) > 0\}.\end{aligned}$$

Da bismo pokazali ostale jednakosti, dovoljno je pokazati da $\mathscr{H}^\alpha(E) < \infty$ povlači $\mathscr{H}^\beta(E) = 0$, za sve $\beta > \alpha$. Pretpostavimo da je $\mathscr{H}^\alpha(E) = C < \infty$. Uzmimo proizvoljan $\beta > \alpha$ i $\delta > 0$. Tada je $\mathscr{H}^\alpha_\delta(E) \leqslant C$. Uočimo kako za proizvoljan pokrivač $E_1, E_2, \ldots$ takav da je $|E_i| \leqslant \delta$ vrijedi

$$\sum_{i=1}^\infty |E_i|^\beta = \sum_{i=1}^\infty |E_i|^\alpha \cdot |E_i|^{\beta-\alpha} \leqslant \delta^{\beta-\alpha} \sum_{i=1}^\infty |E_i|^\alpha.$$

Uzimanjem infimuma u prethodnoj nejednakosti dobivamo da je $\mathscr{H}^\beta_\delta(E) \leqslant \delta^{\beta-\alpha}\mathscr{H}^\alpha_\delta(E)$. Iz toga slijedi da je $\mathscr{H}^\beta_\delta(E) \leqslant \delta^{\beta-\alpha}C$. Puštanjem $\delta \to 0$ dobivamo $\mathscr{H}^\beta(E) = 0$.

Očito vrijedi

$$\inf\{\alpha\colon \mathscr{H}^\alpha(E) < \infty\} \leqslant \inf\{\alpha\colon \mathscr{H}^\alpha(E) = 0\},$$

jer $\mathscr{H}^\alpha(E) = 0$ povlači $\mathscr{H}^\alpha(E) < \infty$ pa s desne strane imamo imfimum po podskupu skupa kojeg uzmimamo s lijeve strane. Obrnuto, uzmimo proizvoljan α takav da je $\mathscr{H}^\alpha(E) < \infty$. Tada, prema gore pokazanoj tvrdnji, za svaki $\beta > \alpha$ vrijedi $\mathscr{H}^\beta(E) = 0$. Uzmimajući infimum po svim takvim β slijedi

$$\inf\{\beta\colon \mathscr{H}^\alpha(E) = 0\} \leqslant \alpha.$$

Ponovno uzimajući infimum, po svim α takvima da je $\mathscr{H}^\alpha(E) < \infty$, slijedi

$$\inf\{\alpha\colon \mathscr{H}^\alpha(E) = 0\} \leqslant \inf\{\alpha\colon \mathscr{H}^\alpha(E) < \infty\}.$$

Dakle, vrijedi jednakost. Tvrdnja sa supremumima se dokazuje analogno. □

Napomena 3.2.10. *Budući da Lipschitzova funkcija povećava dijametar skupa za najviše konstantu, slika skupa $A \subset E$ pod Lipschitzovom funkcijom može imati Hausdorffovu dimenziju manju ili jednako dimenziji od A. Ova tvrdnja bit će nam jako korisna kod promatranja projekcija. Da bismo pokazali ovu tvrdnju, uzmimo proizvoljan pokrivač $E_1, E_2, \ldots$ od A takav da je $|E_i| \leqslant \delta$. Tada je $f(E_1), f(E_2), \ldots$ pokrivač od $f(A)$ takav da je $|f(E_i)| \leqslant L|E_i| \leqslant L\delta$, gdje je L Lipschitzova konstanta. Slijedi da je*

$$\sum_{i=1}^\infty |f(E_i)|^\alpha \leqslant L^\alpha \sum_{i=1}^\infty |E_i|^\alpha,$$

odnosno, $\mathscr{H}^\alpha_{L\delta}(f(A)) \leqslant L^\alpha \mathscr{H}^\alpha_\delta(A)$. Puštanjem $\delta \to 0$ dobivamo da je

$$\mathscr{H}^\alpha(f(A)) \leqslant L^\alpha \mathscr{H}^\alpha(A).$$

Sada tvrdnja slijedi iz Propozicije 3.2.9 jer $\mathscr{H}^\alpha(A) = 0$ povlači $\mathscr{H}^\alpha(f(A)) = 0$ pa je $\inf\{\alpha \geqslant 0\colon \mathscr{H}^\alpha(A) = 0\} \geqslant \inf\{\alpha \geqslant 0\colon \mathscr{H}^\alpha(f(A)) = 0\}$, odnosno $\dim f(A) \leqslant \dim A$.

Prirodna generalizacija prethodne napomene promatra utjecaj Hölder neprekidnih preslikavanja na Hausdorffovu dimenziju. U prethodnom poglavlju promatrali smo svojstvo lokalne α-Hölder neprekidnosti Brownova gibanja u točki x. Sada ćemo proučavati funkcije koje su (globalno) α-Hölder neprekidne. Idući primjer pokazuje da Hölder neprekidna preslikavanja djelomično kontroliraju Hausdorffovu mjeru slike.

Primjer 3.2.11. *Neka je $f : (E_1, \rho_1) \mapsto (E_2, \rho_2)$ surjektivna i α-Hölder neprekidna funkcija koja preslikava jedan metrički prostor, (E_1, ρ_1), u drugi metrički prostor, (E_2, ρ_2). Tada, za svaki $\beta \geqslant 0$, vrijedi:*

$$\mathscr{H}^{\beta}(E_2) \leqslant C^{\beta} \mathscr{H}^{\alpha\beta}(E_1), \tag{3.4}$$

gdje je C Hölderova konstanta. Iz (3.4) *dalje slijedi*

$$\dim(E_2) \leqslant \frac{1}{\alpha} \dim(E_1).$$

Da bismo to pokazali, fiksirajmo $\beta \geqslant 0$ takav da je $\mathscr{H}^{\alpha\beta}(E_1) = 0$. (3.4) *povlači da je $\mathscr{H}^{\beta}(E_2) = 0$. Dakle, $\inf\left\{\delta \geqslant 0 \colon \mathscr{H}^{\delta}(E_2) = 0\right\} \leqslant \beta = \frac{1}{\alpha}\alpha\beta$. Uzimajući infimum po svim $\alpha\beta \geqslant 0$ takvima da je $\mathscr{H}^{\alpha\beta}(E_1) = 0$, dobivamo*

$$\inf\left\{\delta \geqslant 0 \colon \mathscr{H}^{\delta}(E_2) = 0\right\} \leqslant \frac{1}{\alpha} \inf\left\{\alpha\beta \geqslant 0 \colon \mathscr{H}^{\alpha\beta}(E_1) = 0\right\}.$$

Propozicija 3.2.9 povlači da je

$$\dim(E_2) \leqslant \frac{1}{\alpha} \dim(E_1).$$

Sada ćemo odrediti gornju ogradu za dimenziju grafa i slike Hölder neprekidnih funkcija.

Definicija 3.2.12. *Za funkciju $f : A \mapsto \mathbb{R}^d$, gdje je $A \subset [0, \infty)$, definiramo njezin **graf** sa*

$$\Gamma_f(A) = \{(t, f(t)) : t \in A\} \subset \mathbb{R}^{d+1},$$

*i njezinu **sliku** ili **put** sa*

$$\mathrm{Im}_f(A) = f(A) = \{f(t) \colon t \in A\} \subset \mathbb{R}^d.$$

Propozicija 3.2.13. *Neka je $f : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}^d$ α- Hölder neprekidna funkcija. Tada je:*

(a) $\dim\left(\Gamma_f [0, 1]\right) \leqslant 1 + (1 - \alpha)\left(d \wedge \frac{1}{\alpha}\right)$,

(b) *i, za sve $A \subset [0, 1]$,* $\dim\left(\mathrm{Im}_f(A)\right) \leqslant \frac{\dim A}{\alpha}$.

Dokaz. (a) Uzmimo proizvoljan $\varepsilon > 0$. Kako je funkcija f α- Hölder neprekidna, postoji konstanta C takva da, za $s, t \in [0,1]$ za koje je $|t-s| \leqslant \varepsilon$, vrijedi $|f(t) - f(s)| \leqslant C\varepsilon^{\alpha}$. Uzmimo pokrivač za $[0,1]$ koji se sastoji od najviše $\lceil 1/\varepsilon \rceil$ intervala duljine ε. Tada je slika svakog takvog intervala sadržana u kugli dijametra $C\varepsilon^{\alpha}$. Sada imamo dvije mogućnosti za pokrivanje ovih kugli.

1° Prva mogućnost je da svaku takvu kuglu pokrijemo s kuglama dijametra ε, kojih ima najviše konstantni višekratnik od $\varepsilon^{d\alpha-d}$. Naime, obujam velike kugle dijametra $C\varepsilon^{\alpha}$ je konstantni višekratnik od $\varepsilon^{d\alpha}$, a obujam svake male kugle dijametra ε je konstantni višekratnik od ε^{d}. Zato ukupno trebamo konstantni višekratnik od $\varepsilon^{d\alpha-d}$ kugala dijametra ε.

2° Druga mogućnost je da uočimo da f svaki podinterval duljine $(\varepsilon/C)^{1/\alpha}$ iz domene preslikava u kuglu radijusa $C \cdot \left((\varepsilon/C)^{1/\alpha}\right)^{\alpha} = \varepsilon$ koje također čine pokrivač za veliku kuglu radijusa $C\varepsilon^{\alpha}$. Taj pokrivač se sastoji od konstantnog višekratnika od $\varepsilon^{1-1/\alpha}$ kugala dijametra ε. Naime, tih kugala ima onoliko koliko interval duljine ε ima podintervala duljine $(\varepsilon/C)^{1/\alpha}$, dakle konstantni višekratnik od $\varepsilon^{1-1/\alpha}$.

Oba slučaja daju nam pokrivač za graf funkcije f koji se sastoji od produkata intervala i odgovarajućih kugala dijametara ε. Prva konstrukcija zahtijeva konstantni višekratnik od $\varepsilon^{d\alpha-d-1}$ produktnih skupova (svaki interval duljine ε, a njih ima najviše $\lceil 1/\varepsilon \rceil$, dolazi u produktu sa svakom od kugala dijametra ε kojih ima $\varepsilon^{d\alpha-d}$, pa ukupno imamo $\varepsilon^{d\alpha-d-1}$ produktnih skupova), a druga konstrukcija se sastoji od $\varepsilon^{-1/\alpha}$ produktnih skupova (svaki interval duljine ε dolazi u produktu sa svakom od kugala dijametra ε nastalih preslikavanjem podintervala, a kojih ima konstani višekratnik od $\varepsilon^{1-1/\alpha}$). Također, svi ti produktni skupovi imaju dijametar reda veličine ε. Dakle, imamo dva pokrivača za graf čiji skupovi imaju dijametar reda veličine ε, označimo maksimum tih dijametara s δ. Prvi pokrivač povlači da vrijedi $\mathscr{H}_{\delta}^{1+d-d\alpha} \leqslant M < \infty$, za svaki δ (jer je konstanta C iz definicije α- Hölder neprekidnosti globalna), za neku konstantu M, iz čega slijedi da je $\dim \Gamma_f(A) \leqslant 1 + d - d\alpha$ (prema Propoziciji 3.2.9). Slično, drugi pokrivač povlači da je $\dim \Gamma_f(A) \leqslant \frac{1}{\alpha} = 1 + (1-\alpha)\frac{1}{\alpha}$. Kombinacija ove dvije ograde daje tvrdnju (a) dijela.

(b) Ova tvrdnja slijedi direktno iz Primjera 3.2.11.

□

Napomena 3.2.14. *Budući da Hausdorffova dimenzija ima svojstvo prebrojive stabilnosti, tvrdnja Propozicije 3.2.13 vrijedi i u slučaju da je $f : [0,\infty) \mapsto \mathbb{R}^d$ samo lokalno α- Hölder neprekidna.*

Sada ćemo primijeniti rezultate ovoga poglavlja na Brownovo gibanje i izračunati dimenzije nekih skupova izvedenih iz Brownova gibanja. U Korolaru 2.2.4 vidjeli smo da je linearno Brownovo gibanje svugdje lokalno α- Hölder neprekidno za sve $\alpha < 1/2$, gotovo sigurno. Ova tvrdnja lagano se proširi i na d-dimenzinalno Brownovo gibanje što, zajedno s prethodnom napomenom i Propozicijom 3.2.13, daje gornju ogradu za Hausdorffovu dimenziju slike i grafa d-dimenzionalnog Brownova gibanja. U nastavku ćemo, radi lakšeg označavanja, u slučajevima kada se govori o Brownovom gibanju izbaciti oznaku referentne funkcije koju pišemo u subindeksu oznaka $\Gamma_f(A)$ i $\mathrm{Im}_f(A)$.

Korolar 3.2.15. *Za svaki fiksni skup $A \subset [0, \infty)$, graf d-dimenzionalnog Brownova gibanja zadovoljava, gotovo sigurno,*

$$\dim(\Gamma(A)) \leqslant \begin{cases} 3/2, & \text{ako } d = 1, \\ 2, & \text{ako } d \geqslant 2, \end{cases}$$

a slika d-dimenzionalnog Brownova gibanja zadovoljava, gotovo sigurno,

$$\dim \mathrm{Im}(A) \leqslant (2 \dim A) \wedge d.$$

Dokaz. Ako je $d = 1$, uočimo da je $d \wedge \frac{1}{\alpha} = d$, jer je $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Propozicija 3.2.13 daje:

$$\dim \Gamma(A) \leqslant 1 + (1 - \alpha) = 2 - \alpha, \text{ za sve } 0 < \alpha < \frac{1}{2}.$$

Puštanjem $\alpha \to \frac{1}{2}$ dobivamo tvrdnju.
Ako je $d \geqslant 2$, promotrimo izraz $(1 - \alpha)\left(d \wedge \frac{1}{\alpha}\right) \in (0, 1)$, za $0 < \alpha < \frac{1}{2}$. Za α dovoljno blizu $\frac{1}{2}$ vrijedi $d \wedge \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}$ pa puštanjem $\alpha \to \frac{1}{2}$ slijedi da $1 + (1 - \alpha)\left(d \wedge \frac{1}{\alpha}\right) \to 1 + 1 = 2$. Dakle,

$$\dim \Gamma(A) \leqslant 2, \text{ za } d \geqslant 2.$$

Što se tiče slike Brownova gibanja, ista propozicija daje ogradu

$$\dim \mathrm{Im}(A) \leqslant \frac{1}{\alpha} \dim A, \text{ za sve } 0 < \alpha < \frac{1}{2}.$$

Dakle, puštanjem $\alpha \to \frac{1}{2}$ te uzimajući u obzir činjenicu da je Hausdorffova dimenzija svakog podskupa od $\mathbb{R}^d$ manja ili jednaka od d, slijedi i druga tvrdnja korolara. □

Prethodni korolar ne govori ništa o 2-Hausdorffovoj mjeri slike. Neka je sada $\{B(t) : t \geqslant 0\}$ d-dimenzionalno Brownovo gibanje. Tada, za $d \geqslant 2$, vrijedi

$$\mathscr{H}^2(B([0, 1])) < \infty, \quad \text{gotovo sigurno.} \tag{3.5}$$

Pokažimo ovu tvrdnju. Za fiksan $n \in \mathbb{N}$ promotrimo pokrivač skupa $B([0,1])$ koji se sastoji od zatvarača kugli

$$\mathcal{B}\left(B\left(\frac{k}{n}\right), \max_{\frac{k}{n} \leqslant t \leqslant \frac{k+1}{n}} \left|B(t) - B\left(\frac{k}{n}\right)\right|\right), \quad k \in \{0, \ldots, n-1\}.$$

Kako je Brownovo gibanje uniformno neprekidno na jediničnom intervalu $[0,1]$, slijedi da maksimalni dijametar ovih skupova ide u nulu, kada $n \to \infty$. Također, koristeći skalirajuće svojstvo, dobivamo

$$\mathbb{E}\left[\left(\max_{\frac{k}{n} \leqslant t \leqslant \frac{k+1}{n}} \left|B(t) - B\left(\frac{k}{n}\right)\right|\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\left(\max_{0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{n}} |B(t)|\right)^2\right] = \frac{1}{n}\mathbb{E}\left[\left(\max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |B(t)|\right)^2\right].$$

Očekivanje na desnoj strani je konačno, vidi Propoziciju 2.5.6. Stoga je očekivana 2-vrijednost n-tog pokrivača ograničena odozgo s

$$4\mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\left(\max_{\frac{k}{n} \leqslant t \leqslant \frac{k+1}{n}} \left|B(t) - B\left(\frac{k}{n}\right)\right|\right)^2\right] = 4\mathbb{E}\left[\left(\max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |B(t)|\right)^2\right].$$

Na kraju, Fatouova lema povlači da je

$$\mathbb{E}\left[\liminf_{n \to \infty} 4\sum_{k=0}^{n-1}\left(\max_{\frac{k}{n} \leqslant t \leqslant \frac{k+1}{n}} \left|B(t) - B\left(\frac{k}{n}\right)\right|\right)^2\right] < \infty.$$

Dakle, limes inferior je gotovo sigurno konačan (preciznije, konačan je na skupu na kojem je Brownovo gibanje neprekidno, a to je skup vjerojatnosti 1), što dokazuje tvrdnju (3.5).

Idući teorem daje jaču tvrdnju od (3.5): pokazuje da je 2-Hausdorffova mjera slike d-dimenzionalnog Brownova gibanja jednaka nuli za svaki $d \geqslant 2$. Teorem iznosimo bez dokaza. Dokaz se temelji na činjenici da postoji "prirodna" mjera na slici $\mathrm{Im}(A)$ koju možemo koristiti kao sredstvo za odabiranje dobrog pokrivača. Ideja upotrebe prirodne mjere koja poprima pozitivne vrijednosti na "fraktalnom" skupu bit će ključna i prilikom određivanja donje granice za Hausdorffovu dimenziju, kao što ćemo vidjeti u idućim teoremima.

Teorem 3.2.16. *Neka je $\{B(t) \colon t \geqslant 0\}$ Brownovo gibanje u prostoru dimenzije $d \geqslant 2$. Tada, gotovo sigurno, za svaki skup $A \subset [0, \infty)$, vrijedi:*

$$\mathscr{H}^2(\mathrm{Im}(A)) = 0.$$

Dokaz. Dokaz teorema se nalazi u [2, Teorem 4.18.]. □

3.3 Princip raspodjele mase

Iz definicije Hausdorffove dimenzije slijedi da je u mnogim slučajevima relativno jednostavno dati gornju ogradu za dimenziju: dovoljno je naći efektivan pokrivač i gornju ogradu za njegovu α-vrijednost. Međutim, čini se puno teže pronaći donju ogradu jer u tom slučaju moramo pronaći donju ogradu za sve α-vrijednosti svih pokrivača skupa.

Princip raspodjele mase jedan je način za rješavanje ovog problema. U slučajevima "dovoljno dobrih" metričkih problema, ovaj princip daje donju ogradu za Hasdorffovu dimenziju. Temelji se na postojanju pozitivne mjere na skupu. Intuitivno, osnovna ideja je da, ako ova mjera raspodjeljuje određenu, pozitivnu količinu mase na skup E na taj način da je lokalna koncentracija mase ograničena odozgo, onda skup mora biti u određenom smislu dovoljno velik. U dokazu ćemo promatrati određenu klasu mjera koje nazivamo raspodjelama masa. Preciznije, mjeru μ definiranu na Borelovim skupovima metričkog prostora E nazivamo **raspodjelom mase** na E ako vrijedi

$$0 < \mu(E) < \infty.$$

Intuitivno, to je mjera koja raspoređuje pozitivnu i konačnu količinu mase na skup E.

Teorem 3.3.1. *Neka je E metrički prostor i $\alpha \geqslant 0$. Ako postoji raspodjela mase μ na E te konstante $C > 0$ i $\delta > 0$ takve da je*

$$\mu(V) \leqslant C|V|^\alpha,$$

za sve zatvorene skupove V s dijametrom $|V| \leqslant \delta$, onda je

$$\mathscr{H}^\alpha(E) \geqslant \frac{\mu(E)}{C} > 0,$$

pa vrijedi $\dim E \geqslant \alpha$.

Dokaz. Uzmimo proizvoljan pokrivač od E, $U_1, U_2, \ldots$, takav da je $|U_i| \leqslant \delta$. Neka je V_i zatvarač od U_i, za $i \in \mathbb{N}$. Uočimo da vrijedi: $|U_i| = |V_i|$. Imamo

$$0 < \mu(E) \leqslant \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i\right) \leqslant \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} V_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu(V_i) \leqslant C\sum_{i=1}^{\infty} |V_i|^\alpha = C\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^\alpha.$$

Uzmimajući infimum po svim takvim pokrivačima i puštajući $\delta \to 0$, dobijemo

$$\mu(E) \leqslant C\mathscr{H}^\alpha(E).$$

Iz Propozicije 3.2.9 slijedi da je $\dim E \geqslant \alpha$. □

Prethodni teorem možemo upotrijebiti za računanje Hausdorffove dimenzije skupa u kojem linearno Brownovo gibanje postiže vrijednost nula. Označimo taj skup s *Zer* i prisjetimo se da je to beskonačan skup bez izoliranih točaka. Isprva možda nije jasno koja mjera na skupu *Zer* će biti pogodna za primjenu principa razdiobe masa. Rješenje će dati Lévyjev teorem. Za uspostavljanje veze između originalnog Brownova gibanja i procesa definiranog u Teoremu 2.5.5, potrebno je još definirati vrijeme rekorda Brownova gibanja.

Definicija 3.3.2. *Neka je* $\{B(t)\colon t \geqslant 0\}$ *linearno Brownovo gibanje i* $\{M(t)\colon t \geqslant 0\}$ *pripadajući proces maksimuma. Vrijeme* $t \geqslant 0$ *zovemo* ***vrijeme rekorda*** *Brownova gibanja ako vrijedi* $M(t) = B(t)$*.*

Skup svih vremena rekorda Brownova gibanja označavamo s Rec.

Uočimo da su vremena rekorda Brownova gibanja ujedno i vremena u kojima proces $\{Y(t)\colon t \geqslant 0\}$ definiran s

$$Y(t) = M(t) - B(t)$$

postiže vrijednost nula. Prema Teoremu 2.5.5 taj proces je reflektirano Brownovo gibanje pa slijedi da skup u kojem taj proces postiže vrijednost nula i skup u kojem proces $\{B(t)\colon t \geqslant 0\}$ postiže vrijednost nula imaju istu razdiobu. Dakle, skupovi *Rec* i *Zer* su jednako distribuirani pa je određivanje Hausdorffove dimenzije skupa *Zer* ekvivalentno određivanju Hausdorffove dimenzije skupa *Rec*. Prirodna mjera na skupu *Rec* je određena funkcijom distribucije $\{M(t)\colon t \geqslant 0\}$ (jer postoji 1-1 korespondencija između Lebesgue-Stieltjesovih mjera i poopćenih funkcija distribucije), što nam omogućava da odredimo donju ogradu za Hausdorffovu dimenziju skupa *Rec* pomoću principa raspodjele mase.

Lema 3.3.3. *Skup svih vremena rekorda linearnog Brownova gibanja zadovoljava*

$$Rec = \{s \geqslant 0\colon M(s+h) > M(s-h), \text{ za sve } 0 < h < s\}.$$

Dokaz. Ovo slijedi iz Teorema 2.2.15. Ako je $s \in Rec$, onda je $M(s-h) < M(s)$, za sve $0 < h < s$ jer se globalni maksimum, gotovo sigurno, postiže u jedinstveno vrijeme. Analogno, $M(s) < M(s+h)$, za sve $0 < h < s$. Obrnuto, ako je $s > 0$ takav da vrijedi $M(s+h) > M(s-h)$, za sve $0 < h < s$. Kada s ne bi bio vrijeme rekorda, vrijedilo bi $B(s) < M(s)$. Kako je B gotovo sigurno neprekidna, slijedilo bi da postoji okolina od s u kojoj B postiže vrijednosti manje od $M(s)$, odnosno okolina na kojoj je proces M konstantan. To je kontradikcija s definicijom trenutka s. □

Lema 3.3.4. *Gotovo sigurno,* $\dim(Rec \cap [0,1]) \geqslant \frac{1}{2}$*, što povlači* $\dim(Zer \cap [0,1]) \geqslant \frac{1}{2}$*.*

Dokaz. Kao što smo pokazali, Teorem 2.5.5 povlači da su skupovi *Rec* i *Zer* jednako distribuirani pa je dovoljno pokazati prvu nejednakost.

Funkcija $t \mapsto M(t)$ je neopadajuća i neprekidna pa je to poopćena funkcija distribucije. Rezultati teorije vjerojatnosti daju da takva funkcija generira jednoznačnu (Lebesgue-Stieltjesovu) mjeru na $\mathbb{R}$ relacijom $\mu(a, b] = M(b) - M(a)$, za $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$. Nosač ove mjere je (zatvoren) skup *Rec* vremena rekorda (prema Lemi 3.3.3). Također, iz Korolara 2.2.4, znamo da je, gotovo sigurno, Brownovo gibanje lokalno Hölder neprekidno za svaki eksponent $\alpha < 1/2$. Slijedi da postoji (slučajna) konstanta C_α takva da je, gotovo sigurno,

$$M(b) - M(a) \leqslant \max_{0 \leqslant h \leqslant b-a} B(a+h) - B(a) \leqslant C_\alpha (b-a)^\alpha, \text{ za sve } a, b \in [0,1],$$

gdje prva nejednakost vrijedi jer jer $B(a) \leqslant M(a)$. Dakle, mjera μ zadovoljava uvjete Teorema 3.3.1 pa slijedi

$$\dim(Rec \cap [0,1]) \geqslant \alpha, \text{ za } \alpha < \frac{1}{2}.$$

Puštanjem $\alpha \nearrow \frac{1}{2}$ slijedi tvrdnja. □

Da bismo odredili Hausdorffovi dimenziju skupa *Zer*, trebamo još pokazati da je gornja ograda također 1/2. Pronaći ćemo pokrivač koji se sastoji od intervala. Za $k \in \mathbb{N}$ definirajmo skup $\mathfrak{D}_k$ koji se sastoji od intervala $\left[\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k}\right)$, za $j = 0, \ldots, 2^k - 1$, i slučajnu varijablu $Z(I)$, za interval I, takvu da je:

$$Z(I) = \begin{cases} 1, & \text{ako postoji } t \in I \text{ takav da je } B(t) = 0, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases} \tag{3.6}$$

Da bismo procijenili dimenziju skupa *Zer*, trebamo procjenu vjerojatnosti da je $Z(I) = 1$, t.j. vjerojatnosti da dani interval sadrži nultočku Brownova gibanja.

Lema 3.3.5. *Postoji pozitivna konstanta C takva da je, za svaki $\alpha, \varepsilon > 0$,*

$$\mathbb{P}(\text{ postoji } t \in (a, a+\varepsilon) \text{ t.d. je } B(t) = 0) \leqslant C\sqrt{\frac{\varepsilon}{a+\varepsilon}}.$$

Dokaz. Skalirajuće svojstvo Brownova gibanja povlači da je

$$\mathbb{P}\left(|B(a+\varepsilon)| \leqslant \sqrt{\varepsilon}\right) = \mathbb{P}\left(|B(1)| \leqslant \sqrt{\frac{\varepsilon}{a+\varepsilon}}\right) = \int_{-\sqrt{\frac{\varepsilon}{a+\varepsilon}}}^{\sqrt{\frac{\varepsilon}{a+\varepsilon}}} \mathfrak{p}(x)\, dx \leqslant \sqrt{\frac{\varepsilon}{a+\varepsilon}},$$

gdje je s $\mathfrak{p}$ označena gustoća jedinčne normalne slučajne varijable. Pri tome posljednja nejednakost vrijedi jer je $\mathfrak{p}(x) \leqslant \frac{1}{2}$, za sve $x \in \mathbb{R}$. Intuitivno, ako znamo da Brownovo gibanje ima nultočku na intervalu $(a, a+\varepsilon)$, očekujemo da će događaj $|B(a+\varepsilon)| \leqslant \sqrt{\varepsilon}$ biti jako vjerojatan. Da bismo to vidjeli, primijenit ćemo jako Markovljevo svojstvo, odnosno Teorem 2.4.3, na vrijeme zaustavljanja $T = \inf\{t \geqslant a \colon B(t) = 0\}$. Imamo:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(|B(a+\varepsilon)| \leqslant \sqrt{\varepsilon}\right) &\geqslant \mathbb{P}\left(\left\{|B(a+\varepsilon)| \leqslant \sqrt{\varepsilon}\right\} \cap \{0 \in B\,[a, a+\varepsilon]\}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\left\{|B(a+\varepsilon)| \leqslant \sqrt{\varepsilon}\right\} \cap \{T \leqslant a+\varepsilon\}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(|B(a+\varepsilon) - B(T)| \leqslant \sqrt{\varepsilon},\ T \leqslant a+\varepsilon\right) \\
&= \left[\text{ova dva događaja su nezavisna i } B(a+\varepsilon) - B(T) \overset{d}{=} B(a+\varepsilon-T)\right] \\
&= \int_{[a,a+\varepsilon]} \mathbb{P}\left(|B(a+\varepsilon-t)| \leqslant \sqrt{\varepsilon}\right) \mathbb{P}\left(T \in dt\right) \\
&= \left[\mathbb{P}\left(|B(a+\varepsilon-t)| \leqslant \sqrt{\varepsilon}\right) \geqslant \min_{a \leqslant s \leqslant a+\varepsilon} \mathbb{P}\left(|B(a+\varepsilon-s)| \leqslant \sqrt{\varepsilon}\right)\right] \\
&\geqslant \min_{a \leqslant s \leqslant a+\varepsilon} \mathbb{P}\left(|B(a+\varepsilon-s)| \leqslant \sqrt{\varepsilon}\right) \mathbb{P}(a \leqslant T \leqslant a+\varepsilon).
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Skalirajuće svojstvo povlači

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(|B(a+\varepsilon-s)| \leqslant \sqrt{\varepsilon}\right) &= \mathbb{P}\left(|B(1)| \leqslant \sqrt{\frac{\varepsilon}{a+\varepsilon-s}}\right) \\
&\geqslant \mathbb{P}\left(|B(1)| \leqslant \sqrt{\frac{\varepsilon}{a+\varepsilon-a}}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(|B(1)| \leqslant 1\right) =: C.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Iz (3.7) i (3.8) sada slijedi

$$\mathbb{P}\left(T \leqslant a+\varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{c} \mathbb{P}\left(|B(a+\varepsilon)| \leqslant \sqrt{\varepsilon}\right) \leqslant \frac{1}{c} \sqrt{\frac{\varepsilon}{a+\varepsilon}},$$

što smo i trebali pokazati. □

Lema 3.3.6. *Gotovo sigurno,* $\dim(Zer \cap [0,1]) \leqslant \frac{1}{2}$.

Dokaz. Lema 3.3.5 pokazuje da, za svaki $\varepsilon > 0$ i dovoljno veliki k, vrijedi:

$$\mathbb{E}\left[Z(I)\right] \leqslant C \sqrt{\frac{2^{-k}}{(j+1)2^{-k}}} \leqslant C_1 2^{-\frac{k}{2}}, \quad \text{za sve } I \in \mathfrak{D}_k \text{ t.d. } I \subset (\varepsilon, 1-\varepsilon)\,, \tag{3.9}$$

za neku konstantu $C_1 = C_1(\varepsilon) > 0$. Posljednja nejednakost vrijedi jer je $(j+1)2^{-k} \geqslant \varepsilon$. Promatrajmo pokrivač skupa $\{t \in (\varepsilon, 1-\varepsilon) : B(t) = 0\}$ koji se sastoji od intervaka $I \in \mathfrak{D}_k$

takvih da je $I \cap (\varepsilon, 1-\varepsilon) \neq 0$ i $Z(I) = 1$ (ne uzimamo intervale koji ne sadrže nultočku). Očekivana $\frac{1}{2}$-vrijednost tog pokrivača je

$$\mathbb{E}\Big[\sum_{\substack{I\in\mathfrak{D}_k \\ I\cap(\varepsilon,1-\varepsilon)\neq 0}} Z(I)2^{-k/2}\Big] = \sum_{\substack{I\in\mathfrak{D}_k \\ I\cap(\varepsilon,1-\varepsilon)\neq 0}} \mathbb{E}\,[Z(I)]\,2^{-k/2} \leqslant C_1 2^k 2^{-k/2} 2^{-k/2} = C_1,$$

gdje prva jednakost slijedi jer je suma konačna, a druga iz (3.9) i činjenice da takvih intervala I ima najviše 2^k. Iz Fatouove leme sada slijedi

$$\mathbb{E}\Big[\liminf_{k\to\infty} \sum_{\substack{I\in\mathfrak{D}_k \\ I\cap(\varepsilon,1-\varepsilon)\neq 0}} Z(I)2^{-k/2}\Big] \leqslant \liminf_{k\to\infty} \mathbb{E}\Big[\sum_{\substack{I\in\mathfrak{D}_k \\ I\cap(\varepsilon,1-\varepsilon)\neq 0}} Z(I)2^{-k/2}\Big] \leqslant C_1.$$

Dakle, limes inferior je gotovo sigurno konačan pa slijedi da postoji familija pokrivača čiji maksimalni dijametar konvergira u nula i imaju ograničene $\frac{1}{2}$-vrijednosti. Drugim riječima, definicija limesa inferiora povlački da postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da svi ovih pokrivača koji se sastoje od intervala $I \in \mathfrak{D}_k$, za $n \geqslant k$, imaju ograničenu $\frac{1}{2}$-vrijednost te maksimum njihovih dijametara konvergira u nula, za $n \to \infty$. To povlači da, gotovo sigurno, vrijedi

$$\mathscr{H}_\delta^{\frac{1}{2}}\,(t \in (\varepsilon, 1-\varepsilon) : B(t) = 0) \leqslant C_1, \text{ za sve } \delta > 0,$$

što dalje povlači

$$\mathscr{H}^{\frac{1}{2}}\,(t \in (\varepsilon, 1-\varepsilon) : B(t) = 0) < \infty.$$

Tada iz Propozicije 3.2.9 slijedi da je

$$\dim(Zer \cap (\varepsilon, 1-\varepsilon)) \leqslant \frac{1}{2}.$$

Ista tvrdnja vrijedi i za cijeli skup nultočki. Naime, iz Propozicije 3.2.9 slijedi da je $\mathscr{H}^\alpha(Zer \cap (\varepsilon, 1-\varepsilon)) = 0$, za $\alpha > \frac{1}{2}$. α-Hausdorffova mjera je σ-aditivna, kao što smo vidjelu u Napomeni 3.2.8, pa vrijedi

$$\mathscr{H}^\alpha(Zer \cap [0,1]) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mathscr{H}^\alpha\left(Zer \cap \left(\tfrac{1}{k}, 1-\tfrac{1}{k}\right)\right) = 0.$$

Ponovnom primjenom Proppozicije 3.2.9 dobijemo

$$\dim(Zer \cap [0,1]) \leqslant \alpha.$$

Puštanjem $\alpha \searrow \frac{1}{2}$ slijedi tvrdnja. $\square$

Teorem 3.3.7. *Neka je* $\{B(t) : 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ *linearno Brownovo gibanje. Tada, gotovo sigurno, vrijedi:*

$$\dim(Zer \cap [0,1]) = \dim(Rec \cap [0,1]) = \frac{1}{2}.$$

Dokaz. Lema 3.3.4 i Lema 3.3.6 dokazuju tvrdnju teorema. □

Napomena 3.3.8. *U Teoremu 3.2.16 smo vidjeli da Haudorffova mjera* $\mathscr{H}^2$ *ima vrijednost nula na slici Brownova gibanja. Slično, može se pokazati da Hausdorffova mjera* $\mathscr{H}^{\frac{1}{2}}$ *ima vrijednost nula na skupu nultočki Brownova gibanja.*

3.4 Energetska metoda

U prošlom poglavlju smo vidjeli jednu metodu za određivanje donje granice za Hausdorffovu dimenziju. Sada ćemo se upoznati s još jednom metodom koja je važna u primjeni na slučajnim fraktalima. Uvjet na masu zatvorenih skupova zamijenit će uvjet konačnosti energije.

Definicija 3.4.1. *Neka je* μ *raspodjela mase na metričkom prostoru* (E, ρ) *i neka je* $\alpha \geqslant 0$.

*α-**potencijal** u točki* $x \in E$ *s obzirom na* μ *definiramo s*

$$\phi_\alpha(x) = \int \frac{d\mu(y)}{\rho(x,y)^\alpha}.$$

Ako je $E = \mathbb{R}^3$ *i* $\alpha = 1$, *zovemo ga Newtonov (gravitacijski) potencijal mase* μ.

*α-**energiju** mase* μ *definiramo s*

$$I_\alpha(\mu) = \int \phi_\alpha(x) d\mu(x) = \iint \frac{d\mu(x)\, d\mu(y)}{\rho(x,y)^\alpha}.$$

Intuitivno, ideja energetske metode je da one raspodjele mase μ za koje je $I_\alpha(\mu) < \infty$ raspoređuju masu na taj način da je koncentracija na svakom mjestu dovoljno mala da se nadvlada singularitet integranda. Ovo je moguće jedino kod skupova koji su dovoljno veliki u određenom smislu.

Teorem 3.4.2 (Energetska metoda). *Neka je* $\alpha \geqslant 0$ *i neka je* μ *raspodjela mase na metričkom prostoru* E. *Tada, za svaki* $\varepsilon > 0$, *imamo*

$$\mathscr{H}^\alpha_\varepsilon(E) \geqslant \frac{\mu(E)^2}{\iint_{\rho(x,y)<\varepsilon} \frac{d\mu(x)\, d\mu(y)}{\rho(x,y)^\alpha}}.$$

Dakle, ako je $I_\alpha(\mu) < \infty$, *onda vrijedi* $\mathscr{H}^\alpha(E) = \infty$ *te, posebno,* $\dim E \geqslant \alpha$.

Dokaz. Uzmimo proizvoljan pokrivač za E, $\{A_n : n = 1, 2, \dots\}$, koji se sastoji od međusobno disjunktnih skupova dijametra manjeg od ε. Imamo

$$\iint_{\rho(x,y)<\varepsilon} \frac{d\mu(x)\, d\mu(y)}{\rho(x,y)^\alpha} \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \iint_{A_n \times A_n} \frac{d\mu(x)\, d\mu(y)}{\rho(x,y)^\alpha} \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(A_n)^2}{|A_n|^\alpha}.$$

Također, vrijedi

$$\mu(E) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^{\frac{\alpha}{2}} \frac{\mu(A_n)}{|A_n|^{\frac{\alpha}{2}}}.$$

Neka je $\delta > 0$ proizvoljan. Iz definicije infimuma slijedi da postoji pokrivač kao gore takav da vrijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^\alpha \leqslant \mathscr{H}_\varepsilon^\alpha(E) + \delta.$$

Cauchy-Schwarzova nejednakost povlači

$$\mu(E)^2 \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^\alpha\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(A_n)^2}{|A_n|^\alpha}\right) \leqslant (\mathscr{H}_\varepsilon^\alpha(E) + \delta) \iint_{\rho(x,y)<\varepsilon} \frac{d\mu(x)\, d\mu(y)}{\rho(x,y)^\alpha}.$$

Puštajući $\delta \searrow 0$ i dijeleći obje strane s integralom, dobivamo tvrdnju teorema.

Pretpostavimo još da je $I_\alpha(\mu) < \infty$. Puštajući $\varepsilon \searrow 0$ integral konvergira prema nuli što, prema upravo dokazanoj tvrdnji, povlači da $\mathscr{H}_\varepsilon^\alpha(E)$ divergira u beskonačnost. Iz Propozicije 3.2.9 slijedi da je $\dim E \geqslant \alpha$. □

Napomena 3.4.3. *Da bismo odredili donju ogradu za Hausdorffovu dimenziju slučajnog skupa E, prema energetskoj metodi dovoljno je dokazati konačnost integrala. Drugim riječima, da bismo pokazali da je* $\dim E \geqslant \alpha$*, gotovo sigurno, dovoljno je pokazati da je* $\mathbb{E} I_\alpha(\mu) < \infty$*, za proizvoljnu slučajnu mjeru na E.*

Jedna od tema ovoga rada je proučavanje skupova koji su izvedeni iz trajektorija Brownova gibanja. Vidjeli smo da je skup nultočki Brownova gibanja fraktalni skup koji ima Hausdorffovu dimenziju $\frac{1}{2}$. Preostaje odrediti dimenzije grafa i slike Brownova gibanja. Kako Brownovo gibanje gotovo sigurno nije nigdje diferencijabilno, očekujemo da će dimenzija grafa biti veća od jedan. Za dimenzije $d \geqslant 2$ zanimljivo je promatrati sliku Brownova gibanja. Brownovo gibanje se s vjerojatnošću jedan vraća u okolinu iz koje je krenulo, odnosno, svaku okolinu u ravnini posjećuje beskonačno mnogo puta. U tom smislu, sliku Brownova gibanja možemo usporediti sa samom ravninom pa se postavlja pitanje vrijedi li to i u smislu dimenzije.

Teorem 3.4.4. *Neka je* $\{B(t) : 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ *d-dimenzionalno Brownovo gibanje.*

(a) *Ako je $d = 1$, onda je* $\dim \Gamma[0,1] = \frac{3}{2}$, *gotovo sigurno.*

(b) *Ako je $d \geqslant 2$, onda je* $\dim \mathrm{Im}[0,1] = \dim \Gamma[0,1] = 2$, *gotovo sigurno.*

Dokaz. Korolar 3.2.15 daje gornje ograde za Hausdorffovu dimenziju grafa i slike. Potrebno je još odrediti donje ograde. Glavni alat bit će nam energetska metoda. Prema Napomeni 3.4.3, želimo li pokazati da je $\dim(E) \geqslant \alpha$, dovoljno je pokazati da je $\mathbb{E} I_\alpha(\mu) < \infty$, za neku slučajnu mjeru μ. Dokažimo prvo drugu tvrdnju.

(b) Prirodna mjera na $\mathrm{Im}[0,1]$ je mjera μ definirana s $\mu(A) = \mathcal{L}^1(B^{-1}(A) \cap [0,1])$, za sve Borelove skupove $A \subset \mathbb{R}^d$. Lebesgueovom indukcijom se lako pokaže da je

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, d\mu(x) = \int_0^1 f(B(t))\, dt,$$

za sve ograničene izmjerive funkcije f. Želimo pokazati da je $\dim \mathrm{Im}[0,1] \geqslant 2$, odnosno da za $0 < \alpha < 2$ vrijedi

$$\mathbb{E} I_\alpha(\mu) = \mathbb{E} \iint \frac{d\mu(x)\, d\mu(y)}{|x-y|^\alpha} = \mathbb{E} \int_0^1 \int_0^1 \frac{ds\, dt}{|B(t) - B(s)|^\alpha} < \infty. \tag{3.10}$$

Uočimo da je

$$\mathbb{E}\left[|B(t) - B(s)|^{-\alpha}\right] = \mathbb{E}\left[B(|t-s|)^{-\alpha}\right] = \mathbb{E}\left[\left(|t-s|^{\frac{1}{2}} |B(1)|\right)^{-\alpha}\right] = |t-s|^{\frac{-\alpha}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{c_d}{|z|^\alpha} e^{-\frac{|z|^2}{2}}\, dz,$$

gdje posljednja jednakost slijedi iz činjenice da je $B(1)$ jedinični normalni slučajni vektor, a c_d je neka konstanta koja ovisi o d. Posljednji integral je jednak nekoj konačnoj konstanti c koja ovisi o d (jer je $d \geqslant 2$) i α. Uvrstimo li ovo u (3.10), dobivamo

$$\begin{aligned} \mathbb{E} I_\alpha(\mu) &= [\text{Fubinijev teorem}] = \int_0^1 \int_0^1 \mathbb{E}\left[|B(t) - B(s)|^{-\alpha}\right] ds\, dt = \\ &= c \int_0^1 \int_0^1 \frac{ds\, dt}{|t-s|^{\alpha/2}} = c \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{ds}{|t-s|^{\alpha/2}} \right) dt \leqslant 2c \int_0^1 \frac{du}{u^{\alpha/2}} < \infty. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Nejednakost u (3.11) vrijedi jer je

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{ds}{|t-s|^{\alpha/2}} &= \int_0^t \frac{ds}{|t-s|^{\alpha/2}} + \int_t^1 \frac{ds}{|t-s|^{\alpha/2}} = \int_0^t \frac{ds}{(t-s)^{\alpha/2}} + \int_t^1 \frac{ds}{(s-t)^{\alpha/2}} = \\ &= \begin{pmatrix} u = t-s \\ w = s-t \end{pmatrix} = \int_0^t \frac{du}{u^{\alpha/2}} + \int_0^{1-t} \frac{dw}{w^{\alpha/2}} \leqslant \int_0^1 \frac{du}{u^{\alpha/2}} + \int_0^1 \frac{dw}{w^{\alpha/2}} = 2 \int_0^1 \frac{du}{u^{\alpha/2}}. \end{aligned}$$

Dakle, $I_\alpha(\mu) < \infty$ pa je $\dim \operatorname{Im}[0,1] \geqslant \alpha$, gotovo sigurno. Puštanjem $\alpha \nearrow \frac{1}{2}$ slijedi $\dim \operatorname{Im}[0,1] \geqslant \frac{1}{2}$, što smo i trebali pokazati.
Da bismo dobili donju ogradu za graf Brownova gibanja, uočimo da graf neke funkcije možemo projicirati na njezinu sliku. Projekcija je Lipschitzova funkcija pa, prema Napomeni 3.2.10, slijedi da je dimenzija grafa veća ili jednaka od dimenzije slike. Dakle, ako je $d \geqslant 2$, onda vrijedi $\dim \Gamma[0,1] \geqslant 2$, gotovo sigurno.

(a) Iz Korolara 3.2.15 znamo da je $\dim \Gamma[0,1] \leqslant \frac{3}{2}$. Trebamo još pokazati obrnutu nejednakost. Uzmimo $\alpha > \frac{3}{2}$ i definirajmo mjeru μ na grafu s

$$\mu(A) = \mathcal{L}^1(\{0 \leqslant t \leqslant 1 : (t, B(t)) \in A\}), \text{ za } A \subset [0,1] \times \mathbb{R} \text{ Borelov.}$$

Transformacijom integrala po slici mjere (kao prije, ovdje je pripadno preslikavanje projekcija) dobijemo

$$I_\alpha(\mu) = \iint \frac{d\mu(x)\, d\mu(y)}{|x-y|^\alpha} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{ds\, dt}{(|t-s|^2 + |B(t)-B(s)|^2)^{\alpha/2}}.$$

Slično kao u prethodnom dijelu, uzimanjem očekivanja, primjenom Fubinijevog teorema te ograničavanjem integranda slijedi:

$$\mathbb{E} I_\alpha(\mu) \leqslant 2 \int_0^1 \mathbb{E}\left((t^2 + B(t)^2)^{-\alpha/2}\right) dt. \tag{3.12}$$

Označimo s $\mathfrak{p}(z) = \sqrt{2\pi}^{-1} \exp\left(-z^2/2\right)$ gustoću jedinične normalne razdiobe. $B(t)$ ima normalnu razdiobu s očekivanjem 0 i varijancom t pa je

$$\mathbb{E}\left[(t^2 + B(t)^2)^{-\alpha/2}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (t^2 + tz^2)^{-\alpha/2} \mathfrak{p}(z)\, dz = 2\int_0^{\infty} (t^2 + tz^2)^{-\alpha/2} \mathfrak{p}(z)\, dz. \tag{3.13}$$

Razdvojimo integral u (3.13) na dva integrala, za $z \leqslant \sqrt{t}$ i $z > \sqrt{t}$. Tada (3.13) možemo ograničiti s dva puta

$$\int_0^{\sqrt{t}} (t^2)^{-\alpha/2} dz + \int_{\sqrt{t}}^{\infty} (tz^2)^{-\alpha/2} \mathfrak{p}(z) dz = t^{\frac{1}{2}-\alpha} + t^{-\alpha/2} \int_{\sqrt{t}}^{\infty} z^{-\alpha} \mathfrak{p}(z) dz,$$

ovisno o veličini sumanada u svakom slučaju. Naime, kako je $\alpha > 0$, vrijedi $(t^2 + tz^2)^{-\alpha/2} \leqslant (t^2)^{-\alpha/2} \wedge (tz^2)^{-\alpha/2}$. Ako je $z \leqslant \sqrt{t}$, onda je $t^2 \geqslant tz^2$, odnosno $(t^2)^{-\alpha/2} \leqslant (tz^2)^{-\alpha/2}$. Dakle, $(t^2 + tz^2)^{-\alpha/2} \leqslant (t^2)^{-\alpha/2}$. Drugi slučaj se pokazuje slično. Posljednji integral razdvojimo na dva dijela i dobivamo

$$\int_{\sqrt{t}}^{\infty} z^{-\alpha} \mathfrak{p}(z) dz \leqslant 1 + \int_{\sqrt{t}}^{1} z^{-\alpha} dz,$$

jer je $\int_1^\infty \mathfrak{p}(z)dz \leqslant 1$. Posljednji integral je reda veličine $t^{(1-\alpha)/2}$, kada t ide u 0, jer je $\alpha - 1 > 0$. Sada uvrstimo dobivene u rezultate u (3.13). Slijedi da je $\mathbb{E}\left[(t^2 + B(t)^2)^{-\alpha/2}\right]$ reda veličine $t^{\frac{1}{2}-\alpha}$ pa je $\mathbb{E}I_\alpha(\mu)$ konačan za $\frac{1}{2} - \alpha > -1$, tj. $\alpha < \frac{3}{2}$.
Dakle, $\dim \Gamma[0,1] \geqslant \alpha$, za $\alpha < \frac{3}{2}$. Puštanjem $\alpha \nearrow \frac{3}{2}$ slijedi $\dim \Gamma[0,1] \geqslant \frac{3}{2}$. što dokazuje tvrdnju.

□

3.5 Frostmanova lema

Na kraju rada dajemo dokaz dva klasična rezultata iz područja teorije o Haudorffovoj dimenziji. To su Frostmanova lema, koja daje obrat principa raspodjele mase, i McKeanov teorem o Haudorffovoj dimenziji skupa na koji se preslikava Brownovo gibanje. Frostmanova lema nam omogućuje da uz uvjet poznavanja donje ograde za Hausdorffovu dimenziju nekog skupa konstruiramo mjeru, preciznije raspodjelu mase, na tom skupu. Ovo je koristan alat pomoću kojeg, na primjer, možemo usporediti Hausdorffovu dimenziju skupa i njegove slike nakon neke transformacije.

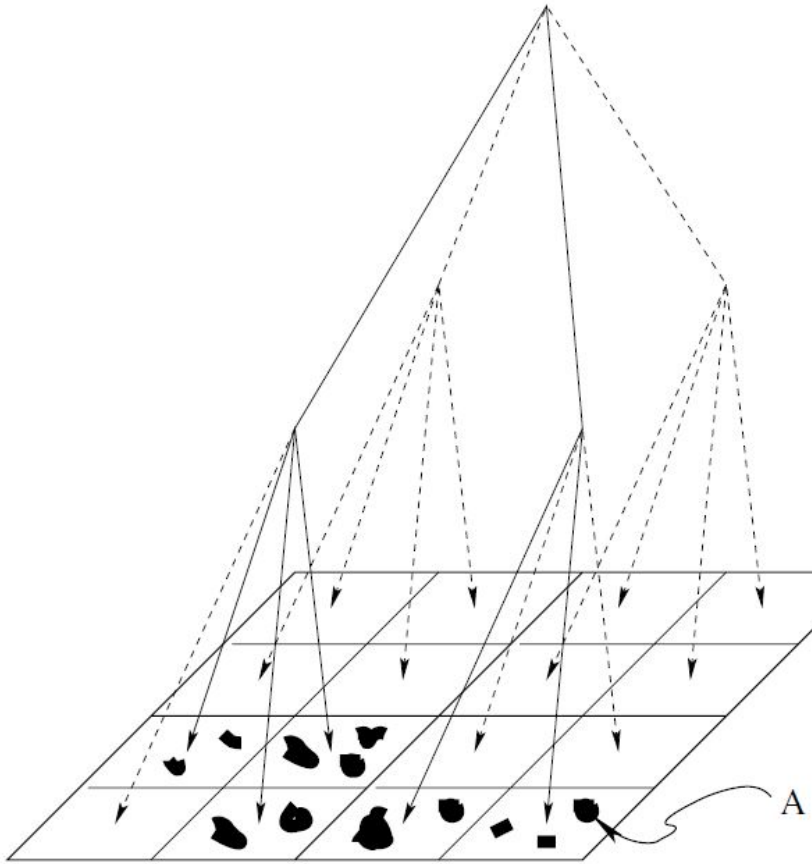
Teorem 3.5.1 (Frostmanova lema). *Neka je $A \subset \mathbb{R}^d$ zatvoren skup takav da je $\mathscr{H}^\alpha(A) > 0$. Tada postoji Borelova vjerojatnosna mjera μ čiji nosač sadrži A i konstanta $C > 0$ takva da je*

$$\mu(D) \leqslant C|D|^\alpha, \quad \text{za sve Borelove skupove } D \subset \mathbb{R}^d.$$

Napomena 3.5.2. *Frostamanovu lemu dokazat ćemo pomoću teorije grafova. Glavna ideja u dokazu je iskoristiti reprezentaciju kompaktnih poskupova od $\mathbb{R}^d$ pomoću stabala te primijeniti teorem maksimalnog toka i minimalnog prereza.*

Dokaz. Možemo pretpostaviti da je $A \subset [0,1]^d$. Svaku kompaktnu kocku u $\mathbb{R}^d$ koja ima stranice duljine s možemo podijeliti u 2^d manjih kompaktnih kocaka koje imaju stranice duljine $s/2$ i međusobno se ne preklapaju. Koristeći ovu činjenicu, definirajmo stablo tako da korijen odgovara kocki $[0,1]^d$, a svaki vrh stabla ima 2^d bridova koji izlaze iz njega. Svaki od tih bridova ulazi u vrh koji odgovara jednoj od 2^d manjih kocaka čije stranice imaju duljinu jednaku pola duljine stranice originalne kocke, odnosno kocke koja odgovara vrhu iz kojeg ti bridovi izlaze. Potom izbrišemo one bridove koji ulaze u vrhove koji odgovaraju kockama koje ne sijeku A. Na ovaj način smo definirali stablo $T = (V, E)$ čije zrake iz ruba stabla ∂T odgovaraju nizovima ugniježđenih kompaktnih kocaka, vidi Sliku 3.1.

Promotrimo preslikavanje $\Phi\colon \partial T \mapsto A$ koje nizove ugniježđenih kocaka (odnosno zrake stabla) preslikava u njihov presjek, koji je iz A. Φ je surjekcija. Da bismo to vidjeli, uzmimo $x \in A$. Tada postoji beskonačan put koji kreće iz korijena takav da svi



Slika 3.1: Prva dva koraka konstrukcije stabla koje odgovara skupu $A \subset [0,1]^2$. Skup A je osjenčan na slici, a iscrtkani bridovi su oni koje smo izbrisali iz stabla.

vrhovi na tom putu odgovaraju kockama koje sadrže x te stoga presijecaju A. Dakle, x je u presjeku ovih ugniježđenih kocaka pa postoji zraka iz ∂T koju Φ preslikava u x. Slijedi da je Φ surjekcija.

Za proizvoljan brid e na razini n definiramo njegov kapacitet $C(e) = (d^{\frac{1}{2}} 2^{-n})^{\alpha}$. Svakom prerezu Π pridružimo pokrivač od A koji se sastoji od onih kocaka koji odgovaraju početnim vrhovima svakog brida iz prereza. Pokažimo da se zaista radi o pokrivaču. Uzmimo zraku ξ i proizvoljan prerez Π. Iz definicije prereza slijedi da Π sadrži barem jedan brid ove zrake, a kocka koja odgovara početnom vrhu tog brida sadrži točku $\Phi(\xi)$. Budući da je Φ surjekcija, svakoj točki iz A možemo pridružiti neku zraku ξ koja se u nju preslikava, a kako je ξ bila proizvoljna, možemo provesti gornji postupak pa slijedi da je točka

$\Phi(\xi)$ u pokrivaču. Dakle, na ovaj način smo zaista pokrili cijeli skup $\Phi(\partial T) = A$. Slijedi

$$\inf\left\{\sum_{e\in\Pi} C(e)\colon \Pi \text{ je prerez}\right\} \geqslant \inf\left\{\sum_j |A_j|^\alpha\colon A \subset \bigcup_j A_j\right\},$$

jer svaki prerez odgovara jednom pokrivaču. Kako je $\mathscr{H}^\alpha_\infty(A) > 0$, prema ekvivalenciji u Propoziciji 3.2.9, slijedi da je desni infumum u prethodnoj nejednakosti ograničen odozdo. Prema teoremu maksimalnog toka i minimalnog prereza (Teoreom 1.4.2) postoji tok $\theta\colon E \mapsto [0,\infty)$ pozitivne snage takav da je $\theta(e) \leqslant C(e)$, za sve bridove $e \in E$.

Sada ćemo definirati odgovarajuću mjeru na prostoru beskonačnih puteva. Svakom bridu $e \in E$ pridružimo skup $T(e) \subset \partial T$ koji se sastoji od svih zraka koje sadrže brid e. Definirajmo

$$\tilde{\nu}(T(e)) = \theta(e).$$

Lako se provjeri da je familija $C(\partial T) = \{T(v)\colon T(v) \subset \partial T,\ v \in T\}$ poluprsten na ∂T. Naime, ako uzmemo $A, B \in C(\partial T)$, tada je $A \cap B$ ili prazan skup ili je jedan od skupova A i B podskup od drugoga. U oba slučaja, njihov presjek je u $C(\partial T)$. Također, za $A \in C(\partial T)$, A^c je jednak konačnoj uniji skupova iz $C(\partial T)$ (za sve zrake koje nisu u A pronađemo vrhove v najvećeg mogućeg reda koji pripadaju tim zrakama; odgovarajući skupovi $T(v)$ čine A^c i njih ima konačno mnogo). Dakle, $C(\partial T)$ je poluprsten. Budući da je tok u svakom vrhu sačuvan, $\tilde{\nu}$ je prebrojivo aditivna. Koristeći Carathéodoryjev teorem proširenja, vidi Teorem 1.2.8, mjeru $\tilde{\nu}$ možemo proširiti do mjere ν na σ-algebri generiranoj s $C(\partial T)$.

Definirajmo sada Borelovu mjeru $\mu = \nu \circ \Phi^{-1}$ na A. Vrijedi $\mu(C) = \theta(e)$, gdje je C kocka koja odgovara početnom vrhu luka e. Neka je D proizvoljan Borelov podskup od $\mathbb{R}^d$ i $n \in \mathbb{N}$ takav da je $2^{-n} < |D \cap [0,1]^d\,| \leqslant 2^{-(n-1)}$. Tada $C \cap [0,1]^d$ možemo pokriti s 3^d kocaka sa stranicama duljine 2^{-n} (odnosno dijametra $d^{\frac{1}{2}}2^{-n}$). Koristeći tu ogradu, slijedi

$$\mu(D) \leqslant d^{\frac{\alpha}{2}} 3^d 2^{-n\alpha} \leqslant d^{\frac{\alpha}{2}} 3^d |D|^\alpha.$$

Dakle, mjera μ je konačna i zadovoljava uvjete teorema. Normaliziranjem μ dobivamo vjerojatnosnu mjeru koja zadovoljava uvjete teorema, što dokazuje tvrdnju. □

Definicija 3.5.3. ***Rieszov α-kapacitet***, *ili kraće* ***α-kapacitet***, *metričkog prostora (E,ρ) defeniramo s*

$$\mathrm{Cap}_\alpha(E) := \sup\left\{I_\alpha(\mu)^{-1}\colon \mu \text{ je raspodjela mase na } E \text{ t.d. je } \mu(E) = 1\right\}.$$

U slučaju Euklidskog prostora $E = \mathbb{R}^d$ za $d \geqslant 3$ i $\alpha = d-2$, Rieszov α-kapacitet zovemo Newtonov kapacitet.

Iz Teorema 3.4.2 slijedi da skup pozitivnog α-kapaciteta ima dimenziju veću ili jednaku od α. Idući teorem pokazuje da je to optimalan rezultat. Dokaz se oslanja na Frostmanovu lemu te se stoga odnosi na zatvorene skupove Euklidskih prostora.

Teorem 3.5.4. *Za sve zatvorene skupove $A \subset \mathbb{R}^d$ vrijedi:*

$$\dim A = \sup\{\alpha\colon\ \mathrm{Cap}_\alpha(A) > 0\}.$$

Dokaz. Kao što smo upravo pokazali, Teorem 3.4.2 daje da je dovoljno dokazati $\leqslant$. Dakle, dovoljno je pokazati da, ako je $\dim A > \alpha$, onda postoji Borelova vjerojatnosna mjera μ na A takva da je

$$I_\alpha(\mu) = \int_{R^d}\int_{R^d} \frac{d\mu(x)\, d\mu(y)}{|x-y|^\alpha} < \infty.$$

Prema pretpostavci je $\dim A > \alpha$ pa za dovoljno mali $\beta > \alpha$ vrijedi $\mathscr{H}^\beta(A) > 0$. Prema Frostmanovoj lemi, postoji netrivijalna Borelova vjerojatnosna mjera μ na A i konstanta C takva da je $\mu(D) \leqslant C|C|^\beta$, za sve Borelove skupove D. Možemo pretpostaviti da nosač od μ ima dijametar manji od jedan (ako je potrebno, možemo μ ograničiti na manji skup).

Fiksirajmo $x \in A$. Za $k \geqslant 1$ definirajmo $S_k(x) = \left\{y\colon\ 2^{-k} < |x-y| \leqslant 2^{1-k}\right\}$. Kako μ nema atoma (jednočlanih skupova), slijedi:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{d\mu(y)}{|x-y|^\alpha} = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{S_k(x)} \frac{d\mu(y)}{|x-y|^\alpha} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu(S_k(x)) 2^{k\alpha},$$

gdje jednakost slijedi iz teorema o monotonoj konvergenciji, a nejednakost iz definicije skupa S_k, odnosno činjenice da je $|x-y|^\alpha > 2^{-k}$. Također, vrijedi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(S_k(x)) 2^{k\alpha} \leqslant \left[|S_k| \leqslant 2\cdot 2^{1-k} = 2^{2-k}\right] \leqslant C \sum_{k=1}^{\infty} |2^{2-k}|^\beta 2^{k\alpha} = C' \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k(\alpha-\beta)},$$

gdje je $C' = 2^{2\beta} C$. Budući da je $\beta > \alpha$, slijedi

$$I_\alpha(\mu) \leqslant C' \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k(\alpha-\beta)} < \infty,$$

što dokazuje teorem. □

Na kraju, vratimo se pitanju dimenzije slike skupa $A \subset [0,\infty)$ pod Brownovim gibanjem. U Korolaru 3.2.15 smo vidjeli da je dimenzija slike skupa A najviše dvostruko veća od dimenzije skupa A. Postavlja se pitanje je li ta ograda stroga. Idući teorem pokazuje da je za $d \geqslant 2$ ovo optimalna ograda, i to za proizvoljan skup A, dok je za $d = 1$ to istina kada je $\dim A \leqslant \frac{1}{2}$.

Teorem 3.5.5 (McKean). *Neka je $A \subset [0,\infty)$ zatvoren i $\{B(t)\colon\ t \geqslant 0\}$ d-dimenzionalno Brownovo gibanje. Tada, gotovo sigurno, vrijedi:*

$$\dim B(A) = (2\dim A) \wedge d.$$

Dokaz. Gornju ogradu daje Korolar 3.2.15 pa je potrebno još provjeriti donju ogradu. Uzmimo $\alpha < \dim A \wedge (d/2)$. Specijalno, $\alpha < \dim A$ pa iz Teorema 3.5.4 slijedi da je $\mathrm{Cap}_\alpha(A) > 0$, odnosno da postoji Borelova vjerojatnosna mjera μ na A takva da je $I_\alpha(\mu) < \infty$. Definirajmo mjeru $\tilde{\mu}$ na $\mathbb{R}^d$ s

$$\tilde{\mu}(D) = \mu\left(\{t \geqslant 0\colon\ B(t) \in D\}\right), \text{ za sve Borelove skupove } D \subset \mathbb{R}^d.$$

Slično kao prije, transformacija integrala po slici mjere daje

$$\mathbb{E}\left[I_{2\alpha}(\tilde{\mu})\right] = \mathbb{E}\left[\iint \frac{d\tilde{\mu}(x)\, d\tilde{\mu}(y)}{|x-y|^{2\alpha}}\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{d\mu(t)\, d\mu(s)}{|B(t)-B(s)|^{2\alpha}}\right].$$

Uočimo da $|t-s|^{-1/2}|B(t)-B(s)|$ ima istu distribuciju kao i $|Z|$, gdje je Z d-dimenzionalni jedinični normalni slučajni vektor. Budući da vrijedi $2\alpha < d$, imamo

$$\mathbb{E}\left[|Z|^{-2\alpha}\right] = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} |y|^{-2\alpha} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy < \infty.$$

Iz činjenice da je $\mathbb{E}\left[|Z|^{-2\alpha}\right] = |t-s|^\alpha \mathbb{E}\left[|B(t)-B(s)|^{-2\alpha}\right]$ i Fubinijevog teorema slijedi

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[I_{2\alpha}(\tilde{\mu})\right] &= \int_0^\infty \int_0^\infty \mathbb{E}\left[|B(t)-B(s)|^{-2\alpha}\right] d\mu(t)\, d\mu(s) \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty \mathbb{E}\left[|Z|^{-2\alpha}\right] \frac{d\mu(t)\, d\mu(s)}{|t-s|^\alpha} \\
&= \mathbb{E}\left[|Z|^{-2\alpha}\right] \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{d\mu(t)\, d\mu(s)}{|t-s|^\alpha} \\
&\leqslant \mathbb{E}\left[|Z|^{-2\alpha}\right] I_\alpha(\mu) < \infty.
\end{aligned}$$

Dakle, $\mathbb{E}\left[I_{2\alpha}(\tilde{\mu})\right] < \infty$ pa je $I_{2\alpha}(\tilde{\mu}) < \infty$, gotovo sigurno. Uočimo da nosač od $\tilde{\mu}$ sadrži $B(a)$ jer nosač od μ sadrži A. Iz Teorema 3.4.2 slijedi da je $\dim B(A) \geqslant 2\alpha$, gotovo sigurno. Puštajući $\alpha \nearrow \dim A \wedge (d/2)$ slijedi $\dim B(A) \geqslant 2(\dim A \wedge (d/2)) = 2 \dim A \wedge d$, gotovo sigurno, čime smo dokazali teorem. □

Napomena 3.5.6. *Iz dokaza Teorema 3.5.5 slijedi da* $\mathrm{Cap}_\alpha(A) > 0$ *povlači* $\mathrm{Cap}_{2\alpha}(B(A)) > 0$. *Vrijedi i obrat ove tvrdnje.*

Napomena 3.5.7. *Tvrdnju McKeanovog teorema moguće je poboljšati i dokazati da za d-dimenzionalno Brownovo gibanje, gdje je* $d \geqslant 2$, *i proizvoljan skup* $A \subset [0,\infty)$, *vrijedi* $\dim B(A) = 2\dim A$. *Ovo je tvrdnja tzv. Kaufmanovog teorema. Uočimo da je* $d \geqslant 2$ *nužan uvjet u Kaufmanovom teoremu. Naime, pokazali smo da skup nultočki jednodimenzionalnog Brownova gibanja ima dimenziju* $\frac{1}{2}$, *dok je njegova slika jedna točka (dakle skup dimenzije 0).*

Bibliografija

[1] *Constructing Measures*, `http://www.uio.no/studier/emner/matnat/math/MAT2400/v13/mathanalch6.pdf`.

[2] P. Mörters i Y. Peres, *Brownian Motion*, Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

[3] M. Adams i V. Guillemin, *Measure Theory and Probability*, Birkhäuser, Boston/Basel/Berlin, 1996.

[4] N. Sarapa, *Teorija vjerojatnosti*, Školska knjiga, Zagreb, 2002.

[5] Z. Vondraček, *Slučajni procesi*, `http://web.math.pmf.unizg.hr/~vondra/sp14-predavanja.html`.

[6] J. F. C. Kingman, *Completely Random Measures*, `http://msp.org/pjm/1967/21-1/pjm-v21-n1-p06-p.pdf`.

[7] R. L. Schillin i L. Partzsch, *Brownian Motion: An Introduction to Stochastic Processes*, De Gruyter, Berlin/Boston, 2014.

[8] T. Körner, *Metric and Topological Spaces*, `https://www.dpmms.cam.ac.uk/~twk/Top.pdf`.

[9] S. Sethuraman, *Some Measure Theory*, `http://math.arizona.edu/~sethuram/563/measuretheory.pdf`.

Sažetak

Cilj ovog rada je bio istražiti obilježja trajektorija Brownova gibanja pomoću tehnika koje koriste Hausdorffovu dimenziju. Pokazali smo da Brownovo gibanje gotovo sigurno nisu nigdje diferencijabilne te da je za $\alpha < 1/2$ svugdje lokalno α-Hölder neprekidno. Jedno od zanimljivih svojstava planarnog Brownova gibanja je to da se Brownovo gibanje s vjerojatnošću jedan vraća u okolinu iz koje je krenulo, odnosno da svaku okolinu posjećuje beskonačno mnogo puta. Spomenuli smo i važnu klasu slučajnih procesa - Markovljeve procese. U radu smo također promatrali razne skupove izvedene iz Brownova gibanja poput skupa nultočki, skupa lokalnih maksimuma i skupa rekorda, pri čemu se ključnim pokazala činjenica da Brownovo gibanje zadovoljava jako Markovljevo svojstvo. Rezultati koje smo dobili pokazuju da, iako su trajektorije Brownova gibanja gotovo sigurno neprekidne, skup nultočki je beskonačan i bez izoliranih točaka. Osim toga, u slučaju linearnoga Brownova gibanja vidjeli smo da je to, kao i skup rekorda, fraktalni skup Hausdorffove dimenzije 1/2. Također, pokazali smo da je dimenzija grafa linearnoga Brownova gibanja jednaka 3/2, a u slučaju višedimenzionalnoga Brownova gibanja dimenzije grafa i slike jednake su i iznose 2. Na kraju rada dokazali smo dva klasična teorema iz područja koje se bavi Hausdorffovom dimenzijom, Frostmanovu lemu i McKeanov teorem. McKeanov teorem pokazuje da je dimenzija skupa na koji se preslikava Brownovo gibanje dva puta veća od dimenzije početnog skupa.

Summary

The aim of this thesis was to explore the nature of Brownian paths by applying techniques that calculate the Hausdorff dimension. We have shown that, almost surely, Brownian motion is nowhere differentiable and, for any $\alpha < 1/2$, everywhere locally α-Hölder continuous. We have also seen that planar Brownian motion is neighbourhood recurrent, that is, it visits every neighbourhood in the plane infintely often. In the thesis we have also studied various processes and sets derived from Brownian motion, such as the zero set, the set of all record times and the set of times where the local maxima are attained. Here, we made great use of the strong Markov property. The results show that, despite the fact that the sample paths of Brownian motion are almost surely continuous, the zero set is infinite and with no isolated points. Moreover, in the case of linear Brownian motion we have seen that the zero set is an example of a fractal set of Hausdorff dimension 1/2, just like the set of record times. Further, we have shown that the graph of one dimensional Brownian motion has dimension 3/2, and the graph and range of d-dimensional Brownian motion, for $d \geqslant 2$, both have dimension 2. Finally, proves of two classical results of the Hausdorff dimension theory were presented: Frostman's lemma and McKean's theorem. The result of McKean's theorem shows that the image of a set under a Brownian motion has twice the dimension of the original set.

Životopis

Rođena sam 31. listopada 1991. godine u Zagrebu, gdje sam pohađala Osnovnu školu Jabukovac i 5. prirodoslovno-matematičku gimnaziju. Nakon položene mature 2010. godine upisujem preddiplomski studij matematike na Matematičkom odjelu Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu. Treću godinu preddiplomskog studija provela sam na Sveučilištu u Uppsali u Švedskoj u okviru međunarodne studentske razmjene Erasmus. 2013. godine završila sam preddiplomski studij te stekla titulu prvostupnice matematike. Iste godine upisujem diplomski studij Financijske i poslovne matematike. Tijekom školovanja sudjelovala sam na brojnim natjecanjima i drugim izvannastavnim aktivnostima. U zagrebačkoj 5. gimnaziji vodila sam grupu za pripremu učenika za natjecanja iz matematike. Sudjelovala sam u radu studentske udruge Mladi nadareni matematičari Marin Getaldić te održala nekoliko predavanja. Na fakultetu sam bila demonstrator iz kolegija Matematička analiza 1 i 2. Za svoj rad sam tijekom školovanja dobila mnoge nagrade i priznanja.