Kvaziaritmetičke sredine

Lovrić, Sanja

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Sanja Lovrić

KVAZIARITMETIČKE SREDINE

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Zlatko Pavić
Suvoditelj rada:
prof. dr. sc. Sanja Varošanec

Zagreb, 2016.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Rad je podijeljen u četiri poglavlja. Prvo poglavlje se bavi pojmom konveksnosti i osnova je za daljnji rad. Drugo poglavlje predstavlja Jensenovu i Hermite-Hadamardovu nejednakost koje su glavni oslonac u uspoređivanju matematičkih sredina. Treće poglavlje je uvod u teoriju matematičkih sredina. Četvrto poglavlje uz pomoć konveksnih funkcija i spomenutih nejednakosti razrađuje kvaziaritmetičke sredine, a posebno se bavi potencijskim i logaritamskim sredinama.

Prvo poglavlje predstavlja uvod u konveksnu analizu. Konveksan skup je definiran kao dio linearnog prostora uz pomoć pojma konveksne kombinacije. Konveksna funkcija je definirana na konveksnom skupu. Analitička svojstva konveksne funkcije su promatrana na intervalima realnih brojeva. Tu je prvo naglašena osnovna veza između konveksnosti funkcije i nagiba njenih tetiva. Ta je veza iskorištena tako što su dokazana pogodna svojstva konveksne funkcije, neprekinutost na otvorenom intervalu i postojanje jednostranih derivacija. Proučena je karakterizacija konveksnih funkcija uz pomoć prve i druge derivacije. Na kraju poglavlja su navedeni najvažniji primjeri konveksnih i konkavnih funkcija.

Drugo poglavlje je posvećeno Jensenovoj i Hermite-Hadamardovoj nejednakosti. Obrađen je diskretni i integralni oblik Jensenove nejednakosti na intervalu realnih brojeva. Diskretni oblik je dokazan geometrijski uz pomoć konveksnog poligona koji je upisan grafu promatrane konveksne krivulje. Graničnim prijelazom iz diskretnog oblika je dobiven integralni. Hermite-Hadamardova nejednakost je izvedena uz pomoć integralnog oblika Jensenove nejednakosti i definicijske nejednadžbe konveksnosti. Ova nejednakost je još izvedena uz pomoć potpornog pravca i sekante. Na kraju poglavlja, za konveksne funkcije na segmentu su izvođene nejednakosti koje obuhvaćaju Jensenovu i Hermite-Hadamardovu. U tom postupku su korištene konveksne kombinacije sa zajedničkim središtem.

Treće poglavlje obrađuje osnovne matematičke sredine. Navedene su definicije aritmetičke, geometrijske i harmonijske sredine uz isticanje konveksne kombinacije točaka. Taj pristup je iskorišten za poopćenje ovih triju osnovnih sredina. Uz pomoć diskretnog oblika Jensenove nejednakosti dokazana je nejednakost između poopćene harmonijske, geometrijske i aritmetičke sredine. Primjenom integrala na identičnu, recipročnu i logaritamsku funkciju uvedene su tri osnovne integralne sredine: aritmetička, identrička i logaritamska. Na kraju sekcije po veličini je poredano svih pet spomenutih sredina: harmonijska, geometrijska, logaritamska, identrička i aritmetička.

U četvrtom poglavlju se proučavaju kvaziaritmetičke sredine u diskretnom i integralnom obliku. Tako su diskretna i integralna kvaziaritmetička sredina definirane za par pozitivniih realnih brojeva s obzirom na strogo monotonu neprekinutu funkciju. Iskazan je i dokazan osnovni teorem koji govori o poretku kvaziaritmetičkih sredina. U dokazu je korištena Jensenova nejednakost. Potencijske sredine su uvedene kao poseban slučaj diskretnih, a logaritamske kao poseban slučaj integralnih kvaziaritmetičkih sredina. U pripremi definicije ovih sredina izračunate su sve potrebne granične vrijednosti. Dokazani su teoremi koji govore o strogoj monotonosti potencijskih i logaritamskih sredina. Na kraju poglavlja je dokazan niz nejednakosti koji sadrži potencijske i logaritamske sredine.

Što se tiče povijesnog razvoja, teorija sredina ima svoje korijene u radu Pitagorejaca koji su uveli harmonijsku, geometrijsku i aritmetičku sredinu u okviru teorija glazbe i aritmetike. Kasnije, Pappus uvodi sedam drugih sredina i daje poznati geometrijski dokaz slavne nejednakosti između harmonijske, geometrijske i aritmetičke sredina.

Jedan od prvih radova u kojemu je sistematizirana većina do tada poznatog o sredinama je *Means and their inequalities* autora P. S. Bullen, D. S. Mitrinović i P. M. Vasić. U ovom djelu cijelo poglavlje posvećeno je kvaziaritmetičkim sredinama.

Kvaziaritmetička sredina se prvi put spominje početkom dvadesetog stoljeća. Naziva se još i Kolmogorovljeva sredina po ruskom matematičaku Andreyu Kolmogorovu. Do tada se malo znalo o kvaziaritmetičkim sredinama, a *Means and their inequalities* je prvi rad u kojemu se ovo područje detaljno proučava i služi kao polaznica ostalim istraživanjima kvaziaritmetičkih sredina.

Zahvaljujem se mentorima za pomoć pri pisanju ovog diplomskog rada.

Poglavlje 1

Konveksni skupovi i funkcije

Linearni (vektorski) prostor je najvažnija matematička struktura od svog postanka (G. Peano 1888.) do danas, a koristi se kao podloga mnogih matematičkih teorija. Tako se i konveksna analiza razvija u okviru linearnog prostora. Njen središnji dio proučava konveksne funkcije zadane na konveksnim skupovima.

Prvi cilj ovog poglavlja je uvođenje pojma konveksnog skupa kao dijela cjeline linearnog prostora. U tom se smislu naglašava pojam konveksne kombinacije. Drugi cilj je uvođenje pojma konveksne funkcije na konveksnom skupu. Kao treći cilj nameće se proučavanje analitičkih svojstava konveksne funkcije na intervalima realnih brojeva.

1.1 Konveksni skupovi

Pojmove konveksnosti i konkavnosti u matematiku je uveo Leibniz 1684. pripremajući svoj diferencijalni račun na krivuljama. Pridjev konveksan potječe od latinskog pridjeva convexus, hrvatski ispupčen ili izbočen.

Linearne, afine i konveksne kombinacije

Neka je $\mathbb{X}$ linearni prostor nad poljem realnih brojeva $\mathbb{R}$. Osnovni pojam koji povezuje točke (vektore) prostora $\mathbb{X}$ i koeficijente (skalare) polja $\mathbb{R}$ se zove linearna kombinacija, a formalno se definira za n-torke točaka i koeficijenata.

Definicija 1.1.1. *Prikaz n točaka $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{X}$ i n koeficijenata $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ u vidu zbroja*

$$\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n \tag{1.1}$$

se zove n-člana linearna kombinacija. Ako koeficijenti λ_i kombinacije u (1.1) *zadovoljavaju uvjet*

$$\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1, \tag{1.2}$$

onda se pripadna kombinacija zove afina. Ako su koeficijenti λ_i kombinacije u (1.1) *nenegativni i ako zadovoljavaju uvjet u* (1.2)*, onda se pripadna kombinacija zove konveksna.*

Sama točka $x = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n$ se zove središte ili centar kombinacije.

Vezano za konveksnu kombinaciju, iz gornje definicije proizlazi da svi njeni koeficijenti λ_i pripadaju jediničnom intervalu realnih brojeva $[0, 1]$, te da njihov zbroj iznosi 1.

Svaka se kombinacija može formalno svesti na dotičnu dvočlanu. Pretpostavimo na primjer da je kombinacija u (1.1) konveksna. Ako je $n = 1$, možemo pisati $x_1 = x_1 + 0x_2$. Ako je $n \geq 2$, onda je bar jedan koeficijent λ_i različit od 1. Uz pretpostavku da je $\lambda_1 \neq 1$, možemo se poslužiti prikazom

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n = \lambda_1 x_1 + (1 - \lambda_1)\left(\frac{\lambda_2}{1 - \lambda_1} x_2 + \ldots + \frac{\lambda_n}{1 - \lambda_1} x_n\right). \tag{1.3}$$

Uzimanjem koeficijenta $\overline{\lambda}_1 = 1 - \lambda_1$ i točke

$$\overline{x}_1 = \frac{\lambda_2}{1 - \lambda_1} x_2 + \ldots + \frac{\lambda_n}{1 - \lambda_1} x_n \tag{1.4}$$

dobivamo dvočlanu konveksnu kombinaciju $\lambda_1 x_1 + \overline{\lambda}_1 \overline{x}_1$ koja se podudara sa zadanom. Pri tome je desna strana izraza za $\overline{x}_1$ u gornjoj formuli također konveksna kombinacija, sastavljena od $n - 1$ članova. Zaista, svi njeni koeficijenati $\lambda_2/(1 - \lambda_1), \ldots, \lambda_n/(1 - \lambda_1)$ su nenegativni, i njihov je zbroj

$$\frac{\lambda_2}{1 - \lambda_1} + \ldots + \frac{\lambda_n}{1 - \lambda_1} = \frac{\lambda_2 + \ldots + \lambda_n}{1 - \lambda_1} = 1 \tag{1.5}$$

jer je $\lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1 - \lambda_1$.

Isto vrijedi za afinu kombinaciju, a kod n-člane linearne kombinacije možemo $n-1$ članova staviti u zagradu.

Podsekciju završavamo definicijom koja obuhvaća tri osnovne vrste skupova u linearnom prostoru.

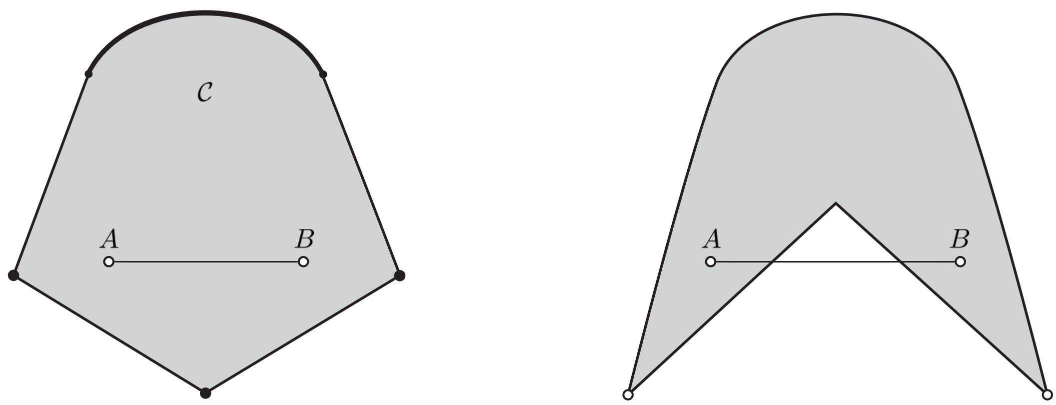
Definicija 1.1.2. *Skup $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{X}$ je linearan (afin, konveksan) ako zadovoljava inkluziju*

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in \mathcal{S} \tag{1.6}$$

za sve linearne (afine, konveksne) kombinacije $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ svih parova točaka $x_1, x_2 \in \mathcal{S}$.

Uzimajući u obzir mogućnost svođenja na dvočlane kombinacije, prema gornjoj definiciji linearan (afin, konveksan) skup sadrži svaku n-članu linearanu (afinu, konveksnu) kombinaciju svojih točaka.

Geometrijska predodžba konveksnog i nekonveksnog skupa u ravnini se može vidjeti na Slici 1.1.



Slika 1.1: Konveksan i nekonveksan skup

Linearne, afine i konveksne ljuske

Ljuske skupa $\mathcal{S}$ u linearnom prostoru $\mathbb{X}$ nad poljem $\mathbb{R}$ se definiraju s ciljem da se obuhvati najmanji linearani (afini, konveksni) skup koji sadrži $\mathcal{S}$. U definiciji se koriste dvočlane kombinacije.

Linearna ljuska skupa $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{X}$ se definira kao skup

$$\text{linh}\mathcal{S} = \big\{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 : x_1, x_2 \in \mathcal{S},\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\big\}, \tag{1.7}$$

afina ljuska kao skup

$$\text{affh}\mathcal{S} = \big\{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 : x_1, x_2 \in \mathcal{S},\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1\big\}, \tag{1.8}$$

i konveksna ljuska kao skup

$$\text{conh}\mathcal{S} = \big\{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 : x_1, x_2 \in \mathcal{S},\ \lambda_1, \lambda_2 \geq 0,\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1\big\}. \tag{1.9}$$

Pretpostavimo da je $\mathcal{S} = \{x_1, x_2\}$ dvočlani skup. Geometrijska predodžba linearne ljuske skupa $\mathcal{S}$ je ravnina obuhvaćena (razapeta) točkama x_1 i x_2. Afina ljuska skupa

$\mathcal{S}$ se može zamišljati kao pravac koji prolazi točkama x_1 i x_2, a konveksna ljuska kao dužina s krajevima x_1 i x_2.

Konveksnu ljusku tročlanog skupa $\mathcal{S} = \{x_1, x_2, x_3\}$ čije točke x_1, x_2 i x_3 nisu kolinearne, možemo predočiti kao trokut s vrhovima x_1, x_2 i x_3. U toj se predodžbi možemo osloniti na prikaze konveksnih kombinacija prema formuli (1.3).

1.2 Konveksne funkcije

Afine i konveksne funkcije

Definicija 1.2.1. *Neka je $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{X}$ afin skup. Funkcija $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ je afina ako zadovoljava jednakost*

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \tag{1.10}$$

za sve afine kombinacije $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ svih parova točaka $x_1, x_2 \in \mathcal{A}$.

Svojstvo afinosti u formuli (1.10) se proteže na sve n-člane afine kombinacije.

Korolar 1.2.2. *Neka je $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{X}$ afin skup i neka je $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ afina kombinacija točaka $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{A}$. Svaka afina funkcija $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ zadovoljava jednakost*

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i). \tag{1.11}$$

Dokaz. Ako je $n = 1$, gornja jednakost trivijalno vrijedi u obliku $f(x_1) = f(x_1)$. U nastavku dokaz provodimo indukcijom uz pretpostavku da je broj točaka $n \geq 2$.

Baza indukcije za $n = 2$ vrijedi po definicijskoj formuli (1.10).

Korak idukcije dokazujemo uz pretpostavku da jednakost u formuli (1.11) vrijedi za sve afine kombinacije s brojem članova između 2 i $n - 1$. Uzmimo n-članu afinu kombinaciju $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$, pretpostavimo da je $\lambda_1 \neq 1$, pa kao u formulama (1.3) i (1.4) izrazimo

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = \lambda_1 x_1 + (1 - \lambda_1) \sum_{j=2}^n \frac{\lambda_j}{1 - \lambda_1} x_j, \tag{1.12}$$

uzmemo točku

$$\overline{x}_1 = \sum_{j=2}^n \frac{\lambda_j}{1 - \lambda_1} x_j \tag{1.13}$$

i koeficijent $\overline{\lambda}_1 = 1 - \lambda_1$. Desna strana izraza za $\overline{x}_1$ je afina kombinacija s $n-1$ članova. Primjenjujući prvo afinost funkcije f na dvočlanu afinu kombinaciju $\lambda_1 x_1 + \overline{\lambda}_1 \overline{x}_1$, a zatim induktivnu pretpostavku na $(n-1)$-članu afinu kombinaciju u formuli (1.13), dobivamo

$$f(\lambda_1 x_1 + \overline{\lambda}_1 \overline{x}_1) = \lambda_1 f(x_1) + \overline{\lambda}_1 f(\overline{x}_1) = \lambda_1 f(x_1) + (1-\lambda_1) \sum_{j=2}^{n} \frac{\lambda_j}{1-\lambda_1} f(x_j) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i),$$

čime dokazujemo korak indukcije. □

Sljedeća lema govori o jednadžbi afine funkcije f na prostoru realnih brojeva $\mathbb{X} = \mathbb{R}$.

Lema 1.2.3. *Ako je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ afina funkcija, onda postoje jedinstveni koeficijenti $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ tako da jednakost*

$$f(x) = \kappa x + \lambda \tag{1.14}$$

vrijedi za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Dokaz. Uzmimo par različitih točaka $a, b \in \mathbb{R}$. Svaka točka $x \in \mathbb{R}$ se može zapisati kao afina kombinacija u vidu izraza

$$x = \frac{b-x}{b-a} a + \frac{x-a}{b-a} b, \tag{1.15}$$

dakle s koeficijentima

$$\alpha = \alpha(x; a, b) = \frac{b-x}{b-a}, \quad \beta = \beta(x; a, b) = \frac{x-a}{b-a}. \tag{1.16}$$

Primjenom afinosti funkcije f na afinu kombinaciju u formuli (1.15) slijedi jednadžba pravca koji prolazi točkama $A(a, f(a))$ i $B(b, f(b))$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{b-x}{b-a} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b) \\ &= \frac{f(b)-f(a)}{b-a} x + \frac{bf(a) - af(b)}{b-a}. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Odabirom koeficijenata

$$\kappa = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}, \quad \lambda = \frac{bf(a)-af(b)}{b-a} \tag{1.18}$$

jednadžba u formuli (1.17) prelazi u jednadžbu u formuli (1.14). Nije teško dokazati da izrazi u formuli (1.18) ostaju nepromijenjeni ako se uzme bilo koji drugi par točaka $c \neq d$. □

Definicija 1.2.4. *Neka je $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{X}$ konveksan skup. Funkcija $f : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ je konveksna ako zadovoljava nejednakost*

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \tag{1.19}$$

za sve konveksne kombinacije $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ svih parova točaka $x_1, x_2 \in \mathcal{C}$.

Funkcija f je strogo konveksna ako zadovoljava strogu nejednakost u formuli (1.19) za sve konveksne kombinacije $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ svih parova različitih točaka $x_1, x_2 \in \mathcal{C}$ s koeficijentima $\lambda_1, \lambda_2 > 0$.

Konveksnost funkcije se može definirati kao u sljedećoj napomeni, ističući samo jedan koeficijent.

Napomena 1.2.5. *Neka je $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{X}$ konveksan skup. Funkcija $f : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ je konveksna ako zadovoljava nejednakost*

$$f\big((1-\lambda)x + \lambda y\big) \leq (1-\lambda) f(x) + \lambda f(y) \tag{1.20}$$

za svaki par točaka $x, y \in \mathcal{C}$ i svaki koeficijent $\lambda \in [0,1]$.

U slučajevima $x = y$, $\lambda = 0$ i $\lambda = 1$ gornja nejednakost vrijedi trivijalno, odnosno vrijedi za svaku funkciju f na skupu $\mathcal{C}$. Zato se funkcija $f : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ može smatrati konveksnom ako zadovoljava nejednakost u formuli (1.20) za svaki par različitih točaka $x, y \in \mathcal{C}$ i svaki koeficijent $\lambda \in (0,1)$.

Korolar 1.2.6. *Neka je $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{X}$ konveksan skup i neka je $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ konveksna kombinacija točaka $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{C}$. Svaka konveksna funkcija $f : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ zadovoljava nejednakost*

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i). \tag{1.21}$$

Nejednakost u formuli (1.21) je dobro poznati diskretni oblik Jensenove nejednakosti, vidi [6]. Jensen je dokazao nejednakost uz pomoć matematičke indukcije. Mi smo sličan dokaz primijenili u Korolaru 1.2.2.

Konkavne funkcije

Kao što se uz pozitivan broj r veže njegov negativan par $-r$, tako se uz konveksnu funkciju f veže konkavna funkcija $-f$.

Definicija 1.2.7. *Neka je $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{X}$ konveksan skup. Funkcija $f : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ je konkavna ako je funkcija $-f$ konveksna.*

Funkcija f je strogo konkavna ako je funkcija $-f$ strogo konveksna.

Sada se afinost javlja kao granični slučaj konveksnosti i konkavnosti. Funkcija je afina ako i samo ako je istovremeno konveksna i konkavna.

Što se tiče formule (1.19) vrijedi sljedeće. Konveksna funkcija f zadovoljava formulu sa znakom nejednakosti $\leq$. Konkavna funkcija f zadovoljava formulu sa znakom obrnute nejednakosti $\geq$. Afina funkcija f zadovoljava formulu sa znakom jednakosti $=$.

1.3 Analitička svojstva konveksne funkcije

U ovoj sekciji ćemo utvrditi osnovna analitička svojstva konveksne funkcije na intervalima realnih brojeva, posebno otvorenom intervalu i omeđenom zatvorenom intervalu. U sekciji i većem dijelu rada ćemo koristiti interval $[a, b] \subset \mathbb{R}$ pretpostavljajući da je $a < b$.

Interval realnih brojeva ćemo označavati s I i pretpostavljati da je njegova unutrašnjost (interior) I^o neprazan skup.

U teoremu što slijedi navest ćemo nekoliko karakterizacija konveksne funkcije na intervalu I koje se odnose na trojke različitih točaka iz I.

Teorem 1.3.1. *Za funkciju $f : I \to \mathbb{R}$ sljedeće tvrdnje su ekvivalentne.*

(i) Funkcija f zadovoljava nejednakost

$$f\big((1-\lambda)x + \lambda z\big) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(z) \tag{1.22}$$

za svaki par različitih točaka $x, z \in I$ i svaki koeficijent $\lambda \in (0, 1)$.

(ii) Funkcija f zadovoljava nejednakost

$$f(y) \leq \frac{z-y}{z-x}f(x) + \frac{y-x}{z-x}f(z) \tag{1.23}$$

za svaku trojku različitih točaka $x, y, z \in I$ u kojoj je $y \in \operatorname{conh}\{x, z\}$.

(iii) Funkcija f zadovoljava nejednakost

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y} \tag{1.24}$$

za svaku trojku točaka $x, y, z \in I$ s poretkom $x < y < z$.

(iv) Funkcija f zadovoljava nejednakost

$$\begin{vmatrix} x & f(x) & 1 \\ y & f(y) & 1 \\ z & f(z) & 1 \end{vmatrix} \geq 0 \tag{1.25}$$

za svaku trojku točaka $x, y, z \in I$ s poretkom $x < y < z$.

Dokaz. Iz tvrdnje (i) slijedi tvrdnja (ii) primjenom formule (1.22) na par točaka x, z i koeficijent $\lambda = (y - x)/(z - x)$, s obzirom na odabranu trojku različitih točaka $x, y, z \in I$ u kojoj je $y \in \operatorname{conh}\{x, z\}$. Tu zapravo koristimo konveksnu kombinaciju točaka x i z u vidu prikaza

$$y = \frac{z - y}{z - x} x + \frac{y - x}{z - x} z.$$

Iz tvrdnje (ii) slijedi tvrdnja (iii) prevođenjem formule (1.23) u formulu (1.24) za odabranu trojku točaka x, y, z s poretkom $x < y < z$.

Iz tvrdnje (iii) slijedi tvrdnja (iv) množenjem formule (1.24) s pozitivnim produktom $(y - x)(z - y)$, te sređivanjem članova nakon čega proizlazi nejednakost

$$x[f(y) - f(z)] - y[f(x) - f(z)] + z[f(x) - f(y)] \geq 0$$

koja se uz pomoć determinante može izraziti formulom (1.25).

Iz tvrdnje (iv) slijedi tvrdnja (i) nakon što se promotre dva slučaja za odabrani par različitih točaka $x, z \in I$, odabrani koeficijent $\lambda \in (0, 1)$ i pripadnu konveksnu kombinaciju

$$y = (1 - \lambda)x + \lambda z.$$

U slučaju $x < z$ na poredak $x < y < z$ primijenimo formulu (1.25) tako da umjesto y uvrstimo $(1 - \lambda)x + \lambda z$, pa razvojem detrerminante i sređivanjem članova dobijemo

$$(z - x)f(y) \leq (1 - \lambda)(z - x)f(x) + \lambda(z - x)f(z),$$

što nakon dijeljenja sa $z - x$ daje nejednakost u formuli (1.22).

U slučaju $x > z$ na poredak $z < y < x$ primijenimo formulu (1.25) tako da umjesto y uvrstimo $(1 - \lambda)x + \lambda z$, nakon čega razvojem detrerminante, sređivanjem članova i dijeljenjem s $x - z$ ponovo dobijemo nejednakost u formuli (1.22). □

Uvažavajući Napomenu 1.2.5, svaka od tvrdnji $(i) - (iv)$ Teorema 1.3.1 može predstavljati definiciju konveksnosti funkcije f na intervalu I.

Sljedeći korolar će nam poslužiti kao oslonac za utvrđivanje nekih bitnih svojstva konveksne funkcije na intervalu realnih brojeva.

Korolar 1.3.2. *Neka su $x, y, z \in I$ točke koje zadovovoljavaju poredak $x < y < z$. Svaka konveksna funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ zadovoljava dvostruku nejednakost*

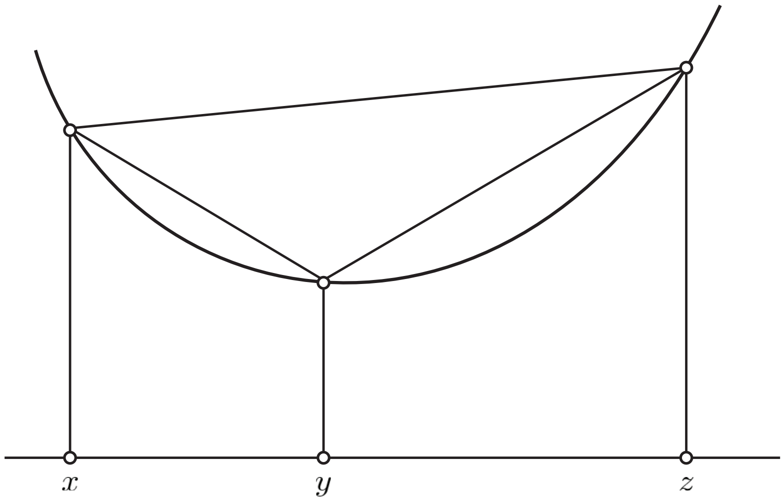
$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}. \tag{1.26}$$

Dokaz. Desna strana jednakosti

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} = \frac{y - x}{z - x}\frac{f(y) - f(x)}{y - x} + \frac{z - y}{z - x}\frac{f(z) - f(y)}{z - y} \tag{1.27}$$

je konveksna kombinacija točaka $[f(y) - f(x)]/(y - x)$ i $[f(z) - f(y)]/(z - y)$ s koeficijentima $\alpha = (y - x)/(z - x)$ i $\beta = (z - y)/(z - x)$. Dvostruka nejednakost u formuli (1.26) slijedi povezivanjem nejednakosti u formuli (1.24) s gornjom konveksnom kombinacijom. □

Tri nagiba vezana uz tri točke x, y i z u formuli (1.26) su predočena na Slici 1.2.



Slika 1.2: Tri točke na konveksnoj krivulji

Za funkciju $f : I \to \mathbb{R}$ i točku $c \in I^o$ definiramo funkciju nagiba $f_c : I \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$ pomoću formule

$$f_c(x) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}. \tag{1.28}$$

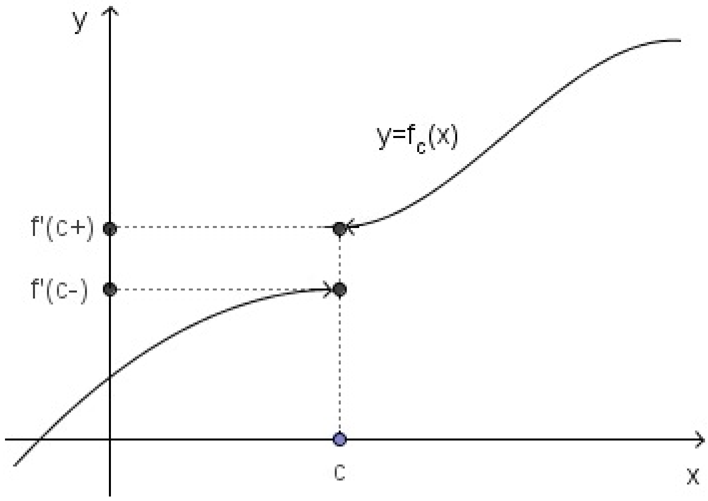
Graf funkcije nagiba je predočen je na Slici 1.3.

Korolar 1.3.3. *Neka je $c \in I^o$ točka. Ako je funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ konveksna, onda je funkcija $f_c : I \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$ nepadajuća.*

Dokaz. Uzmimo točke $x, z \in I \setminus \{c\}$ s poretkom $x < z$ i promotrimo tri moguća slučaja.

Ako je $x < c < z$, onda uvrštavanjem $y = c$ u formulu (1.25) dobivamo nejednakost $f_c(x) \leq f_c(z)$. Ova se nejednakost dokaže na sličan način za slučajeve $x < z < c$ i $c < x < z$ uz pomoć formule (1.26). □

Ako je funkcija f strogo konveksna, onda je funkcija f_c strogo rastuća.



Slika 1.3: Graf funkcije nagiba

Korolar 1.3.4. *Svaka konveksna funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ ima lijevu i desnu derivaciju u bilo kojoj točki $c \in I^o$. Pri tome je*

$$f'(c-) \leq f'(c+). \tag{1.29}$$

Dokaz. Uzmimo $x < c < z$. Prema Korolaru 1.3.3 nepadajuća funkcija f_c zadovoljava nejednakost

$$f_c(x) \leq f_c(z).$$

Broj $f_c(z)$ je gornja međa za funkciju f_c lijevo od točke c, dok je broj $f_c(x)$ donja međa za funkciju f_c desno od točke c. Oslanjajući se na monotonost funkcije f_c možemo pustiti da x teži prema c s lijeve strane i da z teži prema c s desne strane,

$$f'(c-) = \lim_{x \to c-} f_c(x) \leq \lim_{z \to c+} f_c(z) = f'(c+), \tag{1.30}$$

pa tako dobiti jednostrane derivacije funkcije f u točki c kao i njihov poredak. □

Korolar 1.3.5. *Konveksna funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ je neprekinuta na interioru I^o.*

Dokaz. Neka je $c \in I^o$, te neka su $x, z \in I$ tako da je $x < c < z$. Kada u formulu (1.27) uvrstimo $y = c$, tada dobivamo

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} = \frac{c - x}{z - x}\frac{f(x) - f(c)}{x - c} + \frac{z - c}{z - x}\frac{f(z) - f(c)}{z - c}.$$

Budući da desna strana ove jednakosti konvergira kada x teži prema c s lijeve strane, isto mora vrijediti i za njenu lijevu stranu. Puštajući da $x \to c-$, prvo dobivamo

$$\frac{f(z) - \lim_{x\to c-} f(x)}{z - c} = 0f'(c-) + \frac{f(z) - f(c)}{z - c},$$

a odatle $\lim_{x\to c-} f(x) = f(c)$ što je dokaz da je funkcija f neprekinuta u točki c s lijeve strane. Na isti se način dokazuje neprekinutost s desne strane puštajući da $z \to c+$. $\square$

Uz konveksnu funkciju $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ se vežu dva pravca. Prvi je sekanta koja prolazi točkama grafa $A(a, f(a))$ and $B(b, f(b))$, pa njena jednadžba glasi

$$f^{\text{sec}}_{\{a,b\}}(x) = \frac{b - x}{b - a}f(a) + \frac{x - a}{b - a}f(b). \tag{1.31}$$

Drugi je potporni pravac (kotangenta) koji prolazi točkom grafa $C(c, f(c))$ s koeficijentom nagiba $\lambda \in [f'(c-), f'(c+)]$, a njegova jednadžba glasi

$$f^{\text{sup}}_{\{c\}}(x) = \lambda(x - c) + f(c). \tag{1.32}$$

Sekanta i potporni pravac su prikazani na Slici 1.4.

Nejednakost koja će biti iskazana u sljedećem teoremu je ključna za naš pristup mnogim nejednakostima promatranim u ovom radu.

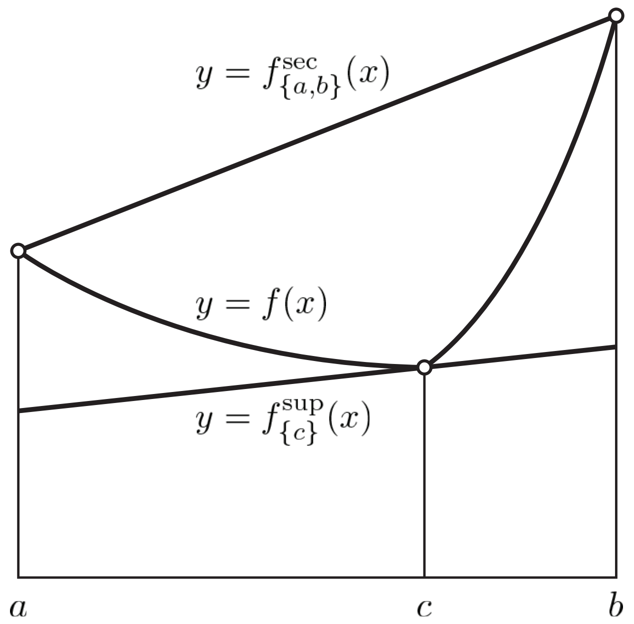
Teorem 1.3.6. *Neka je $c \in (a, b)$ točka. Svaka konveksna funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zadovoljava potporno-sekantnu nejednakost*

$$f^{sup}_{\{c\}}(x) \le f(x) \le f^{sec}_{\{a,b\}}(x) \tag{1.33}$$

za svaki $x \in [a, b]$.

Dokaz. Dokažimo prvo lijevu stranu nejednakostri u formuli (1.33). Neka su $x, c, z \in [a, b]$ točke koje zadovovoljavaju poredak $x < c < z$. Prema Korolaru 1.3.4 funkcija f zadovoljava niz nejednakosti

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \le f'(c-) \le f'(c+) \le \frac{f(z) - f(c)}{z - c},$$



Slika 1.4: Sekanta i potporni pravac konveksne krivulje

a iz njega slijedi

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq \lambda \leq \frac{f(z) - f(c)}{z - c}.$$

Iz lijeve strane gornje nejednakosti slijedi

$$f^{\text{sup}}_{\{c\}}(x) = \lambda(x - c) + f(c) \leq f(x)$$

za varijablu $x < c$. Iz desne strane slijedi isto to za varijablu $z > c$. U slučaju $x = c = z$ imamo $f^{\text{sup}}_{\{c\}}(c) = f(c)$.

Primjenom konveksnosti funkcije f na konveksnu kombinaciju

$$x = \frac{b - x}{b - a} a + \frac{x - a}{b - a} b$$

dobiva se

$$f(x) \leq \frac{b - x}{b - a} f(a) + \frac{x - a}{b - a} f(b) = f^{\text{sec}}_{\{a,b\}}(x),$$

to jest desna strana nejednakosti u formuli (1.33). □

Nejednakost između prva dva člana u formuli (1.33) ćemo zvati potporna nejednakost, a nejednakost između zadnja dva člana ćemo zvati sekantna nejednakost.

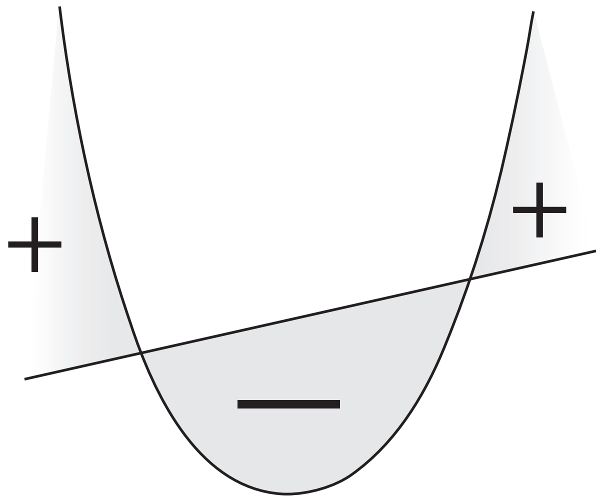
Korolar 1.3.7. *Neka je I interval koji sadrži segment $[a, b]$. Svaka konveksna funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ zadovoljava nejednakosti*

$$f(x) \leq f_{\{a,b\}}^{sec}(x), \quad x \in [a, b] \tag{1.34}$$

i

$$f_{\{a,b\}}^{sec}(x) \leq f(x), \quad x \in I \setminus (a, b). \tag{1.35}$$

Grafički koncept nejednakosti između konveksne funkcije i njene sekante je predočen na Slici 1.5.



Slika 1.5: Konveksna krivulja i njena sekanta

Sekanta $y = f_{\{a,b\}}^{\text{sec}}(x)$ i potporni pravac $y = f_{\{c\}}^{\text{sup}}(x)$ kao afine funkcije u sklopu formule (1.33) igraju veliku ulogu u formiranju i dokazivanju najvažnijih nejednakosti. U poglavljima što slijede, formulu (1.33) ćemo primijeniti više puta.

Neka je $[a, b]$ segment realnih brojeva s krajevima $a < b$. U primjeni Riemannovog integrala koristimo omeđenu i gotovo svuda neprekinutu funkciju $g : [a, b] \to \mathbb{R}$. Takve su na primjer monotone (nepadajuće ili nerastuće) funkcije na segmentu $[a, b]$. Prema Lebesgueovom kriteriju za Riemannovu integrabilnost omeđena funkcija $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ je integrabilna ako i samo ako je gotovo svuda neprekinuta.

Integralana aritmetička sredina omeđene integrabilne funkcije $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ je broj

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b g(x)\, dx. \tag{1.36}$$

Neka je $c = \inf_{x\in[a,b]} g(x)$ infimum, te neka je $d = \sup_{x\in[a,b]} g(x)$ supremum funkcije g. Integriranjem nejednakosti

$$c \le g(x) \le d \tag{1.37}$$

duž segmenta $[a,b]$ izlazi

$$(b-a)c \le \int_a^b g(x)\,dx \le (b-a)d, \tag{1.38}$$

pa dijeljenjem s $b-a$ proizlazi

$$c \le \frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)\,dx \le d. \tag{1.39}$$

Prema tome, integralana aritmetička sredina funkcije g se nalazi između njenog infimuma i supremuma. U slučaju nepadajuće funkcije g imamo $c = g(a)$ i $d = g(b)$, a u slučaju nerastuće obrnuto.

Lema 1.3.8. *Neka je $x_0 \in I$ točka i neka je $g : I \to \mathbb{R}$ nepadajuća funkcija. Funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ definirana pravilom*

$$f(x) = \int_{x_0}^x g(t)\,dt \tag{1.40}$$

je konveksna.

Dokaz. Uzmimo bilo koju trojku $x, y, z \in I$ s poretkom $x < y < z$. Konveksnost funkcije f potvrđuje nejednakost

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = \frac{\int_x^y g(t)\,dt}{y-x} \le g(y) \le \frac{\int_y^z g(t)\,dt}{z-y} = \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$$

koja vrijedi zato što je integralna aritmetička sredina funkcije g na segmentu $[x,y]$ manja ili jednaka od integralne aritmetičke sredine funkcije g na segmentu $[y,z]$. Naime, budući da funkcija g ne pada, vrijedi $\max_{t\in[x,y]} g(t) = g(y) = \min_{t\in[y,z]} g(t)$. $\square$

Jednadžba (1.40) je pravi izvor konveksnih funkcija. Dakle, integral bilo koje nepadajuće funkcije daje konveksnu funkciju.

Sekciju ćemo završiti karakterizacijama konveksnosti funkcije pomoću prve i druge derivacije. Pretpostavljat ćemo da je funkcija zadana na otvorenom intervalu.

Teorem 1.3.9. *Neka je I otvoren interval i neka je $f : I \to \mathbb{R}$ funkcija koja ima prvu derivaciju f'. Funkcija f je konveksna ako i samo ako je funkcija f' nepadajuća.*

Dokaz. Pretpostavimo da je funkcija f konveksna. Neka su $x, z \in I$ točke s poretkom $x < z$. Puštajući u formuli (1.25) da y teži prema x kod lijevog člana i da y teži prema z kod desnog člana, dobiva se $f'(x) \leq f'(z)$. Dakle, prva derivacija f' ne pada na intervalu I.

Pretpostavimo sada da funkcija f' ne pada. Uzmimo bilo koju točku $x_0 \in I$. Primjenjujući Leibniz-Newtonovu formulu dobivamo integralni prikaz

$$f(x) = \int_{x_0}^{x} f'(t)\, dt + f(x_0), \tag{1.41}$$

te uz pomoć Leme 1.3.8 zaključujemo da je funkcija f konveksna. □

Teorem 1.3.10. *Neka je I otvoren interval i neka je $f : I \to \mathbb{R}$ funkcija koja ima drugu derivaciju f''. Funkcija f je konveksna ako i samo ako je funkcija f'' nenegativna.*

Dokaz. Pretpostavimo da je funkcija f konveksna. Po Teoremu 1.3.9 prva derivacija f' ne pada na intervalu I. Slijedi da druga derivacija f'' ne može biti negativna ni u jednoj točki intervala I. Zato je $f''(x) \geq 0$ za svaki $x \in I$.

Pretpostavimo sada da je funkcija f'' nenegativna. Uzmimo bilo koji $x_0 \in I$. Koristeći integralnu vezu

$$f'(x) = \int_{x_0}^{x} f''(t)\, dt + f'(x_0) \tag{1.42}$$

zaključujemo da prva derivacija f' ne pada. Primjenom Teorema 1.3.9 možemo zaključiti da je funkcija f konveksna. □

Kao primjer strogo konveksne funkcije čija druga derivacija nije svuda pozitivna može se navesti četvrta potencija $f(x) = x^4$. Naime, $f''(0) = 0$. Iz drugog dijela dokaza Teorema 1.3.10 može se još izvući sljedeći korolar.

Korolar 1.3.11. *Neka je I otvoren interval i neka je $f : I \to \mathbb{R}$ funkcija koja ima drugu derivaciju f''. Funkcija f je strogo konveksna ako je funkcija f'' pozitivna.*

Prethodni teorem i korolar se primjenjuju i kao kriteriji konkavnosti funkcije f na otvorenom intervalu uz isticanje $f'' \leq 0$, odnosno $f'' < 0$.

Teorem 1.3.10 nam omogućava laganu provjeru konveksnosti i konkavnosti mnogih elementarnih funkcija. U primjerima što slijede navest ćemo najvažnije predstavnike konveksnih i konkavnih funkcija.

Primjer 1.3.12. *Neka je* $a \in (-\infty, \infty)$ *broj. Promotrimo opću potenciju* $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ *određenu jednadžbom*

$$f(x) = x^a.$$

Njena je druga derivacija

$$f''(x) = a(a-1)x^{a-2}.$$

Iz uvjeta $f''(x) \geq 0$ *slijedi* $a \in (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$, *kao što iz uvjeta* $f''(x) \leq 0$ *slijedi* $a \in [0, 1]$.

Tako je funkcija $f(x) = x^a$ *konveksna za svaki eksponent* $a \in (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$, *a konkavna za svaki eksponent* $a \in [0, 1]$. *U graničnim slučajevima imamo afine funkcije* $f(x) = 1$ *za* $a = 0$ *i* $f(x) = x$ *za* $a = 1$.

Nije teško provjeriti da je funkcija $f(x) = x^a$ *strogo konveksna za svaki* $a \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$, *a strogo konkavna za svaki* $a \in (0, 1)$.

Primjer 1.3.13. *Neka je* $a \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ *broj. Promotrimo eksponencijalnu funkciju* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *određenu jednadžbom*

$$f(x) = a^x.$$

Njena druga derivacija

$$f''(x) = a^x \ln^2 a$$

je pozitivna na cijelom skupu $\mathbb{R}$ *neovisno o bazi* a. *Zato je svaka eksponencijalna funkcija strogo konveksna. U primjenama se posebno ističe prirodna eksponencijalna funkcija* $f(x) = e^x$.

Primjer 1.3.14. *Neka je* $a \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ *broj. Logaritamska funkcija* $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ *određena jednadžbom*

$$f(x) = \log_a x$$

ima drugu derivaciju jednaku

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2 \ln a}.$$

Ako je baza $a \in (0, 1)$, *onda je* $f''(x) > 0$ *za svaki* $x \in (0, \infty)$, *pa je u tom slučaju logaritamska funkcija strogo konveksna. Uz bazu* $a \in (1, \infty)$ *logaritamska funkcija je strogo konkavna. U primjenama je naročito važna prirodna logaritamska funkcija* $f(x) = \ln x$.

Sljedeći primjer pokazuje koliko je koristan kriterij druge derivacije.

Primjer 1.3.15. *Funkcija* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definirana jednadžbom*

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \sin x$$

ima drugu derivaciju jednaku

$$f''(x) = 1 + \sin x.$$

Kako je $f''(x) = 1 + \sin x \geq 0$ *za svaki* $x \in \mathbb{R}$*, funkcija* f *je konveksna. Iako je funkcija* f *jednostavna, bez korištenja druge derivacije bilo bi vrlo teško dokazati njenu konveksnost.*

Poglavlje 2

Dvije najvažnije nejednakosti

2.1 Jensenova nejednakost

U prvom poglavlju spomenuli smo poznatu Jensenovu nejednakost, koja je jedna od najvažnijih matematičkih nejednakosti. Već smo vidjeli u poglavlju ranije da primjena ove nejednakosti olakšava dokazivanje mnogih tvrdnji. U nastavku proučavamo diskretni i integralni oblik Jensenove nejednakosti na konveksnim skupovima realnog pravca, dakle samo na intervalima.

Diskretni oblik Jensenove nejednakosti

Diskretne nejednakosti se bave raznovrsnim kombinacijama točaka i koeficijenata. Najvažniji i najsređeniji dio tog područja pretpostavlja rad s konveksnim kombinacijama.

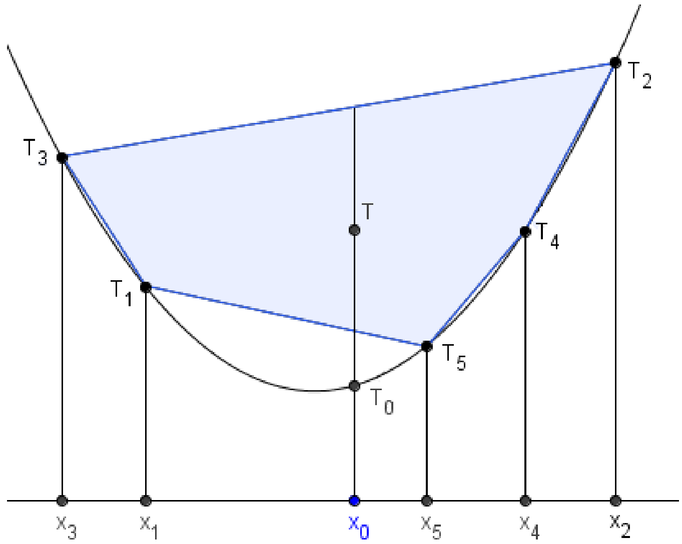
Diskretni oblik Jensenove nejednakosti za konveksnu funkciju na bilo kojem konveksnom skupu smo obradili u Korolaru 1.2.6 pozivajući se na matematičku indukciju. Sada ćemo, koristeći konveksnu funkciju na intervalu, tu nejednakost dokazati geometrijski oslanjajući se na konveksni poligon upisan grafu promatrane konveksne krivulje.

Teorem 2.1.1. *Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ interval i neka je $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ konveksna kombinacija točaka $x_i \in I$.*

Onda svaka konveksna funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ zadovoljava nejednakost

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i). \tag{2.1}$$

Dokaz. Zbog geometrijske predodžbe koja prati ovaj dokaz, pretpostavimo za početak da imamo bar tri različite točke x_i i da je funkcija f strogo konveksna.



Slika 2.1: Geometrijski prikaz diskretnog oblika Jensenove nejednakosti

Uzmimo točke $T_i = (x_i, f(x_i))$ i usredotočimo se na njihovu konveksnu ljusku u ravini $\mathbb{R}^2$, to jest na konveksni poligon

$$\mathcal{C} = \text{conh}\{T_1, \ldots, T_n\}.$$

Stranice poligona $\mathcal{C}$ su tetive konveksne krivulje $y = f(x)$ što govori da je poligon smješten iznad krivulje. Neka je $x_0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$. Mi ćemo usporediti ordinate dviju točaka na pravcu $x = x_0$. Radi se o točkama

$$T_0 = \Big(x_0, f(x_0)\Big) = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i, f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right)\right)$$

i

$$T = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i T_i = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)\right).$$

Točka T_0 pripada krivulji $y = f(x)$ dok točka T pripada poligonu $\mathcal{C}$. Dakle, točka T_0 je ispod točke T iz čega slijedi formula (2.1).

Provedeni dokaz se može primijeniti neovisno o broju različitih točaka x_i i neovisno o vrsti konveksnosti funkcije f, s tim da umjesto pojma poligon $\mathcal{C}$ koristimo pojam skup $\mathcal{C}$. Ako su sve točke x_i jednake, onda je skup $\mathcal{C}$ točka. Ako je krivulja $y = f(x)$ pravac, onda je skup $\mathcal{C}$ njegov segment. $\square$

Geometrijska interpretacija diskretnog oblika Jensenove nejednakosti je prikazana na Slici 2.1.

U izvodu integralnog oblika Jensenove nejednakosti koristit ćemo sljedeće poopćenje Teorema 2.1.1.

Korolar 2.1.2. *Neka je $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funkcija i neka je $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i g(x_i)$ konveksna kombinacija točaka $g(x_i)$ čije su apscise $x_i \in [a, b]$. Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ interval koji sadrži sliku funkcije g.*

Onda svaka konveksna funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ zadovoljava nejednakost

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i g(x_i)\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(g(x_i)). \tag{2.2}$$

Integralni oblik Jensenove nejednakosti

Služeći se konveksnim kombinacijama u primjeni integralne metode dobit ćemo integralni oblik Jensenove nejednakosti, vidi [7].

Teorem 2.1.3. *Neka je $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ omeđena integrabilna funkcija i neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ interval koji sadrži sliku funkcije g.*

Onda svaka konveksna funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ zadovoljava nejednakost

$$f\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)\,dx\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(g(x))\,dx. \tag{2.3}$$

Dokaz. Uzmimo prirodni broj n i podijelimo segment $[a, b]$ na n jednakih dijelova točkama

$$x_{ni} = a + (b-a)\frac{i}{n}$$

za $i = 0, 1, \ldots, n$. Pri tome je $x_{n0} = a$ i $x_{nn} = b$. Pripadni integralni zbroj funkcije g podijeljen s $b - a$,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_{ni} - x_{n\,i-1}}{b-a} g(x_{ni}),$$

je konveksna kombinacija točaka $g(x_{ni})$ s koeficijentima

$$\lambda_i = \frac{x_{ni} - x_{n\,i-1}}{b-a} = \frac{1}{n}.$$

Kada primjenimo formulu (2.2) na gornju konveksnu kombinaciju, tada dobijemo diskretnu nejednakost

$$f\left(\frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n}[x_{ni} - x_{n\,i-1}]g(x_{ni})\right) \leq \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n}[x_{ni} - x_{n\,i-1}]f(g(x_{ni})),$$

a kada zatim pustimo da n neograničeno raste, tada ista prijeđe u integralnu nejednakost u formuli (2.3) uz sljedeću pretpostavku. Konvergencija člana na lijevoj strani je osigurana tek neprekinutošću funkcije f na radnom području (za dovoljno velike n). Budući da je konveksna funkcija f neprekinuta na interioru I^o, ovdje treba pretpostaviti da integralna aritmetička sredina funkcije g,

$$\overline{g} = \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x)\, dx,$$

pripada interioru I^o. Ako je $c = \inf_{x\in[a,b]} g(x)$ i $d = \sup_{x\in[a,b]} g(x)$, to se svakako postiže pretpostavkom da je $\overline{g} \in (c,d)$.

Ako je $\overline{g} = c$, onda izlazi da je

$$\int_a^b (g(x) - c)\, dx = 0,$$

pa zbog $g(x) - c \geq 0$ proizlazi da je $g(x) = c$ gotovo svuda. U tom se slučaju formula (2.3) svodi na trivijalnu nejednakost $f(c) \leq f(c)$. Isto vrijedi ako je $\overline{g} = d$. $\square$

Ako funkcija g nije konstanta gotovo svuda na segmentu $[a,b]$, i ako je funkcija f strogo konveksna, onda u formuli (2.3) vrijedi stroga nejednakost.

2.2 Hermite-Hadamardova nejednakost

Hermite-Hadamardova nejednakost je također jedna od poznatijih i važnijih matematičkih nejednakosti. Nejednakost ima široku primjenu, između ostaloga i na kvaziaritmetičke sredine, što ćemo pokazati u sljedećem poglavlju.

Pokažimo izvod Hermite-Hadamardove nejednakosti uz pomoć integralnog oblika Jensenove nejednakosti i definicijske nejednadžbe konveksnosti.

Teorem 2.2.1. *Svaka konveksna funkcija $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ zadovoljava dvostruku nejednakost*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}. \tag{2.4}$$

Dokaz. Kada na integralnu aritmetičku sredinu funkcije $g(x) = x$ izraženu s

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b x\, dx$$

primijenimo integralni oblik Jensenove nejednakosti, tada dobijemo

$$f\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b x\,dx\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Uvrštavanjem

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b x\,dx = \frac{a+b}{2}$$

slijedi

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx, \tag{2.5}$$

to jest lijeva strana Hermite-Hadamardove nejednakosti.

Sada nejednadžbu konveksnosti

$$f\big((1-t)a+tb\big) \leq (1-t)f(a)+t(b)$$

integriramo po segmentu $[0,1]$ s obzirom na varijablu t, to jest primijenimo $\int_0^1 \dots dt$, pa tako dobijemo

$$\int_0^1 f\big((1-t)a+tb\big)\,dt \leq f(a)\int_0^1 (1-t)\,dt + f(b)\int_0^1 t\,dt.$$

Nakon uvođenja zamjene $x=(1-t)a+tb$ kod lijevog člana, i računanja desnog člana, slijedi

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}, \tag{2.6}$$

to jest desna strana Hermite-Hadamardove nejednakosti. □

Ako je funkcija f strogo konveksna, onda u formuli (2.4) vrijedi stroga dvostruka nejednakost.

Hermite-Hadamardova nejednakost se još može izvesti pomoću potpornog pravca i sekante. U tom poslu koristimo sljedeću integralnu jednadžbu afine funkcije.

Lema 2.2.2. *Svaka omeđena integrabilna funkcija $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ i svaka afina funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadovoljavaju jednakost*

$$f\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)\,dx\right) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(g(x))\,dx. \tag{2.7}$$

Dokaz. Dokaz nije težak, a počiva na afinoj jednadžbi $f(x)=\kappa x+\lambda$. □

Korolar 2.2.3. *Neka je $c \in (a, b)$ unutarnja točka.*
Onda svaka konveksna funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zadovoljava dvostruku nejednakost

$$f^{sup}_{\{c\}}\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq f^{sec}_{\{a,b\}}\left(\frac{a+b}{2}\right). \tag{2.8}$$

Dokaz. Integriranjem potporno-sekantne nejednakosti

$$f^{\mathrm{sup}}_{\{c\}}(x) \leq f(x) \leq f^{\mathrm{sec}}_{\{a,b\}}(x)$$

po segmentu $[a, b]$ korištenjem varijable x, te dijeljenjem s $b - a$, dobiva se

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f^{\mathrm{sup}}_{\{c\}}(x)\,dx \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f^{\mathrm{sec}}_{\{a,b\}}(x)\,dx.$$

Koristeći afinost potpornog pravca i sekante preko Leme 2.2.2 izlazi

$$f^{\mathrm{sup}}_{\{c\}}\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b x\,dx\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq f^{\mathrm{sec}}_{\{a,b\}}\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b x\,dx\right),$$

a odatle uvrštavanjem

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b x\,dx = \frac{a+b}{2}$$

proizlazi nejednakost u formuli (2.8). □

Hermite-Hadamardova nejednakost slijedi iz formule (2.8) kada se za $c = (a+b)/2$ odredi

$$f^{\mathrm{sup}}_{\{\frac{a+b}{2}\}}\left(\frac{a+b}{2}\right) = f^{\mathrm{sup}}_c(c) = f(c) = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

i kada se izrazi

$$f^{\mathrm{sec}}_{\{a,b\}}\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{f^{\mathrm{sec}}_{\{a,b\}}(a) + f^{\mathrm{sec}}_{\{a,b\}}(b)}{2} = \frac{f(a)+f(b)}{2}. \tag{2.9}$$

2.3 Proširene i poopćene nejednakosti

U sekciji ćemo promatrati funkcije zadane na segmentu $[a, b]$ s krajevima $a < b$. Prisjetimo se da se svaka točka $c \in [a, b]$ može predočiti kao dvočlana konveksna kombinacija

$$c = \alpha a + \beta b \tag{2.10}$$

s jedinstvenim koeficijentima

$$\alpha = \frac{b-c}{b-a}, \quad \beta = \frac{c-a}{b-a}. \tag{2.11}$$

Izvodeći i proširujući Jensenove i Hermite-Hadamardove nejednaksti za konveksne funkcije na segmentu, pored potporne, naročito možemo koristiti sekantnu nejednakost (vidi potporno-sekantnu nejednakost u formuli (1.33)). Pri tome važnu ulogu igra afinost potpornog pravca i sekante.

Jedan od postupaka u izvođenju nejednakosti vezanih za konveksne funkcije je korištenje konveksnih kombinacija sa zajedničkim središtem.

Teorem 2.3.1. *Neka je* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ *konveksna kombinacija točaka* $x_i \in [a,b]$ *i neka je* $\alpha a + \beta b$ *konveksna kombinacija krajeva* a *i* b *takva da je*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \alpha a + \beta b. \tag{2.12}$$

Onda svaka konveksna funkcija $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *zadovoljava dvostruku nejednakost*

$$f(\alpha a + \beta b) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) \leq \alpha f(a) + \beta f(b). \tag{2.13}$$

Dokaz. Neka je $c = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$. Ovisno o položaju središta c, slijede dva naredna slučaja.

Ako je $c \in (a,b)$, onda se uz pomoć potpornog pravca $y = f_{\{c\}}^{\sup}(x)$ izvodi lijeva strana, a uz pomoć sekante $y = f_{\{a,b\}}^{\sec}(x)$ desna strana nejednakosti u formuli (2.13). Povezivanjem u jedan izvod dobiva se niz nejednakosti

$$\begin{aligned} f(\alpha a + \beta b) &= f_{\{c\}}^{\sup}(\alpha a + \beta b) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_{\{c\}}^{\sup}(x_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_{\{a,b\}}^{\sec}(x_i) = f_{\{a,b\}}^{\sec}(\alpha a + \beta b) \\ &= \alpha f(a) + \beta f(b) \end{aligned} \tag{2.14}$$

koji očito obuhvaća dvostruku nejednakost u formuli (2.13).

Ako je $c \in \{a,b\}$, onda trivijalna nejednakost $f(c) \leq f(c) \leq f(c)$ predstavlja formulu (2.13). Na primjer, ako je $c = a$, onda izlazi da je $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i - a) = 0$, a odatle uz pretpostavku (koja ne smanjuje općenitost) da su svi koeficijenti λ_i pozitivni proizlazi da su sve točke x_i jednake a. $\square$

Koeficijenti α i β koji su korišteni u Teoremu 2.3.1 se mogu izraziti pomoću formule (2.11).

Prema Teoremu 2.3.1 za sve konveksne kombinacije sa središtem u polovištu segmenta $[a, b]$,

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \frac{a+b}{2}, \tag{2.15}$$

vrijedi dvostruka nejednakost

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}. \tag{2.16}$$

Ista zapravo predstavlja diskretni oblik Hermite-Hadamardove nejednakosti.

Korolar 2.3.2. *Neka je $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ konveksna kombinacija točaka $x_i \in [a, b]$.*

Onda svaka konveksna funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zadovoljava dvostruku nejednakost

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) &\leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) \\ &\leq \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (b - x_i)}{b-a} f(a) + \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i - a)}{b-a} f(b). \end{aligned} \tag{2.17}$$

Dokaz. Ako u formuli (2.13) na lijevoj strani umjesto $\alpha a + \beta b$ pišemo $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, a na desnoj strani uvrstimo

$$\alpha = \frac{b - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i}{b-a} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (b - x_i)}{b-a}$$

i

$$\beta = \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i - a}{b-a} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i - a)}{b-a},$$

dobit ćemo formulu (2.17). □

Prethodni korolar se može poopćiti uvođenjem funkcije g.

Korolar 2.3.3. *Neka je $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funkcija čija je slika sadržana u segmentu $[a, b]$ i neka je $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i g(x_i)$ konveksna kombinacija točaka $g(x_i)$ čije su apscise $x_i \in [a, b]$.*

Onda svaka konveksna funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zadovoljava dvostruku nejednakost

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i g(x_i)\right) &\leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(g(x_i)) \\ &\leq \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (b - g(x_i))}{b-a} f(a) + \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (g(x_i) - a)}{b-a} f(b). \end{aligned} \tag{2.18}$$

Primjenom integralne metode diskretni oblik nejednakosti u formuli (2.18) se može prevesti u integralni.

Korolar 2.3.4. *Neka je $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ omeđena integrabilna funkcija čija je slika sadržana u segmentu $[a,b]$.*

Onda svaka konveksna funkcija $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ zadovoljava dvostruku nejednakost

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\int_a^b g(x)\,dx}{b-a}\right) &\leq \frac{\int_a^b f(g(x))\,dx}{b-a} \\ &\leq \frac{\int_a^b (b-g(x))\,dx}{(b-a)^2} f(a) + \frac{\int_a^b (g(x)-a)\,dx}{(b-a)^2} f(b). \end{aligned} \tag{2.19}$$

Ako u nejednakosti u formuli (2.19) koristimo funkciju $g(x) = x$, onda ista prelazi u Hermite-Hadamardovu nejednakost.

Završimo sekciju sljedećim poopćenjem Korolara 2.3.4.

Teorem 2.3.5. *Neka je $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ omeđena integrabilna funkcija čiji je infimum $c = \inf_{x\in[a,b]} g(x)$ manji od supremuma $d = \sup_{x\in[a,b]} g(x)$.*

Onda svaka konveksna funkcija $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ zadovoljava dvostruku nejednakost

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\int_a^b g(x)\,dx}{b-a}\right) &\leq \frac{\int_a^b f(g(x))\,dx}{b-a} \\ &\leq \frac{\int_a^b (d-g(x))\,dx}{(b-a)(d-c)} f(c) + \frac{\int_a^b (g(x)-c)\,dx}{(b-a)(d-c)} f(d). \end{aligned} \tag{2.20}$$

Poglavlje 3

Rad sa sredinama

Mi ćemo se baviti samo sredinama koje se odnose na realne brojeve. Ako su zadani brojevi a i b, onda je svaki broj c koji je između a i b sredina brojeva a i b. Izraženo pomoću konveksne ljuske, broj c je sredina brojeva a i b ako je $c \in \operatorname{conv}\{a, b\}$. Kada imamo više zadanih brojeva, tada je bilo koja njihova konveksna kombinacija ujedno njihova sredina. Tako je matematički koncept sredine vrlo širok.

S druge strane, taj se matematički koncept sužava pri odabiru sredina. Za osnovne matematičke sredine je bolje reći da su se nametnule, nego da su odabrane.

3.1 Tri polazne sredine

Definicija 3.1.1. *Za n-torku pozitivnih realnih brojeva $a_1, \ldots, a_n$ definiraju se tri osnovne sredine.*

Aritmetička sredina je

$$A(a_1, \ldots, a_n) = \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}. \tag{3.1}$$

Geometrijska sredina je

$$G(a_1, \ldots, a_n) = \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n}. \tag{3.2}$$

Harmonijska sredina je

$$H(a_1, \ldots, a_n) = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}}. \tag{3.3}$$

Aritmetička sredina je konveksna kombinacija točaka a_i s jednakim koeficijentima $\lambda_i = 1/n$,

$$A(a_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} a_i. \tag{3.4}$$

Može se zamisliti da je u definiciju aritmetičke sredine uključena identična funkcija $\varphi_1(x) = x$, tako što je $\varphi_1(a_i) = a_i$.

Geometrijska sredina je potencija čija je baza broj e, a eksponent konveksna kombinacija točaka $\ln a_i$ s jednakim koeficijentima $\lambda_i = 1/n$,

$$G(a_i) = e^{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \ln a_i} = \prod_{i=1}^{n} a_i^{1/n}. \tag{3.5}$$

Dakle, u definiciju geometrijske sredine je uključena prirodna logaritamska funkcija $\varphi_0(x) = \ln x$ i njena inverzna funkcija $\varphi_0^{-1}(x) = e^x = \exp x$.

Harmonijska sredina je recipročna vrijednost konveksne kombinacije točaka a_i^{-1} s jednakim koeficijentima $\lambda_i = 1/n$,

$$H(a_i) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} a_i^{-1} \right)^{-1}. \tag{3.6}$$

Prema tome, u definiciji harmonijske sredine se koristi recipročna funkcija $\varphi_{-1}(x) = \varphi_{-1}^{-1}(x) = 1/x$.

Gornji prikazi pokazuju kako se mogu poopćiti koeficijenti triju polaznih matematičkih sredina.

Definicija 3.1.2. *Za n-torku pozitivnih realnih brojeva a_i, uz n-torku nenegativnih koeficijenata λ_i čiji je zbroj 1, definiraju se poopćene sredine.*

Poopćena aritmetička sredina je

$$A(a_i; \lambda_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n. \tag{3.7}$$

Poopćena geometrijska sredina je

$$G(a_i; \lambda_i) = \prod_{i=1}^{n} a_i^{\lambda_i} = a_1^{\lambda_1} \ldots a_n^{\lambda_n}. \tag{3.8}$$

Poopćena harmonijska sredina je

$$H(a_i; \lambda_i) = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i^{-1} \right)^{-1} = \left(\lambda_1 a_1^{-1} + \ldots + \lambda_n a_n^{-1} \right)^{-1}. \tag{3.9}$$

Sve tri poopćene sredine pripadaju kolekciji sredina s injektivnim funkcijama φ,

$$M_\varphi(a_i; \lambda_i) = \varphi^{-1} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi(a_i) \right) = \varphi^{-1}\Big(\lambda_1 \varphi(a_1) + \ldots + \lambda_n \varphi(a_n) \Big). \tag{3.10}$$

3.2 Osnovna nejednakost za sredine

Uz pomoć diskretnog oblika Jensenove nejednakosti može se utvrditi poredak osnovnih sredina.

Lema 3.2.1. *Neka su $a_1, \ldots, a_n$ pozitivni realni brojevi i neka su $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ nenegativni koeficijenti čiji zbroj iznosi 1.*

Onda vrijedi poopćena harmonijsko-geometrijsko-aritmetička sredinska nejednakost

$$\left(\lambda_1 a_1^{-1} + \ldots + \lambda_n a_n^{-1}\right)^{-1} \leq a_1^{\lambda_1} \ldots a_n^{\lambda_n} \leq \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n. \tag{3.11}$$

Dokaz. Primijenimo li diskretni oblik Jensenove nejednakosti na konveksnu kombinaciju

$$\lambda_1 a_1^{-1} + \ldots + \lambda_n a_n^{-1}$$

i na konveksnu funkciju $f(x) = -\ln x = \ln x^{-1}$, dobit ćemo

$$\ln\left(\lambda_1 a_1^{-1} + \ldots + \lambda_n a_n^{-1}\right)^{-1} \leq \lambda_1 \ln a_1 + \ldots + \lambda_n \ln a_n = \ln\left(a_1^{\lambda_1} \ldots a_n^{\lambda_n}\right).$$

Djelujemo li na gornju nejednakost prirodnom eksponencijalnom funkcijom exp, dobit ćemo lijevu stranu nejednakosti u formuli (3.11).

Primjenom diskretnog oblika Jensenove nejednakosti na konveksnu kombinaciju

$$\lambda_1 \ln a_1 + \ldots + \lambda_n \ln a_n$$

i na konveksnu funkciju $f(x) = e^x$, izlazi nejednakost

$$e^{\lambda_1 \ln a_1 + \ldots + \lambda_n \ln a_n} = a_1^{\lambda_1} \ldots a_n^{\lambda_n} \leq \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n \tag{3.12}$$

koja se podudara sa desnom stranom nejednakosti u formuli (3.11). □

Kada su svi koeficijenti jednaki, $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 1/n$, onda iz formule (3.11) slijedi

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} \leq \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}. \tag{3.13}$$

Kada su $a_1 = a$ i $a_2 = b$ različiti pozitivni realni brojevi i kada je $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/2$, onda iz formule (3.11), uvažavajući u ovom slučaju strogu konveksnost funkcija $f(x) = -\ln x$ i $f(x) = e^x$, slijedi

$$\frac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}, \tag{3.14}$$

to jest

$$H(a,b) < G(a,b) < A(a,b). \tag{3.15}$$

3.3 Tri integralne sredine

Na integralne aritmetičke sredine triju injektivnih funkcija djelovat ćemo njihovom inverznom funkcijom. Koristit ćemo identičnu funkciju $g(x) = x$ gdje je $g^{-1}(x) = x$, recipročnu funkciju $g(x) = 1/x$ gdje je $g^{-1}(x) = 1/x$ i prirodnu logaritamsku funkciju $g(x) = \ln x$ gdje je $g^{-1}(x) = \exp x$.

Definicija 3.3.1. *Za dva različita pozitivna realna broja a i b uvode se osnovne integralne sredine.*

Aritmetička sredina je

$$A(a,b) = \frac{1}{b-a}\int_a^b x\,dx = \frac{a+b}{2}. \tag{3.16}$$

Identrička sredina je

$$I(a,b) = \exp\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln x\,dx\right) = \frac{1}{e}\left[\frac{a^a}{b^b}\right]^{\frac{1}{a-b}}. \tag{3.17}$$

Logaritamska sredina je

$$L(a,b) = \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \frac{1}{x}\,dx\right)^{-1} = \frac{a-b}{\ln a - \ln b}. \tag{3.18}$$

Primjenom integralng oblika Jensenove nejednakosti dobit ćemo poredak gornjih sredina.

Lema 3.3.2. *Ako su a i b različiti pozitivni realni brojevi, onda njihove osnovne integralne sredine zadovoljavaju nejednakost*

$$L(a,b) < I(a,b) < A(a,b). \tag{3.19}$$

Dokaz. U dokazu gornje nejednakosti koristit ćemo integralni oblik Jensenove nejednakosti u formuli (2.3) za strogo konveksne i strogo konkavne funkcije.

Izvedimo nejednakost $L(a,b) < I(a,b)$. Primjenom integralng oblika Jensenove nejednakosti za funkciju $g(x) = 1/x$ i strogo konveksnu funkciju $f(x) = -\ln x$, izlazi stroga nejednakost

$$-\ln\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \frac{1}{x}\,dx\right) < \frac{1}{b-a}\int_a^b \left(-\ln\frac{1}{x}\right)dx, \tag{3.20}$$

koja sređivanjem prelazi u nejednakost

$$\ln\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \frac{1}{x}\,dx\right)^{-1} < \frac{1}{b-a}\int_a^b \ln x\,dx, \tag{3.21}$$

a djelovanjem strogo rastuće prirodne eksponencijalne funkcije exp postaje tražena nejednakost $L(a,b) < I(a,b)$.

Izvedimo nejednakost $I(a,b) < A(a,b)$. Primjenjujući integralni oblik Jensenove nejednakosti za funkciju $g(x) = x$ i strogo konkavnu funkciju $f(x) = \ln x$, dobivamo strogu nejednakost

$$\ln\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b x\,dx\right) > \frac{1}{b-a}\int_a^b \ln x\,dx, \tag{3.22}$$

a djelujući na nju funkcijom exp dobivamo $I(a,b) < A(a,b)$. $\square$

Na kraju poglavlja želimo poredati po veličini svih pet do sada spomenutih sredina: harmonijsku, geometrijsku, logaritamsku, identričku i aritmetičku.

Prije toga moramo još primijeniti Hermite-Hadamardovu nejednakost.

Lema 3.3.3. *Ako su a i b različiti pozitivni realni brojevi, onda vrijedi sredinska nejednakost*

$$G(a,b) < L(a,b) < A(a,b). \tag{3.23}$$

Dokaz. Neka je $a < b$. Primjenom Hermite-Hadamardove nejednakosti na strogo konveksnu funkciju $f(x) = e^x$ na intervalu $[\ln a, \ln b]$, dobivamo geometrijsko-logaritamsko-aritmetičku sredinsku nejednakost

$$\sqrt{ab} < \frac{b-a}{\ln b - \ln a} < \frac{a+b}{2} \tag{3.24}$$

zato što je

$$f\left(\frac{\ln a + \ln b}{2}\right) = e^{\frac{\ln a + \ln b}{2}} = \sqrt{ab},$$

$$\frac{1}{\ln b - \ln a}\int_{\ln a}^{\ln b} f(x)\,dx = \frac{1}{\ln b - \ln a}\int_{\ln a}^{\ln b} e^x\,dx = \frac{b-a}{\ln b - \ln a}$$

i

$$\frac{f(\ln a) + f(\ln b)}{2} = \frac{e^{\ln a} + e^{\ln b}}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

Gornji račun vrijedi i za $a > b$, to jest i za interval $[\ln b, \ln a]$. $\square$

Povezujući nejednakosti u formulama (3.15), (3.19) i (3.23), proizlazi zajednička sredinska nejednakost.

Korolar 3.3.4. *Ako su a i b različiti pozitivni realni brojevi, onda vrijedi sredinska nejednakost*

$$H(a,b) < G(a,b) < L(a,b) < I(a,b) < A(a,b). \tag{3.25}$$

Poglavlje 4

Kvaziaritmetičke sredine

Kvaziaritmetička sredina se prvi put spominje početkom dvadesetog stoljeća, a po velikom ruskom matematičaru Andreju Nikolajeviču Kolmogorovu naziva se još i Kolmogorovljeva sredina. Sustavno pripremljene teorije o kvaziaritmetičkim sredinama pojavljuju se krajem dvadesetog stoljeća. Tu svakako treba spomenuti knjigu *Means and Their Inequalities* čiji su autori P. S. Bullen, D. S. Mitrinović i P. M. Vasić, vidi [1]. Jedno poglavlje te knjige je posvećeno kvaziaritmetičkim sredinama.

Koncept kvaziaritmetičkih sredina se dalje razvija s ciljem da se u okviru jedne jednostavne teorije obuhvate sve relevantne sredine. Taj koncept olakšava rad sa sredinama i omogućava njihovu jednostavniju primjenu. Sam koncept počiva na primjenama konveksnih funkcija, te Jensenovoj i Hermite-Hadamardovoj nejednakosti.

4.1 Diskretne i integralne kvaziaritmetičke sredine

Za definiciju kvaziaritmetičke sredine koristimo par različitih realnih brojeva a i b, te strogo monotonu neprekinutu funkciju φ definiranu na segmentu između a i b. Mi ćemo pretpostavljati da je $a < b$ i pisati $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Definicija 4.1.1. *Neka je $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ strogo monotona neprekinuta funkcija. Diskretna kvaziaritmetička sredina brojeva a i b s obzirom na funkciju φ je broj*

$$M_\varphi^{dis}(a, b) = \varphi^{-1}\left(\frac{\varphi(a) + \varphi(b)}{2}\right). \tag{4.1}$$

Formula (4.1) uključuje slučajeve $M_\varphi^{\mathrm{dis}}(a, a) = a$ i $M_\varphi^{\mathrm{dis}}(b, b) = b$.

Definicija 4.1.2. *Neka je $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ strogo monotona neprekinuta funkcija. Integralna kvaziaritmetička sredina brojeva a i b s obzirom na funkciju φ je broj*

$$M_{\varphi}^{int}(a,b) = \varphi^{-1}\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(x)\,dx\right). \tag{4.2}$$

Kvaziaritmetička sredina pripada segmentu $[a,b]$ zato što izrazi u zagradama formula (4.1) i (4.2) pripadaju segmentu $\varphi([a,b])$.

Kvaziaritmetičke sredine su invarijantne s obzirom na afina preslikavanja, što stoji u sljedećem korolaru.

Korolar 4.1.3. *Neka je $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ strogo monotona neprekinuta funkcija, te neka je $M_{\varphi}(a,b)$ pripadna diskretna ili integralna kvaziaritmetička sredina.*

Onda za svaki par realnih koeficijenata $\kappa \neq 0$ i λ vrijedi

$$M_{\kappa\varphi+\lambda}(a,b) = M_{\varphi}(a,b). \tag{4.3}$$

Dokaz. Primijetimo da je funkcija ψ definirana pravilom $\psi(x) = \kappa\varphi(x) + \lambda$ strogo monotona i neprekinuta, te da je njena inverzna funkcija

$$\psi^{-1}(x) = \varphi^{-1}\left(\frac{x-\lambda}{\kappa}\right).$$

Ako je sredina $M_{\varphi}(a,b) = M_{\varphi}^{\mathrm{dis}}(a,b)$ diskretna, onda račun

$$\begin{aligned} M_{\psi}^{\mathrm{dis}}(a,b) &= \psi^{-1}\left(\frac{\psi(a)+\psi(b)}{2}\right) \\ &= \varphi^{-1}\left(\frac{\psi(a)+\psi(b)-2\lambda}{2\kappa}\right) \\ &= \varphi^{-1}\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right) \\ &= M_{\varphi}^{\mathrm{dis}}(a,b) \end{aligned}$$

potvrđuje formulu (4.3). Sličan račun potvrđuje formulu (4.3) za integralnu sredinu $M_{\varphi}(a,b) = M_{\varphi}^{\mathrm{int}}(a,b)$. $\square$

Lema 4.1.4. *Neka je $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ strogo monotona neprekinuta funkcija.*

Ako je φ rastuća i konveksna ili ako je padajuća i konkavna, onda njena integralna i diskretna kvaziaritmetička sredina zadovoljavaju nejednakost

$$M_{\varphi}^{int}(a,b) \leq M_{\varphi}^{dis}(a,b). \tag{4.4}$$

Ako je φ padajuća i konveksna ili ako je rastuća i konkavna, onda njena integralna i diskretna sredina zadovoljavaju obrnutu nejednakost u formuli (4.4).

Dokaz. Dokažimo formulu (4.4) za rastuću i konveksnu funkciju φ. Oslanjajući se na desnu stranu Hermite-Hadamardove nejednakosti za konveksnu funkciju $f = \varphi$ (formula (2.4)) dobivamo

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(x)\,dx \leq \frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}.$$

Djelujući na gornju nejednakost rastućom funkcijom φ^{-1}, par međusobno inverznih funkcija ili raste ili pada, dobivamo i formulu (4.4). □

U primjenama konveksnosti, a naročito kvaziaritmetičkih sredina, koristi se par strogo monotonih neprekinutih funkcija zadanih na segmentu realnih brojeva.

Definicija 4.1.5. *Neka su $\varphi, \psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ strogo monotone neprekinute funkcije.*

Za funkciju ψ kažemo da je φ-konveksna (φ-konkavna) ako je složena funkcija $\psi \circ \varphi^{-1}$ konveksna (konkavna).

Slijedi osnovni teorem o kvaziaritmetičkim sredinama.

Teorem 4.1.6. *Neka su $\varphi, \psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ strogo monotone neprekinute funkcije, te neka su $M_\varphi(a, b)$ i $M_\psi(a, b)$ pripadne diskretne ili integralne kvaziaritmetičke sredine.*

Ako je ψ rastuća i φ-konveksna ili ako je padajuća i φ-konkavna, onda njene pripadne kvaziaritmetičke sredine zadovoljavaju nejednakost

$$M_\varphi(a, b) \leq M_\psi(a, b). \tag{4.5}$$

Ako je ψ padajuća i φ-konveksna ili ako je rastuća i φ-konkavna, onda njene sredine zadovoljavaju obrnutu nejednakost u formuli (4.5).

Dokaz. Dokažimo slučaj za integralnu kvaziaritmetičku sredinu u kojem je funkcija ψ padajuća i φ-konkavna. Primjenom integralnog oblika Jensenove nejednakosti na konkavnu funkciju $f = \psi \circ \varphi^{-1}$ i funkciju $g = \varphi$ (suprotna nejednakost u formuli (2.3)), izlazi

$$f\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(x)\,dx\right) \geq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(\varphi(x))\,dx,$$

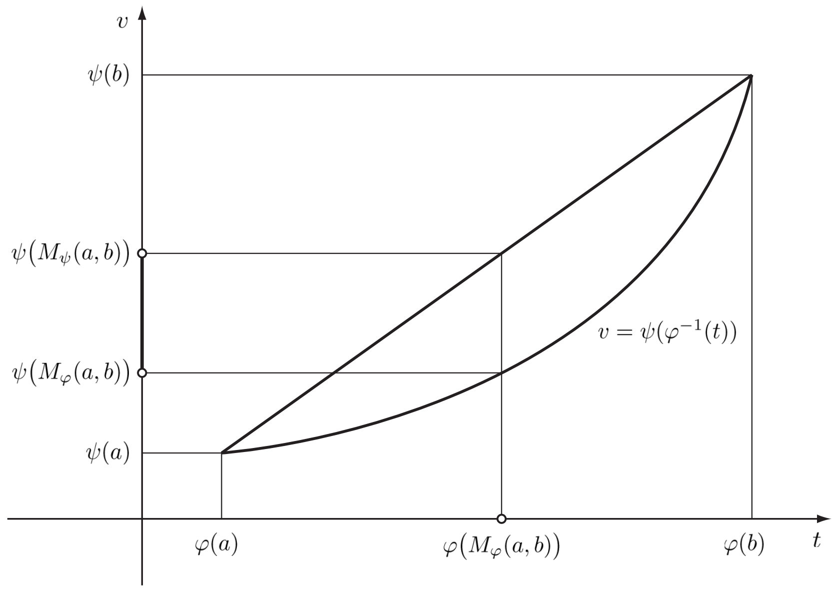
a odatle korištenjem $\psi \circ \varphi^{-1}$ umjesto f, proizlazi

$$\psi \circ \varphi^{-1}\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(x)\,dx\right) \geq \frac{1}{b-a}\int_a^b \psi(x)\,dx.$$

Djelovanjem padajuće funkcije ψ^{-1} na gornju nejednakost postiže se nejednakost u formuli (4.5). □

Može se još dokazati sljedeća činjenica. Ako je funkcija $f = \psi \circ \varphi^{-1}$ strogo konveksna ili strogo konkavna, onda u Teoremu 4.1.6 vrijede stroge nejednakosti.

Vizualni prikaz nejednakosti u formuli (4.5) se može vidjeti na Slici 4.1.



Slika 4.1: Grafički prikaz nejednakosti u formuli (4.5)

4.2 Potencijske i logaritamske sredine

Potencijske i logaritamske sredine se pojavljuju kao poseban slučaj kvaziaritmetičkih sredina. Odlikuje ih vrlo široka primjena, od entropija u termodinamici, kvantnoj mehanici i slanju informacija, pa sve do procjene podataka i odlučivanja.

Potencijske sredine

Potencijske sredine su poseban slučaj diskretnih kvaziaritmetičkih sredina. Izvode se uz pomoć potencije $\varphi_r(x) = x^r$ koja se koristi na intervalu pozitivnih realnih brojeva $(0, +\infty)$ za bilo koji eksponent $r \in \mathbb{R}$. Potencija φ_r je strogo konveksna za $r \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$, a strogo konkavna za $r \in (0, 1)$. Potencija $\varphi_r : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ je bijekcija za svaki $r \neq 0$ s inverznom potencijom $\varphi_{1/r}$, to jest $\varphi_r^{-1}(x) = x^{1/r}$.

Za pozitivne brojeve a i b, te potenciju φ_r gdje je $r \neq 0$, pripadna diskretna kvaziaritmetička sredina iznosi

$$M_{\varphi_r}^{\mathrm{dis}}(a, b) = \left[\frac{a^r + b^r}{2}\right]^{\frac{1}{r}}.$$

Slučaj $r = 0$ se rješava graničnim prijelazom.

Lema 4.2.1. *Ako su a i b pozitivni brojevi, onda je*

$$\lim_{r\to 0}\left[\frac{a^r+b^r}{2}\right]^{\frac{1}{r}}=\sqrt{ab}. \tag{4.6}$$

Dokaz. Na lijevoj strani formule (4.6) imamo graničnu vrijednost neodređenog oblika 1^∞. Logaritmiranjem i sređivanjem, te primjenom L'Hôpitalovog pravila postižemo

$$\begin{aligned}\lim_{r\to 0}\ln\left[\frac{a^r+b^r}{2}\right]^{\frac{1}{r}} &= \lim_{r\to 0}\frac{\ln\frac{a^r+b^r}{2}}{r}=\lim_{r\to 0}\frac{\ln(a^r+b^r)-\ln 2}{r}\\ &= \lim_{r\to 0}\frac{a^r\ln a+b^r\ln b}{a^r+b^r}=\frac{\ln a+\ln b}{2}\\ &= \ln\sqrt{ab}.\end{aligned}$$

Antilogaritmiranjem dobivamo traženu graničnu vrijednost $\sqrt{ab}$. □

Zahvaljujući lemi možemo definirati potencijsku sredinu za svaki realni broj r.

Definicija 4.2.2. *Neka su a i b pozitivni realni brojevi, te neka je r realan broj. Potencijska sredina reda r brojeva a i b je*

$$M_r(a,b)=\begin{cases}\left[\frac{a^r+b^r}{2}\right]^{\frac{1}{r}} & , r\neq 0\\ \sqrt{ab} & , r=0\end{cases}. \tag{4.7}$$

Gornjom definicijom su obuhvaćene harmonijska, geometrijska i aritmetička sredina pozitivnih brojeva a i b:

$$H(a,b)=M_{-1}(a,b),\ G(a,b)=M_0(a,b),\ A(a,b)=M_1(a,b).$$

Osnovni teorem o potencijskim sredinama govori o njihovoj strogoj monotonosti.

Teorem 4.2.3. *Neka su a i b različiti pozitivni realni brojevi, te neka su r i s realni brojevi gdje je $r<s$.*

Onda pripadne potencijske sredine zadovoljavaju nejednakost

$$M_r(a,b)<M_s(a,b). \tag{4.8}$$

Dokaz. Razmatrat ćemo četiri slučaja u kojima ćemo primjenjivati Teorem 4.1.6.

Slučaj $r<s<0$. Funkcije $\varphi(x)=x^r$ i $\psi(x)=x^s$ su strogo padajuće, a kompozicija $f(x)=(\psi\circ\varphi^{-1})(x)=x^{s/r}$ je strogo konkavna zato što je $0<s/r<1$.

Slučaj $r < s = 0$. Funkcije $\varphi(x) = x^r$ i $\psi(x) = -\ln x$ su strogo padajuće, a kompozicija $f(x) = (\psi \circ \varphi^{-1})(x) = -(1/r)\ln x$ je strogo konkavna zato što je $-1/r > 0$.

Slučaj $0 = r < s$. Funkcije $\varphi(x) = \ln x$ i $\psi(x) = x^s$ su strogo rastuće, a kompozicija $f(x) = (\psi \circ \varphi^{-1})(x) = e^{sx}$ je strogo konveksna.

Slučaj $0 < r < s$. Funkcije $\varphi(x) = x^r$ i $\psi(x) = x^s$ su strogo rastuće, a kompozicija $f(x) = (\psi \circ \varphi^{-1})(x) = x^{s/r}$ je strogo konveksna zato što je $s/r > 1$. $\square$

Logaritamske sredine

Logaritamske sredine su poseban slučaj integrtalnih kvaziaritmetičkih sredina. Izvode se uz pomoć potencije $\varphi_{r-1}(x) = x^{r-1}$.

Za različite pozitivne brojeve a i b, te potenciju φ_{r-1} gdje je $r \neq 0, 1$, pripadna integralna kvaziaritmetička sredina glasi

$$M^{\text{int}}_{\varphi_{r-1}}(a,b) = \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b x^{r-1}\,dx\right)^{\frac{1}{r-1}} = \left[\frac{a^r-b^r}{r(a-b)}\right]^{\frac{1}{r-1}}.$$

Slučajevi $r = 0$, $r = 1$ i $a = b$ se razrješavaju graničnim prijelazom.

Lema 4.2.4. *Ako su a i b različiti pozitivni brojevi, onda je*

$$\lim_{r\to 0}\left[\frac{a^r-b^r}{r(a-b)}\right]^{\frac{1}{r-1}} = \frac{a-b}{\ln a - \ln b}, \tag{4.9}$$

$$\lim_{r\to 1}\left[\frac{a^r-b^r}{r(a-b)}\right]^{\frac{1}{r-1}} = \frac{1}{e}\left[\frac{a^a}{b^b}\right]^{\frac{1}{a-b}}, \tag{4.10}$$

$$\lim_{b\to a}\left[\frac{a^r-b^r}{r(a-b)}\right]^{\frac{1}{r-1}} = a. \tag{4.11}$$

Dokaz. Što se tiče formule (4.9), izraz u uglatoj zagradi teži neodređenom obliku $0/0$, a eksponent teži broju -1. Primjenom L'Hôpitalovog pravila na izraz u uglatoj zagradi izlazi

$$\lim_{r\to 0}\frac{a^r-b^r}{r(a-b)} = \lim_{r\to 0}\frac{a^r\ln a - b^r\ln b}{a-b} = \frac{\ln a - \ln b}{a-b},$$

pa potenciranjem s eksponentom -1 proizlazi desna strana formule (4.9).

U formuli (4.10) imamo graničnu vrijednost neodređenog oblika 1^∞. Logaritmiranjem i primjenom L'Hôpitalovog pravila postižemo

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to 1} \ln\left[\frac{a^r-b^r}{r(a-b)}\right]^{\frac{1}{r-1}} &= \lim_{r\to 1}\frac{\ln\frac{a^r-b^r}{r(a-b)}}{r-1} = \lim_{r\to 1}\left(\frac{a^r\ln a-b^r\ln b}{a^r-b^r}-\frac{1}{r}\right) \\
&= \frac{a\ln a-b\ln b}{a-b}-1 \\
&= \ln\frac{1}{e}\left[\frac{a^a}{b^b}\right]^{\frac{1}{a-b}}.
\end{aligned}$$

Antilogaritmiranjem završnog izraza dobivamo traženu graničnu vrijednost na desnoj strani formule (4.10).

U formuli (4.11) imamo varijablu b. Izraz u uglatoj zagradi teži neodređenom obliku $0/0$, a eksponent je konstanta $1/(r-1)$. Računanjem neodređenog oblika uz pomoć L'Hôpitalovog pravila derivirajući po b, prvo se dobije

$$\lim_{b\to a}\frac{a^r-b^r}{r(a-b)} = \lim_{b\to a}\frac{-rb^{r-1}}{-r} = \lim_{b\to a} b^{r-1} = a^{r-1},$$

a potom se potenciranjem s eksponentom $1/(r-1)$ postiže tražena vrijednost a. $\square$

Definicija 4.2.5. *Neka su a i b pozitivni realni brojevi, te neka je r realan broj. Logaritamska sredina reda r brojeva a i b je*

$$L_r(a,b) = \begin{cases} \left[\frac{a^r-b^r}{r(a-b)}\right]^{\frac{1}{r-1}} & , r\neq 0,1 \ , a\neq b \\ \frac{a-b}{\ln a-\ln b} & , \ r=0 \ , a\neq b \\ \frac{1}{e}\left[\frac{a^a}{b^b}\right]^{\frac{1}{a-b}} & , \ r=1 \ , a\neq b \\ a & , \qquad a=b \end{cases}. \tag{4.12}$$

Četiri najistaknutije sredine kolekcije $L_r(a,b)$ su geometrijska, logaritamska, identrična i aritmetička sredina različitih pozitivnih brojeva a i b:

$$G(a,b)=L_{-1}(a,b),\ L(a,b)=L_0(a,b),\ I(a,b)=L_1(a,b),\ A(a,b)=L_2(a,b).$$

Kao i potencijske, logaritamske sredine su također strogo monotone.

Teorem 4.2.6. *Neka su a i b različiti pozitivni realni brojevi, te neka su r i s realni brojevi gdje je $r < s$.*

Onda pripadne logaritamske sredine zadovoljavaju nejednakost

$$L_r(a,b) < L_s(a,b). \tag{4.13}$$

4.3 Nejednakosti za različite sredine

Ako je $0 < a < b$, onda za potencijske i logaritamske sredine vrijede krajnje granične vrijednosti

$$\lim_{r\to-\infty} M_r(a,b) = \lim_{r\to-\infty} L_r(a,b) = a \tag{4.14}$$

i

$$\lim_{r\to+\infty} M_r(a,b) = \lim_{r\to+\infty} L_r(a,b) = b. \tag{4.15}$$

Teorem 4.3.1. *Ako je $0 < a < b$ i $r < 2 < s$, onda potencijske i logaritamske sredine zadovoljavaju niz nejednakosti*

$$a < M_{r-1}(a,b) < L_r(a,b) < A(a,b) < L_s(a,b) < M_{s-1}(a,b) < b. \tag{4.16}$$

Dokaz. Uzimajući u obzir strogu monotonost potencijskih i logaritamskih sredina, te granične vrijednosti u formulama (4.14) i (4.15), ostaje nam dokazati nejednakost u formuli (4.16) bez njenih krajnjih članova.

Dokažimo da za $r < 2$ vrijedi nejednakost

$$M_{r-1}(a,b) < L_r(a,b) < A(a,b). \tag{4.17}$$

Ako je $r < 1$, onda primjenom Hermite-Hadamardove nejednakosti na strogo konveksnu funkciju $f(x) = x^{r-1}$ na intervalu $[a,b]$ izlazi nejednakost

$$\left[\frac{a+b}{2}\right]^{r-1} < \frac{a^r - b^r}{r(a-b)} < \frac{a^{r-1} + b^{r-1}}{2}, \tag{4.18}$$

a potenciranjem iste s negativnim eksponentom $1/(r-1)$ proizlazi formula (4.17).

Ako je $r = 1$, onda je pripadna nejednakost

$$G(a,b) = M_0(a,b) < L_1(a,b) = I(a,b) =< A(a,b)$$

sadržana u formuli (3.25).

Ako je $1 < r < 2$, onda primjenom Hermite-Hadamardove nejednakosti na strogo konkavnu funkciju $f(x) = x^{r-1}$ na intervalu $[a,b]$ dobivamo obrnutu nejednakost u formuli (4.18), koja potenciranjem s pozitivnim eksponentom $1/(r-1)$ prelazi u nejednakost u formuli (4.17).

Slično se dokaže da za $s > 2$ vrijedi $A(a,b) < L_s(a,b) < M_{s-1}(a,b)$. □

Spomenimo na kraju i centroidnu sredinu pozitivnih brojeva a and b,

$$C(a,b) = \frac{2(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}. \tag{4.19}$$

Rad završavamo sljedećim popisom nejednakosti za sredine dvaju različitih pozitivnih realnih brojeva a and b:

$$H(a,b) < G(a,b) < L(a,b) < I(a,b) < A(a,b) < C(a,b) \tag{4.20}$$

$$M_0(a,b) < L(a,b) < M_{1/3}(a,b) \tag{4.21}$$

$$M_{2/3}(a,b) < I(a,b) < M_{\ln 2}(a,b) \tag{4.22}$$

$$M_0^2(a,b) < L(a,b)I(a,b) < M_{1/2}^2(a,b) \tag{4.23}$$

$$I^{\frac{1}{2}}(a,b)G^{\frac{1}{2}}(a,b) < L(a,b) < \frac{1}{2}I(a,b) + \frac{1}{2}G(a,b) \tag{4.24}$$

$$A^{\frac{1}{3}}(a,b)G^{\frac{2}{3}}(a,b) < L(a,b) < \frac{1}{3}A(a,b) + \frac{2}{3}G(a,b) \tag{4.25}$$

$$\alpha A(a,b) + (1-\alpha)G(a,b) < I(a,b) < \beta A(a,b) + (1-\beta)G(a,b) \tag{4.26}$$

$$\alpha \leq \frac{2}{3}\,,\ \beta \geq \frac{2}{e}$$

$$\alpha C(a,b) + (1-\alpha)H(a,b) < L(a,b) < \beta C(a,b) + (1-\beta)H(a,b) \tag{4.27}$$

$$\alpha \leq 0\,,\ \beta \geq \frac{1}{2}$$

$$\alpha C(a,b) + (1-\alpha)H(a,b) < I(a,b) < \beta C(a,b) + (1-\beta)H(a,b) \tag{4.28}$$

$$\alpha \leq \frac{3}{2e}\,,\ \beta \geq \frac{5}{8}$$

Bibliografija

[1] P. S. Bullen, D. S. Mitrinović, P. M. Vasić, *Means and Their Inequalities*, Reidel, Dordrecht, 1988.

[2] P. S. Bullen, D. S. Mitrinović, P. M. Vasić, *Sredine i sa njima povezane nejednakosti*, Elektrotehnički fakultet Univerziteta u Beogradu, Beograd, 1977.

[3] J. Hadamard, Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considerée par Riemann, *J. Math. Pures Appl.*, **58** (1893), 171-215.

[4] Ch. Hermite, Sur deux limites d'une intégrale définie, *Mathesis*, **3** (1883), 82.

[5] I. Gusić, *Matematički rječnik*, Element, Zagreb, 1995.

[6] J. L. W. V. Jensen, Om konvekse Funktioner og Uligheder mellem Middelværdier, *Nyt Tidsskr. Math. B*, **16** (1905), 49-68.

[7] J. L. W. V. Jensen, Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes, *Acta Math.*, **30** (1906), 175-193.

[8] J. Mićić, Z. Pavić, J. Pečarić, The inequalities for quasiarithmetic means, *Abstr. Appl. Anal.*, **2012** (2012), Article ID 203145.

[9] C. P. Niculescu, L. E. Persson, *Convex Functions and Their Applications*, Canadian Mathematical Society, Springer, New York, 2006.

[10] Z. Pavić, Improvements of the Hermite-Hadamard inequality, *J. Inequal. Appl.*, **2015** (2015), Article ID 222.

[11] Z. Pavić, Two inequalities and two means, *Journal of Advances in Mathematics*, **9** (2014), 1714-1723.

[12] J. E. Pečarić, F. Proschan, Y. L. Tong, *Convex Functions, Partial Orderings, and Statistical Applications*, Academic Press, New York, 1992.

Sažetak

U ovom diplomskom radu proučavaju se kvaziaritmetičke sredine. Rad se sastoji od četiriju poglavlja. Prvo poglavlje se bavi pojmom konveksnosti. Dokazana su brojna svojstva konveksnih funkcija te navedeni primjeri istih. Drugo poglavlje izučava diskretni i integralni oblik Jensenove i Hermite-Hadamardove nejednakosti. Navedene nejednakosti korištene su pri uspoređivanju matematičkih sredina. U trećem poglavlju proučavaju se aritmetička, geometrijska i harmonijska sredina i osnovne integralne sredine: aritmetička, identrička i logaritamska. Na kraju poglavlja navedene sredine su poredane po veličini. Četvrto poglavlje se bavi diskretnim i integralnim kvaziaritmetičkim sredinama. Dokazan je osnovni teorem koji govori o poretku kvaziaritmetičkih sredina. Na kraju rada uvedene su potencijske sredine kao poseban slučaj diskretnih i logaritamske sredine kao poseban slučaj integralnih kvaziaritmetičkih sredina.

Summary

This graduate thesis studies quasiarithmetic means. The paper consists of four chapters. The first chapter deals with the concept of convexity. Numerous properties of convex functions are proven and examples of convex functions are provided. The second chapter studies discrete and integral form of Jensen's and Hermite-Hadamard's inequalities. These inequalities are used for comparison of mathematical means. The third chapter examines arithmetic, geometric and harmonic means and basic integral means: arithmetic, identric and logarithmic. At the end of the chapter all aforementioned means are sorted by size. The fourth chapter deals with discrete and integral quasiarithmetic means. The basic theorem which refers to order of quasiarithmetic means is proven. End of the paper introduces power means as a special case of discrete and logarithmic means as a special case of integral quasiarithmetic means.

Životopis

Rođena sam 26. srpnja 1988. godine u Zenici, BiH. Godine 1995. upisujem Drugu osnovnu školu u Zavidovićima, a potom 2003. godine Opću gimnaziju Zavidovići. Po završetku gimnazije, 2007. godine, upisujem Preddiplomski sveučilišni studij Matematika na Prirodoslovno matematičkom fakultetu, Matematički odsjek Sveučilišta u Zagrebu. Nakon četiri godine prebacujem se na Preddiplomski sveučilišni studij Matematika; smjer: nastavnički, istog odsjeka PMF-a. Godine 2013. završavam preddiplomski studij, te upisujem Diplomski sveučilišni studij Matematika i informatika; smjer: nastavnički. U ljeto 2015. godine odrađujem studentsku praksu u Siemensu Hrvatska, odjel industrijska automatizacija.