Cevin i Menelajev teorem te generalizacije

Amižić, Tea

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Tea Amižić

CEVIN I MENELAJEV TEOREM TE GENERALIZACIJE

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc.dr.sc. Tomislav Pejković

Zagreb, rujan 2018.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

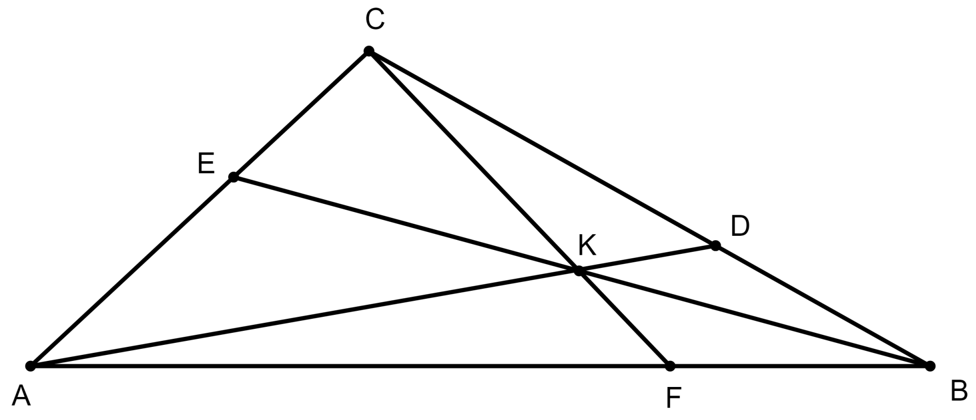
Velika hvala mojoj obitelji i mentoru na strpljenju i podršci.

Sadržaj

Uvod

Cevin i Menelajev teorem vrlo su korisni pri dokazivanju konkurentnosti pravaca i kolinearnosti točaka. U ovom radu bavit ćemo se dokazima teorema te ćemo vidjeti kako se navedeni teoremi mogu poopćiti.

Cevin teorem ime je dobio po talijanskom matematičaru Giovanniju Cevi (1647.–1734.). Školovanje koje je započeo u Milanu, kasnije je nastavio na Sveučilištu u Pisi, gdje je naposlijetku postao i profesor. Njegova najveća postignuća bila su iz područja geometrije. Ponovno je otkrio i objavio Menelajev teorem. Također, bavio se primjenom mehanike i statike u geometriji. U djelu *De lineis rectis* objavljuje svoj najpoznatiji teorem koji je danas poznat pod nazivom *Cevin teorem*. Tvrdnja teorema govori o uvjetu presijecanja triju dužina koje spajaju jedan vrh trokuta i točku s nasuprotne stranice.



Slika 0.1: Cevin teorem

Teorem (**Cevin teorem**). *Neka su D, E i F redom točke na stranicama $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ trokuta*

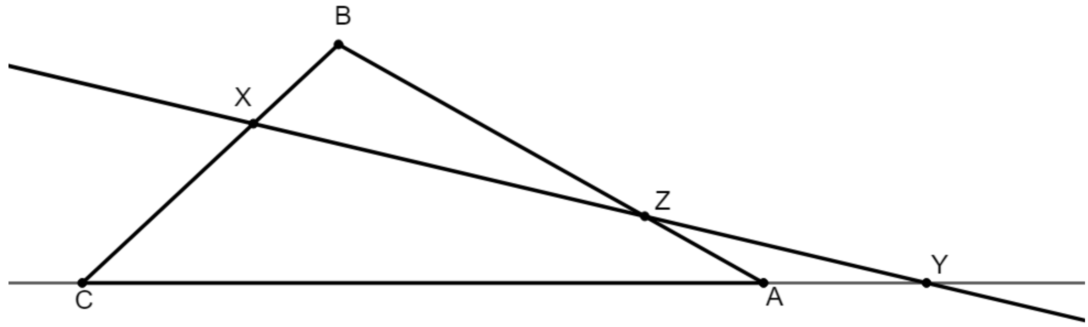
ABC. Pravci AD, BE i CF prolaze jednom točkom ako i samo ako vrijedi

$$\frac{|AF|}{|FB|} \cdot \frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} = 1. \tag{1}$$

S $|XY|$ označavamo neorijentiranu duljinu dužine $\overline{XY}$ koja je uvijek pozitivna. Ako odaberemo na pravcu XY pozitivnu orijentaciju, možemo koristiti i orijentiranu duljinu dužine $\overline{XY}$ koju označavamo sa XY. Uzimajući u obzir orijentaciju, jednakost (1) možemo zamijeniti s

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1. \tag{2}$$

Postoji i općenitija forma Cevinog teorema gdje točke D, E i F mogu biti smještene i na produžetcima stranica trokuta ABC, ali tada koristimo samo jednakost (2).



Slika 0.2: Menelajev teorem

Drugi spomenuti teorem je Menelajev teorem koji je dobio ime po grčkom matematičaru Menelaju iz Aleksandrije (70.–140.). Pretpostavlja se da je živio u Rimu. Bavio se geometrijom sfere i njezinom primjenom u astronomiji te se smatra začetnikom sferne trigonometrije. Njegovo jedino sačuvano djelo *Sphaerica* sačuvano je u arapskom prijevodu. Sadrži tri knjige u kojima se razvija teorija sfernih trokuta. U trećoj knjizi nalazi se teorem poznat pod nazivom *Menelajev teorem* kojega je Menelaj dokazao u sfernoj geometriji, a mi ćemo ga iskazati i dokazati u planimetriji, tj. geometriji ravnine.

Teorem (Menelajev teorem). *Neka su X, Y, Z redom točke na pravcima BC, AC, AB tako da su dvije od njih na stranici trokuta ABC, a treća je na produžetku stranice tog trokuta. Točke X, Y i Z su kolinearne ako i samo ako vrijedi*

$$\frac{|AZ|}{|ZB|} \cdot \frac{|BX|}{|XC|} \cdot \frac{|CY|}{|YA|} = 1. \tag{3}$$

Menelajev teorem daje kriterij za kolinearnost točaka. Uzimajući u obzir orijentaciju dužina, jednakost (3) možemo zamijeniti s

$$\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = -1. \tag{4}$$

Kao i za Cevin teorem, postoji općenitija forma Menelajevog teorema gdje ne stavljamo uvjete na to jesu li točke na stranicama ili produžetcima. I u tom slučaju koristimo isključivo jednakost (4).

Ovaj diplomski rad podijeljen je na četiri poglavlja. U prvom poglavlju definirane su baricentričke koordinate bilo koje točke obzirom na dani trokut te su iskazane određene tvrdnje koje se koriste kasnije u radu [1, 3, 9, 12].

U drugom poglavlju Cevin i Menelajev teorem najprije dokazujemo na standardni način koristeći omjere površina trokuta [10], a zatim preko težišta skupa točaka [7]. Na kraju poglavlja pokazujemo da se Cevin i Menelajev teorem mogu dobiti jedan iz drugog, to jest da su ekvivalentni [11].

Treće i četvrto poglavlje posvećeno je generalizaciji teorema u ravnini, a potom i u prostoru. U trećem poglavlju prvo je iskazan i dokazan Hoehnov teorem za pentagrame koji oblikom podsjeća na klasične teoreme [5, 6]. Zatim su teoremi generalizirani za mnogokute [5], a potom je pokazana tvrdnja za trokute koja istovremeno generalizira oba teorema [8]. U trodimenzionalnom prostoru je napravljena generalizacija prvo Cevinog, a potom i Menelajevog teorema obzirom na dani prostorni četverokut [4]. Na kraju je dana generalizacija Menelajevog teorema za konačnodimenzionalne vektorske prostore [2].

Poglavlje 1

Osnovni pojmovi i tvrdnje

1.1 Omjeri duljina i površina

Cilj ovog rada je dokazati Cevin i Menelajev teorem na različite načine te izvesti generalizacije tih teorema. Kako bi to učinili, potrebno je navesti osnovne pojmove i tvrdnje koje ćemo koristiti. Za početak, dokazati ćemo lemu koja pokazuje da različite točke dužine dijele tu dužinu u različitim omjerima.

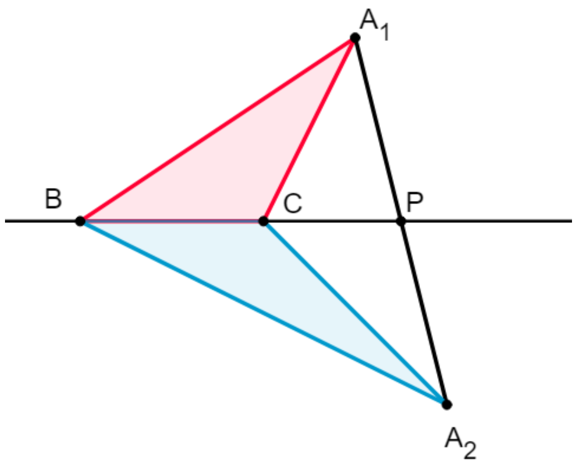
Lema 1.1. *Ako su X i Y točke na dužini $\overline{AB}$ sa svojstvom $\frac{|AX|}{|XB|} = \frac{|AY|}{|YB|}$, tada se točke X i Y podudaraju.*

Dokaz. Iz $\frac{|AX|}{|XB|} = \frac{|AY|}{|YB|}$ slijedi $\frac{|AB| - |BX|}{|XB|} = \frac{|AB| - |BY|}{|YB|}$ pa je $\frac{|AB|}{|XB|} = \frac{|AB|}{|YB|}$. Dakle, $|XB| = |YB|$, pa se X i Y podudaraju. □

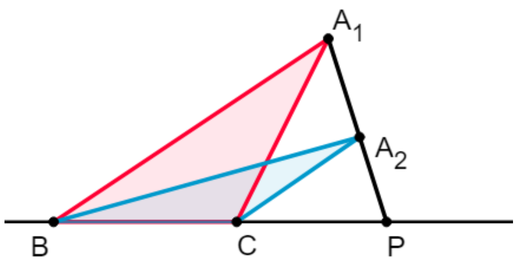
Neka je P sjecište pravaca BC i A_1A_2. Za omjere površina trokuta BCA_1 i BCA_2 vrijedi

$$\frac{P(BCA_1)}{P(BCA_2)} = \frac{|A_1P|}{|PA_2|}.$$

Uočimo da tvrdnja uvijek vrijedi, bez obzira nalaze li se točke A_1 i A_2 na suprotnim (slika 1.1) ili istim stranama (slika 1.2) pravca BC. Prethodna jednakost vrijedi i za orijentirane duljine, no tada promatramo orijentiranu površinu trokuta za koju nećemo koristiti posebnu oznaku, ali ćemo uvijek naglasiti kada je koristimo. Uzimamo da je $P(ABC)$ pozitivna ako je trokut ABC pozitivno orijentiran, tj. vrhovi A, B, C su navedeni u smjeru suprotnom od kazaljki na satu. Ako je trokut negativno orijentiran, orijentiranu površinu pišemo s negativnim predznakom.



Slika 1.1



Slika 1.2

1.2 Baricentričke koordinate

Pojam baricentričkih koordinata prvi je uveo August Ferdinand Möbius (1790.–1868.) u svojoj knjizi *Der Barycentrische calcul*, objavljenoj 1827. godine. Riječ baricentrička dolazi od grčke riječi *barys* što znači teško i odnosi se na težište. Möbius je primijetio da utege obješene na krajevima štapa može zamijeniti jednim utegom postavljenim u težište tog štapa. Iz ove ideje razvio se baricentrički koordinatni sustav.

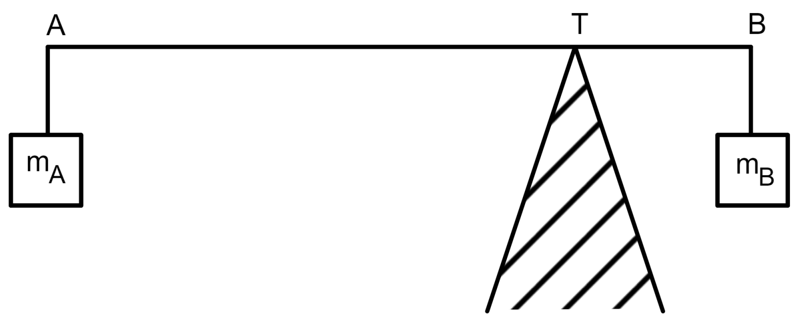
Materijalna točka je uređeni par (X, m) gdje je X točka, a m realan broj. Kažemo još da točka X ima masu m. Neka su X_1, X_2,..., X_n točke u prostoru i u svakoj točki X_i neka je smještena masa m_i, to jest promotrimo n - torku materijalnih točaka (X_1, m_1), ..., (X_n, m_n) pri čemu je

$$m_1 + \cdots + m_n \neq 0.$$

Baricentar ili težište tog skupa materijalnih točaka je točka O za koju je

$$m_1\overrightarrow{OX_1} + \cdots + m_n\overrightarrow{OX_n} = \vec{0}.$$

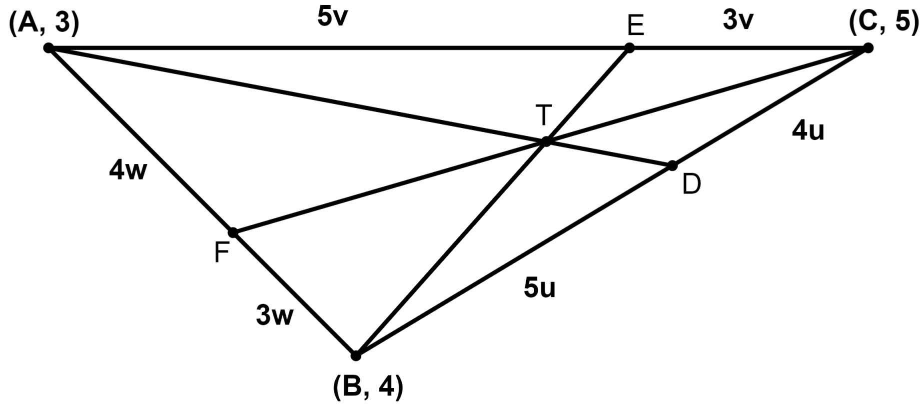
Lako je vidjeti da je težište jedinstveno. Nije teško pokazati da izbacivši proizvoljni podskup $S' = \{(P'_1, m'_1), \cdots (P'_r, m'_r)\}$ iz skupa materijalnih točaka S i ubacivši u taj skup materijalnu točku $(P', \sum_{i=1}^{r} m'_i)$, gdje je P' težište sustava S', dobivamo novi sustav materijalnih točaka koji ima isto težište kao i S.



Slika 1.3: Težište skupa materijalnih točaka

Pogledajmo sliku 1.3. Na rubovima štapa obješeni su utezi mase m_A i m_B. Težište T skupa $\{(A, m_A), (B, m_B)\}$ se nalazi na pravcu AB i vrijedi $AT \cdot m_A = TB \cdot m_B$, tj. $AT : TB = m_B : m_A$. Dakle, ako je d udaljenost točaka A i B, težište skupa $\{(A, m_A), (B, m_B)\}$ se nalazi na udaljenosti $\dfrac{m_B}{m_A + m_B}d$ od točke A i na udaljenosti $\dfrac{m_A}{m_A + m_B}d$ od točke B.

Proširimo sada promatranje na trokut sa slike 1.4. Trokut ima u vrhu A masu 3, u vrhu B masu 4 te u vrhu C masu 5. Neka je D točka na BC tako da je $BD : DC = 5 : 4$. Budući da je točka D težište skupa $\{(B, 4), (C, 5)\}$, zaključujemo da se težište od $\{(A, 3), (B, 4), (C, 5)\}$ podudara sa težištem od $\{(A, 3), (D, 9)\}$, što znači da se težište danog tročlanog skupa nalazi na pravcu AD. Neka je E točka na AC tako da je $CE : EA = 3 : 5$ i F točka na AB tako da je $AF : FB = 4 : 3$. Vidimo da je E težište skupa $\{(A, 3), (C, 5)\}$, a F težište skupa



Slika 1.4: Baricentričke koordinate

$\{(A,3),(B,4)\}$. Na isti način zaključujemo da će se težište od $\{(A,3),(B,4),(C,5)\}$ nalaziti na pravcima BE i CF pa sva tri pravca prolaze težištem sustava $\{(A,3),(B,4),(C,5)\}$. Definiramo točku T koja je sjecište pravaca AD, BE i CF kao točku s baricentričkim koordinatama $(3:4:5)$ obzirom na trokut ABC.

Definicija 1.2 (**Baricentričke koordinate**). *Točka T s baricentričkim koordinatama $(x : y : z)$ je težište skupa točaka u kojem su mase x, y i z smještene redom u vrhove A, B, C zadanog trokuta, tj. težište skupa materijalnih točaka* $\{(A,x),(B,y),(C,z)\}$.

Napomenimo da mase mogu biti nula ili čak negativne.

Primijetimo da baricentričke koordinate nisu jedinstvene. Ako su $(x : y : z)$ baricentričke koordinate točke T, tada su to i $(\lambda x : \lambda y : \lambda z)$ za bilo koji $\lambda \neq 0$. Takve koordinate zovemo *homogene* baricentričke koordinate. Ako uzmemo $\lambda = 1/(x+y+z)$, dobivamo koordinate kojima je suma jednaka 1 i njih nazivamo *nehomogene* baricentričke koordinate.

Baricentričke koordinate možemo definirati i direktno uz pomoć vektora. Neka je dan trokut ABC. Za bilo koju točku T u ravnini s $\overrightarrow{OT}$ označavamo njezin radijvektor s obzirom na proizvoljno odabrano ishodište O. Za danu točku T jednoznačno su određeni brojevi y i z tako da je $\overrightarrow{AT} = y\cdot\overrightarrow{AB} + z\cdot\overrightarrow{AC}$, tj. $\overrightarrow{OT} - \overrightarrow{OA} = y\cdot(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) + z\cdot(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA})$. Ako stavimo da je $x = 1 - y - z$, slijedi

$$\overrightarrow{OT} = x\cdot\overrightarrow{OA} + y\cdot\overrightarrow{OB} + z\cdot\overrightarrow{OC}, \quad x+y+z=1.$$

Brojevi x, y, z koji zadovoljavaju prethodne jednakosti jednoznačno su određeni točkom T i trokutom ABC i očito ne ovise o izboru ishodišta. Primjetimo da su to upravo nehomogene baricentričke koordinate točke T.

Navedimo još neke činjenice koje ćemo koristiti u radu, a za dokaze upućujemo primjerice na [12].

Teorem 1.3. *Jednadžba pravca kroz različite točke $T_1(x_1 : y_1 : z_1)$ i $T_2(x_2 : y_2 : z_2)$ ima oblik*

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Teorem 1.4. *Tri točke $T_i(x_i : y_i : z_i)$, pri čemu je $i = 1, 2, 3$ su kolinearne ako i samo ako je*

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Teorem 1.5. *Tri pravca s jednadžbama u baricentričkim koordinatama*

$$\begin{aligned} X_1x + Y_1y + Z_1z &= 0 \\ X_2x + Y_2y + Z_2z &= 0 \\ X_3x + Y_3y + Z_3z &= 0 \end{aligned}$$

prolaze istom točkom ako i samo ako je

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Poglavlje 2

Dokazi teorema

Cevin i Menelajev teorem već smo iskazali u Uvodu. U ovom poglavlju dokazat ćemo spomenute teoreme na dva načina. Prvi način je pomoću omjera površina trokuta, a drugi način je pomoću težišta.

2.1 Dokaz Cevinog teorema

Prvi način

Dokaz. Pretpostavimo da se pravci AD, BE i CF sijeku u točki K. Treba pokazati da vrijedi

$$\frac{|AF|}{|FB|} \cdot \frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} = 1. \tag{2.1}$$

Promotrimo trokute FCA i FBC. Ti trokuti imaju istu visinu iz vrha C čiju duljinu označimo sa $2v$ pa vrijedi

$$P(FCA) = |AF| \cdot v, \quad P(FBC) = |FB| \cdot v.$$

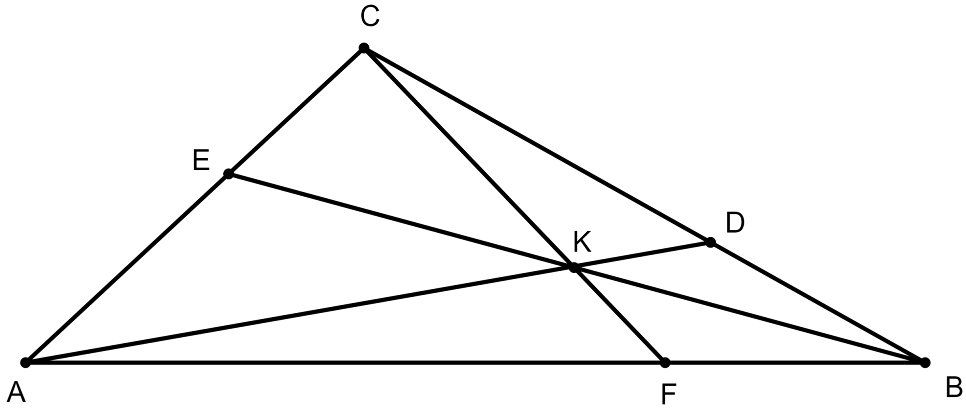
Analogno vrijedi i za trokute FKA i FBK koji imaju istu visinu iz vrha K čiju duljinu označimo sa $2v'$ pa je

$$P(FKA) = |AF| \cdot v', \quad P(FBK) = |FB| \cdot v'.$$

Iz prethodnih jednakosti slijedi:

$$\frac{P(KCA)}{P(KBC)} = \frac{P(FCA) - P(FKA)}{P(FBC) - P(FBK)} = \frac{|AF| \cdot v - |AF| \cdot v'}{|FB| \cdot v - |FB| \cdot v'} = \frac{|AF| \cdot (v - v')}{|FB| \cdot (v - v')} = \frac{|AF|}{|FB|}.$$

Promatrali smo trokute čije osnovice leže na pravcu AB. Analogno dobivamo da za druga



Slika 2.1: Cevin teorem

dva para trokuta vrijedi

$$\frac{P(ABK)}{P(AKC)} = \frac{|BD|}{|DC|},$$
$$\frac{P(KBC)}{P(KAB)} = \frac{|CE|}{|EA|}.$$

Množenjem te tri jednakosti, slijedi

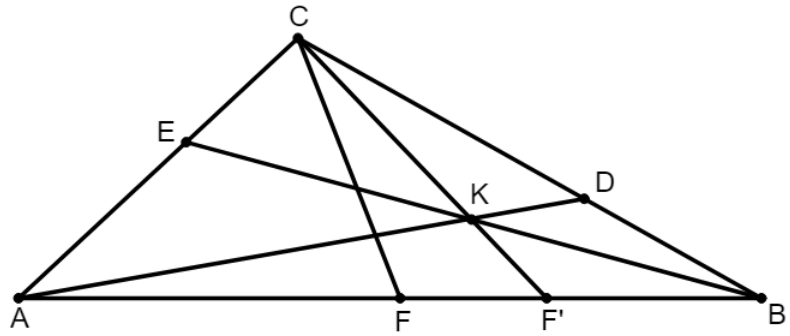
$$\frac{|AF|}{|FB|} \cdot \frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} = \frac{P(KCA)}{P(KBC)} \cdot \frac{P(ABK)}{P(AKC)} \cdot \frac{P(KBC)}{P(KAB)} = 1.$$

Obratno, pretpostavimo da vrijedi (2.1) za točke D, E, F redom na stranicama $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ trokuta ABC. Treba pokazati da se pravci AD, BE i CF sijeku u jednoj točki. Neka je K sjecište dužina $\overline{AD}$ i $\overline{BE}$. Sjecište pravaca CK i AB označimo s F'. Prema već dokazanom smjeru Cevinog teorema, imamo

$$\frac{|AF'|}{|F'B|} \cdot \frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} = 1.$$

Budući da vrijedi i (2.1) slijedi

$$\frac{|AF'|}{|F'B|} \cdot \frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} = \frac{|AF|}{|FB|} \cdot \frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|},$$



Slika 2.2: Obrat Cevinog teorema

pa je

$$\frac{|AF'|}{|F'B|} = \frac{|AF|}{|FB|}.$$

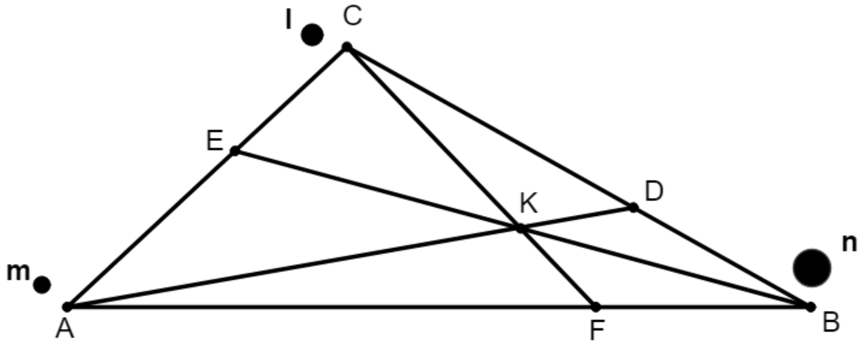
Kako točke F' i F leže na $\overline{AB}$, prema lemi 1.1 slijedi da se točke F' i F podudaraju, to jest pravci AD, BE i CF sijeku se u jednoj točki. Time je teorem dokazan. □

Drugi način

Dokaz. Pretpostavimo da se pravci AD, BE i CF sijeku u jednoj točki. Treba pokazati da vrijedi

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1.$$

Neka je $CE/EA = m/l$ i $BD/DC = l/n$. Smjestimo sada mase m, n i l redom u vrhove trokuta A, B i C. Tada je točka E težište od $\{(A, m), (C, l)\}$. Stoga se težište skupa materijalnih točaka $\{(A, m), (B, n), (C, l)\}$ podudara s težištem od $\{(B, n), (E, m + l)\}$ pa leži na pravcu BE. Slično, točka D je težište od $\{(B, n), (C, l)\}$ i težište skupa $\{(A, m), (B, n), (C, l)\}$ isto je kao težište od $\{(A, m), (D, n + l)\}$ pa leži na pravcu AD. Dakle, u presjeku pravaca AD i BE nalazi se težište od $\{(A, m), (B, n), (C, l)\}$. Budući da znamo da se pravci AD, BE i CF sijeku u jednoj točki, pravac CF sadrži težište od $\{(A, m), (B, n), (C, l)\}$, tj. težište od $\{(C, l), (X, m + n)\}$, gdje je X težište od $\{(A, m), (B, n)\}$ te stoga X leži i na pravcu AB i na



Slika 2.3

pravcu CF. Dakle, $X = F$ pa slijedi da je $AF/FB = n/m$.
Konačno je,

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = \frac{n}{m} \cdot \frac{l}{n} \cdot \frac{m}{l} = 1.$$

Obrat se pokazuje vrlo slično pa ga preskačemo. □

2.2 Dokaz Menelajevog teorema

Prvi način

Dokaz. Neka su točke X, Y, Z redom s pravaca BC, CA, AB kolinearne. Treba pokazati da vrijedi

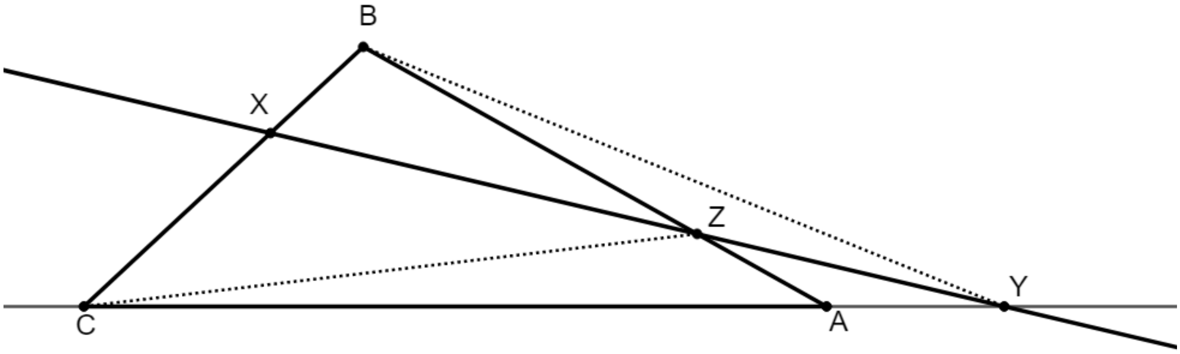
$$\frac{|AZ|}{|ZB|} \cdot \frac{|BX|}{|XC|} \cdot \frac{|CY|}{|YA|} = 1. \tag{2.2}$$

Promotrimo trokute AYZ i YBZ. Za omjere njihovih površina vrijedi

$$\frac{P(AYZ)}{P(YBZ)} = \frac{|AZ|}{|ZB|}$$

Analogno dobivamo

$$\frac{P(YBZ)}{P(CYZ)} = \frac{|BX|}{|XC|},$$



Slika 2.4: Menelajev teorem

$$\frac{P(CYZ)}{P(AYZ)} = \frac{|CY|}{|YA|}.$$

Množenjem te tri jednakosti slijedi

$$\frac{|AZ|}{|ZB|} \cdot \frac{|BX|}{|XC|} \cdot \frac{|CY|}{|YA|} = 1.$$

Obratno, neka vrijedi (2.2). Treba pokazati da su točke X, Y i Z kolinearne. S X' označimo sjecište pravaca YZ i BC. Prema prethodno dokazanom dijelu teorema je

$$\frac{|AZ|}{|ZB|} \cdot \frac{|BX'|}{|X'C|} \cdot \frac{|CY|}{|YA|} = 1.$$

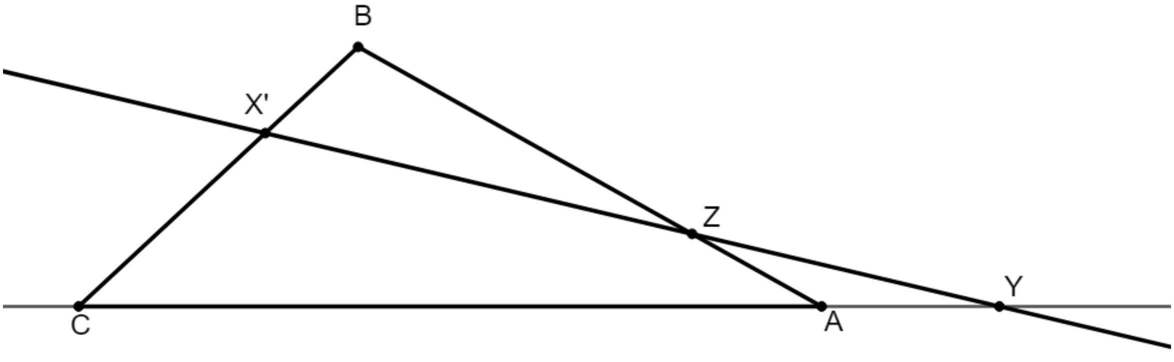
Dakle,

$$\frac{|AZ|}{|ZB|} \cdot \frac{|BX'|}{|X'C|} \cdot \frac{|CY|}{|YA|} = \frac{|AZ|}{|ZB|} \cdot \frac{|BX|}{|XC|} \cdot \frac{|CY|}{|YA|},$$

pa je

$$\frac{|BX'|}{|X'C|} = \frac{|BX|}{|XC|}.$$

Kako su X' i X točke na dužini $\overline{BC}$, iz leme 1.1 slijedi $X' = X$. Dakle, točke X, Y i Z su kolinearne. □



Slika 2.5: Obrat Menelajevog teorema

Drugi način

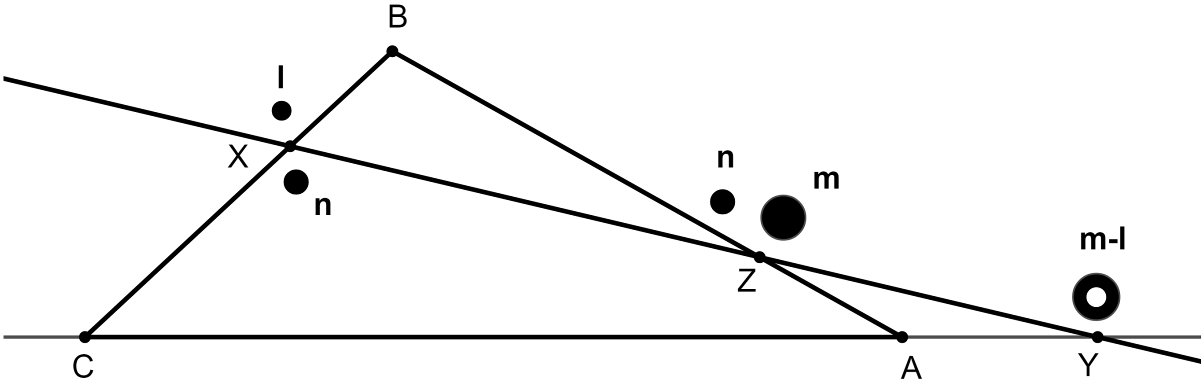
Dokaz. Pretpostavimo da su točke X, Y, Z kolinearne. Uzimajući u obzir orijentaciju dužina, treba pokazati da vrijedi

$$\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = -1. \tag{2.3}$$

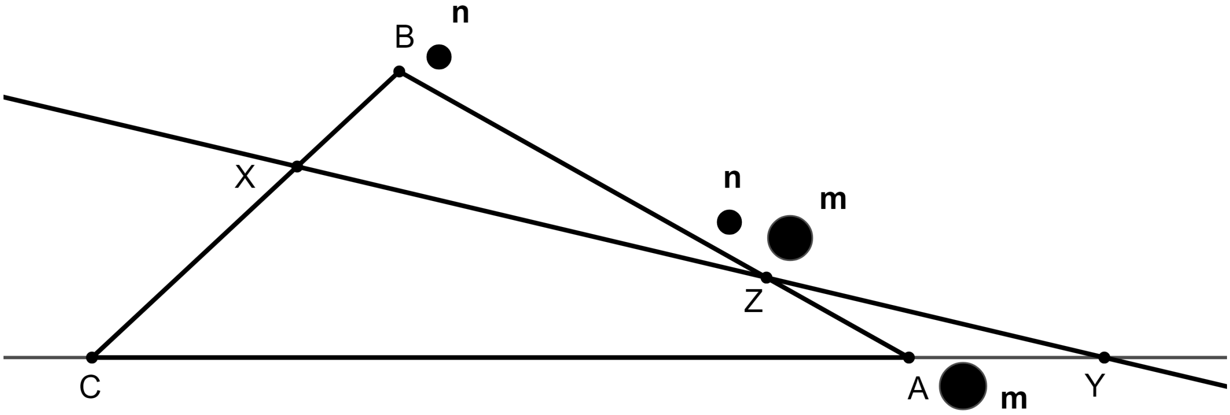
Neka je $BX/XC = l/n$ i $CY/YA = -m/l$. Razmjestimo mase $l + n$ u X, $n + m$ u Z i $m - l$ u Y. Težište ovog skupa materijalnih točaka očito leži na pravcu XYZ. Masu $l + n$ koja je u točki X možemo razdijeliti tako da u vrhu C bude masa l i u vrhu B masa n. Također, masu l koja je u vrhu C i masu $m - l$ koja je u točki Y možemo zamijeniti jednom masom m koja je u vrhu A. Težište se pri ovim prebacivanjima nije promijenilo, očito mora ležati na pravcu AB pa slijedi da je težište u presjeku pravaca XY i AB, tj. u točki Z. Stoga je $AZ/ZB = n/m$. Uvrštavanjem dobivamo

$$\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = \frac{n}{m} \cdot \frac{l}{n} \cdot \left(-\frac{m}{l}\right) = -1.$$

Obrat se dokazuje na sličan način pa ga izostavljamo. □



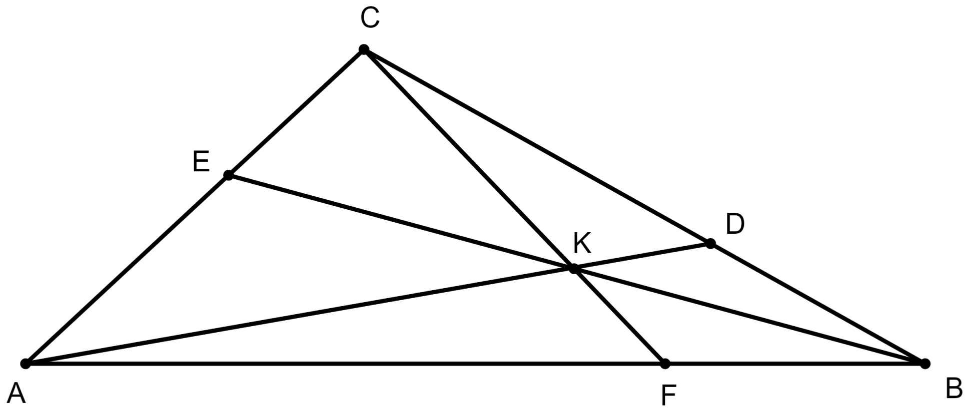
Slika 2.6



Slika 2.7

2.3 Ekvivalentnost teorema

Cevin i Menelajev teorem često se povezuju, a jedan od razloga je da se jedan teorem može dokazati uz pomoć drugog i obratno. Pogledajmo prvo kako se Cevin teorem može dokazati uz pomoć Menelajevog teorema.



Slika 2.8: Cevin teorem

Dokaz (Cevin teorem iz Menelajevog teorema). Neka se AD, BE i CF sijeku u točki K. Treba pokazati da vrijedi

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1.$$

Primijenit ćemo Menelajev teorem na trokut FCA i kolinearne točke B, K i E. Vrijedi

$$\frac{AB}{BF} \cdot \frac{FK}{KC} \cdot \frac{CE}{EA} = -1.$$

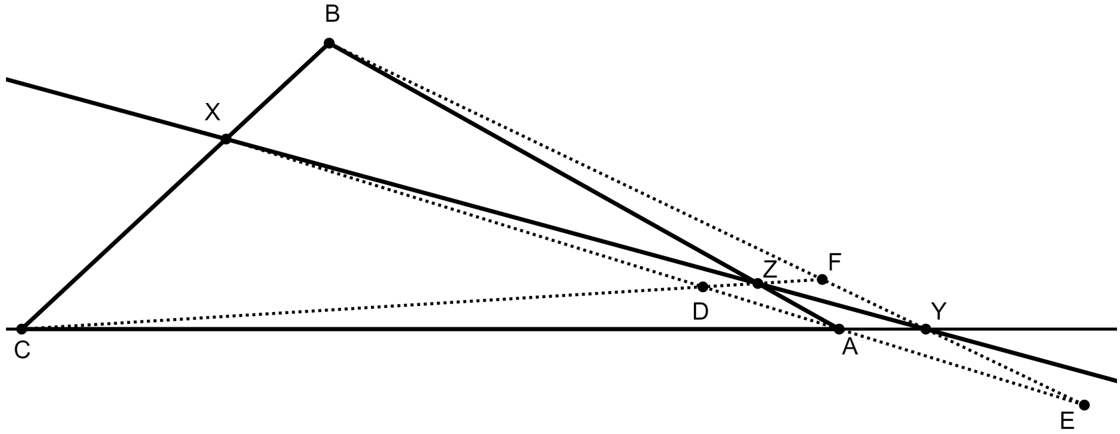
Primijenimo ponovno Menelajev teorem na trokut FBC i kolinearne točke A, K, D. Vrijedi

$$\frac{FA}{AB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CK}{KF} = -1.$$

Ako pomnožimo prethodne dvije jednakosti, dobijemo

$$\frac{AB}{BF} \cdot \frac{FK}{KC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{FA}{AB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CK}{KF} = 1,$$

iz čega skraćivanjem slijedi
$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1,$$
a to je Cevin teorem. □



Slika 2.9: Menelajev teorem

Menelajev teorem može se dobiti iz Cevinog, ali potrebno je znatno više koraka kako bi to učinili.

Dokaz (Menelajev teorem iz Cevinog teorema). Neka je zadan trokut ABC i kolinearne točke X, Y, Z. Treba pokazati da vrijedi
$$\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = -1. \tag{2.4}$$
Neka se CZ i AX sijeku u točki D, AX i BY sijeku u točki E, a BY i CZ u točki F. Primijenit ćemo Cevin teorem tri puta. Prvo ćemo primijeniti teorem na trokut AZC i konkurentne pravce BC, AD i ZY. Vrijedi
$$\frac{CY}{YA} \cdot \frac{AB}{BZ} \cdot \frac{ZD}{DC} = 1.$$
Zatim ćemo primijeniti Cevin teorem na trokut ABX i konkurentne pravce AC, BE i XZ. Vrijedi
$$\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BC}{CX} \cdot \frac{XE}{EA} = 1.$$

Konačno, primijenimo Cevin teorem na trokut BCY i konkurentne pravce BA, CF i YX. Vrijedi

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CA}{AY} \cdot \frac{YF}{FB} = 1.$$

Pomnožimo li prethodne tri jednakosti dobijemo

$$\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AB}{BZ} \cdot \frac{ZD}{DC} \cdot \frac{BC}{CX} \cdot \frac{XE}{EA} \cdot \frac{CA}{AY} \cdot \frac{YF}{FB} = 1. \tag{2.5}$$

Uočimo da je umnožak prva tri faktora jednak lijevoj strani od (2.4). Primijenimo sada ponovno Cevin teorem tri puta i to na trokut CZX i konkurentne pravce CY, ZB i XD. Dobivamo

$$\frac{CD}{DZ} \cdot \frac{ZY}{YX} \cdot \frac{XB}{BC} = 1.$$

Potom na trokut AXY i konkurentne pravce AZ, XC i YE. Dobivamo

$$\frac{AE}{EX} \cdot \frac{XZ}{ZY} \cdot \frac{YC}{CA} = 1.$$

Konačno, na trokut BYZ i konkurentne pravce BX, YA i ZF. Dobivamo

$$\frac{BF}{FY} \cdot \frac{YX}{XZ} \cdot \frac{ZA}{AB} = 1.$$

Pomnožimo li gornje tri jednakosti s (2.5) zbog

$$\frac{ZD}{DC} \cdot \frac{CD}{DZ} = \frac{XE}{EA} \cdot \frac{AE}{EX} = \frac{YF}{FB} \cdot \frac{BF}{FY} = 1,$$

i kraćenja BC, CA, AB, XZ, ZY, YX slijedi

$$\left(\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA}\right) \cdot \left(\frac{ZA}{BZ} \cdot \frac{XB}{CX} \cdot \frac{YC}{AY}\right) = 1^4 = 1.$$

Dakle,

$$\left(\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA}\right)^2 = 1.$$

Budući da znamo da pravci AX, BY i CZ nisu konkurentni niti su paralelni, prema obratu Cevinog teorema znamo da je

$$\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \neq 1.$$

Slijedi da je

$$\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = -1,$$

što je tvrdnja Menelajevog teorema. □

Poglavlje 3

Generalizacije teorema u ravnini

3.1 Hoehnov teorem

Cevin i Menelajev teorem mogu se generalizirati na razne načine. Prvo ćemo promatrati Hoehnov teorem za pentagrame koji podsjeća na spomenute teoreme. Pentagram ili zvjezdasti peterokut je geometrijski lik koji omeđuju dijagonale konveksnog peterokuta.

Teorem 3.1 (**Hoehnov teorem**). *Neka je $A_1B_1A_2B_2A_3B_3A_4B_4A_5B_5$ pentagram. Tada je*

$$\frac{A_1B_1}{B_1A_2} \cdot \frac{A_2B_2}{B_2A_3} \cdot \frac{A_3B_3}{B_3A_4} \cdot \frac{A_4B_4}{B_4A_5} \cdot \frac{A_5B_5}{B_5A_1} = 1. \tag{3.1}$$

Dokaz. U dokazu ćemo primjenjivati Menelajev teorem i to u obliku (4).
Neka je $A_{i+5} = A_i$ i $B_{i+5} = B_i$ za $i = 1, 2, ..., 5$. Primjenjujemo Menelajev teorem na trokute oblika $A_iB_iB_{i+4}$ i pravce oblika $A_{i+1}A_{i+3}$.
Za $i = 1$ promatramo $\triangle A_1B_1B_5$ i A_2A_4. Vrijedi

$$\frac{A_1B_2}{B_2B_1} \cdot \frac{B_1A_2}{A_2B_5} \cdot \frac{B_5A_4}{A_4A_1} = -1.$$

Za $i = 2$ promatramo $\triangle A_2B_2B_1$ i A_3A_5. Vrijedi

$$\frac{A_2B_3}{B_3B_2} \cdot \frac{B_2A_3}{A_3B_1} \cdot \frac{B_1A_5}{A_5A_2} = -1.$$

Za $i = 3$ promatramo $\triangle A_3B_3B_2$ i A_4A_1. Vrijedi

$$\frac{A_3B_4}{B_4B_3} \cdot \frac{B_3A_4}{A_4B_2} \cdot \frac{B_2A_1}{A_1A_3} = -1.$$

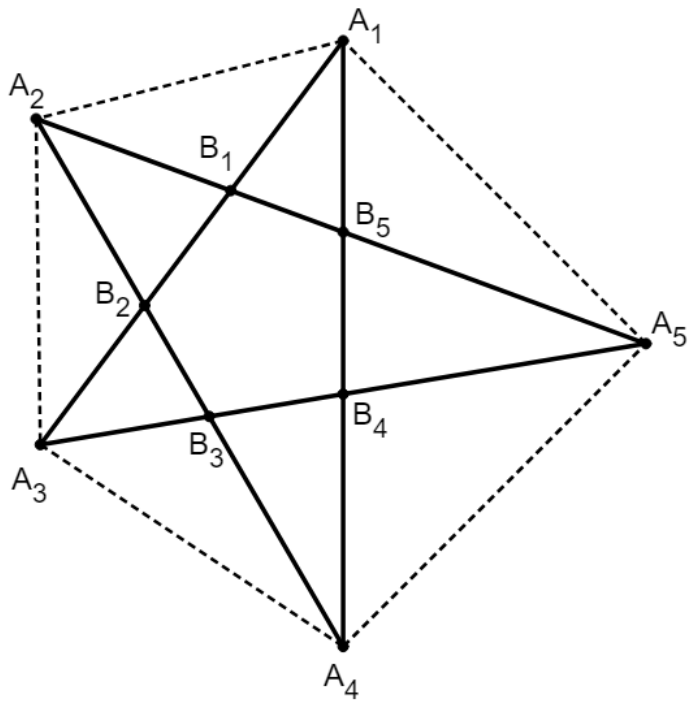
Za $i = 4$ promatramo $\triangle A_4B_4B_3$ i A_5A_2. Vrijedi

$$\frac{A_4B_5}{B_5B_4} \cdot \frac{B_4A_5}{A_5B_3} \cdot \frac{B_3A_2}{A_2A_4} = -1.$$

Za $i = 5$ promatramo $\triangle A_5B_5B_4$ i A_1A_3. Vrijedi

$$\frac{A_5B_1}{B_1B_5} \cdot \frac{B_5A_1}{A_1B_4} \cdot \frac{B_4A_3}{A_3A_5} = -1.$$

Sada, promatramo iste trokute $A_iB_iB_{i+4}$ i pravce oblika $A_{i+2}A_{i+4}$.



Slika 3.1: Hoehnov teorem

Za $i = 1$ promatramo $\triangle A_1B_1B_5$ i A_3A_5. Vrijedi

$$\frac{A_1A_3}{A_3B_1} \cdot \frac{B_1A_5}{A_5B_5} \cdot \frac{B_5B_4}{B_4A_1} = -1.$$

Za $i = 2$ promatramo $\triangle A_2B_2B_1$ i A_4A_1. Vrijedi

$$\frac{A_2A_4}{A_4B_2} \cdot \frac{B_2A_1}{A_1B_1} \cdot \frac{B_1B_5}{B_5A_2} = -1.$$

Za $i = 3$ promatramo $\triangle A_3B_3B_2$ i A_5A_2. Vrijedi

$$\frac{A_3A_5}{A_5B_3} \cdot \frac{B_3A_2}{A_2B_2} \cdot \frac{B_2B_1}{B_1A_3} = -1.$$

Za $i = 4$ promatramo $\triangle A_4B_4B_3$ i A_1A_3. Vrijedi

$$\frac{A_4A_1}{A_1B_4} \cdot \frac{B_4A_3}{A_3B_3} \cdot \frac{B_3B_2}{B_2A_4} = -1.$$

Za $i = 5$ promatramo $\triangle A_5B_5B_4$ i A_2A_4. Vrijedi

$$\frac{A_5A_2}{A_2B_5} \cdot \frac{B_5A_4}{A_4B_4} \cdot \frac{B_4B_3}{B_3A_5} = -1.$$

Množenjem prethodnih deset jednakosti i sređivanjem dobijemo sljedeće

$$\left(\frac{A_1B_2}{B_2A_4} \cdot \frac{A_4B_5}{B_5A_2} \cdot \frac{A_2B_3}{B_3A_5} \cdot \frac{A_5B_1}{B_1A_3} \cdot \frac{A_3B_4}{B_4A_1}\right)^3 \cdot \left(\frac{B_5A_1}{A_1B_1} \cdot \frac{B_1A_2}{A_2B_2} \cdot \frac{B_2A_3}{A_3B_3} \cdot \frac{B_3A_4}{A_4B_4} \cdot \frac{B_4A_5}{A_5B_5}\right) = 1. \quad (3.2)$$

Slično, za trokute oblika $A_iA_{i+2}B_{i+3}$ i pravce oblika $A_{i+1}A_{i+4}$.
Za $i = 1$ promatramo $\triangle A_1A_3B_4$ i A_2A_5. Vrijedi

$$\frac{A_1B_1}{B_1A_3} \cdot \frac{A_3A_5}{A_5B_4} \cdot \frac{B_4B_5}{B_5A_1} = -1.$$

Za $i = 2$ promatramo $\triangle A_2A_4B_5$ i A_3A_1. Vrijedi

$$\frac{A_2B_2}{B_2A_4} \cdot \frac{A_4A_1}{A_1B_5} \cdot \frac{B_5B_1}{B_1A_2} = -1.$$

Za $i = 3$ promatramo $\triangle A_3A_5B_1$ i A_4A_2. Vrijedi

$$\frac{A_3B_3}{B_3A_5} \cdot \frac{A_5A_2}{A_2B_1} \cdot \frac{B_1B_2}{B_2A_3} = -1.$$

Za $i = 4$ promatramo $\triangle A_4A_1B_2$ i A_5A_3. Vrijedi

$$\frac{A_4B_4}{B_4A_1} \cdot \frac{A_1A_3}{A_3B_2} \cdot \frac{B_2B_3}{B_3A_4} = -1.$$

Za $i = 5$ promatramo $\triangle A_5A_2B_3$ i A_1A_4. Vrijedi

$$\frac{A_5B_5}{B_5A_2} \cdot \frac{A_2A_4}{A_4B_3} \cdot \frac{B_3B_4}{B_4A_5} = -1.$$

Analogno, za iste trokute $A_iA_{i+2}B_{i+3}$ i pravce oblika $A_{i+1}A_{i+3}$ dobijemo sljedeće
za $i = 1$ promatramo $\triangle A_1A_3B_4$ i A_2A_4. Vrijedi

$$\frac{A_1B_2}{B_2A_3} \cdot \frac{A_3B_3}{B_3B_4} \cdot \frac{B_4A_4}{A_4A_1} = -1.$$

Za $i = 2$ promatramo $\triangle A_2A_4B_5$ i A_3A_5. Vrijedi

$$\frac{A_2B_3}{B_3A_4} \cdot \frac{A_4B_4}{B_4B_5} \cdot \frac{B_5A_5}{A_5A_2} = -1.$$

Za $i = 3$ promatramo $\triangle A_3A_5B_1$ i A_4A_1. Vrijedi

$$\frac{A_3B_4}{B_4A_5} \cdot \frac{A_5B_5}{B_5B_1} \cdot \frac{B_1A_1}{A_1A_3} = -1.$$

Za $i = 4$ promatramo $\triangle A_4A_1B_2$ i A_5A_2. Vrijedi

$$\frac{A_4B_5}{B_5A_1} \cdot \frac{A_1B_1}{B_1B_2} \cdot \frac{B_2A_2}{A_2A_4} = -1.$$

Za $i = 5$ promatramo $\triangle A_5A_2B_3$ i A_1A_3. Vrijedi

$$\frac{A_5B_1}{B_1A_2} \cdot \frac{A_2B_2}{B_2B_3} \cdot \frac{B_3A_3}{A_3A_5} = -1.$$

Množenjem prethodnih deset jednakosti i sređivanjem dobijemo

$$\left(\frac{A_1B_2}{B_2A_4} \cdot \frac{A_4B_5}{B_5A_2} \cdot \frac{A_2B_3}{B_3A_5} \cdot \frac{A_5B_1}{B_1A_3} \cdot \frac{A_3B_4}{B_4A_1}\right)^3 \cdot \left(\frac{A_1B_1}{B_1A_2} \cdot \frac{A_2B_2}{B_2A_3} \cdot \frac{A_3B_3}{B_3A_4} \cdot \frac{A_4B_4}{B_4A_5} \cdot \frac{A_5B_5}{B_5A_1}\right) = 1. \quad (3.3)$$

Promotrimo jednakosti (3.2) i (3.3). Primjećujemo da im je prvi faktor jednak, dok je drugi recipročan. Dijeljenjem jednadžbe (3.3) s (3.2) dobijemo

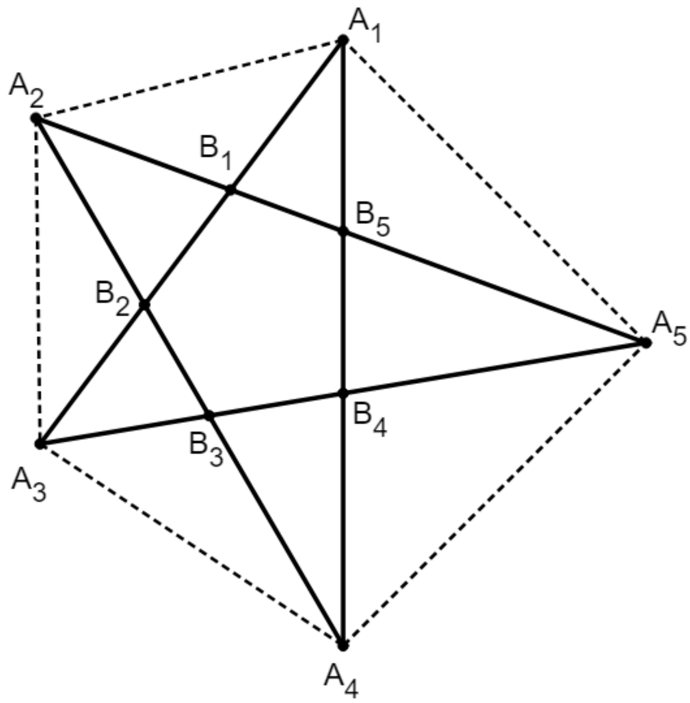
$$\left(\frac{A_1B_1}{B_1A_2} \cdot \frac{A_2B_2}{B_2A_3} \cdot \frac{A_3B_3}{B_3A_4} \cdot \frac{A_4B_4}{B_4A_5} \cdot \frac{A_5B_5}{B_5A_1}\right)^2 = 1,$$

iz čega slijedi (3.1) jer se lako vidi da produkt mora biti pozitivan. Time je teorem dokazan. □

Dodatno, uočimo da iz gornje jednakosti slijedi

$$\frac{A_1B_2}{B_2A_4} \cdot \frac{A_4B_5}{B_5A_2} \cdot \frac{A_2B_3}{B_3A_5} \cdot \frac{A_5B_1}{B_1A_3} \cdot \frac{A_3B_4}{B_4A_1} = 1.$$

Primjećujemo da je ovaj dokaz bio dosta opsežan. Sada ćemo pogledati kako možemo teorem dokazati na elegantniji način i to pomoću omjera površina određenih trokuta.



Slika 3.2: Hoehnov teorem

Dokaz. Pogledajmo trokute s bazom $\overline{A_2A_4}$, tj. trokut $A_2A_4A_1$ i trokut $A_2A_3A_4$. Za omjere njihovih površina vrijedi

$$\frac{P(A_2A_4A_1)}{P(A_2A_3A_4)} = \frac{A_1B_2}{B_2A_3}.$$

Stoga je

$$\frac{A_1A_3}{B_2A_3} = \frac{A_1B_2 + B_2A_3}{B_2A_3} = \frac{A_1B_2}{B_2A_3} + 1 = \frac{P(A_2A_4A_1) + P(A_2A_3A_4)}{P(A_2A_3A_4)}.$$

Uočimo da u brojniku zbroj površina trokuta određuje površinu čeverokuta $P(A_1A_2A_3A_4)$ pa slijedi

$$\frac{A_1A_3}{B_2A_3} = \frac{P(A_1A_2A_3A_4)}{P(A_3A_4A_2)}.$$

Promotrimo sada trokute $A_2A_5A_1$ i $A_2A_3A_5$. Za omjere njihovih površina vrijedi

$$\frac{P(A_2A_5A_1)}{P(A_2A_3A_5)} = \frac{A_1B_1}{B_1A_3}.$$

Dakle,

$$\frac{A_1A_3}{A_1B_1} = \frac{A_1B_1 + B_1A_3}{A_1B_1} = 1 + \frac{B_1A_3}{A_1B_1} = \frac{P(A_2A_5A_1) + P(A_2A_3A_5)}{P(A_2A_5A_1)}.$$

Ponovno uočavamo da u brojniku zbroj površina trokuta određuje površinu četverokuta. Slijedi

$$\frac{A_1A_3}{A_1B_1} = \frac{P(A_1A_2A_3A_5)}{P(A_2A_5A_1)}.$$

Konačno

$$\frac{A_1B_1}{B_2A_3} = \frac{A_1B_1}{A_1A_3} \cdot \frac{A_1A_3}{B_2A_3} = \frac{P(A_2A_5A_1)}{P(A_1A_2A_3A_5)} \cdot \frac{P(A_1A_2A_3A_4)}{P(A_3A_4A_2)}.$$

Prethodnu jednakost možemo zapisati u općenitijem obliku, to jest generalizirati pa za $i = 1, 2, ..., 5$ vrijedi

$$\frac{A_iB_i}{B_{i+1}A_{i+2}} = \frac{P(A_iA_{i+1}A_{i+4})}{P(A_iA_{i+1}A_{i+2}A_{i+4})} \cdot \frac{P(A_iA_{i+1}A_{i+2}A_{i+3})}{P(A_{i+2}A_{i+3}A_{i+1})}.$$

Pomnožimo li ovih pet jednakosti dobijemo lijevu stranu kao u (3.1), a s desne strane se površine trokuta i četverokuta međusobno pokrate i dobijemo 1. Dakle, dobijemo da vrijedi

$$\frac{A_1B_1}{B_1A_2} \cdot \frac{A_2B_2}{B_2A_3} \cdot \frac{A_3B_3}{B_3A_4} \cdot \frac{A_4B_4}{B_4A_5} \cdot \frac{A_5B_5}{B_5A_1} = 1,$$

što smo trebali i pokazati. Time je teorem dokazan. □

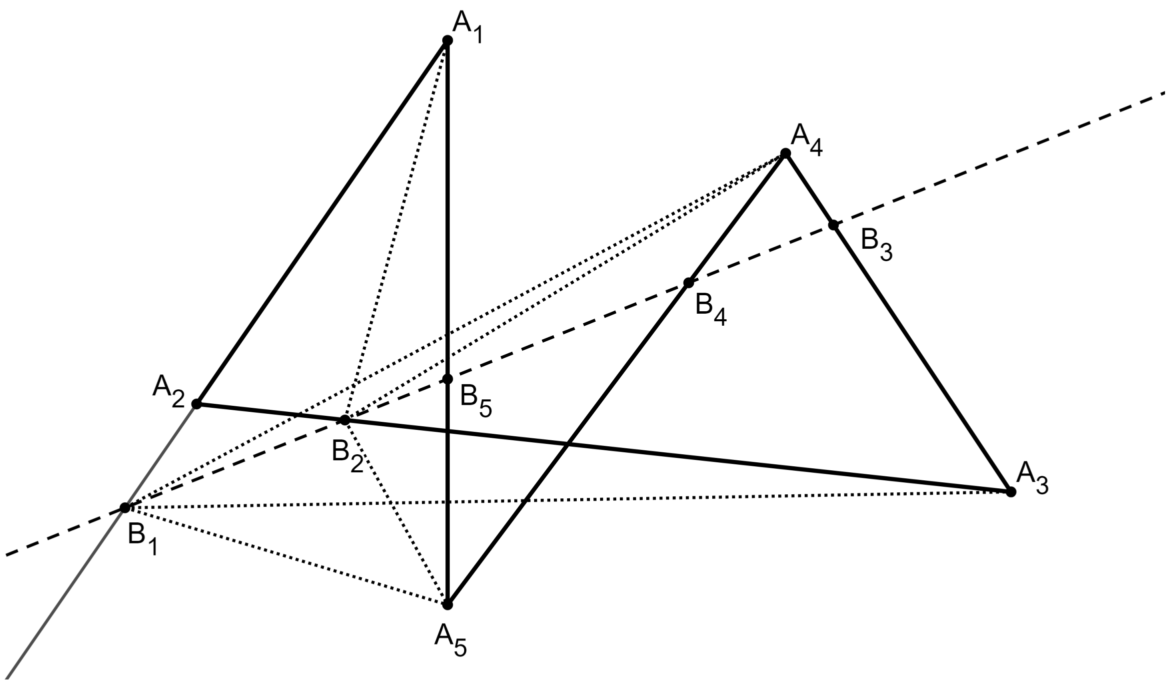
3.2 Menelajev teorem za mnogokute

Sljedeća generalizacija teorema vezana je uz mnogokute. Do sada smo promatrali trokut i određene točke na pravcima na kojima leže stranice trokuta. Sada ćemo iskazati i dokazati analogone teorema u slučaju kada promatramo mnogokute i točke na pravcima na kojima leže stranice mnogokuta. U ovom i idućem odjeljku promatramo orijentirane površine kako smo ih uveli u odijeljku 1.1.

Teorem 3.2. *Neka je $A_1A_2...A_n$ proizvoljni mnogokut i neka transverzala siječe pravac A_iA_{i+1} u točki B_i za $i = 1, 2, ..., n$. Tada vrijedi*

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{A_iB_i}{B_iA_{i+1}} = (-1)^n. \tag{3.4}$$

Možemo primijetiti da je u slučaju kada je n neparan produkt negativan. To nam govori da se neparan broj sjecišta transverzale i pravaca A_iA_{i+1} nalazi na produžetcima stranica mnogokuta. Analogno zaključujemo kada je n paran broj, tada se paran broj sjecišta nalazi na produžetcima stranica mnogokuta.



Slika 3.3: Menelajev teorem za peterokut

Dokaz. Odaberimo bilo koje dvije točke B_i, na primjer B_1 i B_2. Pogledajmo trokute s bazom $\overline{B_1B_2}$. Za omjere njihovih orijentiranih površina vrijedi

$$\frac{A_iB_i}{B_iA_{i+1}} = -\frac{P(B_1B_2A_i)}{P(B_1B_2A_{i+1})}.$$

Krenemo li uvrštavati redom brojeve $i = 1, 2, ..., n$ dobijemo sljedeće

$$\frac{A_1B_1}{B_1A_2} = -\frac{P(B_1B_2A_1)}{P(B_1B_2A_2)},$$

$$\frac{A_2B_2}{B_2A_3} = -\frac{P(B_1B_2A_2)}{P(B_1B_2A_3)},$$

$$\frac{A_3B_3}{B_3A_4} = -\frac{P(B_1B_2A_3)}{P(B_1B_2A_4)},$$

$$\frac{A_4B_4}{B_4A_5} = -\frac{P(B_1B_2A_4)}{P(B_1B_2A_5)},$$

$$\vdots$$

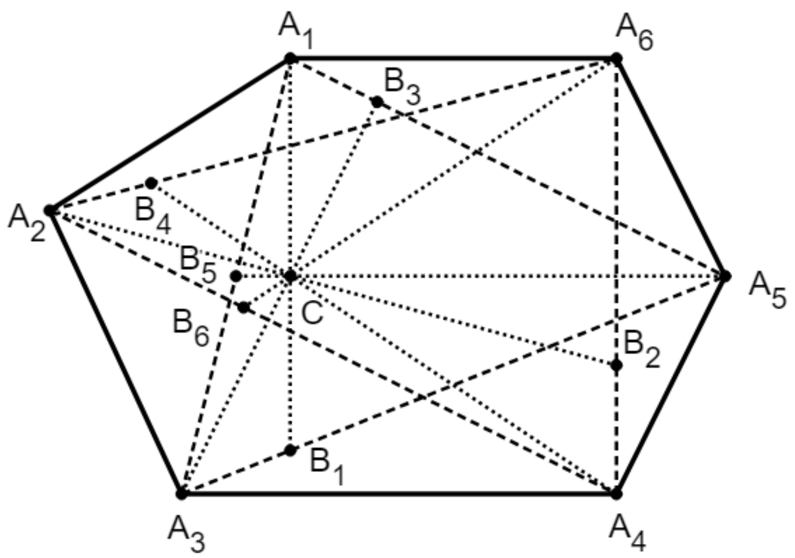
$$\frac{A_nB_n}{B_nA_1} = -\frac{P(B_1B_2A_n)}{P(B_1B_2A_1)}.$$

Pomnožimo li sve ove jednakosti, s lijeve strane dobivamo umnožak kao u (3.4), dok se s desne strane površine pokrate i ostane $(-1)^n$, a to je upravo ono što smo trebali dokazati. □

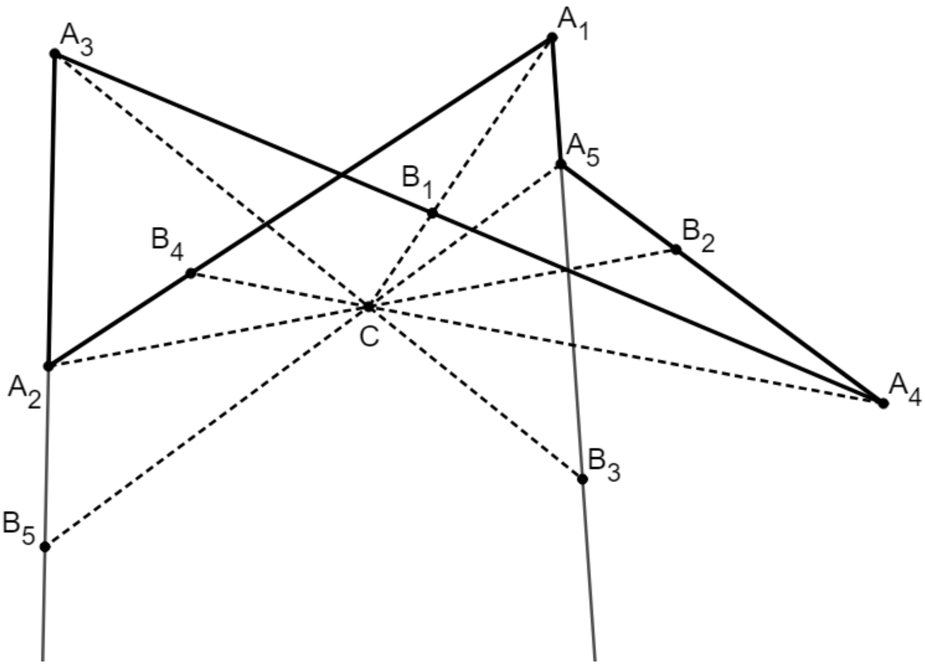
3.3 Cevin teorem za mnogokute

Teorem 3.3. *Neka je $A_1A_2...A_n$ bilo koji mnogokut, C dana točka i k prirodan broj takav da je $k < n/2$. Neka je B_i sjecište pravaca CA_i i $A_{i-k}A_{i+k}$ za $i = 1, 2, ..., n$. Tada je*

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{A_{i-k}B_i}{B_iA_{i+k}} = 1. \tag{3.5}$$



Slika 3.4: Cevin teorem za $n = 6, k = 2$



Slika 3.5: Cevin teorem za $n = 5, k = 2$

Pogledajmo sliku 3.4. Prema teoremu promatramo omjer $A_iB_{i+2}/B_{i+2}A_{i+4}$.Uočimo da se teorem odnosi na omjere duljina dužina koje leže na dijagonalama mnogokuta. Ako pogledamo sliku 3.5 vidjeti ćemo da je tu nešto drugačiji slučaj. Dakle, u slučaju kada je n neparan i $k = (n-1)/2$, tada se omjeri odnose na duljine dužina koje leže na pravcima A_iA_{i+1}.

Dokaz. Dokaz je sličan dokazu prethodnog teorema. Pogledajmo trokute s bazom $\overline{CA_i}$, za $i = 1, 2, ..., n$. Za omjere orijentiranih površina vrijedi

$$\frac{A_{i-k}B_i}{B_iA_{i+k}} = \frac{P(CA_{i-k}A_i)}{P(CA_iA_{i+k})}.$$

Pomnoživši sve ove jednakosti dobijemo s lijeve strane umnožak kao u (3.5), a s desne strane umnožak omjera površina koji se pokrate. Time smo dobili da vrijedi (3.5). $\square$

3.4 Istovremena generalizacija Cevinog i Menelajevog teorema za trokut

Neka je $A_1A_2A_3$ trokut u ravnini i b_1, b_2, b_3 realni brojevi. Uzimajući u obzir orijentaciju dužina, neka su B_1, B_2 i B_3 redom točke na pravcima A_2A_3, A_3A_1 i A_1A_2 tako da vrijedi

$$A_2B_1 = \frac{A_2A_3}{1+b_1},$$

$$A_3B_2 = \frac{A_3A_1}{1+b_2},$$

$$A_1B_3 = \frac{A_1A_2}{1+b_3}.$$

Primijetimo da je

$$B_1A_3 = A_2A_3 - A_2B_1 = A_2A_3\left(1 - \frac{1}{1+b_1}\right) = \frac{b_1 \cdot A_2A_3}{1+b_1}$$

Analogno imamo

$$B_2A_1 = \frac{b_2 \cdot A_3A_1}{1+b_2},$$

$$B_3A_2 = \frac{b_3 \cdot A_1A_2}{1+b_3}.$$

Tada vrijedi

$$\frac{A_2B_1}{B_1A_3} \cdot \frac{A_3B_2}{B_2A_1} \cdot \frac{A_1B_3}{B_3A_2} = \frac{\frac{A_2A_3}{1+b_1}}{\frac{b_1 \cdot A_2A_3}{1+b_1}} \cdot \frac{\frac{A_3A_1}{1+b_2}}{\frac{b_2 \cdot A_3A_1}{1+b_2}} \cdot \frac{\frac{A_1A_2}{1+b_3}}{\frac{b_3 \cdot A_1A_2}{1+b_3}} = \frac{1}{b_1b_2b_3}. \tag{3.6}$$

Uočimo da se slučaj kada je $b_1b_2b_3 = 1$ pojavljuje u Cevinom teoremu, a slučaj kada je $b_1b_2b_3 = -1$ u Menelajevom teoremu.

Uvedimo sada točke C_1, C_2, C_3 koje se nalaze redom na pravcima A_2A_3, A_3A_1 i A_1A_2 tako da vrijedi

$$C_1A_3 = \frac{A_2A_3}{1+c_1},$$

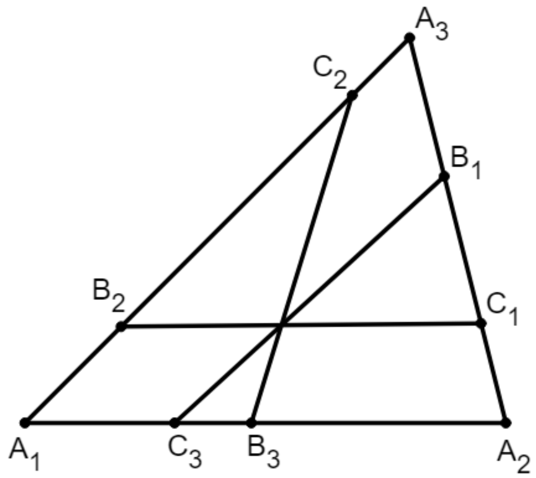
$$C_2A_1 = \frac{A_3A_1}{1+c_2},$$

$$C_3A_2 = \frac{A_1A_2}{1+c_3},$$

pri čemu su c_1, c_2, c_3 realni brojevi. Generalizacija oba teorema glasi

Teorem 3.4. *Uz prije navedene oznake, pravci C_1B_2, C_2B_3 i C_3B_1 sijeku se u jednoj točki ako i samo ako je*

$$b_1b_2b_3 + c_1c_2c_3 + b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 = 1. \tag{3.7}$$

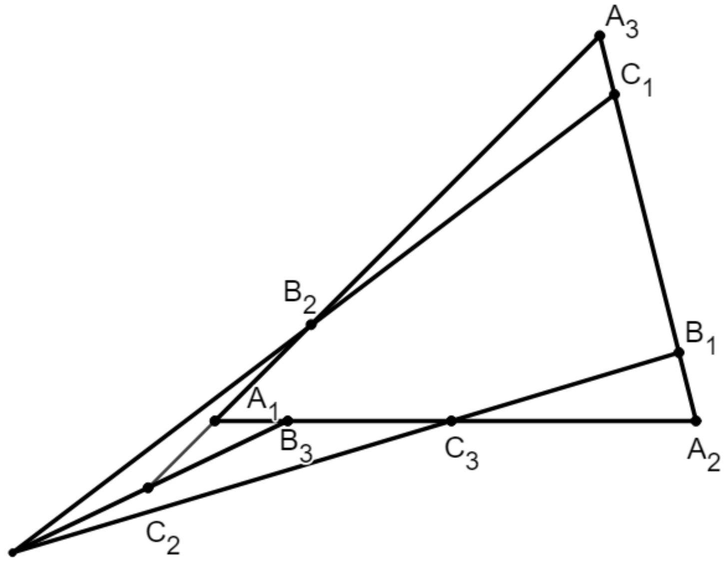


Slika 3.6

Slike 3.6 i 3.7 prikazuju dvije moguće situacije. Primijetimo da u slučaju kada se C_1, C_2, C_3 podudaraju redom s vrhovima trokuta A_2, A_3, A_1, imamo $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ i jednadžba (3.7) svodi se na $b_1b_2b_3 = 1$, tj. dobivamo tvrdnju Cevinog teorema. Druga mogućnost je da se točke C_1, C_2, C_3 podudaraju redom s točkama B_1, B_2, B_3. Na početku smo točke definirali tako da vrijedi $B_1A_3 = \dfrac{b_1 \cdot A_2A_3}{1 + b_1}$ i $C_1A_3 = \dfrac{A_2A_3}{1 + c_1}$. Ako je $C_1 = B_1$ onda je $\dfrac{b_1 \cdot A_2A_3}{1 + b_1} = \dfrac{A_2A_3}{1 + c_1}$, pa slijedi $b_1c_1 = 1$. Analogno zaključujemo $b_1c_1 = b_2c_2 = b_3c_3 = 1$ i jednakost (3.7) postaje $b_1b_2b_3 + \dfrac{1}{b_1b_2b_3} = -2$, iz čega je $b_1b_2b_3 = -1$ što znači da u tom slučaju dobivamo tvrdnju Menelajevog teorema.

Dokaz. U dokazu ćemo koristiti baricentričke koordinate s obzirom na trokut $A_1A_2A_3$. Iz načina kako smo ih definirali, dobivamo da su baricentričke koordinate točaka

$$B_1(0 : b_1 : 1), B_2(1 : 0 : b_2), B_3(b_3 : 1 : 0), C_1(0 : 1 : c_1), C_2(c_2 : 0 : 1), C_3(1 : c_3 : 0).$$



Slika 3.7

Prema teoremu 1.3 jednadžba pravca B_1C_3 je

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & b_1 & 1 \\ 1 & c_3 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

tj. $-c_3x + y - b_1z = 0$. Jednadžba pravca B_2C_1 je

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & b_2 \\ 0 & 1 & c_1 \end{vmatrix} = 0,$$

tj. $-b_2x - c_1y + z = 0$. Jednadžba pravca B_3C_2 je

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ b_3 & 1 & 0 \\ c_2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

tj. $x - b_3y - c_2z = 0$. Prema teoremu 1.5 znamo da pravci B_1C_3, B_2C_1 i B_3C_2 prolaze jednom točkom ako i samo ako vrijedi

$$\begin{vmatrix} -c_3 & 1 & -b_1 \\ -b_2 & -c_1 & 1 \\ 1 & -b_3 & -c_2 \end{vmatrix} = 0,$$

tj. $-c_1c_2c_3 + 1 - b_1b_2b_3 - c_2b_2 - c_1b_1 - c_3b_3 = 0$. Pomnožimo li ovu jednakost s -1 dobivamo $b_1b_2b_3 + c_1c_2c_3 + b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 = 1$ što smo i trebali pokazati. □

Primijetimo da u iskazu i dokazu teorema nismo stavljali uvjete na realne brojeve $b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ što znači da točke mogu ležati u proširenoj euklidskoj ravnini, tj. ravnini kojoj smo dodali točke u beskonačnosti koje leže na beskonačno dalekom pravcu.

Poglavlje 4

Generalizacije teorema u prostoru

Osim što se proučavani teoremi mogu poopćiti u ravnini, također ih možemo poopćiti i u prostoru. U ovom poglavlju prvo ćemo generalizirati teoreme na prostorni četverokut u trodimenzionalnom prostoru, a zatim ćemo generalizirati Menelajev teorem za općenite konačnodimenzionalne vektorske prostore.

4.1 Generalizacija Cevinog teorema

Teorem 4.1. *Neka je $ABCD$ prostorni četverokut. Neka su X, Y, Z, W redom točke na stranicama $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ i $\overline{DA}$. Četiri ravnine AZB, BWC, CXD i DYA sijeku se točno u jednoj točki ako i samo ako je*

$$\frac{AX}{XB} \cdot \frac{BY}{YC} \cdot \frac{CZ}{ZD} \cdot \frac{DW}{WA} = 1. \tag{4.1}$$

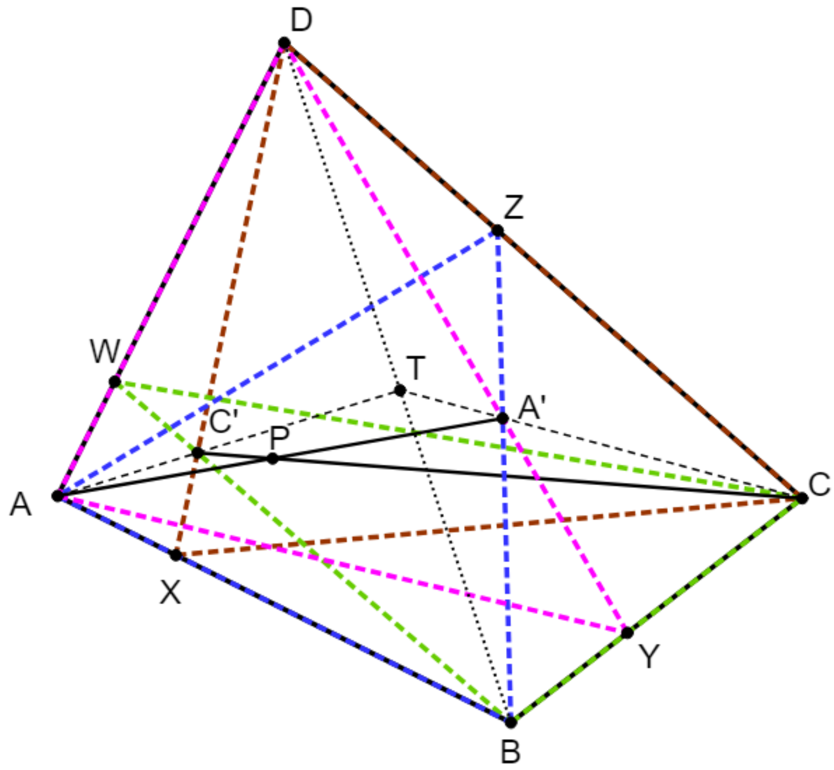
Dokaz. Promotrimo sliku 4.1. Neka točka A' leži u ravnini BDC, točka C' u ravnini ADB, ravnine AZB i AYD sijeku se po pravcu AA', a ravnine CXD i BWC sijeku se po pravcu CC'. Neka se zadane četiri ravnine sijeku u točki P. Treba pokazati da vrijedi (4.1).

Nacrtajmo dužinu $\overline{DB}$, a potom i ravninu koja sadrži AA' i CC' i neka ta ravnina siječe $\overline{DB}$ u točki T. Pravci AA' i CC' su komplanarni i sijeku se u točki P, a AT i CT prolaze redom kroz točke C' i A'. Primijenimo Cevin teorem na trokut ABD. Vrijedi

$$\frac{AX}{XB} \cdot \frac{BT}{TD} \cdot \frac{DW}{WA} = 1.$$

Primijenimo sada Cevin teorem na trokut BCD. Vrijedi

$$\frac{BY}{YC} \cdot \frac{CZ}{ZD} \cdot \frac{DT}{TB} = 1.$$



Slika 4.1: Cevin teorem za prostorni četverokut

Množenjem prethodne dvije jednakosti dobijemo

$$\frac{AX}{XB} \cdot \frac{BT}{TD} \cdot \frac{DW}{WA} \cdot \frac{BY}{YC} \cdot \frac{CZ}{ZD} \cdot \frac{DT}{TB} = 1,$$

iz čega slijedi (4.1).

Obratno, ako znamo da vrijedi (4.1), treba pokazati da ravnine AZB, BWC, CXD i DYA prolaze jednom točkom. Neka je T točka na $\overline{DB}$ tako da dužina $\overline{AT}$ prolazi točkom C'. Tada prema Cevinom teoremu vrijedi

$$\frac{AX}{XB} \cdot \frac{BT}{TD} \cdot \frac{DW}{WA} = 1.$$

Dijeljenjem (4.1) s prethodnom jednakošću, dobijemo

$$\frac{XB}{AX} \cdot \frac{TD}{BT} \cdot \frac{WA}{DW} \cdot \frac{AX}{XB} \cdot \frac{BY}{YC} \cdot \frac{CZ}{ZD} \cdot \frac{DW}{WA} = 1,$$

iz čega slijedi

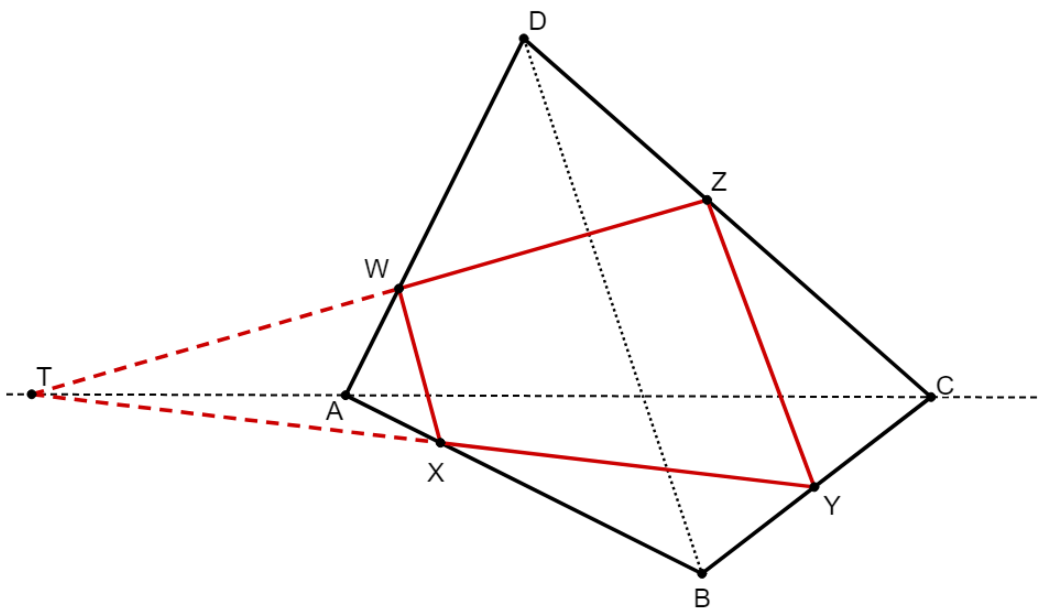
$$\frac{BY}{YC} \cdot \frac{CZ}{ZD} \cdot \frac{DT}{TB} = 1.$$

Prema Cevinom teoremu za trokut BCD iz prethodne jednakosti zaključujemo da dužina $\overline{CT}$ prolazi točkom A'. Time dolazimo do zaključka da su pravci AA' i CC' komplanarni i da leže u ravnini ATC te se sijeku u nekoj točki P. Budući da smo na početku definirali $AZB \cap AYD = AA'$ i $CXD \cap BWC = CC'$, zaključujemo da sve četiri ravnine prolaze točkom P. Time je teorem dokazan. □

4.2 Generalizacija Menelajevog teorema

Teorem 4.2. *Neka je $ABCD$ prostorni četverokut. Neka su X, Y, Z, W redom točke na stranicama $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ i $\overline{DA}$. Točke X, Y, Z, W su komplanarne ako i samo ako je*

$$\frac{AX}{XB} \cdot \frac{BY}{YC} \cdot \frac{CZ}{ZD} \cdot \frac{DW}{WA} = 1. \tag{4.2}$$



Slika 4.2: Menelajev teorem za prostorni četverokut

Dokaz. Pretpostavimo da su točke X, Y, Z, W komplanarne. Treba pokazati da vrijedi (4.2). Neka pravac AC probada ravninu $XYZW$ u točki T. Budući da je pravac XY presjek ravnine

$XYZW$ s ravninom ABC, nužno je i točka T koja pripada objema ravninama na pravcu XY. Zato za pravac XY i trokut ABC prema Menelajevom teoremu vrijedi

$$\frac{AX}{XB} \cdot \frac{BY}{YC} \cdot \frac{CT}{TA} = -1.$$

Također su i točke Z, W, T koje leže redom na pravcima CD, DA i AC kolinearne i prema Menelajevom teoremu vrijedi

$$\frac{CZ}{ZD} \cdot \frac{DW}{WA} \cdot \frac{AT}{TC} = -1.$$

Množenjem prethodne dvije jednakosti dobijemo

$$\frac{AX}{XB} \cdot \frac{BY}{YC} \cdot \frac{CT}{TA} \cdot \frac{CZ}{ZD} \cdot \frac{DW}{WA} \cdot \frac{AT}{TC} = 1,$$

iz čega slijedi (4.2).

Obratno, ako vrijedi (4.2), treba pokazati da su točke X, Y, Z, W komplanarne. Znamo da točke X, Y i Z nisu kolinearne pa određuju ravninu XYZ. Ako je W' točka presjeka pravca AD i ravnine XYZ, tada prema prethodno dokazanom dijelu teorema vrijedi

$$\frac{AX}{XB} \cdot \frac{BY}{YC} \cdot \frac{CZ}{ZD} \cdot \frac{DW'}{W'A} = 1.$$

S obzirom da vrijedi i (4.2), slijedi

$$\frac{AX}{XB} \cdot \frac{BY}{YC} \cdot \frac{CZ}{ZD} \cdot \frac{DW}{WA} = \frac{AX}{XB} \cdot \frac{BY}{YC} \cdot \frac{CZ}{ZD} \cdot \frac{DW'}{W'A}$$

iz čega dobivamo

$$\frac{DW}{WA} = \frac{DW'}{W'A}.$$

Kako su točke W i W' obje na pravcu AD, prema lemi 1.1 slijedi $W = W'$. Dakle, točke X, Y, Z, W su komplanarne. □

4.3 Generalizacija Menelajevog teorema u vektorskim prostorima

Zanimljivo je kako se teoremi koji su iskazani i dokazani u geometriji ravnine također mogu dokazati i u općenitijem vektorskom prostoru. Kao motivacija, za početak ćemo dokazati Menelajev teorem u dvodimenzionalnom vektorskom prostoru, a zatim ćemo iskazati i dokazati njegov analogon u proizvoljnom konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru.

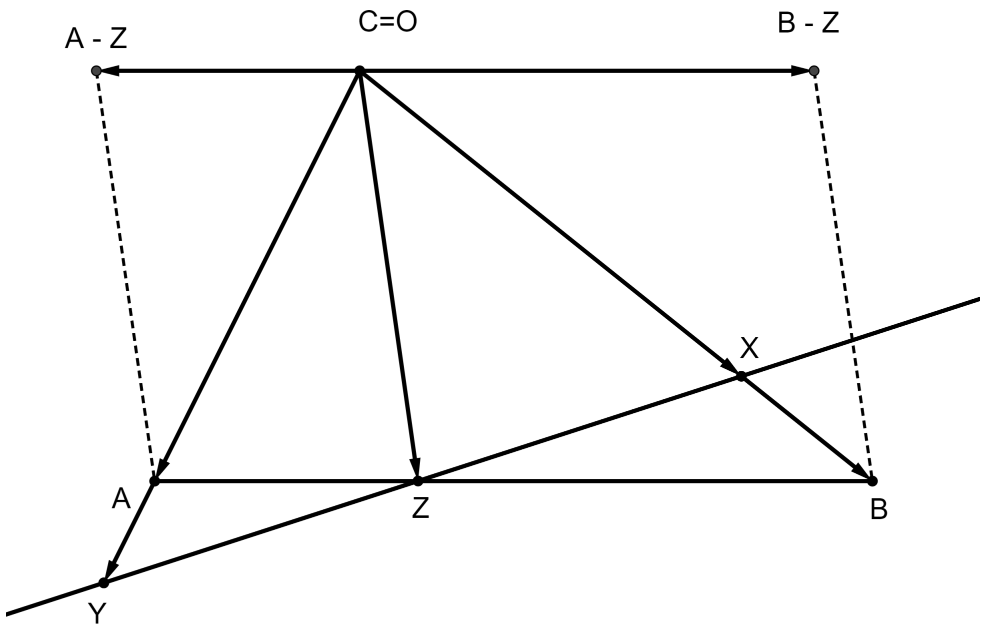
Prisjetimo se oznaka iz Menelajevog teorema. Neka su točke X, Y i Z redom na pravcima BC, CA i AB. Želimo pokazati da su točke X, Y, Z kolinearne ako i samo ako vrijedi

$$\frac{ZA}{ZB} \cdot \frac{XB}{XC} \cdot \frac{YC}{YA} = 1. \tag{4.3}$$

Dokaz Menelajevog teorema u dvodimenzionalnom vektorskom prostoru. Od sada pa nadalje, velika slova predstavljaju radijvektore odgovarajućih točaka. Uzmimo da je točka C ishodište. Dakle, postoje realni brojevi h i k različiti od nule takvi da je

$$X = hB, \quad Y = kA.$$

Budući da točka Z leži na pravcu AB, znamo da postoje realni brojevi p i q takvi da je



Slika 4.3

$$Z = pA + qB, \tag{4.4}$$

pri čemu je $p + q = 1$.

Pogledajmo sada što vrijedi za omjer ZA/ZB.

$$\frac{ZA}{ZB} = \frac{A - Z}{B - Z} = \frac{A - pA - qB}{B - pA - qB} = \frac{(1-p)A - qB}{(1-q)B - pA} = \frac{qA - qB}{pB - pA} = \frac{-q}{p}.$$

Za omjer XB/XC vrijedi

$$\frac{XB}{XC} = \frac{B-X}{C-X} = \frac{B-hB}{-hB} = \frac{h-1}{h}.$$

Analogno dobijemo za omjer YC/YA da vrijedi

$$\frac{YC}{YA} = \frac{C-Y}{A-Y} = \frac{-kA}{A-kA} = \frac{k}{k-1}.$$

Sada (4.3) postaje

$$\frac{-q}{p} \cdot \frac{h-1}{h} \cdot \frac{k}{k-1} = 1.$$

Gornja jednakost je ekvivalentna

$$-qk(h-1) = ph(k-1),$$

$$-qkh + qk = phk - ph,$$

odnosno, zbog $p + q = 1$,

$$hp + kq = hk. \tag{4.5}$$

Sada ćemo provesti dokaz koristeći (4.5) umjesto (4.3). Točke X, Y, Z su kolinearne ako i samo ako postoje r i s takvi da je

$$Z = rX + sY,$$

pri čemu je $r + s = 1$.

Prikažemo li X i Y preko A i B dobivamo

$$Z = rhB + skA.$$

Izjednačimo gornju jednakost sa (4.4). Slijedi

$$rhB + skA = pA + qB.$$

Kako su A i B linearno nezavisni vektori, dobivamo

$$\begin{array}{ccccc} hr & & & = & q \\ & & ks & = & p \\ r & + & s & = & 1 \end{array}$$

Ovaj nehomogeni sustav linearnih jednadžbi u nepoznanicama r i s ima prema Kronecker - Capellijevom teoremu rješenje ako i samo ako je rang proširene matrice sustava jednak rangu matrice sustava, tj.

$$\operatorname{rang}\left(\begin{bmatrix} h & 0 & q \\ 0 & k & p \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = \operatorname{rang}\left(\begin{bmatrix} h & 0 \\ 0 & k \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = 2.$$

No to je ekvivalentno

$$\begin{vmatrix} h & 0 & q \\ 0 & k & p \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

odnosno

$$hp + kq = hk.$$

Uočimo da je posljednja jednakost upravo (4.5). Dakle, jednakost (4.5) je nužan i dovoljan uvjet da vektor Z leži na pravcu određenom vektorima X i Y. □

Primijetimo da je pravac u prostoru radijvektora u ravnini zapravo linearna mnogostrukost dimenzije 1, tj. skup dobiven iz vektorskog potprostora dimenzije 1 dodavanjem svim vektorima tog potprostora jednog fiksnog vektora (npr. A ili B u slučaju pravca AB sa slike 4.3). Za općeniti konačnodimenzionalni vektorski prostor linearnu mnogostrukost dobivamo na isti način. Hiperravnina P određena linearno nezavisnim skupom $\{A_1, ..., A_n\}$ u n - dimenzionalnom realnom vektorskom prostoru $\mathbb{R}^n$ dobiva se pomakom potprostora razapetog s $\{A_2 - A_1, A_3 - A_1, ..., A_n - A_1\}$ za vektor A_1 ili, što je ekvivalentno, kao skup svih vektora oblika

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i A_i, \quad \text{gdje je} \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1.$$

Neka je

$$X_i = h_i A_i, \quad h_i \neq 0, \quad i = 1, ..., n,$$

te neka je Q hiperravnina određena skupom vektora $\{X_1, ..., X_n\}$.

Teorem 4.3. *Uz prethodne oznake, nužan i dovoljan uvjet da vektor Z zadan sa*

$$Z = \sum_{i=1}^{n} p_i A_i, \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \tag{4.6}$$

leži na presjeku hiperravnina P i Q je

$$\begin{vmatrix} h_1 & \dots & 0 & p_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & h_n & p_n \\ 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

što je ekvivalentno s

$$p_1 h_2 \cdots h_n + \cdots + p_n h_1 \cdots h_{n-1} = h_1 \cdots h_n \quad \textit{ili}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{h_i} = 1. \tag{4.7}$$

Dokaz. Iz (4.6) je jasno da Z leži u hiperravnini P. Ako Z leži u Q, tada se može zapisati kao

$$Z = \sum_{i=1}^{n} r_i X_i, \quad \sum_{i=1}^{n} r_i = 1.$$

Uspoređujući gornju jednakost s (4.6) uočavamo da iz linearne nezavisnosti skupa $\{A_1, ..., A_n\}$ slijedi

$$h_i r_i = p_i, \quad i = 1, ..., n, \quad \sum_{i=1}^{n} r_i = 1.$$

Ovaj nehomogeni sustav linearnih jednadžbi u nepoznanicama $r_1, ..., r_n$ ima prema Kronecker - Capellijevom teoremu rješenje ako i samo ako je rang proširene matrice sustava jednak rangu matrice sustava, tj.

$$\text{rang}\left(\begin{bmatrix} h_1 & \dots & 0 & p_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & h_n & p_n \\ 1 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = \text{rang}\left(\begin{bmatrix} h_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & h_n \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}\right) = n.$$

Ovo je ekvivalentno s

$$\begin{vmatrix} h_1 & \dots & 0 & p_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & h_n & p_n \\ 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Napravimo li Laplaceov razvoj dane determinante po zadnjem stupcu dobivamo nakon malo sređivanja upravo (4.7). □

Bibliografija

[1] Z. Abel, *Barycentric Coordinates*, dostupno na http://zacharyabel.com/papers/Barycentric_A07.pdf (lipanj 2018.)

[2] A. R. Amir, P. Moez, A. Stubbs, *Menelaus theorem in a vector space*, Pi Mu Epsilon Journal, Vol. 6, No. 4 (1976.), 211–214.

[3] M. Bombardelli, D. Ilišević, *Elementarna geometrija*, dostupno na https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/eg/dodatni/EGskripta.pdf (svibanj 2018.)

[4] N. Goldberg, *Spatial Analogues of Ceva's Theorem and its Applications*, dostupno na https://nanopdf.com/download/cevas-theorem-in-space-rose_pdf (lipanj 2018.)

[5] B. Grunbaum, G. C. Shephard, *Ceva, Menelaus and the Area Principle*, Mathematics Magazine, Vol. 68, No. 4 (1995.), 254-268.

[6] L. Hoehn, *A Menelaus – Type Theorem for Pentagram*, Mathematics Magazine, Vol. 66, No. 2 (1993.), 121–123.

[7] M. S. Klamkin, S. H. Kung, *Ceva's and Menelaus' Theorems and Their Converses via Centroids*, Mathematics Magazine, Vol. 69, No. 1 (1996.), 49–51.

[8] M. S. Klamkin, A. Liu, *Simultaneous Generalizations of the Theorems of Ceva and Menelaus*, Mathematics Magazine, Vol. 65, No. 1 (1992.), 48–52.

[9] C. Koblbauer, *Barycentric Coordinates*, dostupno na http://koblbauermath.weebly.com/uploads/1/3/1/9/13192946/barycentric_coordinates.pdf (lipanj 2018.)

[10] B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika II*, Školska knjiga, Zagreb 1995.

[11] J. R. Silvester, *Ceva* = $(Menelaus)^2$, The Mathematical Gazette, Vol. 84, No. 500 (2000.), 268–271.

[12] V. Volenec, *Baricentričke koordinate 1*, Osječki matematički list, Vol. 15, No. 1 (2015.), 1–11.

Sažetak

Cevin i Menelajev teorem su među poznatijim teoremima u geometriji ravnine koji daju kriterij za konkurentnost pravaca i kolinearnost točaka. U ovom diplomskom radu pokazali smo kako se navedeni teoremi mogu poopćiti i dokazati na različite načine.

Rad je podijeljen na četiri poglavlja. U prvom poglavlju, koje sadrži pomoćne tvrdnje, objasnili smo baricentričke koordinate bilo koje točke obzirom na dani trokut. U drugom poglavlju Cevin i Menelajev teorem dokazali smo na dva načina. Prvi dokaz je preko omjera površina trokuta dok je drugi pomoću težišta skupa materijalnih točaka. Potom smo pokazali da su navedeni teoremi ekvivalentni. U ostatku rada poopćili smo Cevin i Menelajev teorem te iskazali i dokazali neke njihove generalizacije u ravnini i u prostoru. U ravnini smo promatrali Hoehnov teorem, Cevin i Menelajev teorem za mnogokute te istovremenu generalizaciju oba teorema. U zadnjem poglavlju promatrali smo generalizacije teorema obzirom na dani prostorni četverokut kao i generalizaciju Menelajevog teorema u konačnodimenzionalnim vektorskim prostorima.

Summary

Ceva's and Menelaus' theorems are among the most important theorems in plane geometry. These theorems are very useful for establishing concurrency of lines and collinearity of points. In this graduate thesis it is show how these theorems can be generalized and proved in different ways.

The thesis is divided into four chapters. In the first chapter, which contains auxiliary results, we explain barycentric coordinates of a point with respect to a given triangle. In the second chapter, Ceva's and Menelaus' theorems are proved in two different ways. The first proof is based on the area principle and the second one is via centroids. Afterwards, we show that the theorems are equivalent. In the rest of the thesis we generalize the main theorems in different ways and prove some of the generalizations in the plane and in space. In plane we study Hoehn's theorem, Ceva's and Menelaus' theorems for polygons and one simultaneous generalization of both theorems. The final chapter is devoted to generalizations in space for space quadrilateral as well as Menelaus' theorem in finite - dimensional vector spaces.

Životopis

Rođena sam 24. veljače 1993. godine u Splitu. Osnovnoškolsko obrazovanje započela sam 1999. godine u Osnovnoj školi Gripe. Nakon završene osnovne škole upisala sam III. gimnaziju u Splitu. Preddiplomski sveučilišni studij matematike, nastavnički smjer, upisala sam na Prirodoslovno - matematičkom fakultetu u Zagrebu 2011. godine te završila 2016. godine. Obrazovanje nastavljam upisom diplomskog studija matematike - smjer: nastavnički, također na Prirodoslovno - matematičkom fakultetu u Zagrebu.