SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Renato Babojelić

IZRAČUNLJIVOST U EUKLIDSKOM PROSTORU

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof.dr.sc. Zvonko Iljazović

Zagreb, veljača, 2017.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

SADRŽAJ

UVOD

Iako intuitivan, pojam izračunljivosti, odnosno efektivno izračunljive funkcije, nije lako definirati. U potrazi za definicijom, tijekom tridesetih godina dvadesetog stoljeća, razvijeni su razni formalni modeli izračunavanja, a na njima su radila neka od najvećih imena matematike i logike.

Britanski matematičar Alan Turing definirao je apstraktni stroj (danas ga nazivamo *Turingov stroj*) koji se sastoji od beskonačno duge trake podijeljene na ćelije, "glave" za čitanje i pisanje po traci, te unutrašnje logike stroja. Na početku izračunavanja na traci se nalazi zapisana riječ u simbolima proizvoljnog alfabeta, to su ulazni podaci stroja. Glava stroja čita simbole s trake i u ovisnosti o pročitanom pomiče se lijevo ili desno te zapisuje ili čita novi simbol s trake. Kada (i ako) stroj stane na traci se nalazi rezultat izračunavanja.

Američki matematičar Alonzo Church razvio je formalni logički sustav nazvan *Lambda račun*. Riječ je o jeziku tzv. *lambda izraza* definiranih induktivno ovako:

1. varijabla x je lambda izraz,

2. ako je t lambda izraz i x varijabla tada je i $(\lambda x.t)$ lambda izraz,

3. ako su s i t lambda izrazi tada je i (st) lambda izraz.

Pravilo (2) naziva se *apstrakcija* i predstavlja definiciju anonimne funkcije u varijabli x. Pravilo (3) naziva se *aplikacija* i predstavlja izračunavanje funkcije s na ulaznim podacima t. Ukoliko su u lambda izrazu izvršene sve aplikacije (ako je to uopće moguće) taj izraz sada predstavlja rezultat izračunavanja.

Još jedan od popularnih modela izračunavanja je takozvani *RAM-stroj*. Ovaj model baziran je na iznimno pojednostavljenom mikroprocesoru elektroničkih računala. RAM-stroj se sastoji od beskonačnog broja registara $\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \ldots$ (a u svaki je moguće zapisati proizvoljno velik prirodan broj), "memorije" u koju je pohranjen program i brojača. Program se sastoji od slijeda instrukcija koje su numerirane od $0, \ldots, n$. Redni broj instrukcije koju treba izvršiti nalazi se u brojaču. Postoje svega dvije instrukcije:

1. INC $\mathcal{R}_k$

2. DEC $\mathcal{R}_k$ m

Instrukcija (1) uvećava broj u registru $\mathcal{R}_k$ za jedan, a instrukcija (2) umanjuje broj u registru $\mathcal{R}_k$ za jedan, a ako je rezultat oduzmanja nula, brojač se postavlja na vrijednost m, tj. stroj radi skok na instrukciju pod brojem m. Ulazni podaci se nalaze u prvih $k < \infty$ registara, a brojač je na početku rada postavljen na 0. Izvršavanjem svake od instrukcija brojač se povećava za jedan (ukoliko nije bilo skoka), kada (i ako) se brojač poveća do rednog broja na kojem nema instrukcije, smatramo da je izračunavanje završilo i po dogovoru je rezultat spremljen u registar $\mathcal{R}_0$.

Na posljetku, model koji koristimo i u ovom radu, a među čijim začetnicima je i veliki Kurt Gödel, je teorija *parcijalnih rekurzivnih funkcija*. Definiciju i primjere funkcija donosimo u prvom poglavlju.

Iako su ovi modeli na prvi pogled vrlo različiti, jedno im je zajedničko. Naime svi oni definiraju istu klasu funkcija, a to su spomenute parcijalno rekurzivne funkcije. Može se pokazati kako za svaki Turingov stroj, RAM-stroj ili lambda izraz postoji parcijalno rekurzivna funkcija koju oni izračunavaju, i obratno, za svaku parcijalno rekurzivnu funkciju postoji Turingov stroj, RAM-stroj i lambda izraz koji je izračunava (dokazi ovih ekvivalencija mogu se naći u [3], [5] i [6]).

Nakon ovog pregleda, za definiciju efektivno izračunljive funkcije možemo, bez straha, uzeti poznatu *Church–Turing*-ovu tezu:

Svaka efektivno izračunljiva funkcija je parcijalno rekurzivna.

Namjera je ovog rada proučavanje izračunljivosti metričkih prostora, skupova u metričkim prostorima i posebno euklidskog prostora. U tu svrhu, kako je spomenuto, u prvom poglavlju donosimo definiciju parcijalno rekurzivnih funkcija, neke korisne rezultate tzv. klasične teorije izračunljivosti, kao i primjere funkcija koje ćemo koristiti u daljnjem razmatranju.

U drugom poglavlju uvodimo pojam rekurzivno prebrojivog skupa, te dokazujemo nekoliko tehničkih no bitnih tvrdnji. Nadalje, proširujemo pojam rekurzivne funkcije na skupove cijelih, racionalnih, odnosno realnih brojeva.

Pojam *izračunljivog metričkog prostora* uvodimo u trećem poglavlju, kao i pojmove *izračunljive točke* i *izračunljivog niza* u takvom prostoru. Pokazuje se kako je euklidski prostor primjer jednog izračunljivog metričkog prostora.

U nastavku definiramo *izračunljiv skup* izračunljivog metričkog prostora, kao i *rekruzivno prebrojiv skup* u takvom prostoru. Dolazimo do rezultata kako je svaki izračunljiv skup rekurzivno prebrojiv (teorem 3.12), te kako svaki rekurzivno prebrojiv, neprazan i potpun skup sadrži gust izračunljiv niz (teorem 3.18).

Za kraj, promatramo prostor kompaktnih skupova $(\mathcal{K}, d_H)$ nekog izračunljivog metričkog prostora (X, d) uz *Hausdorffovu metriku*. Pokazujemo kako je $(\mathcal{K}, d_H)$ jedan izračunljiv metrički prostor, te kako su svi izračunljivi skupovi u prostoru (X, d) upravo izračunljive točke prostora $(\mathcal{K}, d_H)$ i obratno.

Na kraju ovog uvoda zahvalio bih se mentoru prof.dr.sc. Zvonku Iljazoviću na uloženom vremenu i pomoći u izradi ovog rada. Posebnu zahvalu upućujem svojim roditeljima, Ružici i Ignacu na bezrezervnoj podršci kroz sve godine studija.

1 REKURZIVNE FUNKCIJE

U ovom poglavlju definiramo pojam rekurzivne funkcije, te navodimo nekoliko primjera rekurzivnih funkcija. Donosimo i pregled nekih od osnovnih rezultata vezanih za rekurzivne funkcije, a koji će nam koristiti u proučavanju teme ovog rada. Sve su tvrdnje dane bez dokaza, a dokazi se mogu naći u [3].

1.1 Klasa parcijalno rekurzivnih funkcija

Definicija 1.1. Funkciju $\zeta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiranu sa

$$\zeta(x) = 0$$

nazivamo *nul-funkcija*. Funkciju $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiranu sa

$$\sigma(x) = x + 1$$

nazivamo *funkcija sljedbenika*. Neka je $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i $k \in \{1, \dots, n\}$. Funkciju $\pi^n_k : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ definiranu sa

$$\pi^n_k(x_1, \dots, x_n) = x_k$$

nazivamo *projekcija*.

Ovako definirane funkcije nazivamo *inicijalne funkcije*.

Definicija 1.2. Neka je $n, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, te neka su $G : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ i $H_1, \dots, H_n : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ funkcije. Za funkciju F definiranu sa

$$F(x) = G\left(H_1(x), \dots, H_n(x)\right)$$

kažemo da je definirana pomoću *kompozicije* funkcija G i $H_1, \dots, H_n$.

Definicija 1.3. Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Neka su $G : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ i $H : \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N}$ funkcije. Neka je $F : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa

$$\begin{aligned} F(0, x) &= G(x) \\ F(y + 1, x) &= H(F(y, x), y, x), \quad x \in \mathbb{N}^k. \end{aligned}$$

Za funkciju F kažemo da je definirana pomoću *primitivne rekurzije* od funkcija G i H.

Ako je $k = 0$ funkcija F je tada pomoću primitivne rekurzije definirana ovako:

$$F(0) = a, \quad a \in \mathbb{N},$$
$$F(y+1) = H(F(y), y).$$

Uvedimo sada sljedeću relaciju jednakosti parcijalnih funkcija. Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Sa

$$f \simeq g$$

označavamo činjenicu da za svaki $x \in \mathbb{N}$ vrijedi: izrazi $f(x)$ i $g(x)$ su definirani i vrijedi $f(x) = g(x)$, ili izrazi $f(x)$ i $g(x)$ nisu definirani.

Definicija 1.4. Neka su $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Neka je $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ funkcija. S $\mu y\,(f(x,y) = 0)$ označavamo funkciju definiranu ovako

$$\mu y\,(f(x,y) = 0) = \begin{cases} \text{najmanji } z, \text{ ako postoji, takav da je } f(x,y) \\ \text{definirana za sve } y < z, \text{ te je } f(x,y) = 0. \end{cases}$$

Za funkciju $\mu y\,(f(x,y) = 0)$ kažemo da je definirana pomoću *μ-operatora*.

Ako je S skup sa χ_S označavamo *karakterističnu funkciju* skupa S, definiranu s

$$\chi_S(x) = \begin{cases} 1, & x \in S; \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Definicija 1.5. Klasa funkcija koja sadrži sve inicijalne funkcije, te je zatvorena za kompoziciju i primitivnu rekurziju, naziva se klasa *primitivno rekurzivnih funkcija*.

Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, te neka su $U : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ i $T : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ primitivno rekurzivne funkcije. Funkciju $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ definiranu sa

$$f(x) \simeq U(\mu y T(y, e, x)), \quad x \in \mathbb{N}^k, y, e \in \mathbb{N}$$

nazivamo *(parcijalno) rekurzivna funkcija*. Za skup kažemo da je *rekurzivan* ako je njegova karakteristična funkcija rekurzivna.

1.2 Primjeri rekurzivnih funkcija

Propozicija 1.1. Neka su $k, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, te $f_1, \dots, f_n \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije, te $S_1, \dots, S_n \subseteq \mathbb{N}^k$ rekurzivni skupovi takvi da za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ postoji jedinstveni

$i \in \{1, \dots, n\}$ takav da je $x \in S_i$. Neka je $F : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa

$$F(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in S_1 \\ \vdots & \vdots \\ f_n(x), & x \in S_n. \end{cases}$$

Tada je F rekurzivna.

Propozicija 1.2. Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Neka su $g : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ i $\alpha, \beta : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije. Neka je funkcija $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ definirana sa

$$f(x) = \begin{cases} \prod\limits_{i=\alpha(x)}^{\beta(x)} g(x, i), & \text{ako je } \alpha(x) \leq \beta(x); \\ 1, & \text{inače.} \end{cases}$$

Tada je f rekurzivna.

Primjer 1.1. Funkcije $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$,

$$(x, y) \mapsto x + y$$
$$(x, y) \mapsto x \cdot y$$
$$(x, y) \mapsto x^y$$

su rekurzivne. (Definiramo $0^0 = 1$).

Funkcija $\dot{-} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ definirana sa

$$x \dot{-} y = \begin{cases} x - y, & \text{ako je } x \geq y; \\ 0, & \text{inače,} \end{cases}$$

je rekurzivna.

Funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ definirana sa

$$(x, y) \mapsto |x - y|$$

je rekurzivna.

Funkcije $\mathrm{sg}, \overline{\mathrm{sg}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definirane sa

$$\mathrm{sg}(x) = \begin{cases} 0, & \text{ako je } x = 0; \\ 1, & \text{inače,} \end{cases}$$

$$\overline{\mathrm{sg}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } x = 0; \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

su rekurzivne.

Funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ definirana sa

$$(x, y) \mapsto \left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor$$

je rekurzivna(uzimamo$\lfloor x/0 \rfloor$).

Funkcija $\max : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ definirana sa

$$\max(x, y) = \{x, y\}$$

je rekurzivna.

Funkcija $\chi_{2\mathbb{N}} : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ definirana s

$$\chi_{2\mathbb{N}} = \begin{cases} 1, & x \text{ je paran,} \\ 0, \text{inače;} \end{cases}$$

je rekurzivna, odnosno skup svih parnih brojeva je rekurzivan.

Primjer 1.2. Neka je $p_0, p_1, p_2, \ldots$ strogo rastući niz svih prostih brojeva. Neka je $x \in \mathbb{N}$ i

$$x = p_0^{\xi_0} \cdot p_1^{\xi_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\xi_k}$$

rastav broja x na proste faktore. Funkcija $e : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ definirana sa

$$e(x, i) = \begin{cases} \xi_i, & \text{ako je } x \neq 0; \\ 0, & \text{ako je } x = 0 \end{cases}$$

je rekurzivna.

2 IZRAČUNLJIV EUKLIDSKI PROSTOR

2.1 Rekurzivno prebrojivi skupovi

Definicija 2.1. Neka su $n, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Za funkciju $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}^k$ reći ćemo da je *rekurzivna* ako su njene komponentne funkcije rekurzivne, tj. ako su funkcije $f_1, \dots, f_k : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$, takve da je $f(x) = (f_1(x), \dots, f_k(x))$ za svaki $x \in \mathbb{N}^n$, rekurzivne.

Propozicija 2.1. Neka su $n, k, l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, i $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}^k$ i $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^l$ rekurzivne funkcije. Tada je $g \circ f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}^l$ rekurzivna.

Dokaz. Promotrimo slučaj $l = 1$. Neka su $f_1, \dots, f_k : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ komponentne funkcije od f. Za svaki $x \in \mathbb{N}^n$ vrijedi

$$(g \circ f)(x) = g\left(f(x)\right) = g\left(f_1(x), \dots, f_k(x)\right),$$

iz čega zaključujemo da je $g \circ f$ kompozicija funkcija $g, f_1, \dots, f_k$ koje su rekurzivne, pa je i $g \circ f$ rekurzivna.

Neka su $g_1, \dots, g_l : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ komponentne funkcije od g. Za svaki $x \in \mathbb{N}^n$ vrijedi

$$(g \circ f)(x) = \left(g_1\left(f(x)\right), \dots, g_l(f(x))\right) = \left((g_1 \circ f)(x), \dots, (g_l \circ f)(x)\right),$$

prema tome $g_1 \circ f, \dots, g_l \circ f$ su komponentne funkcije od $g \circ f$, a one su rekurzivne prema prvom slučaju. Stoga je i $g \circ f$ rekurzivna. □

Propozicija 2.2. Neka su $n, k, l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, te $f_1, \dots, f_n : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^l$ rekurzivne funkcije, te $S_1, \dots, S_n \subseteq \mathbb{N}^k$ rekurzivni skupovi takvi da za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ postoji jedinstveni $i \in \{1, \dots, n\}$ takav da je $x \in S_i$. Neka je $F : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^l$ funkcija definirana sa

$$F(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in S_1 \\ \vdots & \vdots \\ f_n(x), & x \in S_n. \end{cases}$$

Tada je F rekurzivna.

Dokaz. Za $i \in \{1, \dots, n\}$ neka su $(f_i)_1, \dots, (f_i)_l : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ komponentne funkcije od f_i, nadalje neka su $F_1, \dots, F_l : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ komponentne funkcije od F. Neka je $j \in \{1, \dots, l\}$. Tada za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$F_j(x) = \begin{cases} (f_1)_j(x), & x \in S_1 \\ \vdots & \vdots \\ (f_n)_j(x), & x \in S_n. \end{cases}$$

Iz propozicije 1.1 slijedi da je F_j rekurzivna. Prema tome F je rekurzivna. □

Definicija 2.2. Neka je $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ te $S \subseteq \mathbb{N}^k$. Za S kažemo da je *rekurzivno prebrojiv* skup ako je $S = \emptyset$ ili postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^k$ takva da je $S = f(\mathbb{N})$.

Primjer 2.1. Skup $\mathbb{N}^k$, za $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, je rekurzivno prebrojiv.

Neka je $e : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija iz primjera 1.2. Definiramo $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^k$ na način

$$f(x) = (e(x, 1), \dots, e(x, k)).$$

Očito je f rekurzivna. Nadalje, ako je $a \in \mathbb{N}^k$, $a = (a_1, \dots, a_k)$, onda za $x = p_1^{a_1} \dots p_k^{a_k}$ vrijedi $f(x) = a$. Prema tome $f(\mathbb{N}) = \mathbb{N}^k$, odnosno $\mathbb{N}^k$ je rekurzivno prebrojiv skup.

Propozicija 2.3. Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te $S \subseteq \mathbb{N}^k$ rekurzivan skup. Tada je S rekurzivno prebrojiv.

Dokaz. Za $S = \emptyset$ tvrdnja je očita. Pretpostavimo $S \neq \emptyset$. Odaberimo $s_0 \in S$. Budući da je $\mathbb{N}^k$ rekurzivno prebrojiv postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^k$ takva da je $\mathbb{N}^k = f(\mathbb{N})$. Neka je $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^k$ funkcija definirana sa

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \in S \\ s_0, & f(x) \notin S. \end{cases}$$

Očito je $g(\mathbb{N}) \subseteq S$. S druge strane, ako je $s \in S$ onda je $s = f(x)$ za neki $x \in \mathbb{N}$ pa je $g(x) = s$. Dakle $S = g(\mathbb{N})$.

Ostaje dokazati da je g rekurzivna funkcija. Neka je $T = \{x \in \mathbb{N} \mid f(x) \in S\}$, tada za svaki $x \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\chi_T(x) = \chi_S(f(x)),$$

tj. $\chi_T = \chi_S \circ f$ pa iz propozicije 2.1 slijedi da je χ_T rekurzivna funkcija, tj. T je rekurzivan skup.

Iz definicije funkcije g jasno je da je

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in T \\ s_0, & x \notin T. \end{cases}$$

Iz propozicije 2.2 zaključujemo da je g rekurzivna. □

Propozicija 2.4. Neka su $k, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, te $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ rekurzivna funkcija. Neka je $S \subseteq \mathbb{N}^k$ rekurzivno prebrojiv skup. Tada je $f(S)$ rekurzivno prebrojiv skup u $\mathbb{N}^n$.

Dokaz. Ako je $S = \emptyset$ tvrdnja je jasna. Inače, postoji rekurzivna funkcija $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^k$ takva da je $S = g(\mathbb{N})$. Slijedi $f(S) = f(g(\mathbb{N}))$, tj. $f(S) = (f \circ g)(\mathbb{N})$, iz čega slijedi tvrdnja. □

Propozicija 2.5 (Teorem o projekciji)**.** Neka su $k, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, te neka je $T \subseteq \mathbb{N}^{k+n}$ rekurzivno prebrojiv skup. Neka je

$$S = \left\{ x \in \mathbb{N}^k \mid \exists y \in \mathbb{N}^n, (x, y) \in T \right\}.$$

Tada je S rekurzivno prebrojiv skup.

Dokaz. Definirajmo $p : \mathbb{N}^{k+n} \to \mathbb{N}^k$ sa

$$p(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_n) = (x_1, \dots, x_k).$$

Očito je p rekurzivna funkcija jer su njene komponentne funkcije projekcije. Nadalje vrijedi $S = p(T)$, pa iz prethodne propozicije (propozicija 2.4) vrijedi da je S rekurzivno prebrojiv skup. □

Lema 2.6. Neka su $k, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, te neka su $\alpha, \beta : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ rekurzivne funkcije. Neka je $S = \left\{ x \in \mathbb{N}^k \mid \alpha(x) = \beta(x) \right\}$. Tada je S rekurzivan skup.

Dokaz. Promotrimo slučaj kada je $n = 1$. Tada je

$$\chi_s(x) = \overline{\mathrm{sg}}\left(|\alpha(x) - \beta(x)|\right), \text{za svaki } x \in \mathbb{N}^k,$$

pa je χ_S rekurzivna funkcija (jer su funkcije $\overline{\mathrm{sg}}$ i $|\,|$ rekurzivne prema primjeru 1.1. Prema tome S je rekurzivan skup.

U općem slučaju neka su $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ komponentne funkcije od α i β. Tada je

$$\begin{aligned} S &= \left\{ x \in \mathbb{N}^k \mid (\alpha_1(x), \dots, \alpha_n(x)) = (\beta_1(x), \dots, \beta_n(x)) \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{N}^k \mid \alpha_1(x) = \beta_1(x) \right\} \cap \dots \cap \left\{ x \in \mathbb{N}^k \mid \alpha_n(x) = \beta_n(x) \right\}, \end{aligned}$$

pa je S rekurzivan kao presjek konačno mnogo rekurzivnih skupova. □

Propozicija 2.7. Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, i neka su $S, T \subseteq \mathbb{N}^k$ rekurzivno prebrojivi skupovi. Tada su presjek i unija ova dva skupa rekurzivno prebrojivi.

Dokaz. Dokažimo da je $S \cap T$ rekurzivno prebrojiv. Ako su S ili T prazni skupovi tvrdnja je jasna. Inače postoje rekurzivne funkcije $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^k$ takve da je $S = f(\mathbb{N})$ i $T = g(\mathbb{N})$.

Neka je $x \in \mathbb{N}^k$. Imamo

$$x \in S \cap T \Leftrightarrow \exists (i,j) \in \mathbb{N}^2, \text{tako da } x = f(i) \text{ i } x = g(j).$$

Dakle

$$S \cap T = \left\{x \in \mathbb{N}^k \mid \exists (i,j) \in \mathbb{N}^2, \text{tako da } x = f(i) \text{ i } x = g(j)\right\}. \tag{2.1}$$

Neka su

$$P_1 = \left\{(x,i,j) \in \mathbb{N}^{k+2} \mid x \in \mathbb{N}^k, i,j \in \mathbb{N}, x = f(i)\right\}$$
$$P_2 = \left\{(x,i,j) \in \mathbb{N}^{k+2} \mid x \in \mathbb{N}^k, i,j \in \mathbb{N}, x = g(j)\right\}.$$

Neka su $\alpha, \beta : \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N}^k$ funkcije definirane sa

$$\alpha(x,i,j) = x$$
$$\beta(x,i,j) = f(i).$$

To su očito rekurzivne funkcije, a vrijedi

$$P_1 = \left\{z \in \mathbb{N}^{k+2} \mid \alpha(z) = \beta(z)\right\}$$

pa iz leme 2.6 slijedi da je P_1 rekurzivan skup. Analogno zaključujemo da je P_2 rekurzivan.

Iz jednakosti (2.1) slijedi

$$S \cap T = \left\{x \in \mathbb{N}^k \mid \exists (i,j) \in \mathbb{N}^2, \text{tako da } (x,i,j) \in P_1 \cap P_2\right\}.$$

Skup $P_1 \cap P_2$ je rekurzivan pa je prema Teoremu o projekciji (propozicija 2.5) i skup $S \cap T$ rekurzivno prebrojiv. Analogno dobivamo da je skup $S \cup T$ rekurzivno prebrojiv. □

Teorem 2.8 (Single valuednes)**.** Neka su $k, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, te neka je $S \subseteq \mathbb{N}^{k+n}$ rekurzivno prebrojiv skup takav da

$$(\forall x \in \mathbb{N}^k)(\exists y \in \mathbb{N}^n)\ (x,y) \in S.$$

Tada postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ takva da je

$$(x, f(x)) \in S, \quad \forall x \in \mathbb{N}^k.$$

Dokaz. Dokažimo prvo tvrdnju uz pretpostavku da je S rekurzivan skup. Neka je $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^n$ rekurzivna surjekcija. Neka je

$$S' = \left\{(x,i) \mid x \in \mathbb{N}^k,\ i \in \mathbb{N},\ (x,h(i)) \in S\right\}.$$

Očito je S' rekurzivan skup. Neka je $x \in \mathbb{N}^k$. Tada postoji $y \in \mathbb{N}^n$ takav da je $(x,y) \in S$. Budući da je h surjekcija, postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $y = h(i)$, pa slijedi $(x,i) \in S'$. Dakle za svaki $x \in \mathbb{N}^{\Bbbk}$ postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $(x,i) \in S'$.

Definirajmo $\varphi : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$

$$\varphi(x) = \mu i\,((x,i) \in S)\,.$$

Tada je φ rekurzivna funkcija i za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi $(x,\varphi(x)) \in S'$. Prema tome

$$(x,h\,(\varphi(x))) \in S, \quad \forall x \in \mathbb{N}^k.$$

Time je tvrdnja teorema dokazana u slučaju kada je S rekurzivan skup.

U općem slučaju imamo $S = g(\mathbb{N})$, gdje je $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^{k+n}$ rekurzivna funkcija. Neka je $x \in \mathbb{N}^k$. Tada postoji $y \in \mathbb{N}^n$ takav da je $(x,y) \in S$, pa postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $g(i) = (x,y)$. Prema tome za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ postoji $y \in \mathbb{N}^n$ i $i \in \mathbb{N}$ takvi da je $(x,y,i) \in T$, gdje je

$$T = \left\{(x,y,i) \mid x \in \mathbb{N}^k,\ y \in \mathbb{N}^n, i \in \mathbb{N},\ g(i) = (x,y)\right\}.$$

Prema lemi 2.6 skup T je rekurzivan. Prema dokazanom, postoji rekurzivna funkcija $F : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^{n+1}$ takva da je $(x,F(x)) \in T$ za svaki $x \in \mathbb{N}^k$.

Neka su $F_1, \dots, F_{n+1} : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ komponentne funkcije od F. Tada za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$(x, F_1(x), \dots, F_n(x), F_{n+1}(x)) \in T,$$

pa je

$$(x, F_1(x), \dots, F_n(x)) = g\,(F_{n+1}(x))\,,$$

prema tome

$$(x, F_1(x), \dots, F_n(x)) \in S, \quad \forall x \in \mathbb{N}^k.$$

Time je tvrdnja teorema dokazana. □

2.2 Rekurzivne funkcije u skup cijelih brojeva

Definicija 2.3. Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$. Kažemo da je f *rekurzivna* ako je oblika

$$f(x) = (-1)^{u(x)} v(x),$$

gdje su $u, v : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne.

Lema 2.9. Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$. Tada je f rekurzivna ako i samo ako postoje rekurzivne funkcije $a, b : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je

$$f(x) = a(x) - b(x).$$

Dokaz. Pretpostavimo da je

$$f(x) = (-1)^{u(x)} v(x)$$

gdje su $u, v : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije. Tada su funkcije $a, b : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ definirane sa

$$a(x) = \begin{cases} v(x), & u(x) \in 2\mathbb{N} \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

$$b(x) = \begin{cases} 0, & u(x) \in 2\mathbb{N} \\ v(x), & \text{inače} \end{cases}$$

rekurzivne (prema propoziciji 1.1) i vrijedi

$$f(x) = a(x) - b(x).$$

Obratno, ako su $a, b : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije takve da je

$$f(x) = a(x) - b(x),$$

onda je f rekurzivna funkcija jer je

$$f(x) = (-1)^{\mathrm{sg}(b(x) \dot{-} a(x))} |a(x) - b(x)|.$$

$\square$

Propozicija 2.10. Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, te neka su $f, g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ rekurzivne funkcije. Tada su i funkcije $f + g, f \cdot g, -f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ rekurzivne.

Dokaz. Iz definicije rekurzivne funkcije jasno je da su $f \cdot g$, i $-f$ rekurzivne. Pokažimo da je $f + g$ rekurzivna funkcija. Prema lemi 2.9 postoje rekurzivne funkcije $a, b, a', b' : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da vrijedi

$$\begin{aligned} f(x) &= a(x) - b(x) \\ g(x) &= a'(x) - b'(x). \end{aligned}$$

Stoga je

$$(f+g)(x) = (a+a')(x) - (b+b')(x),$$

pa je prema istoj lemi $f + g$ rekurzivna. □

Napomena 2.1. Primijetimo da je svaka rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivna i kao funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$.

2.3 Rekurzivne funkcije u skup racionalnih brojeva

Definicija 2.4. Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Za $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ kažemo da je *rekurzivna* ako postoje rekurzivne funkcije $u, v, w : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, pri čemu je $w(x) \neq 0$ za svaki $x \in \mathbb{N}^k$, takve da je

$$f(x) = (-1)^{u(x)} \frac{v(x)}{w(x)}, \quad \forall x \in \mathbb{N}^k.$$

Uočimo da je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivna ako i samo ako postoje rekurzivne funkcije $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ i $w : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, $w(x) \neq 0$ za svaki $x \in \mathbb{N}^k$, takve da je

$$f(x) = \frac{g(x)}{w(x)}.$$

Propozicija 2.11. Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, te neka su $f, g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivne funkcije. Tada su i funkcije $f + g, f \cdot g, |f|, -f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivne. Nadalje, ako je $f(x) \neq 0$ za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ onda je i $1/f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivna.

Dokaz. Dokažimo da je $f + g$ rekurzivna, ostale tvrdnje slijede direktno iz definicije. Neka su $v, v' : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ i $w, w' : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, $w(x) \neq 0$, $w'(x) \neq 0$ za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ rekurzivne funkcije takve da je

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{v(x)}{w(x)} \\ g(x) &= \frac{v'(x)}{w'(x)}. \end{aligned}$$

Sada je

$$(f+q)(x) = \frac{v(x)w'(x) + v'(x)w(x)}{w(x)w'(x)}.$$

Rekurzivnost funkcije $f+g$ slijedi iz propozicije 2.10 i napomene 2.1. $\square$

Napomena 2.2. Neka su $k, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$, $g : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}^k$ rekurzivne. Tada je i $f \circ g : \mathbb{N}^n \to \mathbb{Q}$ rekurzivna. Naime, ako je

$$f(x) = (-1)^{u(x)} \frac{v(x)}{w(x)}, \quad \forall x \in \mathbb{N}^k$$

gdje su $u, v, w : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, $w(x) \neq 0$ onda je

$$(f \circ g)(x) = (-1)^{(u \circ g)(x)} \frac{(v \circ g)(x)}{(w \circ g)(x)}, \quad \forall x \in \mathbb{N}^n,$$

pa tvrdnja slijedi iz propozicije 2.1.

Propozicija 2.12. Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivna funkcija, te $S = \left\{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) > 0\right\}$. Tada je S rekurzivan skup.

Dokaz. Neka su $u, v, w : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, $w(x) \neq 0$ za svaki $x \in \mathbb{N}^k$, rekurzivne funkcije takve da je

$$f(x) = (-1)^{u(x)} \frac{v(x)}{w(x)}.$$

Tada je $f(x) > 0$ ako i samo ako je

$$v(x) \neq 0 \text{ i } u(x) \in 2\mathbb{N}. \tag{2.2}$$

Neka su

$$\begin{aligned} A &= \left\{x \in \mathbb{N}^k \mid v(x) \neq 0\right\} \text{ i} \\ B &= \left\{x \in \mathbb{N}^k \mid u(x) \in 2\mathbb{N}\right\}. \end{aligned}$$

Tada je

$$\begin{aligned} \chi_A(x) &= \mathrm{sg}(v(x)) \\ \chi_B(x) &= \chi_{2\mathbb{N}}(u(x)), \end{aligned}$$

pa su A i B rekurzivni skupovi. Prema relacijama (2.2) vrijedi $S = A \cap B$, pa je S rekurzivan. $\square$

Korolar 2.13. Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, te neka su $f, g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivne. Tada je

$$S = \left\{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) < g(x)\right\}$$

rekurzivan skup.

Dokaz. Vrijedi

$$S = \left\{x \in \mathbb{N}^k \mid (g - f)(x) > 0\right\}$$

pa tvrdnja slijedi iz propozicija 2.11 i 2.12. □

2.4 Rekurzivne funkcije u skup realnih brojeva

Definicija 2.5. Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Za funkciju $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ reći ćemo da je *rekurzivna* ako postoji rekurzivna funkcija $F : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ takva da je

$$|f(x) - F(x, i)| < 2^{-i}, \quad \forall x \in \mathbb{N}^k, \forall i \in \mathbb{N}.$$

Funkciju F nazivamo *rekurzivna aproksimacija* od f.

Uočimo, ako je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivna funkcija, onda je f rekurzivna i kao funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$.

Propozicija 2.14. Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i neka su $f, g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ rekurzivne funkcije. Tada su i funkcije $f + g, -f, |f| : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ rekurzivne.

Dokaz. Neka su funkcije $F, G : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ rekurzivne aproksimacije za f i g. Za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$|(-f)(x) - (-F)(x, i)| = |f(x) - F(x, i)| < 2^{-i} \quad \text{i}$$
$$||f|(x) - |F|(x, i)| \leq |f(x) - F(x, i)| < 2^{-i},$$

pa iz propozicije 2.11 slijedi da su $-F$ i $|F|$ rekurzivne aproksimacije za $-f$ i $|f|$. Dakle $-f$ i $|f|$ su rekurzivne.

Definirajmo funkciju $H : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ sa

$$H(x, i) = (F + G)(x, i + 1), \quad x \in \mathbb{N}^k, i \in \mathbb{N}.$$

Funkcija H je rekurzivna prema propoziciji 2.11 i napomeni 2.2.

Za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ i svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\begin{aligned} |(f+g)(x) - H(x,i)| &= |f(x) + g(x) - F(x,i+1) - G(x,i+1)| \\ &\leq |f(x) - F(x,i+1)| + |g(x) - G(x,i+1)| \\ &< 2^{-(i+1)} + 2^{-(i+1)} \\ &= 2^{-i}. \end{aligned}$$

Prema tome $f+g$ je rekurzivna. $\square$

Propozicija 2.15. Neka su $n,k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}^k$ rekurzivne. Tada je i $f \circ g : \mathbb{N}^n \to \mathbb{R}$ rekurzivna.

Dokaz. Neka je F rekurzivna aproksimacija od f. Tada za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ i svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$|f(x) - F(x,i)| < 2^{-i},$$

pa stoga za svaki $x \in \mathbb{N}^n$ i svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$|f(g(x)) - F(g(x),i)| < 2^{-i}. \tag{2.3}$$

Definirajmo funkciju $H : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{Q}$ sa

$$H(x,i) = F(g(x),i), \quad x \in \mathbb{N}^n, i \in \mathbb{N}.$$

Iz nejednakosti (2.3) slijedi da je

$$|(f \circ g)(x) - H(x,i)| < 2^{-i}.$$

Kako bi dokazali rekurzivnost funkcije $f \circ g$ dovoljno je pokazati da je H rekurzivna. No H je kompozicija funkcije $\mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}^{k+1}$, $(x,i) \mapsto (g(x),i)$ i funkcije F, pa iz napomene 2.2 slijedi da je H rekurzivna. $\square$

Propozicija 2.16. Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ rekurzivna funkcija. Neka je

$$S = \left\{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) > 0\right\}.$$

Tada je S rekurzivno prebrojiv.

Dokaz. Neka je F rekurzivna aproksimacija od f. Neka je $x \in \mathbb{N}^k$. Tvrdimo da vrijedi

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow (\exists i \in \mathbb{N})\ 2^{-i} < F(x,i). \tag{2.4}$$

Pretpostavimo da je $f(x) > 0$. Tada postoji $i \in \mathbb{N}$ tako da je

$$2^{-i} < \frac{f(x)}{2}.$$

Slijedi

$$2^{-i} < f(x) - 2^{-i}.$$

Budući da je F rekurzivna aproksimacija od f vrijedi

$$f(x) - F(x,i) < 2^{-i},$$

odnosno

$$f(x) - 2^{-i} < F(x,i),$$

stoga je

$$2^{-i} < F(x,i).$$

Obratno. Pretpostavimo da je $2^{-i} < F(x,i)$. Tada je

$$0 < F(x,i) - 2^{-i}.$$

S druge strane $F(x,i) - f(x) < 2^{-i}$ pa je

$$F(x,i) - 2^{-i} < f(x).$$

Prema tome $0 < f(x)$. Dakle vrijedi ekvivalencija (2.4).

Neka je

$$T = \left\{(x,i) \mid x \in \mathbb{N}^k,\ i \in \mathbb{N},\ 2^{-i} < F(x,i)\right\}.$$

Prema korolaru 2.13 skup je rekurzivan. Za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ prema ekvivalenciji (2.4) vrijedi

$$x \in S \Leftrightarrow (\exists i \in \mathbb{N})\ (x,i) \in T.$$

Iz Teorema o projekciji (propozicija 2.5) slijedi tvrdnja propozicije. □

Korolar 2.17. Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i neka su $f, g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ rekurzivne funkcije. Neka je $S = \left\{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) > g(x)\right\}$. Tada je S rekurzivno prebrojiv.

Dokaz. Tvrdnja vrijedi iz prethodne propozicije i propozicije 2.14. □

Propozicija 2.18. Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, te neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ rekurzivna funkcija takva da je $f(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{N}^k$. Neka je $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa

$$g(x) = \sqrt{f(x)}.$$

Tada je g rekurzivna funkcija.

Dokaz. Neka je $q : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ rekurzivan niz takav da je

$$\left\{q_j \mid j \in \mathbb{N}\right\} = [0, +\infty\rangle \cap \mathbb{Q},$$

na primjer

$$q_j = \frac{e(j,0)}{e(j,1)+1},$$

gdje je e funkcija iz primjera 1.2. Uzmimo $x \in \mathbb{N}^k$ i $i \in \mathbb{N}$. Tada postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je

$$q_j < \sqrt{f(x)} < q_j + 2^{-i} \tag{2.5}$$

ili

$$\sqrt{f(x)} < q_j < 2^{-i}; \tag{2.6}$$

(ako je $f(x) > 0$ onda možemo naći j takav da vrijedi nejednakost (2.5), dok za $f(x) = 0$, možemo naći j tako da vrijedi nejednakost (2.6)). Nejednakosti (2.5) i (2.6) ekvivalentne su nejednakostima

$$q_j^2 < f(x) < \left(q_j + 2^{-i}\right)^2 \quad \text{i} \tag{2.7}$$

$$f(x) < q_j^2 < \left(2^{-i}\right)^2. \tag{2.8}$$

Dakle za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ i svaki $i \in \mathbb{N}$ postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi nejednakost (2.7) ili (2.8).

Neka je S skup svih $(x, i, j) \in \mathbb{N}^{k+2}$ gdje su $x \in \mathbb{N}^k$, $i, j \in \mathbb{N}$ takvi da vrijedi nejednakost (2.7) ili (2.8). Tvrdimo da je S rekurzivno prebrojiv skup. Imamo $S = S' \cup S''$, gdje je S' skup svih $(x, i, j) \in \mathbb{N}^{k+2}$ za koje vrijedi nejednakost (2.7), a S'' skup svih $(x, i, j) \in \mathbb{N}^{k+2}$ za koje vrijedi nejednakost (2.8).

Vrijedi

$$S' = \left\{(x, i, j) \mid q_j^2 < f(x)\right\} \cap \left\{(x, i, j) \mid f(x) < (q_j + 2^{-i})^2\right\},$$

pa je prema korolaru 2.17 skup S' presjek dva rekurzivno prebrojiva skupa. Stoga je S' rekurzivno prebrojiv. Analogno dobivamo da je S'' rekurzivno prebrojiv, pa je i S rekurzivno prebrojiv kao unija dva rekurzivno prebrojiva skupa.

Budući da za sve $x \in \mathbb{N}^k$ i $i \in \mathbb{N}$ postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je $(x, i, j) \in S$, prema teoremu 2.8 postoji rekurzivna funkcija $\varphi : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ takva da je

$$(x, i, \varphi(x, i)) \in S, \quad \forall x \in \mathbb{N}^k,\ i \in \mathbb{N}.$$

Uzmimo $x \in \mathbb{N}^k$, $i \in \mathbb{N}$. Označimo $j = \varphi(x,i)$. Imamo $(x,i,j) \in S$, pa za x,i,j vrijede nejednakosti (2.7) ili (2.8), odnosno nejednakosti (2.5) ili (2.6). Iz obje nejednakosti slijedi

$$\left|\sqrt{f(x)} - q_j\right| < 2^{-i}.$$

Dakle

$$\left|\sqrt{f(x)} - q_{\varphi(x,i)}\right| < 2^{-i}. \tag{2.9}$$

Definirajmo $G : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ sa

$$G(x,i) = q\left(\varphi(x,i)\right).$$

Očito je G rekurzivna funkcija, a prema nejednakosti (2.9) vrijedi

$$|g(x) - G(x,i)| < 2^{-i}, \quad \forall x \in \mathbb{N}^k,\ i \in \mathbb{N}.$$

Prema tome g je rekurzivna funkcija. □

Definicija 2.6. Neka je $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je (x_i) niz u $\mathbb{R}^n$. Kažemo da je (x_i) *rekurzivan niz* u $\mathbb{R}^n$, ako su komponentni nizovi od (x_i) rekurzivni, tj. ako su nizovi realnih brojeva $(x_i^1), \dots, (x_i^n)$ takvi da je

$$x_i = \left(x_i^1, \dots, x_i^n\right), \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

rekurzivni.

Iz propozicije 2.18 direktno slijedi sljedeća tvrdnja.

Korolar 2.19. Neka je $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i neka su (x_i) i (y_i) rekurzivni nizovi u $\mathbb{R}^n$. Neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}^n$. Tada je funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$

$$(i,j) \mapsto d(x_i, y_j)$$

rekurzivna.

3 IZRAČUNLJIVOST U METRIČKIM PROSTORIMA

3.1 Izračunljivi i rekurzivno prebrojivi skupovi

Definicija 3.1. Neka je (X,d) metrički prostor. Za $S \subseteq X$ kažemo da je *gust skup* ako za svaki $x \in X$ i svaki $\varepsilon > 0$ postoji $y \in S$ takav da je $d(x,y) < \varepsilon$.

Za niz (x_i) kažemo da je *gust niz* u metričkom prostoru (X,d) ako je $\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ gust skup u (X,d).

Definicija 3.2. Neka je (X,d) metrički prostor. Neka su $S,T \subseteq X$. Kažemo da je T *gust skup* u S (u metričkom prostoru (X,d)) ako je $T \subseteq S$, te ako za svaki $x \in S$ i svaki $\varepsilon > 0$ postoji $y \in T$ takav da je

$$d(x,y) < \varepsilon.$$

Primjer 3.1. Neka je $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, te neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}^n$. Tada je $\mathbb{Q}^n$ gust skup u $(\mathbb{R}^n, d)$. Dokažimo to.

Neka je $x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, te $\varepsilon > 0$. Neka je $i \in \{1, \dots, n\}$. Imamo

$$x_i < x_i + \varepsilon/n,$$

pa postoji $y_i \in \mathbb{Q}$ takav da je

$$x_i < y_i < x_i + \varepsilon/n$$

iz čega slijedi

$$|x_i - y_i| < \varepsilon/n.$$

Neka je $y = (y_1, \dots, y_n)$. Tada je $y \in \mathbb{Q}^n$, te vrijedi

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} \\ &< \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{n}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\varepsilon}{n}\right)^2} \\ &= \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \\ &\leq \varepsilon, \end{aligned}$$

dakle $d(x,y) < \varepsilon$.

Definicija 3.3. Neka je (X,d) metrički prostor, te neka je $\alpha = (\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ gust niz u (X,d) takav da je funkcija $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $(i,j) \mapsto d(\alpha_i, \alpha_j)$ rekurzivna. Tada za (X,d,α) kažemo da je *izračunljiv metrički prostor*.

Za α kažemo da je *efektivan separirajući niz* u metričkom prostoru (X,d).

Primjer 3.2. Neka je $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, te neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}^n$. Neka je α niz u $\mathbb{R}^n$ definiran s

$$\alpha_i = \left((-1)^{e(i,2)} \frac{e(i,0)}{e(i,1)+1}, \dots, (-1)^{e(i,3n-1)} \frac{e(i,3n-3)}{e(i,3n-2)+1} \right).$$

Tvrdimo da je $(\mathbb{R}^n, d, \alpha)$ izračunljiv metrički prostor. Uočimo da je skup $\{\alpha_i \mid i \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Q}^n$, prema tome α je gust niz u metričkom prostoru $(\mathbb{R}^n, d)$. Nadalje uočimo da je α rekurzivan niz u $\mathbb{R}^n$. Iz korolara 2.19 slijedi da je funkcija $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $(i,j) \mapsto d(\alpha_i, \alpha_j)$ rekurzivna. Dakle $(\mathbb{R}^n, d, \alpha)$ je izračunljiv metrički prostor.

Definicija 3.4. Neka je (X,d,α) izračunljiv metrički prostor, te neka je $x_0 \in X$. Kažemo da je x_0 *izračunljiva točka* u metričkom prostoru (X,d,α) ako postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je

$$d(x_0, \alpha_{f(k)}) < 2^{-k}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Definicija 3.5. Neka je (X,d,α) izračunljiv metrički prostor, te (x_i) niz u X. Kažemo da je (x_i) *izračunljiv niz* u (X,d,α) ako postoji rekurzivna funkcija $F : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da je

$$d(x_i, \alpha_{F(i,k)}) < 2^{-k}, \quad \forall i,k \in \mathbb{N}.$$

Napomena 3.1. Ako je (x_i) izračunljiv niz u (X,d,α), onda je za svaki $i \in \mathbb{N}$ točka x_i izračunljiva u (X,d,α).

Propozicija 3.1. Neka je $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i $(\mathbb{R}^n, d, \alpha)$ izračunljiv metrički prostor definiran u primjeru 3.2. Neka je (x_i) niz u $\mathbb{R}^n$. Tada je (x_i) rekurzivan niz u $\mathbb{R}^n$ ako i samo ako je (x_i) izračunljiv niz u $(\mathbb{R}^n, d, \alpha)$.

Dokaz. Neka su $(\alpha_i^1), \dots, (\alpha_i^n)$ komponentni nizovi od α. Primijetimo da su ovi nizovi rekurzivni kao funkcije $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$. Nadalje, neka su $(x_i^1), \dots, (x_i^n)$ komponentni nizovi od (x_i).

Pretpostavimo da je (x_i) izračunljiv niz u $(\mathbb{R}^n, d, \alpha)$. Vrijedi

$$d(x_i, \alpha_{F(i,k)}) < 2^{-k} \tag{3.1}$$

za neku rekurzivnu funkciju $F : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$. Uzmimo $j \in \{1, \dots, n\}$. Koristeći nejednakost (3.1) dobivamo da za svaki $i, k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\left| x_i^j - \alpha_{F(i,k)}^j \right| \leq \sqrt{\left(x_i^1 - \alpha_{F(i,k)}^1 \right)^2 + \dots + \left(x_i^n - \alpha_{F(i,k)}^n \right)^2} < 2^{-k}.$$

Dakle

$$\left| x_i^j - \alpha_{F(i,k)}^j \right| < 2^{-k}, \quad \forall i, k \in \mathbb{N}.$$

Funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{Q}$, $(i, k) \mapsto \alpha_{F(i,k)}^j$ je rekurzivna pa je $(x_i^j)_{i \in \mathbb{N}}$ rekurzivan niz u $\mathbb{R}$. Prema tome (x_i) je rekurzivan u $\mathbb{R}^n$.

Obratno. Pretpostavimo da je (x_i) rekurzivan niz u $\mathbb{R}^n$. Tada je prema korolaru 2.19 funkcija $\gamma : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$

$$\gamma(i, j) = d(x_i, \alpha_j)$$

rekurzivna. Neka je

$$S = \left\{ (i, k, j) \in \mathbb{N}^3 \mid \gamma(i, j) < 2^{-k} \right\}.$$

Skup S je rekurzivno prebrojiv prema propoziciji 2.17. Budući da je α gust niz u $\mathbb{R}^n$, za sve $i, k \in \mathbb{N}$ postoji $j \in \mathbb{N}$ tako da je $(i, k, j) \in S$. Iz teorema 2.8 slijedi da postoji rekurzivna funkcija $F : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da je

$$(i, k, F(i, k)) \in S, \quad \forall i, k \in \mathbb{N}.$$

Prema tome

$$d(x_i, \alpha_{F(i,k)}) < 2^{-k}, \quad \forall i, k \in \mathbb{N},$$

dakle (x_i) je izračunljiv niz u $(\mathbb{R}^n, d, \alpha)$. □

Lema 3.2. Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, te neka su $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ i $F : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{R}$ funkcije takve da je

$$|f(x) - F(x,i)| < 2^{-i}, \quad \forall x \in \mathbb{N}^k, i \in \mathbb{N}.$$

Pretpostavimo da je F rekurzivna funkcija. Tada je f rekurzivna funkcija.

Dokaz. Neka je $G : \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{Q}$ rekurzivna funkcija takva da vrijedi

$$|F(x,i) - G(x,i,j)| < 2^{-j}, \quad \forall x \in \mathbb{N}^k, \ i,j \in \mathbb{N}.$$

Tada za sve $x \in \mathbb{N}^k$, $i,j \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$|f(x) - G(x,i,j)| \leq |f(x) - F(x,i)| + |F(x,i) - G(x,i,j)| < 2^{-i} + 2^{-j},$$

tj.

$$|f(x) - G(x,i,j)| < 2^{-i} + 2^{-j}.$$

Posebno je

$$|f(x) - G(x,i+1,i+1)| < 2^{-i},$$

pa slijedi da je f rekurzivna. □

Propozicija 3.3. Neka je (X,d,α) izračunljiv metrički prostor, te neka su (x_i) i (y_i) izračunljivi nizovi u (X,d,α). Tada je funkcija $\gamma : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$

$$\gamma(i,j) = d(x_i, y_j)$$

rekurzivna.

Dokaz. Neka su $F, G : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije takve da je

$$\begin{aligned} d(x_i, \alpha_{F(i,k)}) &< 2^{-k} \quad \text{i} \\ d(y_j, \alpha_{G(j,k)}) &< 2^{-k}, \quad \forall i,j,k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Iz nejednakosti trokuta lako dobivamo da za sve $a, a', b, b' \in X$ vrijedi

$$|d(a,b) - d(a',b')| \leq d(a,a') + d(b,b').$$

Prema tome, za sve $i,j,k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\begin{aligned} \left| d(x_i, y_j) - d\left(\alpha_{F(i,k+1)}, \alpha_{G(j,k+1)}\right) \right| &\leq d\left(x_i, \alpha_{F(i,k+1)}\right) + d\left(y_j, \alpha_{G(j,k+1)}\right) \\ &< 2 \cdot 2^{-k+1} \\ &= 2^{-k}, \end{aligned}$$

dakle

$$\left|\gamma(i,j) - d\left(\alpha_{F(i,k+1)}, \alpha_{G(j,k+1)}\right)\right| < 2^{-k}.$$

Iz činjenice da je funkcija $\mathbb{N}^3 \to \mathbb{R}$

$$(i,j,k) \mapsto d\left(\alpha_{F(i,k+1)}, \alpha_{G(j,k+1)}\right)$$

rekurzivna (sto slijedi iz definicije izračunljivog metričkog prostora) i leme 3.2 zaključujemo da je γ rekurzivna funkcija. □

Definicija 3.6. Neka je (X,d) metrički prostor, neka su $x_0 \in X$ i $r > 0$. Definiramo

$$K(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x_0, x) < r\}.$$

Za $K(x_0, r)$ kažemo da je *otvorena kugla* oko točke x_0 radijusa r.

Za $S \subseteq X$ kažemo da je *otvoren skup* u metričkom prostoru (X,d) ako za svaki $x \in S$ postoji $r > 0$ tako da je $K(x,r) \subseteq S$.

Propozicija 3.4. Neka je (X,d) metrički prostor. Svaka otvorena kugla u (X,d) je otvoren skup.

Dokaz. Neka su $x_0 \in X$ i $r > 0$. Neka je $y \in K(x_0, r)$. Neka je $s = r - d(y, x_0)$. Očito je $s > 0$. Tvrdimo da vrijedi

$$K(y,s) \subseteq K(x_0, r).$$

Uzmimo $z \in K(y,s)$. Tada je $d(z,y) < s$. Vrijedi

$$\begin{aligned} d(z, x_0) &\leq d(z,y) + d(y, x_0) \\ &< s + d(y, x_0) \\ &= r. \end{aligned}$$

Dakle $x \in K(x_0, r)$. □

Definicija 3.7. Neka je (X,d) metrički prostor, te neka je $S \subseteq X$. Za nepraznu familiju $\mathcal{U}$ otvorenih skupova u (X,d) kažemo da je *otvoreni pokrivač* od S u (X,d) ako je

$$S \subseteq \bigcup \mathcal{U}.$$

Definicija 3.8. Neka je (X,d) metrički prostor, te neka je $S \subseteq X$. Za S kažemo da je *kompaktan skup* u (X,d) ako za svaki otvoreni pokrivač $\mathcal{U}$ od S postoje $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}$ takvi da je

$$S \subseteq U_1 \cup \dots \cup U_n.$$

Definicija 3.9. Neka je (X,d) metrički prostor, te neka su $S,T \subseteq X$. Neka je $\varepsilon > 0$. Pišemo

$$S \approx_\varepsilon T$$

ako vrijedi

$$\begin{aligned} &(\forall x \in S)\ (\exists y \in T) \quad d(x,y) < \varepsilon, \text{ i} \\ &(\forall y \in T)\ (\exists x \in S) \quad d(x,y) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Propozicija 3.5. Neka je (X,d) metrički prostor, te neka je S neprazan kompaktan skup u tom prostoru. Tada za svaki $\varepsilon > 0$ postoje $x_1,\dots,x_n \in S$ takvi da je

$$S \approx_\varepsilon \{x_1,\dots,x_n\}.$$

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$. Neka je

$$\mathcal{U} = \{K(x,\varepsilon) \mid x \in S\}.$$

Tada je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač za S u metričkom prostoru (X,d). Budući da je S kompaktan postoje $x_1,\dots,x_n \in S$ takvi da je

$$S \subseteq K(x_1,\varepsilon) \cup \dots \cup K(x_n,\varepsilon).$$

Iz ovog slijedi da za svaki $s \in S$ postoji $i \in \{1,\dots,n\}$ takav da je $S \in K(x_i,\varepsilon)$, tj. $d(s,x_i) < \varepsilon$.

Obratno. Za svaki $i \in \{1,\dots,n\}$ postoji $s \in S$ takav da je $d(x_i,s) < \varepsilon$ (jer je $x_i \in S$, pa možemo uzeti $s = x_i$). Prema tome vrijedi

$$S \approx_\varepsilon \{x_1,\dots,x_n\}.$$

□

Napomena 3.2. Neka je (X,d) metrički prostor, neka su $A,B,C \subseteq X$, te neka je $\varepsilon > 0$ tako da je

$$A \approx_\varepsilon B \quad \text{i} \quad B \approx_\varepsilon C.$$

Tada je

$$A \approx_{2\varepsilon} C.$$

Naime, ako je $a \in A$ onda postoji $b \in B$ tako da je $d(a,b) < \varepsilon$, te također postoji $c \in C$ tako da je $d(b,c) < \varepsilon$. Stoga je $d(a,c) < 2\varepsilon$. Isto tako vidimo da za svaki $c \in C$ postoji $a \in A$ tako da je $d(c,a) < 2\varepsilon$.

Propozicija 3.6. Neka je (X, d) metrički prostor, neka je $S \subseteq X$ kompaktan u (X, d), te neka je A gust skup u (X, d). Tada za svaki $\varepsilon > 0$ postoji konačan neprazan podskup $A' \subseteq A$ tako da vrijedi

$$S \approx_\varepsilon A'.$$

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$. Prema propoziciji 3.5 postoje $x_1, \dots, x_n \in S$ takvi da je

$$S \approx_{\varepsilon/2} \{x_1, \dots, x_n\}.$$

Budući da je A gust skup za $\varepsilon/2$ i svaki $i \in \{1, \dots, n\}$ postoji $a_i \in A$ tako da je $d(x_i, a_i) < \varepsilon/2$. Zaključujemo da je

$$\{x_1, \dots, x_n\} \approx_{\varepsilon/2} \{a_1, \dots, a_n\}.$$

Iz napomene 3.2 slijedi

$$S \approx_\varepsilon \{a_1, \dots, a_n\}.$$

□

Definicija 3.10. Neka je e funkcija eksponenta iz definicije 1.2. Definiramo funkcije $\sigma : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ i $\eta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ na sljedeći način

$$\begin{aligned} \sigma(i, j) &= e(i, j) \dot{-} 1 \\ \eta(i) &= \mu j \, (e(i, j) = 0) \dot{-} 1. \end{aligned}$$

Propozicija 3.7. Svaki konačan neprazan niz u $\mathbb{N}$ jednak je

$$(\sigma(i, 0). \dots, \sigma(i, \eta(i)))$$

za neki $i \in \mathbb{N}$.

Dokaz. Očito su σ, η rekurzivne funkcije. Neka su $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{N}$. Definirajmo

$$i = p_0^{a_0+1} \cdot p_1^{a_1+1} \cdot \dots \cdot p_n^{a_n+1}.$$

Gdje je p_k, $k \in \{0, \dots, n\}$ k-ti prost broj. Tada je

$$(\sigma(i, 0), \dots, \sigma\,(i, \eta(i))) = (a_0, \dots, a_n).$$

□

Za $i, j \in \mathbb{N}$ uvedimo sljedeće oznake:

$$(i)_j = \sigma(i, j),$$
$$\bar{i} = \eta(i).$$

Uočimo da je svaki konačan niz u $\mathbb{N}$ oblika

$$((i)_0, \dots, (i)_{\bar{i}}).$$

Za $i \in \mathbb{N}$ definiramo

$$[i] = \{(i)_0, \dots, (i)_{\bar{i}}\}.$$

Neka je F konačan neprazan podskup od $\mathbb{N}$. Tada je $F = \{a_0, \dots, a_n\}$, za $n \in \mathbb{N}$ i $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{N}$, pa postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je

$$(a_0, \dots, a_n) = ((i)_0, \dots, (i)_{\bar{i}}).$$

Stoga je $F = \{(i)_0, \dots, (i)_{\bar{i}}\}$, to jest

$$F = [i].$$

Dakle svaki neprazan konačni podskup od $\mathbb{N}$ je oblika $[i]$ za neki $i \in \mathbb{N}$.

Propozicija 3.8. Neka je

$$\Gamma = \left\{(j, i) \in \mathbb{N}^2 \mid j \in [i]\right\}.$$

Tada je Γ rekurzivan skup.

Dokaz. Neka su $j, i \in \mathbb{N}$. Tada je

$$\begin{aligned}(j, i) \in \Gamma &\Leftrightarrow j \in \{(i)_0, \dots, (i)_{\bar{i}}\} \\ &\Leftrightarrow \prod_{k=0}^{\bar{i}} \left|j - (i)_k\right| = 0.\end{aligned}$$

Stoga je

$$\chi_\Gamma(j, i) = \overline{\mathrm{sg}} \prod_{k=0}^{\bar{i}} \left|j - (i)_k\right|.$$

Iz propozicije 1.2 slijedi da je χ_Γ rekurzivna funkcija, stoga je Γ rekurzivan skup. $\square$

Definicija 3.11. Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Za $i \in \mathbb{N}$ definiramo

$$\Lambda_i = \alpha\left([i]\right).$$

Uočimo da je Λ_i konačan neprazan podskup od $\operatorname{Im} \alpha = \left\{\alpha_j \mid j \in \mathbb{N}\right\}$. Obratno. Svaki konačan neprazan podskup od $\operatorname{Im} \alpha$ je oblika Λ_i. Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor, te neka je S neprazan kompaktan podskup u (X, d). Tada prema propoziciji 3.6 za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je

$$S \approx_{2^{-k}} \Lambda_i.$$

Definicija 3.12. Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor, te neka je S neprazan kompaktan podskup u (X, d). Kažemo da je S *izračunljiv skup* u (X, d, α) ako postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$S \approx_{2^{-k}} \Lambda_{f(k)}.$$

Definicija 3.13. Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor, te neka su $i \in \mathbb{N}$ i $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$. Tada za $K(\alpha_i, r)$ kažemo da je *racionalna otvorena kugla* u (X, d, α).

Neka je $q : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ funkcija definirana sa

$$q(i) = \frac{e(i, 0) + 1}{e(i, 1) + 1}.$$

Očito je q rekurzivna funkcija, te je

$$\operatorname{Im} q = \mathbb{Q} \cap \langle 0, +\infty\rangle.$$

Za $i \in \mathbb{N}$ definirajmo

$$I_i = K\left(\alpha_{(i)_0}, q_{(i)_1}\right).$$

Očito je I_i racionalna otvorena kugla u (X, d, α).

Obratno. Svaka racionalna otvorena kugla u (X, d, α) je oblika $K\left(\alpha_p, q_j\right)$ za neke $p, j \in \mathbb{N}$, pa ako odaberemo $i \in \mathbb{N}$ takav da je $(i)_0 = p$ i $(i)_1 = j$ onda imamo

$$I_i = K\left(\alpha_p, q_j\right).$$

Dakle svaka racionalna otvorena kugla u (X, d, α) je jednaka I_i za neki $i \in \mathbb{N}$.

Definicija 3.14. Neka je (X, d) metrički prostor te neka je $F \subseteq X$. Kažemo da je F *zatvoren skup* u (X, d) ako je $X \setminus F$ otvoren skup u (X, d).

Definicija 3.15. Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor, te neka je S zatvoren skup u (X, d). Kažemo da je S *rekurzivno prebrojiv* u (X, d, α) ako je skup

$$\{i \in \mathbb{N} \mid I_i \cap S \neq \emptyset\}$$

rekurzivno prebrojiv podskup od $\mathbb{N}$.

Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Za $i \in \mathbb{N}$ definiramo

$$\lambda_i = \alpha_{(i)_0} \quad \text{i} \quad \rho_i = q_{(i)_1}.$$

Uočimo da tada za svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$I_i = K(\lambda_i, \rho_i).$$

Napomena 3.3. Ako je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor i $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija, onda je niz $\left(\alpha_{f(i)}\right)_{i \in \mathbb{N}}$ izračunljiv u (X, d, α). Naime funkcija $F : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $F(i, k) = f(i)$ je očito rekurzivna te vrijedi

$$d\left(\alpha_{f(i)}, \alpha_{F(i,k)}\right) < 2^{-k}, \quad \forall i, k \in \mathbb{N}.$$

Uočimo da je niz $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$ izračunljiv u (X, d, α) (napomena 3.3). Nadalje (ρ_i) je rekurzivan niz u $\mathbb{Q}$, tj. rekurzivna funkcija $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ (napomena 2.2).

Definicija 3.16. Neka je (X, d) metrički prostor te neka su $x_0 \in X$ i $r > 0$. Definiramo

$$\overline{K}(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x_0, x) \leq r\}.$$

Za $\overline{K}(x_0, r)$ kažemo da je *zatvorena kugla* u (X, d) oko točke x_0, radijusa r.

Uvedimo oznaku, za $i \in \mathbb{N}$

$$\hat{I}_i = \overline{K}(\lambda_i, \rho_i).$$

Propozicija 3.9. Neka je (X, d) metrički prostor te neka su $x_0 \in X$ i $r > 0$. Tada je $\overline{K}(x_0, r)$ zatvoren skup u (X, d).

Dokaz. Neka je $x \in X \setminus \overline{K}(x_0, r)$. Tada je $d(x, x_0) > r$. Definirajmo

$$s = d(x, x_0) - r.$$

Tada je $d(x, x_0) = r + s$. Lako se vidi da je

$$K(x, s) \subseteq X \setminus \overline{K}(x_0, r).$$

Prema tome $X \setminus \overline{K}(x_0, r)$ je otvoren skup i time je tvrdnja dokazana. □

Propozicija 3.10. Neka je (X, d) metrički prostor. Vrijede sljedeće tvrdnje.

1. Skupovi X i $\emptyset$ su otvoreni i zatvoreni u (X, d).
2. Neka je$(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ indeksirana familija otvorenih podskupova u (X, d). Tada je $\cup_{\alpha \in A} U_\alpha$ otvoreni skup.
3. Neka je $(F_\alpha)_{\alpha \in A}$ indeksirana familija zatvorenih podskupova u (X, d). Tada je $\cap_{\alpha \in A} F_\alpha$ zatvoren skup.
4. Neka su U i V otvoreni skupovi u (X, d). Tada je $U \cap V$ otvoren skup u (X, d).
5. Neka su F i G zatvoreni skupovi u (X, d). Tada je $F \cup G$ zatvoren skup u (X, d).

Dokaz. Tvrdnja (1) je očita.

Ako je $x \in (U_\alpha)_{\alpha \in A}$, onda je $x \in U_\alpha$ za neki $\alpha \in A$, pa postoji $r > 0$ takav da je

$$K(x, r) \subseteq U_\alpha,$$

iz čega slijedi da je

$$K(x, r) \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha.$$

Dakle $\cup_{\alpha \in A} U_\alpha$ je otvoren skup.

Vrijedi

$$\left(\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha \right)^c = \bigcup_{\alpha \in A} F_\alpha^c.$$

Prema tvrdnji (2) skup $\bigcup_{\alpha \in A} F_\alpha^c$ je otvoren, pa je $\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha$ zatvoren.

Neka je $x \in U \cap V$. Tada je $x \in U$ i $x \in V$, pa postoje $r_1, r_2 > 0$ takvi da je

$$K(x, r_1) \subseteq U \quad \text{i} \quad K(x, r_2) \subseteq V.$$

Neka je $r_3 = \min\{r_1, r_2\}$. Tada je

$$K(x, r_3) \subseteq U \cap V.$$

Dakle $U \cap V$ je otvoren skup.

Koristeći tvrdnju (4) i činjenicu da je $(F \cup G)^c = F^c \cap G^c$, zaključujemo da je $F \cup G$ zatvoren skup. $\square$

Napomena 3.4. Iz tvrdnje (4) odnosno (5) prethodne propozicije lako indukcijom dobivamo sljedeće: Ako su $U_1, \dots, U_n$ otvoreni skupovi onda je

$$U_1 \cap \dots \cap U_n$$

otvoren skup; ako su $F_1, \dots, F_n$ zatvoreni skupovi onda je

$$F_1 \cup \dots \cup F_n$$

zatvoren skup.

Propozicija 3.11. Neka je (X, d) metrički prostor, te neka je K kompaktan skup u (X, d). Tada je K zatvoren u (X, d).

Dokaz. Tvrdnja je jasna ako je $K = \emptyset$. Pretpostavimo da je K neprazan. Neka je $x \in K^c$. Uočimo sljedeće: Za svaki $y \in X$ takav da je $y \neq x$ postoji $r > 0$ tako da $x \notin \overline{K}(y, r)$. Naime, možemo uzeti $r = d(x, y)/2$. Neka je $y \in K$. Tada je $y \neq x$, pa postoji $r_y > 0$ takav da

$$x \notin \overline{K}\left(y, r_y\right). \tag{3.2}$$

Neka je

$$\mathcal{U} = \left\{K\left(y, r_y\right) \mid y \in K\right\}.$$

Tada je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač od K u (X, d). Stoga postoje $n \in \mathbb{N}$ i $y_0, \dots, y_n \in K$ takvi da je

$$K \subseteq \overline{K}\left(y_0, r_{y_0}\right) \cup \dots \overline{K}\left(y_n, r_{y_n}\right). \tag{3.3}$$

Neka je

$$F = \overline{K}\left(y_0, r_{y_0}\right) \cup \dots \cup \overline{K}\left(y_n, r_{y_n}\right).$$

Iz relacije (3.2) slijedi da $x \notin F$, tj. $x \in F^c$. Nadalje, prema propoziciji 3.9 i napomeni 3.4, skup F je zatvoren, tj. skup F^c je otvoren. Stoga postoji $r > 0$ rakav da je

$$K(x, r) \subseteq F^c.$$

Prema relaciji (3.3) vrijedi $K \subseteq F$, pa je $F^c \subseteq K^c$. Stoga je

$$K(x, r) \subseteq K^c.$$

Time smo pokazali da je K^c otvoren u (X, d), tj. K je zatvoren. □

Teorem 3.12. Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Neka je S izračunljiv u skup (X, d, α). Tada je S rekurzivno prebrojiv.

Dokaz. Skup S je kompaktan (po definiciji izračunljivog skupa; definicija 3.12), pa iz propozicije 3.11 slijedi da je S zatvoren. Ostaje još pokazati da je skup

$$\left\{i \in \mathbb{N} \mid I_i \cap S \neq \emptyset\right\}$$

rekurzivno prebrojiv.

Budući da je S izračunljiv postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da vrijedi

$$S \approx_{2^{-k}} \Lambda_{f(k)}, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{3.4}$$

Pretpostavimo da je $i \in \mathbb{N}$ takav da je $I_i \cap S \neq \emptyset$. Tada postoji $x \in I_i \cap S$. Tada je $x \in I_i$ i $x \in S$. Slijedi $d(x, \lambda_i) < \rho_i$ pa postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je

$$d(x, \lambda_i) + 2 \cdot 2^{-k} < \rho_i.$$

Prema relaciji (3.4) vrijedi

$$S \approx_{2^{-k}} \left\{\alpha_j \mid j \in [f(k)]\right\}. \tag{3.5}$$

Iz $x \in S$ i relacije (3.5) slijedi da postoji $j \in [f(k)]$ takav da vrijedi

$$d\left(x, \alpha_j\right) < 2^{-k}.$$

Imamo

$$\begin{aligned} d\left(\lambda_i, \alpha_j\right) + 2^{-k} &\leq d(\lambda_i, x) + d\left(x, \alpha_j\right) + 2^{-k} \\ &< d(\lambda_i, x) + 2^{-k} + 2^{-k} \\ &< \rho_i. \end{aligned}$$

Dakle, ako je $i \in \mathbb{N}$ tako da je $I_i \cap S \neq \emptyset$, onda postoje $k, j \in \mathbb{N}$ takvi da je

$$j \in [f(k)] \quad \text{i} \quad d\left(\lambda_i, \alpha_j\right) + 2^{-k} < \rho_i. \tag{3.6}$$

Obratno. Pretpostavimo da je $i \in \mathbb{N}$ takav da postoje $k, j \in \mathbb{N}$ takvi da vrijedi (3.6). Tvrdimo da je tada

$$I_i \cap S \neq \emptyset.$$

Imamo $j \in [f(k)]$, pa iz (3.5) slijedi da postoji $x \in S$ takav da je

$$d\left(x, \alpha_j\right) < 2^{-k}.$$

Slijedi

$$\begin{aligned} d\left(\lambda_i, x\right) &\leq d\left(\lambda_i, \alpha_j\right) + d\left(\alpha_j, x\right) \\ &< d\left(\lambda_i, \alpha_j\right) + 2^{-k} \\ &< \rho_i, \end{aligned}$$

tj. $d\left(\lambda_i, x\right) < \rho_i$. Dakle $x \in I_i$, pa je $I_i \cap S \neq \emptyset$.

Imamo sljedeći zaključak. Ako je $i \in \mathbb{N}$, onda $I_i \cap S \neq \emptyset$ ako i samo ako postoje $k, j \in \mathbb{N}$ takvi da vrijedi (3.6). Neka je Ω skup svih $(i, j, k) \in \mathbb{N}^3$ takvih da vrijedi (3.6). Dakle za $i \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$I_i \cap S \neq \emptyset \Leftrightarrow \left(\exists\, (j, k) \in \mathbb{N}^2\right)\ (i, j, k) \in \Omega. \tag{3.7}$$

Dokažimo da je Ω rekurzivno prebrojiv. Neka su

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \left\{(i, j, k) \in \mathbb{N}^3 \mid j \in [\, f\left(k\right)]\right\}, \\ \Omega_2 &= \left\{(i, j, k) \in \mathbb{N}^3 \mid d(\lambda_i, \alpha_j) + 2^{-k} < \rho_i\right\}. \end{aligned}$$

Očito je

$$\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2. \tag{3.8}$$

Neka je Γ skup iz propozicije 3.8. Tada je

$$\Omega_1 = \left\{(i, j, k) \in \mathbb{N}^3 \mid (j, f(k)) \in \Gamma\right\},$$

pa je

$$\chi_{\Omega_1}\left(i, j, k\right) = \chi_\Gamma\left(j, f\left(k\right)\right), \quad \forall i, j, k \in \mathbb{N}.$$

Iz ovoga i činjenice da je Γ rekurzivan skup slijedi da je Ω_1 rekurzivan skup. Posebno Ω_1 je rekurzivno prebrojiv skup.

Prema propoziciji 3.3 funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$, $(i, j) \mapsto d(\lambda_i, \alpha_j)$ je rekurzivna. Stoga je rekurzivna i funkcija $\mathbb{N}^3 \to \mathbb{R}$, $(i, j, k) \mapsto d(\lambda_i, \alpha_j)$ (prema propoziciji 2.15). Funkcija $\mathbb{N}^3 \to \mathbb{Q}$, $(i, j, k) \mapsto 2^{-k}$ je očito rekurzivna, stoga je rekurzivna i kao funkcija s $\mathbb{N}^3 \to \mathbb{R}$. Iz propozicije 2.14 slijedi da je funkcija $f : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{R}$

$$f\left(i, j, k\right) = d(\lambda_i, \alpha_j) + 2^{-k}$$

rekurzivna. Iz činjenice da je $(\rho_i)_{i \in \mathbb{N}}$ rekurzivan niz u $\mathbb{Q}$, slijedi da je funkcija $g : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{R}, g(i, j, k) = \rho_i$ rekurzivna. Vrijedi da je

$$\Omega_2 = \left\{(i, j, k) \in \mathbb{N}^3 \mid f\left(i, j, k\right) < g(i, j, k)\right\}.$$

Sada iz korolara 2.17 slijedi da je Ω_2 rekurzivno prebrojiv skup. Iz jednakosti (3.8) i propozicije 2.7 slijedi da je Ω rekurzivno prebrojiv skup.

Iz ekvivalencije (3.7) i Teorema o projekciji zaključujemo da je skup

$$\left\{ i \in \mathbb{N} \mid I_i \cap S \neq \emptyset \right\}$$

rekurzivno prebrojiv. Time je tvrdnja teorema dokazana. $\square$

Definicija 3.17. Neka je (X, d) metrički prostor. Za niz (x_n) u X kažemo da je *Cauchyjev* u (X, d), ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $m, n \geq n_0$ vrijedi

$$d\left(x_m, x_n\right) < \varepsilon.$$

Definicija 3.18. Neka je (X, d) metrički prostor. Neka je (x_n) niz u X, te neka je $L \in X$. Kažemo da (x_n) *teži prema* L u metričkom prostoru (X, d), i pišemo

$$x_n \to L$$

ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi

$$d\left(x_n, L\right) < \varepsilon.$$

Za L kažemo da je *limes* niza (x_n).

Definicija 3.19. Neka je (X, d) metrički prostor. Neka je (x_n) niz u X. Kažemo da je (x_n) *konvergentan niz* u metričkom prostoru (X, d) ako postoji $L \in X$ takav da $x_n \to L$.

Propozicija 3.13. Neka je (X, d) metrički prostor. Neka je (x_n) konvergentan niz u (X, d). Tada je (x_n) Cauchyev niz.

Dokaz. Budući da je (x_n) konvergentan postoji $L \in X$ takav da $x_n \to L$. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi

$$d(x_n, L) < \varepsilon/2.$$

Neka su $m, n \geq n_0$. Tada je

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, L) + d(x_n, L) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Dakle $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ za sve $m, n \geq n_0$. Prema tome (x_n) je Cauchyev niz. $\square$

Definicija 3.20. Za metrički prostor (X, d) kažemo da je *potpun* ako je svaki Cauchyev niz u (X, d) konvergentan.

Definicija 3.21. Neka je (X, d) metrički prostor, te neka je $S \subseteq X$. Za S kažemo da je *potpun skup* u metričkom prostoru (X, d) ako za svaki Cauchyev niz (x_n) u (X, d), takav da je $x_n \in S$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, postoji $L \in S$ takav da $x_n \to L$.

Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Neka su $i, j \in \mathbb{N}$. Tada pišemo

$$I_i \subseteq_F I_j$$

ako je $d(\lambda_i, \lambda_j) + \rho_i < \rho_j$.

Uočimo sljedeće. Ako je $I_i \subseteq_F I_j$ onda je

$$I_i \subseteq I_j.$$

Naime, ako je $x \in I_i$ onda je

$$\begin{aligned} d(x, \lambda_j) &\leq d(x, \lambda_i) + d(\lambda_i, \lambda_j) \\ &< \rho_i + d(\lambda_i, \lambda_j) \\ &< \rho_j, \end{aligned}$$

pa je $x \in I_j$.

Propozicija 3.14. Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Neka je $j \in \mathbb{N}$, te neka je $x \in I_j$. Tada za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $i \in \mathbb{N}$ tako da vrijedi

$$\begin{aligned} I_i &\subseteq I_j, \\ x &\in I_i, \text{ i} \\ \rho_i &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Dokaz. Neka je $\epsilon > 0$. Iz $x \in I_j$ slijedi da je $d(x, \lambda_j) < \rho_j$. Odaberimo pozitivan racionalan broj r takav da je $r < \varepsilon$, te da je

$$d(x, \lambda_i) + 2r < \rho_j.$$

Budući da je α gust niz u (X, d) postoji $l \in \mathbb{N}$ takav da je

$$d(x, \alpha_l) < r. \tag{3.9}$$

Odaberimo $m \in \mathbb{N}$ takav da je $r = q_m$. Nadalje odaberimo $i \in \mathbb{N}$ takav da je

$$(l, m) = ((i)_0, (i)_1).$$

Vrijedi

$$\begin{aligned}(\alpha_l, r) &= (\alpha_l, q_m)\\ &= (\alpha_{(i)_0}, q_{(i)_1})\\ &= (\lambda_i, \rho_i).\end{aligned}$$

Dakle

$$(\alpha_l, r) = (\lambda_i, \rho_i). \tag{3.10}$$

Tvrdimo da je i traženi broj. Imamo $\rho_i = r < \varepsilon$, dakle $\rho_i < \varepsilon$. Iz relacija (3.9) i (3.10) slijedi da je $x \in I_i$.

Dokažimo još da je $I_i \subseteq I_j$. Imamo

$$\begin{aligned}d(\lambda_i, \lambda_j) + \rho_i &\leq d(\lambda_i, x) + d(x, \lambda_j) + \rho_i\\ &< \rho_i + d(x, \lambda_j) + \rho_i\\ &= d(x, \lambda_j) + 2r\\ &< \rho_j.\end{aligned}$$

Dakle $I_i \subseteq I_j$. □

Propozicija 3.15. Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Neka je

$$\Omega = \left\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid I_i \subseteq I_j\right\}.$$

Tada je Ω rekurzivno prebrojiv skup.

Dokaz. Neka su $f, g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$ funkcije definirane sa

$$\begin{aligned}f(i, j) &= d(\lambda_i, \lambda_j) + \rho_i,\\ g(i, j) &= \rho_j.\end{aligned}$$

Iz definicije skupa Ω je očito da je

$$\Omega = \left\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid d(\lambda_i, \lambda_j) + \rho_i < \rho_j\right\},$$

dakle
$$\Omega = \left\{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \mid f(i,j) < g(i,j)\right\}.$$
Stoga je prema korolaru 2.17 dovoljno dokazati da su f i g rekurzivne funkcije.

Funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$, $(i,j) \mapsto d(\lambda_i, \lambda_j)$ je rekurzivna prema korolaru 2.19. Funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$, $(i,j) \mapsto \rho_i$ je rekurzivna jer je rekurzivna kao funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{Q}$. Stoga je f rekurzivna kao zbroj rekurzivnih funkcija. Funkcija g je očito rekurzivna. Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Propozicija 3.16. Neka su $k, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ rekurzivna funkcija, te neka je S rekurzivno prebrojiv skup u $\mathbb{N}^n$. Tada je $f^{-1}(S)$ rekurzivno prebrojiv skup u $\mathbb{N}^k$.

Dokaz. Ako je $S = \emptyset$ tvrdnja je jasna. Pretpostavimo da je S neprazan. Tada postoji rekurzivna funkcija $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^n$ takva da je
$$S = g(\mathbb{N}).$$
Neka je
$$T = \left\{(x,i) \in \mathbb{N}^{k+1} \mid x \in \mathbb{N}^k, i \in \mathbb{N}, f(x) = g(i)\right\}.$$
Prema lemi 2.6 skup T je rekurzivan.

Neka je $x \in \mathbb{N}^k$. Imamo
$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(S) &\Leftrightarrow f(x) \in S \\ &\Leftrightarrow (\exists i \in \mathbb{N})\,\big(f(x) = g(i)\big) \\ &\Leftrightarrow (\exists i \in \mathbb{N})\,(x,i) \in T. \end{aligned}$$
Stoga je
$$f^{-1}(S) = \left\{x \in \mathbb{N}^k \mid (\exists i \in \mathbb{N})\,((x,i) \in T)\right\}.$$
Iz ovoga i Teorema o projekciji (propozicija 2.5) slijedi da je $f^{-1}(S)$ rekurzivno prebrojiv skup. □

Lema 3.17. Neka je (X,d) metrički prostor, neka je F zatvoren skup u (X,d), neka je (x_n) niz u X, te neka je $a \in X$ točka takva da je $x_n \to a$. Pretpostavimo da postoji $N \in \mathbb{N}$ takav da je $x_n \in F$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Tada je $a \in F$.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno. Tada je $a \in F^c$, pa budući da je F^c otvoren u (X,d) postoji $r > 0$ takav da je $K(a,r) \subseteq F^c$. Zbog $x_n \to a$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je
$$d(x_n, a) < r \quad \forall n \geq n_0.$$
Dakle $x_n \in K(a,r)$ za svaki $n \geq n_0$. Stoga je $x_n \in F^c$ za svaki $n \geq n_0$. Uzmimo $n = \max\{N, n_0\}$. Tada je $x_n \in F$ zbog $n \geq N$, te $x_n \in F^c$ zbog $n \geq n_0$. Kontradikcija. □

Teorem 3.18. Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor, te neka je S rekurzivno prebrojiv skup u (X, d, α). Pretpostavimo da je S neprazan i potpun u (X, d). Tada postoji izračunljiv niz (x_i) u (X, d, α) takav da je skup $\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ gust u S.

Dokaz. Budući da je S rekurzivno prebrojiv u (X, d, α), skup

$$\left\{i \in \mathbb{N} \mid I_i \cap S \neq \emptyset\right\}$$

je rekurzivno prebrojiv u $\mathbb{N}$. No ovaj skup je neprazan, naime S je neprazan pa postoji $x \in S$, te stoga postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $d(x, \alpha_n) < 1$ (zbog gustoće niza α), iz čega slijedi da je $x \in K(\alpha_n, 1)$. Dakle $K(\alpha_n, 1)$ je racionalna otvorena kugla koja siječe S. Stoga postoji rekurzivna funkcija $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je

$$\left\{i \in \mathbb{N} \mid I_i \cap S \neq \emptyset\right\} = g(\mathbb{N}). \tag{3.11}$$

Neka su $i, k \in \mathbb{N}$. Tada je

$$I_{g(i)} \cap S \neq \emptyset.$$

Prema tome postoji $x \in I_{g(i)}$ takav da je $x \in S$. Iz propozicije 3.14 slijedi da postoji $l \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi

$$\begin{aligned} &I_l \subseteq I_{g(i)}, \\ &x \in I_l, \\ &\rho_l < 2^{-k}. \end{aligned}$$

Kako je $x \in S$ i $x \in I_l$, to je $I_l \cap S \neq \emptyset$. Iz jednakosti (3.11) slijedi da postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je

$$l = g(j).$$

Dakle za sve $i, k \in \mathbb{N}$ postoji $j \in \mathbb{N}$ tako da vrijedi

$$\begin{aligned} &I_{g(j)} \subseteq_F I_{g(i)} \\ &\rho_{g(j)} < 2^{-k}. \end{aligned}$$

Neka je

$$\Omega = \left\{(i, k, j) \in \mathbb{N}^3 \mid I_{g(j)} \subseteq_F I_{g(i)},\ \rho_{g(j)} < 2^{-k}\right\}.$$

Dokažimo da je Ω rekurzivno prebrojiv skup. Neka je

$$\Omega_1 = \left\{(i, k, j) \in \mathbb{N}^3 \mid I_{g(j)} \subseteq_F I_{g(i)}\right\}$$

i

$$\Omega_2 = \left\{(i,k,j) \in \mathbb{N}^3 \mid \rho_{g(j)} < 2^{-k}\right\}.$$

Iz korolara 2.13 slijedi da je Ω_2 rekurzivan skup.

Neka je

$$\Gamma = \left\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 \mid I_a \subseteq_F b\right\}.$$

Prema propoziciji 3.15 Γ je rekurzivno prebrojiv skup. Nadalje, neka je $\varphi : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}^2$ definirana sa

$$\varphi(i,k,j) = (g(j), g(i)).$$

Očito je φ rekurzivna funkcija. Vrijedi

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \left\{(i,k,j) \in \mathbb{N}^3 \mid (g(j), g(i)) \in \Gamma\right\}\\ &= \left\{(i,k,j) \in \mathbb{N}^3 \mid \varphi(i,k,j) \in \Gamma\right\}\\ &= \varphi^{-1}(\Gamma).\end{aligned}$$

Dakle $\Omega_1 = \varphi^{-1}(\Gamma)$, pa je prema propoziciji 3.16 skup Ω_1 rekurzivno prebrojiv. Iz $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2$ slijedi da je i Ω rekurzivno prebrojiv skup. Prema teoremu 2.8 postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da za sve $i, k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$(i, k, f(i,k)) \in \Omega.$$

Slijedi da za sve $i, k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$I_{g(f(i,k))} \subseteq_F I_{g(i)} \quad \text{i} \quad \rho_{g(f(i,k))} < 2^{-k}. \tag{3.12}$$

Definirajmo funkciju $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ induktivno na sljedeći način

$$\begin{aligned}h(i,0) &= f(i,0)\\ h(i,j+1) &= f(h(i,j), j+1).\end{aligned} \tag{3.13}$$

Definirajmo funkcije $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ i $G : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ na sljedeći način

$$\begin{aligned}F(i) &= f(i,0)\\ G(a,i,j) &= f(a, j+1).\end{aligned}$$

Funkcije F i G su rekurzivne i vrijedi

$$\begin{aligned}h(i,j) &= F(i)\\ h(i,j+1) &= G(h(i,j), i, j),\end{aligned}$$

tj. h je dobivena primjenom primitivne rekurzije na F i G. Stoga je h rekurzivna funkcija.

Fiksirajmo $i \in \mathbb{N}$. Za $j \in \mathbb{N}$ definirajmo

$$p_j = h(i, j).$$

Tada za svaki $j \in \mathbb{N}$ prema jednakosti (3.13) vrijedi

$$p_{j+1} = f(p_j, j+1). \tag{3.14}$$

Prema (3.12) za svaki $j \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$I_{g(f(p_j, j+1))} \subseteq_F I_{g(p_j)},$$

tj.

$$I_{g(p_{j+1})} \subseteq_F I_{g(p_j)}. \tag{3.15}$$

Imamo $p_0 = h(i, 0)$ pa je $p_0 = f(i, 0)$. Neka je $j \in \mathbb{N}$. Iz jednakosti (3.14) i (3.15) slijedi da postoji $a \in \mathbb{N}$ takav da je $p_j = f(a, j)$. Stoga je

$$\rho_{g(p_j)} = \rho_{g(f(a,j))},$$

pa je prema (3.12)

$$\rho_{g(p_j)} < 2^{-j}. \tag{3.16}$$

Za svaki $j \in \mathbb{N}$ vrijedi $I_{g(p_j)} \cap S \neq \emptyset$ pa možemo odabrati neki $y_j \in I_{g(p_j)}$ takav da je $y_j \in S$.

Iz relacije (3.15) slijedi da je

$$I_{g(p_{j+1})} \subseteq I_{g(p_j)}, \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Stoga za sve $m, n \in \mathbb{N}$, takve da je $m \geq n$, vrijedi

$$I_{g(p_m)} \subseteq I_{g(p_n)}.$$

Dokažimo da je (y_j) Cauchyev niz u (X, d). Neka je $\varepsilon > 0$. Odaberimo $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$2 \cdot 2^{-n_0} < \varepsilon.$$

Neka su $m, n \geq n_0$. Tada je

$$I_{g(p_m)} \subseteq I_{g(p_{n_0})}$$

i

$$I_{g(p_n)} \subseteq I_{g(p_{n_0})},$$

pa su $y_m, y_n \in I_{g(p_{n_0})}$, tj.

$$y_m, y_n \in K\left(\lambda_{g(p_{n_0})}, \rho_{g(p_{n_0})}\right).$$

Koristeći nejednakost (3.16), kao i nejednakost trokuta, dobivamo

$$\begin{aligned} d(y_m, y_n) &< 2 \cdot \rho_{g(p_{n_0})} \\ &< 2 \cdot 2^{-n_0} \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Dakle $d(y_m, y_n) < \varepsilon$ za sve $m, n \geq n_0$. Time smo dokazali da je niz (y_j) Cauchyev u (X, d).

Nadalje, $y_j \in S$ za svaki $j \in \mathbb{N}$, pa zbog činjenice da je skup S potpun postoji $a \in S$ takav da $y_i \to a$.

Ako su $i, j \in \mathbb{N}$ takvi da je $I_i \subseteq_F I_j$ onda se lako vidi da je $\hat{I}_i \subseteq I_j$. Neka je $j \in \mathbb{N}$. Za svaki $n \geq j$ vrijedi

$$y_n \in I_{g(p_n)} \subseteq I_{g(p_j)} \subseteq \hat{I}_{g(p_j)}.$$

Dakle $y_n \in \hat{I}_{g(p_j)}$ za svaki $n \geq j$. Prema lemi 3.17 zaključujemo da je $a \in \hat{I}_{g(p_j)}$.

Dakle

$$a \in \bigcap_{j \in \mathbb{N}} \hat{I}_{g(p_j)}. \tag{3.17}$$

Nadalje, ne postoji $b \in \bigcap_{j \in \mathbb{N}} \hat{I}_{g(p_j)}$ takav da je $a \neq b$. Naime, tada bi za svaki $j \in \mathbb{N}$ vrijedilo

$$a, b \in \hat{I}_{g(p_j)} = \overline{K}\left(\lambda_{g(p_j)}, \rho_{g(p_j)}\right),$$

pa bi slijedilo

$$d(a, b) \leq 2\rho_{g(p_j)} < 2 \cdot 2^{-j},$$

tj. imali bi smo $d(a, b) < 2 \cdot 2^{-j}$ za svaki $j \in \mathbb{N}$. No to je nemoguće jer je $d(a, b) > 0$.

Za svaki $j \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$d(a, \lambda_{g(p_j)}) \leq \rho_{g(p_j)},$$

pa je

$$d(a, \lambda_{g(p_j)}) < 2^{-j} \tag{3.18}$$

Vrijedi

$$a \in \hat{I}_{g(p_0)} = \hat{I}_{g(h(i,0))} = \hat{I}_{g(f(i,0))},$$

a prema (3.12) imamo

$$\hat{I}_{g(f(i,0))} \subseteq I_{g(i)},$$

pa je

$$a \in I_{g(i)}. \tag{3.19}$$

Dakle za svaki $i \in \mathbb{N}$ postoji jedinstvena točka $a \in S$ takva da vrijedi relacija (3.17) i za tu točku vrijede relacije (3.18) i (3.19). Definirajmo $x_i = a$. Tada za svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijedi $x_i \in S$, te iz relacija (3.18) i (3.19) slijedi da za sve $i, j \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$d(x_i, \lambda_{g(h(i,j))}) < 2^{-i} \tag{3.20}$$

i

$$x_i \in I_{g(i)}. \tag{3.21}$$

Iz nejednakosti (3.20) slijedi da je niz (x_i) izračunljiv u (X, d, α).

Dokažimo da je skup $\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ gust u S. Neka su $s \in S$ i $\varepsilon > 0$. Odaberimo pozitivan $r \in \mathbb{Q}$ takav da je $r < \varepsilon/2$. Budući da je niz α gust u (X, d) postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je

$$d(s, \alpha_n) < r.$$

Slijedi da je $s \in K(\alpha_n, r)$. Odaberimo $l \in \mathbb{N}$ takav da je

$$(\alpha_n, r) = (\lambda_l, \rho_l).$$

Tada je $s \in I_l$, dakle $I_l \cap S \neq \emptyset$, pa postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $l = g(i)$.

Imamo $s \in I_{g(i)}$ što zajedno sa (3.21) daje

$$\begin{aligned} d(s, x_i) &< 2\rho_{g(i)} \\ &= 2\rho_l \\ &= 2r \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Dakle $d(s, x_i) < \varepsilon$. Prema tome skup $\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ je gust u S. $\square$

Definicija 3.22. Neka je (X, d) metrički prostor, (x_n) niz u X, te $a \in X$. Za točku a kažemo da je *gomilište niza* (x_n) ako za svaki $\varepsilon > 0$ i svaki $N \in \mathbb{N}$ postoji $n \geq N$ tako da je $d(x_n, a) < \varepsilon$.

Teorem 3.19. Neka je (X, d) metrički prostor, K kompaktan skup u (X, d), te (x_n) niz u K. Tada postoji $a \in K$ tako da je a gomilište niza (x_n) u (X, d).

Dokaz. Pretpostavimo suprotno. Tada

$$(\forall a \in K)\ (\exists \varepsilon_a > 0)\ (\exists N_a \in \mathbb{N}) \quad x_n \notin K(a, \varepsilon_a),\ \forall n \geq N_a. \tag{3.22}$$

Familija skupova

$$\{K(a, \varepsilon_a) \mid a \in K\}$$

je očito otvoreni pokrivač skupa K u metričkom prostoru (X, d). Budući da je K kompaktan, postoje $a_1, \dots, a_k \in K$ takvi da je

$$K \subseteq K(a_1, \varepsilon_{a_1}) \cup \dots \cup K(a_k, \varepsilon_{a_k}). \tag{3.23}$$

Definirajmo

$$n = \max\left\{N_{a_1}, \dots, N_{a_k}\right\}.$$

Imamo $n \geq N_{a_1}, \dots, n \geq N_{a_k}$, pa iz (3.22) slijedi

$$x_n \notin K(a_1, \varepsilon_{a_1}), \dots, x_n \notin K(a_k, \varepsilon_{a_k}).$$

Prema tome

$$x_n \notin K(a_1, \varepsilon_{a_1}) \cup \dots \cup K(a_k, \varepsilon_{a_k}),$$

no to je u kontradikciji s inkluzijom (3.23) jer je $x_n \in K$. Prema tome vrijedi tvrdnja teorema. □

Propozicija 3.20. Neka je (X, d) metrički prostor, (x_n) Cauchyev niz u (X, d), te a gomilište niza (x_n) u (X, d). Tada (x_n) teži prema a.

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$. Budući da je (x_n) Cauchyev niz imamo da

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})\ d(x_n, x_m) < \varepsilon/2,\ \forall m, n \geq n_0.$$

Nadalje, budući da je a gomilište niza (x_n) postoji $n_1 \geq n_0$ tako da je $d(x_n, a) < \varepsilon/2$. Uzmimo $n \geq n_0$. Imamo

$$\begin{aligned} d(x_n, a) &\leq d(x_n, x_{n_1}) + d(x_{n_1}, a) \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Dakle $d(x_n, a) < \varepsilon$. Time je tvrdnja dokazana. □

Korolar 3.21. Neka je (X, d) metrički prostor, te neka je K kompaktan skup u (X, d). Tada je K potpun u (X, d).

Dokaz. Neka je (x_n) Cauchyev niz u (X, d) takav da je $x_n \in K$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Prema prethodnom teoremu (teorem 3.19) postoji $a \in K$ takav da je a gomilište niza (x_n) u (X, d). Prema prethodnoj propoziciji vrijedi $x_n \to a$. Prema tome K je potpun skup u (X, d). □

Korolar 3.22. Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor, te neka je K neprazan izračunljiv skup u (X, d, α). Tada postoji izračunljiv niz (x_i) u (X, d, α) takav da je skup

$$\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$$

gust u K.

Dokaz. Prema teoremu 3.12 skup K je rekurzivno prebrojiv. Skup K je kompaktan (po definiciji), pa iz prethodnog korolara slijedi da je K potpun u (X, d). Tvrdnja sada slijedi iz teorema 3.18. □

Lema 3.23. Neka je (X, d) metrički prostor, te neka su $S, T \subseteq X$ takvi da je T gust u S. Neka je U otvoren skup u (X, d) takav da je $U \cap S \neq \emptyset$. Tada je $U \cap T \neq \emptyset$.

Dokaz. Prema pretpostavci postoji $x \in S$ takav da je $x \in U$. Iz činjenice da je U otvoren slijedi da postoji $r > 0$ takav da je $K(x, r) \subseteq U$. Kako je T gust u S postoji $y \in T$ takav da je $y \in K(x, r)$. Slijedi da je $y \in U$. Prema tome $U \cap T \neq \emptyset$. □

Propozicija 3.24. Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor, te neka je S zatvoren u (X, d). Pretpostavimo da postoji izračunjiv niz (x_j) u (X, d, α) takav da je skup

$$\left\{x_j \mid j \in \mathbb{N}\right\}$$

gust u S. Tada je S rekurzivno prebrojiv u (X, d, α).

Dokaz. Neka je $i \in \mathbb{N}$. Koristeći prethodnu lemu zaključujemo da je

$$I_i \cap S \neq \emptyset \;\Leftrightarrow\; (\exists j \in \mathbb{N})\; x_j \in I_i. \tag{3.24}$$

Neka je

$$\Omega = \left\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid x_j \in I_i\right\}.$$

Vrijedi

$$\Omega = \left\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid d(x_j, \lambda_i) < \rho_i\right\}.$$

Sada analogno kao što smo u dokazu teorema 3.12 dobili da je Ω_2 rekurzivno prebrojiv, dobivamo da je Ω rekurzivno prebrojiv. Prema ekvivalenciji (3.24) za svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijedi $I_i \cap S \neq \emptyset$ ako i samo ako postoji $j \in \mathbb{N}$ tako da je $(i, j) \in \Omega$. Iz ovoga i Teorema o projekciji (propozicija 2.5) slijedi da je skup

$$\left\{i \in \mathbb{N} \mid I_i \cap S \neq \emptyset\right\}$$

rekurzivno prebrojiv. Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Definicija 3.23. Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Neka je $n \in \mathbb{N}$, te neka su $B_0, \ldots, B_n$ racionalne otvorene kugle u (X, d, α). Tada za

$$B_0 \cup \ldots \cup B_n$$

kažemo da je *racionalan otvoren skup* u (X, d, α).

Definicija 3.24. Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Za $j \in \mathbb{N}$ definiramo

$$J_j = \bigcup_{i \in [j]} I_i.$$

Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Za svaki $j \in \mathbb{N}$ vrijedi da je J_j racionalan otvoren skup u (X, d, α). S druge strane, ako je U racionalan otvoren skup u (X, d, α), onda je

$$U = I_{i_0} \cup \ldots \cup I_{i_n}$$

za neke $i_0, \ldots i_n \in \mathbb{N}$, pa ako odaberemo $j \in \mathbb{N}$ tako da je $[j] = \{i_0, \ldots i_n\}$ onda je $U = J_j$. Dakle

$$\left\{J_j \mid j \in \mathbb{N}\right\}$$

je familija svih racionalnih otvorenih skupova u (X, d, α).

Definicija 3.25. Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Za kompaktan skup K u (X, d) kažemo da je *poluizračunljiv* u (X, d, α) ako je skup

$$\left\{j \in \mathbb{N} \mid K \subseteq J_j\right\}$$

rekurzivno prebrojiv.

3.2 Izračunljivost u prostoru kompaktnih skupova

Propozicija 3.25. Neka je $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, te neka je $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija. Neka je $g : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa

$$g(x,y) = \max\{f(x,0),\dots,f(x,y)\}, \quad x \in \mathbb{N}^k,\ y \in \mathbb{N}.$$

Tada je g rekurzivna.

Dokaz. Neka je $F : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ funkcija definirana s

$$F(x) = f(x,0), \quad \forall x \in \mathbb{N}^k.$$

Očito je F rekurzivna funkcija.

Neka je $\varphi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$

$$\varphi(a,b) = \max\{a,b\}.$$

Prema primjeru 1.1 funkcija φ je rekurzivna. Neka je $H : \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa

$$H(a,x,y) = \varphi(a, f(x,y+1)).$$

Funkcija H je očito rekurzivna. Neka su $x \in \mathbb{N}^k$, $y \in \mathbb{N}$. Vrijedi

$$\begin{aligned}
g(x,y+1) &= \max\{f(x,0),\dots,f(x,y+1)\} \\
&= \varphi(\max\{f(x,0),\dots,f(x,y)\}, f(x,y+1)) \\
&= \varphi(g(x,y), f(x,y+1)) \\
&= H(g(x,y),x,y).
\end{aligned}$$

Dakle

$$g(x,y+1) = H(g(x,y),x,y). \tag{3.25}$$

Nadalje imamo $(x,0) = f(x,0)$, pa je

$$g(x,0) = F(x). \tag{3.26}$$

Iz jednakosti (3.25) i (3.26) slijedi da je g dobivena primjenom primitivne rekurzije na funkcije F i H, pa je stoga rekurzivna. $\square$

Korolar 3.26. Neka je $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. Neka je $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija, te $\beta : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija. Neka je $h : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ funkcija definirana s

$$h(x) = \max\{f(x,i) \mid 0 \le i \le \beta(x)\}.$$

Tada je h rekurzivna.

Dokaz. Neka je $g : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija iz prethodne propozicije. Tada je

$$h(x) = g(x, \beta(x)), \quad \forall x \in \mathbb{N}^k$$

pa slijedi tvrdnja korolara. □

Propozicija 3.27. Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, te neka je $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Z}$ rekurzivna funkcija. Neka je $g : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Z}$ funkcija definirana sa

$$g(x,y) = \max\{f(x,0), \dots, f(x,y)\}, \quad x \in \mathbb{N}^k,\ y \in \mathbb{N}.$$

Tada je g rekurzivna.

Dokaz. Definirajmo funkciju $h : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ na sljedeći način

$$h(x,y) = \max\{|f(x,0)|, \dots, |f(x,y)|\}.$$

Prema prethodnoj propoziciji funkcija h je rekurzivna. Definirajmo funkciju $\Gamma : \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{Z}$,

$$\Gamma(x,y,i) = f(x,i) + h(x,y), \quad x \in \mathbb{N}^k,\ y, i \in \mathbb{N}.$$

Lako zaključujemo da je funkcija Γ rekurzivna.

Neka je $L : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Z}$ funkcija definirana sa

$$L(x,y) = g(x,y) + h(x,y), \quad x \in \mathbb{N}^k,\ y \in \mathbb{N}.$$

Za sve $x \in \mathbb{N}^k$, $y \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\begin{aligned} L(x,y) &= \max\{f(x,0), \dots, f(x,y)\} + h(x,y) \\ &= \max\{f(x,0) + h(x,y), \dots, f(x,y) + h(x,y)\} \\ &= \max\{\Gamma(x,y,i) \mid 0 \le i \le y\}. \end{aligned}$$

Iz definicije funkcija Γ i h slijedi da je

$$\Gamma(x,y,i) \ge 0, \quad \forall i \in \{0, \dots, y\}.$$

Stoga je

$$L(x,y) = \max\{|\Gamma(x,y,i)| \mid 0 \le i \le y\}.$$

Neka je $\beta : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$, $\beta(x,y) = y$, $x \in \mathbb{N}^k$, $y \in \mathbb{N}$. Tada je

$$L(x,y) = \max\{|\Gamma(x,y,i)| \mid 0 \le i \le \beta(x,y)\}.$$

Iz prethodnog korolara slijedi da je funkcija L rekurzivna kao funkcija $\mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$. Iz

$$g(x,y) = L(x,y) - h(x,y), \quad \forall x \in \mathbb{N}^k,\ y \in \mathbb{N}$$

slijedi da je $g : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Z}$ rekurzivna funkcija. □

Posve analognim zaključivanjem kao i u dokazu korolara 3.26 zaključujemo da vrijedi sljedeća tvrdnja.

Korolar 3.28. Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Neka je $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Z}$ rekurzivna funkcija, te $\beta : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija. Neka je $h : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ funkcija definirana s

$$h(x) = \max \{f(x,i) \mid 0 \leq i \leq \beta(x)\}.$$

Tada je h rekurzivna.

Propozicija 3.29. Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, te neka je $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ rekurzivna funkcija. Neka je $g : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ funkcija definirana sa

$$g(x,y) = \max \{f(x,0), \dots, f(x,y)\}, \quad x \in \mathbb{N}^k,\ y \in \mathbb{N}.$$

Tada je g rekurzivna.

Dokaz. Budući da je f rekurzivna postoje rekurzivne funkcije $u : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Z}$ i $v : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ tako da je

$$f(x,i) = \frac{u(x,i)}{v(x,i)}, \quad v(x,i) \neq 0,\ \forall x \in \mathbb{N}^k, \forall i \in \mathbb{N}.$$

Definirajmo funkciju $h : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ na sljedeći način

$$h(x,y) = v(x,0) \cdot \ldots \cdot v(x,y).$$

Prema propoziciji 1.2 funkcija h je rekurzivna. Neka su $x \in \mathbb{N}^k$ i $i \in \mathbb{N}$. Tada je

$$\begin{aligned} g(x,y) &= \max \left\{ \frac{u(x,0)}{v(x,0)}, \dots, \frac{u(x,y)}{v(x,y)} \right\} \\ &= \max \left\{ \frac{u(x,0) \cdot \left\lfloor \frac{h(x,y)}{v(x,0)} \right\rfloor}{h(x,y)}, \dots, \frac{u(x,y) \cdot \left\lfloor \frac{h(x,y)}{v(x,y)} \right\rfloor}{h(x,y)} \right\}, \end{aligned}$$

pa je

$$g(x,y) = \frac{\max \left\{ u(x,0) \cdot \left\lfloor \frac{h(x,y)}{v(x,0)} \right\rfloor, \dots, u(x,y) \cdot \left\lfloor \frac{h(x,y)}{v(x,y)} \right\rfloor \right\}}{h(x,y)}. \tag{3.27}$$

Neka je $H : \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{Z}$,

$$H(x,y,i) = u(x,i) \cdot \left\lfloor \frac{h(x,y)}{v(x,i)} \right\rfloor.$$

Funkcija H je rekurzivna (primjer 1.1). Neka je $\widetilde{H} : \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{Z}$ funkcija definirana sa

$$\widetilde{H}(x,y) = \max\{H(x,y,i) \mid 0 \leq i \leq y\}.$$

Vrijedi

$$\widetilde{H}(x,y) = \max\{H(x,y,i) \mid 0 \leq i \leq \beta(x,y)\}$$

gdje je $\beta : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ projekcija na zadnju koordinatu. Iz korolara 3.28 zaključujemo da je $\widetilde{H}$ rekurzivna funkcija. Iz (3.27) slijedi da je

$$g(x,y) = \frac{\widetilde{H}(x,y)}{h(x,y)}, \quad \forall x \in \mathbb{N}^k,\ \forall y \in \mathbb{N},$$

pa je time propozicija dokazana. □

Sada vrijedi sljedeći korolar, a dokazali bi ga analogno kao i korolar 3.26.

Korolar 3.30. Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Neka je $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ rekurzivna funkcija, te $\beta : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija. Neka je $h : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ funkcija definirana s

$$h(x) = \max\{f(x,i) \mid 0 \leq i \leq \beta(x)\}.$$

Tada je h rekurzivna.

Lema 3.31. Neka je $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$, te $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ i $b_0, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$|a_i - b_i| < \varepsilon, \quad \forall i \in \{0, \dots, n\}. \tag{3.28}$$

Tada je

$$|\max\{a_0, \dots, a_n\} - \{b_0, \dots, b_n\}| < \varepsilon.$$

Dokaz. Neka su $p, q \in \{0, \dots, n\}$ takvi da je

$$a_p = \max\{a_0, \dots, a_n\} \tag{3.29}$$

$$b_q = \max\{b_0, \dots, b_n\}. \tag{3.30}$$

Tvrdimo da je

$$\left|a_p - b_q\right| < \varepsilon. \tag{3.31}$$

Pretpostavimo suprotno. Tada je

$$b_q \leq a_p - \varepsilon$$

ili

$$b_q \geq a_p + \varepsilon.$$

Pretpostavimo da je $b_q \leq a_p - \varepsilon$. Iz nejednakosti (3.28) slijedi da je

$$b_p \in \left\langle a_p - \varepsilon, a_p + \varepsilon \right\rangle$$

pa imamo

$$b_q \leq a_p - \varepsilon < b_p,$$

odnosno $b_q < b_p$ što je kontradikcija s jednakosti (3.30). Pretpostavimo sada da je $b_q \geq a_p + \varepsilon$. Tada je $a_p \leq b_q - \varepsilon$, a iz nejednakosti (3.28) je

$$a_q \in \left\langle b_q - \varepsilon, b_q + \varepsilon \right\rangle.$$

Stoga je

$$a_p \leq b_q - \varepsilon < a_q$$

sto je kontradikcija s jednakosti (3.30). Prema tome vrijedi nejednakost (3.31). □

Propozicija 3.32. Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, te neka je $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{R}$ rekurzivna funkcija. Neka je $g : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa

$$g(x, y) = \max \{f(x, 0), \dots, f(x, y)\}, \quad x \in \mathbb{N}^k,\ y \in \mathbb{N}.$$

Tada je g rekurzivna.

Dokaz. Neka je $F : \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{Q}$ rekurzivna aproksimacija od f. Neka je $G : \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{Q}$ funkcija definirana s

$$G(x, y, j) = \max \{F(x, 0, j), \dots, F(x, y, j)\}, \quad \forall x \in \mathbb{N}^k,\ y, j \in \mathbb{N}.$$

Iz propozicije 3.29 lako zaključujemo da je G rekurzivna. Neka su $x \in \mathbb{N}^k$, te $y, j \in \mathbb{N}$. Za svaki $i \in \{0, \dots, y\}$ vrijedi

$$|f(x, i) - F(x, i, j)| < 2^{-j},$$

pa iz leme 3.31 zaključujemo da je

$$|g(x, y) - G(x, y, j)| < 2^{-j}.$$

Prema tome G je rekurzivna aproksimacija od g, odnosno g je rekurzivna. □

Konačno, vrijedi i sljedeći korolar, a dokazali bismo ga analogno korolaru 3.26.

Korolar 3.33. Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Neka je $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{R}$ rekurzivna funkcija, te $\beta : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija. Neka je $h : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ funkcija definirana s

$$h(x) = \max \{f(x,i) \mid 0 \leq i \leq \beta(x)\}.$$

Tada je h rekurzivna.

Korolar 3.34. Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Neka je $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{R}$ rekurzivna funkcija, te $\beta : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija. Neka je $h : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa

$$h(x) = \min \{f(x,i) \mid 0 \leq i \leq \beta(x)\}.$$

Tada je h rekurzivna.

Dokaz. Za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$h(x) = -\max \{-f(x,i) \mid 0 \leq i \leq \beta(x)\}.$$

Tvrdnja slijedi iz prethodnog korolara. □

Napomena 3.5. Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, te neka su $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{N}^k$ rekurzivni skupovi, takvi da je $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ i $S_1 \cup S_2 = \mathbb{N}^k$. Neka su $f_1, f_2 : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivne funkcije, te neka je $F : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ funkcija definirana sa

$$F(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in S_1 \\ f_2(x), & x \in S_2 \end{cases}. \tag{3.32}$$

Tada je F rekurzivna, što lako slijedi iz propozicije 1.1. Nadalje, ako su $f_1, f_2 : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ rekurzivne funkcije, onda je $F : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ definirana kao u (3.32) također rekurzivna.

Korolar 3.35. Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, te neka su $f, g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ rekurzivne funkcije. Neka je $h : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa

$$h(x) = \max \{f(x), g(x)\}.$$

Tada je h rekurzivna.

Dokaz. Definirajmo $F : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{R}$ na sljedeći način

$$F(x,i) = \begin{cases} f(x), & i = 0 \\ g(x), & i > 0. \end{cases}$$

Prema napomeni 3.5 funkcija F je rekurzivna, a vrijedi

$$h(x) = \max\{F(x,i) \mid 0 \leq i \leq 1\}.$$

Prema korolaru 3.33 funkcija h je rekurzivna. $\square$

Neka je (X,d) metrički prostor. Neka su A i B neprazni kompaktni skupovi u (X,d). Odaberimo $z \in X$. Neka je

$$\mathcal{U} = \{K(x,r) \mid r > 0\}.$$

Tada je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač skupa A u metričkom prostoru (X,d), pa iz činjenice da je A kompaktan slijedi da postoje $n \in \mathbb{N}$ i $r_0, \dots, r_n > 0$ takvi da je

$$A \subseteq K(z,r_0) \cup \dots \cup K(z,r_n).$$

Neka je $t = \max\{r_0, \dots, r_n\}$, tada je

$$A \subseteq K(z,t).$$

Analogno je $B \subseteq K(z,s)$ za $s > 0$.

Neka je $r = \max\{s,t\}$. Neka su $x \in A$ i $y \in B$. Tada su $x, y \in K(z,r)$, pa je $d(x,y) < 2r$. Stoga je

$$A \approx_{2r} B.$$

Dakle skup

$$\{\varepsilon > 0 \mid A \approx_\varepsilon B\}$$

je neprazan.

Neka je $\mathcal{K}$ skup svih nepraznih kompaktnih skupova u (X,d). Definirajmo $d_H : \mathcal{K} \times \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ kao

$$d_H(A,B) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid A \approx_\varepsilon B\}.$$

Tvrdimo da je d_H metrika na $\mathcal{K}$.

Očito je $d_H(A,B) \geq 0$ za sve $A, B \in \mathcal{K}$. Neka je $A \in \mathcal{K}$. Tada je $A \approx_\varepsilon A$ za svaki $\varepsilon > 0$. Stoga je

$$\begin{aligned} d_H(A,A) &= \inf\{\varepsilon > 0 \mid A \approx_\varepsilon A\} \\ &= \inf\langle 0, \infty\rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dakle $d_H(A,A) = 0$.

Obratno. Pretpostavimo da su $A, B \in \mathcal{K}$ takvi da je $d_H(A,B) = 0$. Tvrdimo da je $A = B$.

Pretpostavimo suprotno. Tada vrijedi $A \nsubseteq B$ ili $B \nsubseteq A$. Pretpostavimo da $A \nsubseteq B$. Tada postoji $a \in A$ takav da $x \notin B$, odnosno $x \in B^c$. No B^c je otvoren skup jer je B zatvoren. Stoga postoji $r > 0$ tako da je

$$K(x,r) \subseteq B^c.$$

Pretpostavimo da je $\varepsilon > 0$ takav da je $\varepsilon \leq r$ i $A \approx_\varepsilon B$. Iz $x \in A$ slijedi da postoji $y \in B$ takav da je $d(x,y) < \varepsilon$. Slijedi $d(x,y) < r$, pa je

$$y \in K(x,r)$$

sto je očito kontradikcija s činjenicom da je $K(x,r) \subseteq B^c$. Ovo znači da niti jedan element skupa

$$\{\varepsilon > 0 \mid A \approx_\varepsilon B\}$$

nije manji od r. Dakle r je donja međa ovog skupa. Iz ovoga zaključujemo da je

$$r \leq d_H(A,B).$$

No to je u kontradikciji s činjenicom da je $d_H(A,B) = 0$. Analogno dobivamo da pretpostavka $B \nsubseteq A$ vodi na kontradikciju. Prema tome

$$A = B.$$

Neka su $A, B \in \mathcal{K}$. Očito je $A \approx_\varepsilon B$ ako i samo ako je $B \approx_\varepsilon A$, prema tome vrijedi

$$d_H(A,B) = d_H(B,A).$$

Neka su $A, B, C \in \mathcal{K}$. Pretpostavimo da su $\lambda, \mu > 0$ takvi da je $A \approx_\lambda B$ i $B \approx_\mu C$. Tada vrijedi

$$A \approx_{\lambda+\mu} C.$$

Naime, ako je $a \in A$ onda postoji $b \in B$ tako da je $d(a,b) < \lambda$, te nadalje postoji $c \in C$ tako da je $d(b,c) < \mu$. Sada je $d(a,c) < \lambda + \mu$. Dakle za svaki $a \in A$ postoji $c \in C$ tako da vrijedi

$$d(a,c) < \lambda + \mu.$$

Analogno dobivamo da za svaki $c \in C$ postoji $a \in A$ tako da vrijedi

$$d(c,a) < \mu + \lambda.$$

Uočimo sljedeće. Ako su $K, L \in \mathcal{K}$ i $r > 0$ tako da je $d_H(K,L) < r$ onda je

$$K \approx_r L.$$

Naime, iz definicije broja $d_H(K,L)$ slijedi da r nije donja međa skupa

$$\{\varepsilon > 0 \mid K \approx_\varepsilon L\},$$

pa stoga postoji $\varepsilon > 0$ takav da je $K \approx_\varepsilon L$ i $\varepsilon < r$, a tada je i $K \approx_r L$.

Dokažimo sada da je

$$d_H(A,C) \leq d_H(A,B) + d_H(B,C).$$

Neka je $\varepsilon > 0$. Iz $d_H(A,B) < d_H(A,B) + \varepsilon/2$ slijedi

$$A \approx_{d_H(A,B)+\varepsilon/2} B.$$

Analogno

$$B \approx_{d_H(B,C)+\varepsilon/2} C.$$

Prema dokazanom vrijedi

$$A \approx_{d_H(A,B)+d_H(B,C)+\varepsilon} C.$$

Budući da je $d_H(A,C) = \inf\{r > 0 \mid A \approx_r C\}$ vrijedi

$$d_H(A,C) \leq d_H(A,B) + d_H(B,C) + \varepsilon.$$

Stoga je

$$d_H(A,C) - (d_H(A,B) + d_H(B,C)) \leq \varepsilon.$$

Ova nejednakost vrijedi za svaki $\varepsilon > 0$, pa zaključujemo da je $d_H(A,C) - (d_H(A,B) + d_H(B,C)) \leq 0$. Stoga je

$$d_H(A,C) \leq d_H(A,B) + d_H(B,C).$$

Prema tome d_H je metrika na $\mathcal{K}$. Za d_H kažemo da je *Hausdorffova metrika*.

Neka je (X,d) metrički prostor. Za $x \in X$ i $S \subseteq X$, $S \neq \emptyset$ definiramo

$$d(x,S) = \inf\{d(x,s) \mid s \in S\}.$$

Propozicija 3.36. Neka je (X, d) metrički prostor. Neka su $m, n \in \mathbb{N}$ i $a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_m \in X$. Neka su $A = \{a_0, \ldots, a_n\}$ i $B = \{b_0, \ldots, b_m\}$. Tada je

$$d_H(A, B) = \max \left\{ \max_{0 \leq i \leq n} d(a_i, B), \max_{0 \leq j \leq m} d(b_j, A) \right\}.$$

Dokaz. Uvedimo oznake

$$\begin{aligned} \lambda &= \max_{0 \leq i \leq n} d(a_i, B), \\ \mu &= \max_{0 \leq j \leq m} d(b_j, A), \\ \delta &= \max \{\lambda, \mu\}. \end{aligned}$$

Pretpostavimo da je $\varepsilon > 0$ takav da je $A \approx_\varepsilon B$. Neka je $i \in \{0, \ldots, n\}$. Tada postoji $j \in \{0, \ldots, m\}$ takav da je $d(a_i, b_j) < \varepsilon$. Slijedi $d(a_i, B) < \varepsilon$. Dakle ovo vrijedi za svaki $i \in \{0, \ldots, n\}$ pa je $\lambda < \varepsilon$. Analogno je i $\mu < \varepsilon$. Dakle $\delta < \varepsilon$. Kako je δ donja međa skupa $\{\varepsilon > 0 \mid A \approx_\varepsilon B\}$ vrijedi

$$\delta \leq d_H(A, B).$$

Neka je $\varepsilon > 0$. Za svaki $i \in \{0, \ldots, n\}$ vrijedi

$$d(a_i, B) \leq \delta.$$

Dakle za svaki $i \in \{0, \ldots, n\}$ postoji $j \in \{0, \ldots, m\}$ tako da je $d(a_i, b_j) \leq \delta$, tj.

$$d(a_i, b_j) < \delta + \varepsilon.$$

Analogno, za svaki $j \in \{0, \ldots, m\}$ postoji $i \in \{0, \ldots, n\}$ tako da je

$$d(b_j, a_i) < \delta + \varepsilon.$$

Dakle $A \approx_{\delta+\varepsilon} B$ tj.

$$d_H(A, B) \leq \delta + \varepsilon.$$

Budući da ovo vrijedi za svaki $\varepsilon > 0$ to je

$$d_H(A, B) \leq \delta.$$

Time je tvrdnja dokazana. □

Lema 3.37. Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Tada je funkcija $\gamma : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$ definirana sa

$$\gamma(i, j) = d(\alpha_i, \Lambda_j)$$

rekurzivna.

Dokaz. Za sve $i, j \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\gamma(i, j) = \min\left\{d(\alpha_i, \alpha_{(j)_p}) \mid 0 \leq p \leq \bar{j}\right\},$$

pa tvrdnja slijedi iz korolara 3.34. □

Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Neka je $\mathcal{K}$ skup svih kompaktnih nepraznih skupova u (X, d), te neka je d_H Hausdorffova metrika na $\mathcal{K}$.

Svaki konačan podskup od X je očito kompaktan u (X, d). Stoga je $\Lambda_i \in \mathcal{K}$ za svaki $i \in \mathbb{N}$.

Tvrdimo da je niz $\Lambda = (\Lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$ gust u $(\mathcal{K}, d_H)$. Neka su $K \in \mathcal{K}$ i $\varepsilon > 0$. Neka je

$$\mathcal{U} = \{K(\alpha_i, \varepsilon/2) \mid i \in \mathbb{N}\}.$$

Očito je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač skupa K. Budući da je K kompaktan postoje $i_0, \dots, i_n \in \mathbb{N}$ takvi da je

$$K \subseteq K(\alpha_{i_0}, \varepsilon/2) \cup \dots \cup K(\alpha_{i_n}, \varepsilon/2). \tag{3.33}$$

Pri tome možemo pretpostaviti da je

$$K(\alpha_{i_p}, \varepsilon/2) \cap K \neq \emptyset, \quad \forall p \in \{0, \dots, n\}. \tag{3.34}$$

Tvrdimo da je

$$K \approx_{\varepsilon/2} \left\{\alpha_{i_0}, \dots, \alpha_{i_n}\right\}. \tag{3.35}$$

Neka je $x \in K$. Tada prema inkluziji (3.33) postoji $p \in \{0, \dots, n\}$ takav da je $x \in K(\alpha_{i_p}, \varepsilon/2)$, pa je stoga

$$d(x, \alpha_{i_p}) < \varepsilon/2.$$

Obratno. Ako je $p \in \{0, \dots, n\}$ prema nejednakosti (3.34) postoji $x \in K$ takav da je $x \in K(\alpha_{i_p}, \varepsilon/2)$, tj.

$$d(\alpha_{i_p}, x) < \varepsilon/2.$$

Odaberimo $j \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\Lambda_j = \left\{\alpha_{i_0}, \dots, \alpha_{i_n}\right\}.$$

Prema relaciji (3.35) vrijedi
$$K \approx_{\varepsilon/2} \Lambda_j,$$
pa je $d_H(K, \Lambda_j) \leq \varepsilon/2$, odnosno
$$d_H(K, \Lambda_j) < \varepsilon.$$

Time smo dokazali da je Λ gust niz u $(\mathcal{K}, d_H)$.

Tvrdimo da je $(\mathcal{K}, d_H, \Lambda)$ izračunljiv metrički prostor. Dovoljno je još provjeriti da je $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$
$$f(i,j) = d_H(\Lambda_i, \Lambda_j)$$
rekurzivna funkcija.

Neka su $i, j \in \mathbb{N}$. Koristeći propoziciju 3.36 dobivamo
$$\begin{aligned} d_H\left(\Lambda_i, \Lambda_j\right) &= d_H\left(\left\{\alpha_{i_0}, \dots, \alpha_{i_n}\right\}, \left\{\alpha_{j_0}, \dots, \alpha_{j_m}\right\}\right) \\ &= \max\left\{\max_{0 \leq p \leq \bar{i}} \gamma\left((i)_p, j\right), \max_{0 \leq p \leq \bar{j}} \gamma\left((j)_p, i\right)\right\}, \end{aligned}$$
gdje je γ funkcija iz leme 3.37.

Definirajmo funkcije $\gamma_1, \gamma_2 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$ na sljedeći način
$$\begin{aligned} \gamma_1(i,j) &= \max\left\{\gamma\left((i)_p, j\right) \mid 0 \leq p \leq \bar{i}\right\} \\ \gamma_2(i,j) &= \max\left\{\gamma\left((j)_p, i\right) \mid 0 \leq p \leq \bar{j}\right\}. \end{aligned}$$

Prema korolaru 3.33 γ_1 i γ_2 su rekurzivne funkcije. Sada je
$$d_H(\Lambda_i, \Lambda_j) = \max\{\gamma_1(i,j), \gamma_2(i,j)\}, \quad \forall i, j \in \mathbb{N},$$
pa iz korolara 3.35 slijedi da je funkcija f rekurzivna. Dakle $(\mathcal{K}, d_H, \Lambda)$ je izračunljiv metrički prostor.

Propozicija 3.38. Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Neka je $\mathcal{K}$ skup svih nepraznih kompaktnih skupova u (X, d). Neka je $S \subseteq X$. Tada je S izračunljiv skup u (X, d, α) ako i samo ako je S izracunjiva točka u $(\mathcal{K}, d_H, \Lambda)$.

Dokaz. Pretpostavimo da je S izračunljiva točka u $(\mathcal{K}, d_H, \Lambda)$. Tada postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da vrijedi
$$d_H(S, \Lambda_{f(k)}) < 2^{-k}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Stoga je $S \approx_{2^{-k}} \Lambda_{f(k)}$ za svaki $k \in \mathbb{N}$. Prema tome S je izračunljiv skup u (X, d, α).

Obratno. Pretpostavimo da je S izračunljiv u (X, d, α). Tada postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da vrijedi

$$S \approx_{2^{-k}} \Lambda_{f(k)}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Stoga je

$$d_H(S, \Lambda_{f(k)}) \leq 2^{-k}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

No tada je $d_H(S, \Lambda_{f(k+1)}) < 2^{-k}$ za svaki $k \in \mathbb{N}$. Prema tome S je izračunljiva točka u $(\mathcal{K}, d_H, \Lambda)$. $\square$

BIBLIOGRAFIJA

[1] Z. Iljazović: *Rekurzivnost lančastih i cirkularno lančastih skupova*, disertacija, Zagreb, 2009.

[2] Z. Iljazović: *Compact manifolds with computable boundaries*, Logical Methods in Computer Science 9 (4:19) (2013), 1-22

[3] M. Vuković: *Izračunljivost*, skripta, 2009.

[4] K. Weihrauch: *Computable Analysis*, Springer, Berlin, 2000.

[5] M. Vuković: *Složenost algoritama*, skripta, 2015.

[6] H. Barendregt, E. Barendsen: *Introduction to Lambda Calculus*, skripta, 2000.

SAŽETAK

U radu se proučava izračunljivost metričkih prostora i skupova u metričkim prostorima. Uvode se pojmovi *izračunljive točke* i *izračunljivog niza*. Pokazuje se da je euklidski prostor izračunljiv metrički prostor.

Definiramo *izračunljiv skup* izračunljivog metričkog prostora i *rekruzivno prebrojiv skup* u takvom prostoru. Dolazimo do rezultata kako je svaki izračunljiv skup rekurzivno prebrojiv, te kako svaki rekurzivno prebrojiv, neprazan i potpun skup sadrži gust izračunljiv niz.

Promatramo prostor kompaktnih skupova $(\mathcal{K}, d_H)$ nekog izračunljivog metričkog prostora (X, d) uz *Hausdorffovu metriku*. Pokazujemo kako je $(\mathcal{K}, d_H)$ jedan izračunljiv metrički prostor, te kako su svi izračunljivi skupovi u prostoru (X, d) upravo izračunljive točke prostora $(\mathcal{K}, d_H)$ i obratno.

SUMMARY

In this ...

ŽIVOTOPIS

Renato Babojelić rođen je 5. travnja, 1984. godine u Zagrebu. Djetinjstvo provodi u Samoboru gdje polazi i osnovnu školu. Pohađa srednju Elektrotehničku školu u Zagrebu i maturira 2003. godine. Preddiplomski studij matematike završava na Odjelu za matematiku Sveučilišta u Rijeci 2014. godine obranom završnog rada na temu *Coxeterove grupe*. Iste godine upisuje studij Računarstvo i matematika na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu. Živi i radi u Samoboru.