Primjena koordinatne metode u planimetriji

Barać, Katarina

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Katarina Barać

PRIMJENA KOORDINATNE METODE U PLANIMETRIJI

Diplomski rad

Voditelj rada:
Prof. dr. sc. Sanja Varošanec

Zagreb, studeni, 2018.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Zahvaljujem se svojoj mentorici prof. dr. sc. Sanji Varošanec na pomoći pri odabiru teme, vodstvu i pomoći pri izradi diplomskog rada.

Zahvaljujem se svim prijateljima i kolegama koji su obogatili moje studentske dane.

Zahvaljujem se svojoj obitelji, mojoj sekici Izabeli na pomoći, podršci i ljubavi kroz sve ove godine. Veliko hvala mojem tati Marku na svakom onom "budem ja, samo ti uči" i što si uvijek bio tu za mene tatko. Neizmjerno hvala na svemu mojoj mami, mojoj mamasiti što si sa mnom prolazila kroz svaki trenutak mog studiranja, čekala sa mnom svake rezultate kolokvija i uvijek vjerovala u mene.

Zahvaljujem se mojem mužiću Marku, mojoj sigurnoj luci u kojoj sam uvijek pronalazila mir i snagu. Hvala ti na razumijevanju i pomoći da ostvarim svoje snove.

I na kraju, najveća hvala mojoj Gospi i Isuseku za prisutnost u mom životu, hvala na obilju blagoslova kojeg primam svakog dana.

Svoj diplomski rad posvećujem svima vama, ali i sebi jer je sve moguće kad vjeruješ.

Sadržaj

Uvod

„Svaki problem koji je teško riješiti, podijeli na što više dijelova potrebnih za njegovo rješavanje“, riječi su velikog Descartesa koji ih je redovito primjenjivao u svom životu. René Descartes je zaslužan za uvođenje Kartezijevog koordinatnog sustava te od tada se matematički problemi vezani uz geometrijske likove i tijela mogu rješavati upotrebom koordinatne metode.

Tema ovog diplomskog rada je koordinatna metoda u planimetriji. Ovaj rad zamišljen je kao kratki prikaz raznih teorema iz različitih područja matematike koji se mogu dokazati primjenom koordinatne metode. Na natjecanjima se pojavljuju zadaci koje je također moguće riješiti primjenjujući koordinatnu metodu pa ćemo u radu navesti neke od njih. Cilj ove metode je da pri svakom matematičkom problemu povoljno odaberemo koordinatni sustav i matematički problem riješimo primjenjujući znanje analitičke geometrije. Rad je strukturiran u pet većih poglavlja.

Prvo poglavlje donosi sadržaj vezan uz koordinatni sustav. Definirani su koordinatni sustav na pravcu i koordinatni sustav u ravnini. Zatim je navedena povijesna crtica o životu matematičara R. Descartesa. Na kraju se nalaze osnovni teoremi analitičke geometrije koje ćemo koristiti u ostalim poglavljima rada te opis koordinatne metode.

Drugo poglavlje obuhvaća teoreme o četiri karakteristične točke trokuta, tj. težište, ortocentar, središte opisane kružnice, središte upisane kružnice te teorem o Eulerovom pravcu i njihove dokaze provedene koordinatnom metodom.

Treće poglavlje sadrži razne teoreme o trokutu kao npr. Stewartov teorem, zadatke s matematičkih natjecanja u kojima je moguća primjena koordinatne metode.

Četvrto poglavlje bavi se teoremima o četverokutu i njihovim dokazima koordinatnom metodom.

Peto poglavlje, ujedno i zadnje poglavlje sastoji se od svojstava krivulja drugog reda (elipse, hiperbole i parabole) te njihovim dokazima koordinatnom metodom.

Sve slike koje su uvrštene u ovaj rad izrađene su samostalno u programu dinamične geometrije GeoGebra.

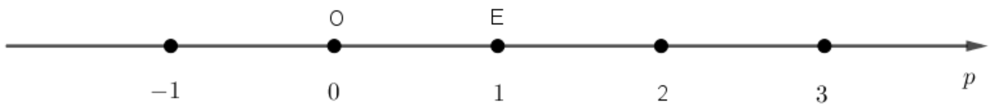
Poglavlje 1

Koordinatni sustav

1.1 Koordinatni sustav na pravcu

Odaberimo proizvoljnu točku O na pravcu p i njoj pridružimo broj 0. Desno od točke O odaberemo točku E i njoj pridružimo broj 1. Točku E nazivamo **jedinična točka**, a dužinu $\overline{OE}$ nazivamo **jedinična dužina**. Tada pravac p određen jediničnom dužinom $\overline{OE}$ nazivamo **brojevni pravac**, a točku O **ishodištem** brojevnog pravca.

Točki O pridružen je broj 0 i pišemo $O\,(0)$, a točki E pridružen je broj 1 pa pišemo $E\,(1)$. Točke $O\,(0)$ i $E\,(1)$ te jedinična dužina $\overline{OE}$ određuju **koordinatni sustav na pravcu**. Točku O zovemo **ishodištem** koordinatnog sustava.



Slika 1.1: Brojevni pravac

Svakoj točki T pravca p pridružujemo realan broj x tako da vrijedi:

(i) ako su T i E s iste strane točke O, tada je $x = d\,(O, T)$,
(ii) ako su T i E s različitih strana točke O, tada je $x = -d\,(O, T)$,

Broj x nazivamo **koordinata** točke T i pišemo $T\,(x)$.

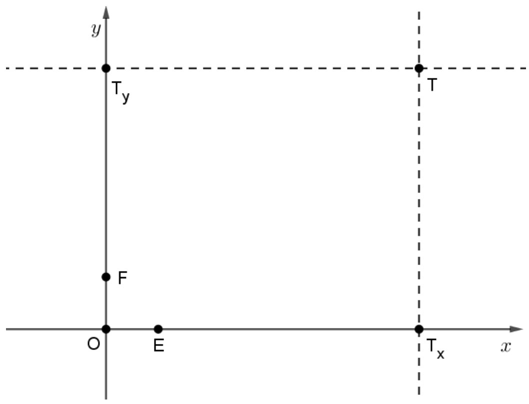
1.2 Koordinatni sustav u ravnini

Uspostavit ćemo pridruživanje između skupa točaka ravnine M i skupa $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
Neka su x i y dva međusobno okomita brojevna pravca sa sjecištem u točki O, na kojima su točke $E \in x$, $F \in y$ jedinične točke na pravcu x odnosno y takve da $d(O, E) = d(O, F)$.
Uređenu trojku (O, x, y) nazivamo **pravokutni ili Kartezijev koordinatni sustav u ravnini**.
Točka O zove se ishodište, pravac x nazivamo **apscisna os, os apscisa, prva koordinatna os** ili **x-os**, a pravac y nazivamo **ordinatna os, os ordinata, druga koordinatna os** ili **y-os**.

Neka je T točka ravnine M. Kroz točku T povucimo paralelu s y-osi, a ta paralela siječe x-os u točki T_x. S obzirom da je x-os brojevni pravac, točki T_x pridružen je točno jedan realan broj x. Kroz točku T povucimo paralelu s x-osi, a ta paralela siječe y-os u točki T_y. S obzirom da je y-os brojevni pravac, točki T_y pridružen je točno jedan realan broj y. Točki T pridružujemo uređen par (x, y) tako dobivenih brojeva x i y.

Svakoj točki T ravnine M pridružen je jedan i samo jedan par realnih brojeva (x, y). Broj x nazivamo **apscisa** točke T, a broj y nazivamo **ordinata** točke T. Točke T_x i T_y su ortogonalne projekcije točke T na osi x i y.

Ovo pridruživanje je obostrano, tj. paru (x, y) realnih brojeva pridružujemo jedinstvenu točku na ovaj način: na brojevnom pravcu x odaberemo točku T_x kojoj je u tom koordinatnom sustavu na pravcu pridružen broj x. Točkom T_x povučemo paralelu s y-osi. Na brojevnom pravcu y odaberemo točku T_y kojoj je pridružen broj y. Točkom T_y povučemo paralelu s x-osi. Presjek tih paralela je točka T koju pridružujemo paru (x, y). Točku T poistovjećujemo s njoj pridruženim parom (x, y) i pišemo $T = (x, y)$ ili $T(x, y)$.



Slika 1.2: Kartezijev koordinatni sustav u ravnini

Analogno kao u ravnini tako se i u prostoru može uvesti koordinatni sustav.

1.3 Povijesna crtica

Slika 1.3: René Descartes, slika preuzeta iz [13]

Francuski matematičar, filozof i fizičar René Descartes, rođen je 31. ožujka 1596. u mjestu Le Haye koje je naknadno preimenovano u Descartes. Za Descartesov odgoj pretežito je zaslužan njegov otac Joachim Descartes budući da mu je majka umrla kada on još nije imao godinu dana. U osmoj godini Descartes započinje školovanje u isusovačkoj školi u La Flecheu, koju odabire njegov otac. Descartes se u školi isticao mudrošću i dugim spavanjem. Usprkos strogoj disciplini, osigurana mu je dozvola dužeg spavanja do 11 sati u jutro zbog slabog zdrastvenog stanja. Osobinu dugog ostajanja u krevetu Descartes zadržava tokom cijelog života tvrdeći da u raskošnom miru sna mašta najživlje radi, a koncentracija postaje oštra kao brijač, zasijeca duboko ispod opne vanjštine i privida. Kroz svoje odrastanje Descartes je izgrađivao svoju ličnost ostavši vjeran tradiciji. U isusovačkoj školi Descartes je naučio klasične jezike, grčki i latinski jezik. Descartes je imao vrlo izraženo kritičko mišljenje, no ono se jedino nije odražavalo na religiju budući da je Descartes bio vjernik katolik. Nakon završetka školovanja, Descartes 1612. odlazi iz Pariza i obnavlja svoje prijateljstvo iz djetinjstva s Mersenneom. Nastavak školovanja Descartesu se odvijalo na sveučilištu u Poitiersu. Descartes je diplomirao civilno i kanonsko pravo 10.11.1616. i uvijek bio među najboljima te postigao sve što se moglo u znanosti u školi onog vremena. Descartes je bio jedan od imućnijih studenata pa je svoje studentske dane provodio uz nebrojene izlaske, obraćajući pažnju na lijepe djevojke, a u slobodno vrijeme volio je jahati i mačevati se. Takav život brzo mu je dosadio i činio mu se praznim. Imao je potrebu širiti svoje vidike i ostvarivati nova poznanstva. S obzirom da Descartes dolazi iz ugledne obitelji mogao je birati samo između crkve i vojske, a on 1617. odabire vojsku. Descartes u vojsci upoznaje vojne vještine, no i sklapa poznanstva s matematičarima, npr. sa I. Beckmanom, s kojim vodi razgovore o raznim područjima matematike, poezije, glazbe... U vrijeme tridesetogodišnjeg rata, Descartes putuje po Danskoj, Nizozemskoj i Njemačkoj, a svo slobodno vrijeme koristi za rješavanje matematičkih problema i filozofije. Svoje prve ideje nove filozofije i analitičke geometrije dobiva u tri sna u noći 10.11.1619. u doba ratovanja na Dunavu. Descartes napušta vojsku 1621. te idućih pet godina putuje i proučava matematiku, a 1626. počinje živjeti u Parizu i baviti se konstrukcijama optičkih instrumenata. Razmišljajući o životu, Descartes odlučuje svoj život posvetiti otkrivanju istine i mirniji život pronalazi u Nizozemskoj, gdje je živio dvadeset godina posvećen matematici i filozofiji. Descartes 1637. objavljuje svoje prvo dijelo „Rasprava o metodi" sa dodacima „Dioptrija", „Meteori" i „Geometrija". U svom prvom djelu navodi pravila na kojima se zasniva metoda pravilnog spoznavanja i navodi primjer tih metoda u euklidskoj geometriji. Danas se Descartesova spoznajna teorija koristi u istraživačkim projektima u svim područjima znanosti. Descartes postaje slavan, no on samo želi mir i slobodu. U Parizu objavljuje „Meditacije", primjer briljantne primjene svoje logike. Svoje zadnje godine života Descartes provodi u Švedskoj, gdje umire 11. veljače 1650. od upale pluća. Descartes je bio začetnik moderne matematike i osnivač analitičke geometrije. U djelu „Geometrija"' Descartes utvrđuje da Pappusov problem ima beskonačno mnogo rješenja koja za beskonačno mnogo različitih vrijednosti x rješavanjem jednadžbe njima pridružuju beskonačno mnogo vrijednosti y i tako dobiven skup točaka čini krivulju u ravnini. Njegov doprinos matematici pronalazimo u upotrebi pravokutnog kooridnatnog sustava (Kartezijev koordinatni sustav). Budući da je Descartes zaslužan za otkriće Kartezijevog koordinatnog sustava, on danas nosi ime po njegovoj latinskoj inačici imena „Cartesius"'. Za Descartesa također vežemo i uvođenje pojma promjenjive veličine (varijable) te svođenje geometrijskih problema na algebarske, predodžbu realnog broja. Descartes je među prvima uočio da vrijedi osnovni teorem algebre, znao je i Eulerovu formulu, a algebarska krivulja trećeg stupnja $x^3 + y^3 = 3axy$ nosi ime „Descartesov list" s obzirom da ju je Descartes proučavao 1638. i pronašao njen točan oblik u prvom kvadrantu. Descartes je dao i svoj doprinos u fizici, a većinu toga je iznio u svom djelu „Prirodna filozofija" 1644. gdje prvi uvodi pojam količine gibanja, otkriva zakon o lomu svjetlosti te tumači nastanak duge. Autor je i knjige „Compendium musicae" čime je zauzeo svoje mjesto i u povijesti glazbe.

Podaci o R. Descartesu preuzeti su iz izvora [6] i [7].

1.4 Osnovni teoremi analitičke geometrije

U ovom radu koristit ćemo nekoliko rezultata školske matematike vezanih uz koordinatni sustav koje ovdje navodimo bez dokaza.

Teorem 1.4.1. *Koordinate polovišta $P(x, y)$ dužine $\overline{T_1T_2}$ gdje su $T_1(x_1, y_1)$ i $T_2(x_2, y_2)$ su:*

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \ y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Teorem 1.4.2. *Jednadžba pravca kroz dvije točke $T_1(x_1, y_1)$ i $T_2(x_2, y_2)$ glasi:*

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Koeficijent smjera pravca iznosi:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Teorem 1.4.3. *Jednadžba pravca sa zadanim koeficijentom smjera k i točkom $T(x_0, y_0)$ koja mu pripada, dana je pomoću formule:*

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Teorem 1.4.4. *Udaljenost između točaka $A(a_1, a_2)$ i $B(b_1, b_2)$ dana je s*

$$d(A, B) = |AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}.$$

Teorem 1.4.5. *Udaljenost točke $T(x_0, y_0)$ do pravca $p ... Ax + By + C = 0$ iznosi*

$$d(T, p) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Teorem 1.4.6. *Jednadžbe simetrala kutova koje zatvaraju dva pravaca $p_1 ... A_1x + B_1y + C_1 = 0$ i $p_2 ... A_2x + B_2y + C_2 = 0$ dane su sa*

$$\frac{|A_1x + B_1y + C_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{|A_2x + B_2y + C_2|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Teorem 1.4.7. *Dva su pravca paralelna ako i samo ako imaju jednake koeficijente smjera, a okomita ako im je umnožak koeficijenta smjera jednak -1.*

Teorem 1.4.8. *Neka je $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Kažemo da točka P dijeli dužinu $\overline{AB}$ u omjeru λ ako je*

$$\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{PB}.$$

Ako su koordinate točaka A i B dane sa $A(x_A, y_A)$ i $B(x_B, y_B)$, tada točka P ima koordinate

$$P\left(\frac{x_A + \lambda x_B}{1 + \lambda}, \frac{y_A + \lambda y_B}{1 + \lambda}\right).$$

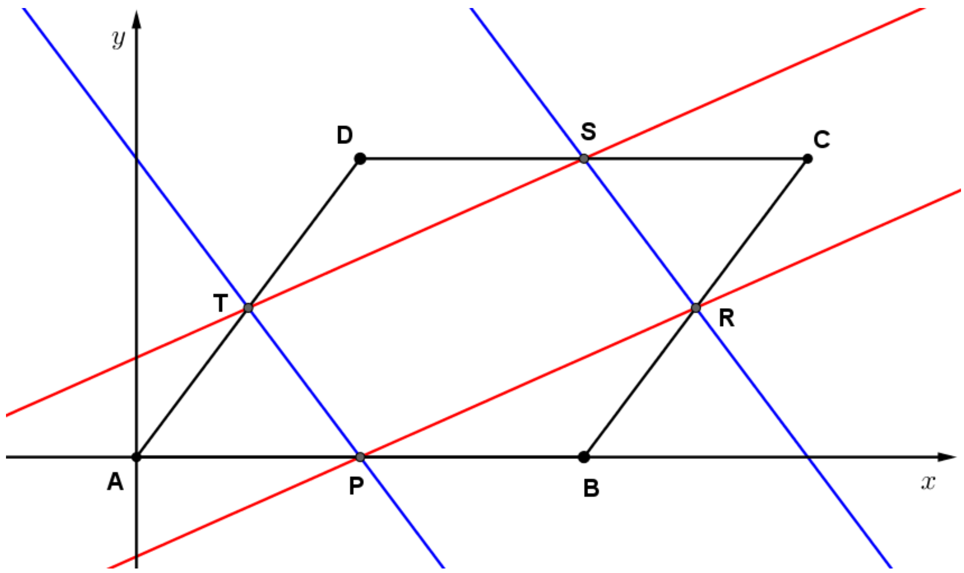
1.5 Koordinatna metoda

Koordinatna metoda je metoda pri kojoj uz dani geometrijski lik ili tijelo vezujemo pogodno odabran koordinatni sustav, a potom matematički problem rješavamo pomoću analitičke geometrije.

Primjer 4. 1. 1. *Neka je ABCD paralelogram, a neka su P, R, S, T redom polovišta stranica $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{AD}$. Tada je $PR \parallel ST$ i $RS \parallel TP$.*

Najčešći dokaz ovog primjera zasniva se na primjeni sukladnosti trokuta, no u samoj formulaciji matematičkog problema navodi se paralelnost te onda primjer možemo riješiti i primjenom koordinatne metode tako da iskoristimo analitički uvjet paralelnosti.

Postavimo koordinatni sustav tako da ishodište koordinatnog sustava bude vrh $A(0,0)$, pravac na kojem leži stranica $\overline{AB}$ os x. Označimo preostale vrhove zadanog paralelograma sa $B(x_B, 0)$, $x_B > 0$, $C(x_C, y_C)$ i $D(x_D, y_C)$. Duljina stranice $\overline{AB}$ paralelograma je $|AB| = x_B$.



Slika 1.4: Skica primjera

Znamo da su nasuprotne stranice paralelograma paralelne i sukladne, tj. $|AB| = |CD|$ i $|BC| = |AD|$ te $AB \parallel CD$ i $BC \parallel AD$.

Uočimo da $x_C = x_B + x_D$ pa pišemo $C(x_B + x_D, y_C)$.

Cilj nam je dokazati da su koeficijenti smjera pravca PR i ST te RS i TP jednaki. Tada će, prema teoremu 1.4.7 vrijediti da su PR i ST paralelni te RS i TP paralelni.

Pronađimo koordinate polovišta stranica paralelograma, tj. koordinate točaka P, R, S, T. Koristimo formulu za polovište točaka iz teorema 1.4.1.

Za točku P:

$$x_P = \frac{0 + x_B}{2} = \frac{x_B}{2}, \quad y_P = \frac{0+0}{2} = 0, \text{ te je } P\left(\frac{x_B}{2}, 0\right).$$

Za točku R:

$$x_R = \frac{x_B + x_B + x_D}{2} = x_B + \frac{x_D}{2}, \quad y_R = \frac{y_C + 0}{2} = \frac{y_C}{2}, \text{ te je } R\left(x_B + \frac{x_D}{2}, \frac{y_C}{2}\right).$$

Za točku S:

$$x_S = \frac{x_D + x_B + x_D}{2} = \frac{x_B}{2} + x_D, \quad y_S = \frac{y_C + y_C}{2} = y_C, \text{ te je } S\left(\frac{x_B}{2} + x_D, y_C\right).$$

Za točku T:

$$x_T = \frac{0 + x_D}{2} = \frac{x_D}{2}, \quad y_T = \frac{y_C + 0}{2} = \frac{y_C}{2}, \text{ te je } T\left(\frac{x_D}{2}, \frac{y_C}{2}\right).$$

Sada odredimo koeficijente smjera pravca PR i ST pomoću teorema 1.4.2:

Za pravac PR:

$$k_{PR} = \frac{\frac{y_C}{2} - 0}{x_B + \frac{x_D}{2} - \frac{x_B}{2}} = \frac{y_C}{x_B + x_D}.$$

Koeficijent smjera pravca PR iznosi

$$k_{PR} = \frac{y_C}{x_B + x_D}.$$

Za pravac ST:

$$k_{ST} = \frac{\frac{y_C}{2} - y_C}{\frac{x_D}{2} - \frac{x_B}{2} - x_D} = \frac{-\frac{y_C}{2}}{-\frac{x_D}{2} - \frac{x_B}{2}} = \frac{y_C}{x_D + x_B}.$$

Dakle, dobili smo koeficijent smjera pravca ST i on iznosi

$$k_{ST} = \frac{y_C}{x_D + x_B}.$$

Uočavamo da

$$k_{PR} = k_{ST} = \frac{y_C}{x_D + x_B},$$

tj. da su pravcima koeficijenti smjera jednaki te prema teoremu 1.4.7 zaključujemo da su pravci PR i ST paralelni.

Analogno odredimo koeficijente smjera pravaca RS i TP:

Za pravac RS:

$$k_{RS} = \frac{y_C - \frac{y_C}{2}}{\frac{x_B}{2} + x_D - x_B - \frac{x_D}{2}} = \frac{\frac{y_C}{2}}{\frac{x_D - x_B}{2}} = \frac{y_C}{x_D - x_B}.$$

Koeficijent smjera pravca RS iznosi

$$k_{RS} = \frac{y_C}{x_D - x_B}.$$

Za pravac TP:

$$k_{TP} = \frac{0 - \frac{y_C}{2}}{\frac{x_B}{2} - \frac{x_D}{2}} = \frac{-\frac{y_C}{2}}{\frac{x_B - x_D}{2}} = \frac{-y_C}{-(x_D - x_B)} = \frac{y_C}{x_D - x_B}.$$

Dakle, dobili smo koeficijent smjera pravca TP i on iznosi

$$k_{TP} = \frac{y_C}{x_D - x_B}.$$

Uočavamo da

$$k_{RS} = k_{TP} = \frac{y_C}{x_D - x_B},$$

tj. da su pravcima koeficijenti smjera jednaki te zaključujemo da su pravci RS i TP paralelni.

Poglavlje 2

Četiri karakteristične točke trokuta

U ovom poglavlju dokazat ćemo teoreme o težištu, ortocentru, središtu opisane kružnice i središtu upisane kružnice. Ove se točke jednim imenom nazivaju karakteristične točke trokuta.

2.1 Težište

Kako bi mogli dokazati teorem o težištu koordinatnom metodom, moramo prvo definirati što je težišnica trokuta.
Težišnica trokuta je dužina koja spaja vrh trokuta s polovištem nasuprotne stranice.

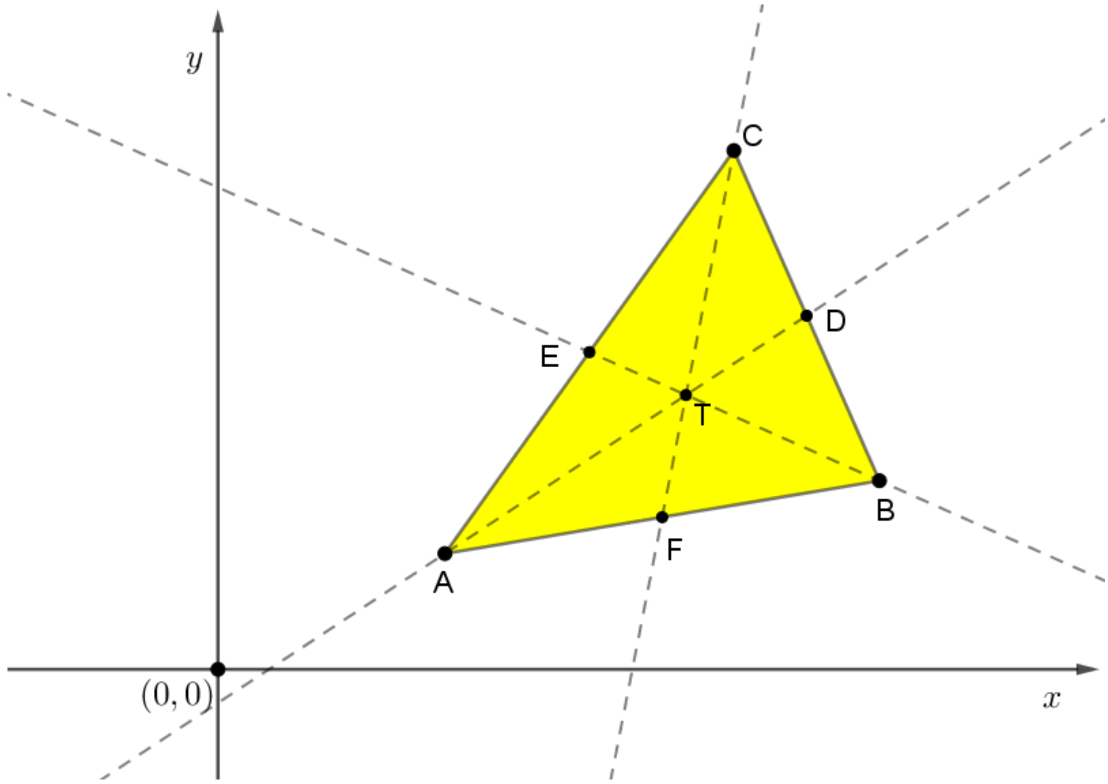
Za težišnice trokuta vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 2.1.1. *Sve tri težišnice trokuta sijeku se u jednoj točki. Udaljenost te točke od pojedinog vrha trokuta iznosi $\frac{2}{3}$ duljine odgovarajuće težišnice. Tu točku nazivamo* ***težište*** *trokuta.*

Na nastavi se ovaj teorem obično dokazuje upotrebom sličnosti. Ovdje ćemo ga dokazati koordinatnom metodom.

Dokaz. Smjestimo trokut u koordinatni sustav tako da su vrhovi trokuta A, B i C određeni sa $A\,(x_A, y_A)$, $B\,(x_B, y_B)$ i $C\,(x_C, y_C)$.

Neka je točka D polovište stranice $\overline{BC}$, točka E polovište stranice $\overline{AC}$ i točka F polovište stranice $\overline{AB}$.



Slika 2.1: Trokut ABC i težište

Odredimo sada koordinate točke D pomoću teorema 1.4.3 te dobijemo $D\left(\frac{x_B+x_C}{2}, \frac{y_B+y_C}{2}\right)$. Koeficijent smjera pravca AD na kojem leži težišnica $\overline{AD}$ i njegovu jednadžbu pravca odredimo pomoću teorema 1.4.4 i dobijemo

$$\begin{aligned}
k_{AD} &= \frac{\frac{y_B+y_C}{2} - y_A}{\frac{x_B+x_C}{2} - x_A} = \frac{y_B + y_C - 2y_A}{x_B + x_C - 2x_A}, \\
y - y_A &= \frac{y_B + y_C - 2y_A}{x_B + x_C - 2x_A}(x - x_A), \\
y &= \frac{y_B + y_C - 2y_A}{x_B + x_C - 2x_A}x - \frac{y_B + y_C - 2y_A}{x_B + x_C - 2x_A}x_A + y_A,
\end{aligned}$$

pa jednadžba pravca AD glasi

$$AD \ldots y = \frac{y_B + y_C - 2y_A}{x_B + x_C - 2x_A}x - \frac{y_B + y_C - 2y_A}{x_B + x_C - 2x_A}x_A + y_A.$$

Analogno odredimo koordinate točke E i dobijemo $E\left(\frac{x_A + x_C}{2}, \frac{y_A + y_C}{2}\right)$.

Koeficijent smjera pravca BE na kojem leži težišnica $\overline{BE}$ iznosi

$$k_{BE} = \frac{\frac{y_A+y_C}{2} - y_B}{\frac{x_A+x_C}{2} - x_B} = \frac{y_A + y_C - 2y_B}{x_A + x_C - 2x_B},$$

a jednadžba pravca BE

$$\begin{aligned} y - y_B &= \frac{y_A + y_C - 2y_B}{x_A + x_C - 2x_B}(x - x_B), \\ y &= \frac{y_A + y_C - 2y_B}{x_A + x_C - 2x_B}x - \frac{y_A + y_C - 2y_B}{x_A + x_C - 2x_B}x_B + y_B, \end{aligned}$$

tj,

$$BE \text{ ... } y = \frac{y_A + y_C - 2y_B}{x_A + x_C - 2x_B}x - \frac{y_A + y_C - 2y_B}{x_A + x_C - 2x_B}x_B + y_B.$$

$$\begin{aligned} k_{CF} &= \frac{\frac{y_A+y_B}{2} - y_C}{\frac{x_A+x_B}{2} - x_C} = \frac{y_A + y_B - 2y_C}{x_A + x_B - 2x_C}, \\ y - y_C &= \frac{y_A + y_B - 2y_C}{x_A + x_B - 2x_C}(x - x_C), \\ y &= \frac{y_A + y_B - 2y_C}{x_A + x_B - 2x_C}x - \frac{y_A + y_B - 2y_C}{x_A + x_B - 2x_C}x_C + y_C \end{aligned}$$

pa jednadžba pravca CF glasi

$$CF \text{ ... } y = \frac{y_A + y_B - 2y_C}{x_A + x_B - 2x_C}x - \frac{y_A + y_B - 2y_C}{x_A + x_B - 2x_C}x_C + y_C.$$

Dokažimo da točka $T\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$ pripada svima trima pravcima.

Provjerimo prvo pripada li točka T pravcu AD.

$$\begin{aligned} y_T &= \frac{y_B + y_C - 2y_A}{x_B + x_C - 2x_A}x_T - \frac{y_B + y_C - 2y_A}{x_B + x_C - 2x_A}x_A + y_A, \\ &= \frac{y_B + y_C - 2y_A}{x_B + x_C - 2x_A} \cdot \frac{x_A + x_B + x_C}{3} - \frac{y_B + y_C - 2y_A}{x_B + x_C - 2x_A}x_A + y_A, \\ &= \frac{x_A\left[y_B + y_C - 2y_A - 3(y_B + y_C - 2y_A) - 6y_A\right] + x_B(y_B + y_C - 2y_A + 3y_A)}{3(x_B + x_C - 2x_A)} \\ &\quad + \frac{x_C(y_B + y_C - 2y_A + 3y_A)}{3(x_B + x_C - 2x_A)}, \\ &= \frac{x_A(-2y_B - 2y_C - 2y_A) + x_B(y_B + y_C + y_A) + x_C(y_B + y_C + y_A)}{3(x_B + x_C - 2x_A)}, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{-2x_A\left(y_A+y_B+y_C\right)+x_B\left(y_A+y_B+y_C\right)+x_C\left(y_A+y_B+y_C\right)}{3\left(x_B+x_C-2x_A\right)},\\
&= \frac{\left(y_A+y_B+y_C\right)\left(x_B+x_C-2x_A\right)}{3\left(x_B+x_C-2x_A\right)},\\
&= \frac{y_A+y_B+y_C}{3}.
\end{aligned}
$$

Dakle, $T \in AD$.

Sada ćemo provjeriti pripada li točka $T\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3}, \frac{y_A+y_B+y_C}{3}\right)$ pravcu BE:

$$
\begin{aligned}
y_T &= \frac{y_A+y_C-2y_B}{x_A+x_C-2x_B}x_T - \frac{y_A+y_C-2y_B}{x_A+x_C-2x_B}x_B + y_B,\\
&= \frac{y_A+y_C-2y_B}{x_A+x_C-2x_B}\cdot\frac{x_A+x_B+x_C}{3} - \frac{y_A+y_C-2y_B}{x_A+x_C-2x_B}x_B + y_B,\\
&= \frac{\left(y_A+y_C-2y_B\right)\left(x_A+x_B+x_C\right)-x_B\left(3y_A+3y_C-6y_B\right)}{3\left(x_A+x_C-2x_B\right)}\\
&\quad+\frac{y_B\left(3x_A+3x_C-6x_B\right)}{3\left(x_A+x_C-2x_B\right)},\\
&= \frac{x_A\left(y_A+y_C-2y_B+3y_B\right)+x_B\left(y_A+y_C-2y_B-3y_C+6y_B-6y_B-3y_A\right)}{3\left(x_A+x_C-2x_B\right)}\\
&\quad+\frac{x_C\left(y_A+y_C-2y_B+3y_B\right)}{3\left(x_A+x_C-2x_B\right)},\\
&= \frac{x_A\left(y_A+y_B+y_C\right)-2x_B\left(y_A+y_B+y_C\right)+x_C\left(y_A+y_B+y_C\right)}{3\left(x_A+x_C-2x_B\right)},\\
&= \frac{\left(x_A+x_C-2x_B\right)\left(y_A+y_B+y_C\right)}{3\left(x_A+x_C-2x_B\right)},\\
&= \frac{y_A+y_B+y_C}{3}.
\end{aligned}
$$

Dakle, $T \in BE$.

Još nam preostaje provjeriti pripada li točka $T\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3}, \frac{y_A+y_B+y_C}{3}\right)$ pravcu CF:

$$
\begin{aligned}
y_T &= \frac{y_A+y_B-2y_C}{x_A+x_B-2x_C}x_T - \frac{y_A+y_B-2y_C}{x_A+x_B-2x_C}x_C + y_C,\\
&= \frac{y_A+y_B-2y_C}{x_A+x_B-2x_C}\cdot\frac{x_A+x_B+x_C}{3} - \frac{y_A+y_B-2y_C}{x_A+x_B-2x_C}x_C + y_C,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{x_A(y_A + y_B - 2y_C + 3y_C) + x_B(y_A + y_B - 2y_C + 3y_C)}{3(x_A + x_B - 2x_C)} \\
&\quad + \frac{x_C(y_A + y_B - 2y_C - 3y_A - 3y_B + 6y_C - 6y_C)}{3(x_A + x_B - 2x_C)}, \\
&= \frac{x_A(y_A + y_B + y_C) + x_B(y_A + y_B + y_C) - 2x_C(y_A + y_B + y_C)}{3(x_A + x_B - 2x_C)}, \\
&= \frac{(x_A + x_B - 2x_C)(y_A + y_B + y_C)}{3(x_A + x_B - 2x_C)}, \\
&= \frac{y_A + y_B + y_C}{3}.
\end{aligned}
$$

Zaključujemo, sva tri pravca na kojima leže težišnice trokuta sijeku se u jednoj točki

$T\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$. □

2.2 Ortocentar

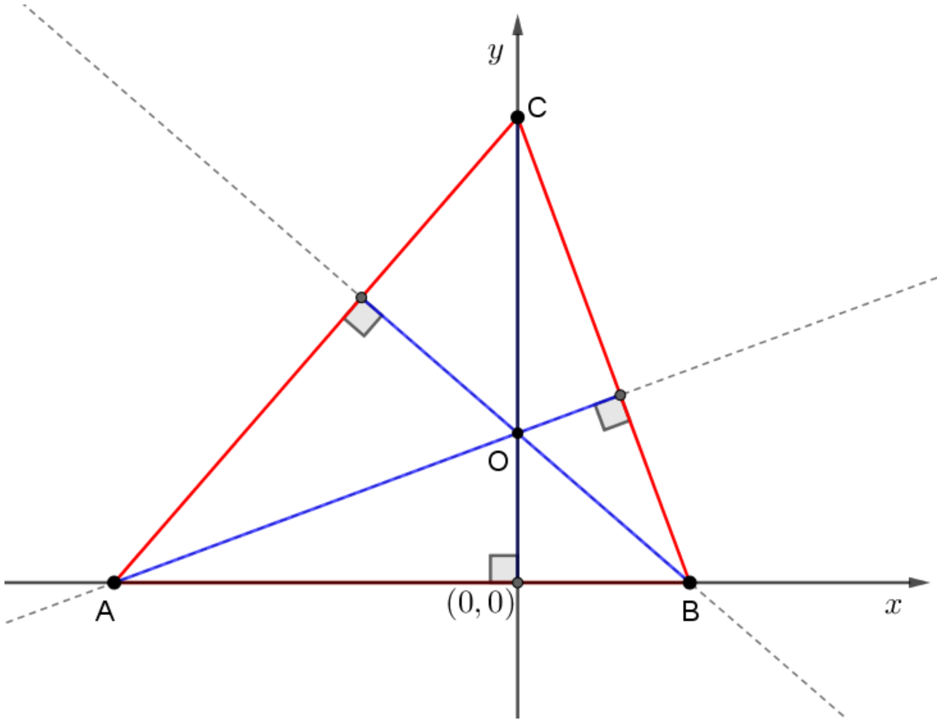
Kako bi mogli dokazati teorem o ortocentru koordinatnom metodom, moramo prvo definirati visinu trokuta.

Visina trokuta je dužina kojoj je jedan kraj vrh trokuta, a drugi kraj nožište okomice spuštene iz tog vrha na pravac na kojem leži nasuprotna stranica.

Teorem 2.2.1. *Pravci na kojima leže visine trokuta sijeku se u jednoj točki koju nazivamo* ***ortocentar*** *trokuta.*

Dokaz. Postavimo koordinatni sustav tako da se stranica $\overline{AB}$ nalazi na x-osi, a vrh trokuta C se nalazi na y-osi. Označimo vrhove trokuta sa $A(a, 0)$, $B(b, 0)$ i $C(0, c)$.

Visina iz vrha C nalazi se na y-osi, tako da točka sjecišta visina iz vrha A i iz vrha C ima apscisu jednaku 0, tj. $O(0, y_0)$.



Slika 2.2: Trokut ABC i ortocentar

Koeficijent smjera pravca BC je

$$k_{BC} = \frac{-c}{b}.$$

Budući da visina v_a leži na pravcu koji je okomit na pravac BC, znamo da koeficijent smjera pravca na kojem leži visina v_a je recipročan i suprotan koeficijentu smjera pravca BC. Stoga je koeficijent smjera pravca na kojem leži visina v_a jednak $\frac{b}{c}$ te njegova jednadžba pravca glasi

$$y = \frac{b}{c}(x - a).$$

S obzirom da se visine iz vrha A i C sijeku u točki O, a visina iz vrha A nalazi se na pravcu čiju jednadžbu imamo, lako odredimo ordinatu točke O.

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{b}{c}(0 - a), \\ y_0 &= \frac{-ab}{c}. \end{aligned}$$

Točka presjeka visine v_a i v_c je točka $O\left(0, \frac{-ab}{c}\right)$.

Odredimo točku u kojoj se sijeku pravci na kojima leže visine iz vrhova B i C.

Koeficijent smjera pravca AC te on iznosi

$$k_{AC} = \frac{-c}{a}.$$

Koeficijent smjera pravca na kojem leži visina v_b je $\frac{a}{c}$ pa jednadžba pravca na kojem leži visina v_b glasi

$$y = \frac{a}{c}(x - b).$$

Uvrstimo sada u dobivenu jednadžbu pravca $x = 0$:

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{a}{c}(-b), \\ y_0 &= \frac{-ab}{c}. \end{aligned}$$

Dakle, pravci na kojima se nalaze visine iz vrhova B i C sijeku se u točki $O\left(0, \frac{-ab}{c}\right)$ koja ima iste koordinate kao i točka u kojoj se sijeku i pravci na kojima leže visine iz vrhova A i C. Zaključujemo da se pravci na kojima leže visine trokuta sijeku u istoj točki $O\left(0, \frac{-ab}{c}\right)$. $\square$

2.3 Središte opisane kružnice

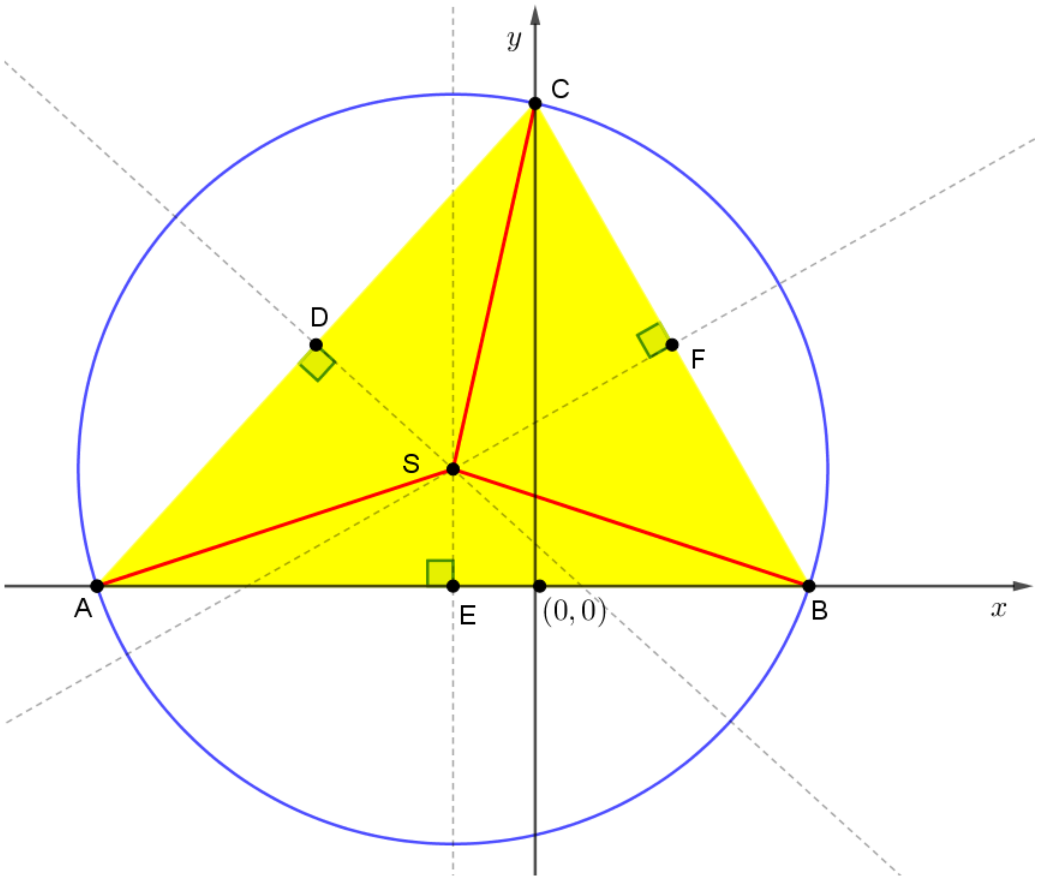
Kako bi mogli dokazati teorem o simetralama stranica trokuta koordinatnom metodom, moramo prvo definirati simetralu dužine.

Simetrala dužine je pravac koji prolazi polovištem te dužine i okomit je na nju.

Teorem 2.3.1. *Simetrale stranica trokuta sijeku se u jednoj točki. Ta se točka naziva* ***središte opisane kružnice*** *trokuta.*

Dokaz. Smjestimo trokut u koordinatni sustav tako da se vrh A nalazi na x-osi, tj. $A(a, 0)$. Točku B također smjestimo na x-os, tj. $B(b, 0)$, a točku C smjestimo na y-os, tj. $C(0, c)$.

Simetrala stranice $\overline{AC}$ siječe stranicu $\overline{AC}$ u točki D, simetrala stranice $\overline{AB}$ siječe stranicu $\overline{AB}$ u točki E i simetrala stranice $\overline{BC}$ siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki F. Simetrale stranica trokuta sijeku se u točki S.



Slika 2.3: Trokut ABC i opisana kružnica

Odredimo koordinate točaka D, E i F pomoću teorema 1.4.1, dobijemo $D\left(\frac{a}{2}, \frac{c}{2}\right)$, $E\left(\frac{a+b}{2}, 0\right)$ i $F\left(\frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)$.

Uočavamo da je točkama E i S apscisa jednaka $\frac{a+b}{2}$.

Preostaje nam odrediti ordinatu točke S pomoću presjeka simetrala stranica.

Znamo jednadžbu pravca simetrale stranice $\overline{AB}$, tj. jednadžba prvca SE glasi

$$x = \frac{a+b}{2}.$$

Odredimo sada jednadžbu simetrale stranice $\overline{BC}$, tj. jednadžbu pravca SF pomoću teorema 1.4.3. Koeficijent smjera pravca SF odredit ćemo pomoću teorema 1.4.7 budući da znamo da su pravci BC i SF okomiti, a jednadžba pravca BC dobijemo pomoću teorema 1.4.2, tj.

$$y = \frac{-c}{b}(x-b).$$

Koeficijent smjera pravca BC je $k_{BC} = \dfrac{-c}{b}$ pa je onda koeficijent smjera pravca SF jednak

$$k_{SF} = \frac{b}{c}$$

Poznata nam je točka F i k_{SF} pa za jednadžbu pravca SF dobijemo

$$\begin{aligned} y - \frac{c}{2} &= \frac{b}{c}\left(x - \frac{b}{2}\right), \\ y &= \frac{b}{c}x - \frac{b^2}{2c} + \frac{c}{2}. \end{aligned}$$

Analogno odredimo jednadžbu simetrale stranice $\overline{AC}$, tj. jednadžbu pravca SD. Prvo ćemo pronaći koeficijent smjera pravca SD pomoću jednadžbe pravca AC, a ona glasi

$$y = \frac{-c}{a}(x-a).$$

Koeficijent smjera pravca AC je $k_{AC} = \dfrac{-c}{a}$ pa je onda koeficijent smjera pravca SD jednak

$$k_{SD} = \frac{a}{c}.$$

Poznata nam je točka D i k_{SD} pa za jednadžbu pravca SD dobijemo

$$\begin{aligned} y - \frac{c}{2} &= \frac{a}{c}\left(x - \frac{a}{2}\right), \\ y &= \frac{a}{c}x - \frac{a^2}{2c} + \frac{c}{2}. \end{aligned}$$

Odredimo sada ordinatu točke S jer znamo da se ona nalazi na simetralama stranica trokuta te pronađimo sjecišta simetrala stranica.

Presjek pravaca SE i SF:

$$\begin{aligned}
y &= \frac{b}{c}\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{b^2}{2c} + \frac{c}{2}, \\
y &= \frac{ab+b^2}{2c} - \frac{b^2}{2c} + \frac{c}{2}, \\
y &= \frac{ab}{2c} + \frac{c}{2}, \\
y &= \frac{ab+c^2}{2c}.
\end{aligned}$$

Uočavamo da je ordinata točke S jednaka $\frac{ab+c^2}{2c}$, tj. $S\left(\frac{a+b}{2}, \frac{ab+c^2}{2c}\right)$.

Provjerimo zadovoljava li točka $S\left(\frac{a+b}{2}, \frac{ab+c^2}{2c}\right)$ jednadžbu pravca SD:

$$\begin{aligned}
y = \frac{ab+c^2}{2c} &= \frac{a}{c}\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{a^2}{2c} + \frac{c}{2}, \\
&= \frac{a^2+ab-a^2}{2c} + \frac{c}{2}, \\
&= \frac{ab+c^2}{2c}.
\end{aligned}$$

Točka $S\left(\frac{a+b}{2}, \frac{ab+c^2}{2c}\right)$ zadovoljava jednadžbu pravca SD te zaključujemo da je točka $S\left(\frac{a+b}{2}, \frac{ab+c^2}{2c}\right)$ sjecište simetrala stranica trokuta.

Preostaje nam još dokazati da je točka S središte opisane kružnice zadanom trokutu, tj. pokazati da vrijedi

$$|SA| = |SB| = |SC|\,.$$

Time ćemo pokazati da je točka S jednako udaljena od točaka A, B i C, tj. da se točke A, B, C nalaze na kružnici sa središtem u S i radijusa $|SA|$. Ta se kružnica naziva opisana kružnica trokutu ABC.

Pronađimo udaljenosti $|SA|$, $|SB|$ i $|SC|$ pomoću teorema 1.4.4.

$$\begin{aligned}
|SA| &= \sqrt{\left(a - \frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(0 - \frac{ab+c^2}{2c}\right)^2} = \sqrt{\frac{(a-b)^2\,c^2 + (ab+c^2)^2}{4c^2}}, \\
&= \sqrt{\frac{a^2c^2 + b^2c^2 + a^2b^2 + c^4}{4c^2}}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|SB| &= \sqrt{\left(b - \frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(0 - \frac{ab+c^2}{2c}\right)^2} = \sqrt{\frac{(a-b)^2}{4} + \frac{(ab+c^2)^2}{4c^2}}, \\
&= \sqrt{\frac{a^2c^2 + b^2c^2 + a^2b^2 + c^4}{4c^2}}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|SC| &= \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{ab+c^2}{2c}\right)^2} = \sqrt{\frac{c^2\,(a+b)^2 + (c^2-ab)^2}{4c^2}}, \\
&= \sqrt{\frac{a^2c^2 + b^2c^2 + a^2b^2 + c^4}{4c^2}}.
\end{aligned}$$

Time smo dokazali da je

$$|SA| = |SB| = |SC| = \sqrt{\frac{a^2c^2 + b^2c^2 + a^2b^2 + c^4}{4c^2}},$$

tj. da se radi o radijusu kružnice opisane zadanom trokutu te da je upravo točka

$S\left(\frac{a+b}{2}, \frac{ab+c^2}{2c}\right)$ središte te kružnice. □

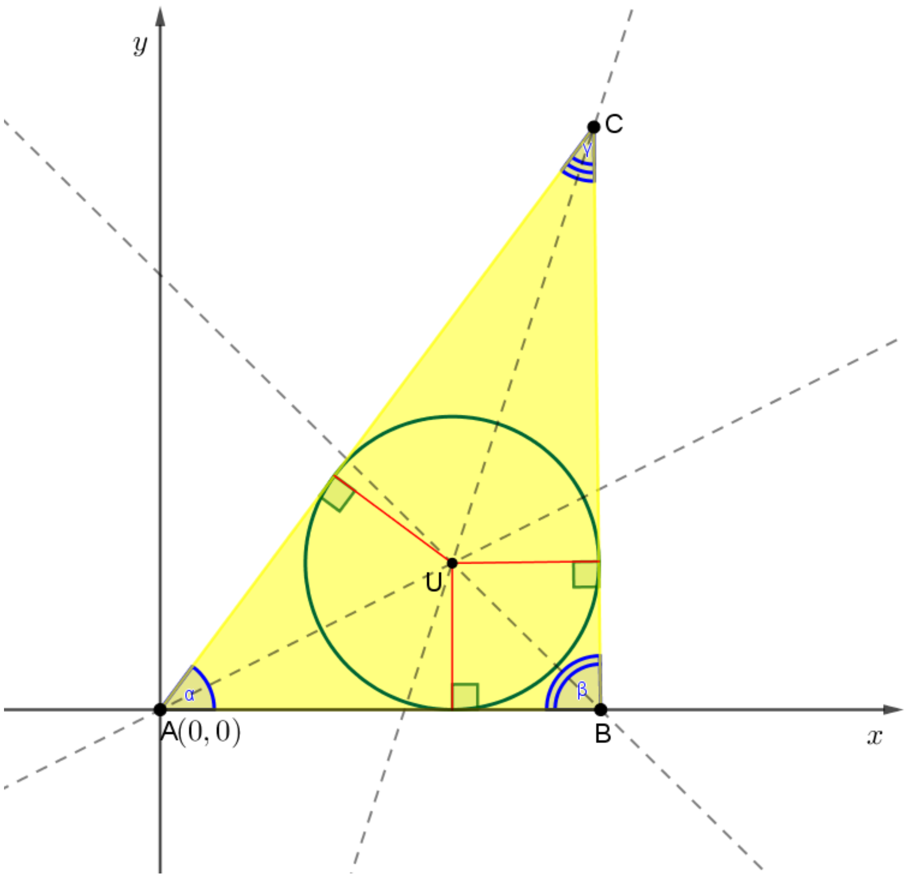
2.4 Središte upisane kružnice

Kako bi mogli dokazati teorem o simetralama kutova trokuta koordinatnom metodom, moramo prvo definirati simetralu kuta.

Simetrala kuta je pravac koji taj kut dijeli na dva sukladna dijela.

Teorem 2.4.1. *Simetrale unutarnjih kutova trokuta sijeku se u jednoj točki. Ta točka naziva se* ***središte upisane kružnice*** *trokuta.*

Dokaz. Smjestimo trokut u koordinatni sustav tako da se vrh A nalazi u ishodištu koordinatnog sustava, tj. $A(0,0)$. Točku B također smjestimo na x-os, tj. $B(x_B, 0)$, a točku C smjestimo u koordinatni sustav tako da $C(x_C, y_C)$.



Slika 2.4: Trokut ABC i upisana kružnica

Prvo ćemo odrediti jednadžbe pravaca AB, BC i AC pomoću teorema 1.4.2.

Jednadžba pravaca AB:

$$AB \ldots\ y = 0.$$

Jednadžba pravaca AC:

$$\begin{aligned} y &= \frac{y_C}{x_C} x, \\ y_C x - x_C y &= 0. \end{aligned}$$

Jednadžba pravaca BC:

$$\begin{aligned} y - 0 &= \frac{y_C - 0}{x_C - x_B}\,(x - x_B)\,, \\ y\,(x_C - x_B) &= y_C\,(x - x_B)\,, \\ y_C x + (x_B - x_C)\,y - y_C x_B &= 0. \end{aligned}$$

Odredimo sada jednadžbu simetrale kuta α, tj. simetrale kuta para pravaca AB i AC pomoću teorema 1.4.6:

$$\begin{aligned} \frac{|y|}{\sqrt{1}} &= \frac{|y_C x - x_C y|}{\sqrt{x_C^2 + y_C^2}}, \\ y &= \pm\frac{y_C x - x_C y}{\sqrt{x_C^2 + y_C^2}}. \end{aligned}$$

Uvedimo oznaku m za $m = \sqrt{x_C^2 + y_C^2}$ te onda imamo

$$\begin{aligned} y &= \pm\frac{y_C x - x_C y}{m}, \\ my &= \pm y_C x \mp x_C y, \\ \pm y_C x + y\,(\mp x_C - m) &= 0. \end{aligned}$$

Simetrala kuta α je graf rastuće funkcije pa od dva pravaca

$$y_C x + y\,(-x_C - m) = 0 \text{ i } -y_C x + y\,(x_C - m) = 0,$$

biramo onog koji ima pozitivan koeficijent smjera pravca.

Koeficijenti smjera pravaca su

$$k_1 = \frac{y_C}{x_C + m} \text{ i } k_2 = \frac{y_C}{x_C - m}$$

te uočavamo da je $k_1 > 0$. Dakle, simetrala kuta α je pravac

$$s_\alpha \ldots\ y_C x + y\,(-x_C - m) = 0.$$

Jednadžba simetrale kuta β, tj. simetrale kuta para pravaca AB i BC:

$$\frac{|y|}{\sqrt{1}} = \frac{|y_C x + y(x_B - x_C) - y_C x_B|}{\sqrt{y_C^2 + (x_B - x_C)^2}},$$

uvedimo oznaku r za $r = \sqrt{y_C^2 + (x_B - x_C)^2}$ te onda imamo

$$y = \pm\frac{y_C x + y(x_B - x_C) - y_C x_B}{r},$$

Uočavamo da postoje dvije jednadžbe simetrale kuta između para pravaca AB i BC te odredimo koeficijente smjera obje jednadžbe.

Simetrala kuta β je graf padajuće funkcije te ona jednadžba pravca kojoj je koeficijent smjera negativan je tražena jednadžba pravca.

Jednadžba simetrale kuta $s_{\beta 1}$:

$$\begin{aligned} y_C x + y(x_B - x_C) - y_C x_B &= yr, \\ y_C x + y(x_B - x_C - r) - y_C x_B &= 0 \end{aligned}$$

te uočavamo da je $k_{s_{\beta 1}} = \dfrac{y_C}{r + x_C - x_B}$.

Jednadžba simetrale kuta $s_{\beta 2}$:

$$\begin{aligned} y_C x + y(x_B - x_C) - y_C x_B &= -yr, \\ y_C x + y(x_B - x_C + r) - y_C x_B &= 0 \end{aligned}$$

te uočavamo da je $k_{s_{\beta 2}} = \dfrac{y_C}{x_C - x_B - r}$.

Očito je $k_{s_{\beta 2}} < 0$, tako da simetrala kuta β je pravac

$$s_\beta \ldots\ y_C x + y(x_B - x_C + r) - y_C x_B = 0.$$

Jednadžba simetrale kuta γ, tj. simetrale kuta para pravaca AC i BC:

$$\begin{aligned} \frac{|y_C x - x_C y|}{\sqrt{x_C^2 + y_C^2}} &= \frac{|y_C x + y(x_B - x_C) - y_C x_B|}{\sqrt{y_C^2 + (x_B - x_C)^2}}, \\ \frac{|y_C x - x_C y|}{m} &= \frac{|y_C x + y(x_B - x_C) - y_C x_B|}{r}, \\ r y_C x - r x_C y &= \pm\left(m y_C x + y m(x_B - x_C) - m y_C x_B\right), \end{aligned}$$

uočavamo da postoje dvije jednadžbe simetrale kuta između para pravaca AC i BC, odredimo ih.

Jednadžba simetrale kuta $s_{\gamma 1}$:

$$\begin{aligned} ry_C x - rx_C y &= my_C x + y\,(mx_B - mx_C) - my_C x_B, \\ 0 &= x\,(my_C - ry_C) + y\,(mx_B - mx_C + rx_C) - my_C x_B. \end{aligned}$$

Jednadžba simetrale kuta $s_{\gamma 2}$:

$$\begin{aligned} -ry_C x + rx_C y &= my_C x + y\,(mx_B - mx_C) - my_C x_B, \\ 0 &= x\,(my_C + ry_C) + y\,(mx_B - mx_C - rx_C) - my_C x_B. \end{aligned}$$

Sada trebamo provjeriti koja od jednadžba $s_{\gamma 1}$ i $s_{\gamma 2}$ je tražena jednadžba simetrale kuta γ.

Uočavamo da su točke A i B sa različitih strana simetrale kuta γ pa uvrstimo točke A i B u $s_{\gamma 1}$ i $s_{\gamma 2}$.

Simetrala kuta $s_{\gamma 1}$:
za točku $A\,(0,0)$:

$$-my_C x_B < 0,$$

za točku $B\,(x_B, 0)$:

$$-ry_C x_B < 0,$$

uočavamo da su točke A i B sa istih strana simetrale $s_{\gamma 1}$ te simetrala $s_{\gamma 1}$ nije tražena simetrala kuta.

Simetrala kuta $s_{\gamma 2}$:
za točku $A\,(0,0)$:

$$-my_C x_B < 0,$$

za točku $B\,(x_B, 0)$:

$$ry_C x_B > 0,$$

uočavamo da su točke A i B sa različitih strana simetrale $s_{\gamma 2}$ te simetrala kuta γ je pravac

$$s_\gamma \;...\; x\,(my_C + ry_C) + y\,(mx_B - mx_C - rx_C) - my_C x_B = 0.$$

Pronađimo presjek simetrale kuta α i simetrale kuta β, tj. $s_\alpha \cap s_\beta = \{U\}$:

$$\begin{aligned} y_C x + y\,(-x_C - m) &= 0, &(2.1) \\ y_C x + y\,(x_B - x_C - r) - y_C x_B &= 0. &(2.2) \end{aligned}$$

Pomnožimo (2.1) sa -1 i zbrojimo sa (2.2) i dobijemo:

$$\begin{aligned} y(-x_C - m - x_B + x_C - r) + y_C x_B &= 0, \\ y &= \frac{y_C x_B}{x_B + m + r}. \end{aligned}$$

Dobili smo ordinatu točke U, tj.

$$y_U = \frac{y_C x_B}{x_B + m + r}.$$

Sada odredimo apscisu točke U:

$$\begin{aligned} x_U &= \frac{x_C + m}{y_C} y_U, \\ &= \frac{x_C + m}{y_C} \cdot \frac{y_C x_B}{x_B + m + r}, \\ &= \frac{x_B(x_C + m)}{x_B + m + r}. \end{aligned}$$

Sada znamo i apscisu točke U, tj.

$$x_U = \frac{x_B(x_C + m)}{x_B + m + r}.$$

Provjerimo sada pripada li točka $U\left(\frac{x_B(x_C + m)}{x_B + m + r}, \frac{y_C x_B}{x_B + m + r}\right)$ simetrali kuta s_γ:

$$\begin{aligned} x(my_C + ry_C) + y(mx_B - mx_C - rx_C) - my_C x_B &= 0, \\ \frac{x_B(x_C + m)}{x_B + m + r}(my_C + ry_C) + \frac{y_C x_B}{x_B + m + r}(mx_B - mx_C - rx_C) - my_C x_B &= 0 / \cdot \frac{(x_B + m + r)}{(x_B y_C)}, \\ (x_C + m)(m + r) + (mx_B - mx_C - rx_C) - m(x_B + m + r) &= 0, \\ x_C m + x_C r + m^2 + mr + mx_B - mx_C - rx_C - mx_B - m^2 - mr &= 0, \\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

Zaključujemo da $U \in s_{\gamma 2}$, dakle simetrale unutarnjih kutova trokuta sijeku se u jednoj točki U.

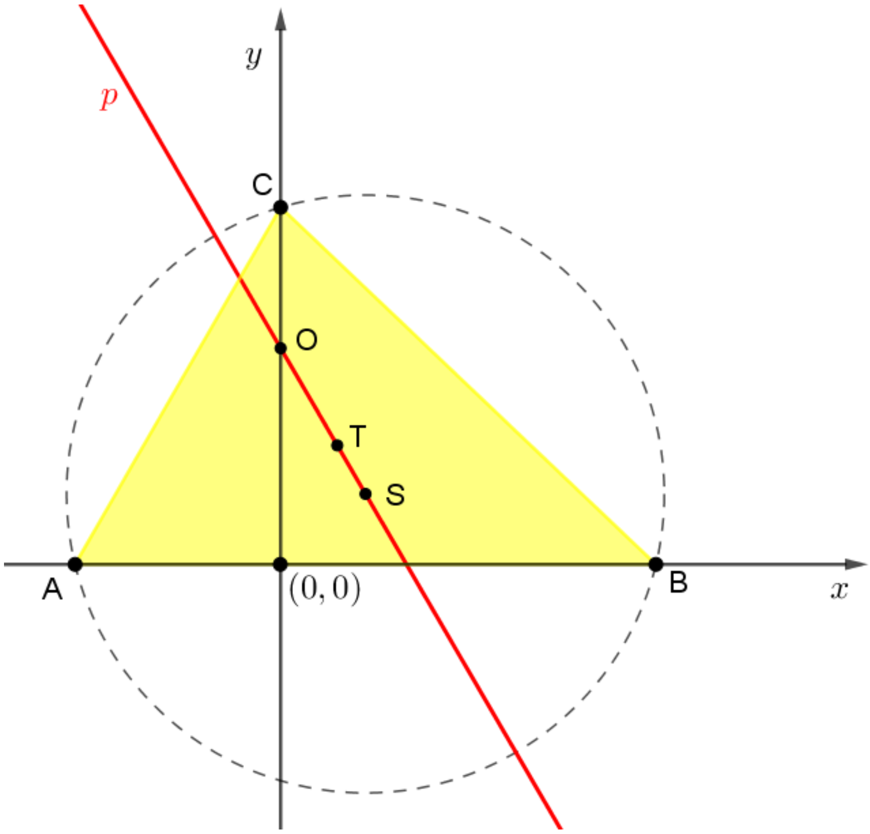
□

2.5 Eulerov pravac

Teorem 2.5.1. *Središte S opisane kružnice, težište T i ortocentar O svakog trokuta su kolinearne točke, tj. leže na jednom pravcu kojeg nazivamo* ***Eulerov pravac*** *i pritom vrijedi*

$$|TO| = 2|TS|.$$

Dokaz. Smjestimo trokut u koordinatni sustav tako da se vrh A nalazi na x-osi, tj. $A\,(a, 0)$, točku B također smjestimo na x-os, tj. $B\,(b, 0)$, a točku C smjestimo na y-os, tj. $C\,(0, c)$.



Slika 2.5: Trokut ABC i Eulerov pravac

Prema teoremu 2.1.1 težište trokuta je točka

$$T\left(\frac{a+b}{3}, \frac{c}{3}\right).$$

Prema teoremu 2.2.1 ortocentar trokuta je točka

$$O\left(0, \frac{-ab}{c}\right).$$

Središtu S opisane kružnice trokuta koordinate su dane u dokazu teorema 2.3.1 i vrijedi

$$S\left(\frac{a+b}{2}, \frac{ab+c^2}{2c}\right).$$

Trebamo dokazati da točke T, O i S leže na jednom pravcu.

Odredimo jednadžbu pravca OT i provjerimo zadovoljava li točka S jednadžbu pravca OT. Ukoliko točka S zadovoljava jednadžbu pravca OT znamo da su točke T, O i S kolinearne.

Odredimo jednadžbu pravca OT:

$$\begin{aligned} y + \frac{ab}{c} &= \frac{\frac{c}{3} + \frac{ab}{c}}{\frac{a+b}{3} - 0} (x - 0), \\ y &= \frac{c^2 + 3ab}{c(a+b)} x - \frac{ab}{c}. \end{aligned}$$

Uvrstimo apscisu točke S u jednadžbu pravca OT te dobivamo

$$\begin{aligned} y &= \frac{c^2 + 3ab}{c(a+b)} \cdot \frac{a+b}{2} - \frac{ab}{c} = \frac{c^2 + 3ab}{2c} - \frac{ab}{c}, \\ &= \frac{c^2 + ab}{2c}, \end{aligned}$$

a to je upravo ordinata točke S.

Dakle, točka S zadovoljava jednadžbu pravca OT i zaključujemo da se točke T, O i S nalaze na jednom pravcu.

Preostaje nam još dokazati da vrijedi $|TO| = 2|TS|$. Odredimo udaljenost $|TO|$:

$$\begin{aligned} |TO| &= \sqrt{\left(0 - \left(\frac{a+b}{3}\right)^2\right) + \left(\frac{-ab}{c} - \frac{c}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2 + 2ab + b^2}{9} + \frac{9a^2b^2 + 6abc^2 + c^4}{9c^2}}, \\ &= \sqrt{\frac{1}{9}} \cdot \sqrt{a^2 + 2ab + b^2 + \frac{9a^2b^2 + 6abc^2 + c^4}{c^2}}, \\ &= \frac{1}{3} \cdot \sqrt{a^2 + 2ab + b^2 + \frac{9a^2b^2 + 6abc^2 + c^4}{c^2}}. \end{aligned}$$

Slijedi da

$$3|TO| = \sqrt{a^2 + 2ab + b^2 + \frac{9a^2b^2 + 6abc^2 + c^4}{c^2}}. \tag{2.3}$$

Odredimo sada udaljenost $|TS|$:

$$
\begin{aligned}
|TS| &= \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}-\frac{a+b}{3}\right)^2+\left(\frac{ab+c^2}{2c}-\frac{c}{3}\right)^2}, = \sqrt{\left(\frac{a+b}{6}\right)^2+\left(\frac{3ab+c^2}{6c}\right)^2}, \\
&= \sqrt{\frac{a^2+2ab+b^2}{36}+\frac{9a^2b^2+6abc^2+c^4}{36c^2}}, \\
&= \frac{1}{6}\cdot\sqrt{a^2+2ab+b^2+\frac{9a^2b^2+6abc^2+c^4}{c^2}}.
\end{aligned}
$$

Slijedi da

$$
6\,|TS| = \sqrt{a^2+2ab+b^2+\frac{9a^2b^2+6abc^2+c^4}{c^2}}. \tag{2.4}
$$

Iz (2.3) i (2.4) slijedi da

$$
2\,|TS| = |TO|\,.
$$

□

Poglavlje 3

Teoremi o trokutu

3.1 Teoremi o trokutu

Teorem 3.1.1. *[11] Neka je ABC trokut i neka je točka D točka na stranici $\overline{BC}$. Tada vrijedi*

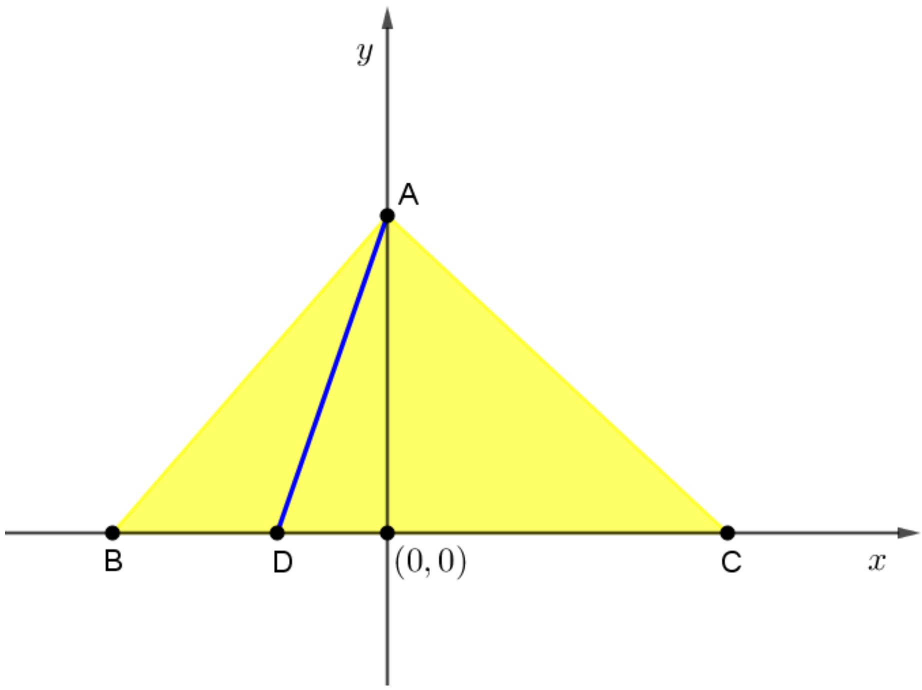
$$|AC|^2\,|BD| + |AB|^2\,|CD| = |BC|\left(|AD|^2 + |BD|\,|CD|\right).$$

Ovaj teorem naziva se Stewartov teorem u čast škotskom matematičaru. Matthew Stewart rođen je 15. siječnja 1717. u Škotskoj, a umro je 23. siječnja 1785. također u Škotskoj. U svom najpoznatijem djelu „Some General Theorems of Considerable Use in the Higher Parts of Mathematics" Stewart proširuje ideje Roberta Simsona i dokazuje teorem danas poznat pod nazivom Stewartov teorem.

Podaci o I. Stewartu preuzeti su iz izvora [12].

Dokaz. Smjestimo trokut u koordinatni sustav tako da se vrh B nalazi na x-osi, tj. $B\,(b, 0)$, točka C također na x-os, tj. $C\,(c, 0)$, a točka A na y-os, tj. $A\,(0, a)$.

Točka D nalazi se također na x-osi s obzirom da se nalazi na stranici $\overline{BC}$ te su njene koordinate jednake $D\,(d, 0)$.



Slika 3.1: Trokut ABC

Primjenom Pitagorinog teorema na pravokutni trokut AOC dobivamo

$$\begin{aligned}|AC|^2 &= |AO|^2 + (|CD| - |DO|)^2 ,\\ |AC|^2 &= |AO|^2 + |CD|^2 - 2\,|CD|\,|DO| + |DO|^2 \quad / \cdot |BD| ,\\ |AC|^2\,|BD| &= |AO|^2\,|BD| + |CD|^2\,|BD| - 2\,|CD|\,|DO|\,|BD| + |DO|^2\,|BD| .\end{aligned} \tag{3.1}$$

Primjenom Pitagorinog teorema na pravokutni trokut AOC dobivamo

$$\begin{aligned}|AB|^2 &= |AO|^2 + (|BD| + |DO|)^2 ,\\ |AB|^2 &= |AO|^2 + |BD|^2 + 2\,|BD|\,|DO| + |DO|^2 \quad / \cdot |CD| ,\\ |AB|^2\,|CD| &= |AO|^2\,|CD| + |CD|\,|BD|^2 + 2\,|CD|\,|DO|\,|BD| + |DO|^2\,|CD| .\end{aligned} \tag{3.2}$$

Nadalje, u pravokutnom trokutu AOD vrijedi

$$|AD|^2 = |AO|^2 + |DO|^2 \tag{3.3}$$

Zbrojimo sada (3.1) sa (3.2) i dobijemo

$$|AC|^2\,|BD| + |AB|^2\,|CD| = |AO|^2\,(|BD| + |CD|) + |CD|\,|BD|\,(|CD| + |BD|) + |DO|^2\,(|BD| + |CD|) .$$

Uvrstimo li (3.3) u prethodnu jednakost dobivamo

$$\begin{aligned} |AC|^2\,|BD| + |AB|^2\,|CD| &= |AO|^2\,|BC| + |CD|\,|BD|\,|BC| + |DO|^2\,|BC|\,, \\ &= |BC|\left(|AO|^2 + |CD|\,|BD| + |DO|^2\right). \end{aligned}$$

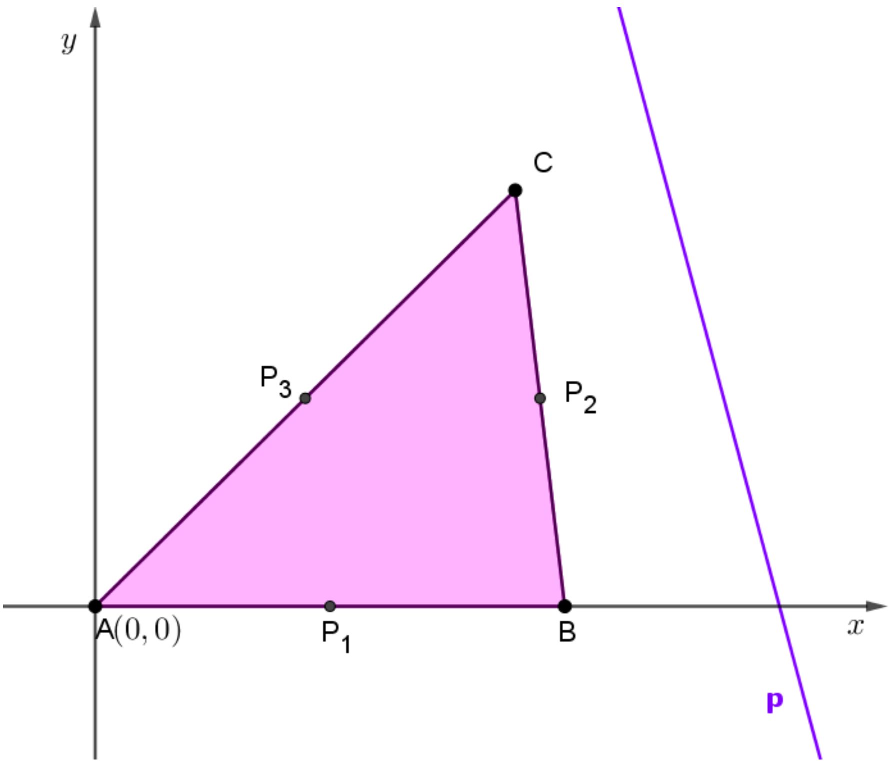
Opet uvrstimo (3.3) u prethodnu jednakost i dobijemo

$$|AC|^2\,|BD| + |AB|^2\,|CD| = |BC|\left(|AD|^2 + |BD|\,|CD|\right),$$

što je upravo tvrdnja teorema.

□

Teorem 3.1.2. *[2] U ravnini je zadan trokut ABC i pravac p. Dokažite da je zbroj udaljenosti vrhova A, B, C od pravca p jednak zbroju udaljenosti polovišta P_1, P_2, P_3 stranica trokuta od pravca p.*



Dokaz.

Slika 3.2: Trokut ABC i pravac p

Smjestimo trokut u koordinatni sustav tako da je točka A u ishodištu koordinatnog sustava,tj. $A\,(0,0)$.

Točku B smjestimo na apscisnu os i označimo ju sa $B(b,0)$, a točku C označimo sa $C(x_C, y_C)$.

Označimo polovište stranice $\overline{AB}$ sa P_1, polovište stranice $\overline{BC}$ sa P_2 i polovište stranice $\overline{AC}$ sa P_3.

Odaberemo proizvoljno pravac p.

Pravac p ima jednadžbu

$$y = kx + l,\ \text{gdje su } k, l \in \mathbb{R}.$$

Odredimo udaljenosti vrhova trokuta ABC do pravca p uz pomoć teorema 1.4.5 i dobijemo

$$\begin{aligned} d(A,p) &= \frac{|l|}{\sqrt{k^2+1}}, \\ d(B,p) &= \frac{|bk+l|}{\sqrt{k^2+1}}, \end{aligned}$$

$$d(C,p) = \frac{|kx_C - y_C + l|}{\sqrt{k^2+1}}.$$

Koordinate točaka P_1, P_2, P_3 odredimo pomoću teorema 1.4.1 i dobijemo

$$P_1\left(\frac{b}{2}, 0\right),\ P_2\left(\frac{x_C+b}{2}, \frac{y_C}{2}\right),\ P_3\left(\frac{x_C}{2}, \frac{y_C}{2}\right).$$

Udaljenosti polovišta trokuta ABC do pravca p su

$$\begin{aligned} d(P_1,p) &= \frac{\left|\frac{kb}{2} + l\right|}{\sqrt{k^2+1}}, \\ d(P_2,p) &= \frac{\left|\frac{kx_C+kb-y_C}{2} + l\right|}{\sqrt{k^2+1}}, \\ d(P_3,p) &= \frac{\left|\frac{kx_C-y_C}{2} + l\right|}{\sqrt{k^2+1}}, \end{aligned}$$

Sve su točke A, B, C, P_1, P_2, P_3 u istoj poluravnini određenoj s pravcem p pa su sve apsolutne vrijednosti ili upravo jednake danim izrazima ili su suprotne.

Zbroj udaljenosti vrhova trokuta ABC od pravca p je

$$\begin{aligned} d(A,p)+d(B,p)+d(C,p) &= \frac{l}{\sqrt{k^2+1}}+\frac{bk+l}{\sqrt{k^2+1}}+\frac{kx_C-y_C+l}{\sqrt{k^2+1}}, \\ &= \frac{1}{\sqrt{k^2+1}}\cdot(3l+bk+kx_C-y_C). \end{aligned}$$

Zbroj udaljenosti polovišta stranica trokuta od pravca p je

$$\begin{aligned} d(P_1,p)+d(P_2,p)+d(P_3,p) &= \frac{\frac{kb}{2}+l}{\sqrt{k^2+1}}+\frac{\frac{kx_C+kb-y_C}{2}+l}{\sqrt{k^2+1}}+\frac{\frac{kx_C-y_C}{2}+l}{\sqrt{k^2+1}}, \\ &= \frac{1}{\sqrt{k^2+1}}\left(3l+\frac{kb+kx_C+kb-y_C+kx_C-y_C}{2}\right), \\ &= \frac{1}{\sqrt{k^2+1}}\cdot(3l+bk+kx_C-y_C). \end{aligned}$$

Uočavamo,

$$d(A,p)+d(B,p)+d(C,p)=d(P_1,p)+d(P_2,p)+d(P_3,p)=\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}\cdot(3l+bk+kx_C-y_C)$$

te je time naš teorem dokazan.

□

Teorem 3.1.3. *[2] U trokutu ABC nožišta visina na suprotnim stranicama su A_1, B_1, C_1. Središte trokutu opisane kružnice je S, a duljina njenog polumjera je R. Dokažite da je*

$$\overline{SA}\perp\overline{B_1C_1}.$$

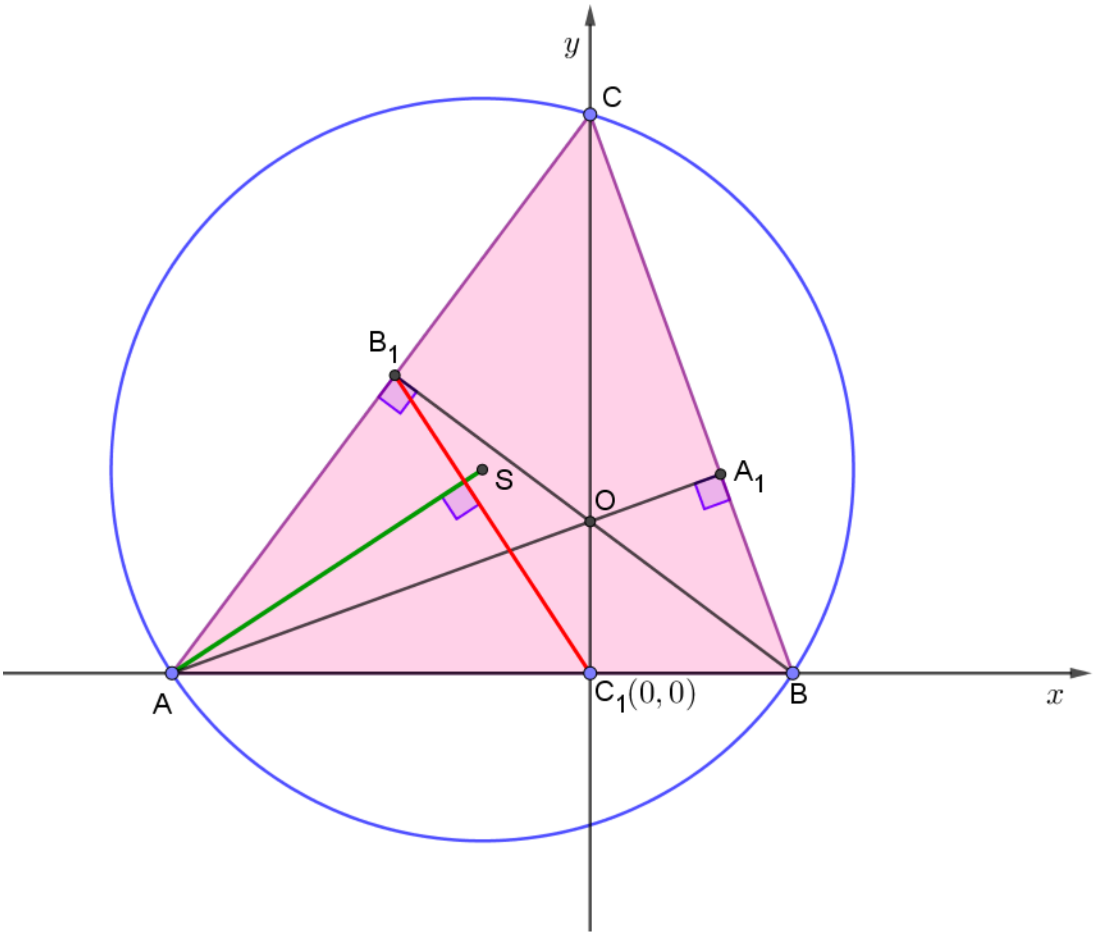
Dokaz. Postavimo koordinatni sustav tako da se stranica $\overline{AB}$ nalazi na x-osi, a vrh trokuta C se nalazi na y-osi. Označimo vrhove trokuta sa $A(a,0)$, $B(b,0)$ i $C(0,c)$.

Neka su A_1, B_1, C_1 nožišta visina na suprotnim stranicama trokuta.

Označimo s O ortocentar trokuta ABC, a sa S središte opisane kružnice.

Prema teoremu 2.3.1 središte opisane kružnice trokuta ABC je točka

$$S\left(\frac{a+b}{2},\frac{ab+c^2}{2c}\right).$$



Slika 3.3: Trokut ABC i opisana kružnica

Odredimo koeficijent smjera pravca AS pomoću teorema 1.4.2 i dobijemo

$$k_{AS} = \frac{\frac{ab+c^2}{2c} - 0}{\frac{a+b}{2} - a} = -\frac{\left(ab + c^2\right)}{c\,(a-b)}.$$

Uočavamo da je presjek visine iz vrha C i stranice $\overline{AB}$ zapravo ishodište koordinatnog sustava pa je točka C_1 određena sa $C_1\,(0,0)$.

Točka B_1 je sjecište pravaca AC i BB_1 pa odredimo jednadžbe pravaca pomoću teorema 1.4.2.

Jednadžba pravca AC glasi

$$y = -\frac{c}{a}\,(x-a)\,.$$

Koeficijent smjera pravca AC je $k_{AC} = -\frac{c}{a}$, a budući da su pravci AC i BB_1 okomiti, znamo da je koeficijent smjera pravca BB_1 jednak

$$k_{BB_1} = \frac{a}{c}$$

pa jednadžba pravca BB_1 glasi

$$y = \frac{a}{c}x - \frac{ab}{c}.$$

Odredimo koordinate točke B_1, tj. $AC \cap BB_1 = \{B_1\}$

$$\begin{aligned}
-\frac{c}{a}x + c &= \frac{a}{c}x - \frac{ab}{c}, \\
\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right)x &= c + \frac{ab}{c}, \\
\left(\frac{a^2 + c^2}{ac}\right)x &= \frac{c^2 + ab}{c}, \\
x &= \frac{a\left(c^2 + ab\right)}{a^2 + c^2}.
\end{aligned}$$

Ordinata točke B_1 jednaka je

$$y = -\frac{c}{a} \cdot \frac{a\left(c^2 + ab\right)}{a^2 + c^2} + c = \frac{ac\,(a - b)}{a^2 + c^2},$$

tj. točka B_1 određena je sa

$$B_1\left(\frac{a\left(c^2 + ab\right)}{a^2 + c^2}, \frac{ac\,(a - b)}{a^2 + c^2}\right).$$

Odredimo sada koeficijent smjer pravca B_1C_1

$$k_{B_1C_1} = \frac{\frac{ac(a-b)}{a^2+c^2} - 0}{\frac{a\left(c^2+ab\right)}{a^2+c^2} - 0} = \frac{c\,(a - b)}{c^2 + ab}.$$

Uočavamo da su koeficijenti smjera pravaca AS i B_1C_1 međusobno recipročni i suprotnog predznaka pa zaključujemo da su pravci AS i B_1C_1 okomiti, tj. da vrijedi $\overline{SA} \perp \overline{B_1C_1}$ i time je dokazana naša tvrdnja.

□

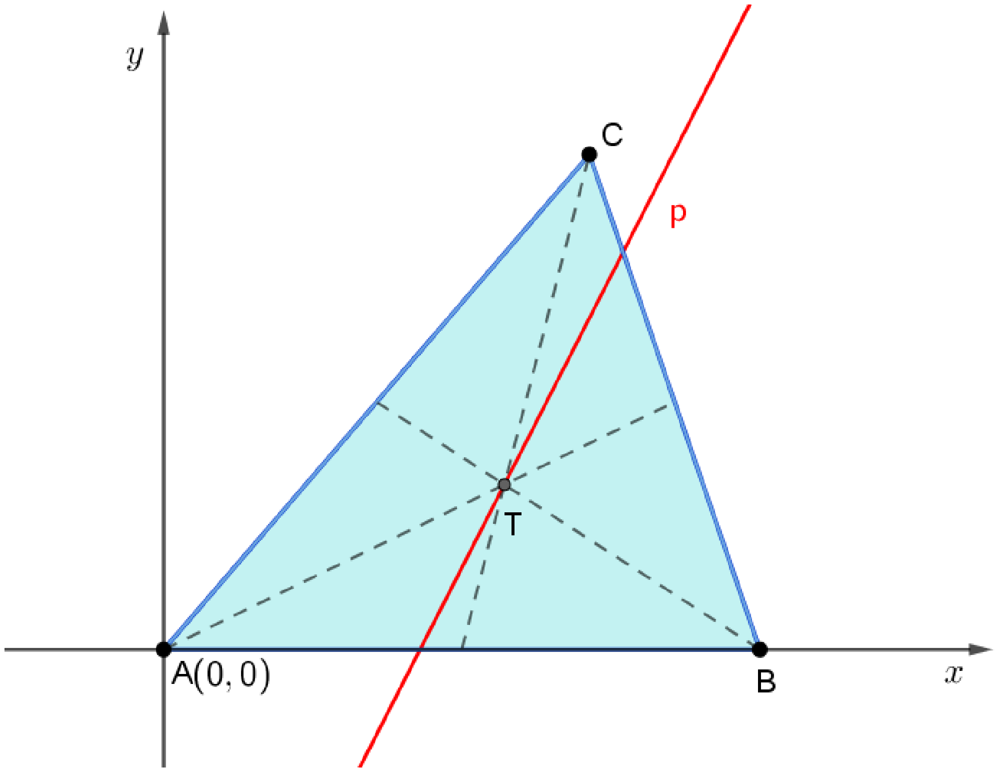
Teorem 3.1.4. *Težištem trokuta ABC povučen je pravac p koji ne sadrži niti jedan vrh trokuta. Dokažite da je zbroj udaljenosti dvaju vrhova koji se nalaze s iste strane pravca jednak udaljenosti trećeg vrha od pravca.*

Dokaz. Smjestimo trokut u koordinatni sustav tako da je točka A u ishodištu koordinatnog sustava,tj. $A\,(0,0)$.

Točku B smjestimo na apscisnu os i označimo ju sa $B\,(b,0)$, a točku C označimo sa $C\,(x_C, y_C)$.

Neka je točka T težište trokuta ABC.

Odaberemo proizvoljno pravac p koji prolazi točkom T.



Slika 3.4: Trokut ABC i pravac p

Prema teoremu 2.1.1 težište trokuta je točka T

$$T\left(\frac{b+x_C}{3}, \frac{y_C}{3}\right).$$

Neka je $k \in \mathbb{R}$, a pravacu p koji prolazi točkom T odredimo jednadžbu pravca pomoću teorema 1.4.3 i dobijemo

$$\begin{aligned} y - \frac{y_C}{3} &= k\left(x - \frac{b + x_C}{3}\right), \\ y &= kx + \frac{y_C - bk - kx_C}{3} \text{ ... p.} \end{aligned}$$

Odredimo udaljenosti vrhova trokuta ABC do pravca p uz pomoć teorema 1.4.5 i dobijemo

$$\begin{aligned} d(A, p) &= \frac{|y_C - bk - kx_C|}{\sqrt{9k^2 + 9}}, \\ d(B, p) &= \frac{|3bk + y_C - bk - kx_C|}{\sqrt{9k^2 + 9}} = \frac{|y_C + 2bk - kx_C|}{\sqrt{9k^2 + 9}}, \\ d(C, p) &= \frac{|3kx_C - 3y_C + y_C - bk - kx_C|}{\sqrt{9k^2 + 9}} = \frac{|-2y_C - bk + 2kx_C|}{\sqrt{9k^2 + 9}}, \end{aligned}$$

Točke A i C su u istoj poluravnini određenoj s pravcem p pa su apsolutne vrijednosti ili upravo jednake ili suprotne danim izrazima točaka A i C.

Bez smanjenja općenitosti odabrat ćemo

$$\begin{aligned} d(A, p) &= \frac{y_C - bk - kx_C}{\sqrt{9k^2 + 9}}, \\ d(C, p) &= \frac{-2y_C - bk + 2kx_C}{\sqrt{9k^2 + 9}}. \end{aligned}$$

Točka B je u suprotnoj poluravni određenoj s pravcem p od poluravnine u kojoj se nalaze točke A i C pa je onda apsolutna vrijednost danog izraza za točku B suprotna apsolutnoj vrijednosti izraza točaka A i C, tj.

$$d(B, p) = \frac{-y_C - 2bk + kx_C}{\sqrt{9k^2 + 9}}.$$

Odredimo zbroj udaljenosti od vrhova A i C trokuta do težišta T

$$\begin{aligned} d(A, p) + d(C, p) &= \frac{y_C - bk - kx_C}{\sqrt{9k^2 + 9}} + \frac{-2y_C - bk + 2kx_C}{\sqrt{9k^2 + 9}}, \\ &= \frac{-y_C - 2bk + kx_C}{\sqrt{9k^2 + 9}}. \end{aligned}$$

Uočavamo,

$$d(A, p) + d(C, p) = d(B, p),$$

a time je dokaz završen.

□

3.2 Zadaci s natjecanja

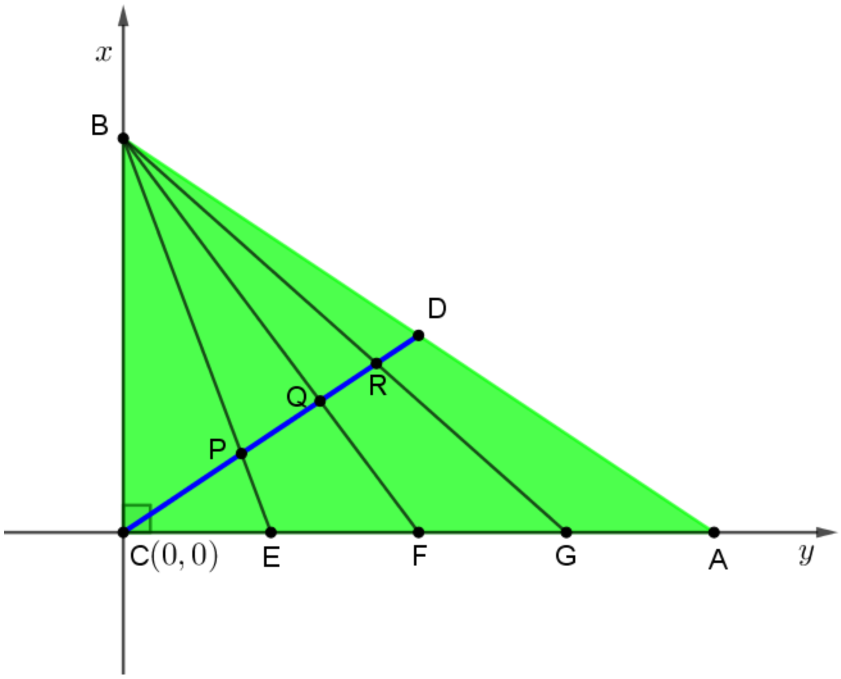
U ovom odlomku ćemo prikazati zadatke koji su se pojavljivali na natjecanjima, a mogu se riješiti ili dokazati koordinatnom metodom.

Zadaci su preuzeti iz literature koja je navedena, dok je dokaz za teorem 3.2.2 prvi put napravljen u ovom radu pomoću koordinatne metode, a dokazi koordinatnom metodom za primjer 3.2.1 i teorem 3.2.3 napravljeni su u navedenoj literaturi.

Prvo ćemo pokazati primjer za treći razred srednje škole koji se pojavio na županijskom natjecanju školske godine 1994./95.

Primjer 3.2.1. *[3] Dan je pravokutni trokut ABC. Točka D je polovište hipotenuze $\overline{AB}$, F je polovište stranice $\overline{AC}$, E je polovište od $\overline{CF}$ i G je polovište od $\overline{FA}$. Dužina $\overline{CD}$ siječe $\overline{BE}$, $\overline{BF}$ i $\overline{BG}$ redom u točkama P, Q i R. Koliki je omjer $\frac{|PQ|}{|QR|}$?*

Rješenje primjera:



Slika 3.5: Pravokutni trokut ABC s pravim kutom u vrhu C

Smjestimo pravokutni trokut ABC u koordinatni sustav tako da vrh C bude u ishodištu, tj. $C(0,0)$.

Stranicu $\overline{AC}$ smjestimo na apscisu i vrh A označimo sa $A(b,0)$, a stranicu $\overline{BC}$ na ordinatu i točku B označimo sa $B(0,a)$.

Koordinate polovišta D, E, F i G odredimo pomoću teorema 1.4.1 i dobivamo točke

$$D\left(\frac{b}{2},\frac{a}{2}\right),\ E\left(\frac{b}{4},0\right),\ F\left(\frac{b}{2},0\right),\ G\left(\frac{3b}{2},0\right).$$

Odredimo sada jednadžbe pravaca CD, BE, BF i BG pomoću teorema 1.4.2:

$$\begin{aligned} CD \ldots y &= \frac{a}{b}x, \\ BE \ldots y &= -\frac{4a}{b}x + a, \\ BF \ldots y &= -\frac{2a}{b}x + a, \\ BG \ldots y &= -\frac{4a}{3b}x + a. \end{aligned}$$

Točku P odredit ćemo pomoću presjeka pravaca CD i BE, tj. $\{P\} = CD \cap BE$:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b}x &= -\frac{4a}{b}x + a, \\ \left(\frac{a}{b} + \frac{4a}{b}\right)x &= a, \\ x &= \frac{b}{5}, \end{aligned}$$

a ordinata točke P glasi

$$y = \frac{a}{b}\cdot\frac{b}{5} = \frac{a}{5},$$

tj. imamo točku $P\left(\frac{b}{5},\frac{a}{5}\right)$.

Točku Q odredit ćemo pomoću presjeka pravaca CD i BF, tj. $\{Q\} = CD \cap BF$:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b}x &= -\frac{2a}{b}x + a, \\ \frac{3a}{b}x &= a, \\ x &= \frac{b}{3}, \end{aligned}$$

a ordinata točke Q glasi

$$y = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{3} = \frac{a}{3},$$

tj. imamo točku $Q\left(\frac{b}{3}, \frac{a}{3}\right)$.

Preostaje nam još odrediti točku R pomoću presjeka pravaca CD i BG, tj. $\{R\} = CD \cap BG$:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b}x &= -\frac{4a}{3b}x + a, \\ \left(\frac{3a+4a}{3b}\right)x &= a, \\ x &= \frac{3b}{7}, \end{aligned}$$

a ordinata točke R glasi

$$y = \frac{a}{b} \cdot \frac{3b}{7} = \frac{a}{7},$$

tj. imamo točku $R\left(\frac{3b}{7}, \frac{a}{7}\right)$.

Odredimo udaljenosti $|PQ|$ i $|QR|$ kako bi mogli izračunat traženi omjer.

$$\begin{aligned} |PQ| &= \sqrt{\left(\frac{b}{3} - \frac{b}{5}\right)^2 + \left(\frac{a}{3} - \frac{a}{5}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{15}\right)^2 \cdot (a^2 + b^2)} = \frac{2}{15}\sqrt{a^2 + b^2}, \\ |QR| &= \sqrt{\left(\frac{3b}{7} - \frac{b}{3}\right)^2 + \left(\frac{a}{7} - \frac{a}{3}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{21}\right)^2 \cdot (a^2 + b^2)} = \frac{2}{21}\sqrt{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

Traženi omjer jednak je

$$\frac{|PQ|}{|QR|} = \frac{7}{5},$$

time je naš primjer riješen do kraja.

Sada ćemo dokazati teorem koji se pojavio na županijskom natjecanju školske godine 2002./2003. za osmi razred osnovne škole.

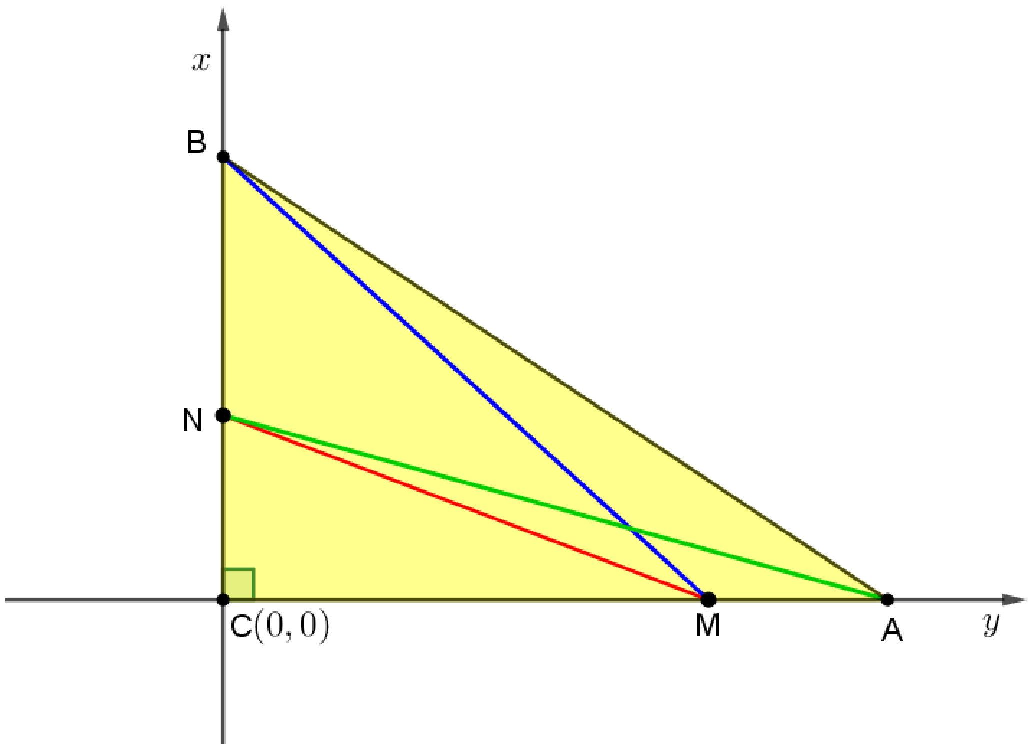
Teorem 3.2.2. *[4] U pravokutnom trokut ABC na katetama $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ dane su redom točke M i N. Dokaži da vrijedi*

$$|AN|^2 + |BM|^2 = |MN|^2 + |AB|^2 .$$

Dokaz. Smjestimo pravokutni trokut ABC u koordinatni sustav tako da vrh C bude u ishodištu, tj. $C\,(0,0)$.

Stranicu $\overline{AC}$ smjestimo na apscisnu os i vrh A označimo sa $A\,(a,0)$, a stranicu $\overline{BC}$ na ordinatnu os i točku B označimo sa $B\,(0,b)$.

Odredimo točke M i N na stranicama $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ i označimo ih sa $M\,(m,0)$ i $N\,(0,n)$.



Slika 3.6: Pravokutni trokut ABC s pravim kutom u vrhu C

Pomoću Pitagorinog teorema za pravokutan trokut ANC odredimo $|AN|$:

$$\begin{aligned} |AN|^2 &= |AC|^2 + |NC|^2\,, \\ |AN|^2 &= a^2 + n^2 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Sada analogno pomoću Pitagorinog teorema za pravokutan trokut BMC odredimo $|BM|$:

$$\begin{aligned} |BM|^2 &= |BC|^2 + |CM|^2\,, \\ |BM|^2 &= b^2 + m^2 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Zbrojimo (3.4) i (3.5) te dobijemo

$$\begin{aligned}
|AN|^2 + |BM|^2 &= a^2 + n^2 + b^2 + m^2, \\
&= \left(a^2 + b^2\right) + \left(n^2 + m^2\right),
\end{aligned}$$

a primjenom Pitagorinog teorema na trokute ABC i MNC uočavamo da

$$|AB|^2 = a^2 + b^2 \text{ i}$$
$$|MN|^2 = m^2 + n^2$$

te zaključujemo

$$|AN|^2 + |BM|^2 = \left(a^2 + b^2\right) + \left(n^2 + m^2\right) = |AB|^2 + |MN|^2 ,$$

a time je tvrdnja i dokazana. □

Sada ćemo dokazati teorem koji se pojavio na općinskom natjecanju školske godine 2000./2001. za treći razred srednje škole.

Teorem 3.2.3. *[5] U ravnini su dane dvije različite točke A i B. Dokažite da se skup točaka M, takvih da je*

$$\left||MA|^2 - |MB|^2\right| = kP\left(\triangle MAB\right),$$

gdje je $k > 0$ *dana konstanta i* $P\left(\triangle MAB\right)$ *površina trokuta MAB, sastoji od dva pravca.*

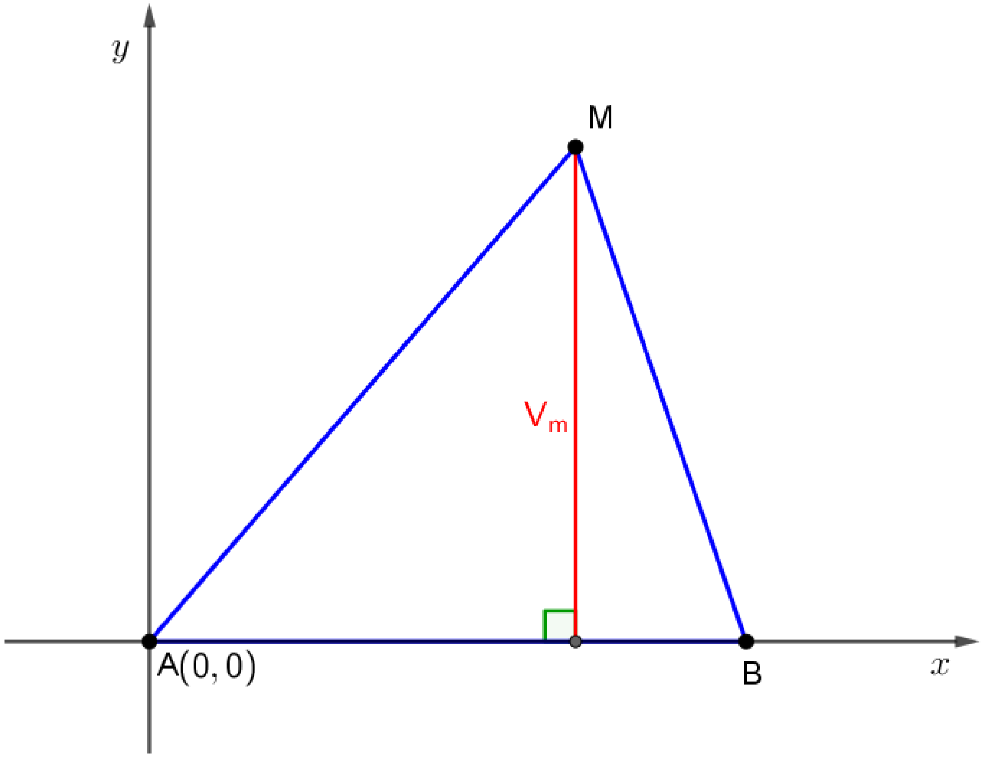
Dokaz. Smjestimo pravokutni trokut ABC u koordinatni sustav tako da vrh A bude u ishodištu, tj. $A\left(0, 0\right)$.

Stranicu $\overline{AB}$ smjestimo na apscisu i vrh B označimo sa $B\left(a, 0\right)$ tako da je $a > 0$.

Točku M odredimo proizvoljno i označimo ju sa $M\left(x, y\right)$.

Uočavamo da je ordinata točke M jednaka duljini visine v_M spuštenoj iz vrha M na stranicu $\overline{AB}$ pa možemo odrediti površinu trokuta ABM:

$$P\left(\triangle MAB\right) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot v_m = \frac{1}{2} \cdot a \cdot |y| .$$



Slika 3.7: Trokut ABM

Odrdimo sada udaljenosti $|MA|$, $|MB|$ pomoću teorema 1.4.4 i dobijemo

$$\begin{aligned} |MA| &= \sqrt{x^2 + y^2}, \\ |MB| &= \sqrt{(x-a)^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Uvrstimo dobivene udaljenosti u $\left||MA|^2 - |MB|^2\right|$ i dobijemo

$$\begin{aligned} \left||MA|^2 - |MB|^2\right| &= \left|x^2 + y^2 - x^2 + 2xa - a^2 - y^2\right|, \\ &= \left|2xa - a^2\right| = a\,|2x - a|\,. \end{aligned}$$

Iz uvjeta teorema slijedi

$$\begin{aligned} \left||MA|^2 - |MB|^2\right| &= a\,|2x - a| = \frac{1}{2} \cdot a \cdot |y|\,, \\ |2x - a| &= \frac{k \cdot |y|}{2} \end{aligned}$$

te sada prethodnu jednakost razdvojimo na 2 slučaja:

1. **slučaj:**

$$\begin{aligned} 2x - a &= \frac{ky_1}{2}, \\ y_1 &= \frac{4}{5}x - \frac{2a}{k}. \end{aligned}$$

2. **slučaj:**

$$\begin{aligned} 2x - a &= -\frac{ky_2}{2}, \\ y_2 &= -\frac{4}{5}x + \frac{2a}{k}. \end{aligned}$$

Uočavamo da smo dobili jednadžbe dvaju pravca $y_1 = \frac{4}{5}x - \frac{2a}{k}$ i $y_2 = -\frac{4}{5}x + \frac{2a}{k}$.

□

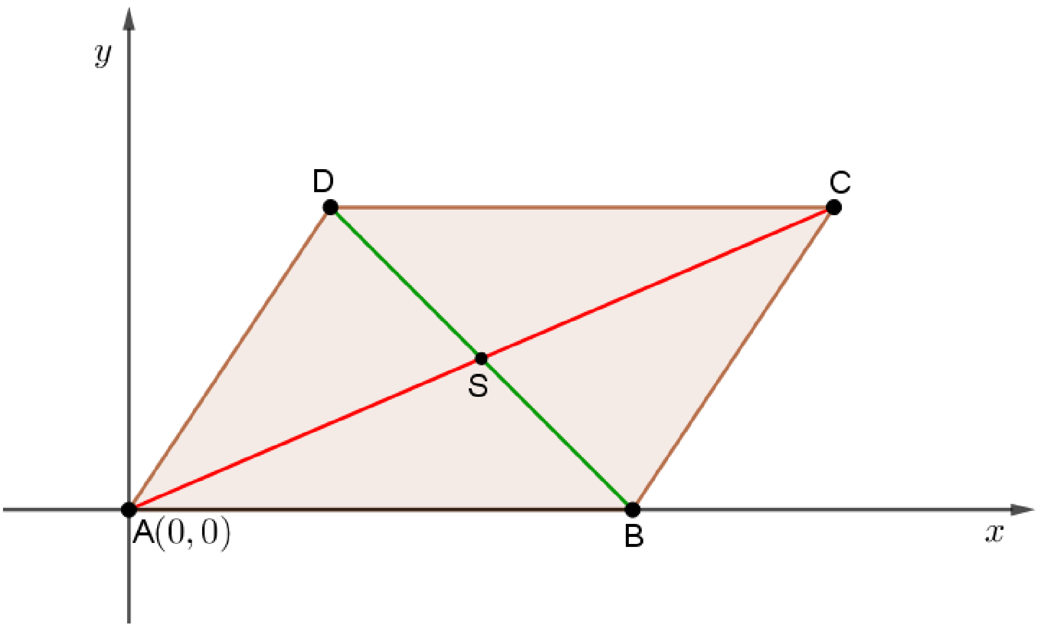
Poglavlje 4

Teoremi o četverokutu

Teorem 4.0.1. *Zbroj kvadrata duljina dijagonala paralelograma jednak je zbroju kvadrata duljina stranica paralelograma.*

Ovu tvrdnju nazivamo **Eulerova relacija**.

Dokaz.



Slika 4.1: Paralelogram $ABCD$

Smjestimo paralelogram $ABCD$ u koordinatni sustav tako da vrh A bude u ishodištu, tj. $A\,(0,0)$, a stranicu $\overline{AB}$ smjestimo na apscisnu os i točku B označimo sa $B\,(b,0)$.

Neka je točka D označena sa $D(x_D, y_D)$, a znamo da je ordinata točke D jednaka ordinati točke C pa pišemo $y_D = y_C$. Točki C znamo da je apscisa jednaka $x_C = x_D + b$ pa možemo točku C označiti sa $C(x_D + b, y_D)$.

Prvo ćemo odrediti duljine dijagonala $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ paralelograma $ABCD$:

$$\begin{aligned} |AC| &= \sqrt{(x_D + b)^2 + y_D^2}, \\ |BD| &= \sqrt{(x_D - b)^2 + y_D^2}. \end{aligned}$$

Odredimo sada zbroj kvadrata duljina dijagonala paralelograma, tj. $|AC|^2 + |BD|^2$ pomoću prethodno dobivenih duljina dijagonala paralelograma:

$$\begin{aligned} |AC|^2 + |BD|^2 &= (x_D + b)^2 + y_D^2 + (x_D - b)^2 + y_D^2, \\ &= x_D^2 + 2bx_D + b^2 + 2y_D^2 + x_D^2 - 2bx_D + b^2, \\ &= x_D^2 + 2y_D^2 + 2b^2. \end{aligned}$$

S obzirom da je četverokut $ABCD$ paralelogram znamo da vrijedi

$$|AB| = |CD| \text{ i } |BC| = |AD|.$$

Pronađimo duljine stranica paralelograma, tj. duljine stranica $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ pomoću teorema 1.4.2:

$$\begin{aligned} |AB| &= \sqrt{b^2} = \pm b, \\ |BD| &= \sqrt{(x_D + b - b)^2 + y_D^2} = \sqrt{x_D^2 + y_D^2}. \end{aligned}$$

Odredimo zbroj kvadrata duljina stranica paralelograma, tj.

$$|AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |AD|^2 = 2\left(|AB|^2 + |BC|^2\right),$$

uz pomoć prethodno dobivenik duljina stranica paralelograma i dobivamo

$$2\left(|AB|^2 + |BC|^2\right) = x_D^2 + 2y_D^2 + 2b^2.$$

Uočavamo da vrijedi

$$|AC|^2 + |BD|^2 = 2\left(|AB|^2 + |BC|^2\right) = x_D^2 + 2y_D^2 + 2b^2$$

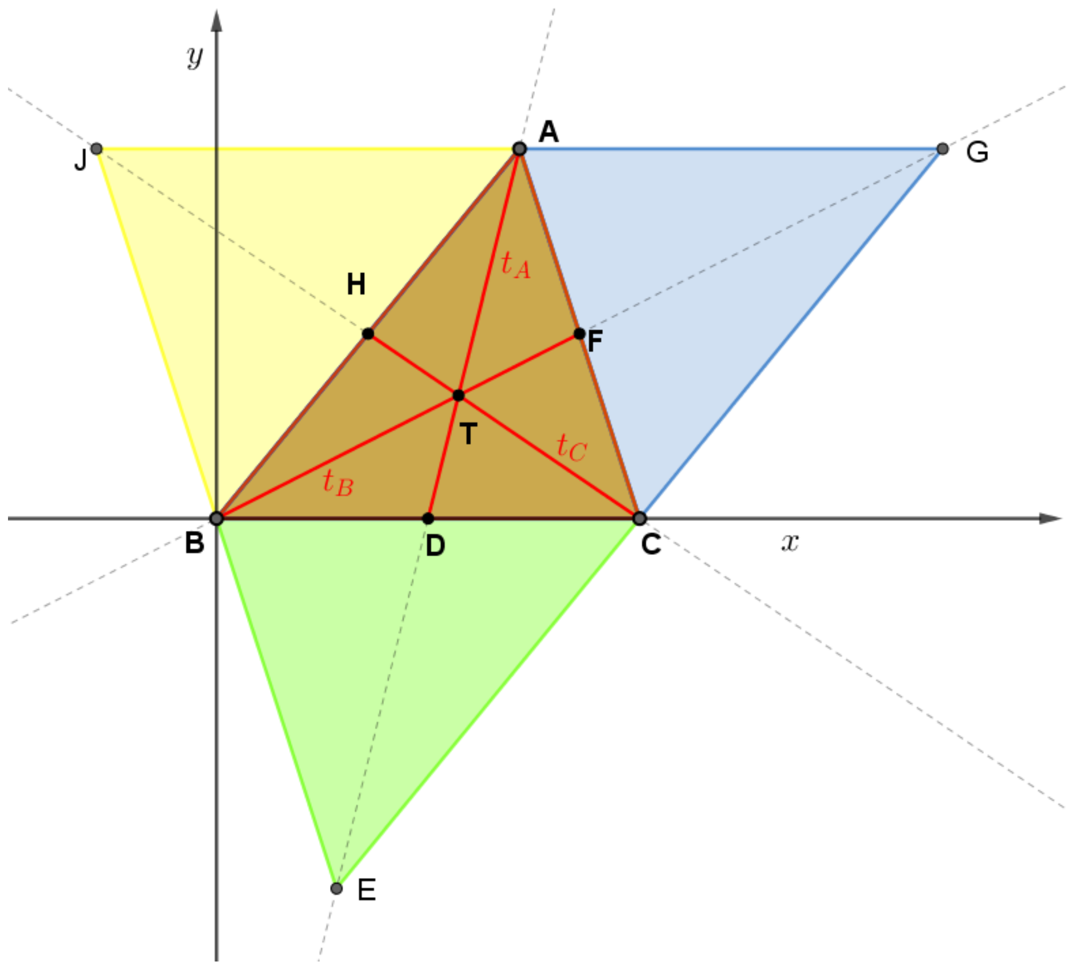
te je time dokazana tvrdnja teorema. □

Primjer 4.0.2. *[2] Za paralelogram vrijedi Eulerova relacija,*
(i) izrazite duljine težišnica trokuta u funkciji duljina stranica trokuta,
(ii) dokažite da je zbroj kvadrata duljina težišnica trokuta jednak $\frac{3}{4}$ zbroja kvadrata duljina stranica trokuta.

Rješenje primjera:

(i) Smjestimo trokut ABC u koordinatni sustav tako da vrh B bude u ishodištu, tj. $B\,(0,0)$.

Stranicu $\overline{BC}$ smjestimo na apscisnu os i točku B označimo sa $B\,(b,0)$, a točku A označimo sa $A\,(x_A, y_A)$.



Slika 4.2: Trokut ABC sa težišnicama

Neka je točka D polovište stranice $\overline{BC}$, točka F polovište stranice $\overline{AC}$ i točka H polovište stranice $\overline{AB}$.

Duljinu težišnice $\overline{AD}$ označimo sa t_A, duljinu težišnice $\overline{BF}$ označimo sa t_B i duljinu težišnice $\overline{CH}$ označimo sa t_C.

Težišnicu $\overline{AD}$ produljimo preko točke D do točke E za njenu duljinu t_A. Tada je četverokut $ABEC$ paralelogram i na njega primjenimo Eulerovu relaciju i dobijemo:

$$|AE|^2 + |BC|^2 = 2\left(|AC|^2 + |AB|^2\right),$$

pri čemu znamo da je

$$|AE| = 2\,|AD| = t_A$$

pa onda imamo

$$\begin{aligned}(2t_A)^2 + |BC|^2 &= 2\left(|AC|^2 + |AB|^2\right),\\ t_A &= \sqrt{\frac{1}{4}}\cdot\sqrt{2\left(|AC|^2 + |AB|^2\right) - |BC|^2},\\ t_A &= \frac{1}{2}\sqrt{2\,|AC|^2 + 2\,|AB|^2 - |BC|^2}.\end{aligned}$$

Analogno sada izrazimo t_B tako da produljimo sada preko F težišnicu $\overline{BF}$ za njenu duljinu t_B do točke G. Tada je četverokut $ABCG$ paralelogram i na njega primjenimo Eulerovu relaciju i dobijemo:

$$|BG|^2 + |AC|^2 = 2\left(|BC|^2 + |AB|^2\right),$$

pri čemu znamo da je

$$|BG| = 2\,|BF| = t_B$$

pa onda imamo

$$t_B = \frac{1}{2}\sqrt{2\,|BC|^2 + 2\,|AB|^2 - |AC|^2}.$$

Težišnicu $\overline{CH}$ produljimu preko H do J za njenu duljinu t_C. Tada je četverokut $AJBC$ paralelogram i na njega primjenimo Eulerovu relaciju i dobijemo:

$$|CJ|^2 + |BA|^2 = 2\left(|BC|^2 + |AC|^2\right),$$

pri čemu znamo da je

$$|CJ| = 2\,|CH| = t_C$$

pa onda imamo

$$t_C = \frac{1}{2}\sqrt{2\,|BC|^2 + 2\,|AC|^2 - |AB|^2}.$$

Time su izražene sve duljine težišnica trokuta u funkciji duljina stranica trokuta, tj. dokazana je tvrdnja (i).

(ii)

Dokaz. S obzirom da znamo iz (i)

$$t_A = \frac{1}{2}\sqrt{2\,|AC|^2 + 2\,|AB|^2 - |BC|^2}, \tag{4.1}$$

$$t_B = \frac{1}{2}\sqrt{2\,|BC|^2 + 2\,|AB|^2 - |AC|^2}, \tag{4.2}$$

$$t_C = \frac{1}{2}\sqrt{2\,|BC|^2 + 2\,|AC|^2 - |AB|^2}, \tag{4.3}$$

zbrojimo (4.1) i (4.2) i (4.3) i dobijemo

$$\begin{aligned} 4\left(t_A^2 + t_B^2 + t_C^2\right) &= 3\left(|BC|^2 + |AC|^2 + |AB|^2\right), \\ t_A^2 + t_B^2 + t_C^2 &= \frac{3}{4}\left(|BC|^2 + |AC|^2 + |AB|^2\right), \end{aligned}$$

a time je dokazana tvrdnja (ii).

□

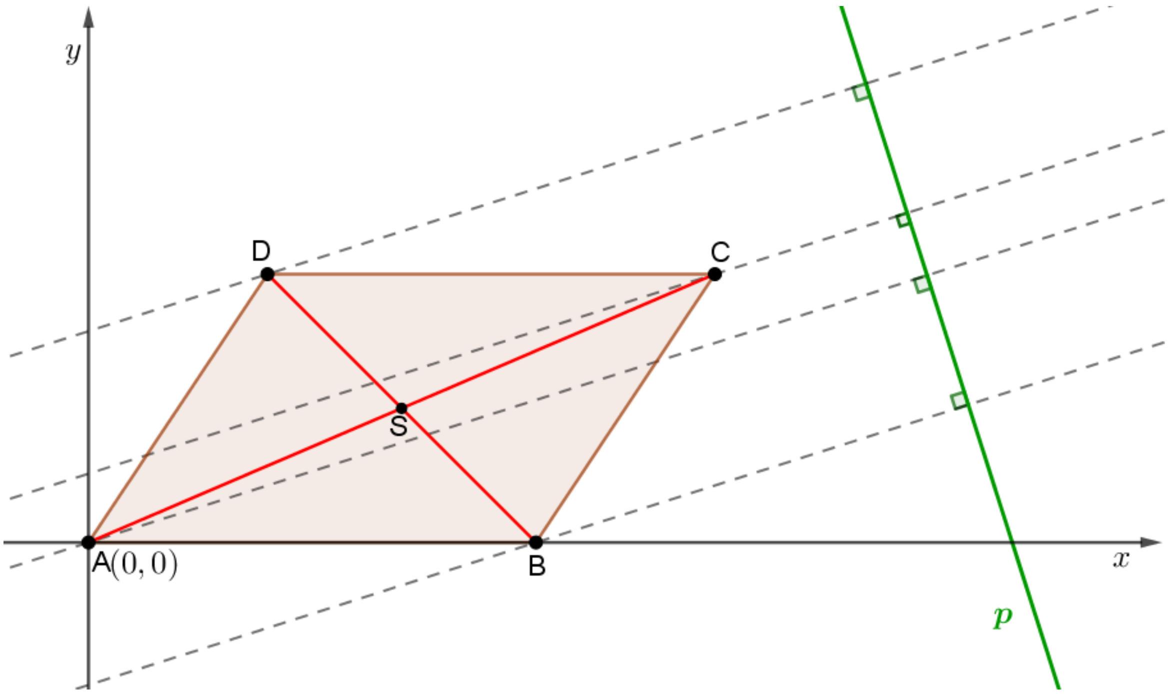
Teorem 4.0.3. *[2] U ravnini je zadan paralelogram ABCD i pravac p koji nema zajedničkih točaka s paralelogramom. Dokažite da je zbroj udaljenosti točaka A i C od pravca p jednak zbroju udaljenosti točaka B i D od pravca p.*

Dokaz. Smjestimo paralelogram $ABCD$ u koordinatni sustav tako da vrh A bude u ishodištu, tj. $A\,(0,0)$, a stranicu $\overline{AB}$ smjestimo na apscisnu os i točku B označimo sa $B\,(b,0)$.

Neka je točka D označena sa $D\,(x_D, y_D)$, a znamo da je ordinata točke D jednaka ordinati točke C pa pišemo $y_D = y_C$. Točki C znamo da je apscisa jednaka $x_C = x_D + b$ pa možemo točku C označiti sa $C\,(x_D + b, y_D)$.

Pravac p odredimo proizvoljno u koordinatnom sustavu tako da paralelogram $ABCD$ i pravac p nemaju zajedničkih točaka.

Neka je $Ax + By + c = 0$ jednadžba pravca p.



Slika 4.3: Paralelogram $ABCD$ i pravac p

Odredimo udaljenosti vrhova paralelograma do pravca p uz pomoć teorema 1.4.5.

Tada je udaljenost točke $A(0,0)$ do prvaca p jednaka

$$d(A,p) = \frac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Udaljenost točke $B(b,0)$ do prvaca p jednaka je

$$d(B,p) = \frac{|Ab+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Udaljenost točke $C(x_D+b, y_D)$ do pravca p jednaka je

$$d(C,p) = \frac{|A(x_D+by_D)+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Udaljenost točke $D(x_D, y_D)$ do pravca p jednaka je

$$d(D,p) = \frac{|Ax_D+By_D+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Sve su točke A, B, C, D u istoj poluravnini određenoj s pravcem p pa su sve apsolutne vrijednosti ili upravo jednake danim izrazima ili su suprotne.

U oba slučaja dobivamo

$$d(A,p) + d(C,p) = d(B,p) + d(D,p) = \frac{|Ax_D + Ab + By_D + 2C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

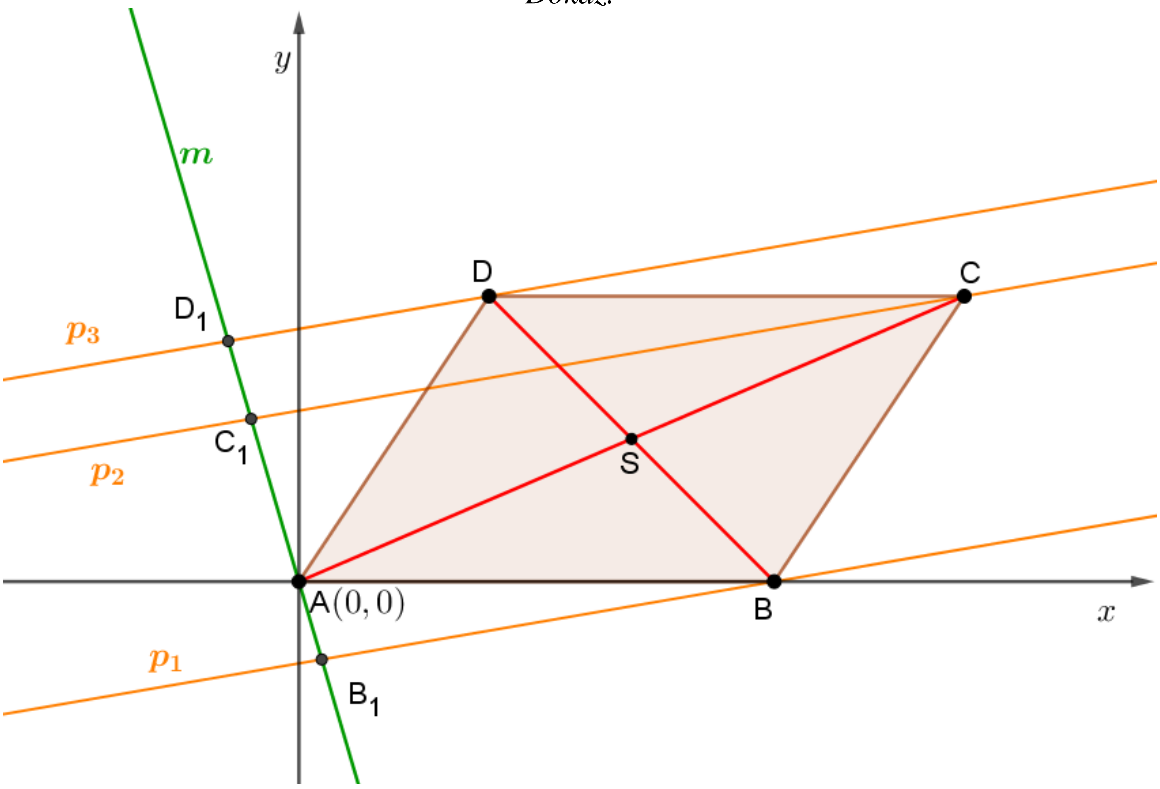
te je time tvrdnja teorema dokazana. □

Teorem 4.0.4. *[2] Zadan je paralelogram $ABCD$ i tri usporedna pravca vrhovima B, C i D te pravac m vrhom A koji usporedne pravce siječe u točkama B_1, C_1, D_1. Dokažite da vrijedi*

$$|CC_1| = |BB_1| + |DD_1|,$$

ako m i paralelogram nemaju drugih točaka zajedničkih osim A.

Dokaz.



Slika 4.4: Paralelogram $ABCD$ i pravac m

Smjestimo paralelogram $ABCD$ u koordinatni sustav tako da vrh A bude u ishodištu, tj. $A\,(0,0)$, a stranicu $\overline{AB}$ smjestimo na apscisnu os i točku B označimo sa $B\,(b,0)$.

Neka je točka D označena sa $D\,(x_D, y_D)$, a znamo da je ordinata točke D jednaka ordinati točke C pa pišemo $y_D = y_C$. Točki C znamo da je apscisa jednaka $x_C = x_D + b$ pa možemo točku C označiti sa $C\,(x_D + b, y_D)$.

Tri paralelna pravca koji prolaze vrhovima B, C i D označimo redom sa $p_1,\ p_2,\ p_3$.

Označimo pravac m koji prolazi kroz vrh A proizvoljno, te točke B_1, C_1, D_1 sa $B_1\,(x_{B_1}, y_{B_1})$, $C_1\,(x_{C_1}, y_{C_1})$, $D_1\,(x_{D_1}, y_{D_1})$ kao sjecišta usporednih pravaca $p_1,\ p_2,\ p_3$ sa pravcem m.

Odredimo jednadžbu pravca m kroz točku A i koeficijent smjera $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ pomoću teorema 1.4.3

$$m\ ...\ y = ax.$$

Sada ćemo odrediti jednadžbe pravaca p_1, p_2, p_3 ako je koeficijent smjera jednak $k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Bez smanjenja općenitosti uzet ćemo da je $k > 0$.

Pravac p_1 prolazi točkom B pa njegova jednadžba pravca glasi

$$y = kx - kb\ ...\ p_1.$$

Pravac p_2 prolazi točkom C pa njegova jednadžba pravca glasi

$$\begin{aligned} y - y_D &= k\,(x - x_D - b)\,, \\ y &= kx - kx_D - kb + y_D\ ...\ p_2. \end{aligned}$$

Pravac p_3 prolazi točkom D pa njegova jednadžba pravca glasi

$$\begin{aligned} y - y_D &= k\,(x - x_D)\,, \\ y &= kx - kx_D + y_D\ ...\ p_3. \end{aligned}$$

Nadalje, odredimo koordinate točaka $B_1,\ C_1,\ D_1$.

Presjek pravaca p_1 i m daje koordinate točke B_1, tj. $p_1 \cap m = \{B_1\}$ pa imamo

$$\begin{aligned} kx_{B_1} - kb &= ax_{B_1}, \\ x_{B_1} &= \frac{bk}{k-a}. \end{aligned}$$

Ordinata točke B_1 jednaka je

$$y_{B_1} = \frac{abk}{k-a}$$

pa je time određena točka $B_1 = \left(\frac{bk}{k-a}, \frac{abk}{k-a}\right)$.

Presjek pravaca p_2 i m daje koordinate točke C_1, tj. $p_2 \cap m = \{C_1\}$ pa imamo

$$\begin{aligned} kx_{C_1} - kx_D - kb + y_D &= ax_{C_1}, \\ x_{C_1} &= \frac{kx_D + kb - y_D}{k-a}. \end{aligned}$$

Ordinata točke C_1 jednaka je

$$y_{C_1} = \frac{a\left(kx_D + kb - y_D\right)}{k-a}$$

pa je time određena točka $C_1 = \left(\frac{kx_D + kb - y_D}{k-a}, \frac{a\left(kx_D + kb - y_D\right)}{k-a}\right)$.

Presjek pravaca p_3 i m daje koordinate točke D_1, tj. $p_3 \cap m = \{D_1\}$ pa imamo

$$\begin{aligned} kx_{D_1} - kx_D + y_D &= ax_{D_1}, \\ x_{D_1} &= \frac{kx_D - y_D}{k-a}. \end{aligned}$$

Ordinata točke D_1 jednaka je

$$y_{D_1} = \frac{a\left(kx_D - y_D\right)}{k-a}$$

pa je time određena točka $D_1 = \left(\frac{kx_D - y_D}{k-a}, \frac{a\left(kx_D - y_D\right)}{k-a}\right)$.

Odredimo sada udaljenost od točke B do točke B_1 pomoću teorema 1.4.4

$$d\left(B, B_1\right) = \sqrt{\left(\frac{kb}{k-a} - b\right)^2 + \left(\frac{abk}{k-a}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{ab}{k-a}\right)^2 + \left(\frac{abk}{k-a}\right)^2}.$$

Udaljenost od točke D do točke D_1 određena je sa

$$\begin{aligned} d\left(D, D_1\right) &= \sqrt{\left(\frac{kx_D - y_D}{k-a} - x_D\right)^2 + \left(\frac{akx_D - ay_D}{k-a} - y_D\right)^2}, \\ &= \sqrt{\left(\frac{ax_D - y_D}{k-a}\right)^2 + \left(\frac{akx_D - ky_D}{k-a}\right)^2}. \end{aligned}$$

Odredimo sada $d(B,B_1)+d(D,D_1)$:

$$\begin{aligned}
d(B,B_1)+d(D,D_1) &= \sqrt{\left(\frac{ab}{k-a}\right)^2+\left(\frac{abk}{k-a}\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{ax_D-y_D}{k-a}\right)^2+\left(\frac{akx_D-ky_D}{k-a}\right)^2},\\
&= \sqrt{\frac{1}{(k-a)^2}}\cdot\sqrt{a^2b^2+a^2b^2k^2},\\
&+ \sqrt{\frac{1}{(k-a)^2}}\cdot\sqrt{a^2x_D^2-2ax_Dy_D+y_D^2+a^2k^2x_D^2-2ak^2x_Dy_D+k^2y_D^2},\\
&= \frac{1}{|k-a|}\cdot\sqrt{a^2b^2\left(1+k^2\right)}\\
&+ \frac{1}{|k-a|}\cdot\sqrt{a^2x_D^2\left(1+k^2\right)+y_D^2\left(1+k^2\right)-2ax_Dy_D\left(1+k^2\right)},\\
&= \frac{1}{|k-a|}\left(|ab|\cdot\sqrt{1+k^2}+\sqrt{a^2x_D^2+y_D^2-2ax_Dy_D}\cdot\sqrt{1+k^2}\right),\\
&= \frac{1}{k-a}\left(-ab\cdot\sqrt{1+k^2}+\sqrt{(ax_D-y_D)^2}\cdot\sqrt{1+k^2}\right),\\
&= \frac{-ax_D-ab+y_D}{k-a}\cdot\sqrt{1+k^2},
\end{aligned}$$

tj. dobili smo

$$d(B,B_1)+d(D,D_1)=\frac{-ax_D-ab+y_D}{k-a}\cdot\sqrt{1+k^2}.$$

Odredimo sada udaljenost od točke C do točke C_1

$$\begin{aligned}
d(C,C_1) &= \sqrt{\left(\frac{kx_D+bk-y_D}{k-a}-x_D-b\right)^2+\left(\frac{akx_D+abk-ay_D}{k-a}-y_D\right)^2},\\
&= \sqrt{\left(\frac{ax_D-y_D+ab}{k-a}\right)^2+\left(\frac{akx_D+abk-ky_D}{k-a}\right)^2},\\
&= \sqrt{\frac{(ax_D-y_D+ab)^2}{(k-a)^2}+\frac{k^2\left(ax_D+ab-y_D\right)^2}{(k-a)^2}},\\
&= \sqrt{\frac{(ax_D+ab-y_D)^2}{(k-a)^2}\cdot\left(1+k^2\right)},\\
&= \left|\frac{ax_D+ab-y_D}{k-a}\right|\cdot\sqrt{1+k^2},\\
&= \frac{-ax_D-ab+y_D}{k-a}\cdot\sqrt{1+k^2},
\end{aligned}$$

tj. dobili smo

$$d(C, C_1) = \frac{-ax_D - ab + y_D}{k - a} \cdot \sqrt{1 + k^2}.$$

Uočavamo

$$|CC_1| = |BB_1| + |DD_1|,$$

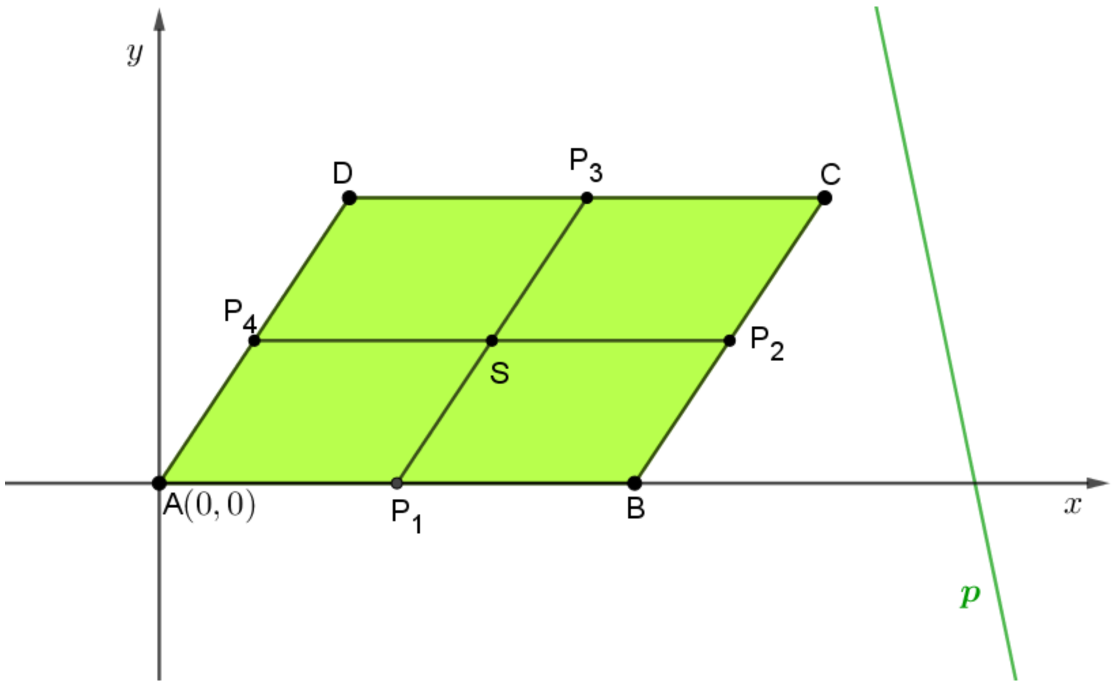
a time je naša tvrdnja dokazana.

□

Teorem 4.0.5. *[2] Dokažite da je zbroj udaljenosti vrhova paralelograma $ABCD$ od nekog pravca p jednak četverostrukoj udaljenosti sjecišta spojnica polovišta nasuprotnih stranica paralelograma od istog pravca p.*

Dokaz. Smjestimo paralelogram $ABCD$ u koordinatni sustav tako da vrh A bude u ishodištu, tj. $A(0, 0)$, a stranicu $\overline{AB}$ smjestimo na apscisnu os i točku B označimo sa $B(b, 0)$.

Neka je točka D označena sa $D(x_D, y_D)$, a znamo da je ordinata točke D jednaka ordinati točke C pa pišemo $y_D = y_C$. Točki C znamo da je apscisa jednaka $x_C = x_D + b$ pa možemo točku C označiti sa $C(x_D + b, y_D)$. Označimo pravac p proizvoljno.



Slika 4.5: Paralelogram $ABCD$ i pravac p

Neka je točkaP_1 polovište stranice $\overline{AB}$, točka P_2 polovište stranice $\overline{BC}$, točka P_3 polovište stranice $\overline{CD}$ i točka P_4 polovište stranice $\overline{AD}$. Sa S označimo sjecište spojnica $\overline{P_1P_3}$ i $\overline{P_2P_4}$.

Jednadžba pravca p je
$$y = kx + l, \text{ gdje je } k, l \in \mathbb{R}.$$
Odredimo sada koordinate točaka P_1, P_2, P_3 i P_4 pomoću teorema 1.4.1 i dobijemo
$$P_1\left(\frac{b}{2}, 0\right),\ P_2\left(\frac{x_D + 2b}{2}, \frac{y_D}{2}\right),$$
$$P_3\left(\frac{2x_D + b}{2}, y_D\right),\ P_4\left(\frac{x_D}{2}, \frac{y_D}{2}\right).$$
Točku S odredit ćemo tako da pronađemo presjek pravaca P_1P_3 i P_2P_4.

Jednadžbu pravca P_1P_3 odredimo pomoću teorema 1.4.2 i dobijemo
$$\begin{aligned} y - 0 &= \frac{y_D}{\frac{2x_D+b}{2} - \frac{b}{2}}\left(x - \frac{b}{2}\right), \\ y &= \frac{y_D}{x_D}x - \frac{by_D}{2x_D} \ \ldots\ P_1P_3. \end{aligned}$$
Jednadžba pravca P_2P_4 glasi
$$y = \frac{y_D}{2} \ \ldots\ P_2P_4.$$
Koordinte točke S dobit ćemo gledajući $P_1P_3 \cap P_2P_4 = \{S\}$, tj. dobijemo
$$\begin{aligned} \frac{y_D}{2} &= \frac{y_D}{x_D}x_S - \frac{by_D}{2x_D}, \\ x_S &= \frac{x_D + b}{2}, \end{aligned}$$
a ordinata točke S jednaka je
$$y_S = \frac{y_D}{2},$$
tj. točka S je određena sa $S\left(\frac{x_D + b}{2}, \frac{y_D}{2}\right)$.

Udaljenost točke S do pravca P odredimo pomoću teorema 1.4.5 i dobijemo
$$\begin{aligned} d(S, p) &= \frac{\left|\frac{kx_D+bk}{2} - \frac{y_D}{2} + l\right|}{\sqrt{k^2 + 1}}, \\ &= \frac{|kx_D + kb - y_D + 2l|}{2\sqrt{k^2 + 1}}. \end{aligned}$$

Analogno izrčunajmo udaljenosti od vrhova paralelograma do pravca p:

$$\begin{aligned} d\,(A, p) &= \frac{|l|}{\sqrt{k^2+1}}, \\ d\,(B, p) &= \frac{|bk+l|}{\sqrt{k^2+1}}, \\ d\,(C, p) &= \frac{|kx_D + bk - y_D + l|}{\sqrt{k^2+1}}, \end{aligned}$$

$$d\,(D, p) = \frac{|kx_D - y_D + l|}{\sqrt{k^2+1}}.$$

Odredimo sada zbroj udaljenosti vrhova paralelograma do pravca p i označimo ju sa D:

$$\begin{aligned} d &= d\,(A, p) + d\,(B, p) + d\,(C, p) + d\,(D, p)\,, \\ &= \frac{l}{\sqrt{k^2+1}} + \frac{bk+l}{\sqrt{k^2+1}} + \frac{kx_D + bk - y_D + l}{\sqrt{k^2+1}} + \frac{kx_D - y_D + l}{\sqrt{k^2+1}}, \\ &= \frac{1}{\sqrt{k^2+1}} \cdot (l + bk + l + kx_D + bk - y_D + l + kx_D - y_D + l)\,, \\ &= \frac{1}{\sqrt{k^2+1}} \cdot (2kx_D + 2bk - 2y_D + 4l)\,, \\ &= \frac{2}{\sqrt{k^2+1}} \cdot (kx_D + bk - y_D + 2l)\,. \end{aligned}$$

Uočavamo da je

$$\begin{aligned} 2d\,(S, p) &= \frac{d}{2}, \\ d &= 4d\,(S, p)\,, \end{aligned}$$

tj. da vrijedi

$$d\,(A, p) + d\,(B, p) + d\,(C, p) + d\,(D, p) = 4d\,(S, p)\,,$$

što je zapravo naša tvrdnja teorema i time je dokaz završen.

□

Poglavlje 5

Svojstva krivulja drugog reda

5.1 Elipsa

U ovom odlomku dokazivat ćemo svojstva elipse koordinatnom metodom pa ćemo prvo definirati elipsu.

Definicija 5.1.1. *Neka su F_1, F_2 dvije čvrste točke ravnine π i $a \in \mathbb{R}^+$, $a > \frac{1}{2}|F_1F_2|$. Skup svih točaka ravnine π za koje je zbroj udaljenosti do točaka F_1 i F_2 jednak $2a$ nazivamo **elipsa** s fokusima (žarištima) F_1 i F_2 i duljinom velike poluosi a.*

Teorem 5.1.2. *Nožište okomica spuštenih iz oba žarišta elipse na tangentu elipse leže na kružnici k sa središtem O i radijusom a, tj. $k(O, a)$. Tu kružnicu nazivamo **glavna kružnica elipse**.*

Dokaz. S obzirom da znamo definiciju 5.1.1 elipse, smjestimo elipsu u koordinatni sustav tako da je točka $O(0,0)$ ishodište elipse.

Koordinate fokusa neka su $F_1(-e, 0)$ i $F_2(e, 0)$, a točku elipse označimo sa $T(x_0, y_0)$.

Odredimo jednadžbu tangente t na elipsu u točki $T(x_0, y_0)$:

$$\begin{aligned}
\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} &= 1 / \cdot a^2b^2, \\
b^2xx_0 + a^2yy_0 &= a^2b^2, \\
y &= -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}x + \frac{b^2}{y_0}.
\end{aligned}$$

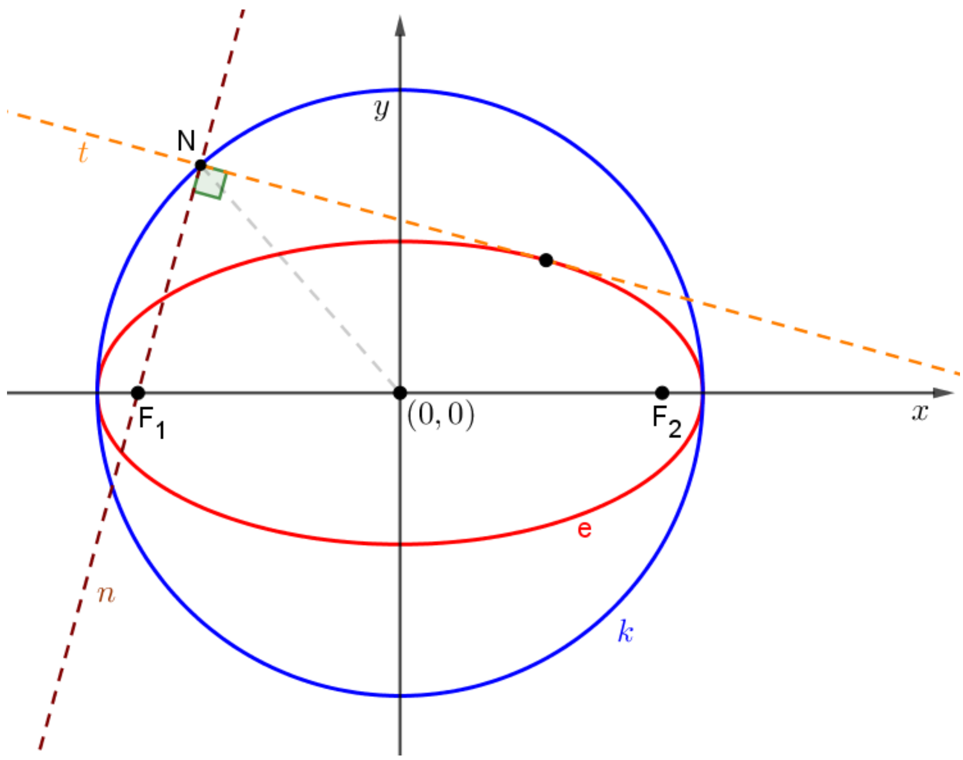
Jednadžba tangente na elipsu u točki T glasi

$$t \ldots y = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} x + \frac{b^2}{y_0},$$

ukoliko je zadovoljen uvjet $b^2 x_0^2 + a^2 y_0^2 = a^2 b^2$ tada točka T pripada elipsi.

Odredimo sada jednadžbu okomice n na tangentu t koji prolazi fokusom $F_1(-e, 0)$ uz pomoć teorema 1.4.3 i teorema 1.4.7:

$$n \ldots y = \frac{a^2 y_0}{b^2 x_0}(x + e).$$



Slika 5.1: Elipsa i glavna kružnica elipse

Odredimo sada presjek okomice n sa tangentom t, tj. odredimo točku N

$$\frac{a^2 y_0}{b^2 x_0} x + \frac{e a^2 y_0}{b^2 x_0} = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} x + \frac{b^2}{y_0},$$

$$\begin{aligned} x\left(\frac{a^2y_0}{b^2x_0}+\frac{b^2x_0}{a^2y_0}\right) &= \frac{b^2}{y_0}-\frac{ea^2y_0}{b^2x_0}, \\ x\frac{a^4y_0^2+b^4x_0^2}{a^2b^2x_0y_0} &= \frac{b^4x_0-ea^2y_0^2}{b^2x_0y_0}, \end{aligned}$$

iz čega slijedi da je apscisa točke N jednaka

$$x_N=\frac{a^2\left(b^4x_0-ea^2y_0^2\right)}{a^4y_0^2+b^4x_0^2}.$$

Izračunajmo sada ordinatu točke N. Prvo ćemo odrediti x_N+e:

$$\begin{aligned} x_N+e &= \frac{a^2\left(b^4x_0-ea^2y_0^2\right)+e\left(a^4y_0^2+b^4x_0^2\right)}{a^4y_0^2+b^4x_0^2}, \\ &= \frac{a^2b^4x_0+eb^4x_0^2}{a^4y_0^2+b^4x_0^2}=\frac{b^4x_0\left(a^2+ex_0\right)}{a^4y_0^2+b^4x_0^2}. \end{aligned}$$

Uvrstimo sada x_N+e u jednadžbu pravca n:

$$\begin{aligned} y_N &= \frac{a^2y_0}{b^2x_0}(x+e)=\frac{a^2y_0}{b^2x_0}\cdot\frac{b^4x_0\left(a^2+ex_0\right)}{a^4y_0^2+b^4x_0^2}, \\ &= \frac{a^2b^2y_0\left(a^2+ex_0\right)}{a^4y_0^2+b^4x_0^2}. \end{aligned}$$

Ordinata točke N jednaka je

$$y_N=\frac{a^2b^2y_0\left(a^2+ex_0\right)}{a^4y_0^2+b^4x_0^2}.$$

Preostaje nam dokazati da je $d(N,O)=a$.

Odredimo sada $x_N^2+y_N^2$ uz prethodno dobivene koordinate točke N:

$$\begin{aligned} x_N^2+y_N^2 &= \frac{a^4\left(b^4x_0-ea^2y_0^2\right)^2}{\left(a^4y_0^2+b^4x_0^2\right)^2}+\frac{a^4b^4y_0^2\left(a^2+ex_0\right)^2}{\left(a^4y_0^2+b^4x_0^2\right)^2}, \\ &= \frac{a^4\left[b^8x_0^2-2b^4x_0ea^2y_0^2+e^2a^4y_0^4+b^4y_0^2\left(a^4+2a^2ex_0+e^2x_0^2\right)\right]}{\left(a^4y_0^2+b^4x_0^2\right)^2}, \end{aligned}$$

$$x_N^2 + y_N^2 = \frac{a^4\left[b^8x_0^2 + e^2a^4y_0^4 + a^4b^4y_0^2 + b^4e^2x_0^2y_0^2\right]}{\left(a^4y_0^2 + b^4x_0^2\right)^2},$$

Sada uvrstimo $e^2 = a^2 - b^2$ u prethodnu jednakost

$$\begin{aligned}
x_N^2 + y_N^2 &= \frac{a^4}{\left(a^4y_0^2 + b^4x_0^2\right)^2} \cdot \left[b^8x_0^2 + \left(a^2 - b^2\right)a^4y_0^4 + a^4b^4y_0^2 + b^4\left(a^2 - b^2\right)x_0^2y_0^2\right],\\
&= \frac{a^4}{\left(a^4y_0^2 + b^4x_0^2\right)^2} \cdot \left[b^8x_0^2 + a^6y_0^4 - a^4b^2y_0^4 + a^4b^4y_0^2 + a^2b^4x_0^2y_0^2 - b^6x_0^2y_0^2\right],
\end{aligned}$$

Iz uvjeta $b^2x_0^2 + a^2y_0^2 = a^2b^2$ uvrstimo $b^2x_0^2 = a^2b^2 - a^2y_0^2$ u prethodnu jednakost

$$\begin{aligned}
x_N^2 + y_N^2 &= \frac{a^4}{\left(a^4y_0^2 + b^4x_0^2\right)^2} \cdot \left[b^6\left(a^2b^2 - a^2y_0^2\right) + a^6y_0^4 - a^4b^2y_0^4\right] +\\
&\quad \frac{a^4}{\left(a^4y_0^2 + b^4x_0^2\right)^2} \cdot \left[a^4b^4y_0^2 + a^2b^2y_0^2\left(a^2b^2 - a^2y_0^2\right) - b^4y_0^2\left(a^2b^2 - a^2y_0^2\right)\right],\\
&= \frac{a^4}{\left(a^4y_0^2 + b^4x_0^2\right)^2} \cdot \left[b^6\left(a^2b^2 - a^2y_0^2\right) + a^6y_0^4 - a^4b^2y_0^4 + a^4b^4y_0^2\right]\\
&\quad + \frac{a^4}{\left(a^4y_0^2 + b^4x_0^2\right)^2} \cdot \left[a^2b^2y_0^2\left(a^2b^2 - a^2y_0^2\right) - b^4y_0^2\left(a^2b^2 - a^2y_0^2\right)\right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_N^2 + y_N^2 &= \frac{a^4}{\left(a^4y_0^2 + b^4x_0^2\right)^2} \cdot \left[a^2b^8 - a^2b^6y_0^2 + a^6y_0^4 - a^4b^2y_0^4 + a^4b^4y_0^2\right]\\
&\quad + \frac{a^4}{\left(a^4y_0^2 + b^4x_0^2\right)^2} \cdot \left[a^4b^4y_0^2 - a^4b^2y_0^4 - a^2b^6y_0^2 + a^2b^4y_0^4\right],\\
&= \frac{a^4}{\left(a^4y_0^2 + b^4x_0^2\right)^2} \cdot \left[a^2b^8 - 2a^2b^6y_0^2 + 2a^4b^4y_0^2 + a^6y_0^4 - 2a^4b^2y_0^4 + a^2b^4y_0^4\right],\\
&= \frac{a^4}{\left(a^4y_0^2 + b^4x_0^2\right)^2} \cdot a^2 \cdot \left[b^8 + y_0^2\left(2a^2b^4 - 2b^6\right) + y_0^4\left(a^4 + b^4 - 2a^4b^2y_0^2\right)\right],\\
&= \frac{a^6}{\left(a^4y_0^2 + b^4x_0^2\right)^2} \cdot \left[a^4y_0^2 + a^2b^4 - a^2b^2y_0^2\right]^2,
\end{aligned}$$

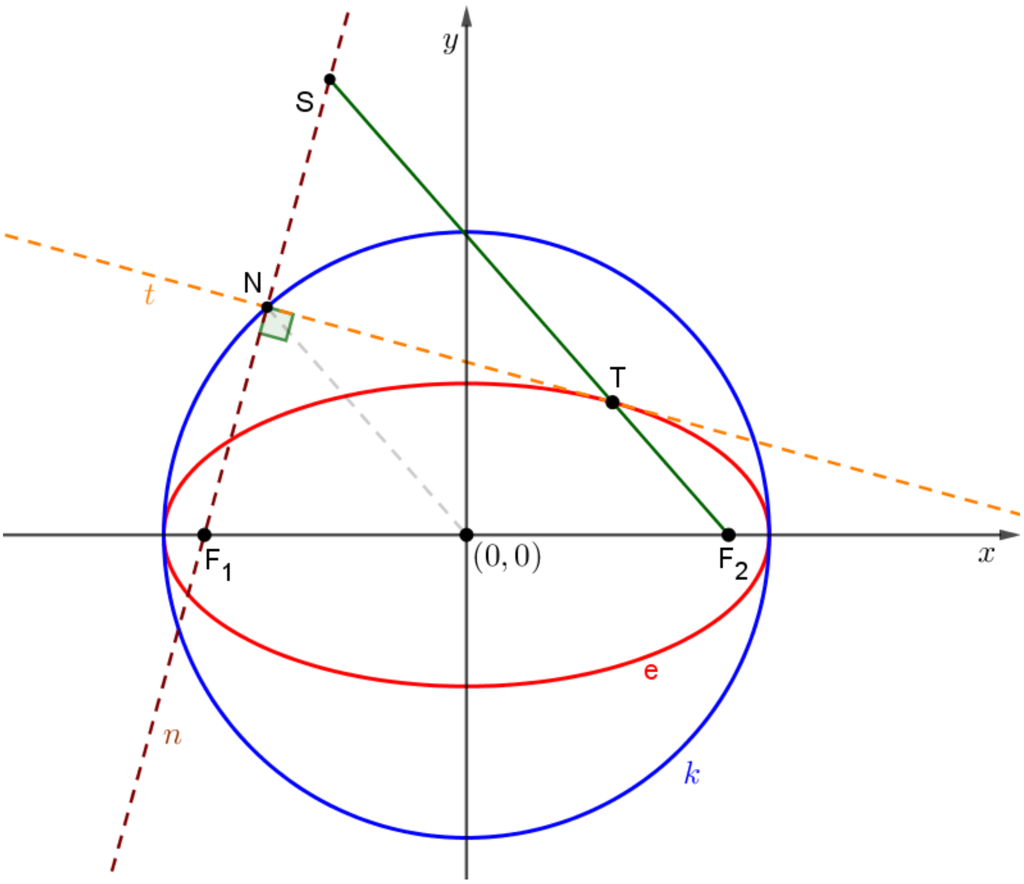
Iz uvjeta $b^2x_0^2 + a^2y_0^2 = a^2b^2$ uvrstimo $a^2b^2 - a^2y_0^2 = b^2x_0^2$ u prethodnu jednakost

$$x_N^2 + y_N^2 = \frac{a^6}{\left(a^4y_0^2 + b^4x_0^2\right)^2} \cdot \left[a^4y_0^2 + b^4x_0^2\right]^2 = a^2.$$

Dakle, dobili smo da je $x_N^2 + y_N^2 = a^2$, tj. $d\,(N, O) = a$.

□

Teorem 5.1.3. *Točka koja je simetrična jednom žarištu elipse s obzirom na tangentu elipse naziva se* ***suprotište*** *tog žarišta s obzirom na tu tangentu. Skup suprotišta jednog žarišta s obzirom na sve tangente elipse je kružnica sa sredoštem u drugom žarištu elipse i polumjera jednakog duljini glavne osi elipse. Ta se kružnica naziva* ***kružnica suprotišta*** *pripadnog žarišta.*



Dokaz.

Slika 5.2: Elipsa i kružnica suprotišta

Po definiciji 5.2.1 elipse, smjestimo elipsu u koordinatni sustav tako da su koordinate fokusa $F_1(-e, 0)$ i $F_2(e, 0)$, a točku elipse označimo sa $T(x, y)$.

Neka je pravac t tangenta na elipsu u točki T, a točka S simetrična točki F_1 s obzirom na tangentu t.

Dovoljno je dokazati da za svaki izbor tangente t zadane elipse vrijedi $d(S, F_2) = 2a$.

U teoremu 5.1.2 smo pronašli koordinate točke N.

Točka S se dobiva iz činjenice da je N polovište dužine $\overline{F_1S}$, tj. koordinate točke S su:

$$x_S = 2x_N + e \text{ i } y_S = 2y_N.$$

Pomoću Pitagorinog teorema odredimo

$$\begin{aligned} d(S, F_2)^2 &= (x_S - e)^2 + (y_S - 0)^2, \\ &= 4x_N^2 + 4y_N^2 = 4a^2, \end{aligned}$$

tj. dobili smo

$$d(S, F_2) = 2a,$$

čime je teorem dokazan.

□

5.2 Hiperbola

U ovom odlomku dokazivat ćemo svojstva hiperbole koordinatnom metodom pa ćemo prvo definirati hiperbolu.

Definicija 5.2.1. *Neka su F_1, F_2 dvije čvrste točke ravnine π i $a \in \mathbb{R}^+$, $a < \frac{1}{2}|F_1F_2|$. Skup svih točaka ravnine π za koje je razlika udaljenosti do točaka F_1 i F_2 jednak $2a$ nazivamo **hiperbola** s fokusima (žarištima) F_1 i F_2 i duljinom velike poluosi a.*

Teorem 5.2.2. *Povučemo li nekom točkom T hiperbole paralele s asimptotama, te paralele sijeku realnu os u dvije točke U i V td. vrijedi*

$$|OU| \cdot |OV| = a^2,$$

pri čemu je O centar hiperbole.

Dokaz. Smjestimo hiperbolu u koordinatni sustav tako da centar hiperbole O bude u ishodištu, tj. $O(0,0)$, a realna os hiperbole neka je na apscisi.

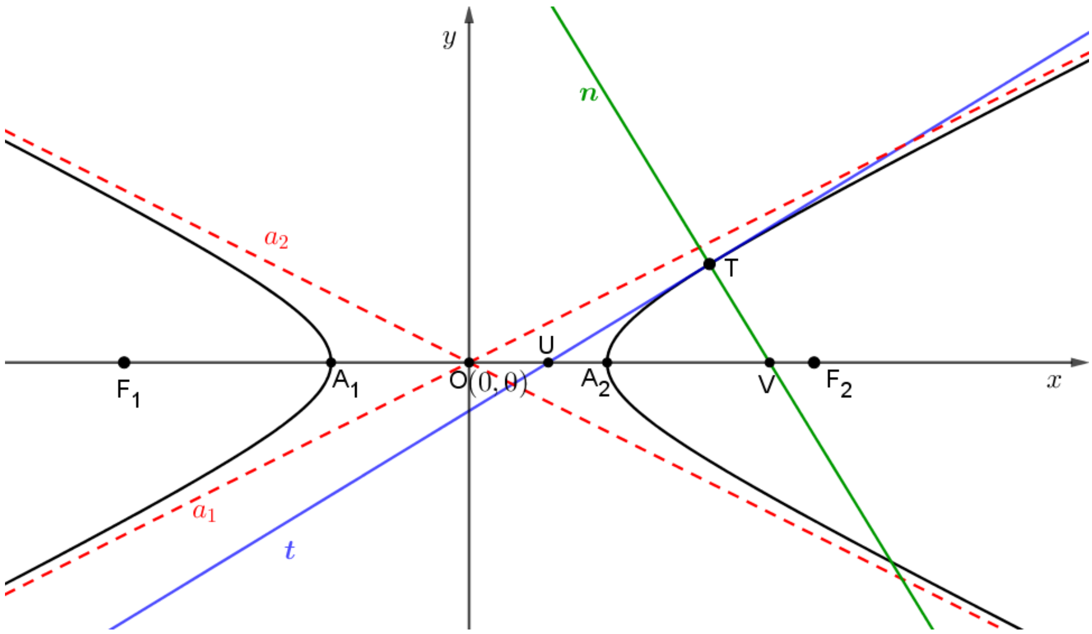
Neka se točka $T(x_0, y_0)$ nalazi na hiperboli.

Jednadžba hiperbole za ovako postavljen koordinatni sustav glasi

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Jednadžbe aspimptota hiperbole su

$$\begin{aligned} a_1 \dots y &= \frac{b}{a}x, \\ a_2 \dots y &= -\frac{b}{a}x. \end{aligned}$$



Slika 5.3: Hiperbola

Odredimo sada jednadžbu pravca koji je paralelan s a_1 i prolazi točkom $T(x_0, y_0)$ uz pomoć teorema 1.4.3:

$$y - y_0 = \frac{b}{a}(x - x_0),$$

a presjek njega s apscisom je točka $U\left(x_U, 0\right)$.

Izračunajmo sada apscisu točke U:

$$\begin{aligned}
0 - y_0 &= \frac{b}{a}\left(x - x_0\right), \\
-\frac{a}{b}y_0 &= x_U - x_0, \\
x_U &= x_0 - \frac{a}{b}y_0,
\end{aligned}$$

tj. dobivena je točka $U\left(x_0 - \frac{a}{b}y_0, 0\right)$.

Analogno odredimo jednadžbu pravca koji je paralelan s a_2 i prolazi točkom $T\left(x_0, y_0\right)$:

$$y - y_0 = -\frac{b}{a}\left(x - x_0\right),$$

a presjek njega s apscisom je točka $V\left(x_V, 0\right)$.

Izračunajmo sada apscisu točke V:

$$x_V = x_0 + \frac{a}{b}y_0,$$

tj. dobivena je točka $V\left(x_0 + \frac{a}{b}y_0, 0\right)$.

Izračunajmo sada traženi umnožak $|OU| \cdot |OV|$ i provjerimo čemu je jednak:

$$\begin{aligned}
|OU| \cdot |OV| &= |x_U| \cdot |x_V| = \left|x_0 - \frac{a}{b}y_0\right| \left|x_0 + \frac{a}{b}y_0\right|, \\
&= \left|\left(x_0 - \frac{a}{b}y_0\right)\left(x_0 + \frac{a}{b}y_0\right)\right| = \left|x_0^2 - \frac{a^2}{b^2}y_0^2\right|, \\
&= a^2 \left|\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2}\right| = a^2 \cdot 1 = a^2.
\end{aligned}$$

Time je dokazana naša tvrdnja. □

Teorem 5.2.3. *Produkt udaljenosti neke točke hiperbole od obiju asimptota je konstantan.*

Dokaz. Smjestimo hiperbolu u koordinatni sustav tako da centar hiperbole O bude u ishodištu, tj. $O(0, 0)$, a realna os hiperbole neka je na apscisi.

Neka se točka $T\,(x_0, y_0)$ nalazi na hiperboli.

Jednadžba hiperbole za ovako postavljen koordinatni sustav glasi

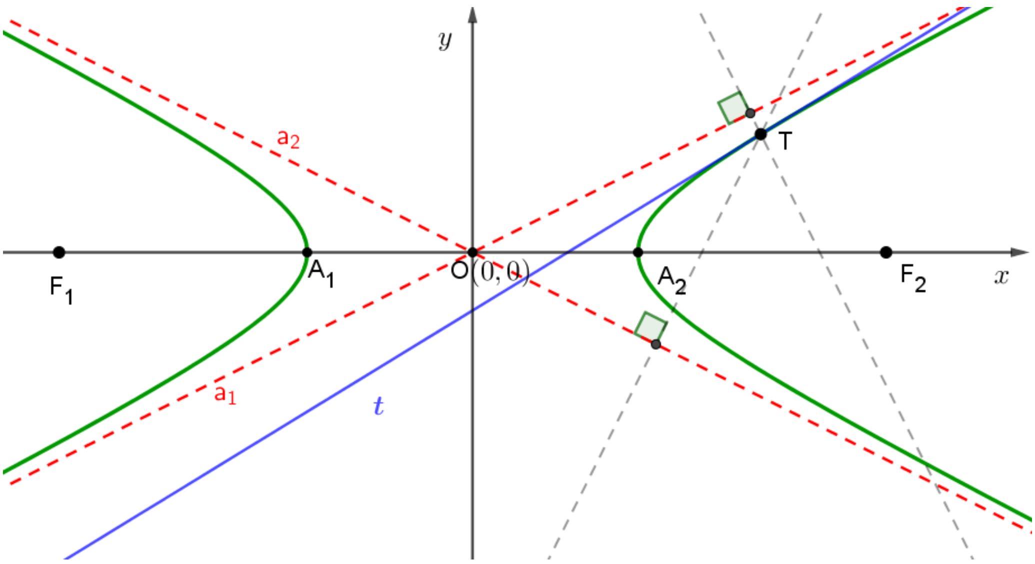
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Jednadžbe aspimptota hiperbole su

$$\begin{aligned} a_1 \,...\, y &= \frac{b}{a}x, \\ a_2 \,...\, y &= -\frac{b}{a}x. \end{aligned}$$

Uvijet koji zadovoljava točka $T\,(x_0, y_0)$ s obzirom da se nalazi na tangenti hiperbole

$$x_0^2 b^2 - y_0^2 a^2 = a^2 b^2. \tag{5.1}$$



Slika 5.4: Hiperbola

Odredimo sada udaljenost od točke T do asimotota a_1 i a_2 pomoću teorema 1.4.5

$$\begin{aligned} d\,(T, a_1) &= \frac{|bx_0 - ay_0|}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \\ d\,(T, a_2) &= \frac{|bx_0 + ay_0|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \end{aligned}$$

Promotrimo koliki je produkt udaljenosti točke T od obiju asimptota hiperbole

$$\begin{aligned} d(T,a_1)\cdot d(T,a_2) &= \frac{|bx_0-ay_0|}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{|bx_0+ay_0|}{\sqrt{a^2+b^2}}, \\ &= \frac{|(bx_0-ay_0)(bx_0+ay_0)|}{a^2+b^2}, \\ &= \frac{\left|x_0^2b^2-y_0^2a^2\right|}{a^2+b^2}, \end{aligned}$$

uvrstimo sada (5.1) u prethodnu jednakost i dobijemo

$$d(T,a_1)\cdot d(T,a_2)=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}.$$

Uočavamo, produkt udaljenosti neke točke hiperbole od obiju asimptota je konstantan s obzirom da su a i b fiksni parametri.

□

5.3 Parabola

U ovom odlomku dokazivat ćemo svojstva parabole koordinatnom metodom pa ćemo prvo definirati parabolu.

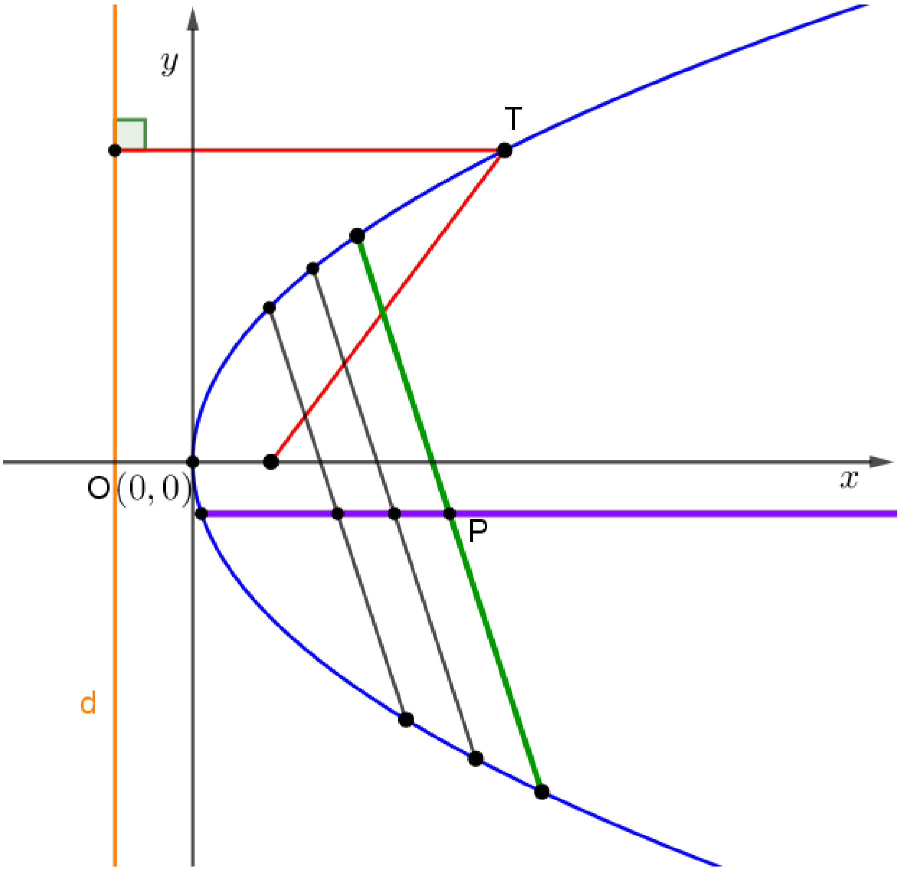
Definicija 5.3.1. *Neka su F čvrsta točka ravnine π, a r čvrsti pravac te ravnine π. Skup svih točaka ravnine π koje su jednako udaljene do točake F i do pravca r naziva se* ***parabola*** *s fokusom (žarištem) F i direktrisom (ravnalicom) r.*

Teorem 5.3.2. *Neka je dana tetiva parabole. Polovište svih tetiva paralelnih s danom tetivom čine polupravac paralelan s osi.*
Nazivamo ga ***promjerom konjugiranom*** *danoj tetivi.*
Tangenta paralelna danoj tetivi naziva se ***konjugiranom tangentom****.*

Dokaz. Smjestimo parabolu u koordinatni sustav tako da je direktrisa d udaljena od ishodišta za $\frac{p}{2}$, a fokus parabole je točka $F\left(\frac{p}{2},0\right)$.

Neka je $y=kx+l$, gdje je k fiksan, $l\in\mathbb{R}$ pramen međusobno paralelnih pravaca.

Svaki od tih pravaca presijeca parabolu u dvije točke (x_1,y_1) i (x_2,y_2).



Slika 5.5: Parabola i konjugirana tangenta

Izračunajmo y_1 i y_2.

Odredimo ordinatu sjecišta pramena pravaca na kojima leže tetive i parabole tako da $x = \dfrac{y-l}{k}$ uvrstimo u jednadžbu parabole $y^2 = 2px$ i dobijemo

$$
\begin{aligned}
y^2 &= \frac{2p\,(y-l)}{k}, \\
y^2k - 2py + 2pl &= 0
\end{aligned}
$$

te riješimo kvadratnu jednadžbu i dobijemo

$$y_{1,2} = \frac{2p \pm \sqrt{4p^2 - 8kpl}}{2k}.$$

Sada odredimo ordinatu polovišta P točaka (x_1, y_1) i (x_2, y_2).

$$y_P = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{2p + \sqrt{4p^2 - 8kpl} + 2p - \sqrt{4p^2 - 8kpl}}{2k}\right) = \frac{p}{k},$$

tj. imamo koordinate polovišta P

$$P\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{p}{k}\right)$$

kojoj je ordinata $y_P = \dfrac{p}{k}$ pri čemu su k i p fiksni parametri pa ne ovise o promjenjivosti parametra l.

Polovišta tetiva leže na pravcu $ky - p = 0$, tj. na paraleli s osi parabole.

□

Teorem 5.3.3. *Ako tangenta t neke točke T parabole siječe os u točki U, a normala u točki V i pri tome je K nožište okomice iz točke T na os, onda vrijedi*

$$|UO| = |OK| \ \ i \ \ |UF| = |FV| \, .$$

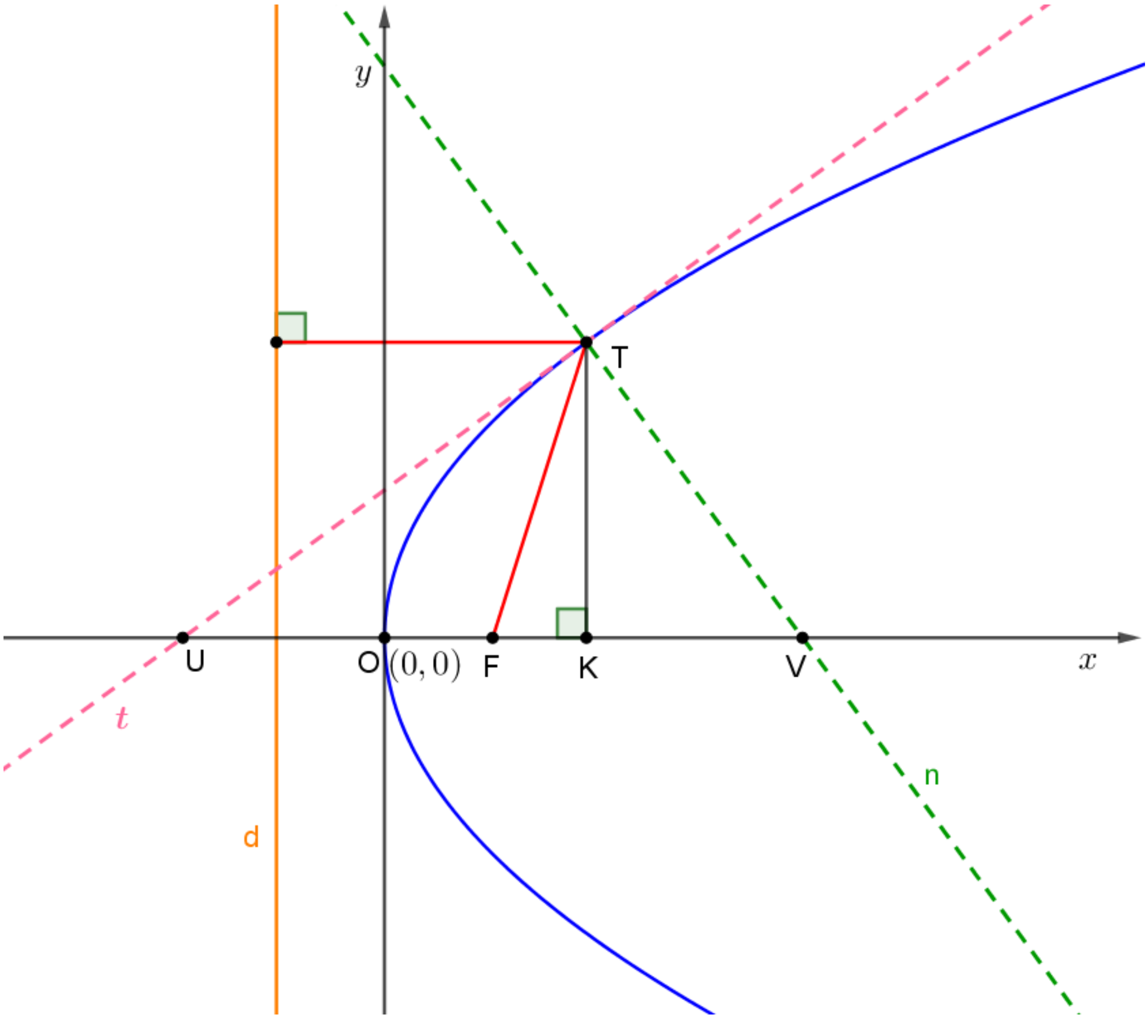
Dokaz. Smjestimo parabolu u koordinatni sustav tako da je direktrisa d udaljena od ishodišta za $\dfrac{p}{2}$, a fokus parabole je točka $F\left(\dfrac{p}{2}, 0\right)$.

Neka je točka T točka parabole i označimo ju sa $T\,(x_T, y_T)$, a nožište okomice iz točke T na os označimo sa $K\,(x_K, 0)$.

Presjek tangente iz točke T s osi označimo sa točkom $U\,(x_U, 0)$, a presjek normale sa osi označimo sa $V\,(x_V, 0)$.

Jednadžba tangente t na parabolu u točki T glasi

$$y_T y = p\,(x + x_T)\,, \ \text{tj. } y = \frac{p}{y_T}x + \frac{px_T}{y_T}.$$



Slika 5.6: Parabola

Koeficijent smjera tangente t je

$$k_t = \frac{p}{y_T},$$

a koeficijent smjera normale n u točki T iznosi

$$k_n = -\frac{y_T}{p}$$

pa jednadžba normale u točki T glasi

$$y = -\frac{y_T}{p}x + \frac{x_T y_T}{p} + y_T.$$

Odredimo sada presjek tangente t sa osi, tj. točku $U(x_U, 0)$:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{p}{y_T} x_U + \frac{p x_T}{y_T}, \\ \frac{p}{y_T} x_U &= -\frac{p x_T}{y_T}, \\ x_U &= -\frac{p x_T}{y_T} \cdot \frac{y_T}{p}, \\ x_U &= -x_T, \end{aligned}$$

tj. točka U je $U(-x_T, 0)$.

Budući da je točka K nožište okomice iz točke T zaključujemo da je apscisa točaka T i K jednaka, tj. $K(x_T, 0)$.

Uočavamo

$$|OK| = |OU| = x_T,$$

time je dokazana jedna tvrdnja teorema.

Odredimo sada presjek normale n sa osi, tj. točku $V(x_V, 0)$:

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{y_T}{p} x_V + \frac{x_T y_T + y_T p}{p}, \\ x_V &= \frac{y_T (x_T + p)}{p} \cdot \frac{p}{y_T}, \\ x_V &= x_T + p, \end{aligned}$$

tj. točka V je $V(x_T + p, 0)$.

Odredimo sada udaljenost $|UF|$:

$$|UF| = |UO| + |OF| = x_T + \frac{p}{2}.$$

Preostaje nam još odrediti udaljenost $|FV|$:

$$|FV| = \sqrt{\left(x_T + p - \frac{p}{2}\right)^2} = \left|x_T + \frac{p}{2}\right| = x_T + \frac{p}{2}.$$

Uočavamo

$$|UF| = |FV|,$$

time je dokazana i druga tvrdnja teorema. □

Bibliografija

[1] B. Jagodić, R. Svedrec, *Matematika 7 za izbornu i dodatnu nastavu*, Školske novine, Zagreb, 1994.

[2] A. Marić, *Planimetrija*, Zbirka riješenih zadataka, Element (1996),

[3] Ž. Hanjš, S. Varošanec, *Matematička natjecanja 1994./95.*, Element, Zagreb, 2006.

[4] M. Bombardelli, Ž. Hanjš, S. Varošanec, *Matematička natjecanja 2002./2003.*, Element, Zagreb, 2004.

[5] M. Bombardelli, Ž. Hanjš, *Matematička natjecanja 2000./2001.*, Element, Zagreb, 2002.

[6] Wikipedija, web stranici pristupljeno 10. 06. 2018.,
`https://hr.wikipedia.org/wiki/Ren%C3%A9_Descartes`

[7] Leksikografski zavod Miroslav Krleža, web stranici pristupljeno 10. 06. 2018.,
`http://www.enciklopedija.hr/Natuknica.aspx?ID=14710`

[8] S. Varošanec, *Nacrtna geometrija*, Krivulje drugog red, web stranici pristupljeno 20. 10. 2018.,
`https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/ng/materijali/nacrt20-36.pdf`

[9] M. Suvalj, *Krivulje drugog reda i primjena*, Diplomski rad, web stranici pristupljeno 01. 10. 2018.
`http://www.mathos.unios.hr/~mdjumic/uploads/diplomski/SUV03.pdf`

[10] M. Bombardelli, Ž. Milin Šipuš, *Analitička geometrija*, Predavanja i zadaci za vježbu, web stranici pristupljeno 03. 09. 2018.
`https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/ag/dodatni/predavanja.pdf`

[11] M. Bombardelli, D. Ilišević, *Elementarna geometrija*, Skripta, web stranici pristupljeno 03. 09. 2018.
https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/eg/dodatni/EGskripta.pdf

[12] Wikipedija, web stranici pristupljeno 31. 10. 2018.,
https://en.wikipedia.org/wiki/Matthew_Stewart_(mathematician)

[13] web stranici pristupljeno 24. 10. 2018.,
http://blog.casper.com/wp-content/uploads/2014/07/rene-descartes.jpg

Sažetak

U ovom radu opisujemo koordinatnu metodu u planimetriji te pomoću nje dokazujemo razne teoreme iz različitih područja matematike. Na samom početku definiran je koordinatni sustav na pravcu i koordinatni sustav u ravnini te je dana kratka povijesna crtica o nastanku Kartezijevog koordinatnog sustava. Definirali smo i koordinatnu metodu. Navedeni su i osnovni teoremi analitičke geometrije koje ćemo koristiti u radu. Teoreme o četiri karakteristične točke trokuta (težište, ortocentar, središte opisane kružnice, središte upisane kružnice) te teorem o Eulerovom pravcu smo dokazali koordinatnom metodom. Prikazali smo i zadatke s matematičkih natjecanja na kojima je moguća primjena koordinatne metode. Teoreme o trokutu i četverokutu također smo dokazali koordinatnom metodom. Na kraju smo naveli neka svojstva krivulja drugog reda, tj. svojstva elipse, hiperbole i parabole te ih dokazali primjenjujući koordinatnu metodu.

Summary

In this thesis, the coordinate method in planimetry is described and it is used to prove several theorems from various fields of mathematics. At the beginning of the paper the Cartesian coordinate system on line and on plane are defined, and the short history overview of the Cartesian coordinate system is mentioned. The coordinate method is defined. The basic theorems of analytic geometry are also mentioned. Theorems of four triangle's point (centroid, orthocenter, circumcircle center, incircle center) and Euler's line theorem are proved with coordinate method. Mathematical competition problems where application of coordinate method is possible are shown. Theorems of the triangle and quadrilateral are also proved with coordinate method. At the end of this thesis, some properties of the second-order curves, i. e. properties of ellipse, hyperbola, parabola are shown and proved with coordinate method.

Životopis

Rođena sam 10. svibnja 1993. godine u Zagrebu. Pohađala sam Osnovnu školu Rudeš u Zagrebu, a 2008. godine upisujem XV. gimnaziju, prirodoslovno-matematičku gimnaziju u Zagrebu. Maturirala sam 2012. godine i iste godine upisujem Prirodoslovno-matematički fakultet u Zagrebu, na kojemu sam u srpnju 2016. godine završila Preddiplomski sveučilišni studij Matematika; smjer: nastavnički te tako postala prvostupnik edukacije matematike. U rujnu iste godine upisujem Diplomski sveučilišni studij Matematika; smjer: nastavnički.