Van Benthem-Rosenov teorem

Brkić, Martin

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Martin Brkić

VAN BENTHEM - ROSENOV TEOREM

Diplomski rad

Voditelj rada:
izv.prof.dr.sc. Mladen Vuković

Zagreb, rujan, 2018.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Martini, Mati, Sanki i Luki

Sadržaj

Uvod

Glavni poticaj za istraživanje modalnih logika je tzv. paradoks materijalne implikacije, odnosno situacija iz klasične logike sudova koja nastaje kad istinitost formule $P \rightarrow R$ definiramo na način da je $P \rightarrow R$ istinita ako i samo ako je P laž ili R istina. Iz toga dobijamo da iz *laži slijedi sve* i to se ne može popraviti u klasičnoj logici sudova.
Modalnom logikom u užem smislu riječi nazivamo proširenje klasične logike sudova operatorima *nužno* i *moguće*. Razvoj modalne logike može se podijeliti u tri faze: *sintaktičku*, koju su obilježili prvi Lewisovi modalni sistemi; *klasičnu*, u kojoj se javlja Kripke sa svojom semantikom; i *modernu*, u kojoj je modalna logika shvaćena kao sredstvo za opis relacijskih struktura.
Standardna translacija nam omogućava da modalnu logiku shvatimo kao fragment logike prvog reda. Johan van Benthem je dokazao da se radi o točno onom fragmentu koji je invarijantan na bisimulacije.
U prvom poglavlju ovog rada definirat ćemo sintaksu modalne logike, Kripkeovu semantiku i bisimulaciju kao važnu relaciju među Kripkeovim okvirima.
U drugom poglavlju ćemo se orijentirati na konačne Kripkeove strukture. Glavni alat kojim ćemo se služiti bit će bisimulacijske igre.
Treće poglavlje ćemo započeti opisivanjem prevođenja formula modalne logike u formule logike prvog reda te ćemo definirati neke pojmove iz teorije konačnih modela (poput Ehrenfeucht - Fraïsséovih igara i lokalnosti) i navesti neke tvrdnje vezane uz njih.
To će nam pomoći da u četvrtom poglavlju dokažemo Van Benthem - Rosenov teorem, koji je zapravo verzija Van Benthemovog teorema za konačne modele, a čiji je prvi dokaz dao Eric Rosen. U ovom smo se radu opredijelili za verziju dokaza koju je izložio njemački matematičar Martin Otto, koja je mnogo elementarnija od originalne Rosenove.
U ovom diplomskom radu nećemo navoditi definicije svih pojmova niti ćemo dokazivati sve činjenice iz matematičke logike. Tu prije svega mislimo na pojmove koji se odnose na sintaksu i semantiku logike prvog reda, koje se detaljno obrađuju na kolegiju Matematička logika.

Poglavlje 1

Uvod i osnovne definicije

U ovom poglavlju ćemo navesti neke osnovne definicije i činjenice koje će nam biti potrebne za daljnja razmatranja.

1.1 Modalna logika

Modalna logika nastaje zbog nemogućnosti da u klasičnoj logici sudova izrazimo neke od rečenica iz prirodnog jezika te uz njih povezano zaključivanje. Klasičan primjer takvih rečenice su

Moguće je da će danas će padati kiša

ili

Sutra nužno idem na posao

Klasična logika sudova ima problem u interpretaciji ovih dviju rečenica zbog toga što njihova istinitost ne ovisi o tome hoće li danas zaista pasti kiša, odnosno hoćemo li zaista sutra otići na posao.
U gornja dva primjera smo upotrijebili priloge *moguće* i *nužno*, koji spadaju među tzv. **modalne operatore**[1] (zbog istog razloga se i pripadne logike zovu **modalnim logikama**) te ih redom označavamo simbolima $\Diamond$ i $\Box$. Treba reći da su $\Diamond$ i $\Box$ operatori na sudovima, tj. nisu bulovski logički veznici, stoga njihova interpretacija ne može biti zadana pomoću neke istinosne funkcije.
Sljedeća definicija nam daje opis osnovnog modalnog jezika i formula modalne logike.

[1] *Nužno* i *moguće* su samo neki od primjera modalnih operatora. U npr. temporalnoj logici se promatraju operatori poput *uvijek je bilo da* i *uvijek će biti da*, dok se u logikama znanja i vjerovanja promatraju operatori poput *znam da* i *vjerujem da*.

Definicija 1.1.1. *Osnovni modalni jezik se sastoji od prebrojivog skupa propozicionalnih varijabli $\Theta = \{p, q, r, ...\}$, bulovskih veznika $\neg$ i $\vee$, logičke konstante $\perp$ i unarnog modalnog operatora $\Diamond$.*
Formula je riječ osnovnog modalnog jezika definirana sljedećom rekurzivnom definicijom:

- *svaka propozicionalna varijabla je formula;*
- *logička konstanta $\perp$ je formula;*
- *ako su ϕ i ψ formule, tada su $(\neg\phi)$, $(\phi \vee \psi)$ i $(\Diamond\phi)$ također formule;*
- *riječ osnovnog modalnog jezika je formula ako i samo ako je nastala pomoću konačno mnogo primjena prethodnih triju pravila.*

Veznike $\wedge$, $\rightarrow$ i $\leftrightarrow$, logičku konstantu $\top$ te modalni operator $\Box$ koristimo kao pokrate na način da:

- $\phi \wedge \psi$ označava $\neg(\neg\phi \vee \neg\psi)$;
- $\phi \rightarrow \psi$ označava $\neg\phi \vee \psi$;
- $\phi \leftrightarrow \psi$ označava $(\phi \rightarrow \psi) \vee (\psi \rightarrow \phi)$;
- $\top$ označava $\neg\perp$;
- $\Box\phi$ označava $\neg\Diamond\neg\phi$.

Sada ćemo definirati model za modalni jezik.

Definicija 1.1.2. *Model za osnovni modalni jezik je uređena trojka $\mathfrak{M} = (W, R, V)$, pri čemu je:*

- *W neprazan skup čije elemente zovemo svjetovi;*
- *R binarna relacija na skupu W ($R \subseteq W \times W$), koja se naziva relacijom dostiživosti;*
- *V funkcija koja svakoj propozicionalnoj varijabli p iz skupa Θ pridružuje neki podskup $V(p)$ od W.*

Drugi nazivi za model osnovnog modalnog jezika su *Kripkeova struktura*[2] ili samo *struktura*. Funkciju V nazivamo *valuacijom*, dok $V(P)$ zamišljamo kao skup svjetova u modelu u kojima je p istinita. Skup W se naziva *nosač*, a kako se model često poistovjećuje s nosačem, umjesto $w \in W$ pisat ćemo $w \in \mathfrak{M}$.

[2]Saul Kripke (r. 1940.), američki filozof i logičar

Za svijet $v \in W$ reći ćemo da je *sljedbenik* svijeta w ako je wRv. Skup svih sljedbenika svijeta w , u oznaci $W[w]$, definiramo sa $W[w] = \{v \in W \mid wRv\}$.
Za svijet w kažemo da je **R-terminalan** ako je $W[w] = \emptyset$.
Sljedećom definicijom opisujemo istinitost formula modalne logike u modelu $\mathfrak{M}$.

Definicija 1.1.3. *Neka je $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ model i w proizvoljan svijet u njemu. Istinitost formule ϕ, u oznaci $\mathfrak{M},w \Vdash \phi$, definiramo rekurzivno po složenosti formule na sljedeći način:*

- *ako je ϕ propozicionalna varijabla, tj. $\phi = p$ gdje je $p \in \Theta$, tada definiramo:* $\mathfrak{M},w \Vdash p \Leftrightarrow w \in V(p)$;
- *ako je ϕ logička konstanta $\bot$, tj. $\phi = \bot$, tada definiramo:* *ne vrijedi* $\mathfrak{M},w \Vdash \bot$;
- *ako je ϕ formula oblika $\neg\psi$, tada definiramo:* $\mathfrak{M},w \Vdash \neg\psi \Leftrightarrow$ *ne vrijedi* $\mathfrak{M},w \Vdash \psi$;
- *ako je ϕ formula oblika $\psi \vee \eta$, tada definiramo:* $\mathfrak{M},w \Vdash \psi \vee \eta \Leftrightarrow \mathfrak{M},w \Vdash \psi$ *ili* $\mathfrak{M},w \Vdash \eta$;
- *ako je ϕ formula oblika $\Diamond\psi$, tada definiramo:* $\mathfrak{M},w \Vdash \Diamond\psi \Leftrightarrow$ *za neki* $v \in W$ *takav da je* $(w,v) \in R$ *vrijedi* $\mathfrak{M},v \Vdash \psi$.

Napomena 1.1.4. *Uočimo da vrijedi:*
$\mathfrak{M},w \Vdash \Box\psi$ *ako i samo ako za svaki $v \in W$ takav da je wRv vrijedi $\mathfrak{M},v \Vdash \psi$. Naime, prema definiciji operatora $\Box$, imamo da vrijedi $\mathfrak{M},w \Vdash \Box\psi$ ako i samo ako vrijedi $\mathfrak{M},w \Vdash \neg\Diamond\neg\psi$. To je ekvivalentno tome da ne postoji $v \in \mathfrak{M}$ sljedbenik od w takav da vrijedi $\mathfrak{M},v \Vdash \neg\psi$, a to je evivalentno tome da za svakog sljedbenika $v \in \mathfrak{M}$ od w vrijedi $\mathfrak{M},v \Vdash \psi$ što je pak ekvivalentno sa $\mathfrak{M},w \Vdash \Box\psi$.*

Definicija 1.1.5. *Neka je ϕ neka formula modalne logike. Reći ćemo da je ϕ* ***istinita na modelu*** *$\mathfrak{M}$ ako za sve svjetove $w \in W$ vrijedi $\mathfrak{M},w \Vdash \phi$.To kratko označavamo sa $\mathfrak{M} \Vdash \phi$. Reći ćemo da je formula ϕ* ***valjana formula*** *ako za sve modele $\mathfrak{M}$ vrijedi $\mathfrak{M} \Vdash \phi$.*

Nakon što smo definirali semantiku za modalnu logiku, navest ćemo primjer jednog hilbertovskog sistema modalne logike kojeg ćemo, u čast S. Kripkea, označavati sa K.
Sheme aksioma u sistemu K su:
(A1) Sve formule koje dobijemo kada u nekoj valjanoj formuli klasične logike sudova neku od propozicionalnih varijabli zamijenimo formulom modalne logike
(A2) $\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$.

Pravila izvoda su *modus ponens* i *nužnost*, tj.

$$\frac{A}{\Box A}$$

Posve analogno kao i u računu sudova definiraju se pojmovi dokaza, izvoda i teorema. Isto tako, lako se, indukcijom po duljini dokaza, dokazuje teorem adekvatnosti, tj. da je svaki teorem sistema K ujedno i valjana formula modalne logike. Također, sistem K zadovoljava i teorem potpunosti (svaka valjana formula modalne logike je teorem sistema K). S druge strane, za razliku od klasične logike sudova, za modalnu logiku ne postoji samo jedan istaknuti sistem kojem su ostali ekvivalentni. Neka od najčešće razmatranih proširenja sistema K su:

- **T** = K + shema aksioma $\Box A \to A$
- **S4** = T + shema aksioma $\Box A \to \Box\Box A$
- **S5** = T + shema aksioma $\Diamond A \to \Box\Diamond A$
- **GL**[3] = K + shema aksioma $\Box(\Box A \to A) \to \Box A$

Napomena 1.1.6. *Kod sistema K nemamo ograničenja na relaciju dostiživosti R. Kod, npr., sistema T relacija R je refleksivna, dok je kod sistema GL relacija R tranzitivna i inverzno dobro fundirana.*

1.2 Bisimulacija

U ovoj točki ćemo definirati bisimulaciju, važnu relaciju između dvaju Kripkeovih okvira te ćemo dati odgovor na pitanje koliko su bisimulirani okviri jedan drugom bliski u smislu ekvivalencije.

Definicija 1.2.1. *Neka su $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ i $\mathfrak{M}' = (W', R', V')$ modeli. Binarna relacija $Z \subseteq W \times W'$ se naziva **bisimulacijom** između $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ (u oznaci $Z : \mathfrak{M} \leftrightarroweq \mathfrak{M}'$) ako zadovoljava sljedeće uvjete:*

1. *Ako je wZw', tada za svaku propozicionalnu varijablu p vrijedi: $w \in V(p)$ ako i samo ako $w' \in V'(p)$;*
2. *Ako je wZw' i wRv, tada postoji svijet $v' \in \mathfrak{M}'$ takav da je vZv' i $w'R'v'$;*
3. *Ako je wZw' i $w'R'v'$, tada postoji svijet $v \in \mathfrak{M}$ takav da je vZv' i wRv.*

[3] Gödel - Löb, po Kurtu Gödelu i Martinu Löbu, ujedno i najjednostavniji sistem za *logiku dokazivosti*

Ako je $Z \subseteq W \times W'$ bisimulacija između modela $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ te je wZw', tada to označavamo s

$$Z : \mathfrak{M}, w \leftrightarroweq \mathfrak{M}', w'$$

Ako postoji neprazna bisimulacija između $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$, to ćemo kraće označavati s

$$\mathfrak{M} \leftrightarroweq \mathfrak{M}'$$

Ako postoji neprazna bisimulacija Z između $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ takva da za neke $w \in \mathfrak{M}$ i $w' \in \mathfrak{M}'$ vrijedi wZw', to ćemo kraće označavati sa

$$\mathfrak{M}, w \leftrightarroweq \mathfrak{M}', w'$$

Uvjete *1.*, *2.* i *3.* iz prethodne definicije redom nazivamo *at*, *forth* i *back*.

Napomena 1.2.2. *Neka su $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$ i $\mathfrak{M}$" proizvoljne Kripkeove strukture. Tada vrijede sljedeća svojstva bisimulacije:*

- $\mathfrak{M} \leftrightarroweq \mathfrak{M}$
  Definirajmo $Z \subseteq W \times W$ sa $Z = \{(w, w) \mid w \in W\})$. Očito su zadovoljeni uvjeti at, forth i back pa vrijedi $\mathfrak{M} \leftrightarroweq \mathfrak{M}$

- $\mathfrak{M} \leftrightarroweq \mathfrak{M}' \Rightarrow \mathfrak{M}' \leftrightarroweq \mathfrak{M}$
  Ako je $Z \subseteq W \times W'$ bisimulacija između $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$, lako se provjeri da je njoj inverzna relacija $Z^{-1} = \{(w', w) \mid (w, w') \in Z\}$ bisimulacija između $\mathfrak{M}'$ i $\mathfrak{M}$. Uvjet at je očito zadovoljen, dok je uvjet forth zapravo uvjet back za Z (i obratno). Dakle, ako je $\mathfrak{M} \leftrightarroweq \mathfrak{M}'$, onda je i $\mathfrak{M}' \leftrightarroweq \mathfrak{M}$

- $\mathfrak{M} \leftrightarroweq \mathfrak{M}'$ *i* $\mathfrak{M}' \leftrightarroweq \mathfrak{M}'' \Rightarrow \mathfrak{M} \leftrightarroweq \mathfrak{M}''$
  Neka je $Z \subseteq W \times W'$ bisimulacija između $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$, a $Z' \subseteq W' \times W''$ bisimulacija između $\mathfrak{M}'$ i $\mathfrak{M}''$. Definirajmo $Z'' \subseteq W \times W''$ kao kompoziciju relacija Z i Z' na sljedeći način:
  $Z'' = Z' \circ Z = \{(w, w'') \in W \times W'' \mid (\exists w' \in W')(wZw' \wedge w'Z'w'')\}$. Uvjet at je opet trivijalno zadovoljen. Provjerit ćemo uvjet forth (uvjet back se provjerava analogno).
  Prema definiciji Z'' imamo dva slučaja u odnosu na $w' \in W'$:
  -$w' \in W'$ nije takav da je wZw' i $w'Z'w''$ za neke $w \in W$ i $w'' \in W''$. Tada nemamo što provjeravati
  -wZw' i $w'Z'w''$.
  Ukoliko je wZw' i wRv, tada postoji v' takav da vZv' i $w'R'v'$. No, kako je $w'Z'w''$, a $w'R'v'$, tada zbog $w'Z'w''$ postoji v'' takav da je $w''R''v''$ i $v'Z'v''$. Dakle, imamo da $wZ''w''$ i wRv povlači da postoji $v'' \in W''$ takav da je $w''R''v''$ i $vZ''v''$.
  Dakle, ako $\mathfrak{M} \leftrightarroweq \mathfrak{M}'$ i $\mathfrak{M}' \leftrightarroweq \mathfrak{M}''$, onda $\mathfrak{M} \leftrightarroweq \mathfrak{M}''$.

Definicija 1.2.3. *Neka su $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ modeli te $w \in \mathfrak{M}$ i $w' \in \mathfrak{M}'$. Reći ćemo da su svjetovi w i w'* ***modalno ekvivalentni*** *(u oznaci $w \leftrightsquigarrow w'$), ako za svaku modalnu formulu ϕ vrijedi*

$$\mathfrak{M}, w \Vdash \phi \Leftrightarrow \mathfrak{M}', w' \Vdash \phi$$

U kakvom su odnosu pojmovi *bisimuliranost* i *modalna ekvivalentnost*, govori nam sljedeći teorem.

Teorem 1.2.4. *Neka su $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ modeli.Tada za sve svjetove $w \in W$ i $w' \in W'$ vrijedi:*

$$\mathfrak{M}, w \leftrightarroweq \mathfrak{M}', w' \Rightarrow w \leftrightsquigarrow w'.$$

Dokaz. Trebamo pokazati da, ako je $\mathfrak{M}, w \leftrightarroweq \mathfrak{M}', w'$, onda za proizvoljnu formulu modalne logike ϕ vrijedi

$$\mathfrak{M}, w \Vdash \phi \Leftrightarrow \mathfrak{M}', w' \Vdash \phi$$

Označimo bisimulaciju između $\mathfrak{M}, w$ i $\mathfrak{M}', w'$ sa Z.
Tvrdnju dokazujemo indukcijom po složenosti formule ϕ:

- ako je $\phi = \bot$, tada tvrdnja očito vrijedi zbog $\mathfrak{M}, w \nVdash \bot$ i $\mathfrak{M}', w' \nVdash \bot$.
- ako je ϕ propozicionalna varijabla, tvrdnja vrijedi zbog uvjeta *at*, jer se w i w' podudaraju na istim propozicionalnim varijablama.
- ako je ϕ oblika $\neg\psi$, tada imamo $\mathfrak{M}, w \Vdash \neg\psi$ ako i samo ako $\mathfrak{M}, w \nVdash \psi$ ako i samo ako (pretpostavka indukcije) $\mathfrak{M}', w' \nVdash \psi$ ako i samo ako $\mathfrak{M}', w' \Vdash \neg\psi$.
- ako je ϕ oblika $\psi \vee \eta$, tada $\mathfrak{M}, w \Vdash \psi \vee \eta$ vrijedi ako i samo ako $\mathfrak{M}, w \Vdash \psi$ ili $\mathfrak{M}, w \Vdash \eta$. Ovo posljednje po pretpostavci indukcije vrijedi ako i samo ako $\mathfrak{M}', w' \Vdash \psi$ ili $\mathfrak{M}', w' \Vdash \eta$, što pak vrijedi ako i samo ako $\mathfrak{M}', w' \Vdash \psi \vee \eta$.
- ako je ϕ oblika $\Diamond\psi$, tada je $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond\psi$ ako i samo ako postoji $v \in W$ za kojeg vrijedi wRv, takav da je $\mathfrak{M}, v \Vdash \psi$. Sada, po uvjetu *forth*, postoji $v' \in W'$ takav da je vZv' i w'R'v'. Iz vZv', zbog pretpostavke indukcije, slijedi $\mathfrak{M}', v' \Vdash \psi$, a zbog w'R'v' odmah slijedi $\mathfrak{M}', w' \Vdash \Diamond\psi$. Obratna implikacija se pokazuje analogno, primjenom uvjeta *back*.

□

Teorem 1.2.4. nam govori da su formule modalne logike invarijantne na bisimulaciju, odnosno da bisimulacija čuva istinitost. Kontraprimjer koji pokazuje da obrat ne vrijedi u općem slučaju navest ćemo u sljedećem poglavlju, nakon što definiramo bisimulacijske igre. U nekim slučajevima ipak vrijedi obrat Teorema 1.2.4. Da bi smo ih opisali, prvo nam treba sljedeća definicija.

Definicija 1.2.5. *Reći ćemo da je model* $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ ***slikovno konačan*** *ako za svaki* $w \in W$ *vrijedi da je* $W[w] = \{v \in W \mid wRv\}$ *konačan skup.*

Teorem 1.2.6 (Hennessy-Milner). *Neka su* $\mathfrak{M}$ *i* $\mathfrak{M}'$ *slikovno konačni modeli. Tada za svaki* $w \in W$ *i* $w' \in W'$ *vrijedi:* $\mathfrak{M}, w \leftrightarrows \mathfrak{M}, w'$ *ako i samo ako* $w \leftrightsquigarrow w'$*.*

Dokaz. Jedna implikacija vrijedi za proizvoljne modele i dokazana je u teoremu 1.2.4. Da bismo dokazali drugi smjer, provjerit ćemo da je relacija modalne ekvivalencije $\leftrightsquigarrow$ na slikovno konačnim modelima zapravo jedna bisimulacija. U tu svrhu ćemo provjeriti da relacija modalne ekvivalencije zadovoljava uvjete *at*, *forth* i *back*.
Uvjet *at* je očito zadovoljen. Za uvjet *forth*, pretpostavimo da vrijedi $w \leftrightsquigarrow w'$ i wRv. Pretpostavimo da ne postoji $v' \in W'$ takav da je $w'Rv'$ i $v \leftrightsquigarrow v'$. Označimo sa $S' = \{u' \in W' \mid w'R'u'\}$. Uočimo da je S' neprazan; u protivnom bi vrijedilo $\mathfrak{M}', w' \Vdash \Box\bot$, što bi povlačilo kontradikciju sa $w \leftrightsquigarrow w'$ pošto vrijedi $\mathfrak{M}, v \nVdash \bot$. Nadalje, pošto je $\mathfrak{M}'$ slikovno konačan, S' mora biti konačan. Neka je $S' = \{w'_1, ..., w'_n\}$. Prema pretpostavci, za svaki $w_i \in S'$ postoji formula ψ_i takva da vrijedi $\mathfrak{M}, v \Vdash \psi_i$, ali i $\mathfrak{M}', v' \nVdash \psi_i$. Odavde slijedi

$$\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond(\psi_1 \wedge ... \wedge \psi_n)$$

i

$$\mathfrak{M}', w' \nVdash \Diamond(\psi_1 \wedge ... \wedge \psi_n)$$

što je kontradikcija s pretpostavkom da je $w \leftrightsquigarrow w'$.
Uvjet *back* se dokazuje analogno. □

Sljedeća propozicija će nam biti od koristi u nastavku diplomskog rada.

Propozicija 1.2.7. *Neka su* $\mathfrak{M}_i = (W_i, R_i, V_i), i \in I$*, disjunktni Kripkeovi modeli, tj.* W_i *su međusobno disjunktni skupovi. Označimo sa* $\biguplus_{i \in I} \mathfrak{M}_i = (W, R, V)$ *njihovu disjunktnu uniju, pri čemu je* $W = \bigcup_{i \in I} W_i$*,* $R = \bigcup_{i \in I} R_i$*, dok za svaku propozicionalnu varijablu* p *vrijedi* $V(p) = \bigcup_{i \in I} V_i(p)$*. Tada za svaku modalnu formulu* ϕ*, za svaki* $i \in I$ *i za svaki* $w \in \mathfrak{M}_i$ *vrijedi:*

$$\mathfrak{M}_i, w \Vdash \phi \Leftrightarrow \biguplus_{i \in I} \mathfrak{M}_i, w \Vdash \phi$$

Drugim riječima, modalna istinitost je invarijantna na disjunktne unije.

Dokaz. Tvrdnju dokazujemo indukcijom po složenosti formule ϕ. Neka je $i \in I$ neki indeks; dokazat ćemo da za svaku modalnu formulu ϕ i za svaki element w od $\mathfrak{M}_i$ vrijedi $\mathfrak{M}_i, w \Vdash \phi$ ako i samo ako $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$, gdje je $\mathfrak{M} = \biguplus_{i \in I} \mathfrak{M}_i$.
Pretpostavimo da ϕ ne sadrži logičkih veznika. Ako je $\phi = p$, gdje je p neka propozicionalna varijabla, tada imamo $\mathfrak{M}_i, w \Vdash \phi$ ako i samo ako $w \in V_i(p)$ ako i samo ako (po definiciji od V) $w \in V(p)$ ako i samo ako $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$. S druge strane, ϕ može biti i

logička konstanta $\perp$, ali je ona lažna na svijetu w u oba modela pa i u ovom slučaju vrijedi željena ekvivalencija.
Pretpostavka indukcije je da ekvivalencija iz iskaza propozicije vrijedi za sve modalne formule koje ukupno sadrže najviše $n \in \mathbb{N}$ simbola $\neg$, $\vee$ ili $\Diamond$. Moramo pokazati da ista ekvivalencija vrijedi ako ϕ sadrži $n + 1$ simbola $\neg$, $\vee$ ili $\Diamond$. Slučajevi $\phi = \neg\psi$ i $\phi = \psi \vee \eta$ su jednostavni pa ćemo ih izostaviti i koncentrirati se na slučaj $\phi = \Diamond\psi$.
Pretpostavimo da $\mathfrak{M}_i, w \Vdash \Diamond\psi$. Tada postoji $v \in \mathfrak{M}_i$ takav da vrijedi wR_iv i $\mathfrak{M}_i, v \Vdash \psi$. Iz toga, po pretpostavci indukcije, slijedi $\mathfrak{M}, v \Vdash \psi$. No, tada iz definicije $\mathfrak{M}$ imamo da je wRv i stoga je $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond\psi$.
Za obratnu implikaciju, pretpostavimo da $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond\psi$ vrijedi za neki $w \in \mathfrak{M}_i$. Tada postoji v takav da vrijedi wRv i $\mathfrak{M}, v \Vdash \psi$. Iz definicije od R sada slijedi wR_jv za neki j, a budući da su nosači disjunktni, imamo $i = j$. Iz toga slijedi da je i $v \in \mathfrak{M}_i$ pa možemo primijeniti pretpostavku indukcije: imamo $\mathfrak{M}_i, v \Vdash \psi$, iz čega slijedi $\mathfrak{M}_i, w \Vdash \Diamond\psi$. $\square$

Poglavlje 2

Konačni modeli

U ovom poglavlju pročavat ćemo neke pojmove vezane uz konačne Kripkeove strukture. Posebnu pažnju ćemo posvetiti stablastim strukturama.

2.1 Bisimulacijska igra

Neka su $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ i $\mathfrak{M}' = (W', R', V')$ dva proizvoljna modela te neka su $w \in \mathfrak{M}$ i $w' \in \mathfrak{M}'$ proizvoljni svjetovi. Vrijedi li

$$\mathfrak{M}, w \leftrightarroweq \mathfrak{M}', w'$$

tj. postoji li neka neprazna bisimulacija Z između $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ takva da je wZw', možemo ustanoviti pomoću tzv. **bisimulacijske igre**.
Bisimulacijska igra se odvija na strukturama $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ i $\mathfrak{M}' = (W', R', V')$ i igraju je dva igrača,koje ćemo u daljnjem tekstu zvati **Igrač I** i **Igrač II**.[1]
Primijetimo odmah da, ukoliko se $w \in \mathfrak{M}$ i $w' \in \mathfrak{M}'$ ne podudaraju u svim propozicionalnim varijablama, tada nije zadovoljen definicijski uvjet *at*, dakle ne može vrijediti $\mathfrak{M}, w \leftrightarroweq \mathfrak{M}', w'$.
Ako se svjetovi $w \in \mathfrak{M}$ i $w' \in \mathfrak{M}'$ podudaraju na istim propozicionalnim varijablama, tada se na njih postavljaju oznake, koje ćemo u daljnjem tekstu, radi jednostavnosti, označavati s $\odot$. Postavljanje $\odot$ na w i w' smatrat ćemo **nultim potezom** u bisimulacijskoj igri
U svakom sljedećem potezu bisimulacijske igre Igrač I ima pravo učiniti sljedeće:

- izabrati neku od struktura $\mathfrak{M}$ ili $\mathfrak{M}'$
- pomaknuti oznaku $\odot$ s trenutno označenog svijeta u odabranoj strukturi na neki drugi svijet u istoj toj strukturi koji je s prethodnim u odgovarajućoj relaciji dostiživosti.

[1]U stranoj literaturi se Igrač I i Igrač II najčešće zovu **Spoiler** i **Duplicator**

Igrač II odgovara na potez igrača I na način da u suprotnoj strukturi od one koju je izabrao Igrač I pomakne oznaku $\odot$ s trenutno označenog svijeta na neki drugi koji je s njim u odgovarajućoj relaciji dostiživosti. Pritom, također, mora paziti da se svijet na kojeg želi pomaknuti oznaku $\odot$ sa svijetom na kojeg je Igrač I jedan u suprotnoj strukturi već bio pomaknuo oznaku $\odot$ podudara u svim propozicionalnim varijablama.
Koje je značenje odgovora Igrača II na poteze Igrača I u bisimulacijskoj igri? Ovdje treba primijetiti tri stvari:

- ako je Igrač II u mogućnosti odgovoriti na svaki potez Igrača I, tada je nakon svakog poteza oznaka $\odot$ u obje strukture na svjetovima koji se podudaraju u svim propozicionalnim varijablama
- ako Igrač I u svom potezu može pomaknuti oznaku $\odot$ s nekog w_i na neki w_{i+1} u strukturi $\mathfrak{M}$, to znači da svijet w_i ima sljedbenika u odnosu na relaciju R. Tada mogućnost odgovora Igrača II znači da neki w'_i u strukturi $\mathfrak{M}'$ na kojem se dotad nalazila oznaka $\odot$ ima sljedbenika w'_{i+1} u odnosu na relaciju R', koji se sa w_{i+1} podudara u svim propozicionalnim varijablama
- ako Igrač I u svom potezu može pomaknuti oznaku $\odot$ s nekog w'_i na neki w'_{i+1} u strukturi $\mathfrak{M}'$, to znači da svijet w'_i ima sljedbenika u odnosu na relaciju R'. Tada mogućnost odgovora Igrača II znači da neki w_i u strukturi $\mathfrak{M}$ na kojem se dotad nalazila oznaka $\odot$ ima sljedbenika w_{i+1} u odnosu na relaciju R, koji se sa w_{i+1} podudara u svim propozicionalnim varijablama

Napomena 2.1.1. *Iz definicije bisimulacijske igre lako se vidi da postoje točno četiri moguća ishoda:*

1. *Svjetovi na kojima se trenutno nalaze oznake $\odot$ u obje strukture nemaju sljedbenike u odnosu na odgovarajuće relacije dostiživosti, tako da Igrač I ne može odigrati dozvoljen potez.*
2. *U nekoj od struktura na kojima igramo bisimulacijsku igru trenutno označeni svijet ima sljedbenika u odnosu na odgovarajuću relaciju dostiživosti, dok trenutno označeni svijet u drugoj strukturi nema sljedbenika u odnosu na odgovarajuću relaciju dostiživosti, tako da Igrač II ne može odigrati dozvoljen potez.*
3. *U nekom od poteza Igrač I je u nekoj od promatranih struktura pomaknuo oznaku $\odot$ s trenutno označenog svijeta na nekog njegovog sljedbenika u odnosu na odgovarajuću relaciju dostiživosti. Trenutno označeni svijet u suprotnoj strukturi ima sljedbenika (ili više njih) u odnosu na odgovarajuću relaciju dostiživosti, ali nijedan od njih se ne podudara s trenutno označenim svijetom u suprotnoj strukturi*

na svim propozicionalnim varijablama. U ovom slučaju Igrač II opet ne može odigrati dozvoljen potez.

4. *Igra može potrajati i beskonačno mnogo poteza.*

U slučajevima 1. i 4. pobjeđuje Igrač II, dok u slučajevima 2. i 3. pobjeđuje Igrač I.

Definicija 2.1.2. *Reći ćemo da Igrač II ima pobjedničku strategiju u bisimulacijskoj igri na strukturama $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ s oznakama $\odot$ postavljenima na početku na $w \in \mathfrak{M}$ i $w' \in \mathfrak{M}'$ ako uvijek na potez Igrača I može odgovoriti potezima koji mu garantiraju pobjedu.*

Vrijedi sljedeća propozicija:

Propozicija 2.1.3. *Neka su $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ i $\mathfrak{M}' = (W', R', V')$ Kripkeove strukture i $w \in \mathfrak{M}$ i $w \in \mathfrak{M}$ i $w' \in \mathfrak{M}'$ proizvoljni svjetovi u njima. Igrač II ima pobjedničku strategiju u igri bisimulacija na navedenim strukturama sa oznakama $\odot$ postavljenim u početku na w i w' ako i samo ako vrijedi*

$$\mathfrak{M}, w \leftrightarrows \mathfrak{M}', w'.$$

Dokaz. Nužnost je očita. Naime, lako se vidi da bisimulacija definira pobjedničku strategiju za Igrača II.
Za dokazati dovoljnost, prvo ćemo definirati $Z \subseteq W \times W'$ kao skup svih $(u, u') \in W \times W'$ takvih da Igrač II ima pobjedničku strategiju u bisimulacijskoj igri na strukturama $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ sa oznakama $\odot$ u početku postavljenima na u i u'. Primijetimo odmah da je posebno i $(w, w') \in Z$.
Bez smanjenja općenitosti možemo isključiti irelevantne svjetove, tj. one koje Igrač II neće birati, pošto vodi računa o pobjedničkoj strategiji (naime, kad u nastavku budemo dokazivali da je Z bisimulacija, zanimat će nas samo svjetovi vezani uz tu relaciju). Preciznije, možemo pretpostaviti da je:

- W skup svih svjetova u takvih da postoji svijet u' takav da je uZu';
- relacija R na W definirana sa: uRv ako i samo ako se Igrač II može po pravilima pobjedničke strategije za bisimulacijsku igru s oznakama $\odot$ u početku postavljenima na w i w' pomaknuti s u na v;
- valuacija V restrikcija početne valuacije na način da za svaku propozicionalnu varijablu p promatramo skup $V(p) \cap W$.

Analogno možemo pretpostaviti da je:

- W' skup svih svjetova u' takvih da postoji svijet u takav da je uZu';

- relacija R' definirana sa: $u'R'v'$ ako i samo ako se Igrač II može po pravilima pobjedničke strategije za bisimulacijsku igru s oznakama $\odot$ u početku postavljenima na w i w' pomaknuti s u' na v';

- valuacija V' restrikcija početne valuacije na način da za svaku propozicionalnu varijablu p promatramo skup $V'(p) \cap W'$.

Želimo pokazati da je Z bisimulacija takva da vrijedi $Z : \mathfrak{M}, w \leftrightarroweq \mathfrak{M}', w'$. U tu svrhu moramo provjeriti da ona zadovoljava uvjete *at*, *forth*, i *back*.

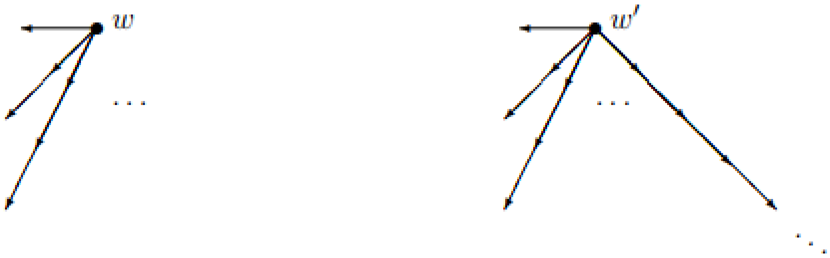
- *at*
  Neka je $(u, u') \in Z$. Iz definicije relacije Z tada imamo da Igrač II ima pobjedničku strategiju u bisimulacijskoj igri u kojoj su oznake $\odot$ u početku postavljene na u i u'. Posebno, Igrač II ne gubi bisimulacijsku igru u kojoj su oznake $\odot$ na početku postavljene na u i u'. Iz definicije bisimulacijske igre sada posebno slijedi da za svaku propozicionalnu varijablu p vrijedi $u \in V(p)$ ako i samo ako $u' \in V'(p)$.

- *forth*
  Neka je uZu' i uRv. Iz definicije relacije Z imamo da Igrač II ima pobjedničku strategiju u bisimulacijskoj igri s oznakama $\odot$ u početku postavljenima na u i u'. Uvjet uRv možemo interpretirati kao da je u bisimulacijskoj igri s oznakama u početku postavljenima na u i u' Igrač I oznaku $\odot$ pomaknuo sa svijeta u na svijet v. Pošto Igrač II ima pobjedničku strategiju u bisimulacijskog igri s oznakama $\odot$ u početku postavljenima na u i u', tada postoji svijet $v' \in \mathfrak{M}'$ takav da za svaku propozicionalnu varijablu p vrijedi da je $v \in V(p)$ ako i samo ako $v' \in V'(p)$ te $u'R'v'$ (odnosno, Igrač II na potez Igrača I, koji u strukturi $\mathfrak{M}$ pomakne oznaku $\odot$ s u na v, odgovara pomicanjem oznake $\odot$ u strukturi $\mathfrak{M}'$ sa u' na v'). Pošto vrijedi $u'R'v'$ te smo napravili restrikciju relacije R', tada po definiciji relacije Z vrijedi vZv'.

- *back*
  Dokazuje se analogno uvjetu *forth*.

$\square$

Primjer 2.1.4. *Propozicija 2.1.3. nam omogućava da konstruiramo protuprimjer koji pokazuje da ne vrijedi obrat Teorema 1.2.4.*
U tu svrhu definirajmo strukture $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ *i* $\mathfrak{M}' = (W', R', V')$*, kao na slici 2.1 (strelice označavaju da su svjetovi u relacijama R, odnosno R', pri čemu strelice koje slijede zbog tranzitivnosti relacija R i R' nisu označene). Oba modela za svaki n*$\in \mathbb{N}$ *posjeduju konačnu granu duljine n, ali* $\mathfrak{M}'$ *dodatno ima i jednu beskonačnu granu. Također, za sve propozicionalne varijable definiramo:*



Slika 2.1: strukture $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$

$$V(p) = V'(p) = \emptyset$$

Zasad nam je cilj pokazati da ne može vrijediti $\mathfrak{M}, w \leftrightarrows \mathfrak{M}', w'$ (kasnije ćemo pokazati da vrijedi $w \leftrightsquigarrow w'$). U tu svrhu moramo odrediti pobjedničku strategiju za Igrača I u bisimulacijskoj igri na ovim strukturama, ako su u početku oznake $\odot$ postavljene na w i w' (moguće ih je u nultom potezu postaviti na te svjetove jer se w i w' podudaraju u svim propozicionalnim varijablama). Isto tako, zbog $V(p) = V'(p) = \emptyset$ imamo da se svi svjetovi u obje strukture podudaraju u svim propozicionalnim varijablama. Stoga je dozvoljeni potez svakog od Igrača zapravo pomicanje oznake $\odot$ prema nekom sljedbeniku jednog od trenutno označenih svjetova u odnosu na odgovarajuću relaciju dostiživosti.
Sada se lako vidi da se pobjednička strategija Igrača I sastoji od toga da u prvom potezu u igri pomakne oznaku $\odot$ s $w' \in \mathfrak{M}'$ na njegovog sljedbenika na beskonačnoj grani. Igrač II tada odgovara potezom u strukturi $\mathfrak{M}$. Pritom mora pomaknuti oznaku $\odot$ s w na nekog njegovog sljedbenika. Struktura $\mathfrak{M}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ sadrži granu duljine n, međutim, za razliku od strukture $\mathfrak{M}'$, ne sadrži beskonačnu granu. Stoga Igrač II mora pomaknuti oznaku $\odot$ prema nekom sljedbeniku od w koji se nalazi, recimo, na grani duljine $k \in \mathbb{N}$. Lako se vidi da je svaki idući potez obaju igrača pomicanje prema sljedbenicima trenutno označenih svjetova u odabranim granama. Međutim, pošto je odabrana grana u strukturi $\mathfrak{M}$ duljine k, nakon najviše k poteza Igrač II će ostati bez odgovora na potez Igrača I. Naime, trenutno označeni svjetovi će biti onaj na beskonačnoj grani u $\mathfrak{M}'$ koji je za k koraka udaljen od w' i onaj na odabranoj grani u $\mathfrak{M}$ koji je za k koraka udaljen od w. Međutim, taj svijet nema sljedbenika. Dakle, Igrač I pobjeđuje i ne može vrijediti $\mathfrak{M}, w \leftrightarrows \mathfrak{M}', w'$.

2.2 Konačne bisimulacije

Od interesa će nam biti promatrati i konačne aproksimacije bisimulacija. Počinjemo s nekoliko definicija.

Definicija 2.2.1. *Neka je* $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ *Kripkeova struktura i* $w \in \mathfrak{M}$*. Uređeni par* $(\mathfrak{M}, w)$ *naziva se **točkovna Kripkeova struktura**.*[2]

Definicija 2.2.2. *Neka su* $(\mathfrak{M}, w)$ *i* $(\mathfrak{M}', w')$ *točkovne Kripkeove strukture. Sa*

$$\mathfrak{M}, w \leftrightarroweq_n \mathfrak{M}', w'$$

označavat ćemo činjenicu da Igrač II ima pobjedničku strategiju u bisimulacijskoj igri na $\mathfrak{M}$ *i* $\mathfrak{M}'$ *s oznakama* $\odot$ *postavljenim u početku na* w *i* w'*, pri čemu igra traje najviše* $n \in \mathbb{N}$ *poteza.*
Relaciju $\leftrightarroweq_n$ *između točkovnih Kripkeovih struktura zovemo **n-bisimulacija**.*

Napomena 2.2.3. *Iz definicije 1.3.6. je jasno da* $\mathfrak{M}, w \leftrightarroweq \mathfrak{M}', w'$ *povlači da* $\mathfrak{M}, w \leftrightarroweq_n \mathfrak{M}', w'$ *vrijedi za svaki* $n \in \mathbb{N}$*. Isto tako, ako za neki* $n \in \mathbb{N}$ *vrijedi* $\mathfrak{M}, w \leftrightarroweq_n \mathfrak{M}', w'$*, onda za svaki* $k \in \mathbb{N}$*, pri čemu je* $k \leq n$ *vrijedi* $\mathfrak{M}, w \leftrightarroweq_k \mathfrak{M}', w'$*.*
Dodatno, s $\mathfrak{M}, w \leftrightarroweq_0 \mathfrak{M}', w'$ *ćemo označavati činjenicu da su na svjetovima* w *i* w' *istinite iste propozicionalne varijable. Primijetimo da je ova oznaka u duhu pravila bisimulacijske igre, gdje stavljanje oznaka* $\odot$ *na* w *i* w' *koji moraju zadovoljavati iste propozicionalne varijable smatramo nultim potezom.*

Provjerimo da je za svaki $n \in \mathbb{N}$ $\leftrightarroweq_n$ relacija ekvivalencije na skupu svih konačnih točkovnih Kripkeovih struktura[3]:

- refleksivnost
  $\mathfrak{M}, w \leftrightarroweq_n \mathfrak{M}, w$ očito vrijedi za svaku točkovnu Kripkeovu strukturu $(\mathfrak{M}, w)$. Naime, pobjednička strategija Igrača II se naprosto sastoji od imitiranja poteza Igrača I. Takvi su potezi uvijek mogući jer se radi o identičnim strukturama.

- simetričnost
  Pretpostavimo da vrijedi $\mathfrak{M}, w \leftrightarroweq_n \mathfrak{M}', w'$ za neke točkovne Kripkeove strukture. Tada očito vrijedi i $\mathfrak{M}', w' \leftrightarroweq_n \mathfrak{M}, w$. Naime, zbog prethodno opisanih pravila igre bisimulacija, lako se vidi da je za Igrača II u pitanju ista pobjednička strategija kojom pokazuje da vrijedi $\mathfrak{M}, w \leftrightarroweq_n \mathfrak{M}', w'$

[2]eng. *pointed Kripke structure*

[3]Možemo se ograničiti na strukture čiji su nosači konačni podskupovi od $\mathbb{N}$ pa stoga možemo govoriti i o skupu točkovnih Kripkeovih struktura.

- tranzitivnost
  Pretpostavimo da vrijedi $\mathfrak{M}, w \leftrightarroweq_n \mathfrak{M}', w'$ i $\mathfrak{M}', w' \leftrightarroweq_n \mathfrak{M}'', w''$. To znači da Igrač II ima pobjedničku strategiju u igri bisimulacija na $(\mathfrak{M}, w)$ i $(\mathfrak{M}', w')$ protiv Igrača I i da Igrač II ima pobjedničku strategiju protiv Igrača I u igri bisimulacija na $(\mathfrak{M}', w')$ i $(\mathfrak{M}'', w'')$. Želimo dokazati da Igrač II ima pobjedničku strategiju protiv Igrača I na $\mathfrak{M}, w$ i $\mathfrak{M}'', w''$. Igrač I može u svakom potezu izabrati hoće li pomaknuti oznaku $\odot$ u strukturi $\mathfrak{M}$ ili u strukturi $\mathfrak{M}''$. Sada imamo dva slučaja:

  1. Ako Igrač I pomakne oznaku $\odot$ u strukturi $\mathfrak{M}$, tada će Igrač II u strukturi $\mathfrak{M}''$ povući potez kojim bi odgovorio na potez koji bi povukao u strukturi $\mathfrak{M}'$ kao odgovor na potez Igrača I u strukturi $\mathfrak{M}$. Takav potez je moguć zbog $\mathfrak{M}, w \leftrightarroweq_n \mathfrak{M}', w'$ i $\mathfrak{M}', w' \leftrightarroweq_n \mathfrak{M}'', w''$.
  2. Ako Igrač I pomakne oznaku $\odot$ u strukturi $\mathfrak{M}''$, tada će Igrač II u strukturi $\mathfrak{M}$ povući potez kojim bi odgovorio na potez koji bi povukao u strukturi $\mathfrak{M}'$ kao odgovor na potez Igrača I u strukturi $\mathfrak{M}''$. Takav potez je također moguć zbog $\mathfrak{M}, w \leftrightarroweq_n \mathfrak{M}', w'$ i $\mathfrak{M}', w' \leftrightarroweq_n \mathfrak{M}'', w''$.

U daljnjem tekstu ćemo dokazati neke važne rezultate o konačnim bisimulacijama. Opet nam treba nekoliko definicija.

Definicija 2.2.4. *Neka je φ proizvoljna formula modalne logike.* ***Stupanj formule*** *φ (u oznaci $deg(\varphi)$) definiramo rekurzivno na sljedeći način:*

- *ako je φ propozicionalna varijabla, tada je $deg(\varphi) = 0$*
- *ako je $\varphi = \neg\psi$, tada je $deg(\varphi) = deg(\psi)$*
- *ako je $\varphi = \psi \circ \eta$, gdje je $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, tada je $deg(\varphi) = max\{deg(\psi), deg(\eta)\}$*
- *ako je $\varphi = \diamond\psi$, tada je $deg(\varphi) = deg(\psi) + 1$*

Skup svih formula φ takvih da je $deg(\varphi) \leq n$ ($n \in \mathbb{N}$) označavat ćemo s ML_n.

Definicija 2.2.5. *Neka su $(\mathfrak{M}, w)$ i $(\mathfrak{M}', w')$ dvije točkovne Kripkeove strukture. Reći ćemo da su $(\mathfrak{M}, w)$ i $(\mathfrak{M}', w')$* ***n-modalno ekvivalentne*** *(u oznaci $(\mathfrak{M}, w) \equiv^n_{ML} (\mathfrak{M}', w')$) ako za svaku formulu $\varphi \in ML_n$ vrijedi: $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ ako i samo ako $\mathfrak{M}', w' \Vdash \varphi$.*

Sljedeća propozicija nam govori u kakvom su odnosu n-modalna ekvivalencija i konačna bisimuliranost.

Propozicija 2.2.6. *Za svake dvije točkovne Kripkeove strukture $(\mathfrak{M}, w)$ i $(\mathfrak{M}', w')$ vrijedi:*

$$\textit{ako } \mathfrak{M}, w \leftrightarroweq_n \mathfrak{M}', w', \textit{ onda } (\mathfrak{M}, w) \equiv^n_{ML} (\mathfrak{M}', w').$$

Dokaz. Tvrdnju dokazujemo indukcijom po n.

- baza indukcije
  Pretpostavimo da vrijedi $\mathfrak{M}, w \leftrightarrows_0 \mathfrak{M}', w'$. To zapravo znači da se svjetovi w i w' podudaraju u svim propozicionalnim varijablama (jer postavljanje oznaka $\odot$ na w i w' smatramo nultim potezom u bisimulacijskoj igri). Pošto su formule stupnja 0 točno one koje sadrže samo logičke veznike i propozicionalne varijable, sada očito imamo da za svaku takvu formulu φ vrijedi $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ ako i samo ako $\mathfrak{M}', w' \Vdash \varphi$. Prema tome, vrijedi $(\mathfrak{M}, w) \equiv^0_{ML} (\mathfrak{M}', w')$

- korak indukcije
  Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi da n-bisimuliranost točkovnih struktura $(\mathfrak{M}, w)$ i $(\mathfrak{M}', w')$ povlači i njihovu n-modalnu ekvivalenciju. Neka je φ proizvoljna modalna formula takva da je $deg(\varphi) = n + 1$. Koncentrirat ćemo se na najkompliciraniji slučaj: kad je φ oblika $\diamond\psi$, gdje ψ neka formula stupnja n. Pretpostavimo sada da Igrač II ima pobjedničku strategiju u bisimulacijskoj igri s oznakama $\odot$ na početku postavljenima na w i w' u $n + 1$ poteza. Neka su oznake $\odot$ nakon prvog poteza postavljene na $u \in \mathfrak{M}$ i $u' \in \mathfrak{M}'$, koji su sljedbenici od w i w' redom. Sada imamo da Igrač II ima pobjedničku strategiju u bisimulacijskoj igri na $(\mathfrak{M}, u)$ i $(\mathfrak{M}', u')$ u n poteza, a to po pretpostavci indukcije znači posebno da i za formulu ψ vrijedi $\mathfrak{M}, u \Vdash \psi$ ako i samo ako $\mathfrak{M}', u' \Vdash \psi$. Iz ovog pak slijedi $\mathfrak{M}', w' \Vdash \varphi$ ako i samo ako $\mathfrak{M}', w' \Vdash \varphi$, što je i trebalo dokazati.

$\square$

Primjer 2.2.7. *U primjeru 2.1.4. smo preko bisimulacijske igre pokazali da točkovne strukture $(\mathfrak{M}, w)$ i $(\mathfrak{M}', w')$ nisu bisimulirane. Sada ćemo preko konačnih bisimulacija i uz pomoć propozicije 2.2.6. pokazati da su svjetovi w i w' modalno ekvivalentni, tj. da za svaku modalnu formulu φ vrijedi sljedeća ekvivalencija:*

$$\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{M}', w' \Vdash \varphi$$

Neka je φ proizvoljna modalna formula i neka je $n = deg(\varphi)$. Iz propozicije 2.2.6. slijedi da je dovoljno dokazati da Igrač II ima pobjedničku strategiju u n poteza u bisimulacijskoj igri na $(\mathfrak{M}, w)$ i $(\mathfrak{M}', w')$. Prvo uočimo da za $n = 0$ Igrač II pobjeđuje jer se w i w' podudaraju u svim propozicionalnim varijablama. Kao i u primjeru 2.1.4. (zbog $V(p) = \emptyset$ za svaku propozicionalnu varijablu p) , vidimo da je Igraču II za odgovor na potez Igrača I dovoljno pomaknuti oznaku $\odot$ prema nekom sljedbeniku trenutno označenog svijeta. Neka je sada $n \geq 0$. Pobjedničku strategiju za Igrača II konstruiramo u odnosu na prvi potez Igrača I. Imamo sljedećih nekoliko slučajeva:

- *Igrač I u strukturi $\mathfrak{M}$ ($\mathfrak{M}'$) pomiče oznaku $\odot$ s w (w') na nekog njegovog sljedbenika na grani duljine $l \leq n$. Tada Igrač II pomiče oznaku $\odot$ sa w' (w) na nekog njegovog sljedbenika u $\mathfrak{M}'$ ($\mathfrak{M}$), koji se nalazi na grani duljine l. Sada je jasno da će nakon najviše l poteza trenutno označeni svjetovi ostati bez sljedbenika, tj. pobjeđuje Igrač II.*

- *Igrač I u strukturi $\mathfrak{M}$ ($\mathfrak{M}'$) pomiče oznaku $\odot$ s w (w') na nekog njegovog sljedbenika na grani duljine $l > n$. Tada Igrač II također pomiče oznaku $\odot$ sa w' (w) na nekog njegovog sljedbenika u $\mathfrak{M}'$ ($\mathfrak{M}$), koji se nalazi na grani duljine l. U ovom slučaju Igrač II pobjeđuje jer može odgovoriti na svaki potez Igrača I.*

- *Igrač I u strukturi $\mathfrak{M}'$ pomiče oznaku $\odot$ s w' na njegovog sljedbenika na beskonačnoj grani. Tada Igrač II mora pomaknuti oznaku $\odot$ s w na nekog njegovog sljedbenika koji se nalazi na grani duljine barem n. Sada očito Igrač II pobjeđuje.*

Dakle, Igrač II ima pobjedničku strategiju u bisimulacijskoj igri u n poteza na $(\mathfrak{M}, w)$ i $(\mathfrak{M}', w')$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Prema propoziciji 2.2.6. sada imamo $(\mathfrak{M}, w) \equiv^n_{ML} (\mathfrak{M}', w')$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, tj. za svaki $n \in \mathbb{N}$ i za svaku modalnu formulu φ stupnja n vrijedi $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ ako i samo ako $\mathfrak{M}', w' \Vdash \varphi$, iz čega zaključujemo da su w i w' modalno ekvivalentni svjetovi.

2.3 Karakteristične formule

Za obrat propozicije 2.2.6. ključan će biti prelazak na modalni jezik s konačno mnogo propozicionalnih varijabli. Jedan od razloga sadržan je u sljedećoj lemi.

Lema 2.3.1. *Pretpostavimo da je skup propozicionalnih varijabli osnovnog modalnog jezika konačan. Tada za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji, do na logičku ekvivalentnost, konačno mnogo formula φ, takvih da je $deg(\varphi) \leq n$.*

Dokaz. Označimo skup propozicionalnih varijabli s $\Theta = \{p_1, p_1, ..., p_m\}$. Lemu ćemo dokazati indukcijom po n.

- baza indukcije
  Neka je $n = 0$. Formule stupnja nula su one izgrađene samo od logičkih veznika, propozicionalnih varijabli i konstanti $\top$ i $\bot$. Prema tome, dovoljno je dokazati da formula propozicionalne logike koje su izgrađene od m propozicionalnih varijabli ima, do na logičku ekvivalenciju, konačno mnogo (konstante $\top$ i $\bot$ su pokrate za neku fiksnu tautologiju i antitautologiju, poput $P_1 \vee \neg P_1$ i $P_1 \wedge \neg P_1$). Totalnih interpretacija (funkcija sa skupa propozicionalnih varijabli u $\{0, 1\}$) ima 2^m. Pošto su dvije formule propozicionalne logike ekvivalentne ako i samo ako se podudaraju

na svim interpretacijama, sada imamo da takvih formula ima koliko ima i podskupova skupa svih interpretacija, a to je 2^{2^m}

- korak indukcije
  Neka je $n \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $k \leq n$ postoji samo konačno mnogo modalnih formula stupnja k koje su međusobno neekvivalentne. Dokažimo da postoji samo konačno mnogo modalnih formula čiji je stupanj manji ili jednak n koje su međusobno neekvivalentne. U tu svrhu dokažimo prvo pomoćnu tvrdnju:

  – Postoji samo konačno mnogo formula oblika $\diamond\psi$, pri čemu je $deg(\psi) < n$, koje su međusobno neekvivalentne.

  Iz pretpostavke indukcije skup S svih modalnih formula stupnja strogo manjeg od n, koje su međusobno neekvivalentne, je konačan. Neka je $S = \{\psi_1, ..., \psi_l\}$. Neka je φ stupnja n oblika $\diamond\psi$ te neka je $\mathfrak{M}$ proizvoljna Kripkeova struktura i $w \in \mathfrak{M}$ proizvoljan svijet takav da vrijedi $\mathfrak{M}, w \Vdash \diamond\psi$. Tada postoji $u \in \mathfrak{M}$ takav da vrijedi wRu i $\mathfrak{M}, u \Vdash \psi$. Pošto je $deg(\psi) = n - 1$, tada postoji $i_0 \in \{1, .., l\}$ takav da vrijedi $\mathfrak{M}, u \Vdash \psi_{i_0}$ (zapravo vrijedi i više: formule ψ i ψ_{i_0} su ekvivalentne). No tada očito vrijedi $\mathfrak{M}, w \Vdash \diamond\psi_{i_0}$.
  Dokažimo sada obrat, tj. da $\mathfrak{M}, w \Vdash \diamond\psi_{i_0}$ povlači $\mathfrak{M}, w \Vdash \diamond\psi$. Neka vrijedi $\mathfrak{M}, w \Vdash \diamond\psi_{i_0}$. Tada postoji $u \in \mathfrak{M}$ takav da je wRu i $\mathfrak{M}, u \Vdash \psi_{i_0}$. Pošto su formule ψ i ψ_{i_0} ekvivalentne, to povlači $\mathfrak{M}, u \Vdash \psi$, a ovo povlači $\mathfrak{M}, w \Vdash \diamond\psi$. Time je pomoćna tvrdnja dokazana.
  Dokažimo sada da postoji samo konačno mnogo neekvivalentnih formula čiji je stupanj n. Neka je φ proizvoljna modalna formula stupnja n.Tada postoji savršena konjunktivna normalna forma formule logike sudova $A(P_1, ..., P_l)$ te potformule $\diamond\psi_1$,...,$\diamond\psi_l$ od φ takve da su φ i $A(\diamond\psi_1, ..., \diamond\psi_l)$ ekvivalentne.
  Pošto ima samo konačno mnogo propozicionalnih varijabli, tada i neekvivalentnih savršenih konjunktivnih normalnih formi također ima konačno mnogo. Prema pomoćnoj tvrdnji znamo da formula oblika $\diamond\psi$ čiji je stupanj najviše n isto ima konačno mnogo. Prema tome, modalnih formula stupnja n ima konačno mnogo.

□

U ostatku ovog odjeljka smatramo da je skup propozicionalnih varijabli konačan, tj. $\Theta = \{p_1, p_1, ..., p_m\}$.
Neka je sada $(\mathfrak{M}, w)$ proizvoljna, ali fiksna točkovna Kripkeova struktura. Modalnu formulu $\chi^n_{[\mathfrak{M},w]} \in ML_n$ za zadani $n \in \mathbb{N}$ konstruiramo na sljedeći način:

- za $n = 0$ definiramo

$$\chi^0_{[\mathfrak{M},w]} = \bigwedge_{i=1}^{m} \varphi_m$$

gdje je $\varphi_i = p_i$ ako je $w \in V(p)$, odnosno $\varphi_i = \neg p_i$ ako $w \notin V(p)$

- rekurzivno definiramo

$$\chi^{n+1}_{[\mathfrak{M},w]} := \chi^{0}_{[\mathfrak{M},w]} \wedge \bigwedge_{(w,u)\in R} \Diamond \chi^{n}_{[\mathfrak{M},u]} \wedge \Box \bigvee_{(w,u)\in R} \chi^{n}_{[\mathfrak{M},u]}$$

Formula $\chi^n_{[\mathfrak{M},w]}$ zove se **n-ta karakteristična formula točkovne Kripkeove strukture** $(\mathfrak{M}, w)$**.**
Lako se vidi da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $\mathfrak{M}, w \Vdash \chi^n_{[\mathfrak{M},w]}$. Isto tako, lako možemo vidjeti da čak i ako se struktura $(\mathfrak{M}, w)$ beskonačno grana, konjunkcije i disjunkcije iz rekurzivne definicije ostaju konačne zbog leme 2.3.1.
Karakteristične formule će nam biti most između n-bisimuliranosti i n-modalne ekvivalencije. O tome govori sljedeći teorem.

Teorem 2.3.2. *Neka su* $(\mathfrak{M}, w)$ *i* $(\mathfrak{M}', w')$ *proizvoljne točkovne Kripkeove strukture nad modalnim jezikom s konačno mnogo propozicionalnih varijabli. Tada je za svaki* $n \in \mathbb{N}$ *ekvivalentno:*

1. $\mathfrak{M}, w \leftrightarroows_n \mathfrak{M}', w'$
2. $\mathfrak{M}', w' \Vdash \chi^n_{[\mathfrak{M},w]}$
3. $(\mathfrak{M}, w) \equiv^n_{ML} (\mathfrak{M}', w')$

Dokaz. Implikacija **1.**$\Rightarrow$**3.** vrijedi općenito i dokazali smo je u propoziciji 2.2.6.
Implikacija **3.**$\Rightarrow$**2.** je očita zato što vrijedi $\mathfrak{M}, w \Vdash \chi^n_{[\mathfrak{M},w]}$, pa sada iz 3. jednostavno slijedi $\mathfrak{M}', w' \Vdash \chi^n_{[\mathfrak{M},w]}$. Naime, strukture $(\mathfrak{M}, w)$ i $(\mathfrak{M}', w')$ se podudaraju na svim formulama stupnja manjeg ili jednakog n, posebno i na $\chi^n_{[\mathfrak{M},w]}$.
Pokažimo još da $\mathfrak{M}', w' \Vdash \chi^n_{[\mathfrak{M},w]}$ povlači $\mathfrak{M}, w \leftrightarroows_n \mathfrak{M}', w'$. Tvrdnju dokazujemo indukcijom po n.

- baza indukcije
  Neka je $n = 0$. Pretpostavimo da vrijedi $\mathfrak{M}', w' \Vdash \chi^0_{[\mathfrak{M},w]}$. To znači da w' zadovoljava iste propozicionalne varijable kao i w. Prema tome, Igrač II pobjeđuje u nultom potezu.

- korak indukcije
  Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}$ $\mathfrak{M}', w' \Vdash \chi^n_{[\mathfrak{M},w]}$ povlači $\mathfrak{M}, w \leftrightarroows_n \mathfrak{M}', w'$. Nadalje, pretpostavimo da vrijedi $\mathfrak{M}', w' \Vdash \chi^{n+1}_{[\mathfrak{M},w]}$. To povlači (iz definicije $\chi^{n+1}_{[\mathfrak{M},w]}$) da vrijede sljedeće tri tvrdnje:

  - $\mathfrak{M}', w' \Vdash \chi^0_{[\mathfrak{M},w]}$,

– $\mathfrak{M}', w' \Vdash \bigwedge_{(w,u)\in R} \Diamond \chi^n_{[\mathfrak{M},u]}$ i
– $\mathfrak{M}', w' \Vdash \Box \bigvee_{(w,u)\in R} \chi^n_{[\mathfrak{M},u]}$.

Prva tvrdnja povlači (po bazi indukcije) da oznake $\odot$ možemo u nultom potezu postaviti na w i w'.
Druga tvrdnja povlači da za svakog R-sljedbenika u od w vrijedi $\mathfrak{M}', w' \Vdash \Diamond \chi^n_{[\mathfrak{M},u]}$. Ovo pak povlači da za svakog R-sljedbenika u od w postoji R'-sljedbenik u' od w' takav da vrijedi $\mathfrak{M}', u' \Vdash \chi^n_{[\mathfrak{M},u]}$. Iz ovoga slijedi (po pretpostavci indukcije) da za svakog R-sljedbenika u od w postoji R'-sljedbenik u' od w' takav da vrijedi $\mathfrak{M}, u \leftrightarrows_n \mathfrak{M}', u'$
Treća tvrdnja povlači da za svakog R'-sljedbenika u' od w' vrijedi $\mathfrak{M}', u' \Vdash \bigvee_{(w,u)\in R} \chi^n_{[\mathfrak{M},u]}$. Ovo pak povlači da za svakog R'-sljedbenika u' od w' postoji R-sljedbenik u od w takav da vrijedi $\mathfrak{M}', u' \Vdash \chi^n_{[\mathfrak{M},u]}$. Iz ovoga slijedi (po pretpostavci indukcije) da za svakog R'-sljedbenika u' od w' postoji R-sljedbenik u od w takav da vrijedi $\mathfrak{M}, u \leftrightarrows_n \mathfrak{M}', u'$
Iz prethodnih razmatranja sada dobivamo da vrijedi $\mathfrak{M}, w \leftrightarrows_{n+1} \mathfrak{M}', w'$.

□

Iz teorema 2.3.2. direktno slijedi sljedeći korolar na kojeg ćemo se pozivati u daljnjem tekstu.

Korolar 2.3.3. *Neka je skup propozicionalnih varijabli konačan. Tada nad klasom svih točkovnih Kripkeovih struktura vrijedi:*

1. *Za svaki $n \in \mathbb{N}$ relacija $\leftrightarrows_n$ ima konačno mnogo klasa ekvivalencije.*
2. *Svaka klasa ekvivalencije od $\leftrightarrows_n$ definabilna je modalnom formulom.*

Dokaz. 1. Iz leme 2.3.1. slijedi da modalnih formula stupnja manjeg ili jednakog n do na logičku ekvivalenciju ima konačno mnogo. Označimo njihov broj (u ovisnosti od n) sa $F(n)$. Iz teorema 2.3.2. imamo da je, ako je skup propozicionalnih varijabli konačan, n-bisimuliranost ekvivalentna n-modalnoj ekvivalenciji. Dvije su točkovne Kripkeove strukture n-modalno ekvivalentne ako se podudaraju na istom podskupu skupa svih modalnih formula stupnja manjeg ili jednakog n, a takvih podskupova ima $2^{F(n)}$, odnosno konačno mnogo.

2. Označimo sa C proizvoljnu klasu ekvivalencije od $\leftrightarrows_n$. Lako se vidi da za formulu

$$\varphi = \bigvee_{(\mathfrak{M},w)\in C} \chi^n_{[\mathfrak{M},w]}$$

vrijedi $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ ako i samo $(\mathfrak{M}, w) \in C$. Dakle, formula φ definira klasu C.

□

2.4 Stablaste strukture

U ovom odjeljku ćemo naglasak staviti na Kripkeove okvire, točnije malo ćemo se više pozabaviti relacijom dostiživosti.

Definicija 2.4.1. *Neka je $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ Kripkeova struktura te w i v proizvoljni svjetovi u njoj. Konačan niz $(w, w_1, ..., w_{n-1}, v)$ svjetova u $\mathfrak{M}$ zvat ćemo* ***putem od w do v*** *u strukturi $\mathfrak{M}$ ako vrijedi $wRw_1R...Rw_{n-1}Rv$. Prirodan broj n u tom ćemo slučaju zvati* ***duljinom puta od w do v****.*

Napomena 2.4.2. *Primijetimo da u nekoj Kripkeovoj strukturi put između dvaju svjetova ne mora biti jedinstven. Neka je $\mathfrak{M} = (W, R, V)$, pri čemu je $W = \{w, v, u\}$, a $R = \{(w, v), (v, u), (v, v)\}$. Lako se vidi da je (w, v, u) jedan put od w do u, međutim jedan drugi put od w do u je i npr. (w, v, v, v, v, u).*

Definicija 2.4.3. *Neka je $\mathfrak{M}$ proizvoljna Kripkeova struktura i $w \in \mathfrak{M}$ neki svijet u njoj. Skup svih svjetova u $\mathfrak{M}$ za koje postoji put od w duljine najviše l nazivamo* ***l-okolinom*** *od w u strukturi $\mathfrak{M}$ (u oznaci $U^l(w)$).*
Sa $\mathfrak{M} \upharpoonright U^l(w)$ označavamo podstrukturu od $\mathfrak{M}$ induciranu restrikcijom na $U^l(w)$.

Napomena 2.4.4. *Strukturu $\mathfrak{M} \upharpoonright U^l(w)$ možemo zamisliti kao podstrukturu od $\mathfrak{M}$ na način da smo odrezali svjetove za koje je duljina puta od w veća od l.*

Definicija 2.4.5. *Za točkovnu Kripkeovu strukturu $(\mathfrak{M}, w)$ reći ćemo da je* ***stablasta*** *ako za svaki svijet $u \in \mathfrak{M}$ različit od w postoji jedinstven put od w do u.*
Za točkovnu Kripkeovu strukturu $(\mathfrak{M}, w)$ reći ćemo da je ***l-lokalno stablasta*** *ako je $\mathfrak{M} \upharpoonright U^l(w)$ stablasta struktura.*
Visinu stablaste strukture $(\mathfrak{M}, w)$ definiramo kao maksimum duljina putova od w do $u \in W \setminus \{w\}$.

Lema 2.4.6. *Za točkovne Kripkeove strukture $(\mathfrak{M}, w)$ i $(\mathfrak{M}', w')$ vrijedi:*

1. *$\mathfrak{M}, w \leftrightarroweq_l \mathfrak{M}', w'$ ako i samo ako $\mathfrak{M} \upharpoonright U^l(w), w \leftrightarroweq_l \mathfrak{M}' \upharpoonright U^l(w'), w'$*
2. *Ako su $\mathfrak{M}, w$ i $\mathfrak{M}', w'$ stablaste strukture visine l, tada se l-bisimulacija podudara s bisimulacijom, tj.*

$$\mathfrak{M}, w \leftrightarroweq_l \mathfrak{M}', w' \text{ ako i samo ako } \mathfrak{M}, w \leftrightarroweq \mathfrak{M}', w'$$

Dokaz. 1. Dovoljno je pokazati da vrijedi $\mathfrak{M} \upharpoonright U^l(w), w \leftrightarroweq_l \mathfrak{M}, w$. No, to je očito jer je $(\mathfrak{M} \upharpoonright U^l(w), w)$ podstrukura od $(\mathfrak{M}, w)$ koja sadrži sve svjetove čija je duljina puta do w najviše l pa se pobjednička strategija Igrača II u bisimulacijskoj igri sastoji od imitiranja poteza Igrača I.

Pretpostavimo da vrijedi $\mathfrak{M} \upharpoonright U^l(w), w \leftrightarroows_l \mathfrak{M}' \upharpoonright U^l(w'), w'$. Tada imamo

$$\mathfrak{M}, w \leftrightarroows_l \mathfrak{M} \upharpoonright U^l(w), w \leftrightarroows_l \mathfrak{M}' \upharpoonright U^l(w'), w' \leftrightarroows_l \mathfrak{M}', w'$$

pa zbog tranzitivnosti od $\leftrightarroows_l$ slijedi $\mathfrak{M}, w \leftrightarroows_l \mathfrak{M}', w'$. Obrat se dokazuje analogno.

2. Dovoljno je primijetiti da u ovom slučaju svaka bisimulacijska igra završava nakon najviše l poteza, točnije nakon najviše l poteza oznake $\odot$ će se nalaziti na svjetovima bez sljedbenika.

□

Sada ćemo pokazati da za svaku točkovnu Kripkeovu strukturu $(\mathfrak{M}, w)$ postoji stablasta struktura koja joj je bisimulirana.

Definicija 2.4.7. *Neka je $(\mathfrak{M}, w)$ proizvoljna točkasta Kripkeova struktura.* ***Stablasto razmatanje od $\mathfrak{M}$ iz*** *w, u oznaci $\mathfrak{M}^*_w$ je Kripkeova struktura (W^*_w, R^*_w, V^*_w), pri čemu je:*

- *W^*_w skup svih konačnih nizova $(w, w_1, ..., w_n)$ takvih da su $w, w_1, ...w_n \in W$ i da vrijedi $wRw_1R...Rw_n$*
- *R^*_w definiramo na način da za bilo koja dva w' i w'' iz W^*_w vrijedi: $w'R^*_w w''$ ako i samo ako postoji $v \in W$ takav da je $w' + v = w''$, pri čemu $+$ označava nizovnu konkatenaciju*
- *V^*_w definiramo na način da za svaku propozicionalnu varijablu p vrijedi*

$$V^*_w(p) = \{(w, w_1, ..., w_n) \in W^*_w : w_n \in V(p)\}$$

Napomena 2.4.8. *Lako se provjeri da je $\mathfrak{M}^*_w$ stablasta struktura s korijenom w. Isto tako, lako se vidi da se, čak i ako je polazna točkasta struktura konačna, može dogoditi da njeno stablasto razmatanje bude beskonačna struktura. Neka je $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ takva da je $W = \{w\}$, $R = \{(w, w)\}$ i $V(p) = \emptyset$ za svaku propozicionalnu varijablu p. $\mathfrak{M}^*_w$ je tada struktura takva da je W^*_w skup svih konačnih nizova koji sadrže samo w, pri čemu za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji točno jedan takav konačan niz duljine n, a sljedbenik nekog niza je onaj niz koji sadrži točno jedan w više.*

Propozicija 2.4.9. *Neka je $(\mathfrak{M}, w)$ točkovna Kripkeova struktura. Tada vrijedi:*

1. *$\mathfrak{M}, w \leftrightarroows \mathfrak{M}^*_w, w$*
2. *za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi: $\mathfrak{M}, w \leftrightarroows_n \mathfrak{M}^*_w \upharpoonright U^n(w), w$*
3. *Postoji parcijalno razmatanje koje je bisimulirano sa $(\mathfrak{M}, w)$ i koje je l-lokalno stablasto.*

Dokaz. 1. Iz definicije stablastog razmatanja je jasno da u nultom potezu oznake $\odot$ možemo postaviti na $w \in \mathfrak{M}$ i $w \in \mathfrak{M}_w^*$ (jer se ti svjetovi podudaraju na svim propozicionalnim varijablama). Pobjedničku strategiju za Igrača II u bisimulacijskoj igri sada definiramo rekurzivno na sljedeći način:
neka su nakon n-tog poteza u igri oznake $\odot$ postavljene na neki $w_n \in \mathfrak{M}$ i na neki $(w, w_1, ..., w_n) \in W_w^*$. Ako w_n nema sljedbenika u odnosu na R, tada (po definiciji W_w^*) ni $(w, w_1, ..., w_n)$ nema sljedbenika u odnosu na R_w^* i obratno. Dakle, Igrač II pobjeđuje jer Igrač I ne može odigrati dozvoljen potez. Ukoliko to nije slučaj, Igrač II mora postupiti na sljedeći način:

- ako Igrač I pomakne oznaku $\odot$ u strukturi $\mathfrak{M}$ s w_n na nekog njegovog sljedbenika w_{n+1}, tada Igrač II pomiče oznaku $\odot$ u strukturi $\mathfrak{M}_w^*$ s $(w, w_1, ..., w_n)$ na njegovog sljedbenika $(w, w_1, ..., w_n, w_{n+1})$. Iz definicije valuacije V_w^* jasno je da se novooznačeni vrhovi podudaraju u svim propozicionalnim varijablama.
- ako Igrač I pomakne oznaku $\odot$ u strukturi $\mathfrak{M}_w^*$ s $(w, w_1, ..., w_n)$ na njegovog sljedbenika $(w, w_1, ..., w_n, w_{n+1})$, tada Igrač II pomiče oznaku $\odot$ u strukturi $\mathfrak{M}$ s w_n na njegovog sljedbenika w_{n+1}. Iz definicije valuacije V_w^* opet je jasno da se novooznačeni vrhovi podudaraju u svim propozicionalnim varijablama.

2. Slijedi direktno iz 1. primjenom leme 2.4.6.

3. Traženu strukturu konstruiramo na način da prvo iz $\mathfrak{M}_w^*$ uklonimo sve svjetove čija je udaljenost od w veća od l. Neka je sada $(w, ..., v)$ proizvoljan svijet bez sljedbenika (tzv. list). Ako je njegova udaljenost od w manja od l, onda smo gotovi jer v u strukturi $(\mathfrak{M}, w)$ očito nema sljedbenika. Ako je udaljenost $(w, ...v)$ od w jednaka l, tada na taj list dodamo izomorfnu kopiju podstrukture od $(\mathfrak{M}, w)$ koju čine svi svjetovi za koje postoji put s početkom u $v \in \mathfrak{M}$.

□

Razmatranja iz prethodnih dvaju odjeljaka nam daju sljedeći korolar.

Korolar 2.4.10. *Neka je skup propozicionalnih varijabli konačan. Tada je za svaki $n \in \mathbb{N}$ svaka točkovna Kripkeova struktura n-bisimulirana nekoj konačnoj stablastoj strukturi. Posljedično, svaka ispunjiva modalna formula ispunjiva je u korijenu konačnog stabla.*

Poglavlje 3

Modalna logika i logika prvog reda

U ovom poglavlju ćemo se baviti odnosom modalne logike i logike prvog reda. Točnije, definirat ćemo neke pojmove i izložiti neke rezultate iz logike prvog reda koji će nam trebati za dokaz Van Benthem - Rosenovog teorema.

3.1 Standardna translacija

Kripkeova struktura, na način kako smo je definirali u prvom poglavlju, predstavlja jedan primjer relacijske strukture. Točnije, imamo skup W na kojem su zadane jedan dvomjesna relacija R i prebrojivo mnogo jednomjesnih relacija $V(p)$. Jedan način da opišemo takvu relacijsku strukturu je modalna logika. No postoje i neka sredstva za opisivanje relacijskih struktura koja su jače izražajnosti od osnovnog modalnog jezika. Jedno od njih je i logika prvog reda. U ovom odjeljku ćemo se baviti načinom na koji formule modalne logike postaju formulama logike prvog reda. Takvo preslikavanje ćemo zvati standardnom translacijom te ćemo u nastavku odjeljka proučavati njena svojstva. Prije nego što uopće definiramo standardnu translaciju, moramo definirati jezik teorije prvog reda u koji ćemo prevoditi modalne formule.

Definicija 3.1.1. *Neka je Φ skup propozicionalnih varijabli. Sa $\mathcal{L}^1_\Diamond(\Phi)$ označavamo jezik teorije prvog reda s jednakošću koji ima unarne predikate P_0, P_1, ... koji odgovaraju propozicionalnim varijablama p_0, p_1,... u Φ i binarni relacijski simbol R koji odgovara unarnom modalnom operatoru $\Diamond$. Pišemo $\alpha(x)$ da bi označili formulu jezika teorije prvog reda s jednom slobodnom varijablom x.*

Definicija 3.1.2 (Standardna translacija)**.** *Neka je x varijabla jezika prvog reda. Standardna translacija ST_x, koja prevodi modalne formule u formule jezika $\mathcal{L}^1_\Diamond(\Phi)$ definira se na sljedeći način:*

$$\begin{aligned}
ST_x(p_j) &= P_j x \\
ST_x(\bot) &= x \neq x \\
ST_x(\neg\phi) &= \neg\, ST_x(\phi) \\
ST_x(\phi \vee \psi) &= ST_x(\phi) \vee ST_x(\psi) \\
ST_x(\Diamond\phi) &= \exists y(Rxy \wedge ST_y(\phi))
\end{aligned}$$

pri čemu je y nova varijabla (još neiskorištena u translaciji).

Napomena 3.1.3. *Lako se vidi da za logičku konstantu* $\top$*, bulovske veznike* $\wedge$*,* $\to$ *i* $\leftrightarrow$ *i unarni modalni operator* $\Box$ *vrijedi:*

$$\begin{aligned}
ST_x(\top) &= x = x \\
ST_x(\phi \wedge \psi) &= ST_x(\phi) \wedge ST_x(\psi) \\
ST_x(\phi \to \psi) &= ST_x(\phi) \to ST_x(\psi) \\
ST_x(\phi \leftrightarrow \psi) &= ST_x(\phi) \leftrightarrow ST_x(\psi) \\
ST_x(\Box\phi) &= \forall y(Rxy \to ST_y(\phi))
\end{aligned}$$

Primjer 3.1.4. *Pokazat ćemo na primjeru formule* $\Diamond(\Box p \to q)$ *kako funkcionira definicija standardne translacije.*

$$\begin{aligned}
ST_x(\Diamond(\Box p \to q)) &= \exists y_1(Rxy_1 \wedge ST_{y_1}(\Box p \to q)) \\
&= \exists y_1(Rxy_1 \wedge (ST_{y_1}(\Box p) \to ST_{y_1}(q))) \\
&= \exists y_1(Rxy_1 \wedge (\forall y_2(Ry_1y_2 \to ST_{y_2}(p)) \to Qy_1)) \\
&= \exists y_1(Rxy_1 \wedge (\forall y_2(Ry_1y_2 \to Py_2) \to Qy_1))
\end{aligned}$$

Međutim, ovo nije jedina formula prvog reda koja je standardna translacija modalne formule $\Diamond(\Box p \to q)$*. Još jedna takva formula je*

$$\exists y_{100}(Rxy_{100} \wedge (\forall y_{200}(Ry_{100}y_{200} \to Py_{200}) \to Qy_{100}))$$

Dakle, takvih formula ima beskonačno mnogo, a razlikuju se u jedino u skupu novih varijabli. U nastavku odjeljka ćemo elegantno ukloniti ovu neodređenost.

Sada ćemo malo proanalizirati definiciju standardne translacije. Uočavamo dvije bitne stvari:

- standardna translacija $ST_x(\phi)$ bilo koje modalne formule sadržavat će točno jednu slobodnu varijablu, i to upravo x. Naime, iz ovakve definicije standardne translacije je jasno da će svaki nastup varijable x biti slobodan, dok će nastupi novih varijabli, koje uvodimo prilikom translacije modalnih operatora $\Diamond$ i $\Box$, biti vezani za kvantifikatore $\exists$ (u slučaju operatora $\Diamond$) i $\forall$ (u slučaju operatora $\Box$). To smo i htjeli postići jer, ako se prisjetimo definicije istinitosti modalne formule (definicija 1.1.3.), njenu istinitost provjeravamo na određenom svijetu u nosaču W. Na isti način ćemo istinitost formule prvog reda koja nastaje njenom standardnom translacijom provjeravati evaluirajući slobodnu varijablu x nekim svijetom $w \in W$
- modalni operatori su translatirani kao ograničeni kvantifikatori, tj. u njihovom su dosegu samo svjetovi koji su u relaciji s nekim drugim relevantnim svjetovima

Na početku odjeljka smo naglasili da je Kripkeova struktura $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ primjer relacijske strukture. No nju, osim kao model za osnovni modalni jezik, možemo promatrati i kao model za jezik $\mathcal{L}^1_\Diamond(\Phi)$, tj. kao σ-strukturu $\mathfrak{M} = (W, \varphi)$, gdje se σ sastoji od jednog dvomjesnog relacijskog simbola R i prebrojivo mnogo jednomjesnih relacijskih simbola P_i, $i \in \mathbb{N}$. Funkcija φ sada simbolu R pridružuje relaciju dostiživosti R, dok za svaki jednomjesni relacijski simbol vrijedi $P_i \in \sigma$ vrijedi $\varphi(P_i) = V(p_i)$. Sada očekujemo, ako je definicija standardne translacije bila korektna, da za svaku Kripkeovu strukturu $\mathfrak{M} = (W, R, V)$, za svaki $w \in \mathfrak{M}$ i za svaku modalnu formulu ϕ vrijedi: $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$ ako i samo ako $\mathfrak{M} \models ST_x(\phi)[w]$. O tome nam govori sljedeća propozicija.

Propozicija 3.1.5. *Neka je ϕ formula modalne logike. Tada vrijedi:*

1. *Za sve modele $\mathfrak{M}$ i sve svjetove $w \in \mathfrak{M}$ vrijedi:*
$$\mathfrak{M}, w \Vdash \phi \text{ ako i samo ako } \mathfrak{M} \models ST_x(\phi)[w]$$
2. *Za sve modele $\mathfrak{M}$ vrijedi:*
$$\mathfrak{M} \Vdash \phi \text{ ako i samo ako } \mathfrak{M} \models \forall x\, ST_x(\phi)$$

Dokaz. 1. Tvrdnju dokazujemo indukcijom po složenosti formule ϕ, koju ćemo označiti sa $k(\phi)$.
Neka je $k(\phi) = 0$. Tada je ϕ ili propoziocionalna varijabla ili logička konstanta $\bot$. Ako je ϕ propozicionalna varijabla, tada za proizvoljne $\mathfrak{M}, w$ vrijedi:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}, w \Vdash p &\Leftrightarrow w \in V(p) \\
&\Leftrightarrow w \in \varphi(P) \\
&\Leftrightarrow \mathfrak{M} \models P(w) \\
&\Leftrightarrow \mathfrak{M} \models ST_x(p)[w]
\end{aligned}$$

Ako je $\phi = \bot$, tada, zbog $ST_x(\phi) = x \neq x$, po definiciji imamo $\mathfrak{M}, w \nVdash \bot$ i $\mathfrak{M} \not\models ST_x(\bot)[w]$.
Neka tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$ i za sve formule ψ takve da je $k(\psi) < n$. Neka je ϕ takva da je $k(\phi) = n$. Razlikujemo sljedeće slučajeve:

- Formula ϕ je oblika $\neg\psi$. Tada vrijedi:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}, w \Vdash \phi &\Leftrightarrow \mathfrak{M}, w \Vdash \neg\psi \\
&\Leftrightarrow \mathfrak{M}, w \nVdash \psi \\
&\Leftrightarrow \mathfrak{M} \not\models ST_x(\psi)[w] \\
&\Leftrightarrow \mathfrak{M} \models \neg ST_x(\psi)[w] \\
&\Leftrightarrow \mathfrak{M} \models ST_x(\neg\psi)[w] \\
&\Leftrightarrow \mathfrak{M} \models ST_x(\phi)[w]
\end{aligned}$$

- Formula ϕ je oblika $\psi \vee \eta$. Tada očito imamo $k(\psi) < n$ i $k(\eta) < n$ pa vrijedi:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}, w \Vdash \phi &\Leftrightarrow \mathfrak{M}, w \Vdash \psi \vee \eta \\
&\Leftrightarrow \mathfrak{M}, w \Vdash \psi \text{ ili } \mathfrak{M}, w \Vdash \eta \\
&\Leftrightarrow \mathfrak{M} \models ST_x(\psi)[w] \text{ ili } \mathfrak{M} \models ST_x(\eta)[w] \\
&\Leftrightarrow \mathfrak{M} \models ST_x(\psi \vee \eta)[w] \\
&\Leftrightarrow \mathfrak{M} \models ST_x(\phi)[w]
\end{aligned}$$

- Formula ϕ je oblika $\Diamond\psi$. Zbog $k(\psi) < n$ imamo:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}, w \Vdash \phi &\Leftrightarrow \mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond\psi \\
&\Leftrightarrow \exists v \in \mathfrak{M}(wRv \wedge (\mathfrak{M}, w \Vdash \psi)) \\
&\Leftrightarrow \exists v \in \mathfrak{M}(wRv \wedge (\mathfrak{M} \models ST_x(\psi))) \\
&\Leftrightarrow \mathfrak{M} \models \exists v(Rwv \wedge ST_x(\psi)[w]) \\
&\Leftrightarrow \mathfrak{M} \models ST_x(\Diamond\psi)[w] \\
&\Leftrightarrow \mathfrak{M} \models ST_x(\phi)[w]
\end{aligned}$$

2. Dokazuje se pomoću 1.
Naime, za proizvoljni $\mathfrak{M}$ vrijedi:

$$\begin{aligned}\mathfrak{M} \Vdash \phi &\Leftrightarrow (\forall w \in \mathfrak{M})(\mathfrak{M}, w \Vdash \phi)\\ &\Leftrightarrow (\forall w \in \mathfrak{M})(\mathfrak{M} \models ST_x(\phi)[w])\\ &\Leftrightarrow \mathfrak{M} \models \forall x\, ST_x(\phi)\end{aligned}$$

□

Propozicija 3.1.5. nam predstavlja most između modalne logike i logike prvog reda. Zahvaljujući njoj, možemo prenositi ideje, rezultate i tehnike dokazivanja iz jedne logike u drugu. Jedno od svojstava koje vrijedi u logici prvog reda, a može se (koristeći propoziciju 3.1.5.) pokazati da također vrijedi i za modalnu logiku je, npr. kompaktnost. Prirodno pitanje koje nam se dalje nameće je u koji fragment logike prvog reda standardna translacija preslikava formule modalne logike, preciznije u koji podskup jezika $\mathcal{L}^1_\diamond(\Phi)$. Ono što sigurno znamo jest da standardna translacija nije surjekcija, pošto translatirane modalne formule sadrže samo ograničene kvantifikatore. Prije nego se upustimo u daljnje proučavanje, treba nam sljedeća definicija.

Definicija 3.1.6. *Formula $\alpha(x)$ jezika $\mathcal{L}^1_\diamond(\Phi)$ je* ***invarijantna na bisimulacije*** *ako za svake dvije Kripkeove strukture $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$, za sve svjetove $w \in \mathfrak{M}$ i $w' \in \mathfrak{M}'$ i sve bisimulacije Z takve da vrijedi $Z : \mathfrak{M}, w \leftrightarrows \mathfrak{M}', w'$ vrijedi:*

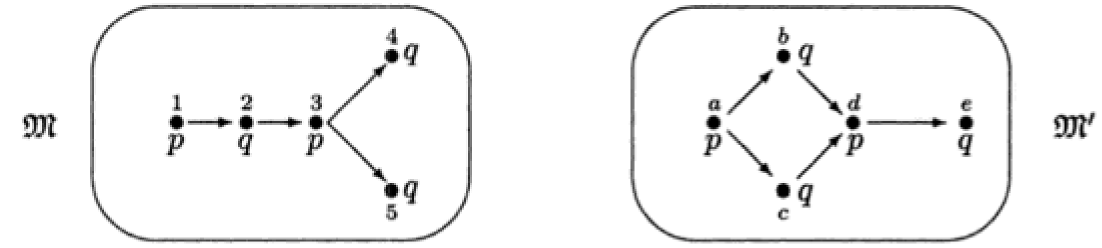
$$\mathfrak{M} \models \alpha[w] \text{ ako i samo ako } \mathfrak{M}' \models \alpha[w']$$

Napomena 3.1.7. *U teoremu 1.2.4. smo pokazali da su formule modalne logike invarijantne na bisimulacije. Sada uz pomoć propozicije 3.1.5. lako dobivamo da, ako je neka formula jezika $\mathcal{L}^1_\diamond(\Phi)$ nastala standardnom translacijom modalne formule, tada ona nužno mora biti invarijantna na bisimulacije.*

U sljedećem primjeru ćemo navesti jednu formulu jezika $\mathcal{L}^1_\diamond(\Phi)$ koja nije invarijantna na bisimulacije.

Primjer 3.1.8. *Neka su $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ i $\mathfrak{M}' = (W', R', V')$ Kripkeove strukture kao na slici 3.1. Stavljamo $W = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $W' = \{a, b, c, d, e\}$, $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (3, 5)\}$, $R' = \{(a, b), (a, c), (b, d), (c, d), (d, e)\}$. Valuacije V i V' definiramo kao na slici, na način da je svakom svijetu iz W, odnosno W', ispod njega dopisana propozicionalna varijabla koju zadovoljava. Dakle, $V(p) = \{1, 3\}$, $V'(p) = \{a, d\}$, $V(q) = \{2, 4, 5\}$, $V'(q) = \{b, c, e\}$. Lako se vidi da vrijedi $\mathfrak{M}, 1 \leftrightarrows \mathfrak{M}', a$.*
Promotrimo sljedeću formulu logike prvog reda:

$$\phi(x) = \exists y_1 y_2 y_3 (y_1 \neq y_2 \wedge y_1 \neq y_3 \wedge y_2 \neq y_3 \wedge Rxy_1 \wedge Rxy_2 \wedge Ry_1y_3 \wedge Ry_2y_3)$$



Slika 3.1:

Iako je $\mathfrak{M}, 1 \leftrightarrows \mathfrak{M}', a$*, vrijedi* $\mathfrak{M}' \models \phi[a]$*, ali* $\mathfrak{M} \not\models \phi[1]$*. Dakle,* ϕ *nije invarijantna na bisimulacije. Samim time, nije mogla nastati kao standardna translacija neke modalne formule.*

U primjeru 3.1.4. smo vidjeli da kod standardne translacije postoji neodređenost po pitanju vezanih varijabli koje koristimo. Sada ćemo opisati način da otklonimo tu poteškoću. Preciznije, pokazat ćemo kako standardna translacija modalne formule preslikava u fragment jezika $\mathcal{L}^1_\Diamond(\Phi)$ koji sadrži samo dvije varijable, x i y.
Prvo napišimo definicije od ST_x i ST_y:

$$
\begin{aligned}
ST_x(p_j) &= P_j x & ST_y(p_j) &= P_j y \\
ST_x(\bot) &= x \neq x & ST_y(\bot) &= y \neq y \\
ST_x(\neg\phi) &= \neg\, ST_x(\phi) & ST_y(\neg\phi) &= \neg\, ST_y(\phi) \\
ST_x(\phi \vee \psi) &= ST_x(\phi) \vee ST_x(\psi) & ST_y(\phi \vee \psi) &= ST_y(\phi) \vee ST_y(\psi) \\
ST_x(\Diamond\phi) &= \exists y(Rxy \wedge ST_y(\phi)) & ST_y(\Diamond\phi) &= \exists x(Ryx \wedge ST_x(\phi))
\end{aligned}
$$

Sada je jasno da se translacija modalnih operatora može izvršiti bez uvođenja treće varijable. Naime, dovoljno je nakon uvođenja y, iduću translaciju izvršiti ponovnom upotrebom varijable x i tako dalje. Sada standardna translacija modalne formule $\Diamond(\Box p \to q)$ glasi:

$$
\begin{aligned}
ST_x(\Diamond(\Box p \to q)) &= \exists y(Rxy \wedge ST_y(\Box p \to q)) \\
&= \exists y(Rxy \wedge (ST_y(\Box p) \to ST_y(q))) \\
&= \exists y(Rxy \wedge (\forall x(Ryx \to ST_x(p)) \to Qy)) \\
&= \exists y(Rxy \wedge (\forall x(Ryx \to Px) \to Qy))
\end{aligned}
$$

Uočimo da x i u ovom slučaju ostaje slobodna varijabla (jer će uvijek imati barem jedan slobodan nastup), dok je svaki nastup varijable y vezan. Ovo nam omogućava da se u rezultatima iz logike prvog reda koji će nam trebati za dokaz Van Benthem - Rosenovog teorema možemo ograničiti na slučaj formula koje sadrže dvije varijable, od kojih jedna slobodna.

3.2 Ehrenfeucht - Fraïsséove igre

U ovom ćemo se odjeljku baviti Ehrenfeucht[1] - Fraïsséovim[2] igrama, koje su se pokazale kao izuzetno efikasno sredstvo u teoriji konačnih modela. Prije opisa samih igara, moramo definirati neke pojmove.

Definicija 3.2.1. ***Kvantifikacijski rang*** *formule logike prvog reda ϕ, u oznaci $qr(\phi)$, definiramo rekurzivno po složenosti formule ϕ na sljedeći način:*

- *ako je ϕ atomarna, $qr(\phi):=0$;*
- *ako je $\phi = \psi \circ \eta$, gdje je $\circ$ binarni logički veznik, tada je $qr(\phi):= max\{qr(\psi), qr(\eta)\}$;*
- *za negaciju definiramo $qr(\neg\phi):=qr(\phi)$;*
- *ako je ϕ oblika $\forall x\psi$ ili $\exists x\psi$, tada definiramo: $qr(\phi):=qr(\psi)+1$.*

Napomena 3.2.2. *Primijetimo da za modalnu formulu ϕ vrijedi:*

$$deg(\phi)=qr(ST_x(\phi))$$

U daljnjem tekstu promatramo σ-strukture $\mathfrak{M} = (M, \varphi)$ kod kojih se signatura σ sastoji od konačno mnogo relacijskih simbola.

Definicija 3.2.3. *Neka su $\mathfrak{A} = (A, \varphi)$ i $\mathfrak{B} = (B, \varphi')$ dvije σ-strukture. Neka je q prirodan broj te $(a_1, ..., a_q) \in A^q$ i $(b_1, ..., b_q) \in B^q$ dvije q-torke elemenata iz A, odnosno B. Reći ćemo da je preslikavanje $Q : \{a_1, ..., a_q\} \to \{b_1, ..., b_q\}$ zadano s $\{(a_1, b_1), ..., (a_q, b_q)\}$* ***parcijalni izomorfizam*** *između σ-struktura $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ ako vrijede sljedeći uvjeti:*

- *Q je injekcija;*
- *Q čuva interpretacije relacijskih simbola, tj.*
  za svaki $k \in \mathbb{N}$ i za svaku k-torku $(r_1, ..., r_k) \in \{a_1, ..., a_q\}^k$ vrijedi:
  $(r_1, ..., r_k) \in \varphi(R^k)$ ako i samo ako $(Q(r_1), ..., Q(r_k)) \in \varphi'(R^k)$, za svaki k-mjesni relacijski simbol $R^k \in \sigma$.

---

[1] Andrzej Ehrenfeucht (r. 1932.), američki matematičar poljskog podrijetla

[2] Roland Fraïssé (1920. - 2008.), francuski logičar i matematičar

Definicija 3.2.4. *Za dvije σ-strukture $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ reći ćemo da su* ***elementarno ekvivalentne*** *(u oznaci $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$) ako za svaku σ-rečenicu ϕ vrijedi: $\mathfrak{A} \models \phi$ ako i samo ako $\mathfrak{B} \models \phi$.*
Za $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ kažemo da su ***q-elementarno ekvivalentne*** *(u oznaci $\mathfrak{A} \equiv_q \mathfrak{B}$) ako za svaku σ-rečenicu ϕ takvu da je $qr(\phi) \leq q$ vrijedi: $\mathfrak{A} \models \phi$ ako i samo ako $\mathfrak{B} \models \phi$.*

Ehrenfeucht - Fraïsséova igra se odvija na dvije σ-strukture $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$, između dva igrača, koje ćemo označavati kao **I** i **II**. *Potez* svakog od igrača se sastoji od:

- odabira jedne od struktura
- odabira jednog od elemenata u toj strukturi

Igrač **I** igra prvi i nakon što odabere strukturu i element njenog nosača, igrač **II** bira element u suprotnoj strukturi. *Igra duljine k na* $\mathfrak{A}$ *i* $\mathfrak{B}$ je igra u kojoj **I** i **II** svaki biraju potez točno k puta. Intuitivno, cilj Igrača **I** je pokazati da $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ nisu elementarno ekvivalentne strukture, dok igrač **II** nastoji dokazati suprotno.
Neka su $\{a_1, ..., a_k\}$ i $\{b_1, ..., b_k\}$ skupovi koji sadržavaju elemente iz struktura $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ redom, i to takvi da je pojedini a_i, odnosno b_i izabran od strane nekog od igrača u i-tom potezu. Naglasimo da se pritom ne mora nužno raditi o različitim elementima, tj. igrač **I** može ponoviti izbor elementa, ali mu to nije pametno jer ne doprinosi njegovoj pobjedi.

Definicija 3.2.5. *Reći ćemo da igrač* ***II*** *pobjeđuje u Ehrenfeucht - Fraïsséovoj igri u k poteza na strukturama $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ ukoliko je sa $\{(a_1, b_1), ..., (a_k, b_k)\}$ zadan parcijalni izomorfizam između $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$.*
Reći ćemo da igrač ***II*** *ima pobjedničku strategiju u Ehrenfeucht - Fraïsséovoj igri na strukturama $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ u k poteza ako na svaki potez igrača* ***I*** *može odgovoriti potezom koji mu garantira pobjedu.*

Dokaz sljedećeg teorema može se naći u [5].

Teorem 3.2.6 (Ehrenfeucht)**.** *Neka je σ signatura koja je sastoji od konačno mnogo relacijskih simbola te neka su $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ σ-strukture. Tada igrač* ***II*** *ima pobjedničku strategiju u Ehrenfeucht - Fraïsséovoj igri u q poteza na $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ ako i samo ako vrijedi $\mathfrak{A} \equiv_q \mathfrak{B}$.*

Napomena 3.2.7. *U jednom ključnom koraku u dokazu Van Benthem - Rosenovog teorema primijenit ćemo Ehrenfeucht - Fraïsséovu igru na Kripkeovim strukturama. Zato ćemo sad eksplicitno raspisati što su parcijalni izomorfizmi na takvim strukturama.*
Neka su $(a_1, ..., a_q)$ i $(b_1, ..., b_q)$ uređene q-torke elemenata iz $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ i $\mathfrak{M}' = (W', R', V')$. Da bi preslikavanje $Q : \{a_1, ..., a_q\} \to \{b_1, ..., b_q\}$ zadano sa $\{(a_1, b_1), ..., (a_q, b_q)\}$ bilo parcijalni izomorfizam između $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$, moraju vrijediti sljedeća dva uvjeta:

- *a_i i b_i moraju zadovoljavati iste propozicionalne varijable za svaki $i = 1, ...q$*
- *za svake $(i, j) \in \{1, ..., q\}^2$ mora vrijediti*

$$a_i R a_j \text{ ako i samo ako } b_i R' b_j$$

Primjer 3.2.8. *U napomeni 2.4.8. smo naveli primjer Kripkeove strukture $\mathfrak{M}$, pri čemu je $W = \{w\}$, a $R = \{(w, w)\}$ (jednočlana refleksivna struktura) te smo pokazali da je $\mathfrak{M}^*_w$ beskonačna struktura. Prema propoziciji 2.4.9. imamo da su točkovne Kripkeove strukture $(\mathfrak{M}, w)$ i $(\mathfrak{M}^*_w, w)$ bisimulirane. No, $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}^*_w$ nisu elementarno ekvivalentne. Naime, pobjednički potez igrača **I** je izbor elementa w u strukturi $\mathfrak{M}$. Taj element je u relaciji sa samim sobom, a takav ne postoji u $\mathfrak{M}^*_w$. Prema tome, ove dvije strukture se ne podudaraju ni na rečenicama jezika $\mathcal{L}^1_\diamond(\Phi)$ kvantifikacijskog ranga 1. Primjeri takvih rečenica su $\forall x Rxx$ i $\exists x Rxx$. Obje su istinite na $\mathfrak{M}$, a lažne na $\mathfrak{M}^*_w$.*

3.3 Lokalnost

Lokalnost neke formule nekog jezika kojim opisujemo neku relacijsku strukturu intuitivno nam govori da istinitost dane formule na toj strukturi ovisi isključivo o elementima nosača koji se nalaze u nekoj vrsti *okoline* onog elementa nosača u kojem provjeravamo istinitost dane formule.
Kod Kripkeovih struktura $\mathfrak{M}$ smo (u odjeljku 2.4.) definirali l-okoline pojedinih svjetova w, koje smo označavali sa $U^l(w)$, dok smo inducirane podstrukture označavali sa $\mathfrak{M} \upharpoonright U^l(w)$. Jedno od bitnih svojstava modalnih formula je upravo njihova lokalnost. To ćemo sad prvo strogo definirati, a onda i dokazati.

Definicija 3.3.1. *Za modalnu formulu φ reći ćemo da je l-lokalna ako za svaku točkovnu Kripkeovu strukturu $(\mathfrak{M}, w)$ vrijedi:*

$$\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi \text{ ako i samo ako } \mathfrak{M} \upharpoonright U^l(w), w \Vdash \varphi$$

Propozicija 3.3.2. *Svaka modalna formula φ takva da je $deg(\varphi) \leq l$ je l-lokalna.*

Dokaz. Iz dokaza prve tvrdnje leme 2.4.6. znamo da vrijedi $\mathfrak{M}, w \leftrightarrows_l \mathfrak{M} \upharpoonright U^l(w), w$. Sada iz propozicije 2.2.6. imamo $(\mathfrak{M}, w) \equiv^l_{ML} (\mathfrak{M} \upharpoonright U^l(w), w)$, odnosno $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ ako i samo ako $\mathfrak{M} \upharpoonright U^l(w), w \Vdash \varphi$ □

Što se tiče formula logike prvog reda, postoje i istraženi su razni tipovi lokalnosti, poput Gaifmanove ili Hanfove. Nama je ovdje, za dokaz Van Benthem - Rosenovog teorema, dovoljan jednostavan koncept l-lokalnosti na Kripkeovim strukturama formula $\alpha(x)$ jezika $\mathcal{L}^1_\diamond(\Phi)$ u jednoj slobodnoj varijabli. O tome nam govori sljedeća definicija.

Definicija 3.3.3. *Formula $\alpha(x)$ jezika $\mathcal{L}^1_\Diamond(\Phi)$ je l-lokalna ako za svaku točkovnu Kripkeovu strukturu $(\mathfrak{M}, w)$ vrijedi:*

$$\mathfrak{M} \models \alpha[w] \text{ ako i samo ako } \mathfrak{M} \restriction U^l(w) \models \alpha[w]$$

Poglavlje 4

Dokaz Van Benthem - Rosenovog teorema

U prethodnim smo poglavljima definirali sve potrebne pojmove i naveli (ili dokazali) sve potrebne tvrdnje koje nam trebaju za dokaz sljedećeg teorema.

Teorem 4.0.1 (Van Benthem - Rosen)**.** *Nad skupom svih konačnih Kripkeovih struktura za svaku formulu $\alpha(x)$ jezika $\mathcal{L}^1_\diamond(\Phi)$ takvu da je $qr(\alpha) = q$ ekvivalentno je:*

(a) $\alpha(x)$ je invarijantna na bisimulacije.

(b) Za $\alpha(x)$ postoji modalna formula ψ takva da je $\alpha(x) \equiv ST_x(\psi)$, pri čemu je $deg(\psi) = l$, gdje je $l = 2^q - 1$.

Teorem 4.0.1. dokazujemo pomoću sljedećih triju lema.

Lema 4.0.2. *Svaka formula $\alpha(x)$ jezika $\mathcal{L}^1_\diamond(\Phi)$ koja je invarijantna na bisimulacije je i l-lokalna za $l = 2^q - 1$, pri čemu je $q = qr(\alpha(x))$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $\alpha(x)$ invarijantna na bisimulacije te neka je $q = qr(\alpha)$. Stavimo $l = 2^q - 1$. Da bismo pokazali da je $\alpha(x)$ l-lokalna, uzet ćemo proizvoljnu točkovnu Kripkeovu strukturu $(\mathfrak{M}, w)$ i pokazati da vrijedi:

$$\mathfrak{M} \models \alpha[w] \text{ ako i samo ako } \mathfrak{M} \upharpoonright U^l(w) \models \alpha[w].$$

Kako je $\alpha(x)$ invarijantna na bisimulacije, možemo bez smanjenja općenitosti pretpostaviti da je $(\mathfrak{M} \upharpoonright U^l(w), w)$ stablo visine l. Naime, strukturu $(\mathfrak{M}, w)$ možemo zamijeniti njenim parcijalnim stablastim razmatanjem koje je l-lokalno stablasta struktura, a čiju smo kontrukciju opisali u 3. tvrdnji leme 2.4.9. Takva struktura (označimo je s $(\mathfrak{M}^{*,l}_w, w)$) je bisimulirana sa $(\mathfrak{M}, w)$ te zbog invarijantnosti na bisimulacije formule $\alpha(x)$ vrijedi:

$$\mathfrak{M} \models \alpha[w] \text{ ako i samo ako } \mathfrak{M}^{*,l}_w \models \alpha[w].$$

Sada (po lemi 2.4.6.,1. tvrdnja) imamo da $\mathfrak{M}, w \leftrightarroweq_l \mathfrak{M}_w^{*,l}, w$ povlači

$$\mathfrak{M} \upharpoonright U^l(w), w \leftrightarroweq_l \mathfrak{M}_w^{*,l} \upharpoonright U^l(w), w.$$

Sada samo trebamo primijetiti da svaka bisimulacijska igra na strukturama $(\mathfrak{M} \upharpoonright U^l(w), w)$ i $(\mathfrak{M}_w^{*,l} \upharpoonright U^l(w), w)$ u kojoj su oznake $\odot$ na početku postavljene na w završava u najviše l poteza. Prema tome, vrijedi

$$\mathfrak{M} \upharpoonright U^l(w), w \leftrightarroweq \mathfrak{M}_w^{*,l} \upharpoonright U^l(w), w,$$

a struktura $(\mathfrak{M}_w^{*,l} \upharpoonright U^l(w), w)$ je po konstrukciji stablasta.
Ako za neke točkovne Kripkeove strukture $(\mathfrak{M}', w')$ i $(\mathfrak{M}'', w'')$ takve da vrijedi $\mathfrak{M}', w' \leftrightarroweq \mathfrak{M}, w$ i $\mathfrak{M}'', w'' \leftrightarroweq \mathfrak{M} \upharpoonright U^l(w), w$ pokažemo $\mathfrak{M}', w' \equiv_q \mathfrak{M}'', w''$, onda smo gotovi, jer tada imamo sljedeći niz ekvivalencija:

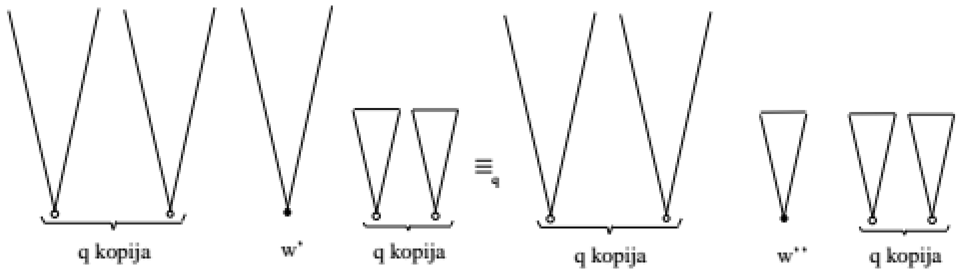
- $\mathfrak{M} \models \alpha[w]$ ako i samo ako $\mathfrak{M}' \models \alpha[w']$ (zbog bisimuliranosti i invarijantnosti $\alpha(x)$ na bisimulacije)
- $\mathfrak{M}' \models \alpha[w']$ ako i samo ako $\mathfrak{M}'' \models \alpha[w'']$ (zbog $\equiv_q$ ekvivalencije)
- $\mathfrak{M}'' \models \alpha[w'']$ ako i samo ako $\mathfrak{M} \upharpoonright U^l(w) \models \alpha[w]$ (zbog bisimuliranosti i invarijantnosti $\alpha(x)$ na bisimulacije)

Za strukture $(\mathfrak{M}', w')$ i $(\mathfrak{M}'', w'')$ koje će biti bisimulirane s $(\mathfrak{M}, w)$ i $(\mathfrak{M} \upharpoonright U^l(w), w)$ odabrat ćemo one koje se sastoje od dovoljno mnogo izomorfnih kopija od $(\mathfrak{M}, w)$ i $(\mathfrak{M} \upharpoonright U^l(w), w)$. Obje strukture će imati q izomorfnih kopija od $(\mathfrak{M}, w)$ i od $(\mathfrak{M} \upharpoonright U^l(w), w)$, ali će se razlikovati samo po jednoj komponenti (u kojoj će se nalaziti w', odnosno w''). Spomenute strukture su prikazane na slici 4.1., s istaknutim elementima nosača označenim sa $\bullet$. Otvoreni konusi predstavljaju kopije od $(\mathfrak{M}, w)$, a zatvoreni kopije od $(\mathfrak{M} \upharpoonright U^l(w), w)$. Prema propoziciji 1.2.7., struktura na lijevoj strani je bisimulirana sa $(\mathfrak{M}, w)$, a struktura na desnoj je bisimulirana s $(\mathfrak{M} \upharpoonright U^l(w), w)$. Za dokazati nihovu q-ekvivalenciju dovoljno je, dakle, pronaći strategiju za igrača **II** u igri na tim strukturama u q poteza. Sa $\bullet$ označavamo elemente na pojedinoj od struktura s kojima počinjemo igru. Nadalje, uvodimo pojam **kritične udaljenosti** d_m[1], čija je vrijednost za m-ti par poteza jednaka

$$d_m = 2^{q-m}$$

Na početku igre imamo $d_1 = 2^{q-1} = \lceil l/2 \rceil$ te se kritična udaljenost smanjuje svakim sljedećim potezom za faktor $1/2$. Upravo ta kritična udaljenost modelira potez igrača **II** u odnosu na potez koji povuče igrač **I**, tj. igrač **II** će igrati na sljedeći način:

[1]Udaljenost među elementima u Kripkeovoj strukturi definiramo kao najmanju duljinu puta u smislu definicije 2.4.1.



Slika 4.1: strukture $(\mathfrak{M}', w')$ i $(\mathfrak{M}'', w'')$

- ako igrač **I** odabere element izvan kritične udaljenosti, tada igrač **II** bira **isti** element u nekoj od struktura izomorfnih $\mathfrak{M}$ ili $\mathfrak{M} \upharpoonright U^l$ koji još nije odabran (pošto imamo q kopija obiju struktura, takav će sigurno uvijek postojati)
- ako igrač **I** odabere element unutar kritične udaljenosti, tada igrač **II** djeluje po *lokalnom kontekstu*

Ideja lokalnog konteksta je sljedeća: za elemente odabrane tijekom igre zamišljamo da pripadaju disjunktnim skupovima A_i. Na početku igre imamo jedan takav skup A_1, koji se sastoji od elemenata označenih sa $\bullet$.
Element kojeg neki od igrača odabere u m-tom potezu će upasti u jedan od postojećih skupova ako je najviše d_m udaljen od nekog njegovog elementa.
Svi elementi međusobno različitih skupova A_i su nakon m-tog poteza drugog igrača udaljeni za više od d_m.
Strategija za igrača **II** će biti takva da nakon njegovog m-tog poteza vrijedi:

- svaki skup A_i i njemu pripadni skup A_j u suprotnoj strukturi povezani su parcijalnim izomorfizmom h_i koji se proširuje na sve elemente koji su najviše d_m udaljeni od A_i i $A_j = h_i(A_i)$.

Dakle, ako u m-tom potezu igrač **I** odabere element čija je udaljenost od prethodno odabranih elemenata veća od d_m, tada je definiran novi skup A_i. Igrač **II** mora u suprotnoj strukturi učiniti istu stvar.
Ako igrač **I** odabere element koji se nalazi u nekom od skupova A_i, tada igrač **II** prvo pripadnim izomorfizmom h_i na A_i odredi odgovarajući element u suprotnoj strukturi te ga zatim ubacuje u pripadni skup $h_i(A_i)$.
Lako se vidi da ovakva strategija igrača **II** čuva gore navedenu invarijantu nakon svakog m-tog poteza.
Označimo s $\mathcal{K}$ skup svih $k \in \mathbb{N}$ za koje je h_k definirano nakon q poteza igre. Tada parcijalni izomorfizmi $\{h_k \mid k \in \mathcal{K}\}$ daju igraču **II** pobjedu.

□

Lema 4.0.3. *Svaka l-lokalna formula $\alpha(x)$ jezika $\mathcal{L}^1_\diamond(\Phi)$ koja je invarijantna na bisimulacije ujedno je i invarijantna na l-bisimulacije, preciznije: ako za neke dvije točkovne Kripkeove strukture $(\mathfrak{M}, w)$ i $(\mathfrak{M}', w')$ vrijedi $\mathfrak{M}, w \leftrightarroweq_l \mathfrak{M}', w'$ tada vrijedi:*

$$\mathfrak{M} \models \alpha[w] \text{ ako i samo ako } \mathfrak{M}' \models \alpha[w'].$$

Dokaz. Neka je $\alpha(x)$ formula koja je l-lokalna i invarijantna na bisimulacije. Pretpostavimo da vrijedi $\mathfrak{M}, w \leftrightarroweq_l \mathfrak{M}', w'$ i $\mathfrak{M} \models \alpha[w]$. Trebamo pokazati da tada vrijedi i $\mathfrak{M}' \models \alpha[w']$. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da su $(\mathfrak{M}, w)$ i $(\mathfrak{M}', w')$ l-lokalno stablaste strukture (u suprotnom, promatramo strukture $(\mathfrak{M}^{*;l}_w, w)$ i $(\mathfrak{M}'^{*;l}_{w'}, w')$).
Zbog l-lokalnosti imamo $\mathfrak{M} \models \alpha[w]$ ako i samo ako $\mathfrak{M} \upharpoonright U^l(w) \models \alpha[w]$. Sada imamo $\mathfrak{M}, w \leftrightarroweq_l \mathfrak{M}', w'$ ako i samo ako (lema 2.4.6., tvrdnja 1.) $\mathfrak{M} \upharpoonright U^l(w), w \leftrightarroweq_l \mathfrak{M}' \upharpoonright U^l(w'), w'$ ako i samo ako (lema 2.4.6., tvrdnja 2.) $\mathfrak{M} \upharpoonright U^l(w), w \leftrightarroweq \mathfrak{M}' \upharpoonright U^l(w'), w'$.
Dakle, $\mathfrak{M} \upharpoonright U^l(w) \models \alpha[w]$ ako i samo ako $\mathfrak{M}' \upharpoonright U^l(w') \models \alpha[w']$, iz čega, zbog l-lokalnosti, zaključujemo $\mathfrak{M}' \models \alpha[w']$. □

Lema 4.0.4. *Za svaku formulu $\alpha(x)$ jezika $\mathcal{L}^1_\diamond(\Phi)$ koja je invarijantna na l-bisimulacije postoji modalna formula ψ ($deg(\psi) \leq l$) takva da je $\alpha(x) \equiv ST_x(\psi)$*

Dokaz. Prema 2. tvrdnji korolara 2.3.3., svaka klasa ekvivalencije od $\leftrightarroweq_l$ definabilna je modalnom formulom. Označimo s $\chi_{l,\mathfrak{M},w}$ modalnu formulu koja definira klasu ekvivalencije od $\leftrightarroweq_l$ u kojoj se nalazi $(\mathfrak{M}, w)$. Sada (iz propozicije 3.1.5.) slijedi da je

$$\alpha(x) \equiv ST_x(\bigvee_{\mathfrak{M} \models \alpha(x)} \chi_{l,\mathfrak{M},w})$$

Gornja disjunkcija je konačna zbog 1. tvrdnje korolara 2.3.3.. □

Dokaz teorema 4.0.1. Pretpostavimo da je formula $\alpha(x)$ invarijantna na bisimulacije. Ona je tada po lemi 4.0.2. i l-lokalna za $l = 2^q - 1$, pri čemu je $q = qr(\alpha)$. Po lemi 4.0.3. sada imamo da je $\alpha(x)$ invarijantna i na l-bisimulaciju te je konačno (po lemi 4.0.4.) ekvivalentna standardnoj translaciji modalne formule ψ, čiji je stupanj manji ili jednak l. Obrat slijedi iz propozicije 3.1.5. □

Bibliografija

[1] S. Balenović: *Teorija korespondencije*. PMF-Matematički odjel Sveučilišta u Zagrebu - diplomski rad, 2005.

[2] P. Blackburn, M. de Rijke i Y. Venema: *Modal Logic*. Cambridge University Press, 2010.

[3] V. Goranko i M. Otto: *Model Theory of Modal Logic*. `https://www2.philosophy.su.se/goranko/papers/Handbook%20Modal%20Logic%20-%20Model%20Theory%20of%20Modal%20Logic-%20final%20draft%20060418.pdf`.

[4] M. Otto: *Elementary Proof of the van Benthem-Rosen Characterisation Theorem*. Fachbereich Mathematik, Technische Universitat Darmstadt, 2004.

[5] D. Popović: *Ehrenfeuchtove igre*. PMF-Matematički odjel Sveučilišta u Zagrebu - diplomski rad, 2004.

[6] M. Vuković: *Matematička logika*. Element, 2009.

Sažetak

U ovom radu smo ustanovili koja je veza između modalne logike i logike prvog reda. Nakon što smo definirali osnovni modalni jezik i Kripkeovu semantiku, u prvom smo poglavlju definirali bisimulaciju, koja se pokazala kao ključan koncept u modalnoj logici. Ključna stvar u drugom poglavlju je uvođenje bisimulacijskih igara kao jednog načina karakteriziranja bisimuliranosti u smislu teorije igara. Kasnije proučavanje stablastih struktura i l-okolina na Kripkeovim strukturama nam je pomoglo kod uvođenja koncepta l-lokalnosti.
U trećem poglavlju smo definirali standardnu translaciju, koja nam je omogućila promatranje modalne logike kao fragmenta logike prvog reda. U proučavanje Ehrenfeucht - Fraïsséovih igara se nismo dublje upustili, nego smo definirali i iskazali ono što nam je potrebno za dokaz Van Benthem - Rosenovog teorema. Također smo definirali i vrlo jednostavan koncept l-lokalnosti na Kripkeovim strukturama.
Vrlo je važno naglasiti da dokaz Van Benthemo - Rosenovog teorema kojeg smo iznijeli u četvrtom poglavlju funkcionira i na konačnim i na općenitim Kripkeovim strukturama.

Summary

In this paper we established connection between modal logic and first order logic.
In first chapter, after defining basic modal language and Kripke semantics, we introduced the notion of bisimulation, which happens to be the key concept in modal logic.
Crucial thing in second chapter was introduction of bisimulation games as one way to characterize bisimilarity in game theoretic way. Latter investigation of tree structures and l-neighbourhoods on Kripke structures helped us to introduce notion of l-locality.
Introduction of standard translation made possible for us to look at modal logic as a fragment of first order logic. We didn't take deeper look at Ehrenfeucht - Fraïssé games, having defined and stated only what we needed to prove Van Benthem - Rosen theorem.
We also defined basic concept of l-locality of Kripke structures.
It is important to emphasize that proof of Van Benthem - Rosen theorem that we presented in final chapter is good in both finite and general case of Kripke structures.

Životopis

Rođen sam 1. veljače 1991. u Splitu. Osnovnu školu Brda upisujem na jesen 1997. godine. Nakon osnovnoškolskog obrazovanja 2005. upisujem splitsku III. gimnaziju. Tu raste moj interes za matematiku, koju mi je u najboljem svjetlu predstavio profesor i razrednik Jurica Ćudina. Redovito sudjelujem na natjecanjima iz matematike, a najveći uspjeh mi je sudjelovanje na Državnom natjecanju A kategorije 2009. u Puli. To mi je omogućilo da bez prijemnog ispita u rujnu 2009. upišem Preddiplomski studij matematike na tadašnjem Matematičkom odjelu Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu. Preddiplomski studij završavam 2012. godine te nakon njega upisujem diplomski studij Teorijske matematike.