Perspektivna projekcija i projektivna geometrija

Bučaj, Teuta

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Teuta Bučaj

Perspektivna projekcija i projektivna geometrija

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof.dr.sc. Juraj Šiftar

Zagreb, rujan 2018.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ______________________________ , predsjednik

2. ______________________________ , član

3. ______________________________ , član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ______________________ .

Potpisi članova povjerenstva:

1. ______________________________

2. ______________________________

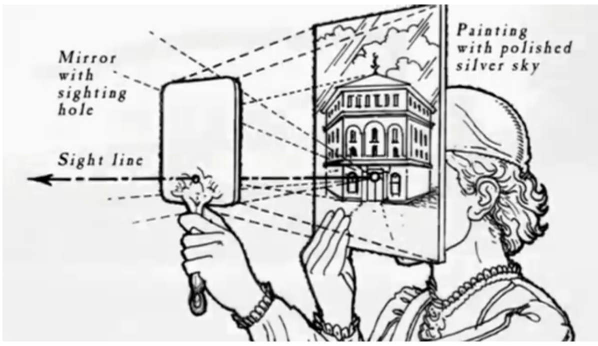
3. ______________________________

Sadržaj

Uvod

Dugo je čovjek metodom pokušaja i pogrešaka nastojao realistično preslikati stvarnost na ravninu, no bezuspješno. Kutevi i omjeri na slici nikako se nisu podudarali s onima u stvarnosti, a slikarima nije bilo jasno zašto. Ispreplitanjem umjetnosti i znanosti u renesansi, dolazi do značajnih pomaka na tom području. Naime, talijanski arhitekt Filippo Brunelleschi je promatrajući krstionicu u Firenci i zgrade koje ju okružuju, uočio da bi njihov prikaz težio prema beskonačno dalekoj točki. Kako bi provjerio tu tezu, odlučio je provesti eksperiment. Naslikao je krstionicu, a zatim je u središtu slike napravio malu rupu. Stajavši na mjestu na kojem je naslikao krstionicu jednom rukom držao je sliku prislonjenu naličjem uz lice tako da rupica bude u razini očiju dok je drugom držao zrcalo tako da u njemu može vidjeti odraz slike. Pomičući zrcalo gore-dolje, tj. promatrajući čas odraz slike u zrcalu čas pravu krstionicu, uočio je kako među njima nema razlike. Svoja opažanja opisao je računski te se smatra prvim koji je matematički precizno definirao zakone linearne perspektive. Njih je, nekoliko godina kasnije, zabilježio i objasnio Alberto Leoni u djelima *De pictura* i *Della pittura* što je ostalim umjetnicima i matematičarima omogućilo daljnje istraživanje i razvoj perspektive.
Ipak, smatra se da su najznačajniji trag na tom području ostavili Leonardo da Vinci koji se bavio i inverznim problemom perspektive te Albrecht Durer koji je znanja o perspektivi svojim djelovanjem proširio na njemačko govorno područje.

Interes za rekonstrukciju slike koji su oni imali i danas je aktualan, no u svijetu računalne grafike koja počiva na temeljima projektivne geometrije. Iako je čovjek naviknut na ono što matematičari nazivaju euklidskom geometrijom, projektivna geometrija uvelike nudi elegantnija rješenja i objašnjenja od onih na koje smo navikli. Motivacija za stvaranje te geometrije poslužila



Eksperiment Fillipa Brunelleschija

je upravo perspektiva.

Smatra se da je Girard Desargues baveći se perspektivom, razvio ideju projektivne geometrije kojoj je u području konika pridonio i Blaise Pascal. Kako se u isto vrijeme kad i projektivna pojavila i analitička geometrija te su tad Deasrguesova djela bila nedostupna i teško čitljiva, gotovo dva stoljeća nije bilo značajnijeg pomaka na području projektivne geometrije. U 19. stoljeću Victor Poncelet je oživio interes uvođenjem projektivnog prostora te otkrićem principa dualnosti, a zahvaljujući Karlu von Staudtu, od 1847. projektivna geometrija je onakva kakvu danas poznajemo – geometrija oslobođena metrike. [3] Iako se zbog te činjenice može učiniti nezanimljivo, ona upravo zahvaljujući tome nudi jednostavne odgovore na pitanja o perspektivi.
U radu će poseban naglasak biti na rekonstrukciji očišta kao dijelu inverznog problema, no da bi se matematički objasnila ideja i svi koraci potrebno je poznavanje osnovnih pojmova projektivne geometrije koji će iz tog razloga također biti izloženi u radu.

2 Osnovni pojmovi projektivne geometrije

Čovjek je oduvijek imao potrebu slikom što vjerodostojnije prikazati svijet što ga okružuje. U početku je to činio slikanjem po zidovima pećina, zatim slikanjem na slikarskim platnima i fotografiranjem, a danas to može učiniti koristeći različite računalne programe. Uočimo da je u svakom od tih pristupa cilj na dvodimenzionalnom mediju (zidu, slikarskom platnu, fotografiji i/ili monitoru) što realističnije prikazati trodimenzionalne objekte. Do renesanse, slikari su se bezuspješno trudili postići dojam dubine, no tek je uključivanje matematike u umjetnost rezultiralo otkrićem perspektive te je tako riješen problem prikazivanja treće dimenzije.
Iako današnji umjetnici (slikari, fotografi, grafičari, ...) i arhitekti ne znaju (cijelu) matematičku pozadinu perspektive, gotovo svakodnevno se uspješno njome služe. Promotrimo na primjeru kako je to moguće.

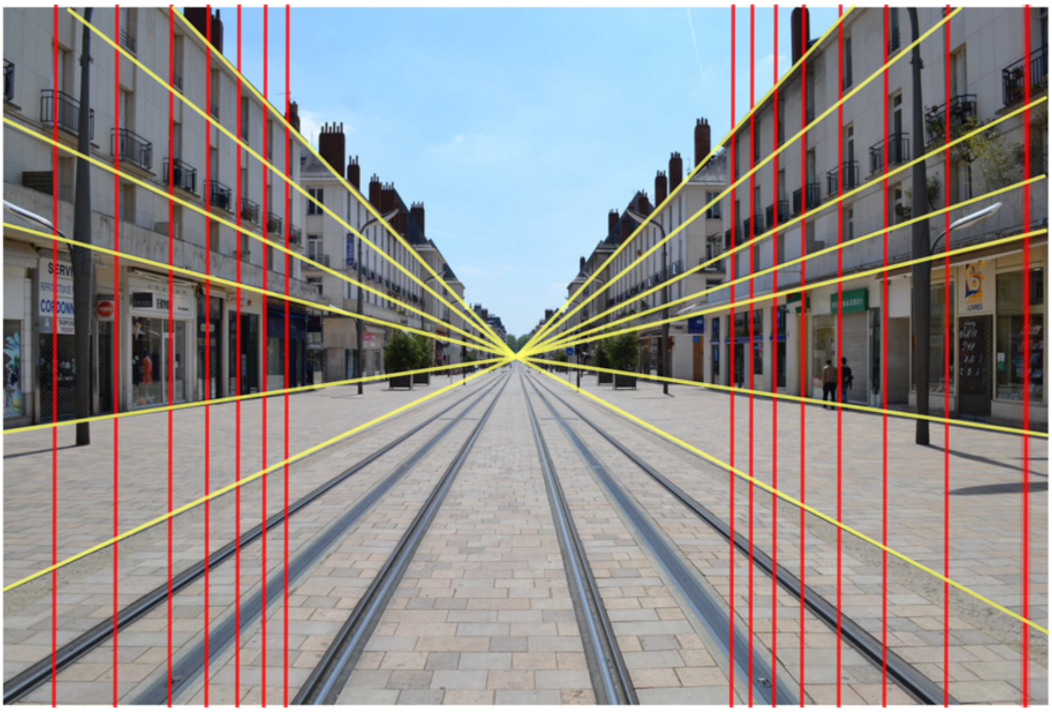
Zamislimo se na sredini ulice duž koje se s obje strane nalaze zgrade i red pravilno raspoređenih rasvjetnih uličnih tijela. Prizor koji vidimo odgovara prizoru na Slici 1.1.

Objekti koji su nam u stvarnosti bliže, na slici su prikazani većima od onih koji odgovaraju u stvarnosti daljim objektima. Dakle, čini se kako se dubina dobila određenim skaliranjem dužine i širine. Također, na slici se kao i u stvarnosti čini kao da će se svi jako daleki objekti u određenom trenutku spojiti u jednu (beskonačno daleku) točku. Znamo da je to u stvarnosti nemoguće jer su ulice i katovi zgrada uvijek međusobno paralelni. No, promotrimo li malo bolje sliku uočit ćemo kako se pravci koji predstavljaju katove zgrada i njima paralelni pravci ulice sijeku u središnjoj točki slike. Označimo te pravce žutom bojom.

Slika 2.1: Perspektivni prikaz ulice

Čini se kao da se perspektivnim prikazom narušava paralelnost stvarnog svijeta. To nije sasvim točno! Znamo da su okviri vrata i prozora pravokutnog oblika pa su nasuprotni parovi njihovih stranica međusobno paralelni. Par stranica koji je paralelan s ulicom može se na slici prikazati pomoću dva odgovarajuća žuta pravca. Drugi par stranica je očito okomit na tlo. Označimo li na slici crvenom bojom pravce koji odgovaraju okomicama na tlo, očito je kako u ovom slučaju paralelnost nije narušena, ali kut jest. U stvarnosti je klasa crvenih pravaca određena vektorom smjera okomitim na vektor smjera klase žutih pravaca. Vidimo na slici da ne samo da ti pravci nisu okomiti, već se i kutovi koje žuti pravci zatvaraju s nekim od crvenih pravaca razlikuju. Dakle, metrika nije sačuvana.

Iz svega navedenog može se zaključiti da perspektiva ne poštuje aksiome euklidske geometrije ili drugim riječima, da perspektiva



Slika 2.2: Perspektivni prikaz ulice

egzistira u nekoj drugoj geometriji. Iz dosad viđenog znamo da u toj geometriji svake dvije točke određuju jedinstven pravac te da je incidencija očuvana. Jedino možda još nije sasvim jasno kako perspektiva utječe na (paralelne) pravce. Iako znamo da se u stvarnosti paralelni pravci ne sijeku, na intuitivnoj razini možemo zamisliti njihovo sjecište kao beskonačno daleko. Primijenimo li tu analogiju na sliku u perspektivi, dobivamo da se svaka dva pravca međusobno sijeku – u „pravoj" ili zamišljenoj točki. Na temelju toga u sljedećem poglavlju izgradit ćemo „novu" geometriju.

2.1 Aksiomi

Neka su $\mathcal{P}$ i $\mathcal{L}$ dva neprazna, međusobno disjunktna skupa. Elemente skupa $\mathcal{P}$ zvat ćemo *točke* i označavati velikim tiskanim

slovima, a elemente skupa $\mathcal{L}$ zvat ćemo *pravci* i označavati malim pisanim slovima. Naglasimo da pri tom *ne podrazumijevamo* da je riječ o točkama i pravcima euklidske ravnine ili prostora nego o elementima sasvim općenitih skupova, ali zbog uobičajene geometrijske intuicije zadržavamo standardnu terminologiju koja će i ovdje biti praktična pri izražavanju različitih definicija i tvrdnji.
Nadalje, neka je među točkama i pravcima zadana relacija $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{I}$ koju nazivamo relacija incidencije. Ona po smislu odgovara uobičajenim pojmovima poput „točka pripada pravcu" i „pravac sadrži točku" i slično. Jednostavno kažemo da je točka incidentna s pravcem ili da je pravac incidentan s točkom, a da to ne podrazumijeva neku konkretnu relaciju poput primjerice „biti element" ($\in$) ili „sadrži element" ($\ni$).

Na temelju prethodnih zapažanja o svojstvima perspektivnog prikaza htjeli bismo da za točke, pravce i njihovu incidenciju sljedeća dva svojstva koja ćemo iskazati kao aksiome.

(P1) *Za svake dvije različite točke postoji točno jedan pravac koji je incidentan s obje točke.*

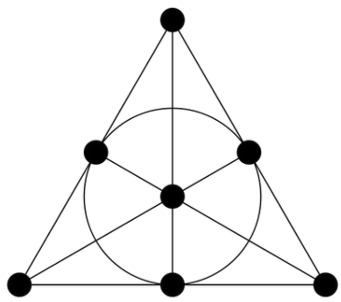
(P2) *Za svaka dva različita pravca postoji točka koja je incidentna s oba pravca.*

Uočimo da aksiom $(P1)$ odgovara tvrdnji da svake dvije točke određuju jedinstveni pravac (kao njihovu „spojnicu") dok $(P1)$ kaže kako svaka dva pravca imaju zajedničku točku (kao njihovo „sjecište"). Odmah zapažamo da je zajednička točka dvaju različitih pravaca jedinstvena jer aksiom $(P1)$ implicira da dvije različite točke ne mogu biti obje incidentne s dva pravca. Dakle, „sjecište" dvaju pravaca je jedinstveno određeno. Postojanje sjecišta bilo kojih dvaju pravaca bitna je novost u odnosnu na euklidsku ravninu u kojoj aksiom $(P1)$ vrijedi, ali svojstvo iz aksioma $(P2)$ ne vrijedi za bilo koja dva pravca.

Uz navedene aksiome kao bitne za geometriju koju želimo izgraditi, korisno je dodati još jedan „tehnički“ aksiom kojim se izbjegavaju neke trivijalne strukture:

(P3) *Postoje četiri točke takve da nikoje tri od njih nisu incidentne samo s jednim pravcem.*

Nije teško pokazati da u strukturi $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ iz ovako postavljenih aksioma $(P1)$, $(P2)$ i $(P3)$ slijedi da skupovi $\mathcal{P}$ i $\mathcal{L}$ sadrže redom barem sedam točaka i sedam pravaca, da je svaka točka incidentna s barem tri pravca i da je svaki pravac incidentan s barem tri točke.



Slika 2.3: Model (najmanje) projektivne ravnine

Definicija 2.1. *Uređena trojka skupova* $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ *za koju vrijede aksiomi* $(P1)$, $(P2)$ *i* $(P3)$ *naziva se* ***projektivna ravnina****.*

Očekujemo da će upravo projektivna ravnina biti prikladno geometrijsko okruženje za perspektivni prikaz objekata.
Struktura sa sedam točaka i sedam pravaca prikazana na Slici 1.3 pokazuje da je ovaj sustav aksioma konzistentan jer postoji

barem jedan njegov model, tj. realizacija. Očito je da je za našu svrhu potreban model koji će biti znatno "bogatiji" i čim bliži našem poimanju geometrijske stvarnosti.

U sljedećem poglavlju prvo ćemo izložiti model projektivne ravnine koji se ostvaruje proširenjem euklidske ravnine „neizmjerno dalekim" točkama i pravcem, odnosno tradicionalnim pristupom na kojem se temelji perspektiva. Zatim ćemo uvesti realnu projektivnu ravninu, tj. linearnoalgebarski model nad poljem realnih brojeva kojim se omogućuje koordinatizacija proširene euklidske ravnine, a time i računsko rješavanje problema vezanih uz perspektivu.

2.2 Modeli projektivne ravnine

2.2.1 Proširena euklidska ravnina

Kako bismo polazeći od euklidske ravnine izgradili projektivnu ravninu, služit ćemo se samo onim svojstvima euklidske ravnine koja proizlaze iz njezine strukture kao afine ravnine. Naime, euklidska ravnina znatno je bogatija svojstvima od afine, ali ovdje nam je potreban samo aksiom koji glasi:

($A2$) *Za svaku točku P koja nije incidentna s pravcem l_1 postoji točno jedan pravac l_2 incidentan s P takav da l_1 i l_2 nemaju zajedničkih točaka.*

Napomenimo da aksiom ($P1$) za projektivnu ravninu također pripada definiciji afine ravnine dok se trećim „tehničkim" aksiomom za afinu ravninu zahtijeva samo postojanje tri nekolinearne točke.

Na skupu pravaca $\mathcal{L}$ uvedimo relaciju paralelnosti, u oznaci $||$, tako da za svaki pravac p vrijedi $p||p$, a za različite pravce p i q vrijedi $p||q$ ako ne postoji točka koja je incidentna s oba ta

pravca. Lako se pokaže da je $\|$ relacija ekvivalencije na skupu $\mathcal{L}$ pa se $\mathcal{L}$ rastavlja u disjunktne klase paralelnih pravaca. Svaka klasa predstavlja jedan smjer i svakom točkom afine ravnine prolazi točno jedan pravac određenog smjera. Upravo će smjerovi predstavljati nove elemente proširenja, poznate i kao „neizmjerno daleke točke.“
Neka je $(\mathcal{P},\mathcal{L},\mathcal{I})$ afina ravnina (primjerice euklidska, ali to nije nužno). Za pravac $p \in \mathcal{P}$ neka je $[p]$ smjer, odnosno klasa ekvivalencije kojoj pripada p. Definirajmo skup $\mathcal{P}^* = \mathcal{P} \cup \{[p] : p \in \mathcal{L}\}$, točnije $\mathcal{P}^* = \mathcal{P} \cup \mathcal{L}/_{\|}$. Nadalje, definirajmo $\mathcal{L}^* = \mathcal{L} \cup \{l_\infty\}$ pri čemu je l_∞ proizvoljan simbol uz uvjet da ne pripada niti skupu $\mathcal{P}^*$ niti $\mathcal{L}$. Relaciju incidencije $\mathcal{I}^* \subseteq \mathcal{P}^* \times \mathcal{L}^*$ zadajemo s $\mathcal{I}^* = \mathcal{I} \cup \mathcal{L}/_{\|} \times \{l_\infty\} \cup \{([p], q) : q \in [p], p, q \in \mathcal{L}\}$. Time smo proširenom relacijom incidencije $\mathcal{I}^*$ obuhvatili sve incidencije iz afine ravnine, zatim definirali da je svaki smjer incidentan s pravcem l_∞ te da je svaki smjer incidentan sa svojim afinim pravcem tog smjera. Radi preglednosti proširena relacija incidencije $\mathcal{I}^*$ prikazana je i tablično.

$\mathcal{L}^*$ (pravci) / $\mathcal{P}^*$ (točke)	$q \in \mathcal{L}$	l_∞
$P \in \mathcal{P}$	$(P,q) \in \mathcal{I}$	$\varnothing$
$[p]$	$\forall q(q\|p)$	$\forall p \in \mathcal{L}$

Provjerimo zadovoljava li ovako definirana struktura $(\mathcal{P}^*,\mathcal{L}^*,\mathcal{I}^*)$ aksiome projektivne ravnine.

(P1) *Za svake dvije različite točke postoji točno jedan pravac koji je incidentan s obje točke.*
U ravnini $(\mathcal{P}^*,\mathcal{L}^*,\mathcal{I}^*)$ imamo dvije vrste/tipa točaka budući da je skup $\mathcal{P}^*$ unija afinih i „neizmjerno dalekih“ točaka, tj. smjerova pa je potrebno provjeriti vrijedi li aksiom za svaki mogući par točaka.

1°) Neka su $A, B \in \mathcal{P}$ dvije različite točke. One određuju pravac AB i nisu incidentne s pravcem l_∞. Dakle, pravac AB je jedini pravac u ravnini $(\mathcal{P}^*, \mathcal{L}^*, \mathcal{I}^*)$ koji je incidentan s danim točkama.

2°) Neka je $A \in \mathcal{P}$ i [p] „neizmjerno daleka točka“ . Prema aksiomu $(A2)$ postoji jedinstveni pravac q koji prolazi točkom A i paralelan je s pravcem p. Prema tome, pravac q je jedini incidentan s obje točke.

3°) Neka su $[p]$ i $[q]$ dva različita smjera. Ako su p i q paralelni, tada pripadaju istoj klasi odnosno smjeru pa je točka $[p] = [q]$ incidentna s oba ta pravca.

(P2) *Za svaka dva različita pravca postoji točka koja je incidentna s oba pravca.*
Analogno kao i za prethodni aksiom, potrebno je provjeriti vrijedi li tvrdnja za sve slučajeve.

1°) Neka su $p, q \in \mathcal{L}$ različiti pravci. Uočimo da unutar ovog slučaja postoje dva podslučaja ovisno o tome jesu li ta dva pravca paralelna ili nisu.
1°a) Ako su p i q paralelni, tada pripadaju istoj klasi pravaca. Budući da je smjer definiran upravo kao klasa paralelnih pravaca, pokazali smo da su dvije paralele incidentne sa smjerom, tj . „neizmjerno dalekom točkom“
1°b) Ako p i q nisu paralelni, tada se očito sijeku. Budući da su to pravci iz afine ravnine, sjecište je jedinstveno.

2°) Promotrimo pravce $p \in \mathcal{L}$ i l_∞. Očito su oba pravca incidentna sa smjerom $[p] \in \mathcal{P}*$.

(P3) *Postoje četiri točke takve da nikoje tri od njih nisu incidentne samo s jednim pravcem.*
Iz definicije afine ravnine, točnije iz aksioma $(A3)$, slijedi da postoje tri nekolinearne točke, a iz aksioma $(A1)$ da su po dvije incidentne s točno jednim pravcem. Označimo li

te točke s A, B i C i pravce tako da je $a = BC$, $b = AC$ i $c = AB$, primjenom aksioma $(A2)$ dobivamo pravce a', b' i c' takve da je $A \in a'$, $B \in b'$, $C \in c'$ i $a' \| a$, $b' \| b$, $c' \| c$. Bez smanjenja općenitosti promotrimo pravce a' i c'. Označimo s $a' \cap b' = \{D\}$. Zbog tranzitivnosti paralelnosti očito je da točka D postoji. Lako se pokaže i da nikoje tri od točaka A, B, C i D nisu kolinearne, tj. da aksiom $(P3)$ vrijedi.

Ovime je pokazano da u ravnini $(\mathcal{P}^*, \mathcal{L}^*, \mathcal{I}^*)$ vrijede aksiomi $(P1)$, $(P2)$ i $(P3)$, tj. da je $(\mathcal{P}^*, \mathcal{L}^*, \mathcal{I}^*)$ projektivna ravnina. U nastavku ćemo proširenu euklidsku ravninu označavati s $(E^2)^*$.

2.2.2 Algebarski model

Neka je V trodimenzionalni vektorski prostor nad poljem F. Iako F može biti bilo koje polje - konačno ili beskonačno, u radu ćemo se ograničiti na polje $\mathbb{R}$.
Vektore prostora $V = \mathbb{R}^3$ označavat ćemo s (x_1, x_2, x_3) za $x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3$. Definirajmo skup $\mathcal{P}$ kao skup svih jednodimenzionalnih potprostora prostora $\mathbb{R}^3$. Dakle, točke su oblika $[(x_1, x_2, x_3)] = \{\lambda(x_1, x_2, x_3) : \lambda \in \mathbb{R} \backslash \{0\}, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R} \backslash \{(0,0,0)\}, i = 1, 2, 3\}$. Budući da različiti vektori $\lambda(x_1, x_2, x_3)\lambda \neq 0$ predstavljaju istu točku, a često je praktičan zapis točke pomoću jednog predstavnika tog potprostora, uvodimo za točke oznaku oblika $(x_1 : x_2 : x_3)$ koja podrazumijeva cijeli potprostor. Ovakve koordinate nazivamo ***homogenima***.
Definirajmo sada $\mathcal{L}$ kao skup svih dvodimenzionalnih potprostora od $\mathbb{R}^3$. Ovako definiranim skupovima potprostora od $\mathbb{R}^3$ dodajmo još relaciju "biti potprostor" $(\leq)$ kao relaciju incidencije $\mathcal{I}$. Provjerimo zadovoljava li ovako definirana struktura aksiome $(P1)$, $(P2)$ i $(P3)$.

(P1) *Za svake dvije različite točke postoji točno jedan pravac koji*

je incidentan s obje točke.
Neka su P_1 i P_2 različiti jednodimenzionalni potprostori od $\mathbb{R}^3$. Budući da je $P_1 \cap P_2 = \{(0,0,0)\}$, znamo da je $dim(P_1 + P_2) = dimP_1 + dimP_2 - dim(P_1 \cap P_2) = 2$. Odatle slijedi da je prostor $P_1 + P_2$ iz skupa $\mathcal{L}$ što smo i htjeli pokazati.

(P2) *Za svaka dva različita pravca postoji točka koja je incidentna s oba pravca.*
Neka su L_1 i L_2 različiti dvodimenzionalni potprostori od $\mathbb{R}^3$. Znamo da unija ta dva potprostora ne može biti veća od cijelog prostora pa slijedi da je $dim(L_1+L_2) \leq 3$. Uvrštavanjem odgovarajućih vrijednosti u formulu $dim(L_1+L_2) = dimL_1 + dimL_2 - dim(L_1 \cap L_2)$ dobivamo da je $1 \leq dim(L_1 \cap L_2)$. Budući da su L_1 i L_2 različiti, mora vrijediti $dim(L_1 \cap L_2) < 2$ pa slijedi da je $dim(L_1 \cap L_2) = 1$, tj. da je potprostor $L_1 \cap L_2$ iz skupa $\mathcal{P}$.

(P3) *Postoje četiri točke takve da nikoje tri od njih nisu incidentne samo s jednim pravcem.*
Neka su $(1:0:0), (0:1:0), (0:1:0), (1:1:1) \in \mathcal{P}$. (Uočimo da ove točke postoje u svakom odgovarajućem modelu nad bilo kojim poljem F.). Lako se pokaže da nijedna od ovih točaka nije incidentna s pravcem određenim nekim dvjema od preostalih točaka. Primjerice, točka $(1:1:1)$ nije sadržana u potprostoru $[(1,0,0)]+[(0,1,0)]$ koji je jednak $[(1,1,0)]$ pa ne sadrži vektore različite od nulvektora kojima je treća koordinata različita od 0.

Pokazali smo da i ovako definirana struktura $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ zadovoljava aksiome projektivne ravnine. Projektivnu ravninu nad poljem $\mathbb{R}$ zvat ćemo *realnom projektivnom ravninom* i označavati s $PG(2,\mathbb{R})$.
Opisani model možemo na potpuno jednaki način izgraditi nad svakim poljem F, polazeći od trodimenzionalnog vektorskog prostora nad poljem F. Uzmemo li, primjerice, najmanje konačno

polje $F = \{0, 1\}$ s operacijama zbrajanja i množenja modulo 2, dobit ćemo projektivnu ravninu sa sedam točaka i sedam pravaca koja se može prikazati shemom na slici 1.3 kad se "točkama" te sheme na odgovarajući način pridruže točke $(1 : 0 : 0)$, $(0 : 1 : 0)$, $(0 : 0 : 1)$, $(1 : 0 : 1)$, $(0 : 1 : 1)$, $(1 : 1 : 0)$ i $(1 : 1 : 1)$.
No, projektivnu ravninu $PG(2, \mathbb{R})$ možemo lako interpretirati i unutar trodimenzionalnog euklidskog prostora E^3, tako da izaberemo bilo koju točku O u tom prostoru i promatramo sve pravce i sve ravnine koje prolaze tom točkom. Pravcima odgovaraju jednodimenzionalni, a ravninama dvodimenzionalni potprostori vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$, kad se točke euklidskog prostora identificiraju s pripadnim radijvektorima. Kako su dva pravca točkom O sadržana u jedinstvenoj ravnini prostora E^3, a dvije različite ravnine koje imaju zajedničku točku O imaju zajednički cijeli pravac, svoju presječnicu, očito su zadovoljeni aksiomi $(P1)$ i $(P2)$. Upravo je takav pristup motivacija za model projektivne ravnine pomoću vektorskog prostora nad bilo kojim poljem.

Incidenciju točke P i pravca L u projektivnoj ravnini $PG(2, \mathbb{R})$ možemo praktično izraziti i pomoću svojstva da je potprostor L jednoznačno zadan svojim ortogonalnim komplementom $L^\perp$. Činjenica da je $P \leq L$ ekvivalentna je ortogonalnosti svakog vektora iz $P = [(x_1, x_2, x_3)]$ i svakog vektora iz $L^\perp = [(u_1, u_2, u_3)]$, tj. relaciji

$$x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 = 0. \tag{2.1}$$

(Promjena vektora baze za P ili $L^\perp$ znači samo množenje skalarom različitim od 0, što ne utječe na valjanost jednakosti (1.1)). Na taj način možemo i svakom pravcu pridružiti homogene koordinate oblika $(u_1 : u_2 : u_3)$, pri čemu je $(u_1 : u_2 : u_3) \neq (0, 0, 0)$, samo što ćemo, radi razlikovanja od točaka, za pravce pisati $[u_1 : u_2 : u_3]$. Relacija (1.1) ujedno je i jednadžba pravca, ako

$[u_1 : u_2 : u_3]$ smatramo zadanim, ali i dualno, jednadžba točke ako je ona zadana s $(x_1 : x_2 : x_3)$ pa za sve pravce $[u_1 : u_2 : u_3]$ incidentne s tom točkom vrijedi (1.1).
Uočavamo da je (1.1) zapravo poznata jednadžba ravnine kroz ishodište kartezijevog koordinatnog sustava u euklidskom prostoru, pri čemu je $(u_1 : u_2 : u_3)$ njezin vektor normale. (Uobičajena jednadžba u analitičkoj geometriji glasi $Ax + By + Cz = 0$).

Naglasimo još kako je kolinearnost triju različitih točaka $(a_1 : a_2 : a_3)$, $(b_1 : b_2 : b_3)$ i $(c_1 : c_2 : c_3)$ ekvivalentna linearnoj zavisnosti skupa
$\{\alpha(a_1, a_2, a_3), \beta(b_1, b_2, b_3), \gamma(c_1, c_2, c_3)\}$ u prostoru $\mathbb{R}^3$, za svaki izbor skalara α, β i γ. Stoga se ta kolinearnost može izraziti i pomoću determinante:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Ako jednu od točaka shvatimo kao varijabilnu točku $(x_1 : x_2 : x_3)$ pravca određenog ostalim dvjema točkama, onda jednadžbu tog pravca možemo napisati i u obliku

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Bitno je uočiti razliku između dimenzije u algebarskom smislu i dimenzije u smislu projektivne geometrije. Točke i pravci projektivne ravnine $PG(2, \mathbb{R})$ su jednodimenzionalni i dvodimenzionalni potprostori prostora $\mathbb{R}^3$ koje unutar euklidskog prostora E^3 interpretiramo kao pravce i ravnine. Dakle, ono što u euklidskom prostoru smatramo pravcima, u projektivnoj ravnini su točke, a ono što smatramo ravninama u projektivnoj ravnini su pravci. Intuitivno postaje jasno da bi euklidski prostor E^3 mogao predstavljati ravninu u projektivnoj geometriji, tj. da bi četverodimenzionalni euklidski prostor odgovarao projektivnom prostoru pa zaključujemo kako je dimenzija projektivne geometrije reda n definirane nad realnim poljem brojeva $(PG(n,\mathbb{R}))$ je za jednu dimenziju manja od dimenzije prostora $\mathbb{E}^{n+1}$.

Nakon izlaganja dva različita modela projektivne geometrije, logično je zapitati se postoji li određena veza među njima. U sljedećoj točki uspostavit ćemo funkciju koja će ih povezati i omogućiti nesmetani prelazak iz jednog modela u drugi.

2.2.3 Izomorfnost modela

Budući da smo na dva različita načina uspjeli izgraditi projektivnu ravninu, očekujemo da među prikazanim modelima - proširenom euklidskom ravninom $((E^2)^*)$ i realnom projektivnom ravninom $(PG(2,\mathbb{R}))$ postoji uska veza. Te dvije projektivne ravnine su izomorfne, tj. postoji bijekcija između skupova točaka i pravaca obiju ravnina takva da je sačuvana incidencija. To znači da je točka jedne ravnine incidentna s pravcem te ravnine ako i samo ako su njihove slike u toj bijekciji incidentne u drugoj ravnini.
U nastavku ćemo pokazati kako se može zadati izomorfizam pri čemu će konstrukcija bijektivnog preslikavanja biti diktirana svojstvom čuvanja incidencije. Konstrukcija izomorfizma s $(E^2)^*$na $PG(2,\mathbb{R})$ sastojat će se zapravo u koodinatizaciji proširene euklidske ravnine homogenim koordinatama.

Započinjemo tako da točki euklidske ravnine s koordinatama (x,y) u odabranom kartezijevom sustavu pridružimo homogene koordinate $(x:y:1)$. Dakle, euklidskim točkama odgovarat će potprostori $[(x_1,x_2,x_3)]$ za koje je $x_3 \neq 0$ pa se mogu pi-

sati i kao $[(\frac{x_1}{x_2}, \frac{x_2}{x_3}, 1)]$, a onda stavimo $\frac{x_1}{x_2} = x$, $\frac{x_2}{x_3} = 1$. Koordinate "neizmjerno dalekih točaka" izračunat ćemo tako da vrijedi uvjet čuvanja incidencije, a svakako će to biti neke točke oblika $(x_1 : x_2 : 0)$.
Kako bismo povezali jednadžbe pravaca euklidske ravnine s jednadžbama pravaca u $PG(2,\mathbb{R})$, pretvorimo opću jednadžbu pravca $ax+by+c=0$ u homogeni oblik, uz uvjet $x_3 \neq 0$; $a\frac{x_1}{x_3}+b\frac{x_2}{x_3}+c=0$, odnosno $ax_1+bx_2+cx_3=0$.
Ako je $b \neq 0$, u euklidskoj ravnini jednadžbu pravca $ax+by+c=0$ možemo napisati kao $y = -\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$ pa je koeficijent smjera jednak $k = -\frac{a}{b}$. Svi pravci tog smjera incidentni su s jednom "neizmjerno dalekom točkom" pa uvrštavanjem $x_3 = 0$ dobivamo $ax_1+bx_2 = 0$, odnosno $x_2 = -\frac{a}{b}x_1$, dakle homogene koordinate $(x_1 : kx_1 : 0)$ ili ekvivalentno $(1 : k : 0)$. Preostaje samo smjer pravaca za koje $b = 0$ to jest $x = -\frac{c}{a}$ ("vertikalni" pravci).
Uvrštavanjem $b = 0$ i $x_3 = 0$ u opću jednadžbu dobiva se $x_1 = 0$ pa ovom smjeru pripadaju homogene koordinate $(0 : x_2 : 0)$, odnosno ekvivalentno $(0 : 1 : 0)$.
Time smo svim točkama proširene euklidske ravnine bijektivno pridružili točke iz $PG(2,\mathbb{R})$. Preostaje još dodijeliti pravcima iz $(E^2)^*$ homogene koordinate oblika $[u_1 : u_2 : u_3]$, a to se lako načini na temelju već napisanih jednadžbi.
Traženo preslikavanje (koordinatizaciju) možemo onda pregledno prikazati ovako:

$$\begin{aligned}
(x,y) &\longmapsto (x:y:1)\\
[p] &\longmapsto (1:k:0)\\
[\infty] &\longmapsto (0:1:0)\\
y = kx+l &\longmapsto [k:-1:l]\\
x = c &\longmapsto [1:0:-c]\\
l_\infty &\longmapsto [0:0:1]
\end{aligned}$$

pri čemu kod točke $[p]$ koordinata k predstavlja koeficijent smjera pravca p.

Provjera čuvanja incidencije je trivijalna, jer smo preslikavanje i zadali pridrža-
vajući se tog uvjeta, nakon početnog izbora za homogene koordinate točaka euklidske ravnine. (Pritom, nova koordinata nije se morala staviti baš na treće mjesto, često se stavlja i na prvo mjesto, ali ovdje smo se odlučili da ta koordinata bude x_3.)

Prikazano pridruživanje navodi na pomisao da, želimo li iz euklidske ravnine prijeći u projektivnu, dovoljno je dodati bilo koji realan broj različit od nule kao sljedeću koordinatu što je donekle točno. Nova koordinata može se staviti na bilo koje mjesto, no bitno je biti dosljedan u odabiru tog mjesta. Zbog preglednosti se najčešće dodaje prva ili posljednja koordinata. U nastavku će se za prelazak iz jednog modela u drugi koristiti posljednja koordinata.

Primijetimo da u $PG(2,\mathbb{R})$ prema koordinatama lako možemo raspoznati je li točka iz euklidske ravnine ili iz njezinog proširenja. Ako je posljednja koordinata bilo koji realan broj, riječ je o točki euklidske ravnine, a ako je posljednja koordinata 0, tada je riječ o elementima dodanim euklidskoj ravnini. U realnoj projektivnoj ravnini sve točke i pravci međusobno su ravnopravni, no obično se "neizmjerno daleke" elemente, naziva *idealnim točkama*, tj. *pravcima.*
Želimo li iz $PG(2,R)$ prijeći u $(E^2)^*$, jednostavno za točku $(x_1 : x_2 : x_3)$ nađemo ekvivalentnog predstavnika klase. Za $x_3 \neq 0$ predstavnik klase je oblika $(\frac{x_1}{x_3} : \frac{x_2}{x_3} : 1)$ pa je odgovarajuća točka u kartezijevom sustavu $(x,y) = (\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3})$. Ako je pak $x_3 = 0$, tada je $(x,y) = (x_1, x_2)$.

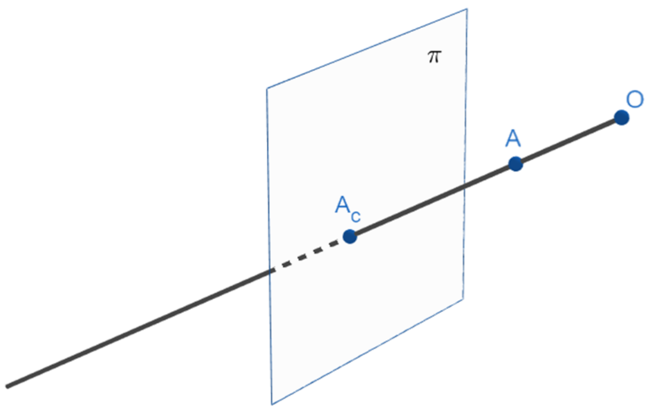
2.2.4 Trodimenzionalni projektivni prostor

Ideja o proširivanju „neizmjerno dalekim“ elementima može se primijeniti i pri izgradnji projektivnog prostora. Dodamo li euklidskom prostoru „neizmjerno daleku ravninu“ koja sadrži „neizmjerno daleke“ točke i pravce, dobit ćemo projektivni prostor. Ranije smo istaknuli da je dimenzija projektivne geometrije reda n za jedan manja od dimenzije u euklidskom prostoru E^{n+1}. Dakle, želimo li izgraditi trodimenzionalni projektivni prostor, učinit ćemo to u prostoru dimenzije 4. Projektivne točke će u tom slučaju biti jednodimenzionalni, pravci dvodimenzionalni, a ravnine trodimenzionalni potprostori. Za razliku od točaka ravnine, točke prostora bit će uređene četvorke $(x_1 : x_2 : x_3 : x_4) \neq (0 : 0 : 0 : 0)$, no i dalje će zadnja koordinata određivati o kakvim točkama je riječ. Točke euklidskog prostora preslikat će se u točke $(x_1 : x_2 : x_3 : 1)$, a točke proširenja, tj. „neizmjerno daleke točke“ u $(x_1 : x_2 : x_3 : 0)$.
Također, kao i u projektivnoj ravnini, relacija incidencije u realnom projektivnom prostoru $PG(3, \mathbb{R})$ je relacija „biti potprostor“ pa se incidencija provjerava analogno samo što se postavljaju uvjeti u dimenziji više, tj. tako da odgovaraju vektorskom prostoru $\mathbb{R}^4$.
Budući da su nam u radu od posebnog interesa preslikavanja trodimenzionalnih objekata na ravninu, u nastavku ćemo se fokusirati na preslikavanje iz $PG(3, \mathbb{R})$ na $PG(2, \mathbb{R})$.

2.3 Perspektiviteti i projektiviteti

Definicija 2.2. *Preslikavanje s trodimenzionalnog projektivnog prostora na dvodimenzionalni potprostor, odnosno projektivnu ravninu nazivamo* ***perspektivnom (centralnom) projekcijom*** *ili kraće* ***perspektivitetom****.*

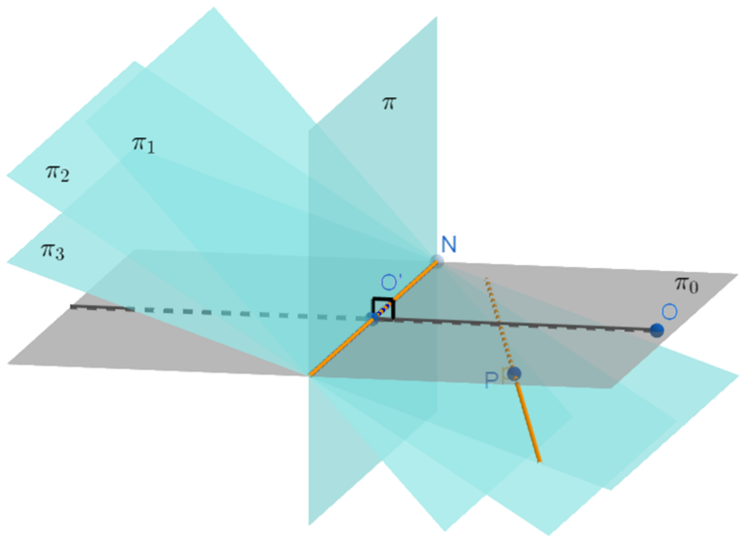
Obično čvrstu točku koja predstavlja centar projekcije označavamo s O i zovemo *očištem* (ili *položajem oka*). Ravninu na koju se projicira zovemo *ravninom slike* i označavamo s π pri čemu ta ravnina i točka O nisu incidentni. Svaku točku A različitu od O centralna projekcija preslikava u točku A_c koja je probodište pravca OA i ravnine π. Pravce OA_c zovemo *vidnim pravcima*, odnosno *zrakama*.



Slika 2.4: Centralna projekcija sa središtem u točki O

Primijetimo da perspektivitet općenito nije bijektivan, ali jest u slučaju projiciranja ravnine π_1 na ravninu π_2 gdje su ravnine π_1 i π_2 različite ravnine istog projektivnog prostora takve da centar projekcije ne pripada niti jednoj od njih. Također istaknimo da se u projektivnoj ravnini može promatrati i centralnu projekciju jednog pravca na drugi. Štoviše, možemo promatrati kompozicije dvaju perspektiviteta koje onda nazivamo **projektivitetom** ili **projektivnom transformacijom** ako je riječ o preslikavanju među ravninama.

Usredotočimo se sada na centralno projiciranje točaka prostora. Znamo da se u projektivnom prostoru ostvarenom proširenjem euklidskog prostora može dogoditi da se neke točke euklidskog prostora centralnom projekcijom preslikaju u „neizmjerno daleke " točke ravnine slike. To ovisi o položaju pravca incidentnog s promatranim točkama. Naime, ako je pravac p u općem položaju u odnosu na ravninu slike i centar projekcije, on probada ravninu u pravoj točki. Međutim, pravac p paralelan s π predstavlja klasu paralela kojoj zasigurno pripada i jedan pravac ravnine i jedan pravac kroz O pa zaključujemo da je probodište pravca p i ravnine slike točka $[p]$, tj. "neizmjerno daleka" točka. U buduće ćemo takve točke zvati *nedoglednim točkama* ili *nedogledima* i označavati s N.



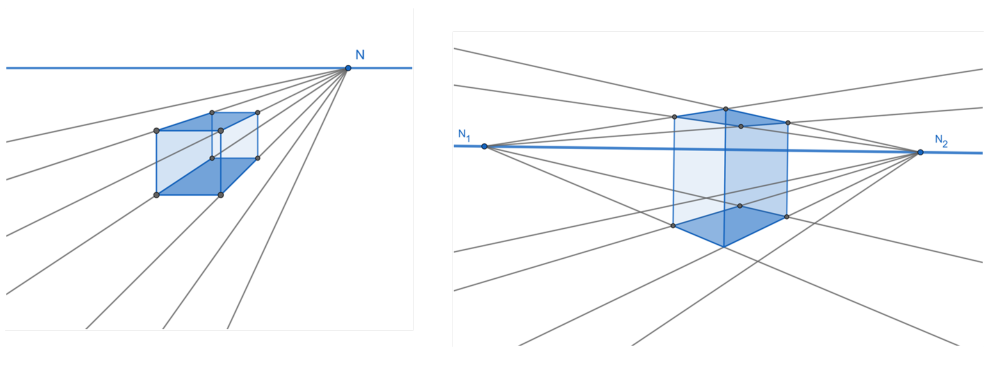
Slika 2.5: Nedogledni pravac p i točka N

Istaknimo ortogonalnu projekciju točke O kao specijalni slučaj nedogleda karakterističan za perspektivu s jednim nedogledom. Posebno, pravac određen točkom O i njezinom slikom nazivamo *glavnim vidnim pravcem*, a udaljenost točaka O i O' koja ujedno predstavlja udaljenost centra projiciranja od ravnine slike zovemo *distancijom*.

Osim "neizmjerno dalekih" točaka u proširenom euklidskom prostoru imamo i "neizmjerno daleke" pravce. Slika takvog pravca je

presjek ravnine slike i ravnine koja sadrži centar projekcije. Takav pravac nazivamo *nedoglednim pravcem* ili *nedoglednicom*. Iz ovoga očigledno slijedi da nedogled pripada nedoglednom pravcu ako i samo ako je pravac p koji probada ravninu slike paralelan s ravninom kojoj pripada "neizmjerno daleki" pravac.
U daljnjem razmatranju perspektive bit će nam posebno važna ravnina promatranog objekta. Koristit ćemo isključivo vertikalne ravnine objekata koje su paralelne s ravninom slike te horizontalne ravnine objekata koje su okomite na ravninu slike. Istaknimo da je presjek svih horizontalnih ravnina nedogledni pravac pa u tom slučaju nadglednicu još zovemo *horizontom*.

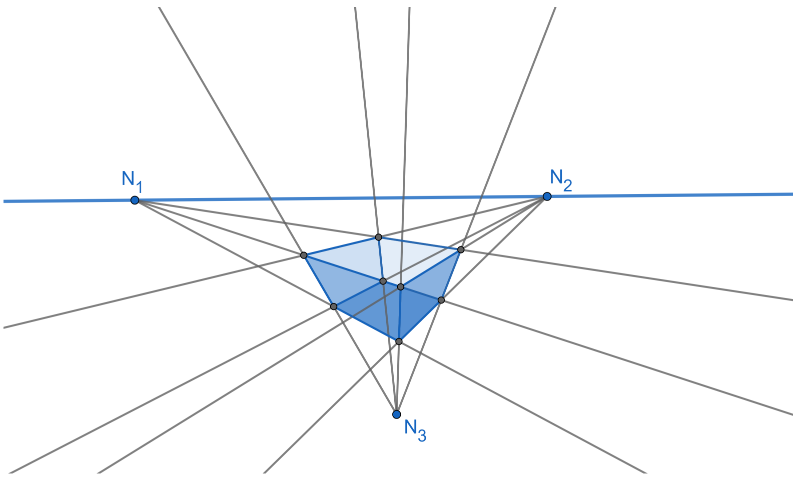
Sada kada smo definirali najvažnije pojmove, promotrimo kako broj i izbor nedogleda utječe na perspektivni prikaz odnosno centralnu projekciju trodimenzionalnih objekata na ravninu.
Perspektiva s jednim nedogledom je najjednostavniji mogući perspektivni prikaz. Isto tako to je poseban slučaj nedogleda budući da je on ortogonalna projekcija očišta. Pravci koji se sijeku u toj točki u stvarnosti su paralele okomite na ravninu slike, a paralele na slici su pravci paralelni s ravninom slike.



Slika 2.6: Perspektiva s jednim i dva nedogleda

Perspektivom s dva nedogleda se postiže nešto stvarniji dojam dubine iako se i njome tradicionalno prikazuju objekti koji se nalaze direktno ispred nas, bez obzira na udaljenost. Svaki nedogled se pritom nalazi s jedne strane očišta, a snop vidnih pravaca svakoga od njih predstavlja paralelne pravce. Mjesta na kojima se ti pravci sijeku označavaju vrhove promatranog objekta. Primijetimo da ovakva perspektiva čuva samo paralelnost pravaca vertikalne ravnine.

Perspektiva s tri nedogleda koristi se za naglašavanje veličine promatranih objekata, a poznatija je kao ptičja odnosno žablja perspektiva ovisno o tome nalazi li se treći nedogled ispod ili iznad objekta.



Slika 2.7: Perspektiva s tri nedogleda

Spomenimo još utjecaj nedoglednice (horizonta). Znamo da su točke tog pravca slike točaka ravnine koja prolazi očištem, tj. da horizont predstavlja razinu očiju. Ako objekt gledamo odozdo, nedoglednica je iznad njegove slike i obrnuto, a ako se promatrani objekt nalazi direktno ispred nas, nedoglednica prolazi slikom objekta. Istaknimo kako se horizont i nedogledi ne moraju nužno nalaziti na samoj slici, ali se produljenjem snopa odgovarajućih vidnih pravaca lako može odrediti njihov položaj u ravnini slike.

Za proučavanje i primjenu perspektive posebno s važna invarijantna svojstva, tj. ona svojstva koja se sačuvaju centralnom projekcijom. Relacija incidencije svakako je sačuvana, no za preslikavanja koja najčešće primjenjujemo u afinoj i posebno euklidskoj geometriji ni veličine poput djelišnog omjera, udaljenosti točaka i mjera kutova ovdje nisu invarijantne. Primjerice, polovište dužine $\overline{AB}$ općenito se neće preslikati u polovište dužine $\overline{A_cB_c}$ dobivene centralnom projekcijom dužine $\overline{AB}$. Osnovna numerička invarijanta u realnom projektivnom prostoru je dvoomjer, koji se može shvatiti poopćenjem djelišnog omjera, a to je realni broj koji se pridružuje kolinearnoj četvorki točaka, odnosno konkurentnoj četvorki pravaca. U odjeljku 1.4 detaljnije ćemo razložiti osnovne činjenice o dvoomjeru.

2.3.1 Osnovni teoremi o projektivitetima

Ovdje ćemo ukratko iznijeti najvažnije rezultate o projektivitetima, odnosno projektivnim transformacijama. Radi jednostavnosti govorit ćemo samo o projektivitetima, a naglasit ćemo je li riječ o projektivitetu dva pravca p i p' (ne nužno različita) u ravnini ili o projektivitetu između dviju ravnina π i π' (ne nužno različitih) u projektivnom prostoru.

Znamo da je po definiciji projektivitet kompozicija nekoliko perspektiviteta (centralnih projekcija). Nije teško dokazati da se takva kompozicija može reducirati na kompoziciju svega dva perspektiviteta ako su pravci p i p' u ravnini različiti, odnosno tri perspektiviteta ako je $p = p'$.

Takozvani temeljni teoremi o projektivitetu za pravce u ravnini,

tj. za ravnine u projektivnom prostoru, daju nužne i dovoljne uvjete da bi projektivitet bio jednoznačno određen svojim djelovanjem na stanoviti skup točaka pravca, odnosno ravnine.
Ako promatramo dvije trojke kolinearnih točaka A, B, C na pravcu p i A', B', C' na pravcu p', lako se konstruira projektivitet kao kompozicija dvaju perspektiviteta koji točke A, B, C preslikava redom u A', B' i C'. U slučaju kada je $p = p'$ potreban je još jedan perspektivitet. Međutim, iz aksioma projektivne ravnine općenito nije moguće dokazati da je tako konstruirani projektivitet jedinstven. U našem modelu jedinstvenost je također ispunjena što se može pokazati na različite načine.
Promatramo li projektivitete između ravnina π i π' u projektivnom prostoru, ulogu osnovnog podskupa na kojem je zadano djelovanje projektiviteta ima *četverovrh* - skup od četiri točke A, B, C i D od kojih po tri nisu kolinearne. Analogno, kao u prethodnoj situaciji može se konkretno konstruirati projektivitet koji vrhove A, B, C, D četverovrha u ravnini π preslikava redom u vrhove A', B', C', D' bilo kojeg četverovrha u ravnini π'. Pritom se π i π' mogu i ne moraju podudarati. Pitanje jedinstvenosti tako zadanog projektiviteta svodi se na jedinstvenost projektiviteta induciranog na pravcima ravnine π. Primjerice, razmotrimo pravac AB i njegovu sliku $A'B'$. Neka je E sjecište pravaca AB i CD, tada se slika E' točke E svakako nalazi u sjecištu pravaca $A'B'$ i $C'D'$. Time projektivitet ravnine π na ravninu π' inducira jedinstveni projektivitet s pravca AB na pravac $A'B'$. Budući da je taj projektivitet na pravcu jednoznačno određen točkama A, B i E i njihovim slikama A', B' i E', onda je slika bilo koje točke T pravca $p = AB$ jednoznačno određena točka T' pravca $p' = A'B'$. Sada za bilo koju točku P koja ne pripada nijednoj od stranica trovrha ABC možemo odrediti njezinu sliku u projektivitetu. Naime, neka je točka P_1 sjecište pravaca CP i AB , točka P_2 sjecište pravaca DP i AC. Tada su po prethodnom zaključku slike P_1' i P_2' točaka P_1 i P_2

jednoznačno određene , a time je i slika P' točke P određena kao sjecište pravaca $C'P_1$ i $B'P_2'$.
Iskažimo sada temeljni teorem u oba slučaja.

Teorem 2.3. (**Temeljni teorem o projektivitetima**)

a) *Ako su A, B i C različite točke pravca p i A', B' i C' različite točke pravca p' (p' nije nužno različit od p) , onda postoji točno jedan projektivitet s p na p' koji točke A, B i C preslikava u točke A', B' i C'.*

b) *Ako su točke A, B, C i D točke ravnine π od kojih nikoje tri nisu kolinearne, a točke A' B', C' i D' točke ravnine π' (ne nužno različitoj od π), tada postoji točno jedan projektivitet koji točke A, B, C, D preslikava redom u A' B', C', D'.*

Napomenimo još da Temeljni teorem a) ima neke važne ekvivalente - Teorem o perspektivitetu i Pappusov teorem. Teorem o perspektivitetu govori da je projektivitet između različitih pravaca p i p' perspektivitet ako i samo ako se njihovo sjecište preslika samo u sebe. Uočimo da je ovdje dovoljnost trivijalna, tj. perspektivitet svakako preslikava sjecište p i p' u samog sebe, ali nije trivijalno da samo perspektivtet ima to svojstvo. Taj smjer slijedi izravno po Temeljnom teoremu.

2.3.2 Prikaz projektiviteta u homogenim koordinatama

Budući da su točke, pravci i ravnine u projektivnom prostoru definirani kao vektorski potprostori dimenzija redom 1, 2 i 3 u vektorskom prostoru $\mathbb{R}^4$, za očekivati je da će linearni operatori imati istaknutu ulogu kod prikaza projektivnih transformacija u homogenim kooridnatama budući da čuvaju relaciju incidencije što je ovdje relacija „biti potprostor“.
U slučaju projektiviteta s pravca na pravac, odnosno ravnine

na ravninu, kad je riječ o bijektivnom preslikavanju, upravo će regularni linearni operatori imati bitnu ulogu budući da su to bijekcije koje svaki potprostor preslikaju u potprostor jednake dimenzije. Štoviše, iz Temeljnog teorema može se zaključiti da su svi projektiviteti između pravaca u ravnini, odnosno među ravninama u prostoru inducirani (zadani) regularnim linearnim operatorima. Naglašavamo inducirani ili zadani, a ne jednaki jer je riječ o djelovanju na potprostor u $\mathbb{R}^3$ pa linearni operatori A i kA gdje je $k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ zadaju istu projektivnu transformaciju. Primjerice, ako neka točka ima homogene koordinate $(x_1 : x_2 : x_3)$, njena slika je $(x_1' : x_2' : x_3')$ zadana s $\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, ali isto tako $kA \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx_1' \\ kx_2' \\ kx_3' \end{bmatrix}$, a $(kx_1' : kx_2' : kx_3')$ predstavlja istu točku kao $(x_1' : x_2' : x_3')$. Ovdje je s A označena regularna matrica $A \in GL(3, \mathbb{R})$ pa jednoj projektivnoj transformaciji odgovara ne samo jedan linearni operator, tj. regularna matrica nego cijela klasa oblika $\{kA : k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\}$.
Kao korisnu ilustraciju prethodnog pogledajmo kako se za zadanu projektivnu transformaciju izračunavaju fiksne točke i pravci koje projektivitet preslika u sebe same (ako takvi postoje).

Ako je P čvrsta točka projektivne transformacije zadane matricom A, vrijedi $AP = \lambda P$ za sve $\lambda \neq 0$ jer P i λP predstavljaju istu točku. Tada vrijedi $(A - \lambda I)P = 0$ što znači da P mora biti svojstveni potprostor pridružen svojstvenoj vrijednosti λ matrice A. Znamo da je $\lambda \neq 0$ jer je A regularna matrica.
Za razliku od opisanih transformacija, ako promatramo perspektivno preslikavanje cijelog prostora na ravninu, pripadna matrica imat će četiri stupca i tri retka, a rang će joj biti jednak 3.

2.4 Dvoomjer

Prisjetimo se prvo djelišnog omjera u euklidskoj ravnini.

Definicija 2.4. *Neka su A, B i C kolinearne točke pravca p na kojem je zadana orijentacija.* ***Djelišni omjer*** *definiramo kao $(AB,C) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$ pri čemu su $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ orijentirane dužine.*

Uzmemo li tako primjerice da je točka C polovište dužine $\overline{AB}$, vrijedi $(AB,C) = -1$. Nadalje, poznato je da je djelišni omjer invarijanta paralelnog projiciranja. Na realnom brojevnom pravcu za točke $A(a)$, $B(b)$ i $C(c)$ vrijedi $(AB,C) = \frac{c-a}{c-b}$.
Dvoomjer se uvodi za četiri kolinearne točke A, B, C i D kao omjer dvaju djelišnih omjera:

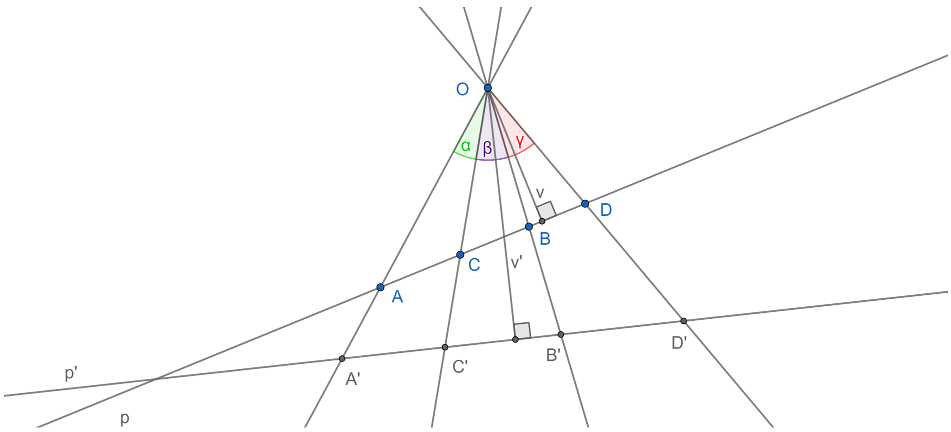
$$R(AB,CD) = \frac{(AB,C)}{(AB,D)} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}.$$

Na realnom brojevnom pravcu onda imamo:

$$R(AB,CD) = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b} \text{ ili } R(AB,CD) = \frac{(c-a)(d-b)}{(c-b)(d-a)}.$$

.

Sada se može pokazati da je dvoomjer invarijanta perspektiviteta pa time i projektiviteta ako se kolinearne *euklidske* točke A, B, C i D pravca p preslikaju u također *euklidske* točke A', B', C' i D' pravca p'.
Pretpostavimo da je O centar perspektiviteta kojim se točke A, B, C i D pravca p preslikavaju u redom točke A', B', C' i D' pravca p'. Pokažimo uz pomoć trigonometrije da vrijedi $R(AB,CD) = R(A'B',C'D')$.
Označimo li visine tako da je $v = d(O,p)$ i $v_c = d(O,p')$ te kuteve tako da je $\alpha = |\angle AOC|$, $\beta = |\angle COB|$ i $\gamma = |\angle BOD|$ za površine



Slika 2.8: Dvoomjer

trokuta $P(\Delta OAC)$, $P(\Delta OCB)$, $P(\Delta OBD)$ i $P(\Delta OAD)$ vrijede sljedeće jednakosti:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}|OA||OC|\sin\alpha &= \frac{1}{2}|AC|v\\ \frac{1}{2}|OC||OB|\sin\beta &= \frac{1}{2}|CB|v\\ \frac{1}{2}|OB||OD|\sin\gamma &= \frac{1}{2}|BD|v\\ \frac{1}{2}|OA||OD|\sin(\alpha+\beta+\gamma) &= \frac{1}{2}|AD|v.\end{aligned}$$

Odatle slijedi da je $R(AB,CD) = \frac{\overline{AC}\cdot\overline{BD}}{\overline{BC}\cdot\overline{AD}} = \frac{\sin\alpha\cdot\sin\gamma}{\sin\beta\cdot\sin(\alpha+\beta+\gamma)}$. Analogno se dobije da je dvoomjer $R(A'B',C'D') = \frac{\sin\alpha\cdot\sin\gamma}{\sin\beta\cdot\sin(\alpha+\beta+\gamma)}$.

Jasno je da se kompozicijom nekoliko perspektiviteta dvoomjer također sačuva ako sve navedene točke pripadaju *euklidskoj* ravnini. Prikladnom definicijom dvoomjera za proširenu euklidsku ravninu željeli bismo stoga dobiti numeričku invarijantu za projektivitete kao preslikavanja karakteristična za projektivnu ravninu. To možemo učiniti pomoću homogenih ili nehomogenih koordinata. Važno je da se dvoomjer definira i ako se među točkama A, B, C i D pojavi "neizmjerno daleka" točka, a da se njegova svojstva time ne naruše. U tu svrhu uočimo da se $R(AB,CD) = \frac{(c-a)(d-b)}{(c-b)(d-a)}$ može napisati kao

$$R(AB,CD) = \frac{\begin{vmatrix} c & 1 \\ a & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} d & 1 \\ b & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c & 1 \\ b & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} d & 1 \\ a & 1 \end{vmatrix}}$$

što odgovara homogenim koordinatama $(a,1)$ za točku $A(a)$, $(b,1)$ za točku $B(b)$ itd. Lako se izravno izračuna da se ista vrijednost dobije drugačijim izborom predstavnika, tj. $(\alpha a, \alpha)$ za točku $A(a)$, $(\beta b, \beta)$ za $B(b)$ itd.
Pretpostavimo sada da je D "neizmjerno daleka" točka pravca kojem pripadaju točke A, B i C te uvrstimo za D homogene koordinate $(1,0)$. Tada vrijedi

$$R(AB,CD) = \frac{\begin{vmatrix} c & 1 \\ a & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c & 1 \\ b & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{vmatrix}} = \frac{c-a}{c-b} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$$

što je upravo vrijednost djelišnog omjera (AB,C). To odgovara svojstvu čuvanja djelišnog omjera kod centralne projekcije pravca p na njemu perspektivni pravac p' iz neke točke O izvan pravaca p i p' jer se tada za "neizmjerno daleke" točke pravca p i p' podudaraju. Dakle, djelišni omjer možemo shvatiti kao poseban slučaj dvoomjera $R(AB,CD)$ kada je D "neizmjerno daleka" točka. Također, ovo je u skladu s računanjem dvoomjera na realnom brojevnom pravcu kada se u izrazu $R(AB,CD) = \frac{(c-a)(d-b)}{(c-b)(d-a)}$ uvrsti da je d varijabilna točka x čija se udaljenost od prvih triju točaka ograničeno povećava u bilo kojem smjeru pa se uzme

$$R(AB,CD) = \lim_{x\to\infty} \frac{(c-a)(x-b)}{(c-b)(x-a)}$$

i izračuna na uobičajen način uz $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-b}{x-a}=1$.
U daljnjem testu ćemo se služiti homogenim koordinatama točaka na pravcu, odnosno točkama oblika $(x_1 : x_2)$ za jednodimenzionalne potprostore dvodimenzionalnog prostora.

Definicija 2.5. *Neka su četiri točke A, B, C i D na projektivnom pravcu zadane svojim homogenim koordinatama $A(a_1 : a_2)$, $B(b_1 : b_2)$, $C(c_1 : c_2)$ i $D(d_1 : d_2)$. Tada se* ***dvoomjer*** *definira kao realan broj*

$$R(AB,CD)=\frac{\begin{vmatrix}c_1 & c_2\\ a_1 & a_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}c_1 & c_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}}:\frac{\begin{vmatrix}d_1 & d_2\\ a_1 & a_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}d_1 & d_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}}.$$

Primijetimo da je ovime dvoomjer dobro definiran jer su sve navedene determinante različite od nula i jer vrijednost ne ovisi o izboru predstavnika, odnosno multiplikativnog faktora kod homogenih koordinata točke budući da se ti faktori dokinu. Također, lako se vidi da je vrijednost $R(AB,CD)\neq 0,1$.
Iz uvodnih razmatranja prije same definicije vidi se da je ova definicija posve u skladu s dvoomjerom euklidskih točaka, a isto tako i s nehomogenim koordinatama kada se pojava "neizmjerno dalekih" točaka $(1:0)$ tretira pomoću limesa. No, je li dvoomjer invarijanta projektiviteta i nakon ovakvog proširenja?

S jedne strane možemo to provjeriti primjenom regularnih matrica kojima su projektiviteti zadani u homogenim koordinatama.
Ako je primjerice T matrica projektiviteta, onda za sliku $(a_1' : a_2')$ točke $(a_1 : a_2)$ vrijedi $\begin{bmatrix}a_1'\\ a_2'\end{bmatrix}=T\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\end{bmatrix}$ itd., pa je $\begin{bmatrix}c_1' & a_1'\\ c_2' & a_2'\end{bmatrix}=T\begin{bmatrix}c_1 & a_1\\ c_2 & a_2\end{bmatrix}$ stoga su determinante $\begin{vmatrix}c_1' & a_1'\\ c_2' & a_2'\end{vmatrix}=\det T\begin{vmatrix}c_1 & a_1\\ c_2 & a_2\end{vmatrix}$. Kako je

$\begin{vmatrix} c_1' & a_1' \\ c_2' & a_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1' & c_2' \\ a_1' & a_2' \end{vmatrix}$, uvrštavanjem odgovarajućih determinanti u $R(A'B', C'D')$ dobiva se, nakon skraćivanja vrijednosti $\det T \neq 0$ upravo $R(AB, CD)$.

S druge strane, mogli bismo trigonometrijski dokaz primijenjen na četvorku euklidskih točaka prilagoditi slučaju kada je jedna od tih točaka "neizmjerno daleka" uzimajući opet limes odgovarajućih dužina.

Napomenimo da je redoslijed točaka dvoomjera bitan. Iako četvorka ima 24 permutacije, lako se pokaže da je skup vrijednosti ograničen na $\{r, \frac{1}{r}, 1-r, \frac{r-1}{r}, \frac{1}{1-r}, \frac{r}{r-1}\}$ za $R(AB, CD) = r$.

Iz invarijantnosti dvoomjera četvorke kolinearnih točaka pod perspektivitetom izravno vidimo da se može definirati dvoomjer $R(lm, pq)$ četvorke konkurentnih pravaca l, m, p i q. Naime, ako te pravce presiječemo bilo kojim pravcem koji ne prolazi njihovim zajedničkim sjecištem S i dobivena sjecišta označimo s L, M, P i Q dobivamo $R(lm, pq) = R(LM, PQ)$. Ova vrijednost ovisi samo o pravcima m, l, p i q, a ne i o izboru presječne četvorke točaka jer su svake dvije presječne četvorke L, M, P i Q i L', M', P' i Q' međusobno perspektivne s centrom S pa su im odgovarajući dvoomjeri jednaki. Ekvivalentno, možemo definirati

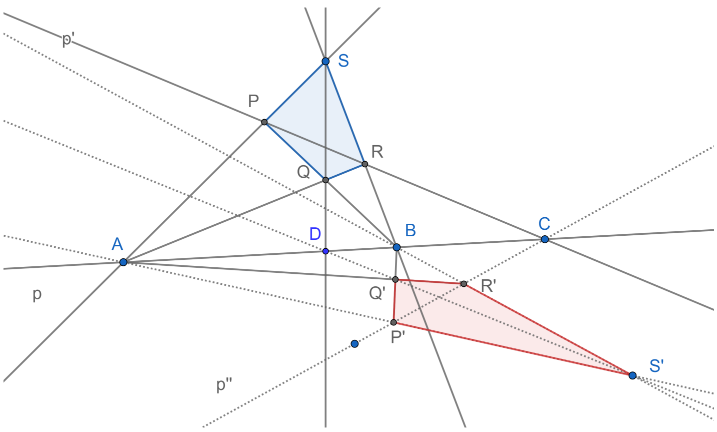
$$R(lm, pq) = \frac{\sin\angle(lp)\sin\angle(mp)}{\sin\angle(mq)\sin\angle(lq)}$$

za pravce m, l, p i q.

2.5 Harmonička četvorka

Potpuni četverovrh definira se kao podskup projektivne ravnine koji se sastoji od četiri točke takve da po tri nisu kolinearne i šest pravaca koji spajaju parove tih točaka. Dakle, "običnom" četverovrhu pridodaje se šest različitih pravaca, spojnica parova vrhova, koji se onda nazivaju stranicama potpunog četverovrha. Tri para stranica koje nemaju zajednički vrh nazivaju se suprotnim stranicama, a njihova sjecišta dijagonalnim točkama potpunog četverovrha.

Harmoničku četvorku točaka na pravcu, u oznaci $H(AB, CD)$, čine četiri točke koje imaju poseban međusobni položaj s obzirom na neki potpuni četverovrh $PQRS$ i to tako da su A i B dvije dijagonalne točke (npr. A je sjecište stranica $\overline{PS}$ i $\overline{QR}$, a B stranica $\overline{PQ}$ i $\overline{RS}$), a C i D su sjecišta pravca AB s preostalim parom suprotnih stranica (dakle s $\overline{PR}$ i $\overline{QS}$).
Nije teško pokazati da je relacija $H(AB, CD)$ ekvivalentna s relacijama $H(AB, DC)$ i $H(CD, AB)$.



Slika 2.9: Harmonička četvorka

Bitno je svojstvo da za zadane kolinearne točke A, B i C postoji jedinstvena točka D takva da vrijedi $H(AB, CD)$. Naime, može se na različite načine izabrati četverovrh $PQRS$ s obzirom na kojega prve tri točke imaju uloge iz definicije harmoničke četvorke, ali za bilo koji takav izbor dobit će se uvijek biti jedna te ista točka D. Ova tvrdnja ne vrijedi u bilo kojoj projektivnoj ravnini, ali je istinita u proširenoj euklidskoj ravnini i također u svakoj ravnini u kojoj vrijedi **Desarguesov teorem:**

Teorem 2.6. *Ako su ABC i $A'B'C'$ dva trovrha u projektivnoj ravnini onda su spojnice AA', BB' i CC' njihovih vrhova konkurentni pravci ako i samo ako su sjecišta parova stranica AB i $A'B'$, BC i $B'C'$ te CA i $C'A'$ kolinearne točke. Drukčije se kaže da su dva trovrha centralno perspektivni ako i samo ako su osno perspektivni.*

Desarguesov teorem jedan je od najvažnijih teorema u projektivnoj geometriji, a izvorno dolazi iz promatranja centralno perspektivnih trovrha koji pripadaju različitim ravninama π i π'. Tada se odgovarajući parovi stranica sijeku u kolinearnim točkama jer ta sjecišta pripadaju presječnici ravnina π i π'.

Harmoničke četvorke karakterizirane su vrijednošću dvoomjera jednakom -1. Naime, lako se vidi da za $H(AB,CD)$ postoji projektivitet koji točke A,B, C i D preslikava redom u A, B, D i C. Kako je dvoomjer invarijanta projektiviteta, a dvoomjer $R(AB,DC) = \frac{1}{R(AB,CD)}$, za dvoomjer r harmoničke četvorke vrijedi $r = \frac{1}{r}$ pa kako je $r \neq 1$, mora biti $r = -1$. Ako je točka D "neizmjerno daleka", dvoomjer -1 odgovara djelišnom omjeru za polovište dužine u euklidskoj ravnini.

3 Inverzni problem perspektive

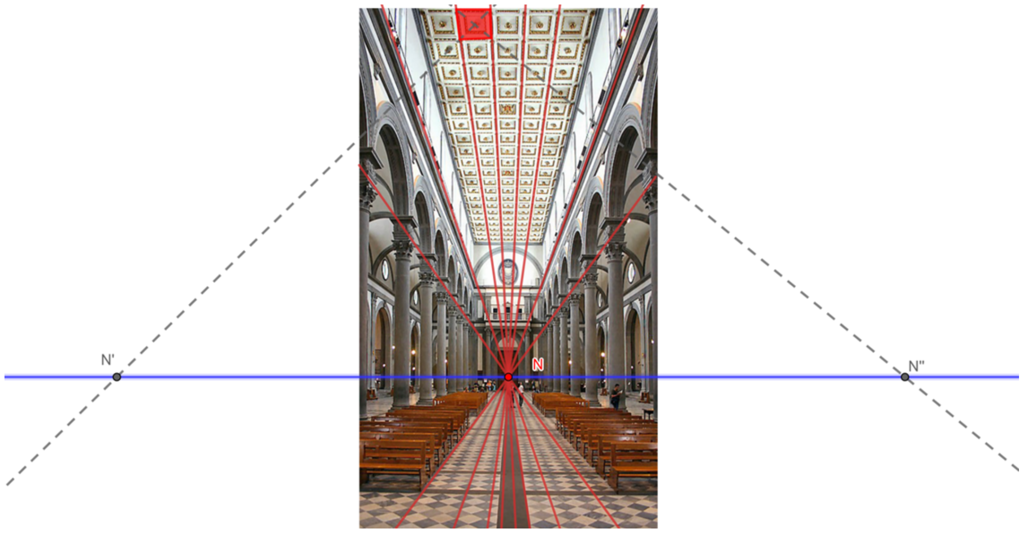
Ubrzo nakon otkrića postupka za realistično prikazivanje objekata na slici poznatijeg pod nazivom (linearna) perspektiva, pojavio se i interes za obrnutim postupkom, tj. kako na temelju slike saznati informacije o objektima i realnom svijetu kojeg prikazuje. Posebno, kako odrediti položaj promatrača u odnosu na sliku tako da u potpunosti može doživjeti sklad omjera.
Iz iskustva znamo da na doživljaj slike ne utječe samo naša udaljenost od nje, već i visina s koje ju promatramo. Drugim riječima, ako su oči na odgovarajućoj udaljenosti i visini u odnosu na sliku postići ćemo ono što se u određenoj literaturi naziva „efektom gledanja kroz prozor“, tj. imat ćemo dojam da stojimo na istom mjestu u odnosu na prikazane objekte na kojem je stajao i sam slikar ili fotograf. Različite su metode pomoću kojih možemo odrediti položaj očiju ili kraće očište. Iako su geometrijska i algebarska metoda same po sebi jasne, one zahtijevaju postojanje četverokuta na slici i to takvog da pripada ravnini paralelnoj s ravninom „tla“. Taj uvjet nužan je za određivanje očišta na slici bez unaprijed danih dimenzija, tj. mjerila. Treća metoda koju ćemo prikazati proizašla je iz spomenute dvije i nudi najbolje od obje.

3.1 Geometrijska metoda

Kako se već i iz samog naslova da naslutiti, ovom metodom očište se konstruira. Složenost konstrukcije ovisi o broju nedogleda što se može vidjeti na sljedećim primjerima.

3.1.1 Perspektiva s jednim nedogledom

Paralelan snop pravaca u stvarnosti projicira se na ravninu kao snop pravaca sa sjecištem u nedogledu. Istaknimo te pravce, a

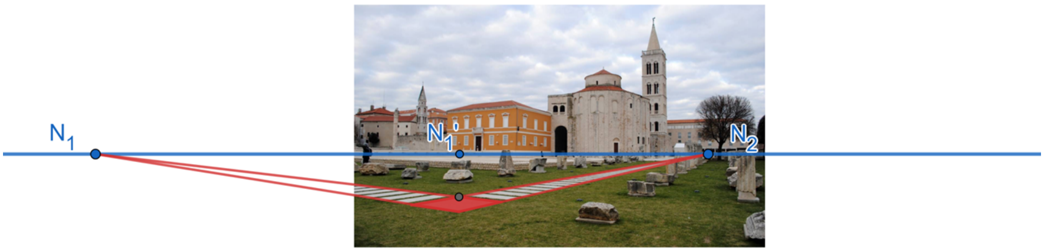


Slika 3.1: Basilica di San Lorenzo, Firenzza

njihovo sjecište označimo s N budući da je to nedogled. Znamo da nedogled pripada horizontu koji se nalazi u visini očiju i paralelan je s ravninom "tla". Štoviše, u perspektivi s jednim nedogledom ta točka se nalazi točno nasuprot promatrača pa smo već samim pronalaskom točke N odredili visinu očišta. Preostaje još odrediti udaljenost oka od slike.
Na slici se može prepoznati više vrsta četverovrha (pločice, štukature na stropu, nasloni i sjedište klupe i sl.), no potrebno je odabrati onog koji u stvarnosti predstavlja kvadrat paralelan s ravninom "tla" ili koji sam pripada toj ravnini. Zbog jasno vidljivih kontura, na ovoj slici je zgodno odabrati štukaturu na stropu i to neku koja je uz rub slike kako bi dobivena dužina zaista odgovarala distanciji. Nacrtajmo zatim pravac kojem pripada jedna od dijagonala tog četverovrha. Označimo li presjek tog pravca i nedoglednice s N', duljina dužine $\overline{NN'}$ je tražena udaljenost, tj. $|ON| = |NN'|$.
Primijetimo da način na koji možemo odrediti distanciju nije jedinstven iako ona jest.

3.1.2 Perspektiva s dva nedogleda

Iako sada imamo dva nedogleda, tražimo ih na isti način kao i u prethodnom primjeru. Nisu oba nedogleda N_1 i N_2 na slici, no

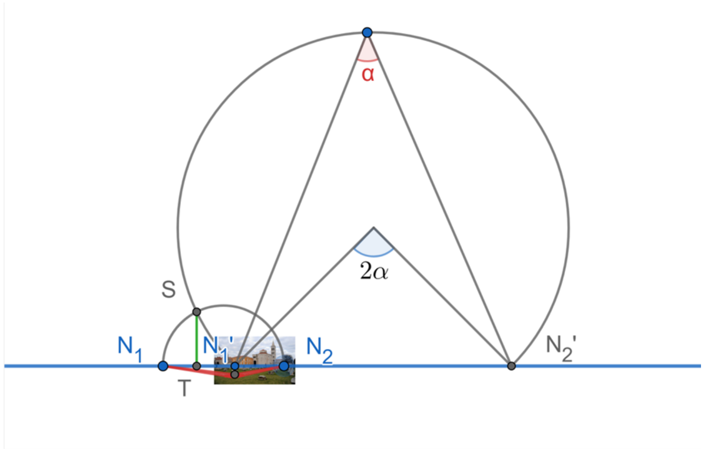


Slika 3.2: Forum, Zadar

znamo da se očište nalazi nasuprot dužine $\overline{N_1N_2}$. Uzmemo li uz to u obzir distanciju, dolazimo do zaključka da je geometrijsko mjesto očišta polukružnica nad promjerom $\overline{N_1N_2}$ te da je prema Talesovom poučku kut $\angle N_1ON_2$ pravi kut u prostoru. Nadalje, znamo da su vidni pravci dva snopa paralela koje se u horizontalnoj ravnini sijeku pod određenim kutem α, a sjecišta su vrhovi nekog četverokuta. Produživanjem njegovih dijagonala do nedoglednice dobivamo točke N_1' i N_2' nad čijom dužinom možemo konstruirati kružnicu s obodnim kutem 2α. Odatle slijedi kako se očište nalazi na presjeku tih dviju kružnica. Posebno, ako je na slici lik $ABCD$ kvadrat, tada je dovoljno konstruirati kružnicu nad promjerom $\overline{N_1'N_2'}$.
Ograničimo li se samo na traženje očišta pomoću kvadrata sa slike možemo u obzir uzeti i sljedeće dvije metode.

3.1.3 Taylorova metoda

Kod ove metode dovoljno je produžiti do nedoglednice samo jednu dijagonalu kako bi se dobila točka N_1'. Budući da dijago-



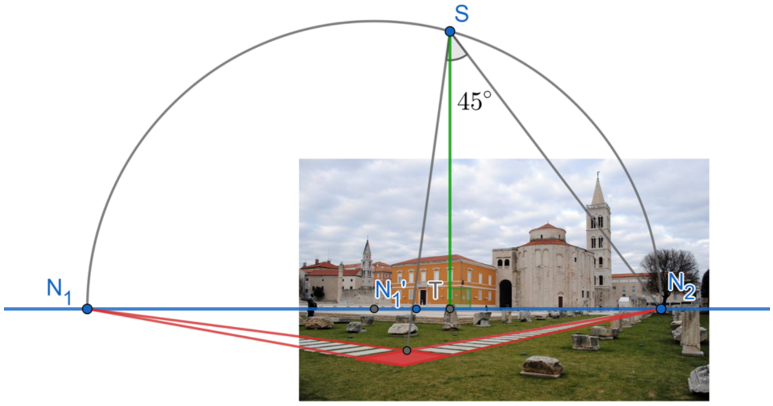
Slika 3.3: Geometrijska metoda

nala raspolavlja pravi kut, nad dužinama $\overline{N_1N_1'}$ i $\overline{N_2N_1'}$ konstruiramo geometrijsko mjesto točaka za koje vrijedi da se dužina vidi pod kutem od 45^o. Presjek ta dva geometrijska mjesta je točka S koja zadovoljava oba uvjeta, a njezina ortogonalna projekcija je projekcija očišta.[7]

3.1.4 Lambertova metoda

Kod ove metode kružnica nad $\overline{N_1N_2}$ predstavlja geometrijsko mjesto točaka iz kojih se ta dužina vidi pod pravim kutem. Također iz činjenice da dijagonala kvadrata raspolavlja pravi kut slijedi da je kut $\angle N_1SN_1' = 45^o$. Udaljenost vrha S do nedoglednice odgovara distanciji, a nožište T okomice iz tog vrha ortogonalnoj projekciji očišta.[7]

Vidimo da je geometrijska metoda dosta jednostavna za primjenu kada se na slici nalazi kvadrat ili perspektivna slika kvadrata i nešto složenija ako koristimo proizvoljan četverokut. U slučaju da u horizontalnoj ravnini imamo prikaz kruga, problem svodimo na primjenu kvadrata promatranjem četverokuta opisan tom krugu. Očigledno, najveća zamjerka ove metode je što



Slika 3.4: Lambertova metoda

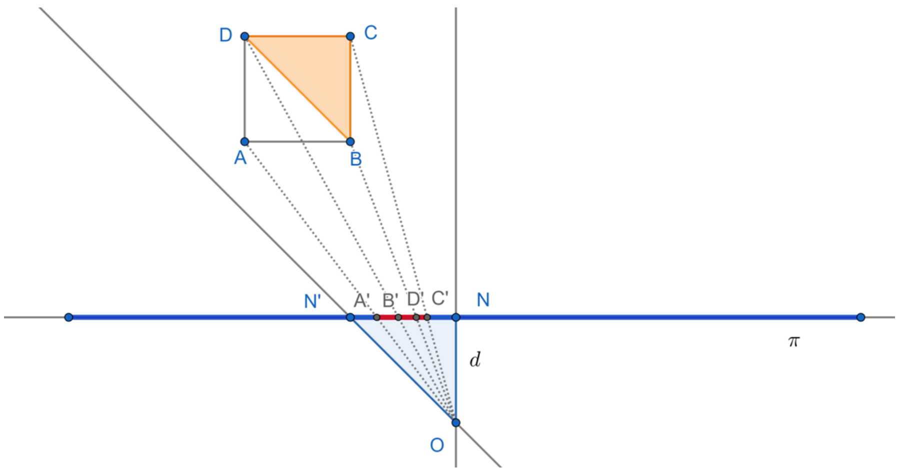
zahtjeva crtanje po samoj slici ili fotografiji što u većini slučajeva rezultira uništavanjem istih. Isto tako, u slučaju kada se nedogledi ne nalaze na slici, praktičnost metode ovisi isključivo o dimenzijama slike.

3.2 Algebarska metoda

Ideja ove metode jest računski opisati korake geometrijske metode, tj. izračunati distanciju i koordinate očišta. Velika prednost algebarskog pristupa je što ne zahtijeva intervenciju na slici, no zauzvrat nudi i ne tako elegantan račun. Iznimka je jedino perspektiva s jednim nedogledom. [7]

3.2.1 Perspektiva s jednim nedogledom

Algebarsko određivanje distancije u perspektivi s jednim nedogledom temelji se na promatranju sličnih trokuta. Kako bi bilo jasnije o kojim je trokutima riječ, prikažimo situaciju pogledom odozgo. Točka O predstavlja očište, N je njezina ortogonalna projekcija na ravninu slike π, a kvadrat $ABCD$ je objekt u prostoru, tj. stvarnih dimenzija. Iz sličnosti trokuta $\Delta ONN'$ i

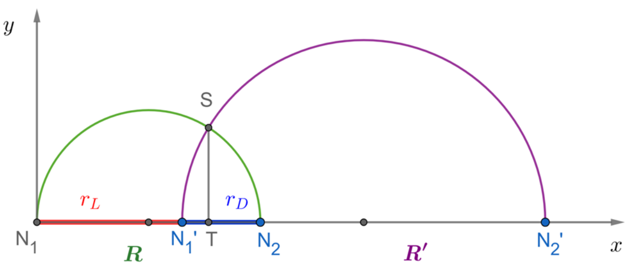


Slika 3.5: Prikaz pogleda odozgo na perspektivu s jednim nedogledom

ΔBCD slijedi da je $d = |NN'|\frac{|BC|}{|CD|}$. Budući da je riječ o kvadratu, znamo da su dužine $\overline{BC}$ i $\overline{CD}$ jednake duljine pa slijedi da je $d = |NN'|$. Uočimo bitnu ulogu kvadrata u ovoj situaciji. U slučaju da četverovrh na slici odgovara primjerice slici pravokutnika, za izračunati distanciju bitno je znati njegove dimenzije što kod kvadrata nije slučaj. Dakle, uvjetovanjem postojanja kvadrata zapravo se ograničava broj varijabli o kojima distancija ovisi.

3.2.2 Perspektiva s dva nedogleda

Kod primjene geometrijske metode na perspektivu s dva nedogleda otkrili smo da je distancija d jednaka udaljenosti točaka S i T pri čemu je S sjecište kružnica nad promjerima $\overline{N_1N_2}$ i $\overline{N_1'N_2'}$, a T sjecište x osi i okomice kroz S na tu os. Uočimo da je pravac ST okomit na x os iz čega slijedi da je $x_S = x_T$, a $|y_S - y_T| = |y_S - 0| = y_S = d$ odgovara udaljenosti stajališta od slike. Dakle, želimo li odrediti očište, trebamo prvo odrediti koordinate točke S. Prije samog računa smjestimo sliku u koordinatni sustav i definirajmo nedoglede tako da nam postupak bude što jednostavniji.



Slika 3.6: Slika u koordinatnom sustavu

Neka je $N_1(0,0)$ lijevi, a $N_2(x_2,0)$ desni nedogled. Označimo na osi i pomoćne nedoglede N_1' i N_2' tako da je $d(N_1,N_1') = r_L$ i $d(N_2,N_1') = r_D$, a s k_1 kružnicu nad promjerom N_1N_2 i s k_2 kružnicu nad promjerom $N_1'N_2'$. Uočimo da su jednadžbe tih kružnica redom $(x-\frac{R}{2})^2+y^2 = (\frac{R}{2})^2$ i $(x-(x_L+\frac{R'}{2}))^2+y^2 = (\frac{R'}{2})^2$. Znamo da točka S mora zadovoljavati obje jednadžbe kružnice stoga ćemo riješiti sustav kako bismo joj odredili koordinate. Odredimo prvo x.

Metodom suprotnih koeficijenata dobivamo sljedeću jednadžbu:

$$(x-\frac{R}{2})^2-(x-(r_L+\frac{R'}{2}))^2 = (\frac{R}{2})^2-(\frac{R'}{2})^2$$

Primjetimo na lijevoj strani jednakosti razliku kvadrata čijim sređivanjem se dobije

$$[2x-(\frac{R}{2}+r_L+\frac{R'}{2})](-\frac{R}{2}+r_L+\frac{R'}{2}) = \frac{1}{4}(R^2-R'^2).$$

Odatle se lako pokaže da je $x = \frac{r_L(r_L+R')}{r_L-r_D+R'}$. Budući da x želimo izraziti u terminima prve kružnice, potrebno je nekako eliminirati radijus pomoćne kružnice. To elegantno možemo učiniti pomoću dvoomjera ako uočimo da su točke N_1, N_1', N_2 i N_2' harmonička četvorka. Promotrimo li sliku, uočit ćemo da za odabrane točke N_1, N_2 i N_2' dijagonala četverokuta jedinstveno određuje četvrtu točku N_1'. Budući da znamo da dvoomjer harmoničke četvorke iznosi -1, vrijedi $\frac{r_L(r_L+R')}{r_L-r_D+R'} = -1$ odakle sljedi da je $R' = \frac{2r_Lr_D}{r_L-r_D}$. U konačnici se, uvrštavanjem tog izraza u jednadžbu za x, dobije da je $x = \dfrac{(\frac{r_L}{r_D})^2(r_L + r_D)}{(\frac{r_L}{r_D})^2 + 1}$.

Izrazimo sada koordinatu y.
Budući da je prva jednadžba kružnice jednostavnija, uvrstimo u nju dobivenu vrijednost za x. Tako dobijemo sljedeću kvadratnu jednadžbu

$$y^2 = (\tfrac{R}{2})^2 - ((\tfrac{r_L}{r_D})^2(r_L + r_D)(\tfrac{r_L}{r_D})^2 + 1 - \tfrac{R}{2})^2.$$

Odatle slijedi da je $y = \dfrac{R^2(\frac{r_L}{r_D})^2}{((\frac{r_L}{r_D})^2 + 1)^2}$.

Iako smo namjestili nedoglede i os radi što jednostavnijeg računa, koordinate koje smo dobili vrijede općenito, tj. za svaku točku S. Potrebno je samo uvrstiti odgovarajuće udaljenosti među nedogledima i dobije se da je vrijednost $y = 36.3$ distancija, a vrijednost $x = 28.7$ projekcija očišta na nedoglednicu ili preciznije udaljenost lijevog očišta od točke T. Napomenimo pritom da je dobiveni rezultat posljedica mjerenja dužina na slici Foruma većih dimenzija od priložene slike.
Uvedemo li oznake $\rho = \frac{r_L}{r_D}$ i $t = \frac{r\rho^2}{\rho^2+1}$ dobivamo formulu koja se lako pamti:

$$d = \tfrac{t}{\rho}.$$

Ova metoda čini se dosta jednostavnom za upotrebu ako se unaprijed znaju izrazi za distanciju i udaljenost očišta. Međutim, za izračunati vrijednosti, potrebno je izmjeriti udaljenosti među nedogledima na slici. To za sobom povlači problem određivanja udaljenosti među nedogledima van slike, ali i problem samog određivanja nedogleda budući da taj postupak zahtjeva crtanje. Točke nedogleda mogu se otprilike odrediti i bez crtanja, ali naravno tada su i tako dobivene vrijednosti približno točne.

3.3 Metoda perspektivnog nagiba

Metoda perspektivnog nagiba u postupku određivanja očišta služi se koeficijentom smjera perspektivnog pravca. Načelno ovu metodu možemo smatrati algebarskom, ali znatno pojednostavljenom zahvaljujući crtanju pravca.[7] Dakle, umjesto rješavanja sustava potrebno je poznavanje samo elementarnih računskih operacija.

Prethodnim razmatranjem modela apsolvirali smo da se ortogonalna projekcija očišta u oznaci T, nalazi negdje na dužini $\overline{NN'}$ kod perspektive s jednim nedogledom ili na dužini $\overline{N_1N_2}$ kod perspektive s dva nedogleda. Dakle, nedogled(i), pomoćni nedogledi i točka T međusobno su kolinearni. Štoviše, s točkom T čine harmoničke četvorke budući da raspored nedogleda jednoznačno određuje položaj točke T na nedoglednici. Prema tome provođenjem konstrukcije za harmoničku četvorku može se odrediti ortogonalna projekcija očišta.

3.3.1 Perspektiva s jednim nedogledom

Postavimo problem u koordinatni sustav tako da se nedogled nalazi u ishodištu, a pomoćni nedogledi na y osi. Tada je očište na x osi.

Pronalaskom slike kvadrata u ravnini "tla" lako se odredi položaj točke T budući da je ona sjecište dijagonale tog četverovrha i nedoglednice. Ta vrijednost se može izračunati na analogan način kao kod algebarske metode - postavljanjem omjera stanica sličnih trokuta.

3.3.2 Perspektiva s dva nedogleda

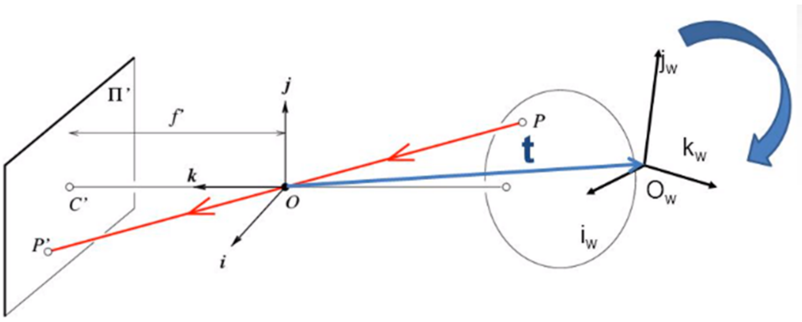
Budući da smo perspektivu s jednim nedogledom riješili slično kao i kod algebarske metode, analogiju možemo uspostaviti i u ovom slučaju.
Zbog ranije spomenutih činjenica, tj. da T mora biti na dužini $\overline{N_1N_2}$ te da s nedogledima čini harmoničku četvorku postavimo sljedeći dvoomjer $R(N_1N_2, TN_2') = -1$. Odatle slijedi da je $R(N_1N_2, TN_2') = \frac{N_1T}{N_2T} : \frac{N_1N_2'}{N_2N_2'}$. Uzmemo li u obzir koordinatizaciju s oznakama i zaključcima iz algebarske metode i točki te pridružimo koordinate $T(t, 0)$ slijedi da je $R(N_1N_2, TN_2') = \frac{t(R-r_L)}{(r-t)(R'-r_L)} = \rho\frac{(R'-r_L)}{R'+r_L} = -1$. Raspisivanjem posljednje jednakosti dobije se $R(N_1N_2, TN_2') = \rho$, tj. koeficijent smjera dijagonale perspektivnog kvadrata koji siječe nedoglednicu. Istaknimo kako je točka T proizvoljna pa ovo uvijek vrijedi čak i u slučaju kada je jedan od nedogleda "neizmjerno dalek". Primijetimo da takav slučaj ekvivalentan perspektivi s jednim nedogledom.

Dakle, ovu metodu primjenjujemo tako da mjerenjem odredimo koeficijent smjera ρ koji nedoglednicu siječe u točki T, a distanciju onda dobijemo računanjem $d = \frac{t}{\rho}$.

4 Matrični prikaz perspektivne projekcije

U prethodnom poglavlju objašnjeno je kako se na različite načine može odrediti očište za danu sliku. Na temelju perspektivne slike također je moguće odrediti i dimenzije prikazanog objekta. Znanstvena disciplina koja se time bavi zove se fotogrametrija. Poznavanjem geometrijskih zakonitosti prema kojima je nastala perspektivna slika, može se u potpunosti ili djelomično rekonstruirati objekte sa slike. Nekada se taj postupak provodio "ručno", no danas postoje različiti računalni programi i alati koji vrlo brzo i precizno to rade.
Svaki od tih programa zahtijeva unos određenog broja fotografija pri čemu minimalan broj ovisi od programa do programa. Bitno je promatrani objekt slikati iz različitih kuteva kako bi rekonstrukcija slike bila što vjerodostojnija. Dakle, bitno je kako je usmjerena kamera u odnosu na promatrani objekt. No, kamera ima i određenu specifičnost koja također utječe na stvaranje slike bez obzira na to kako se postavila. Za objektive se mogu koristiti različite leće, a njihov izbor direktno utječe na lom zraka svjetlosti, tj. na stvaranje slike. U daljnjem izlaganju zanemarit će se termini optike te će se zahtijevati da je leća tanka, kako bi žarišna udaljenost f čim bolje odgovarala stvarnoj udaljenosti optičkog centra O od ravnine slike. Također, bitno je naglasiti kako će se koristiti kamera sa smanjenim okvirom koji odgovara veličini točke kako bi projicirana slika bila perspektivna.

Kameru očigledno možemo pomicati u svim smjerovima pri čemu pomak može biti rotacija, translacija ili kombinacija jednog i drugog.
Uzmimo da je u realnom prostoru izabran kartezijev koordinatni

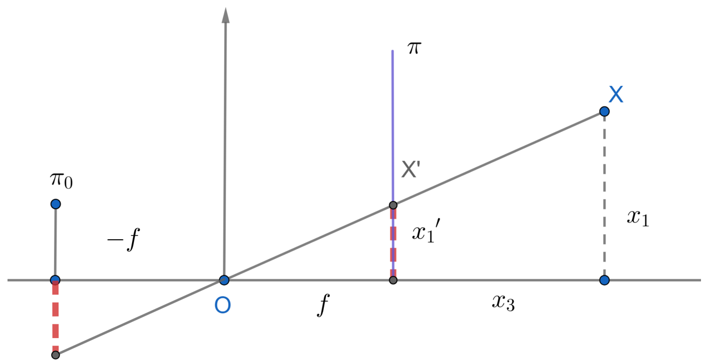


Slika 4.1: Koordinatni sustavi kamere i ravnine slike

sustav u kojem točka ima koodinatni vektor, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$.

Kako bismo dobili koordinate iste točke u koordinatnom sustavu kamere, označimo taj koordinatni vektor s X_c, treba primijeniti translaciju i rotaciju pa imamo $X_c = R(X-t)$, pri čemu je t vektor translacije, a R matrica rotacije. Centralnom projekcijom na ravninu slike dobiva se točka čiji koordinatni vektor, u istom sustavu kamere, označimo s U_c. Ishodište koordinatnog sustava kamere smjestimo u centar projekcije O, a ravnina slike je od ishodišta udaljena za f. Ovdje ćemo privremeno, radi jednostavnosti koordinate točke X u sustavu kamere označiti s $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, a koordinatni stupac X_c uvrstit ćemo na kraju izračunavanja koordinata slike točke X u ravnini slike.
Koordinate za U_c dobivamo iz sličnosti trokuta: $x_1' = -f\frac{x_1}{x_3}$, $x_2' = -f\frac{x_2}{x_3}$, $x_3' = -f$, stoga je $U_c = \begin{bmatrix} -f\frac{x_1}{x_3} \\ -f\frac{x_2}{x_3} \\ -f \end{bmatrix}$.

Preostaje odrediti položaj projekcije U_c u afinom koordinatnom sustavu slike, to jest izvesti koordinate koje stvarna kamera doista daje, jer u tom sustavu osi ne moraju biti okomite. Jedna



Slika 4.2: Slika u koordinatnom sustavu

od tih osi bira se u smjeru osi koordinatnog sustava kamere. Označimo koordinate u tom afinom sustavu s u i v te neka ortogonalna projekcija točke O na ravninu slike ima koordinate (u_0, v_0) u tom sustavu. Prijelaz na uv-koordinate izražava se onda množenjem jednom trokutastom matricom i translacijom pa imamo:

$$\begin{aligned} u &= -fa\tfrac{x_1}{x_3} \quad -fb\tfrac{x_2}{x_3} \quad -u_0 \\ v &= \qquad\qquad\; -fc\tfrac{x_2}{x_3} \quad -v_0. \end{aligned}$$

Sad je prikladno preći na homogene koordinate u ravnini slike jer će se transformacija koordinata izraziti množenjem samo jednom matricom. Neka su homogene koordinate (U, V, W) tako da $u = \frac{U}{W}$, $v = \frac{V}{W}$. Izborom $W = 1$ dobivamo matrični oblik:

$$\begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & -u_0 \\ 0 & c & -v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -f\frac{x_1}{x_3} \\ -f\frac{x_2}{x_3} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Budući da su ovo homogene koordinate, možemo jednakost pomnožiti s faktorom x_3 pa dobivamo

$$x_3 \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -fa & -fb & -u_0 \\ 0 & -fc & -v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{x_1}{x_3} \\ \frac{x_2}{x_3} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -fa & -fb & -u_0 \\ 0 & -fc & -v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}. \tag{4.1}$$

Sad možemo uvrstiti $X_c = R(X - t)$ kao vektor na kojeg stvarno djeluje transformacija pa ukratko dobivamo

$$x_3 \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} = KR(X - t) \tag{4.2}$$

pri čemu je $K = \begin{bmatrix} -fa & -fb & -u_0 \\ 0 & -fc & -v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Ovako dobivenu gornjetrokutastu matricu K nazivamo **matricom kalibracije kamere**. Kako je sada slika izražena homogenim koordinatama u ravnini, prikažimo i X homogenim koordinatama: $\lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{bmatrix}$. Tada se prethodna relacija može pojednostavniti tako da se slika točke Xdobije množenjem jednom matricom tipa 3×4, ali u homogenim koordinatama:

$$\begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} KR & | & -KRt \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} KR & | & -KRt \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Naglasimo da je KR matrica tipa 3×3, i to regularna, a $-KRt$ je stupčana 3×1. Matrica M naziva se **matrica projekcije** ili **matrica kamere**. Uvođenjem projektivnog prostora i homogenih koordinata prikaz projekcije je pojednostavljen i izražen je linearnom transformacijom, za razliku od nelinearne gdje su se pojavljivali kvocijenti koordinata. Matrica M određena je do na skalar različit od 0, jer je riječ o homogenim koordinatama.

Na temelju dobivenih jednadžbi mogu se izračunavati slike točaka iz stvarnog svijeta. Obrnuto, nepoznati parametri mogu se određivati uvrštavanjem koordinata za određene točke koje imaju poznate slike. Za određivanje koeficijenata matrice kalibracije kamere K načelno treba najviše 6 poznatih parova točaka i njihovih slika.

Naglasimo još da se rekonstrukcija stvarnog objekta ne može precizno izvesti ako se pretpostavi djelovanje bilo kakve 3×4 matrice ranga 3 (za homogene koordinate). Naime, svaka opisana transformacija koja izražava koordinate slike točke X, ima svoju matricu navedenog oblika, odnosno klasu proporcionalnih matrica zbog homogenih koordinata. No, obrnuto ne vrijedi jer u proizvoljnoj matrici tipa 3×4, kojoj prva tri stupca čine regularnu podmatricu, općenito neće biti ispunjeni uvjeti koji proizlaze odatle što je R matrica rotacije. Ti uvjeti nisu linearni.

5 Zaključak

Projektivna geometrija se može činiti neobičnom s obzirom na to da odudara od euklidske geometrije koja nam je usađena od ranih dana i kao takva se čini prirodnijom. Međutim, projektivni prostor dopušta puno više slobode što u određenim situacijama može biti iznimno praktično.
Na primjerima određivanja očišta jasno se vidi kako dvoomjer znatno utječe na jednostavnost, a samim time i na brzinu izvođenja postupka. Isti učinak imaju i homogene koordinate kada je u pitanju računalna grafika. Brzina izvođenja operacija s matricama ovisi o načinu na koji je matrica zadana, a budući da korištenje homogenih koordinata omogućava linearan račun, znatno se ubrzava izvođenje naredbi.
Također, elementi matričnog zapisa lako se interpretiraju budući da svaki element otkriva jedan numerički podatak o samom postupku preslikavanja. Tako primjerice letimičnim pogledom na matricu projekcije možemo steći dojam o tome kako bi trebala izgledati slika objekta na koji se djeluje danim projektivitetom. Upravo tako definirana matrica, iznimno je korisna za kalibriranje te ima široku primjenu počevši od geodezije i građevinarstva pa sve do policije i medicine.

Perspektivno preslikavanje kao poseban slučaj projektivne transformacije je također rasprostranjeno. Uglavnom se primjenjuje u područjima koja i danas zahtijevaju crtanje objekata u ravnini. No, oni koji ga koriste uglavnom samo reproduciraju korake bez dubljeg razmišljanja o njihovoj ulozi ili pak na intuitivnoj razini poštuju njegova načela. U današnje vrijeme kada su ljudi manje naklonjeni manualnom izvršenju zadataka, veću važnost ima projektivitet koji na području računarstva ima široku primjenu. Danas je sve više aplikacija koje se temelje na kvantitativnoj obradi informacija sa slike. Gotovo da i

nema područja koje ne koristi projektivitet (u geodeziji pri izmjeri zemljišta, u policiji pri vršenju očevida, u meteorologiji i pri predviđanju jačine vjetra, itd.). Iako ima tako široku primjenu većina korisnika nije detaljno upoznata s matematičkom pozadinom projektiviteta, već ga koriste kao alat pri postizanju određenog cilja.
Iz svega navedenog može se zaključiti kako nam je projektivna geometrija neophodna u pojednostavljivanju postupaka bilo da je riječ o crtanju ili iščitavanju podataka, no njezin pristup je toliko elegantan da se olako prelazi preko njegovog značenja. Dublje razumijevanje zahtijeva upoznavanje nove terminologije te prije svega prihvaćanje novog pogleda na geometriju koja se na prvu iz tih razloga može činiti apstraktnijom nego što jest.

Literatura

[1] K. Andersen, *The Geometry of an Art: The History of the Mathematical Theory of Perspective from Alberti to Monge*, Springer, New York, 2007.

[2] S. Birchfield *An Introduction to Projective Geometry(for computer vision)*, Stanford University, 1998.
http://robotics.stanford.edu/ birch/projective/projective.pdf

[3] F. M., Bruckler, *Povijest matematike 2*, Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osjeku, Odjel za matematiku, 2007.

[4] B. K. P Horn, *Projective Geometry Considered Harmful*, Tehnical Report, MIT, 1999.
http://people.csail.mit.edu/bkph/articles/Harmful.pdf

[5] Ph. Willis, *Projective Geometry* chapter 6 in *Advanced Computer Graphics*
http://www.cs.bath.ac.uk/ pjw/NOTES/75-ACG/ch6-projective.pdf

[6] M. Frantz, A. Crannell, *Viewpoints:Mathematical Perspective and Fractal Geometry in Art*, 2007.
http://mathserver.neu.edu/ eigen/U220/Viewpoints-5-19-07.pdf

[7] D. Palman, *Projektivna geometrija*, Školska knjiga, Zagreb, 1984.

[8] B. Taylor, *Dr. Brook Taylor's principles of linear perspective; or, The art of designing upon a plane the representation of all sorts of objects*, London, 1835.
http://www.aproged.pt/biblioteca/BrookTaylorlinearperspective.pdf

[9] J. D'Amelio, *Perspective Drawing*, Dover Publications, New York, 1964. http://www.floobynooby.com/pdfs/Perspective_Drawing_Handbook-JosephDAmelio.pdf

[10] F. Futamura, L. Lehr,*A New Perspective on Finding the Viewpoint*, Mathematical Association of Amerika: Vol 90, No 4, 2017. http://people.southwestern.edu/˜futamurf/Futamura-Lehr-preprint.pdf

Sažetak

U radu se upoznajemo s perspektivom i nekim od osnovnih metoda traženja očišta za danu sliku. U svrhu boljeg razumijevanja perspektiviteta i njegovog djelovanja, u prvom poglavlju je definirana projektivna ravnina, odnosno prostor. Također su prikazani neki bitni pojmovi projektivne geometrije poput dvoomjera, harmoničke četvorke, perspektiviteta i projektiviteta te njihova osnovna svojstva. Nadalje, u drugom poglavlju objašnjavamo kako se pomoću geometrijske, algebarske i metode nagiba, određuje položaj oka u odnosu na danu sliku. Pritom dolazi do izražaja važnost projektivne invarijantnosti dvoomjera i posebno harmoničke četvorke te uloga četverovrha kod zadavanja projektiviteta. U posljednjem poglavlju izvodi se matrični prikaz transformacije koordinata kojom se opisuje slika u pojednostavljenom modelu kamere. Primjenom homogenih koordinata dobiva se matrica projekcije, prikladna za rekonstrukciju dimenzija i položaja objekta, kao i za kalibraciju kamere.

Summary

In this thesis we present basic principles of perspective projection and some basic methods of finding a viewpoint for a given image. In the first chapter some basic notions of projective geometry are introduced, such as perspectivity, projectivity, cross-ratio and harmonic quadruple in order to get a better insight into the nature of perspective projection. The importance of *ideal points* and *lines* is explained in the setting of the extended Euclidean space, coordinatized by projective homogeneous coordinates. In the second chapter we discuss different methods of finding the viewpoint (geometric method, algebraic and slope method) including the application of cross-ratio and harmonic quadruple as projective invariants.
In the final chapter, a matrix representation of the image formation is derived for the simple pinhole camera model. By the use of homogeneous coordinates the projection matrix is obtained, suitable for reconstruction of dimensions and position of an object as well as for camera calibration.

Životopis

Rođena sam 21. srpnja 1990. godine u Zadru gdje sam završila svoje osnovnoškolsko i srednjoškolsko obrazovanje. U osnovnoj školi Petra Preradovića sam zahvaljujući predanosti nastavnika koji su predavali likovnu umjetnost, fiziku i matematiku razvila interes za ta područja koji se u gimnaziji Franje Petrića nastavio razvijati. Pri odabiru fakulteta ipak je presudila ljubav prema kraljici znanosti - matematici pa sam tako 2009. na Matematičkom odjelu Prirodoslovno-matematičkog fakulteta upisala preddiplomski studij. Po njegovom završetku 2014. stekla sam diplomu sveučilišnog prvostupnika edukacije matematike i upisala diplomski studij Matematika, nastavnički smjer kojeg sada završavam.