SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Luka Cigler

GABOROVI BAZNI OKVIRI

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Damir Bakić

Zagreb, 2018.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ______________________________, predsjednik
2. ______________________________, član
3. ______________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ______________________________
2. ______________________________
3. ______________________________

Sadržaj

Uvod

Niz vektora (x_n) u Hilbertovom prostoru H naziva se bazni okvir za H ako postoje konstante $A, B > 0$ takve da vrijedi $A\|x\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2 \leq B\|x\|^2, \forall x \in H$. Motivacija za bazne okvire je proširenje ortonromiranih baza, tj. želimo zadržati neka dobra svojstva baze, a istovremeno dobiti fleksibilniji objekt. Intuitivno, bazne okvire možemo shvatiti kao topološke sustave izvodnica. Sam pojam baznih okvira prvi su eksplicitno uveli 1952. godine R. J. Duffin i A. C. Schaeffer, iako su se sami objekti koristili i ranije. Danas je to propulzivna teorija s mnogobrojnim primjenama u matematici i inženjerstvu, primjerice u teoriji operatora, kodiranju, rekonstrukciji signala itd.

Za pozitivne realne parametre a i b Gaborov sistem generiran funkcijom $g \in L^2(\mathbb{R})$ je niz $G(g, a, b) = (M_{mb}T_{na}g)_{m,n\in\mathbb{Z}}$ pri čemu su M_{mb} i T_{na} operatori modulacije i translacije. Gaborovi sistemi dobili su ime po britansko-mađarskom nobelovcu Dennisu Gaboru koji je prvi predložio njihovu upotrebu.

Glavni cilj ovog rada je proučavanje Gaborovih baznih okvira na Hilbertovom prostoru $L^2(\mathbb{R})$, odnosno zanimaju nas uvjeti da Gaborov sistem bude (Gaborov) bazni okvir za $L^2(\mathbb{R})$. Da bismo to napravili, najprije trebamo razviti općenitu teoriju baznih okvira, pa će dio ovog rada biti posvećen upravo tome.

U 1. poglavlju navodimo osnovne definicije i rezultate iz teorije normiranih prostora koji su nam neophodni za daljnji rad. Nadalje, navodimo kratku diskusiju o Fourierovoj transformaciji koja nam treba za proučavanje Gaborovih baznih okvira.

U 2. poglavlju ćemo definirati bazne okvire i dokazati osnovna svojstva i karakterizacije. Također definiramo duale baznih okvira te dokazujemo osnovne rezultate vezane uz taj pojam.

U 3. poglavlju proučavamo Gaborove sisteme na Hilbertovom prostoru $L^2(\mathbb{R})$, odnosno zanimaju nas uvjeti na generator g i parametre a i b da Gaborov sistem bude bazni okvir za $L^2(\mathbb{R})$.

Poglavlje 1

Osnovni pojmovi teorije normiranih prostora; Fourierova transformacija

U ovom poglavlju navodimo osnovne definicije i rezultate iz normiranih prostora koje ćemo kasnije koristiti u cijelom radu. Isto tako, reći ćemo nešto o Fourierovoj transformaciji koja nam je od izuzetne važnosti za same Gaborove bazne okvire. Neki rezultati navedeni u ovom poglavlju neće nam biti važni u daljnjim razmatranjima, ali ih navodimo radi potpunosti pregleda. Također, podrazumijevamo najosnovnije pojmove i rezultate o strukturi vektorskih prostora (pojam baze, dimenzije, (direktna) suma potprostora itd.).

1.1 Normirani prostori

U ovom odjeljku, promatramo proizvoljne vektorske prostore (dakle, bez ograničanja na dimenziju prostora) nad poljem $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$. Pritom ćemo za njih koristiti zajedničku oznaku $\mathbb{F}$ gdje god nije važno o kojem polju je riječ.

Definicija 1.1.1. *Norma na vektorskom prostoru X nad poljem $\mathbb{F}$ je preslikavanje $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ sa sljedećim svojstvima:*

1. $\|x\| \geq 0, \forall x \in X$;
2. $\|x\| = 0 \iff x = 0$;
3. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|, \forall \alpha \in \mathbb{F}, \forall x \in X$;
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in X$.

Uređeni par $(X, \|\cdot\|)$ *nazivamo normiranim prostorom.*

Primjer 1.1.2. *Uobičajeni primjeri normiranih prostora, s pripadnim normama, su neki od sljedećih:*

$(\mathbb{F}, |\cdot|)$ (norma je ovdje, dakle, standardna apsolutna vrijednost u $\mathbb{F}$).

$(\mathbb{F}^n, \|\cdot\|_1), \|(x_1, ..., x_n)\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$.

$(\mathbb{F}^n, \|\cdot\|_2), \|(x_1, ..., x_n)\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$.

$(\mathbb{F}^n, \|\cdot\|_\infty), \|(x_1, ..., x_n)\|_\infty = \max\{|x_i| : i = 1, ..., n\}$.

Primjer 1.1.3. *Slično, uz oznaku* $C([a, b])$ *za vektorski prostor svih neprekidnih realnih ili kompleksnih funkcija na segmentu* $[a, b]$*, imamo:*

$(C([a, b]), \|\cdot\|_1), \|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt$.

$(C([a, b]), \|\cdot\|_2), \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt}$.

$(C([a, b]), \|\cdot\|_\infty), \|f\|_\infty = \max\{|f(t)| : t \in [a, b]\}$.

Definicija 1.1.4. *Skalarni produkt na vektorskom prostoru* X *nad poljem* $\mathbb{F}$ *je preslikavanje* $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{F}$ *sa sljedećim svojstvima:*

1. $\langle x, x \rangle \geq 0, \forall x \in X$;
2. $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$;
3. $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle, \forall \alpha \in \mathbb{F}, \forall x, y \in X$;
4. $\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle, \forall x_1, x_2, y \in X$;
5. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}, \forall x, y \in X$.

Uređeni par $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *nazivamo unitarnim prostorom. Na proizvoljnom unitarnom prostoru, formulom* $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ *prirodno je zadana norma koju u nastavku podrazumijevamo.*

Napomena 1.1.5. *Na unitarnom prostoru* X *vrijedi Cauchy-Schwarzova nejednakost*

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \quad \forall x, y \in X. \tag{1.1}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako su vektori x *i* y *linearno zavisni.*

Primjer 1.1.6. *U vektorskim prostorima iz ranijih primjera, najjednostavniji primjeri skalarnih produkata su:*

$(\mathbb{F}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle), \langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i\overline{y_i}$.

$(C([a,b]), \langle\cdot,\cdot\rangle), \langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt$.

Napomena 1.1.7. *Umjesto $(X, \|\cdot\|)$ i $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ normirane, odnosno unitarne prostore kraće ćemo (ne baš najpreciznije) označavati samo s X.*

Definicija 1.1.8. *Kažemo da niz $(x_n)_n$ u normiranom prostoru X konvergira prema $x \in X$ ako vrijedi*

$$\forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \textit{tako da}\ n \geq n_0 \implies \|x_n - x\| < \varepsilon.$$

U tom slučaju pišemo $x = lim_{n\to\infty}x_n$ ili $x_n \to x$.

Definicija 1.1.9. *Kažemo da je niz $(x_n)_n$ u normiranom prostoru X Cauchyjev ako vrijedi*

$$\forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \textit{tako da}\ m, n \geq n_0 \implies \|x_m - x_n\| < \varepsilon.$$

Lako se vidi da je svaki konvergentan niz Cauchyjev. Obrat, međutim, općenito ne vrijedi. To nas motivira za sljedeću definiciju.

Definicija 1.1.10. *Kažemo da je normirani prostor X potpun ako svaki Cauchyjev niz u njemu i konvergira. Potpun normirani prostor naziva se Banachov, a potpun unitarni prostor naziva se Hilbertov prostor.*

Hilbertovi prostori su nam od posebnog interesa jer se u njima nalaze objekti koje proučavamo. Sljedeći primjer Hilbertovog prostora bit će nam izuzetno važan u proučavanju baznih okvira. Dokaz da je taj prostor zaista Hilbertov može se naći u [1, Teorem 1.3.2].

Primjer 1.1.11. *Definirajmo skup*

$$\ell^2 = \left\{(x_n)_n \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2 < \infty\right\}.$$

Na ℓ^2 dobro je definiran skalarni produkt

$$\langle(x_n)_n, (y_n)_n\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n\overline{y_n}\ .$$

pri čemu ovaj red konvergira apsolutno u polju $\mathbb{F}$. Jasno, tada je pripadna norma dana s

$$\|(x_n)_n\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2}\ .$$

Ukoliko gledamo nizove indeksirane po nekom prebrojivom skupu S, pišemo $\ell^2(S)$. Oznaka ℓ^2 podrazumijeva $\ell^2(\mathbb{N})$.

Sada navodimo neke osnovne topološke pojmove koji će nam trebati kasnije. Svi dokazi se mogu naći u [1, Poglavlje 1]

Definicija 1.1.12. *Neka je X normiran prostor, $x \in X$ i $r > 0$ realan broj. Otvorena kugla oko x radijusa r je skup*

$$K(x, r) = \{y \in X : \|x - y\| < r\}$$

Definicija 1.1.13. *Neka je X normiran prostor. Kažemo da je skup $S \subseteq X$ otvoren ako je unija otvorenih kugli. Prazan skup smatramo otvorenim po definiciji. Skup $F \subseteq X$ je zatvoren ako je skup $X \setminus F$ otvoren.*

Propozicija 1.1.14. *Neka je X normirani prostor. Skup $S \subseteq X$ je zatvoren ako i samo ako sadrži sve limese svih konvergentnih nizova svojih članova.*

Definicija 1.1.15. *Zatvarač skupa $S \subseteq X$ u oznaci $\overline{S}$ je najmanji zatvoreni nadskup od S.*

Definicija 1.1.16. *Kažemo da je skup $S \subseteq X$ gust (u X) ako vrijedi $\overline{S} = X$ Normirani prostor X je separabilan ako ima prebrojiv gust podskup.*

Napomena 1.1.17. *Prostor ℓ^2 iz primjera 1.1.11 je separabilan.*

Definicija 1.1.18. *Skup $S \subseteq X$ u normiranom prostoru X je ograničen ako postoji $M > 0$ takav da vrijedi $\|x\| \leq M, \forall x \in S$.*

Definicija 1.1.19. *Kažemo da je skup $S \subseteq X$ kompaktan ako svaki niz u S ima konvergentan podniz čiji limes je u S.*

Propozicija 1.1.20. *Kompaktan skup u normiranom prostoru X je zatvoren i ograničen.*

Za kraj ove točke definirajmo (apsolutnu) konvergenciju redova u normiranom prostoru. Nešto više o tome reći ćemo u potpoglavlju 1.3.

Definicija 1.1.21. *Neka je* $(x_n)_n$ *niz u normiranom prostoru* X. *Kažemo da red* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *konvergira (obično) prema vektoru* $x \in X$ *ako za niz parcijalnih suma* $s_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$ *vrijedi* $x = \lim_{n\to\infty} s_n$. *U tom slučaju pišemo* $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

Red $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *u normiranom prostoru konvergira apsolutno ako konvergira red nenegativnih realnih brojeva* $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$.

Intuitivno, apsolutna konvergencija je jača od obične (primjerice, to je jasno u polju). Međutim, u općenitom normiranom prostoru apsolutna konvergencija ne povlači običnu. U potpunom prostoru ta tvrdnja će vrijediti. Štoviše, potpunost prostora možemo karakterizirati pomoću redova. Dokaz se može naći u [1, teorem 1.1.34].

Teorem 1.1.22. *Normirani prostor* X *je potpun ako i samo ako svaki apsolutno konvergentan red konvergira i obično u* X. *U tom slučaju vrijedi* $\|\sum_{n=1}^{\infty} x_n\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$.

1.2 Operatori na normiranim prostorima

U ovom potpoglavlju usredotočit ćemo se na linearne operatore u normiranim, a od posebnog značaja bit će nam rezultati za operatore na Hilbertovim prostorima.

Definicija 1.2.1. *Neka su* X *i* Y *normirani prostori,* $c \in X$ *i* $f : X \to Y$. *Kažemo da je funkcija* f *neprekidna u točki* c *ako vrijedi:*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tako da } \|x - c\| < \delta \implies \|f(x) - f(c)\| < \varepsilon.$$

Kažemo da je funkcija f *neprekidna na* X *ako je neprekidna u svakoj točki* $c \in X$.

Napomena 1.2.2. *Norma na* X *je neprekidna funkcija na* X *(u kodomeni, jasno, gledamo* $\mathbb{R}$ *s apsolutnom vrijednošću).*

Navedimo jednu korisnu jednostavnu karakterizaciju neprekidnosti u točki.

Propozicija 1.2.3. *Neka su* X *i* Y *normirani prostori,* $c \in X$ *i* $f : X \to Y$. *Funkcija* f *je neprekidna u točki* c *ako i samo ako za svaki niz* $(x_n)_n$ *takav da je* $c = \lim_{n\to\infty} x_n$ *vrijedi* $f(c) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$.

Definicija 1.2.4. *Neka su* X *i* Y *normirani prostori i* $A : X \to Y$ *linearni operator. Kažemo da je operator* A *ograničen ako postoji konstanta* $M > 0$ *takva da vrijedi*

$$\|Ax\| \leq M\|x\|, \quad \forall x \in X. \tag{1.2}$$

Napomena 1.2.5. *Neka su X i Y normirani prostori. Skup svih ograničenih operatora s X u Y označavamo s $\mathbb{B}(X,Y)$. Ako je $Y=\mathbb{F}$, prostor $\mathbb{B}(X,\mathbb{F})$ zovemo dualan prostor i označavamo s X'.*

Lako se vidi da je uz standardno zbrajanje i množenje skalarom po točkama $\mathbb{B}(X,Y)$ vektorski prostor. Štoviše, taj prostor možemo opskrbiti i normom:

$$\|A\| = \sup\{\|Ax\| : \|x\| \leq 1\}. \tag{1.3}$$

Ovu normu zvat ćemo operatorska norma. Lako se vidi da je broj $\|A\|$ najmanja konstanta za koju vrijedi (1.2). Navedimo za kraj još jednu korisnu karakterizaciju operatorske norme:

$$\|A\| = \sup\{\|Ax\| : \|x\| = 1\}. \tag{1.4}$$

Teorem 1.2.6. *Neka su X i Y normirani prostori te neka je $A : X \to Y$ linearan operator. Sljedeće tvrdnje su međusobno ekvivalentne:*

(a) A je neprekidan u nekoj točki $c \in X$,

(b) A je neprekidan na X,

(c) A je ograničen.

Napomena 1.2.7. *Kombinirajući prethodni teorem i propoziciju 1.2.3 lagano dobivamo sljedeću tvrdnju.*

Ako su niz $(x_n)_n$ u X i $x \in X$ takvi da je $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$, te ako je $A \in \mathbb{B}(X,Y)$, onda je $Ax = \sum_{n=1}^{\infty} Ax_n$.

Definicija 1.2.8. *Neka su X i Y normirani prostori i $A \in \mathbb{B}(X,Y)$. Kažemo da je operator A ograničen odozdo ako postoji konstanta $m > 0$ takva da vrijedi*

$$\|Ax\| \geq m\|x\|, \quad \forall x \in X. \tag{1.5}$$

Sada ćemo navesti neke ključne rezultate za operatore na Hilbertovim prostorima. Dokazi tvrdnji mogu se naći u [1, Poglavlje 2.2].

Teorem 1.2.9. *Neka su H i K Hilbertovi prostori i $A \in \mathbb{B}(H,K)$. Tada postoji jedinstveni operator $A^* \in \mathbb{B}(K,H)$ sa svojstvom $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle, \forall x \in H, \forall y \in K$. Pritom za sve skalare α_1, α_2 i sve operatore $A, A_1, A_2 \in \mathbb{B}(H,K)$ vrijedi $(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2)^* = \overline{\alpha_1}A_1^* + \overline{\alpha_2}A_2^*$, $(A^*)^* = A$, $\|A^*\| = \|A\|$ i $\|A^*A\| = \|A\|^2$. Osim toga, ako se operatori A i B mogu komponirati, vrijedi $(AB)^* = B^*A^*$.*

Napomena 1.2.10. *U općenitom unitarnom prostoru gornji teorem ne vrijedi.*

Definicija 1.2.11. *Kaže se da je operator A^* iz prethodnog teorema hermitski adjungiran operatoru A. Ako je X unitaran prostor i $A \in \mathbb{B}(X)$ takav da postoji $A^* \in \mathbb{B}(X)$ kažemo da je operator A:*

- *hermitski, ako je $A = A^*$,*

- *unitaran, ako je $AA^* = A^*A = I$,*

- *normalan, ako je $AA^* = A^*A$.*

Napomena 1.2.12. *Za unitaran operator U vrijedi*

$$\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, U^*Uy\rangle = \langle x, y\rangle.$$

Dakle, unitaran operator čuva skalarni produkt, pa onda i normu. Štoviše, lako se vidi da ako je operator surjektivna izometrija, onda je i unitaran.

Definicija 1.2.13. *Neka je X unitaran prostor i $S \subseteq X$. Ortogonalni komplement skupa S je skup*

$$S^\perp = \{y \in X : \langle x, y\rangle = 0, \forall x \in S\}.$$

Napomena 1.2.14. *Ortogonalni komplement proizvoljnog podskupa unitarnog prostora X je zatvoreni potprostor od X i vrijedi $S \cap S^\perp = \{0\}$.*

Teorem 1.2.15 (**Rieszov teorem o projekciji**). *Neka je H Hilbertov prostor i $M \leq H$ zatvoreni potprostor. Svaki vektor $x \in H$ dopušta jedinstven prikaz oblika $x = a + b$ pri čemu je $a \in M$ i $b \in M^\perp$. Preslikavanje $P : H \to H$ definirano s $Px = a$ je ograničen linearni operator za kojeg vrijedi $P^2 = P$ i $\|P\| = 1$ (osim kad je $M = \{0\}$, tada je naravno $P = 0$).*

Napomena 1.2.16. *Vektor a iz prethodnog teorema zove se ortogonalna projekcija vektora x na potprostor M, a operator P zove se ortogonalni projektor na M.*

Napomena 1.2.17. *Pretpostavimo da se Hilbertov (ili općenitije normirani) prostor može rastaviti na direktnu sumu zatvorenih potprostora $H = X \dot{+} Y$ (općenito, direktni komplement zatvorenog potprostora ne mora biti zatvoren). I u tom slučaju svaki $h \in H$ dopušta jedinstveni prikaz oblika $h = x + y, x \in X, y \in Y$. Tada je operator F definiran s $Fh = x$ ograničen i vrijedi $F^2 = F$. Vektor x zovemo kosa projekcija vektora h na X, a operator F zovemo kosi projektor na X paralelan s Y. Obratno, svaki ograničeni operator F takav da je $F^2 = F$ je kosi projektor na svoju sliku paralelan jezgri.*

Propozicija 1.2.18. *Neka su H i K Hilbertovi prostori i $A \in \mathbb{B}(H, K)$. Tada je $N(A) = (\overline{R(A^*)})^\perp, N(A^*) = (\overline{R(A)})^\perp, \overline{R(A)} = (N(A^*))^\perp$ i $\overline{R(A^*)} = (N(A))^\perp$.*

Teorem 1.2.19 (**Rieszov teorem o reprezentaciji**). *Neka je H Hilbertov prostor i $f \in H'$. Tada postoji jedinstveni vektor $b \in H$ takav da vrijedi $f(x) = \langle x, b \rangle, \forall x \in H$. Nadalje, operatorska norma funkcionala f jednaka je $\|b\|$.*

Definicija 1.2.20. *Neka je H Hilbertov prostor. Za operator $A \in \mathbb{B}(H)$ kažemo da je pozitivno semidefinitan i pišemo $A \geq 0$ ako je A hermitski i ako vrijedi $\langle Ax, x \rangle \geq 0, \forall x \in H$.*

Za $A, B \in \mathbb{B}(H)$ definiramo uređaj s $A \leq B \iff B - A \geq 0$.

Teorem 1.2.21. *Neka je H Hilbertov prostor i $A \in \mathbb{B}(H)$, $A \geq 0$. Tada postoji jedinstveni operator $B \in \mathbb{B}(H)$ takav da je $B \geq 0$ i $B^2 = A$. Ako za operator $C \in \mathbb{B}(H)$ vrijedi $AC = CA$, onda vrijedi i $BC = CB$.*

Napomena 1.2.22. *Operator B iz prethodnog teorema naziva se korijen operatora A i označava s $B = \sqrt{A}$.*

Idući teorem svojevrsni je princip uniformne ograničenosti na Hilbertovim prostorima, a govori nam da je svaki slabo ograničen skup i ograničen ($S \subseteq H$ je slabo ograničen ako je za svaki $f \in H'$ skup $\{|f(x)| : x \in S\}$ ograničen u $\mathbb{R}$). Dokaz teorema može se naći u [1, teorem 5.3.9].

Teorem 1.2.23. *Neka je T podskup Hilbertovog prostora H sa sljedećim svojstvom:*

$$\forall a \in H, \exists C(a) > 0 \text{ tako da vrijedi } |\langle x, a \rangle| \leq C(a), \quad \forall x \in T.$$

Tada je T ograničen, tj. postoji $M > 0$ takav da je $\|x\| \leq M, \quad \forall x \in T$.

Za kraj ovog potpoglavlja, navedimo par fundamentalnih teorema funkcionalne analize: principe uniformne ograničenosti i teorem o zatvorenom grafu. Dokazi ovih teorema mogu se naći u [1, Poglavlje 6].

Teorem 1.2.24 (**Banach-Steinhaus, princip uniformne ograničenosti**). *Neka je X Banachov, a Y normiran prostor, te neka je $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{B}(X, Y)$ proizvoljna familija ograničenih opearatora sa X u Y. Pretpostavimo da za svaki $x \in X$ vrijedi $\sup\{\|Tx\| : F \in \mathcal{F}\} < \infty$. Tada vrijedi i $\sup\{\|F\| : F \in \mathcal{F}\} < \infty$.*

Teorem 1.2.25. *Neka je X Banachov, a Y normiran prostor, te neka je $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{B}(X, Y)$ proizvoljna familija ograničenih operatora s X u Y. Tada je ekvivalentno*

(a) $\mathcal{F}$ je uniformno ograničena ($\sup\{\|F\| : F \in \mathcal{F}\} < \infty$);

(b) $\mathcal{F}$ je jako ograničena ($\sup\{\|Fx\| : F \in \mathcal{F}\} < \infty, \forall x \in X$);

(c) $\mathcal{F}$ je slabo ograničena ($\sup\{|f(Fx)| : F \in \mathcal{F}\} < \infty, \forall x \in X, \forall f \in X'$).

Teorem 1.2.26 (Teorem o zatvorenom grafu). *Neka su X i Y Banachovi prostori i $A : X \to Y$ linearni operator sa zatvorenim grafom. Tada je A ograničen.*

Napomena 1.2.27. *Graf funkcije $f : X \to Y$ je skup $\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in X\} \subseteq X \times Y$. Na prostoru $X \times Y$ možemo uvesti normu*

$$\|(x, y)\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}.$$

Zatvorenost u prethodnom teoremu gleda se u odnosu na ovakvu normu (doduše, možemo definirati alternativne norme na $X \times Y$ koje će generirati iste otvorene, odnosno zatvorene skupove). Također, lako se vidi da za proizvoljan niz $((x_n, y_n))_n$ u $X \times Y$ i proizvoljan $(x, y) \in X \times Y$ vrijedi

$$(x, y) = \lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) \iff x = \lim_{n\to\infty} x_n \text{ i } y = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

1.3 Bezuvjetna konvergencija

U ovom potpoglavlju definirat ćemo, i navesti neka osnovna svojstva bezuvjetne konvergencije, koja će nam kasnije biti važna i korisna. Svi dokazi mogu se naći u [1, poglavlje 3].

Definicija 1.3.1. *Neka je $(x_n)_n$ niz u normiranom prostoru X. Kažemo da red $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ konvergira bezuvjetno ako red $\sum_{k=1}^{\infty} x_{\sigma(x_k)}$ konvergira (obično) za svaku permutaciju σ skupa $\mathbb{N}$.*

Očito bezuvjetna konvergencija povlači običnu. Također, u definiciji ne zahtijevamo da suma reda ne ovisi o permutaciji. Pokazat će se međutim, da ta tvrdnja stvarno vrijedi.

Teorem 1.3.2. *Neka je $(c_n)_n$ niz u polju $\mathbb{F}$. Tada red $\sum_{k=1}^{\infty} c_n$ konvergira apsolutno ako i samo ako konvergira bezuvjetno.*

Teorem 1.3.3. *Ako red u Banachovom prostoru konvergira apsolutno, onda konvergira i bezuvjetno.*

Napomena 1.3.4. *Za proizvoljan niz $(x_n)_n$ u Banachovom prostoru vrijedi:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_n \text{ kvg. apsolutno} \implies \sum_{k=1}^{\infty} x_n \text{ kvg. bezuvjetno} \implies \sum_{k=1}^{\infty} x_n \text{ kvg. obično.}$$

Obrat nijedne implikacije općenito ne vrijedi.

Za kraj ovog potpoglavlja, dat ćemo korisnu karakterizaciju bezuvjetne konvergencije iz koje će, između ostalog, slijediti ranije spomenuta neovisnost sume bezuvjetno konvergentnog reda o permutaciji.

Definicija 1.3.5. *Usmjeren skup je uređeni par $(A, \leq)$ koji se sastoji od nepraznog skupa A i binarne relacije $\leq$ na A za koju vrijedi:*

1. $\alpha \leq \alpha, \quad \forall \alpha \in A$;
2. $\alpha \leq \beta, \beta \leq \gamma \implies \alpha \leq \gamma$;
3. *Za sve* $\alpha, \beta \in A$ *postoji* $\gamma \in A$ *takav da vrijedi* $\alpha \leq \gamma$ *i* $\beta \leq \gamma$.

Primjer 1.3.6. *(a) Skup $\mathbb{N}$ sa standardnim uređajem je usmjeren skup.*

(b) Neka je S neprazan skup. Partitivni skup $\mathcal{P}(S)$ je usmjeren skup s relacijom $A \leq B \iff A \subseteq B$.

(c) Neka je X normiran prostor, $x \in X$ i $\mathcal{O}(x)$ familija svih otvorenih okolina od x (familija svih otvorenih skupova koji sadrže x). Skup $\mathcal{O}(x)$ je usmjeren relacijom $A \leq B \iff A \supseteq B$.

Definicija 1.3.7. *Neka je $(A, \leq)$ usmjeren skup. Svaka funkcija $x : A \to X$ naziva se hiperniz u X. Kao i kod nizova, uobičajena je oznaka x_α umjesto $x(\alpha)$, a sam hiperniz označavamo s $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$. Ako je X normirani prostor, kažemo da hiperniz $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ konvergira ako postoji $x \in X$ takav da vrijedi*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha_0 \in A \text{ tako da } \alpha_0 \leq \alpha \implies \|x - x_\alpha\| < \varepsilon.$$

U tom slučaju pišemo $x = \lim_{\alpha \in A} x_\alpha$.

Hiperniz $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ u normiranom prostoru X je Cauchjyev ako vrijedi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha_0 \in A \text{ tako da } \alpha_0 \leq \alpha_1, \alpha_2 \implies \|x_{\alpha_1} - x_{\alpha_2}\| < \varepsilon.$$

Napomena 1.3.8. *Svaki niz je ujedno i hiperniz i u tom slučaju se definicija konvergentnog, odnosno Cauchyjevog hiperniza poklapa sa standardnim definicijama konvergentnog, odnosno Cauchyjevog niza. Neka osnovna svojstva nizova vrijede i za hipernizove (jedinstvenost limesa, limes zbroja, razlike, produkta itd.). Također, svaki konvergentan hiperniz je Cauchyjev. Nadalje, X je potpun ako i samo ako svaki Cauchyjev hiperniz konvergira.*

Želimo definirati sumu vektora indeksiranu po proizvoljnom nepraznom skupu. Neka je stoga J proizvoljni neprazan skup i $(x_j)_{j \in J}$ proizvoljna familija vektora indeksirana po J. Označimo s $\mathcal{F}$ familiju svih konačnih podskupova od J i usmjerimo ga relacijom: $F_1 \leq F_2 \iff F_1 \subseteq F_2$, za $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$. Prirodno je sada gledati hiperniz $(s_F)_{F \in \mathcal{F}}$ definiran s $s_F = \sum_{j \in F} x_j$.

Definicija 1.3.9. *Neka je dana funkcija* $x : J \to X$ *pri čemu je* J *proizvoljan neprazan skup, a* X *normiran prostor. Kažemo da je familija* $\{x_j : j \in J\}$ *sumabilna te da je vektor* $x_0 \in X$ *njezina suma ako je* x_0 *limes hiperniza* $(s_F)_{F \in \mathcal{F}}$. *U tom slučaju pišemo* $x_0 = \sum_{j \in J} x_j$.

Uočimo, ako je skup J konačan, gornja definicija je najobičnije zbrajanje vektora u normiranom prostoru. Naš cilj je povezati bezuvjetnu konvergenciju sa sumabilnošću u slučaju kad je skup J prebrojiv.

Teorem 1.3.10. *Neka je* $(x_n)_n$ *niz u Banachovom prostoru* X. *Tada je familija* $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ *sumabilna ako i samo ako red* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *konvergira bezuvjetno.*

Korolar 1.3.11. *Neka je* $(x_n)_n$ *niz u Banachovom prostoru* X. *Ako red* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *konvergira bezuvjetno, onda je* $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *za sve permutacije* σ *skupa* $\mathbb{N}$.

1.4 Topološka i ortonormirana baza

U ovom odjeljku reći ćemo nešto najosnovnije o bazama u (separabilnim) normiranim, odnosno unitarnim prostorima. Dokazi svih tvrdnji navedenih u ovom odjeljku mogu se naći u [1][Poglavlje 2.1] i [2][Poglavlje 1.2].

Definicija 1.4.1. *Niz* $(x_n)_n$ *je topološka baza (često kažemo samo baza) normiranog prostora* X *ako za svaki* $x \in X$ *postoji jedinstveni niz skalara* $(a_n(x))_n$ *takav da je*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) x_n.$$

Napomena 1.4.2. *U gornjoj definiciji podrazumijevamo običnu konvergenciju u* X. *Također, lako se vidi da ako prostor* X *ima topološku bazu, da je onda separabilan.*

Definicija 1.4.3. *Neka su* X *i* Y *Banachovi prostori. Kažemo da je baza* $(x_n)_n$ *za* X *ekvivalentna bazi* $(y_n)_n$ *za* Y *i pišemo* $(x_n)_n \sim (y_n)_n$ *ako postoji bijektivan operator* $A \in \mathbb{B}(X, Y)$ *takav da je* $y_n = Ax_n$ *za sve* $n \in \mathbb{N}$.

Teorem 1.4.4. *Neka su* X *i* Y *Banachovi prostori i neka su* $(x_n)_n$ *i* $(y_n)_n$ *baze za* X *i* Y *respektivno. Tada je ekvivalentno*

(a) $(x_n)_n \sim (y_n)_n$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ *konvergira u* X *ako i samo ako* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n$ *konvergira u* Y.

Nama su u ovom radu posebno važni unitarni, odnosno Hilbertovi prostori.

Definicija 1.4.5. *Ortonormiran niz* $(e_n)_n$ *u unitarnom prostoru* X *je ortonormirana baza (ili kraće ONB) za* X *ako svaki vektor* $x \in X$ *dopušta prikaz*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n.$$

Napomena 1.4.6. *Uočimo, nismo zahtijevali jedinstvenost prikaza u gornjoj definiciji. Zbog neprekidnosti skalarnog produkta i ortonormiranosti niza, lako se vidi da je* $\alpha_n = \langle x, e_n \rangle$. *Dakle, svaka ONB je i topološka baza unitarnog prostora* X. *Zapis* $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$ *zove se Fourierov razvoj (red) vektora* x, *a skalari* $\langle x, e_n \rangle$ *Fouirerovi koeficijenti.*

Definicija 1.4.7. *Kažemo da je skup* $S \subseteq X$ *fundamentalan u normiranom prostoru* X *ako je* $\overline{span} S = X$,

Teorem 1.4.8. *Neka je* $(e_n)_n$ *ortonormiran niz u unitarnom prostoru* X. *Promotrimo sljedeća svojstva:*

(a) $(e_n)_n$ *je ONB za* X,

(b) $(e_n)_n$ *je fundamentalan u* H, *tj.* $\overline{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$,

(c) $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2$,

(d) $\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \langle e_n, y \rangle$,

(e) $(e_n)_n$ *je maksimalan u* X, *tj. ako je* $\langle x, e_n \rangle = 0$ *za sve* n, *tada je nužno* $x = 0$.

Tada vrijedi (a) $\iff$ *(b)* $\iff$ *(c)* $\iff$ *(d)* $\implies$ *(e). Ako je* X *Hilbertov, onda je svojstvo (e) ekvivalentno s preostala četiri svojstva. Posebno, svaki separabilan unitaran prostor ima ortonormiranu bazu.*

Primjer 1.4.9. *U Hilbertovom prostoru* ℓ^2 *s* e_n *označimo niz koji na* n*-tom mjestu ima jedinicu, a ostalo nule. Lako se vidi da je* $(e_n)_n$ *ONB za* ℓ^2. *Tu bazu zovemo kanonska baza prostora* ℓ^2.

Napomena 1.4.10. *Neka su* H *i* K *separabilni Hilbertovi prostori te* $(e_n)_n$ *i* $(f_n)_n$ *ONB za* H *i* K *respektivno. Tada je operator* $T \in \mathbb{B}(H, K)$ *definiran s* $Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle f_n$ *unitaran i za sve* $n \in \mathbb{N}$ *vrijedi* $Te_n = f_n$. *Zaključujemo, sve ONB svih separabilnih Hilbertovih prostora su ekvivalentne.*

Definicija 1.4.11. *Niz* $(x_n)_n$ *u Hilbertovom prostoru* H *je Rieszova baza za* H *ako postoje ortonormirana baza* $(e_n)_n$ *prostora* H *i bijekcija* $T \in \mathbb{B}(H)$ *takvi da je* $x_n = Te_n$ *za sve* $n \in \mathbb{N}$.

Teorem 1.4.12. *Neka je H Hilbertov prostor. Tada vrijedi:*

(a) Sve Rieszove baze za H su međusobno ekvivalentne.

(b) Ako je $(x_n)_n$ Rieszova baza, K Hilbertov prostor i $S \in \mathbb{B}(H, K)$ bijekcija, onda je $(Sx_n)_n$ Rieszova baza za K.

1.5 $\mathrm{L^p}$ prostori i Fourierova transformacija

U ovom odjeljku definirat ćemo Fourierovu transformaciju i iskazati neka osnovna svojstva. No, prije toga moramo definirati ambijentne funkcijske prostore za Fourierovu transformaciju i kasnije za proučavanje Gaborovih baznih okvira. Također, podrazumijevamo osnovne pojmove i rezultate iz teorije mjere. Nešto više o ovoj temi, kao i dokazi tvrdnji, mogu se naci u [4, Poglavlje 9] i [2, Poglavlje 5.1].

Primjer 1.5.1. *(a) Neka je $p \geq 1$ fiksan i neka je λ Lebesqueova mjera na $\mathbb{R}$. Promotrimo skup svih izmjerivih funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ takvih da je $\int_{\mathbb{R}} |f|^p \, d\lambda < \infty$. Na tom skupu definirajmo relaciju $\sim$*

$$f \sim g \iff f = g \quad \lambda \text{ - g.s.}$$

Lako se vidi da je $\sim$ relacija ekvivalencije. Pripadni kvocijentni skup označavamo s $L^p(\mathbb{R})$, a klase radi jednostavnosti označavamo s f umjesto $[f]$. Na $L^p(\mathbb{R})$ dobro je definirana norma

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^p \, d\lambda \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall f \in L^p(\mathbb{R}).$$

Prostor $L^p(\mathbb{R})$ s ovako definiranom normom je separabilan Banachov prostor.

(b) Nama je posebno važan slučaj $p = 2$. Na $L^2(\mathbb{R})$ dobro je definiran skalarni produkt

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f \overline{g} \, d\lambda, \quad \forall f, g \in L^2(\mathbb{R})$$

s kojim $L^2(\mathbb{R})$ postaje separabilan Hilbertov prostor. Uočimo da je norma $\|\cdot\|_2$ izvedena iz ovog skalarnog produtkta. U 3. poglavlju ovu normu ćemo označavati bez indeksa 2.

(c) Označimo s $L^\infty(\mathbb{R})$ skup svih ograničenih izmjerivih funkcija uz raniju indentifikaciju funkcija jednakih g.s. (dakle, kvocijentni skup uz gore definiranu relaciju $\sim$). Na njemu definiramo normu

$$\|f\|_\infty = \inf\{C \geq 0 : |f(x)| \leq C \text{ za g.s. } x \in \mathbb{R}\}.$$

Prostor $L^\infty(\mathbb{R})$ ponekad zovemo prostorom esencijalno ograničenih funkcija, a pripadnu normu zovemo esencijalni supremum. Ovaj prostor je također Banachov, ali nije separabilan.

Napomena 1.5.2. *Ako je $I \subseteq \mathbb{R}$, s $L^p(I)$ označavamo prostore definirane analogno kao gore, s time da gledamo funkcije $f : I \to \mathbb{C}$ i pripadnu restrikciju Lebesgueove mjere.*

Primjer 1.5.3. *Za $n \in \mathbb{N}$ definiramo funkciju $e_n : [0,1] \to \mathbb{C}$, $e_n(x) = e^{2\pi i n x}$. Niz $(e_n)_n$ je ortonormirana baza prostora $L^2([0,1])$.*

Primjer 1.5.4. *Navedimo dva gusta potprostora od $L^2(\mathbb{R})$ koji će nam biti izuzetno korisni u dokazivanju tvrdnji u prostoru $L^2(\mathbb{R})$ (naime, nekad će nam biti dovoljno pokazati da neko svojstvo vrijedi na gustom potprostoru, iz čega će slijediti tvrdnja na cijelom prostoru). Nosač funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ je zatvarač skupa $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}$, a označavamo ga sa supp f. Skup svih neprekidnih funkcija s kompaktnim nosačem (obično ga označavamo s $C_C(\mathbb{R})$) je gust vektorski potprostor prostora $L^2(\mathbb{R})$(štoviše, tvrdnja vrijedi za sve $1 \leq p < \infty$, ali to nam nije važno za daljnja razmatranja). Nadalje, pretpostavku neprekidnosti možemo ublažiti. Potprostor svih ograničenih funkcija s kompaktnim nosačem je također gust u $L^2(\mathbb{R})$ (uočimo, neprekidna funkcija s kompaktnim nosačem je ograničena).*

Napomena 1.5.5. *Lebesgueove integrale označavat ćemo kao Riemannove, tj. označavamo*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \text{ umjesto } \int_{\mathbb{R}} f\, d\lambda \quad \text{i} \quad \int_a^b f(x)dx \text{ umjesto } \int_{[a,b]} f\, d\lambda.$$

Sada definiramo Fourierovu transformaciju na $L^1(\mathbb{R})$.

Definicija 1.5.6. *Fourierova transformacija funkcije $f \in L^1(\mathbb{R})$ je funkcija $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definirana s*

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i x \xi} f(x)dx. \tag{1.6}$$

U smislu operatora, Fourierova transformacija je preslikavanje $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \to L^\infty(\mathbb{R})$, $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$.

Ako promotrimo niz $(e_n)_n$ iz primjera 1.5.3, vidimo da je Fourierova transformacija motivirana standardnim razvojem u Fourierov red u Hilbertovom prostoru (vidi napomenu 1.4.6). Uočimo da ova definicija usprkos tome nije dobra za svaku funkciju iz $L^2(\mathbb{R})$. Međutim, postoji prostor koji je gust i u $L^1(\mathbb{R})$ i u $L^2(\mathbb{R})$, te je dodatno zatvoren na Fourierovu transformaciju. Tada gornji operator možemo po neprekidnosti proširiti s tog potprostora na $L^2(\mathbb{R})$. Štoviše, vrijedi sljedeći teorem. S $C_0(\mathbb{R})$ označimo zatvarač potprostora $C_C(\mathbb{R})$ u normi prostora L^∞ (C_C nije gust u L^∞).

Teorem 1.5.7. *(a) Fourierova transformacija je ograničen i injektivan linearni operator s $L^1(\mathbb{R})$ u $C_0(\mathbb{R})$.*

(b) Fourierova transformacija je unitaran operator na $L^2(\mathbb{R})$.

Sada definiramo tri osnovna funkcijska operatora koji će nam biti važni u 3. poglavlju.

Definicija 1.5.8. *Na vektorskom prostoru svih kompleksnih funkcija realne varijable definiramo operatore:*

1. *Translacija:* $(T_a f)(x) = f(x-a), \quad a \in \mathbb{R}.$
2. *Modulacija:* $(M_b f)(x) = e^{2\pi i b x} f(x), \quad b \in \mathbb{R}.$
3. *Dilatacija:* $(D_c f)(x) = \sqrt{c} f(cx), \quad c > 0:$

Napomena 1.5.9. *Translacija i modulacija su izometrije na $L^p(\mathbb{R})$ za $1 \leq p \leq \infty$. Nadalje, na $L^2(\mathbb{R})$ su unitarni operatori. Operator dilatacije je izometrija (odnosno, unitaran) na $L^2(\mathbb{R})$ i višekratnik izometrije na $L^p(\mathbb{R})$ za $p \neq 2$.*

Propozicija 1.5.10. *Za bilo koje $a, b \in \mathbb{R}$ i $r > 0$ imamo*

(a) $M_b T_a = e^{2\pi i b x} T_a M_b$,

(b) $T_a D_r = D_r T_{ar}$,

(c) $D_r M_b = M_{br} D_r$.

Posebno nas zanima djelovanje Fourierove transformacije na gore definirane operatore (naravno, uz odgovarajuću restrikciju domene).

Teorem 1.5.11. *(a) Fourierova transformacija translacije je modulacija: za $f \in L^1(\mathbb{R})$ ili $f \in L^2(\mathbb{R})$ imamo*

$$(\widehat{T_a f})(\xi) = M_{-a}\hat{f}(\xi) = e^{-2\pi i a x \xi}\hat{f}(\xi). \tag{1.7}$$

(b) Fourierova transformacija modulacije je translacija: za $f \in L^1(\mathbb{R})$ ili $f \in L^2(\mathbb{R})$ imamo

$$(\widehat{M_b f})(\xi) = T_b\hat{f}(\xi) = \hat{f}(\xi - b). \tag{1.8}$$

(c) Fourierova transformacija dilatacije je recipročna dilatacija: za $f \in L^1(\mathbb{R})$ *ili* $f \in L^2(\mathbb{R})$ *imamo*

$$(\widehat{D_r f})(\xi) = D_{\frac{1}{r}} \hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{r}} \hat{f}(\xi/r). \tag{1.9}$$

Pritom relacije (1.7), (1.8) i (1.9) vrijede za svaki $\xi \in \mathbb{R}$ *ako je* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *i za gotovo svaki* $\xi \in \mathbb{R}$ *ako je* $f \in L^2(\mathbb{R})$.

Na kraju ovog odjeljka navodimo jedan klasični teorem iz teorije mjere koji će nam trebati za račune u 3. poglavlju.

Teorem 1.5.12 (**Tonelli**). *Neka je* $f \geq 0$ *izmjeriva funkcija na* $\mathbb{R}^{2N}$. *Tada je*

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{2N}} f(x,\xi) d(\mu \times \nu) &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} f(x,\xi) d\mu(x) \right) d\nu(\xi) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} f(x,\xi) d\nu(\xi) \right) d\mu(x) \end{aligned} \tag{1.10}$$

Posebno, ova tri integrala su ili beskonačni, ili konačni i jednaki.

Mi ćemo samo koristiti ovaj teorem za $N = 1$, Lebesgueovu mjeru i brojeću mjeru na $\mathbb{Z}$, $\nu = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_k$. Integral funkcije po brojećoj mjeri je

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) d\nu(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k).$$

Sada Tonellijev teorem povlači

Korolar 1.5.13. *Neka je* $(f_n)_n$ *niz izmjerivih funkcija takvih da je* $f_n \geq 0$ *za sve* $n \in \mathbb{N}$. *Tada je*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n(x) \right) dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx \tag{1.11}$$

u smislu da su ova dva izraza ili oba beskonačni ili oba konačni i jednaki.

Poglavlje 2

Bazni okviri na Hilbertovim prostorima

U ovom poglavlju cilj nam je definirati bazne okvire na općenitim Hilbertovim prostorima te dokazati karakterizaciju i najvažnija svojstva. Prije toga ćemo proanalizirati srodni, općenitiji pojam, Besselove nizove.

2.1 Besselovi nizovi i bazni okviri

Definicija 2.1.1. *Kažemo da je niz $(x_n)_n$ u Hilbertovom prostoru H Besselov niz ako vrijedi:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2 < \infty, \quad \forall x \in H \tag{2.1}$$

Uočimo, za Besselov niz dobro je definirano preslikavanje $U : H \to \ell^2$ zadano formulom:

$$Ux = (\langle x, x_n \rangle)_n, \quad \forall x \in H \tag{2.2}$$

Štoviše, vrijedi i:

Lema 2.1.2. *Neka je $(x_n)_n$ Besselov niz u Hilbertovom prostoru H. Tada je preslikavanje $U : H \to \ell^2$, $Ux = (\langle x, x_n \rangle)_n$ dobro definirani ograničeni linearni operator. Drugim riječima, postoji konstanta $B > 0$ takva da vrijedi:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2 \leq B\|x\|^2, \quad \forall x \in H \tag{2.3}$$

Dokaz. Već smo komentirali dobru definiranost. Zbog linearnosti skalarnog produkta u prvoj varijabli, jasno je da je U linearni operator. Za dokaz ograničenosti, pokazat ćemo da je graf operatora U zatvoren, pa će tvrdnja slijediti iz teorema o zatvorenom grafu (teorem 1.2.26).

Neka je $(y_N, Uy_N)_N$ proizvoljan konvergentni niz u Γ_U i neka je $(y,(c_n)_n) \in H \times \ell^2$ njegov limes. Trebamo pokazati da je $(y,(c_n)_n) \in \Gamma_U$. Drugim riječima, trebamo pokazati da je $(c_n)_n = Uy$. Uočimo, zbog napomene 1.2.27, vrijedi $y = \lim_{N\to\infty} y_N$ i $(c_n)_n = \lim_{N\to\infty} Uy_N$. Neka je sada $m \in \mathbb{N}$ proizvoljan. Za sve $N \in \mathbb{N}$ imamo

$$|c_m - \langle y_N, x_m\rangle|^2 \le \sum_{n=1}^{\infty} |c_n - \langle y_N, x_n\rangle|^2 = \|(c_n)_n - Uy_N\|^2.$$

Ako pustimo $N \to \infty$, desna strana teži u 0, pa vrijedi $c_m = \lim_{N\to\infty}\langle y_N, x_m\rangle = \langle y, x_m\rangle$ zbog neprekidnosti skalarnog produkta u prvoj varijabli. Zbog proizvoljnosti m, ova tvrdnja vrijedi za svaki $m \in \mathbb{N}$, pa zaključujemo $(c_n)_n = (\langle y, x_n\rangle)_n = Uy$. □

Definicija 2.1.3. *Operator U iz prethodne leme zovemo operator analize pridružen nizu $(x_n)_n$. Njemu adjungirani operator $U^* \in \mathbb{B}(\ell^2, H)$ naziva se operator sinteze. Konstanta B iz (2.3) zove se Besselova ograda niza $(x_n)_n$.*

Napomena 2.1.4. *Besselova ograda očito nije jedinstvena (svaka veća konstanta je također Besselova ograda). Najmanju Besselovu ogradu zovemo optimalna Besselova ograda i lako se vidi da je ona jednaka $\|U\|^2$.*

Sljedeća propozicija daje nam eksplicitnu formulu za operator sinteze.

Propozicija 2.1.5. *Neka je $(x_n)_n$ Besselov niz u Hilbertovom prostoru H i neka je U njegov operator analize. Tada za svaki niz $(c_n)_n$ u ℓ^2 red $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$ konvergira bezuvjetno i operator sinteze U^* zadan je s $U^*(c_n)_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$. Specijalno, ako je $(e_n)_n$ kanonska baza prostora ℓ^2, imamo $U^* e_n = x_n$, pa vrijedi i $\|x_n\| \le \|U\|$ za sve n.*

Dokaz. Označimo s B Besselovu ogradu niza $(x_n)_n$. Fiksirajmo proizvoljni niz $(c_n)_n$ u ℓ^2. Zbog teorema 1.3.10 trebamo dokazati sumabilnost familije $\{c_n x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Dakle, treba dokazati konvergenciju hiperniza $\left(\sum_{n\in F} c_n x_n\right)_{F\in\mathcal{F}}$. Kako je prostor H potpun, dovoljno je dokazati da je spomenuti hiperniz Cauchyjev. Neka je F proizvoljni konačan podskup od $\mathbb{N}$ i neka je $N = \operatorname{card} F$. Neka je $f_F \in H'$ definiran s

$$f_F(x) = \left\langle x, \sum_{n\in F} c_n x_n \right\rangle$$

Kako je operatorska norma funkcionala jednaka normi vektora reprezentanta (vidi teorem 1.2.19), vrijedi

$$\left\| \sum_{n\in F} c_n x_n \right\| = \|f_F\| = \sup\left\{ \left| \left\langle x, \sum_{n\in F} c_n x_n \right\rangle \right| : \|x\| = 1 \right\}.$$

Sada, koristeći još i svojstvo $|\langle x,y\rangle| = |\langle y,x\rangle|, \forall x,y \in H$, dobivamo

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{n\in F} c_n x_n\right\|^2 &= \sup\left\{\left|\left\langle \sum_{n\in F} c_n x_n, y\right\rangle\right|^2 : \|y\| = 1\right\}\\
&= \sup\left\{\left|\sum_{n\in F} c_n\langle x_n, y\rangle\right|^2 : \|y\| = 1\right\} \text{ (linearnost skalarnog produkta)}\\
&\leq \sup\left\{\left(\sum_{n\in F}|c_n|^2\right)\left(\sum_{n\in F}|\langle x_n, y\rangle|^2\right) : \|y\| = 1\right\} \text{ (Cauchy-Schwarz u } \mathbb{F}^N)\\
&\leq \sup\left\{B\|y\|^2\sum_{n\in F}|c_n|^2 : \|y| = 1\right\} = B\sum_{n\in F}|c_n|^2
\end{aligned}$$

(zadnja nejednakost slijedi iz $\sum_{n\in F}|\langle x_n,y\rangle|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty}|\langle x_n,y\rangle|^2 \leq B\|y\|^2$). Kako red $\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2$ konvergira apsolutno, on konvergira i bezuvjetno, pa je familija $\{|c_n|^2 : n \in \mathbb{N}\}$ sumabilna. Slijedi da je $\left(\sum_{n\in F}|c_n|^2\right)_{F\in\mathcal{F}}$ konvergentan, pa i Cauchyjev hiperniz, stoga je zbog gornjeg računa i hiperniz $\left(\sum_{n\in F} c_n x_n\right)_{F\in\mathcal{F}}$ Cauchyjev.

Odredimo sada formulu operatora U^*. Za sve $x \in H$ i $(c_n)_n \in \ell^2$ imamo

$$\langle x, U^*(c_n)_n\rangle = \langle Ux, (c_n)_n\rangle = \sum_{n=1}^{\infty}\langle x, x_n\rangle\overline{c_n} = \left\langle x, \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n\right\rangle,$$

pri čemu zadnja jednakost slijedi iz antilinearnosti i neprekidnosti skalarnog produkta u drugoj varijabli. Dakle, operator U^* je zadan formulom

$$U^*(c_n)_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n, \quad \forall (c_n)_n \in \ell^2. \tag{2.4}$$

Zbog definicije kanonske baze prostora ℓ^2 i formule operatora U^* očito je $U^*e_n = x_n$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Na kraju, za svaki $n \in \mathbb{N}$ imamo

$$\|x_n\| = \|U^*e_n\| \leq \|U^*\|\|e_n\| = \|U^*\| = \|U\|.$$

□

Kako bismo dobili karakterizaciju Besselovih nizova, treba nam i dovoljan uvjet da bi neki niz $(x_n)_n$ u Hilbertovom prostoru H bio Besselov. Taj rezultat daje nam sljedeća propozicija.

Propozicija 2.1.6. *Neka je $(x_n)_n$ niz u Hilbertovom prostoru H takav da red $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$ konvergira za svaki niz $(c_n)_n$ u ℓ^2 . Tada je $(x_n)_n$ Besselov niz.*

Dokaz. Po pretpostavci, preslikavanje $T : \ell^2 \to H$ zadano s $T(c_n)_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$ je dobro definirano. Također, očito je T linearan operator. Za $N \in \mathbb{N}$ promotrimo operator $T_N \in \mathbb{B}(\ell^2, H)$ zadan s $T_N(c_n)_n = \sum_{n=1}^{N} c_n x_n$ (naime, ako s M označimo $\max\{\|x_n\| : 1 \leq n \leq N\}$, dobivamo $\|T_N(c_n)_n\| \leq M \sum_{n=1}^{N} |c_n| \leq M\sqrt{N}\sqrt{\sum_{n=1}^{N} |c_n|^2} \leq M\sqrt{N}\|(c_n)_n\|_{\ell^2}$, pa su svi operatori T_N zaista ograničeni, a predzadnja nejednakost slijedi iz Cauchy-Schwarzove nejednakosti u $\mathbb{F}^n$ primijenjene na vektore $(|c_1|, ..., |c_N|)$ i $(1, ..., 1)$). Očito je $T(c_n)_n = \lim_{N\to\infty} T_N(c_n)_n$ za sve $(c_n)_n \in \ell^2$. Tada zbog neprekidnosti norme vrijedi $\|T(c_n)_n\| = \lim_{N\to\infty} \|T_N(c_n)_n\|$, za sve $(c_n)_n \in \ell^2$, iz čega pak slijedi da je niz $(\|T_N(c_n)_n\|)_N$ ograničen u $\mathbb{R}$ za bilo koji $(c_n)_n \in \ell^2$. Drugim riječima, familija operatora $(T_N)_{N\in\mathbb{N}}$ je jako ograničena. Po teoremu 1.2.25 ta familija je i uniformno ograničena, tj. postoji $M > 0$ takav da vrijedi $\|T_N\| \leq M$ za sve $N \in \mathbb{N}$. Sada za bilo koji $(c_n)_n$ vrijedi

$$\|T(c_n)_n\| = \lim_{N\to\infty} \|T_N(c_n)_n\| \leq \lim_{N\to\infty} M\|(c_n)_n\| = M\|(c_n)_n\|.$$

Dakle, T je ograničen. Neka je $(e_n)_n$ kanonska baza prostora ℓ^2. Očito je $Te_n = x_n$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Za operator $T^* \in \mathbb{B}(H, \ell^2)$ imamo

$$\langle T^*x, e_n\rangle = \langle x, Te_n\rangle = \langle x, x_n\rangle, \quad \forall x \in H, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Iz definicije same kanonske baze, lagano slijedi $T^*x = (\langle x, x_n\rangle)_n$, pa je jasno tada $(\langle x, x_n\rangle)_n$ niz u ℓ^2, i to za sve $x \in H$. Naravno, tada vrijedi $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n\rangle|^2 < \infty$ za sve $x \in H$, tj., niz $(x_n)_n$ je Besselov. □

Prethodne dvije propozicije daju nam i željenu karakterizaciju Besselovih nizova.

Korolar 2.1.7. *Niz $(x_n)_n$ u Hilbertovom prostoru H je Besselov ako i samo ako postoji operator $T \in \mathbb{B}(\ell^2, H)$ takav da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $Te_n = x_n$ pri čemu je $(e_n)_n$ kanonska baza prostora ℓ^2. U tom slučaju, operator T podudara se s operatorom sinteze U^* niza $(x_n)_n$.*

Štoviše, ovaj rezultat možemo dodatno poopćiti. Naime, kako su sve ONB separabilnih Hilbertovih prostora ekvivalentne (napomena 1.4.10), dobivamo sljedeću tvrdnju:

Korolar 2.1.8. *Niz $(x_n)_n$ u Hilbertovom prostoru H je Besselov ako i samo ako postoji separabilan Hilbertov prostor K, ONB $(f_n)_n$ prostora K i operator $T \in \mathbb{B}(K, H)$ takav da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $Tf_n = x_n$.*

Sada ćemo definirati centralni objekt ovog poglavlja, bazne okvire. Cilj nam je dokazati sličnu karakterizaciju kao i za Besselove nizove, te još neka dodatna korisna svojstva. Tu će nam od posebnog značaja biti tzv. *rekonstrukcijska svojstva* baznih okvira koja nam potkrijepljuju intuitivnu predodžbu baznih okvira kao poopćenja ortonormirane baze u Hilbertovom prostoru.

Definicija 2.1.9. *Niz $(x_n)_n$ u Hilbertovom prostoru H naziva se bazni okvir za H ako postoje konstante $A, B > 0$ takve da vrijedi*

$$A\|x\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2 \leq B\|x\|^2, \quad \forall x \in H \tag{2.5}$$

Ako je $A = B$ kažemo da je bazni okvir napet, a ako je $A = B = 1$, tj. ako vrijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2 = \|x\|^2, \quad \forall x \in H \tag{2.6}$$

kažemo da je bazni okvir Parsevalov.
Kažemo da je bazni okvir egzaktan ako izuzimanjem bilo kojeg člana niza on prestaje biti bazni okvir.

Napomena 2.1.10. *Ocjene A i B iz prethodne definicije očito nisu jedinstvene. Najveću ocjenu A i najmanju ocjenu B zvat ćemo optimalne ocjene i označavat s A_{opt} i B_{opt}.*

Primjer 2.1.11. *Neka je $(e_n)_n$ ONB za Hilbertov prostor H*

(a) Sam niz $(e_n)_n$ je egzaktan Parsevalov bazni okvir za H;

(b) $e_1, 0, e_1, 0, ...$ je neegzaktni Parsevalov bazni ovkir za H;

(c) $e_1, e_1, e_2, e_2, ...$ je napeti ($A = B = 2$) neegzaktni bazni okvir za H;

(d) $2e_1, e_2, e_3, e_4, ...$ je egzaktni bazni okvir za H ($A = 1, B = 2$);

(e) $e_1, \frac{1}{\sqrt{2}}e_2, \frac{1}{\sqrt{2}}e_2, \frac{1}{\sqrt{3}}e_3, \frac{1}{\sqrt{3}}e_3, \frac{1}{\sqrt{3}}e_3, ...$ je Parsevalov neegzaktni bazni okvir za H;

(f) $e_1, \frac{1}{2}e_2, \frac{1}{3}e_3, ...$ je ortogonalan i fundamentalan, ali nije bazni okvir (naime, ako pretpostavimo da postoji A takav da vrijedi prva nejednakost u (2.5), i za $n \in \mathbb{N}$ t.d $\frac{1}{n} < A$ uvrstimo vektor e_n, dobivamo kontradikciju).

Iz prve nejednakosti u (2.5), očito je svaki bazni okvir maksimalan, pa je i fundamentalan. U prethodnom primjeru smo pokazali da obrat ne vrijedi. Jedna posljedica fundamentalnosti baznog okvira je činjenica da konačan niz u beskonačnodimenzionalnom prostoru ne može biti bazni okvir. Ako je dim $H < \infty$, konačni niz vektora je bazni okvir ako i samo ako je sustav izvodnica (vidi [2, napomena 2.1.5]).

Uočimo, svaki bazni okvir je i Besselov niz, pa ima smisla promatrati operatore analize i sinteze. Štoviše, jasno je iz same definicije da je operator analize ograničen i ograničen odozdo.

Kao što smo ranije napomenuli, želimo dokazati karakterizaciju baznih okvira slično kao što smo to napravili za Besselove nizove. Međutim, ovdje je zadatak nijansu teži, pa ćemo trebati neke općenite tehničke tvrdnje za operatore na Hilbertovim prostorima.

Lema 2.1.12. *Neka je X Banachov i Y normiran prostor, te neka je $T \in \mathbb{B}(X, Y)$ odozdo ograničen operator. Tada je slika operatora T zatvoren skup.*

Dokaz. Označimo s c konstantu iz definicije ograničenosti odozdo. Neka je $(y_n)_n$ proizvoljan konvergentan niz u $R(T)$ i neka je $y = lim_{n\to\infty} y_n$. Tada postoji niz $(x_n)_n$ u X takav da vrijedi $Tx_n = y_n$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Dokažimo da je niz $(x_n)_n$ Cauchyjev.

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Kako je $(y_n)_n$ konvergentan, on je i Cauchyjev, pa postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $m, n \geq n_0$ vrijedi $\|y_m - y_n\| < c\varepsilon$. Tada je, zbog ograničenosti operatora T odozdo, za sve $m, n \geq n_0$,

$$\|x_m - x_n\| \leq \frac{1}{c}\|T(x_m - x_n)\| = \frac{1}{c}\|Tx_m - Tx_n\| = \frac{1}{c}\|y_m - y_n\| < \frac{1}{c} \cdot c\varepsilon = \varepsilon$$

Dakle, $(x_n)_n$ je Cauchyjev. Kako je X Banachov, $(x_n)_n$ je i konvergentan, tj. postoji $x \in X$ t.d vrijedi $x = lim_{n\to\infty} x_n$. No, sada zbog propozicije 1.2.3 vrijedi

$$y = lim_{n\to\infty} y_n = lim_{n\to\infty} Tx_n = Tx$$

Dakle, $y \in R(T)$. Iz propozicije 1.1.14 slijedi tvrdnja. □

Lema 2.1.13. *Neka su H i K Hilbertovi prostori. Ako je $T \in \mathbb{B}(H, K)$ surjekcija, onda je T^* ograničen odozdo.*

Dokaz. Promotrimo skup $S = \{y \in K : \|T^*y\| = 1\}$. Uočimo da je taj skup slabo ograničen. Naime, kako je T surjekcija, za bilo koji $z \in K$ (koji nam reprezentira funkcional u H') možemo naći $x \in H$ takav da je $Tx = z$ pa imamo, za svaki $y \in S$,

$$|\langle y, z\rangle| = |\langle y, Tx\rangle| = |\langle T^*y, x\rangle| \leq \|T^*y\|\|x\| = \|x\|.$$

što je upravo pretpostavka teorema 1.2.23. Slijedi da je S ograničen, tj. postoji $M > 0$ takav da je $\|y\| \leq M, \forall y \in S$.

Uočimo nadalje, iz $K = \overline{R(T)} \oplus N(T^*)$ (propozicija 1.2.18) i surjektivnosti operatora T slijedi $N(T^*) = \{0\}$, tj. T^* je injekcija, iz čega posebno imamo $T^*v \neq 0$ za

$v \neq 0$. Dakle, ako je $v \neq 0$, vektor $\frac{v}{\|T^*v\|}$ je dobro definiran i nalazi se u skupu S. Zbog ograničenosti skupa S, vrijedi $\left\|\frac{v}{\|T^*v\|}\right\| \leq M$ iz čega direktno slijedi $\|T^*v\| \geq \frac{1}{M}\|v\|$, i to za sve $v \in K$ (za $v = 0$ tvrdnja je trivijalna). Dakle, T^* je ograničen odozdo. □

Propozicija 2.1.14. *Neka su H i K Hilbertovi prostori i $T \in \mathbb{B}(H,K)$. Tada vrijedi:*

(a) $R(T)$ je zatvoren ako i samo ako je $R(T^*)$ zatvoren

(b) T je surjekcija ako i samo ako je T^* ograničen odozdo

(c) Ako je $R(T)$ zatvoren, operator TT^* je invertibilan na $R(T)$, tj. operator $TT^*|_{R(T)}$ je bijekcija

Dokaz. (a) Pretpostavimo da je $R(T)$ zatvoren. Ako je T još i surjekcija, zatvorenost skupa $R(T^*)$ slijedi iz prethodne dvije leme. Pretpostavimo da T nije surjekcija i promotrimo operator $T_0 : H \to R(T)$, $T_0x = Tx$. Kako T_0 jest surjekcija, prema prethodnim razmatranjima operator $(T_0)^*$ ima zatvorenu sliku. Kako je $T^*|_{R(T)} = (T_0)^*$, imamo $R((T_0)^*) \subseteq R(T^*)$. S druge strane, $R(T^*) \subseteq (N(T))^\perp = (N(T_0))^\perp = R((T_0)^*)$. Slijedi, $R(T^*) = R((T_0)^*)$ pa je i $R(T^*)$ zatvoren. Dakle, dokazali smo da zatvorenost skupa $R(T)$ povlači zatvorenost $R(T^*)$. Obrat slijedi iz $(T^*)^* = T$ i primjenom prethodnog razmatranja na T^*.

(b) Jedan smjer smo dokazali u prethodnoj lemi. Pretpostavimo da je T^* ograničen odozdo. Tada $0 = \|T^*x\| \geq m\|x\|$ povlači $x = 0$ pa je $N(T^*) = \{0\}$. Nadalje, iz leme 2.1.12 slijedi i zatvorenost slike $R(T^*)$. Tada je, prema tvrdnji (a), i skup $R(T)$ zatvoren, pa imamo $R(T) = N(T^*)^\perp = K$, tj. T je surjekcija.

(c) Pretpostavimo da je $R(T)$ zatvoren potprostor od K. Uzmimo $y \in R(T)$ takav da vrijedi $TT^*y = 0$. Kako za bilo koji linearni operator T vrijedi $N(TT^*) = N(T^*)$ (naime, $TT^*x = 0 \iff \langle TT^*x, y\rangle = 0, \forall y \iff \langle T^*x, T^*y\rangle = 0, \forall y \iff T^*x = 0$), slijedi $y \in N(T^*) \cap R(T)$. No, tada je $y = 0$ ($y \in N(T^*) \cap R(T) \implies T^*y = 0$ i $Tx = y$ za neki $x \implies \langle y, y\rangle = \langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle = 0$), pa je $TT^*|_{R(T)}$ injekcija. S druge strane, zbog (a) je slika $R(T^*)$ isto zatvorena, pa po propoziciji 1.2.18 imamo $H = N(T) \oplus R(T^*)$. Slijedi da svaki x u H možemo zapisati kao $x = y + T^*v$, pri čemu su $y \in N(T)$ i $v \in K$. Djelujući operatorom T dobivamo $Tx = TT^*v$ iz čega slijedi $R(T) \subseteq R(TT^*)$. Kako je obratna inkluzija očita, zaključujemo $R(T) = R(TT^*)$.

$$R(T) = R(TT^*) = TT^*(K) = TT^*(N(T^*) \oplus R(T)) = TT^*(R(T)),$$

tj., TT^* je surjekcija na $R(T)$. □

Sada imamo potrebne alate za karakterizaciju baznih okvira na općenitom Hilbertovom prostoru.

Teorem 2.1.15. *Neka je $(x_n)_n$ bazni okvir za Hilbertov prostor H. Tada je njegov operator analize U ograničen i ograničen odozdo, a operator sinteze U^* je surjekcija. Nadalje, ako je operator $T \in \mathbb{B}(\ell^2, H)$ surjekcija, onda je niz $(x_n)_n$ definiran s $x_n = Te_n$, $n \in \mathbb{N}$, pri čemu je $(e_n)_n$ kanonska baza prostora ℓ^2, bazni okvir za H čiji je operator analize upravo T^*.*

Dokaz. Ograničenost i ograničenost odozdo operatora analize je očita iz definicije baznog okvira, a surjektivnost operatora sinteze tada slijedi iz tvrdnje (b) u prethodnoj propoziciji.

Neka je $T \in \mathbb{B}(\ell^2, H)$ surjekcija i neka je $(x_n)_n$ niz u H definiran s $x_n = Te_n$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Iz prethodne propozicije slijedi da je $T^* \in \mathbb{B}(H, \ell^2)$ ograničen odozdo. Drugim riječima, postoje konstante $A, B > 0$ takve da vrijedi

$$A\|x\|^2 \leq \|T^*x\|^2 \leq B\|x\|^2, \quad \forall x \in H.$$

Nadalje, kako je $(e_n)_n$ ONB, za bilo koji $x \in H$ imamo

$$T^*x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle T^*x, e_n \rangle e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, Te_n \rangle e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle e_n.$$

Zaključujemo,

$$T^*x = (\langle x, x_n \rangle)_n, \text{ iz čega dobivamo } \|T^*x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2,$$

i to za sve $x \in H$. Dakle, $(x_n)_n$ je bazni okvir za H, a T^* je njegov operator analize. □

Istim argumentom kao u diskusiji prije korolara 2.1.8 dobivamo sljedeću tvrdnju:

Korolar 2.1.16. *Niz $(x_n)_n$ je bazni okvir za Hilbertov prostor H ako i samo postoji separabilan Hilbertov prostor K, ONB $(f_n)_n$ prostora K i surjektivni operator $T \in \mathbb{B}(K, H)$ takav da vrijedi $x_n = Tf_n$, za sve $n \in \mathbb{N}$*

Napomena 2.1.17. *Operator analize Parsevalovog baznog okvira je izometrija, pa je njegov operator sinteze koizometrija (T je koizometrija ako je surjekcija i parcijalna izometrija, tj. ako je izometrija na $N(T)^\perp$). Obratno, ako je T u prethodnom korolaru koizometrija, sijedi da je i T^* parcijalna izometrija, tj. izometrija na $N(T^*)^\perp$ (općenito, T je parcijalna izometrija akko je T^* parcijalna izometrija). No, očito je $N(T^*)^\perp = H$, pa je T^* izometrija, odnosno, bazni okvir je Parsevalov.*

Neka je $(x_n)_n$ bazni okvir za Hilbertov prostor H i neka je U njegov operator analize. Prema teoremu 2.1.15 operator sinteze U^* je surjektivan, tj. $R(U^*) = H$. Kako je H trivijalno zatvoren u samom sebi, primijenjujući propoziciju 2.1.14 c), operator U^*U je invertibilan na $R(U^*) = H$. Iz (2.2) i propozicije 2.1.5 lako dobivamo eksplicitnu formulu:

$$U^*Ux = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle x_n, \quad \forall x \in H \tag{2.7}$$

Operator U^*U obično se naziva operatorom baznog okvira i izuzetno je koristan u proučavanju istih. Pomoću njega, primjerice, možemo dobiti optimalne ocjene baznog okvira.

Propozicija 2.1.18. *Neka je $(x_n)_n$ bazni okvir za Hilbertov prostor H i neka je U njegov operator analize. Tada je operator U^*U invertibilan, a optimalne ograde baznog okvira $(x_n)_n$ su:*

$$A_{opt} = \frac{1}{\|(U^*U)^{-1}\|} \quad i \quad B_{opt} = \|U^*U\| \tag{2.8}$$

Dokaz. Invertibilnost operatora U^*U smo komentirali u diskusiji prije iskaza propozicije. Imamo

$$\langle U^*Ux, x \rangle = \langle Ux, Ux \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2, \quad \forall x \in H, \tag{2.9}$$

iz čega zaključujemo

$$A_{opt} I \leq U^*U \leq B_{opt} I. \tag{2.10}$$

Odavde direktno slijedi

$$B_{opt} = \|U^*U\| = \|U\|^2. \tag{2.11}$$

S druge strane, $A_{opt} I \leq U^*U$ je očito ekvivalentno s

$$(U^*U)^{-1} \leq \frac{1}{A_{opt}} I \tag{2.12}$$

Iz ovoga direktno slijedi $\|U^*U\| \leq \frac{1}{A_{opt}}$. Pokažimo da vrijedi jednakost. Pretpostavimo suprotno, tj. $\|U^*U\| = C < \frac{1}{A_{opt}}$. No tada je $(U^*U)^{-1} \leq C \cdot I$ iz čega slijedi $\frac{1}{C} I \leq U^*U$. Iz ovoga pak imamo da je $\frac{1}{C} > A_{opt}$ donja ograda baznog okvira što je kontradikcija jer je A_{opt} najveća takva. □

Navedimo još jednu korisnu posljedicu prethodnih tvrdnji:

Korolar 2.1.19. *Neka su H i K Hilbertovi prostori i $T \in \mathbb{B}(H,K)$ surjekcija. Ako je niz $(x_n)_n$ bazni okvir za H, onda je niz $(y_n)_n$ definiran s $y_n = Tx_n, n \in \mathbb{N}$ bazni okvir za K. Nadalje, ako su A i B ograde baznog okvira $(x_n)_n$, ograde baznog okvira $(y_n)_n$ su $\frac{A}{\|(TT^*)^{-1}\|}$ i $B\|T\|^2$.*

Dokaz. Prva tvrdnja je očita zbog korolara 2.1.16. Označimo s U i V operatore analiye nizova $(x_n)_n$ i $(y_n)_n$ respektivno. Tada je za svaki $y \in K$, $Vy = (\langle y, y_n\rangle)_n = (\langle y, Tx_n\rangle)_n = (\langle T^*y, x_n\rangle)_n = UT^*y$, tj. $V = UT^*$. Kako je $A \leq A_{opt}$ i $B_{opt} \leq B$, iz (2.10) slijedi

$$AI \leq U^*U \leq BI. \tag{2.13}$$

Kako je T surjekcija, TT^* je invertibilan zbog propozicije 2.1.14 c) iz čega lako slijedi

$$(TT^*)^{-1} \leq \|(TT^*)^{-1}\| \cdot I$$

što je ekvivalentno s

$$TT^* \geq \frac{1}{\|(TT^*)^{-1}\|} I. \tag{2.14}$$

Sada imamo

$$V^*V = (TU)^*(UT)^* = T(U^*U)T^* \leq B \cdot TT^* \leq B\|TT^*\|I = B\|T\|^2 I,$$

pri čemu smo u prvoj nejednakosti koristili (2.13). S druge strane, koristeći (2.13) i (2.14) dobivamo

$$VV^* = (TU)^*(UT)^* = T(U^*U)T^* \geq A \cdot TT^* \geq \frac{1}{\|(TT^*)^{-1}\|} I.$$

Kombinirajući ove dvije tvrdnje, zaključujemo

$$\frac{1}{\|(TT^*)^{-1}\|} I \leq VV^* \leq B\|T\|^2 I$$

iz čega lako slijedi tvrdnja. □

Neka je $(x_n)_n$ bazni okvir za Hilbertov prostor H i neka je U njegov operator analize. Prema propoziciji 2.1.18, U^*U je invertibilan, pa je njegov inverz jasno i surjekcija. Tada je, prema prethodnom korolaru, niz $(y_n)_n$ definiran s

$$y_n = (U^*U)^{-1} x_n, \quad n \in \mathbb{N} \tag{2.15}$$

također bazni okvir za H.

Definicija 2.1.20. *Neka je $(x_n)_n$ bazni okvir za Hilbertov prostor H i U njegov operator analize. Bazni okvir $(y_n)_n$ definiran s $y_n = (U^*U)^{-1}x_n, n \in \mathbb{N}$ zovemo kanonski dual niza $(x_n)_n$.*

Neka je V operator analize kanonskog duala i neka je $x \in H$ proizvoljan.

$$\begin{aligned} Vx &= (\langle x, y_n \rangle)_n = (\langle x, (U^*U)^{-1}x_n \rangle)_n \\ &= (\langle ((U^*U)^{-1})^* x, x_n \rangle)_n = (\langle ((U^*U)^*)^{-1} x, x_n \rangle)_n \\ &= (\langle (U^*U)^{-1} x, x_n \rangle)_n \end{aligned} \tag{2.16}$$

Zaključujemo, $Vx = U(U^*U)^{-1}x$, za sve $x \in H$, tj.

$$V = U(U^*U)^{-1}. \tag{2.17}$$

Koristili smo: ako je T invertibilan operator takav da je i T^* invertibilan, vrijedi $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$. Naime, imamo $(T^*)^{-1}T^* = I$ iz čega slijedi $(T^*)^*((T^*)^{-1})^* = I^* = I$. No, $(T^*)^* = T$, pa dobivamo $T^{-1} = ((T^*)^{-1})^*$. Adjungiranjem ove relacije slijedi tvrdnja.

Uočimo, ako je bazni okvir Parsevalov, kako je U izometrija, lako se vidi da je tada $U^*U = I$ ($\langle Ux, Ux \rangle = \langle x, x \rangle, \forall x \iff \langle x, U^*Ux \rangle = \langle x, x \rangle, \forall x \iff U^*U = I$), pa je kanonski dual jednak polaznom nizu. Vrijedi i obrat, tj., ako bazni okvir ima kanonski dual jednak samom sebi, on je nužno Parsevalov.

Kanonskim dualima, između ostalog, malo više ćemo se pozabaviti u sljedećoj točki. Sada ćemo samo još dokazati jedno od ključnih svojstava kanonskih duala.

Teorem 2.1.21. *Neka je $(x_n)_n$ bazni okvir za Hilbertov prostor H i neka je $(y_n)_n$ njegov kanonski dual. Tada vrijedi*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, y_n \rangle x_n, \quad \forall x \in H \tag{2.18}$$

Posebno, ako je $(x_n)_n$ Parsevalov bazni okvir, vrijedi

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle x_n, \quad \forall x \in H \tag{2.19}$$

Dokaz. Prisjetimo se formule za operator baznog okvira:

$$U^*Ux = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle x_n, \quad \forall x \in H.$$

Djelovanjem operatora $(U^*U)^{-1}$ (napomena 1.2.7) dobivamo

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle (U^*U)^{-1} x_n, \quad \forall x \in H.$$

Uz oznaku $y_n = (U^*U)^{-1} x_n$ imamo

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle y_n, \quad \forall x \in H$$

Označimo sada s V operator analize baznog okvira $(y_n)_n$. Uzeći u obzir formule operatora analize i sinteze, gornji izraz možemo zapisati kao

$$V^*U = I.$$

Ako adjungiramo ovu relaciju, dobivamo

$$U^*V = I$$

iz čega direktno slijedi

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, y_n \rangle x_n, \quad \forall x \in H.$$

Dakle, vrijedi (2.18). Tvrdnja (2.19) je sada očita, jer je Parsevalov bazni okvir sam sebi kanonski dual. □

Relacije (2.18) i (2.19) nazivaju se rekonstrukcijska svojstva baznih okvira. Pokazat ćemo kasnije da kanonski dual nije jedini niz koji ima rekonstrukcijska svojstva što je intuitivno očekivani rezultat budući da bazni okviri nisu nužno linearno nezavisni (jedan ilustrativni primjer je, ako uzmemo sustav izvodnica u konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru koji nije baza, svaki vektor se može prikazati kao linearna kombinacija vektora tog sustava, ali zapis nije jedinstven). Duale ćemo se detaljnije analizirati u idućoj točki.

Do kraja ovog potpoglavlja, navest ćemo neka zanimljiva svojstva Parsevalovih baznih okvira. Sljedeća propozicija daje nam jednostavan način kako dobiti jedan takav. Kao što smo vidjeli u dokazu propozicije (2.1.18), operator U^*U je pozitivno semidefinitan, pa ćemo koristiti njegov kvadratni korijen.

Propozicija 2.1.22. *Neka je $(x_n)_n$ bazni okvir za Hilbertov prostor H i neka je U njegov operator analize. Stavimo $u_n = (U^*U)^{-\frac{1}{2}} x_n, n \in \mathbb{N}$. Tada je $(u_n)_n$ Parsevalov bazni okvir za H*

Dokaz. Iz invertibilnosti operatora U^*U slijedi i invertibilnost $(U^*U)^{-\frac{1}{2}}$, pa je zbog korolara 2.1.19 niz $(u_n)_n$ bazni okvir za H. Lako se vidi da je njegov operator analize $U(U^*U)^{-\frac{1}{2}}$. Kako je $(U(U^*U)^{-\frac{1}{2}})^*U(U^*U)^{-\frac{1}{2}} = I$, taj bazni okvir je Parsevalov. □

Propozicija 2.1.23. *Neka je $(x_n)_n$ niz u Hilbertovom prostoru H. $(x_n)_n$ je Parsevalov bazni okvir za H ako i samo ako*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle x_n, \quad \forall x \in H. \tag{2.20}$$

Posebno, ako je $(f_n)_n$ ONB prostora H i ako je M zatvoren potprostor od H, niz $(Pf_n)_n$ je Parsevalov bazni okvir za M, pri čemu je P ortogonalni projektor na M

Dokaz. Jedan smjer smo dokazali u teoremu 2.1.21. Obratno, pretpostavimo da vrijedi (2.20). Ako taj izraz skalarno pomnožimo s x, zbog neprekidnosti skalarnog produkta dobivamo

$$\|x\|^2 = \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle x_n, x \right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle \langle x_n, x \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2,$$

tj., $(x_n)_n$ je Parsevalov bazni okvir.

Neka je sada M zatvoreni potprostor od H i P ortogonalni projektor na M. Prisjetimo se, za ortogonalni projektor vrijedi $P^2 = P = P^*$. Za svaki $x \in M$ imamo $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, f_n \rangle f_n$ i $x = Px$. Dobivamo

$$x = Px = \sum_{n=1}^{\infty} \langle Px, f_n \rangle Pf_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, Pf_n \rangle Pf_n.$$

Primjenom ranije dokazanog, dobivamo da je $(Pf_n)_n$ Parsevalov bazni okvir za M. □

Vrijedi i svojevrsni obrat prethodne propozicije, tj. svaki Parsevalov bazni okvir možemo dobiti kao ortogonalnu projekciju ONB nekog većeg prostora.

Propozicija 2.1.24. *Neka je $(x_n)_n$ Parsevalov bazni okvir za Hilbertov prostor H. Tada postoji Hilbertov prostor H_0 kojem je H zatvoreni potprostor i ONB $(f_n)_n$ za H_0 takav da je $x_n = Pf_n$ za sve $n \in \mathbb{N}$ pri čemu je $P \in \mathbb{B}(H_0)$ ortogonalni projektor na H*

Dokaz. Neka je U operator analize niza $(x_n)_n$. U je izometrija, pa je specijalno ograničen odozdo, iz čega pak slijedi zatvorenost potprostora $M = R(U)$ u ℓ^2. Neka je $Q \in \mathbb{B}(\ell^2)$ ortogonalni projektor na M. Neka je $H_0 = H \oplus M^{\perp}$. Očito H možemo identificirati s $H \oplus \{0\} \leq H_0$. Neka je $P \in \mathbb{B}(H_0)$ ortogonalni projektor na $H \oplus \{0\}$.

Promotrimo niz $(f_n)_n$ u H_0 zadan s $f_n = (x_n, (I-Q)e_n), n \in \mathbb{N}$, pri čemu je $(e_n)_n$ kanonska baza prostora ℓ^2. Očito je tada $Pf_n = (x_n, 0)$, za sve n. Želimo dokazati da je f_n ONB za H_0. U tu svrhu ćemo konstruirati unitarni operator $W : \ell^2 \to H_0$ takav da je $We_n = f_n$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

Ranije smo komentirali da je U^* koizometrija. Zbog zatvorenosti $R(U)$, prema propoziciji (ref) imamo $N(U^*)^{\perp} = R(U)$ pa je $U^*|_M : M \to H$ unitaran operator. Kako je $\ell^2 = M \oplus N(U^*)$, imamo $x_n = U^*e_n = U^*Qe_n = (U^*|_M)Qe_n$ za sve n.

Neka je $W = U^*|_M \oplus I_{M^{\perp}} : \ell^2 \to H_0$, pri čemu je $I_{M^{\perp}}$ identiteta na $M^{\perp}$. Tada je W očito unitaran i

$$We_n = (U^*|_M \oplus I_{M^{\perp}})(Qe_n + (I-Q)e_n) = (x_n, (I-Q)e_n) = f_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

□

2.2 Duali baznih okvira

Kao što smo ranije napomenuli, kanonski duali općenito nisu jedinstveni nizovi koji zadovoljavaju rekonstrukcijska svojstva (2.18). U ovom odjeljku detaljnije ćemo analizirati takve nizove i dati konkretne primjere.

Definicija 2.2.1. *Neka je $(x_n)_n$ bazni okvir za Hilbertov prostor H. Dual baznog okvira je svaki niz $(z_n)_n$ koji zadovoljava*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, z_n \rangle x_n, \quad \forall x \in H. \tag{2.21}$$

Primjer 2.2.2. *Neka je $(e_n)_n$ ONB za Hilbertov prostor H i neka je $(x_n)_n$ niz $e_1, e_1, e_2, e_2, ...$ za H. Iz formule za operator baznog okvira i (2.19) slijedi $U^*U = 2I$, pa je njegov kanonski dual niz $\frac{1}{2}e_1, \frac{1}{2}e_1, \frac{1}{2}e_2, \frac{1}{2}e_2, ...$S druge strane, neka je $(v_n)_n$ niz $e_1, 0, e_2, 0, ...$ Za proizvoljni $x \in H$ vrijedi*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, v_n \rangle x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n = x$$

pa je i bazni okvir $(v_n)_n$ dual baznog okvira $(x_n)_n$
Uočimo nadalje, dual baznog okvira uopće ne mora biti bazni okvir. Promotrimo Parsevalov bazni okvir $e_1, \frac{1}{\sqrt{2}}e_2, \frac{1}{\sqrt{2}}e_2, \frac{1}{\sqrt{3}}e_3, \frac{1}{\sqrt{3}}e_3, \frac{1}{\sqrt{3}}e_3, ...$ Lako se vidi da je jedan njegov dual niz $e_1, \sqrt{2}e_2, 0, \sqrt{3}e_3, 0, 0, ...$ koji nije bazni okvir jer nije ograničen (svaki Besselov niz je ograničen u normi, vidi prop 2.1.5).

Nas neće zanimati duali koji nisu bazni okviri. Pokazuje se, ako je dual baznog okvira Besselov niz, onda je i on sam bazni okvir. Štoviše, iduća propozicija daje nam i općenitiji rezultat.

Propozicija 2.2.3. *Neka su $(v_n)_n$ i $(w_n)_n$ Besselovi nizovi u Hilbertovom prostoru H takvi da vrijedi*

$$x = \sum_{n_1}^{\infty} \langle x, v_n \rangle w_n, \quad \forall x \in H$$

Tada su $(v_n)_n$ i $(w_n)_n$ međusobno dualni bazni okviri. Posebno, ako je Besselov niz dualan nekom baznom okviru, onda je i on sam bazni okvir.

Dokaz. Označimo s V i W operatore analize nizova $(v_n)_n$ i $(w_n)_n$. Pretpostavku sada možemo zapisati kao $W^*V = I$. Zbog $R(W^*V) \subseteq R(W^*)$, W^* je surjekcija, pa je $(w_n)_n$ bazni okvir kao surjektivna slika kanonske baze prostora ℓ^2. Kako $W^*V = I$ povlači $V^*W = I$, potpuno istim argumentom dobivamo da je i $(v_n)_n$ bazni okvir. □

Do kraja ovog poglavlja, cilj nam je odgovoriti na prirodno pitanje: možemo li opisati sve bazne okvire koji su dualni nekom baznom okviru $(x_n)_n$? Prije toga, navest ćemo dva svojstva koja ističu kanonske duale u klasi svih duala.

Propozicija 2.2.4. *Neka je $(x_n)_n$ bazni okvir za Hilbertov prostor H, U njegov operator analize i $(y_n)_n$ njegov kanonski dual.*

(a) Ako za neki $x \in H$ niz skalara $(c_n)_n$ zadovoljava $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$, onda vrijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, y_n \rangle|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, y_n \rangle - c_n|^2.$$

(Drugim riječima, niz $(\langle x, y_n \rangle)_n$ ima najmanju ℓ^2 normu među svim nizovima $(c_n)_n$ za koje je $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$).

(b) Ako je $(z_n)_n$ dual niza $(x_n)_n$ za kojeg postoji operator $D \in \mathbb{B}(H)$ takav da vrijedi $z_n = Dx_n$ za svaki n, tada je $D = (U^*U)^{-1}$ i $z_n = y_n$ za sve n.(Drugim riječima, kanonski dual je jedini dual kojeg možemo dobiti djelovanjem ograničenog operatora na niz $(x_n)_n$).

Dokaz. (a) Znamo da je $(\langle x, y_n \rangle)_n$ niz u ℓ^2. Pretpostavimo da je $(c_n)_n$ niz u ℓ^2 jer u suprotnom nemamo što dokazivati. Označimo $\langle x, y_n \rangle$ s $a_n, n \in \mathbb{N}$. Imamo

$$\begin{aligned}\langle x, (U^*U)^{-1}x \rangle &= \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n, (U^*U)^{-1}x \right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \langle (U^*U)^{-1}x_n, x \rangle \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \langle y_n, x \rangle = \langle (a_n)_n, (a_n)_n \rangle\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}\langle x, (U^*U)^{-1}x\rangle &= \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n, (U^*U)^{-1}x \right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \langle (U^*U)^{-1}x_n, x\rangle \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \langle y_n, x\rangle = \langle (c_n)_n, (a_n)_n\rangle\end{aligned}$$

Oduzimanjem ove dvije relacije dobivamo $\langle (c_n)_n - (a_n)_n, (a_n)_n\rangle = 0$, iz čega slijedi

$$\|(c_n)_n\|^2 = \|(c_n - a_n) + (a_n)\|^2 = \|(c_n - a_n)_n\|^2 + \|(a_n)_n\|^2.$$

(b) Po pretpostavci, za svaki x imamo $x = \sum_{n=1}^{\infty}\langle x, Dx_n\rangle x_n$, dok s druge strane vrijedi i $x = \sum_{n=1}^{\infty}\langle x, (U^*U)^{-1}x_n\rangle x_n$. Promotrimo operator $(U^*U)D^*$. Iz druge jednakosti za svaki $x \in H$ imamo

$$(U^*U)D^*x = \sum_{n=1}^{\infty}\langle (U^*U)D^*x, (U^*U)^{-1}x_n\rangle x_n = \sum_{n=1}^{\infty}\langle x, Dx_n\rangle x_n = x,$$

jer je U^*U hermitski. Iz ovoga vidimo da je $(U^*U)D^* = I$, odnosno $D^* = (U^*U)^{-1}$. Kako je i $(U^*U)^{-1}$ hermitski, adjungiranjem dobivamo tvrdnju. □

Neka je sada $(x_n)_n$ proizvoljan bazni okvir za Hilbertov prostor H i neka je U njegov operator analize. Kao što smo ranije napomenuli, cilj nam je opsiati sve bazne okvire dualne nizu $(x_n)_n$. Uzmimo dakle proizvoljan bazni okvir $(z_n)_n$ koji zadovoljava (2.21) i označimo s V njegov operator analize. Iz definicije operatora analize i sinteze lako dobivamo da tada vrijedi:

$$U^*V = I. \tag{2.22}$$

Tada je očito i

$$V^*U = I, \tag{2.23}$$

što nam daje

$$x = \sum_{n=1}^{\infty}\langle x, x_n\rangle z_n, \quad \forall x \in H. \tag{2.24}$$

Dakle, $(x_n)_n$ je dual baznog okvira $(z_n)_n$ (jasno, kad $(z_n)_n$ ne bi bio bazni okvir, ova simetričnost nebi vrijedila, štoviše, nebi ni imala smisla, ali kao što smo već napomenuli, duali koji nisu bazni okviri nisu nam od interesa).

Budući da su bazni okviri jedinstveno određeni svojim operatorima analize i sinteze, iz (2.23) slijedi da je za opis svih dualnih baznih okvira dovoljno opisati sve operatore $V \in \mathbb{B}(H, \ell^2)$ koji zadovoljavaju spomenutu relaciju. Drugim riječima, treba naći sve lijeve inverze opearatora U. No, za to nam najprije trebaju neki općeniti tehnički rezultati za lijeve inverze.

Lema 2.2.5. *Neka su H i K Hilbertovi prostori i $T \in \mathbb{B}(H,K)$. Pretpostavimo da postoji operator $S \in \mathbb{B}(K,H)$ takav da vrijedi $ST = I$. Tada je T ograničen odozdo i slika mu je zatvorena.*

Dokaz. Kako je S ograničen, postoji konstanta $M > 0$ takva da vrijedi

$$\|Sy\| \leq M\|y\|, \quad \forall y \in K.$$

Specijalno,

$$\|STx\| \leq M\|Tx\|, \quad \forall x \in H.$$

No, $STx = x, \forall x \in H$ pa dijeljenjem gornje relacije s M dobivamo ograničenost odozdo uz konstantu $\frac{1}{M} > 0$. Druga tvrdnja slijedi iz leme (2.1.12). □

Lema 2.2.6. *Neka su H i K Hilbertovi prostori. Pretpostavimo da operatori $T \in \mathbb{B}(H,K)$ i $S \in \mathbb{B}(K,H)$ zadovoljavaju $ST = I$. Tada vrijedi*

(a) $N(S) = (I - TS)(N(T^*))$

(b) $K = R(T) \dot{+} N(S)$

(c) TS je kosi projektor na $R(T)$ paralelan s $N(S)$

Dokaz. (a) Dokažimo najprije

$$N(S) = R(I - TS) \tag{2.25}$$

Iz $ST = I$ slijedi $STS = S$, iz čega dobivamo $S(I - TS) = 0$. Odavde pak je očito $R(I - TS) \subseteq N(S)$. Obratno, neka je $y \in N(S)$. Tada je i $TSy = 0$ pa je $(I - TS)y = y$, tj. $y \in R(I - TS)$. Dakle, vrijedi (2.25).

Ako još dokažemo

$$R(I - TS) = (I - TS)(N(T^*)), \tag{2.26}$$

dobivamo tvrdnju (a). Inkluzija $(I - TS)(N(T^*)) \subseteq R(I - TS)$ je očita. Obratno, iz $ST = I$ i prethodne leme slijedi da je slika operatora T zatvorena. Uzmimo bilo koji $(I - TS)y \in R(I - TS)$. Iz zatvorenosti slike operatora T i propozicije (ref), y možemo zapisati u obliku $y = Tx + z$, pri čemu su $Tx \in R(T)$ i $z \in N(T^*)$. Slijedi

$$(I - TS)(Tx) = Tx - TSTx = Tx - Tx = 0.$$

Napokon, imamo

$$(I - TS)y = (I - TS)(Tx + z) = (I - TS)z \in (I - TS)(N(T^*)),$$

tj. vrijedi $R(I - TS) \subseteq (I - TS)(N(T^*))$, pa onda i (2.26).

(b) Uzmimo bilo koji $y \in N(S) \cap R(T)$. Tada je $y = Tx$ za neki x i $Sy = 0$. Tada je i $STx = 0$, dok je s druge strane po pretpostavci $STx = x$. Slijedi, $x = 0$, pa i $y = 0$.

Uzmimo sada proizvoljni $y \in K$. Kao i u dokazu tvrdnje (a), imamo $y = Tx + z$ za neke $Tx \in R(T)$ i $z \in N(T^*)$, te

$$(I - TS)y = (I - TS)z. \tag{2.27}$$

Stavimo $u = TSy \in R(T)$ i $v = (I - TS)z$. Kako je $v \in (I - TS)(N(T^*))$, iz tvrdnje a slijedi $v \in N(S)$. Sada iz (2.27) slijedi

$$y = TSy + (I - TS)z = u + v.$$

Dakle, svaki $y \in K$ možemo zapisati kao sumu elemenata iz $R(T)$ i $N(S)$. Kombinirajući to s tvrdnjom ranije, dobivamo da je suma potprostora $R(T)$ i $N(S)$ direktna, tj. $K = R(T) \dot{+} N(S)$.

(c) Uočimo, $(TS)^2 = T(ST)S = TS$. Prema (b), za $y \in K$ imamo $y = Tu + v, Tu \in R(T), v \in N(S)$ i

$$TSy = TSTu + TSv = TSTu = Tu.$$

Dakle, TS je kosi projektor na $R(T)$ paralelan s $N(S)$. □

Propozicija 2.2.7. *Neka su H i K Hilbertovi prostori i $T \in \mathbb{B}(H, K)$. Tada T ima lijevi inverz ako i samo ako je ograničen odozdo.*

Dokaz. Jedan smjer je tvrdnja u lemi 2.2.5. Obratno, pretpostavimo da je T ograničen odozdo. Po propoziciji 2.1.14 (b), T^* je surjekcija. Ako sada primijenimo propoziciju 2.1.14 (c) na operator T^*, dobivamo da je operator T^*T invertibilan na $R(T^*) = H$. Slijedi da je dobro definiran operator $S \in \mathbb{B}(K, H), S := (T^*T)^{-1}T^*$. Očito je $ST = I$. □

Korolar 2.2.8. *Neka su H i K Hilbertovi prostori i neka je $T \in \mathbb{B}(H, K)$ ograničen odozdo. Tada je operator $T(T^*T)^{-1}T^*$ ortogonalni projektor na $R(T)$.*

Dokaz. U dokazu prethodne propozicije dobili smo da je lijevi inverz operatora T oblika $S = (T^*T)^{-1}T^*$. Primjenom leme 2.2.6 (c) dobivamo da je $TS = T(T^*T)^{-1}T^*$ kosi projektor na $R(T)$ paralelan s $N(S)$. No, kako je $(T^*T)^{-1}$ invertibilan, pa i injektivan, imamo

$$N(S) = N((T^*T)^{-1}T^*) = N(T^*) = R(T)^{\perp}.$$

Zaključujemo da je kosi projektor $T(T^*T)^{-1}T^*$ štoviše ortogonalan. □

Korolar 2.2.9. *Neka su H i K Hilbertovi prostori i neka je $T \in \mathbb{B}(H, K)$ ograničen odozdo. Tada je svaki lijevi inverz $S \in \mathbb{B}(K, H)$ od T oblika $S = (T^*T)^{-1}T^*F$ pri čemu je $F \in \mathbb{B}(K)$ kosi projektor na $R(T)$ paralelan nekom zatvorenom direktnom komplementu potprostora $R(T)$ u K.*

Dokaz. Ako je $S = (T^*T)^{-1}T^*F$ gdje je $F \in \mathbb{K}$ kosa projekcija na $R(T)$, onda je očito $ST = I$, jer je FT. Obratno, ako je $S \in \mathbb{B}(K, H)$ lijevi inverz od T, zbog lemie 2.2.6 (c) operator $F = TS \in \mathbb{B}(K)$ je kosi projektor na $R(T)$ iz čega slijedi $(T^*T)^{-1}T^*F = (T^*T)^{-1}T^*TS = S$. □

Napomena 2.2.10. *Neka je $T \in \mathbb{B}(H, K)$ ograničen odozdo. Zbog prethodnog korolara možemo naći bijekciju između skupa svih lijevih inverza i skupa ograničenih kosih projekcija na $R(T)$ koji su pak jedinstveno određeni sa zatvorenim direktnim komplementima potprostora $R(T)$. Uočimo da tada kanonski dual (odnosno, njegov operator sinteze) odgovara ortogonalnom komplementu potprostora $R(T)$. Naime, u korolaru 2.2.8 dobili smo da je ortogonalni projektor na $R(T)$ dan formulom $P = T(T^*T)^{-1}T^*$. Uvrštavanjem u korolar 2.1.16 dobivamo da je $S = (T^*T)^{-1}T^*$ što je operator sinteze kanonskog duala (vidi (2.17)). Uočimo još da smo u dokazu propozicije 2.1.14 konstruirali upravo kanonski lijevi inverz.*

Korolar 2.2.11. *Neka su H i K Hilbertovi prostori i neka je $T \in \mathbb{B}(H, K)$ ograničen odozdo. Operator $S \in \mathbb{B}(K, H)$ je lijevi inverz od T ako i samo ako je oblika $S = (T^*T)^{-1}T^* + W(I - T(T^*T)^{-1}T^*)$ za neki $W \in \mathbb{B}(K, H)$.*

Dokaz. Ako je $S = (T^*T)^{-1}T^* + W(I - T(T^*T)^{-1}T^*)$, onda je očito $ST = I$.
Obratno, neka je $ST = I$ i stavimo $W = S$. Dobivamo

$$(T^*T)^{-1}T^* + W(I - T(T^*T)^{-1}T^*) = (T^*T)^{-1}T^* + S - (ST)(T^*T)^{-1}T^* = S.$$

□

Iz prethodnih rezultata (korolari 2.2.9 i 2.2.11) i ustanovljene veze između dualnih baznih okvira i lijevih inverza zaključujemo:

Korolar 2.2.12. *Neka su $(x_n)_n$ i $(v_n)_n$ bazni okviri za Hilbertov prostor H s operatorima analize U i V respektivno. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

(a) $(v_n)_n$ *je dual baznog okvira* $(x_n)_n$.

(b) V^* *je oblika* $V^* = (U^*U)^{-1}U^*F$, *pri čemu je* $F \in \mathbb{B}(\ell^2)$ *kosi projektor na* $R(U)$ *paralelan s nekim zatvorenim direktnim komplementom potprostora* $R(U)$ *u* ℓ^2.

(c) V^* *je oblika* $V^* = (U^*U)^{-1}U^* + W(I - U(U^*U)^{-1}U^*)$ *za neki* $W \in \mathbb{B}(\ell^2, H)$.

Korolar 2.2.13. *Neka su $(x_n)_n$ i $(v_n)_n$ bazni okviri za Hilbertov prostor H s operatorima analize U i V respektivno. Tada vrijedi*

(a) $\ell^2 = R(U)\dot{+}N(V^*)$,

(b) UV^* *je kosi projektor na* $R(U)$ *paralelan potprostoru* $N(V^*)$,

(c) $\ell^2 = R(V)\dot{+}N(U^*)$,

(d) VU^* *je kosi projektor na* $R(V)$ *paralelan potprostoru* $N(U^*)$.

Dokaz. (a) i (b) slijede direktno iz leme 2.2.6 zbog $V^*U = I$. Kako vrijedi i $U^*V = I$ odmah dobivamo (c) i (d). □

Navedimo na samom kraju ovog poglavlja zanimljivo svojstvo Rieszovih baza

Korolar 2.2.14. *Neka je $(x_n)_n$ bazni okvir za Hilbertov prostor H. Tada $(x_n)_n$ posjeduje jedinstveni dual ako i samo ako je $(x_n)_n$ Rieszova baza.*

Dokaz. Neka je U operator analize niza $(x_n)_n$ i neka je $(e_n)_n$ kanonska baza prostora ℓ^2.

Ako je $(x_n)_n$ Rieszova baza, zbog definicije iste i činjenice da su sve ONB separabilnih Hilbertovih prostora ekvivalentne dobivamo da postoji invertibilni operator $T \in \mathbb{B}(\ell^2, H)$ takav da je $Te_n = x_n$ za sve n. Znamo iz prethodnog odjeljka, da je tada $T = U^*$. Specijalno, U^* je injekcija, pa je $\ell^2 = N(U^*)^\perp = R(U)$. Tada je jedina projekcija na $R(U)$ identiteta, pa je prema korolaru 2.2.13 kanonski dual jedini dual.

Obratno, ako $(x_n)_n$ ima jedinstveni kanonski dual, $R(U)$ ima jedinstveni direktni komplement, koji je tada nužno $\{0\}$. Slijedi da je $R(U) = \ell^2$, odnosno U je bijekcija, pa je i U^* bijekcija. Drugim riječima, $(x_n)_n$ je Rieszova baza. □

Poglavlje 3

Gaborovi bazni okviri

U ovom poglavlju bavit ćemo se centralnim objektom ovog rada, Gaborovim baznim okvirima.

Definicija 3.1.1. *Gaborov sistem je niz u $L^2(\mathbb{R})$ oblika*

$$G(g,a,b) = (M_{mb}T_{na}g)_{m,n\in\mathbb{Z}} \tag{3.1}$$

pri čemu su $g \in L^2(\mathbb{R})$, $a,b > 0$ fiksni, a M_{mb} i T_{na} operatori modulacije i translacije. Funkciju g zovemo genarator ili atom sistema, a brojeve a i b parametri rešetke. Za niz $G(g,a,b)$ kažemo da je Gaborov bazni okvir ako je bazni okvir za Hilbertov prostor $L^2(\mathbb{R})$.

Najprije ćemo analizirati generirajuću funkciju g i parametre a i b u slučaju da je $G(g,a,b)$ bazni okvir, a nakon toga ćemo dokazati najvažnije rezultate u ovom poglavlju, dovoljne uvjete da za neku funkciju g i neke $a,b > 0$, sistem $G(g,a,b)$ bude bazni okvir za $L^2(\mathbb{R})$.

Dennis Gabor predložio je upotrebu sistema $G(\phi,1,1)$, pri čemu je ϕ Gaussova funkcija, $\phi(x) = e^{-\pi x^2}$. On je slutio da se svaka funkcija $f \in L^2(\mathbb{R})$ može zapisati u obliku

$$f = \sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_{mn}(f) M_m T_n \phi \tag{3.2}$$

gdje je $(c_{mn})_{m,n\in\mathbb{Z}}$ neki niz skalara koji ovisi o f. Kasnije se ispostavilo da je Gaborova slutnja bila netočna, iako se može dokazati da je spomenuti sistem fundamentalan za $L^2(\mathbb{R})$.

Napomena 3.1.2. *Operatori M_{mb} i T_{na} ne komutiraju, pa možemo gledati sisteme oblika $(T_{na}M_{mb}g)_{m,n\in\mathbb{Z}}$. Iz propozicije 1.5.10 slijedi*

$$|\langle f, M_{mb}T_{na}g\rangle|^2 = |\langle f, T_{na}M_{mb}g\rangle|^2, \quad \forall m,n\in\mathbb{Z}.$$

Zaključujemo, $(T_{na}M_{mb}g)_{m,n\in\mathbb{Z}}$ *je bazni okvir ako i samo ako je* $(M_{mb}T_{na}g)_{m,n\in\mathbb{Z}}$ *bazni okvir.*

Sljedeća lema će nam ilustrirati jednu zanimljivost: produkt ab je važniji od samih parametara a i b.

Lema 3.1.3. *Neka su* $g \in L^2(\mathbb{R})$ *i* $a, b > 0$. *Tada je, za dani* $r > 0$, $G(g, a, b)$ *bazni okvir za* $L^2(\mathbb{R})$ *ako i samo ako je* $G(D_r g, \frac{a}{r}, br)$ *bazni okvir za* $L^2(\mathbb{R})$.

Dokaz. Kako je D_r unitaran operator, $(M_{mb}T_{na}g)_{m,n\in\mathbb{Z}}$ je bazni okvir za $L^2(\mathbb{R})$ ako i samo ako je $(D_r M_{mb}T_{na}g)_{m,n\in\mathbb{Z}}$ bazni okvir za $L^2(\mathbb{R})$ (i to s istim ogradama). Iz propozicije 1.5.10 sada slijedi

$$D_r M_{mb} T_{na} g = M_{mbr} D_r T_{na} g = M_{mbr} T_{\frac{a}{r}n} D_r g.$$

□

Napomena 3.1.4. *Kako što smo već vidjeli u prethodnom poglavlju, ako je* $G(g, a, b)$ *Besselov niz, dobro je definiran (i ograničen je) operator analize*

$$U : L^2(\mathbb{R}) \to \ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}), \quad Uf = (\langle f, M_{mb}T_{na}g\rangle)_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}.$$

Ponekad ćemo koristiti oznaku $U_g^{a,b}$ *ako je potrebno istaknuti ovisnost o* g, a *i* b.

Lema 3.1.5. *Neka je* $g \in L^2(\mathbb{R})$ *i* $a, b > 0$. *Pretpostavimo da je* $G(g, a, b)$ *Besselov niz. Tada pripadni operator baznog okvira* U^*U *komutira s* $M_{mb}T_{na}$ *za sve* $m, n \in \mathbb{Z}$.

Dokaz. Neka su $f \in L^2(\mathbb{R})$ i $a, b > 0$ proizvoljni. Koristeći svojstva (ref) dobivamo

$$\begin{aligned}
U^*UM_{mb}T_{na}f &= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{l\in\mathbb{Z}} \langle M_{mb}T_{na}f, M_{lb}T_{ka}g\rangle M_{lb}T_{ka}g \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{l\in\mathbb{Z}} \langle f, T_{-na}M_{(l-m)b}T_{ka}g\rangle M_{lb}T_{ka}g \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{l\in\mathbb{Z}} \langle f, e^{2\pi ina(l-m)b}M_{(l-m)b}T_{-na}T_{ka}g\rangle M_{lb}T_{ka}g \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{l\in\mathbb{Z}} \langle f, e^{2\pi ina(l-m)b}M_{(l-m)b}T_{(k-n)a}g\rangle M_{lb}T_{ka}g
\end{aligned}$$

Uz supstituciju $(k \to k' + n, l \to l' + m)$ dobivamo

$$\begin{aligned}
U^*UM_{mb}T_{na}f &= \sum_{k'\in\mathbb{Z}}\sum_{l'\in\mathbb{Z}} \langle f, e^{2\pi inal'b}M_{l'b}T_{k'a}g\rangle M_{(l'+m)b}T_{(k'+n)a}g \\
&= \sum_{k'\in\mathbb{Z}}\sum_{l'\in\mathbb{Z}} \langle f, e^{2\pi inal'b}M_{l'b}T_{k'a}g\rangle e^{2\pi inal'b}M_{mb}T_{na}M_{l'b}T_{k'a}g \\
&= M_{mb}T_{na}U^*Uf.
\end{aligned}$$

□

Propozicija 3.1.6. *Neka je $g \in L^2(\mathbb{R})$ i $a, b > 0$. Pretpostavimo da je $G(g, a, b)$ bazni okvir za $L^2(\mathbb{R})$. Tada je njegov kanonski dual također Gaborov bazni okvir $G((U^*U)^{-1}g, a, b)$. Nadalje, pridruženi Parsevalov bazni okvir je $G((U^*U)^{-\frac{1}{2}}g, a, b)$.*

Dokaz. Kanonski dual baznog okvira $(M_{mb}T_{na}g)_{m,n\in\mathbb{Z}}$ je niz $((U^*U)^{-1}M_{mb}T_{na}g)_{m,n\in\mathbb{Z}}$. No, $(U^*U)^{-1}$ komutira s M_{mb} i T_{na} za sve m i n jer i U^*U komutira s M_{mb} i T_{na}. Druga tvrdnja slijedi iz činjenice da je pridruženi Parsevalov bazni okvir $((U^*U)^{-\frac{1}{2}}M_{mb}T_{na}g)_{m,n\in\mathbb{Z}}$ i da i $(U^*U)^{-\frac{1}{2}}$ komutira s $M_{mb}T_{na}$ (teorem 1.2.21) za sve m i n. □

Zbog same definicije, nekako je prirodno gledati generirajuću funkciju nošenu na "lijepom skupu" (primjerice, ograničeni interval) koja onda zbog translacija i modulacija "prekrije" cijeli $\mathbb{R}$. Takve funkcije ćemo zvati dobro lokalizirane funkcije. Međutim, dobra lokaliziranost sama po sebi nije dovoljno dobro svojstvo. Promotrimo primjer $G(\mathbb{1}_{[0,1]}, 1, 1)$. Fiksirajmo $n \in \mathbb{Z}$ i uočimo da je $(e^{2\pi imx}\mathbb{1}_{[n,n+1]})_{m\in\mathbb{Z}}$ ONB za $L^2([n, n+1])$. Tada je Gaborov sistem $G(\mathbb{1}_{[0,1]}, 1, 1)$ unija ortonormiranih baza za $L^2([n, n+1])$ po $n \in \mathbb{Z}$ pa je ONB za $L^2(\mathbb{R})$, a samim time i Gaborov bazni okvir. Međutim, $\mathbb{1}_{[0,1]}$ nije neprekidna, pa red u prikazu glatke funkcije pomoću ONB $G(\mathbb{1}_{[0,1]}, 1, 1)$ ne konvergira brže od reda u prikazu prekidne funkcije. Nadalje,

$$\widehat{\mathbb{1}_{[0,1]}}(\xi) = e^{-\pi i}\frac{\sin \pi\xi}{\pi\xi},$$

iz čega vidimo da Fourierova transformacija funkcije $\mathbb{1}_{[0,1]}$ nije lokalizirana, relativno sporo pada u beskonačnosti, a nije ni integrabilna.

Općenito, želimo da nam generirajuća funkcija bude glatka i dobro lokalizirana. Matematičari Daubechies, Grossmann i Meyer su prvi konstruirali Gaborov bazni okvir kojem je generirajuća funkcija bila glatka s kompaktnim nosačem i to su zvali "bezbolni neortogonalni razvoj". Mi najprije navodimo jednu tehničku lemu.

Lema 3.1.7. *Preslikavanje $V : L^2([0, 1]) \to L^2([0, c]), c > 0, Vf(x) = \frac{1}{\sqrt{c}}f(\frac{x}{c})$ je unitaran operator. Posebno, kako je niz $(e^{2\pi imx})_{m\in\mathbb{Z}}$ ONB za $L^2([0, 1])$, slijedi da je niz $(\frac{1}{\sqrt{c}}e^{2\pi im\frac{x}{c}})_{m\in\mathbb{Z}}$ ONB za $L^2([0, c])$. Ista tvrdnja vrijedi ako u kodomeni gledamo $L^2(I)$ pri čemu je I proizvoljni segment duljine c.*

Dokaz. Za bilo koju $f \in L^2([0, 1])$ imamo

$$\langle Vf, Vf\rangle_{L^2([0,c])} = \int_0^c \frac{1}{c}|f(\frac{x}{c})|^2 dx = \int_0^1 |f(y)|^2 dy = \langle f, f\rangle_{L^2([0,1])}$$

uz supstituciju $y = \frac{x}{c}$. Dakle, V je unitaran. Druga tvrdnja je sada očita, dok treću tvrdnju dobivamo komponiranjem s operatorom translacije koji je i sam unitaran. □

Teorem 3.1.8. *Pretpostavimo da je $g \in L^2(\mathbb{R})$ funkcija sa svojstvom supp $g \subseteq I = [0, \frac{1}{b}]$ za neki $b > 0$ i da je $a > 0$ takav da je $ab \leq 1$. Tada je $G(g, a, b)$ bazni okvir za $L^2(\mathbb{R})$ ako i samo ako postoje konstante $A, B > 0$ takve da*

$$Ab \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} |g(x - ak)|^2 \leq Bb \text{ za g.s. } x \in \mathbb{R}. \tag{3.3}$$

U tom slučaju, A, B su ograde baznog okvira $G(g, a, b)$. Nadalje, ako je $ab < 1$, postoji glatka funkcija s nosačem sadržanim u $[0, \frac{1}{b}]$ koja zadovoljava (3.3).

Dokaz. Neka je $G_0(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |g(x - ak)|^2$. Pretpostavimo da vrijedi (3.3) i neka je $f \in L^2(\mathbb{R})$ proizvoljna. Fiksirajmo $n \in \mathbb{Z}$ i uočimo da je nosač funkcije $fT_{na}\overline{g}$ sadržan u $[na, \frac{1}{b} + na]$. Nadalje, g je ograničena g.s. (jer je i G_0 takva), pa zaključujemo da je $fT_{na}\overline{g} \in L^2([na, \frac{1}{b} + na])$. Kako je prema prethodnoj lemi $(\sqrt{b}e^{2\pi imbx})_{m\in\mathbb{Z}}$ ONB za $L^2([na, \frac{1}{b} + na])$, imamo

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)g(x - na)|^2 dx &= \int_{na}^{\frac{1}{b}+na} |f(x)T_{na}\overline{g(x)}|^2 dx \\
&= \|fT_{na}\overline{g}\|_{L^2([na, \frac{1}{b}+na])} \\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \left| \left\langle fT_{na}\overline{g}, \sqrt{b}e^{2\pi imbx} \right\rangle \right|^2 \\
&= b \sum_{m\in\mathbb{Z}} \left| \int_{na}^{\frac{1}{b}+na} f(x)\overline{g(x - na)}e^{-2\pi imbx} dx \right|^2 \\
&= b \sum_{m\in\mathbb{Z}} \left| \int_{na}^{\frac{1}{b}+na} f(x)\overline{e^{2\pi imbx} g(x - na)} dx \right|^2 \\
&= b \sum_{m\in\mathbb{Z}} |\langle f, M_{mb}T_{na}g\rangle|^2.
\end{aligned}$$

Koristeći Tonellijev teorem (tj., korolar 1.5.13) za zamjenu sume i integrala dobivamo

$$\begin{aligned}
\sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\langle f, M_{mb}T_{na}g\rangle|^2 &= \frac{1}{b} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)g(x - na)|^2 dx \\
&= \frac{1}{b} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |g(x - na)|^2 \right) dx.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Iz (3.3) sada lako slijedi

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\langle f, M_{mb}T_{na}g\rangle|^2 \leq B\|f\|^2,$$

za sve $f \in L^2(\mathbb{R})$.

Obrat ide analogno, uz isti račun kao gore.

Pretpostavimo sada da je $0 < ab < 1$. Neka je g neprekidna funkcija takva da je $g(x) > 0$ za svaki $x \in (0, \frac{1}{b})$ i $g(x) = 0$ za svaki $x \notin (0, \frac{1}{b})$. Zbog $a < \frac{1}{b}$, slijedi da je a-periodična funkcija $G_0(x)$ strogo pozitivna i neprekidna. Slijedi, $0 < \inf G_0 \leq \sup G_0 < \infty$. Navedimo jedan primjer glatke funkcije koja zadovoljava gornje pretpostavke. Neka je funkcija φ zadana s

$$\varphi(t) = \begin{cases} e^{\frac{1}{t}} & : t < 0 \\ 0 & : t \geq 0. \end{cases}$$

Sada je $F(x) = \varphi(x^2 - \frac{x}{b})$ jedna tražena funkcija. □

Napomena 3.1.9. *S $G_0(x)$ (kao i u dokazu prethodnog teorema) označavat ćemo funkciju $\sum_{k\in\mathbb{Z}}|g(x-ak)|^2$ i u daljnim razmatranjima.*

Napomena 3.1.10. *Uvjet $ab \leq 1$ je nužan da bi vrijedilo (3.3). Naime, ako je $a > \frac{1}{b}$, imamo $\sum_{k\in\mathbb{Z}}|g(x-ak)|^2 = 0$ na intervalu $[\frac{1}{b}, a)$, pa (3.3) ne vrijedi.*

Napomena 3.1.11. *Uočimo sljedeće: ako je $ab = 1$, tada nijedna funckija g koja zadovoljava (3.3) ne može biti neprekidna. Naime, ako je supp $g \subseteq [0, \frac{1}{b}] = [0, a]$, onda je nosač funkcije $T_{na}g$ sadržan u $[na, (n+1)a]$. Ako je g neprekidna, nužno je $g(0) = g(a) = 0$. Kako se intervali $[na, (n+1)a]$ u parovima sijeku u najviše jednoj točki, dobivamo da je $G_0(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}|g(x-na)|^2$ neprekidna i vrijedi $G_0(na) = 0$ za svaki $n \in \mathbb{Z}$. No, tada G_0 ne zadovoljava (3.3) pa $G(g, a, b)$ nije bazni okvir.*

Napomena 3.1.12. *Iz prethodne napomene je jasno da niz $G(\phi, 1, 1)$ nije bazni okvir za $L^2(\mathbb{R})$.*

Napomena 3.1.13. *Pretpostavimo da g, a i b zadovoljavaju pretpostavke teorema 3.1.8 i neka*

$$G_0(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}|g(x-na)|^2$$

zadovoljava (3.3). Tada je prema istom teoremu $G(g, a, b)$ bazni okvir, pa označimo s U njegov operator analize. Neka je f neprekidna funkcija s kompaktnim nosačem. Iz (3.4) slijedi

$$\langle U^*U, f\rangle = \|Uf\|^2 = \sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\langle f, M_{mb}T_{na}g\rangle|^2 = \frac{1}{b}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2 G_0(x)dx.$$

Kako je U^*U neprekidan, ovaj izraz možemo proširiti po neprekidnosti na cijeli $L^2(R)$, tj., imamo

$$\langle U^*U, f\rangle = \frac{1}{b}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2 G_0(x)dx, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}).$$

Promotrimo sada operator $M_{\frac{1}{b}G_0}$ na $L^2(\mathbb{R})$ definiran s $M_{\frac{1}{b}G_0}f = \frac{1}{b}G_0 f$. Jasno, prema prethodnome, vrijedi $\langle U^*Uf, f\rangle = \langle M_{\frac{1}{b}G_0}f, f\rangle, \forall f \in L^2(\mathbb{R})$. Sada iz činjenice da su oba operatora hermitski i jedinstvenosti adjungiranog operatora zaključujemo da je $U^*U = M_{\frac{1}{b}G_0}$. Uočimo sada da je $(U^*U)^{-1} = M_{b\frac{1}{G_0}}$, tj.

$$(U^*U)^{-1}f = b\frac{1}{G_0}f, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}).$$

Iz propozicije 3.1.6 slijedi da je kanonski dual baznog okvira $(M_{mb}T_{na}G)_{m,n\in\mathbb{Z}}$ bazni okvir $(M_{mb}T_{na}\frac{b}{G_0}g)_{m,n\in\mathbb{Z}}$. Rekonstrukcijske formule sada nam daju

$$f = b\sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle f, M_{mb}T_{na}g\rangle M_{mb}T_{na}\frac{1}{G_0}g, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}).$$

Uočimo još da je

$$T_{na}(\frac{1}{G_0}g)(x) = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|f(x-ka-na)|^2\right)^{-1} g(x-na) = \frac{1}{G_0(x)}T_{na}g(x),$$

pa gornji izraz možemo zapisati kao

$$f = \frac{b}{G_0}\sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle f, M_{mb}T_{na}g\rangle M_{mb}T_{na}g, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}). \tag{3.5}$$

Ovu formulu možemo zvati bezbolni neortogonalni razvoj.

Korolar 3.1.14. *Pretpostavimo da je g neprekidna funkcija s nosačem sadržanim u intervalu I duljine $L > 0$, te da nosač ne iščezava na interioru intervala I. Tada je $G(g, a, b)$ bazni okvir za $L^2(\mathbb{R})$ za sve $0 < a < L$ i $0 < b \leq \frac{1}{L}$.*

Dokaz. Neka je $0 < a < L$ i $0 < b \leq \frac{1}{L}$. Kako je $\frac{1}{b} \geq L$, nosač funkcije g je sadržan u intervalu duljine $\frac{1}{b}$. Neka je G_0 definirana kao i ranije. Ako pokažemo da je G_0 ograničena odozgo i odozdo, tvrdnja će slijediti iz teorema 3.1.8.

Kako g ima kompaktni nosač, zaključujemo da je suma u definiciji funkcije G_0 konačna, iz čega zbog ograničenosti funkcije g (g je neprekidna na kompaktu) slijedi ograničenost odozgo funkcije G_0.

Neka je sada I interval duljine a s istim središtem kao interval J (zbog $a < L$ vrijedi i $I \subseteq J$). Za proizvoljni $x \in \mathbb{R}$ postoji $n \in \mathbb{Z}$ takav da je $x - na \in J$. Slijedi da je $\inf_{x\in\mathbb{R}} G_0(x) \geq \inf_{x\in J}|g(x)|^2 > 0$. Pritom vrijedi stroga nejednakost jer nosač funkcije g sadrži rubne točke intervala I, a koje su izvan intervala J. Budući da je $g = 0$ samo u tim točkama, zaključujemo da je $|g(x)| \geq C > 0$ za sve $x \in J$. $\square$

Korolar 3.1.15. *Pretpostavimo da je $ab < 1$, uzmimo $0 < \varepsilon < \frac{a}{2}$ tako da vrijedi $a + 2\varepsilon < \frac{1}{b}$ i izaberimo funkciju $g \in L^2(\mathbb{R})$ takvu da je supp $g \subseteq [0, a + 2\varepsilon], g(x) = 1$ za $x \in [\varepsilon, a + \varepsilon], g \in C^\infty(\mathbb{R})$, i $\|g\|_\infty = 1$. Tada je $G(g, a, b)$ bazni okvir za $L^2(\mathbb{R})$ s ogradama $\frac{1}{b}$ i $\frac{2}{b}$.*

Dokaz. Iz pretpostavki na ε i g lako slijedi da je $1 \leq G_0 \leq 2$. Tvrdnja sada slijedi iz teorema 3.1.8. □

Korolar 3.1.16. *Pretpostavimo da je g neprekidna funkcija s nosačem sadržanim u nekom intervalu I duljine $L > 0$. Tada je $G(g, a, b)$ Besselov niz za sve $a > 0$ i $0 < b \leq \frac{1}{L}$.*

Dokaz. Iz prethodnih tvrdnji i njihovih dokaza jasno je da je ograničenost odozgo funkcije G_0 dovoljna da niz bude Besselov. U dokazu korolara 3.1.14 vidjeli smo da su pretpostavke ovog korolara dovoljne za ograničenost odozgo. □

Do kraja poglavlja cilj nam je dokazati dovoljne uvjete na općenitu funkciju $g \in L^2(\mathbb{R})$ (dakle, bez ograničenja na nosač) i parametre $a, b > 0$ da niz $G(g, a, b)$ bude bazni okvir. No, prije toga ćemo dati neke nužne uvjete. Počinjemo s proširenjem "samo ako" dijela teorema 3.1.8 na sve $g \in L^2(\mathbb{R})$.

Teorem 3.1.17. *Pretpostavimo da su $g \in L^2(\mathbb{R})$ i $a, b > 0$ takvi da je $G(g, a, b)$ bazni okvir za $L^2(\mathbb{R})$ s ogradama A i B. Neka je G_0 kao u napomeni 3.1.9. Tada imamo*

$$Ab \leq G_0(x) \leq Bb, \text{ za g.s. } x \in \mathbb{R}. \tag{3.6}$$

Specijalno, $g \in L^\infty(\mathbb{R})$.

Dokaz. Neka je $f \in L^2(\mathbb{R})$ proizvoljna ograničena funkcija kojoj je nosač sadržan u intervalu I duljine $\frac{1}{b}$. Tada je jasno $fT_{na}\overline{g} \in L^2(I)$. Kako je $(\sqrt{b}e^{2\pi imbx})_{m\in\mathbb{Z}}$ ONB za $L^2(I)$, potpuno isto kao u dokazu teorema 3.1.8 dobivamo

$$b\sum_{m\in\mathbb{Z}}|\langle f, M_{mb}T_{na}g\rangle|^2 = \int_{-\infty}^{\infty}|f(x)g(x-na)|^2dx.$$

Koristeći donju ogradu baznog okvira dobivamo

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2G_0(x)dx &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)g(x-na)|^2dx \\ &= b\sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\langle f, M_{mb}T_{na}g\rangle|^2 \\ &\geq bA\|f\|^2.\end{aligned} \tag{3.7}$$

Zaključujemo, za svaku ograničenu funkciju $f \in L^2(I)$ imamo

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 (G_0(x) - bA) dx \geq 0. \tag{3.8}$$

Kada bi vrijedilo $G_0(x) < bA$ na nekom skupu $E \subseteq I$ takvom da je $\lambda(E) > 0$, uvrštavanjem funkcije $\mathbb{1}_E$ u (3.8) dobivamo kontradikciju. Ograničenost odozgo dobivamo potpuno analogno, uvrštavanjem gornje ograde baznog okvira $G(g, a, b)$ u (3.7). Zbog $|g| \leq G_0$ i upravo dokazanog, očito je $g \in L^\infty(\mathbb{R})$. □

Korolar 3.1.18. *Pretpostavimo da su $g \in L^2(\mathbb{R})$ i $a, b > 0$ takvi da je $G(g, a, b)$ bazni okvir za $L^2(\mathbb{R})$ s ogradama A i B, te operatorom analize U. Tada je*

(a) $Aab \leq \|g\|^2 \leq Bab$.

(b) Ako je $G(g, a, b)$ Parsevalov bazni okvir, tada je $\|g\| = ab$.

(c) $0 < ab \leq 1$.

(d) $\langle g, (U^*U)^{-1} g \rangle = ab$.

(e) $G(g, a, b)$ je Rieszova baza ako i samo ako je $ab = 1$.

Dokaz. (a) Kako je funkcija G_0 a-periodična i kako je na intervalu $[0, a]$ jednaka funkciji $|g|$, integriranjem po $[0, a]$ iz (3.6) dobivamo

$$Aab \leq \int_0^a \sum_{n \in \mathbb{Z}} |g(x - na)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2 dx = \|g\|^2.$$

Drugu nejednakost dobivamo potpuno analogno.

(b) Slijedi direktno iz (a) jer imamo $A = B = 1$.

(c) Iz propozicije 3.1.6 slijedi da je $G((U^*U)^{-\frac{1}{2}} g, a, b)$ Parsevalov, a iz (b) tada dobivamo $\|(U^*U)^{-\frac{1}{2}} g\|^2 = ab$. Kako je norma svakog vektora baznog okvira (štoviše, svakog vektora Besselovog niza, vidi propoziciju 2.1.5) manja od (operatorske) norme operatora analize, zaključujemo da je $ab \leq 1$.

(d) Operator $(U^*U)^{-\frac{1}{2}}$ je hermitski, pa iz $\|(U^*U)^{-\frac{1}{2}} g\|^2 = ab$ slijedi

$$\langle g, (U^*U)^{-1} g \rangle = \langle (U^*U)^{-\frac{1}{2}} g, (U^*U)^{-\frac{1}{2}} g \rangle = \|(U^*U)^{-\frac{1}{2}} g\|^2 = ab.$$

(e) Zbog teorema 1.4.12, $G(g, a, b)$ je Rieszova baza ako i samo ako je pridruženi Parsevalov bazni okvir $G((U^*U)^{-\frac{1}{2}} g, a, b)$ Rieszova baza. No, u ovom slučaju je $G((U^*U)^{-\frac{1}{2}} g, a, b)$ nužno ONB pa imamo

$$1 = \|(U^*U)^{-\frac{1}{2}} g\|^2 = \langle g, (U^*U)^{-1} g \rangle = ab,$$

pri čemu zadnja jednakost slijedi iz tvrdnje (d). □

Napomena 3.1.19. *Uvjet $ab \leq 1$ je nužan, ali ne i dovoljan da bi $G(g, a, b)$ bio bazni okvir. Da bismo to vidjeli, uzmimo $b = 1$ i $\frac{1}{2} < a < 1$ i promotrimo sistem $G(\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2}]}, a, 1)$. Uočimo, za bilo koje $m, n \in \mathbb{Z}$ imamo*

$$\langle \mathbb{1}_{[\frac{1}{2},a]}, M_m T_{na} \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2}]} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_{[\frac{1}{2},a]} e^{2\pi i m x} \mathbb{1}_{[na,\frac{1}{2}+na]} = 0,$$

jer je presjek ova 2 intervala najviše jedna točka, dakle sigurno je mjere 0. Drugim riječima, $\mathbb{1}_{[\frac{1}{2},a]} \perp M_m T_{na} \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2}]}$ za sve $m, n \in \mathbb{Z}$. Iz ovoga zaključujemo da sistem $G(\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2}]}, a, 1)$ nije fundamentalan, pa onda nije ni bazni okvir za $L^2(\mathbb{R})$.

Vrijednost $\frac{1}{ab}$ se zove gustoća Gaborovog sistema $(M_{mb}T_{na}g)_{m,n\in\mathbb{Z}}$. Za $\frac{1}{ab} = 1$ kažemo da je kritična ili Nyquistova gustoća.

Korolar 3.1.20. *Pretpostavimo da su $g \in L^2(\mathbb{R})$ i $a, b > 0$ takvi da je $G(g, a, b)$ bazni okvir za $L^2(\mathbb{R})$. Tada vrijedi $g, \hat{g} \in L^\infty(\mathbb{R})$.*

Dokaz. U teoremu 3.1.17 smo dokazali da je $g \in L^\infty(R)$. Kako je Fourierova transformacija unitaran operator na $L^2(\mathbb{R})$, zaključujemo da je i $(\widehat{M_{mb}T_{na}}g)_{m,n\in\mathbb{Z}}$ bazni okvir za $L^2(\mathbb{R})$. Nadalje, iz teorema 1.5.11 imamo

$$\widehat{M_{mb}T_{na}}g = T_{mb}\widehat{T_{na}}g = T_{mb}M_{-na}\hat{g}, \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}.$$

Zbog napomene 3.1.2 zaključujemo da je i $(M_{mb}T_{na}\hat{g})_{m,n\in\mathbb{Z}}$ bazni okvir za $L^2(\mathbb{R})$. Ponovnom primjenom teorema 3.1.17 dobivamo da je i $\hat{g} \in L^\infty(\mathbb{R})$. □

Sada navodimo niz tehničkih rezultata neophodnih za dokaze teorema o dovoljnim uvjetima.

Lema 3.1.21. *Neka su $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, $a, b > 0$ i $k, l \in \mathbb{Z}$ proizvoljni i fiksni. Tada red*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x - na - \frac{l}{b})\overline{g(x - na - \frac{k}{b})}$$

konvergira apsolutno za g.s $x \in \mathbb{R}$ i definira a-periodičku funkciju. Nadalje, funkcija

$$x \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left| f(x - na - \frac{l}{b})\overline{g(x - na - \frac{k}{b})} \right|$$

se nalazi u prostoru $L^1([0, a])$.

Dokaz. Za $k \in \mathbb{Z}$ definirajmo niz

$$g_k(x) = \left(g(x - na - \frac{k}{b})\right)_{n\in\mathbb{Z}}, x \in \mathbb{R}. \tag{3.9}$$

Želimo dokazati da je $g_k(x) \in \ell^2(\mathbb{Z})$ za sve $k \in \mathbb{Z}$ i g.s. $x \in \mathbb{R}$. Imamo

$$\begin{aligned}\int_0^a \sum_{n\in\mathbb{Z}} |g(x - na - \frac{k}{b})|^2 dx &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^a |g(x - na - \frac{k}{b})|^2 dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |g(x - \frac{k}{b})|^2 dx \\ &= \|T_{\frac{k}{b}} g\|^2 \\ &= \|g\|^2,\end{aligned} \tag{3.10}$$

dakle, integral na lijevoj strani je konačan, iz čega možemo zaključiti da je

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |g(x - na - \frac{k}{b})|^2 < \infty, \text{ za g.s. } x.$$

Sada za proizvoljne $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ i $k, l \in \mathbb{Z}$ nizovi $f_l(x)$ i $g_k(x)$ su u ℓ^2 pa za g.s. $x \in \mathbb{R}$ imamo

$$\langle f_l(x), g_k(x)\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x - na - \frac{l}{b})\overline{g(x - na - \frac{k}{b})}.$$

Štoviše, iz Cauchy-Schwarzove nejednakosti u ℓ^2 primijenjene na $|f_l(x)|$ i $|g_k(x)|$ lako slijedi da ovaj red konvergira i apsolutno za g.s. $x \in \mathbb{R}$. Zadnju tvrdnju dobivamo analogno kao u (3.10). □

Ako u prethodnoj lemi uzmemo $f = g$ i $l = 0$ dobivamo:

Korolar 3.1.22. *Neka su $g \in L^2(\mathbb{R})$ i $a, b > 0$. Tada za svaki $k \in \mathbb{Z}$ red*

$$G_k(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} g(x - na)\overline{g(x - na - \frac{k}{b})}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{3.11}$$

konvergira apsolutno g.s., a funkcija

$$x \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left| g(x - na)\overline{g(x - na - \frac{k}{b})} \right|$$

se nalazi u prostoru $L^1([0, a])$.

Napomena 3.1.23. *U daljnjim razmatranjima, oznaka G_k će se odnositi na funkcije definirane s (3.11). Uočimo, za $k = 0$ dobivamo upravo funkciju G_0 iz dokaza teorema 3.1.8.*

Lema 3.1.24. *Neka su $f, q \in L^2(\mathbb{R})$ i $a, b > 0$. Za dani $n \in \mathbb{Z}$ definirajmo*

$$F_n(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(x - \frac{k}{b})\overline{g(x - na - \frac{k}{b})}. \tag{3.12}$$

Tada je $F_n(x)$ dobro definirana za g.s. x i nalazi se u prostoru $L^1([0, \frac{1}{b}])$. Nadalje, za bilo koji $m \in \mathbb{Z}$ imamo

$$\langle f, M_{mb}T_{na}g\rangle = \int_0^{\frac{1}{b}} F_n(x)e^{-2\pi imbx}dx. \tag{3.13}$$

Specijalno, m-ti Fourierov koeficijent funkcije $F_n(x)$ s obzirom na ONB $(\sqrt{b}e^{2\pi imbx})_{m\in\mathbb{Z}}$ za $L^2([0, \frac{1}{b}])$ je

$$c_m = \sqrt{b}\langle f, M_{mb}T_{na}g\rangle \tag{3.14}$$

Dokaz. Zamjenom $n \leftrightarrow k$ u (3.12) dobivamo

$$F_k(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x - \frac{n}{b})\overline{g(x - ka - \frac{n}{b})}.$$

Iz leme 3.1.21 (uz zamjenu uloga a i $\frac{1}{b}$) slijedi da je $F_n(x)$ dobro definirana g.s., da pripadni red konvergira apsolutno g.s. i da je $F_n(x) \in Ł^1([0, \frac{1}{b}])$. Nadalje, imamo

$$\begin{aligned}
\langle f, M_{mb}T_{na}g\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x - na)}e^{-2\pi imbx}dx \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_0^{\frac{1}{b}} f(x - \frac{k}{b})\overline{g(x - na - \frac{k}{b})}e^{-2\pi imbx}dx \\
&= \int_0^{\frac{1}{b}} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(x - \frac{k}{b})\overline{g(x - na - \frac{k}{b})}\right)e^{-2\pi imbx}dx \\
&= \int_0^{\frac{1}{b}} F_n(x)e^{-2\pi imbx}dx.
\end{aligned}$$

Ako pomnožimo relaciju (3.13) s $\sqrt{b}$, vidimo da je desna strana jednaka $\langle F_n(x), \sqrt{b}e^{2\pi imbx}\rangle$, tj. vrijedi (3.14). □

Lema 3.1.25. *Neka je f ograničena izmjeriva funkcija s kompaktnim nosačem. Promotrimo proizvoljnu funkciju $g \in L^2(\mathbb{R})$ i funkcije G_k definirane u (3.11). Ako je $G_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$, onda je*

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\langle f, M_{mb}T_{na}g\rangle|^2 = \frac{1}{b}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{f(x)}f(x-\frac{k}{b})G_k(x)dx. \tag{3.15}$$

Dokaz. Za $n \in \mathbb{Z}$ promotrimo $\frac{1}{b}$-periodičnu funkciju $F_n(x)$ definiranu s (3.11). Prema prethodnoj lemi, $F_n \in L^1([0, \frac{1}{b}])$. Nadalje, kako f ima kompaktan nosač, za bilo koji $x \in \mathbb{R}$, $f(x - \frac{k}{b}) \neq 0$ za konačno mnogo k-ova. Štoviše , postoji konstanta C takva da za svaku točku x suma u definiciji ima najviše C sumanada. Kako je zbog esencijalne ograničenosti funkcije G_0 i g esencijalno ograničena, iz Cauchy-Schwarzove nejednakosti na ℓ^2 slijedi i da je F_n ograničena. Odavde pak slijedi da je $F_n \in L^2([0, \frac{1}{b}])$. Štoviše, funkcija

$$x \mapsto \sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|f(x-\frac{k}{b})\overline{g(x-na-\frac{k}{b})}\right| \in L^2([0, \frac{1}{b}]).$$

Zadnja tvrdnja leme 3.1.24 povlači, zbog Parsevalove jednakosti,

$$\frac{1}{b}\int_0^{\frac{1}{b}}|F_n(x)|^2dx = \sum_{m\in\mathbb{Z}}\left|\int_0^{\frac{1}{b}}F_n(x)e^{-2\pi imbx}dx\right|^2. \tag{3.16}$$

Zbog korolara 3.1.22 i činjenice da je f izmjeriva, ograničena i s kompaktnim nosačem, imamo

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{-\infty}^{\infty}|\overline{f(x)}f(x-\frac{k}{b})|\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|g(x-na)\overline{g(x-na-\frac{k}{b})}\right|dx < \infty. \tag{3.17}$$

Sada imamo sve što nam je potrebno za opravdavanje zamjene sume i integrala u računu koji slijedi. Imamo

$$
\begin{aligned}
\sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\langle f, M_{mb}T_{na}f\rangle|^2 &= \frac{1}{b}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_0^{\frac{1}{b}}|F_n(x)|^2dx \\
&= \frac{1}{b}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_0^{\frac{1}{b}}\sum_{l\in\mathbb{Z}}\overline{f(x-\frac{l}{b})}g(x-na-\frac{l}{b})F_n(x)dx \\
&= \frac{1}{b}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{f(x)}g(x-na)F_n(x)dx \\
&= \frac{1}{b}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{f(x)}g(x-na)\sum_{k\in\mathbb{Z}}f(x-\frac{k}{b})\overline{g(x-na-\frac{k}{b})} \\
&= frac1b\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{f(x)}f(x-\frac{k}{b})G_k(x)dx.
\end{aligned}
$$

Pritom prva jednakost slijedi iz (3.13) i (3.16), a u drugoj jednakosti smo iskoristili

$$
|F_n(x)|^2 = \overline{F_n(x)}F_n(x) = \sum_{l\in\mathbb{Z}}\overline{f(x-\frac{l}{b})}g(x-na-\frac{l}{b})F_n(x).
$$

□

Lema 3.1.26. *Neka je $f \in L^2(\mathbb{R})$ ograničena izmjeriva funkcija s kompaktnim nosačem. Pretpostavimo da je za $g \in L^2(\mathbb{R})$ i $a > 0$ funkcija $G_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$. Tada je*

$$
\left|\sum_{k\neq 0}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{f(x)}f(x-\frac{k}{b})G_k(x)dx\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\sum_{k\neq 0}|G_k(x)|dx. \tag{3.18}
$$

Dokaz. Najprije imamo

$$
\begin{aligned}
\sum_{k\neq 0}\left|T_{-\frac{k}{b}}G_k(x)\right| &= \sum_{k\neq 0}\left|T_{-\frac{k}{b}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}T_{na}g(x)\overline{T_{na+\frac{k}{b}}g(x)}\right| \\
&= \sum_{k\neq 0}\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}}T_{na-\frac{k}{b}}g(x)\overline{T_{na}g(x)}\right|.
\end{aligned}
$$

Ako zamijenimo k s $-k$, dobivamo

$$\begin{aligned}\sum_{k\neq 0}\left|T_{-\frac{k}{b}}G_k(x)\right| &= \sum_{k\neq 0}\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}}T_{na+\frac{k}{b}}g(x)\overline{T_{na}g(x)}\right| \\ &= \sum_{k\neq 0}\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}}\overline{T_{na+\frac{k}{b}}g(x)}T_{na}g(x)\right| \\ &= \sum_{k\neq 0}|G_k(x)|.\end{aligned} \tag{3.19}$$

Sada imamo

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k\neq 0}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{f(x)}f(x-\frac{k}{b})G_k(x)dx\right| &\leq \sum_{k\neq 0}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)||T_{\frac{k}{b}}f(x)||G_k(x)|dx \\ &= \sum_{k\neq 0}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\sqrt{|G_k(x)|}|T_{\frac{k}{b}}f(x)|\sqrt{|G_k(x)|}dx\end{aligned}$$

(kako f ima kompaktni nosač, zaključujemo da su $|f(x)|\sqrt{|G_k(x)|}$ i $|T_{\frac{k}{b}}f(x)|\sqrt{|G_k(x)|}$ u $L^2(\mathbb{R})$ pa možemo iskoristiti Cauchy-Schwarzovu nejednakost)

$$\leq \sum_{k\neq 0}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2|G_k(x)|\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|T_{\frac{k}{b}}f(x)|^2|G_k(x)|\right)^{\frac{1}{2}}$$

(sada koristimo Cauchy-Schwarzovu nejednakost na $\ell^2(\mathbb{Z})$)

$$\leq \left(\sum_{k\neq 0}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2|G_k(x)|\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k\neq 0}\int_{-\infty}^{\infty}|T_{\frac{k}{b}}f(x)|^2|G_k(x)|\right)^{\frac{1}{2}}$$

(mijenjamo $x-\frac{k}{b}$ s x' kojeg radi jednostavnosti označavamo s x)

$$\begin{aligned}&\leq \left(\sum_{k\neq 0}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2|G_k(x)|\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k\neq 0}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2|T_{-\frac{k}{b}}G_k(x)|\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\sum_{k\neq 0}|G_k(x)|\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\sum_{k\neq 0}|G_k(x)|\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\sum_{k\neq 0}|G_k(x)|,\end{aligned}$$

pri čemu predzadnja nejednakost slijedi iz (3.19).

□

Sada napokon možemo iskazati i dokazati tri teorema koji nam daju dovoljne uvjete na g, a i b da sistem $G(g, a, b)$ bude bazni okvir na $L^2(\mathbb{R})$.

Teorem 3.1.27. *Neka su $g \in L^2(\mathbb{R})$ i $a, b > 0$ takvi da postoje konstante A' i B' sa svojstvima*

$$A' \leq G_0(x) \leq B' \text{ za g.s. } x \in \mathbb{R} \tag{3.20}$$

i

$$\sum_{k\neq 0} \|G_k\|_\infty < A'. \tag{3.21}$$

Tada je $(M_{mb}T_{na}g)_{m,n\in\mathbb{Z}}$ bazni okvir za $L^2(\mathbb{R})$.

Dokaz. Dovoljno je dokazati tvrdnju za neki gust podskup od $L^2(\mathbb{R})$. Mi ćemo uzeti skup svih izmjerivih ograničenih funkcija s kompaktnim nosačem. Pretpostavimo dakle da je f izmjeriva, ograničena i s kompaktnim nosačem. Imamo

$$\begin{aligned}
\sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\langle f, M_{mb}T_{na}g\rangle|^2 &\leq \frac{1}{b} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 G_0(x) dx + \frac{1}{b} \left| \sum_{k\neq 0} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)} f(x - \frac{k}{b}) G_k(x) dx \right| \\
&\leq \frac{1}{b} \|f\|^2 \|G_0\|_\infty + \frac{1}{b} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \sum_{k\neq 0} |G_k(x)| dx \\
&\leq \frac{1}{b} B' \|f\|^2 + \frac{1}{b} A' \|f\|^2 \\
&= \frac{1}{b} (A' + B') \|f\|^2,
\end{aligned}$$

pri čemu prva nejednakost slijedi iz leme 3.1.25, druga iz leme 3.1.26, a treća iz pretpostavki teorema. Za drugu nejednakost, uočimo da iz (3.18) slijedi

$$\sum_{k\neq 0} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)} f(x - \frac{k}{b}) G_k(x) dx \geq - \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \sum_{k\neq 0} |G_k(x)| dx.$$

Sada zbog leme 3.1.25 i pretpostavki teorema imamo

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\langle f, M_{mb}T_{na}g\rangle|^2 \geq \|f\|^2 \left(A' - \sum_{k\neq 0} \|G_k\|_\infty \right).$$

□

Teorem 3.1.28. *Neka su $g \in L^2(\mathbb{R})$ i $a > 0$ takvi da postoje konstante A' i B' koje zadovoljavaju (3.20). Pretpostavimo još da vrijedi*

$$\lim_{b \to 0} \sum_{k \neq 0} \|G_k\|_\infty = 0. \tag{3.22}$$

Tada postoji $b_0 > 0$ takav da je $(M_{mb}T_{na}g)_{m,n \in \mathbb{Z}}$ bazni okvir za $L^2(\mathbb{R})$ i to za sve $0 < b < b_0$.

Dokaz. Kao i u prethodnom teoremu, dovoljno je tvrdnju dokazati za izmjerive, ograničene funkcije s kompaktnim nosačem, pa neka je f proizvoljna takva. Zbog (3.20), isto kao u prethodnom dokazu dobivamo

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\langle f, M_{mb}T_{na}g \rangle|^2 \leq \frac{1}{b} \left(B' + \sum_{k \neq 0} \|G_k\|_\infty \right) \|f\|^2.$$

S druge strane, zbog (3.20) i (3.18) imamo

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\langle f, M_{mb}T_{na}g \rangle|^2 \geq \frac{1}{b} \left(A' - \sum_{k \neq 0} \|G_k\|_\infty \right) \|f\|^2.$$

Sada zbog (3.22) možemo naći b_0 takav da za bilo koji $0 < b < b_0$ vrijedi $\sum_{k \neq 0} \|G_k\|_\infty < A'$. □

Teorem 3.1.29. *Neka su $g \in L^2(\mathbb{R})$ i $a, b > 0$ takvi da vrijedi*

$$B := \frac{1}{b} \sup_{x \in [0,a]} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |G_k(x)| < \infty. \tag{3.23}$$

Tada je $(M_{mb}T_{na}g)_{m,n \in \mathbb{Z}}$ Besselov niz s Besselovom ogradom B. Ako još dodatno vrijedi

$$A := \frac{1}{b} \inf_{x \in [0,a]} \left(G_0(x) - \sum_{k \neq 0} |G_k(x)| \right) > 0 \tag{3.24}$$

onda je $(M_{mb}T_{na}g)_{m,n \in \mathbb{Z}}$ bazni okvir za $L^2(\mathbb{R})$ s ogradama A i B.

Dokaz. Ponovo pretpostavljamo da je f izmjeriva, omeđena i da ima kompaktni nosač. Iz leme 3.1.25 slijedi

$$\begin{aligned}
\sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\langle f, M_{mb}T_{na}g\rangle|^2 &= \frac{1}{b}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{f(x)}f(x-\frac{k}{b})G_k(x)dx \\
&\leq \frac{1}{b}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2G_0(x)dx + \frac{1}{b}\left|\sum_{k\neq 0}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{f(x)}f(x-\frac{k}{b})G_k(x)dx\right| \\
&\leq \frac{1}{b}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\left(G_0(x)+\sum_{k\neq 0}|G_k(x)|\right)dx \text{ (zbog (3.18))} \\
&= \frac{1}{b}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\sum_{k\in\mathbb{Z}}|G_k(x)|dx \\
&\leq \frac{1}{b}\left(\sup_{x\in[0,a]}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|G_k(x)|\right)\|f\|^2 \text{ (jer je } \sum_{k\in\mathbb{Z}}|G_k(x)| \text{ a-periodična)} \\
&\leq B\|f\|^2 \text{ (zbog (3.23)).}
\end{aligned}$$

Za drugu tvrdnju, isto kao u dokazu teorema 3.1.27 zaključujemo da vrijedi

$$\sum_{k\neq 0}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{f(x)}f(x-\frac{k}{b})G_k(x)dx \geq -\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\sum_{k\neq 0}|G_k(x)|dx,$$

iz čega pak zbog (3.15) i (3.24) dobivamo

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\langle f, M_{mb}T_{na}g\rangle|^2 \geq \|f\|^2\left(G_0(x)-\sum_{k\neq 0}\|G_k\|_\infty\right) \geq A\|f\|^2.$$

□

Za kraj navodimo jedan primjer koji nam ilustrira prednosti teorema 3.1.29 u odnosu na teorem 3.1.27.

Primjer 3.1.30. *Neka je*

$$g(x) = \begin{cases} x+1, x\in[0,1] \\ \frac{1}{2}x, \quad x\in[1,2] \\ 0, \quad \textit{inače} \end{cases}$$

i $a = b = 1$. *Vrijedi*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} g(x-n)g(x-n-k) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+1)^2, k=-1 \\ \frac{5}{4}(x+1)^2, k=0 \\ \frac{1}{2}(x+1)^2, k=1 \\ 0, \qquad\qquad \textit{inače.} \end{cases}$$

Odavde zaključujemo

$$G_0(x) = \frac{5}{4}(x+1)^2,\ x\in[0,1]\ \ i\ \sum_{k\neq 0}|G_k(x)| = (x+1)^2,\ x\in[0,1].$$

Očito vrijedi (3.20) uz $A' = \frac{5}{4}$ *i* $B' = 5$. *No, kako je* $\sum_{k\neq 0}\|G_k(x)\|_\infty = 2$, *uvjet (3.21) nije ispunjen i ne možemo iskoristiti teorem 3.1.27. S druge strane, uvjeti teorema 3.1.29 su ispunjeni pa možemo zaključiti da je* $(M_mT_ng)_{m,n\in\mathbb{Z}}$ *bazni okvir s ogradama* $\frac{1}{4}$ *i* 9.

Bibliografija

[1] D. Bakić, *Normirani prostori i Operatori na normiranim prostorima, skripta*, dostupno na https://web.math.pmf.unizg.hr/~bakic/np/NP_17_18.pdf(rujan 2018.).

[2] D. Bakić, *Notes on frames*, dostupno na https://web.math.pmf.unizg.hr/~bakic/frames/notes%20on%20frames%20final.pdf(rujan 2018.).

[3] O. Christensen, *An introduction to frames and Riesz bases*, Birkhäuser, 2002.

[4] C. Heil, *A Basis Theory Primer (Expanded Edition)*, Birkhäuser, 2011.

Sažetak

U ovom radu cilj nam je definirati i analizirati Gaborove bazne okvire na Hilbertovom prostoru $L^2(\mathbb{R})$. Da bismo to mogli napraviti, u 1. poglavlju najprije navodimo kratak pregled osnovnih rezultata iz opće teorije normiranih prostora, te definiciju i osnovna svojstva Fourierove transformacije. Zatim u 2. poglavlju definiramo bazne okvire na općenitom Hilbertovom prostoru i dokazujemo neka svojstva i karakterizacije, pri čemu su nam posebno važna rekonstrukcijska svojstva baznih okvira. Proučavajući rekonstrukcijska svojstva, prirodno nam se javlja pojam duala baznog okvira, pa je kraj 2. poglavlja posvećen upravo toj temi. Napokon, u 3. poglavlju definiramo Gaborove sisteme i specijalno, centralni objekt ovog rada, Gaborove bazne okvire, te koristeći do tada razvijenu teoriju proučavamo njihova svojstva. Najprije se ograničavamo na slučaj u kojem generirajuća funkcija ima kompaktan nosač, a nakon toga postepeno proširujemo razmatranja na proizvoljnu funkciju iz prostora $L^2(\mathbb{R})$. Na samom kraju rada, dokazujemo tri teorema u kojima su navedeni neki dovoljni uvjeti na generirajuću funkciju i parametre, uz koje je pripadni Gaborov sistem (Gaborov) bazni okvir za $L^2(\mathbb{R})$.

Summary

In this thesis our objecitve is to define and analyze Gabor frames on Hilbert space $L^2(\mathbb{R})$. In order to achieve this, in first chapter we list some fundemental results in general normed space theory, and we also have a brief discussion about Fourier transform. Afterwards, in the second chapter, we define frames in general Hilbert space and we prove some main properties and characterizations, most important of which are the reconstruction properties. While studying the reconstruction properties, the notion of dual frames naturally appears, thus, the end of the second chapter is dedicated to them. Finally, in the third chapter, we define Gabor systems, and in particular, the central objects of this thesis, the Gabor frames. Using the theory we developed earlier, we study some of their main properties. First, we limit ourselves on special case, in which the generating function of the system is compactly supported. Thereafter, we generalize these results on arbitrary functions in $L^2(\mathbb{R})$. At the very end of the thesis, we give some sufficient conditons on generating function and parameters, for which the according Gabor system is in fact a (Gabor) frame.

Životopis

Rođen sam 29. lipnja 1994. godine u Čakovcu, gdje sam 2009. godine završio osnovnu školu, a 2013. godine i gimnaziju. Iste godine upisao sam preddiplomski sveučilišni studij Matematika na zagrebačkom Prirodoslovno-matematičkom fakultetu, na kojem sam 2016. godine upisao diplomski studij Teorijska matematika. 2018. godine dobio sam nagradu Vijeća Matematičkog odsjeka Prirodoslovno-matematičkog fakulteta namijenjenu najboljim studentima završne godine diplomskog studija.