Karakterizacije unitarnih prostora

Cinek, Sanela

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Sanela Cinek

KARAKTERIZACIJE UNITARNIH PROSTORA

Diplomski rad

Voditelj rada:
Prof. dr. sc. Dijana Ilišević

Zagreb, rujan 2018.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Unitarni prostori su vektorski prostori na kojima se može definirati binarna operacija koju nazivamo skalarni produkt. U svakom unitarnom prostoru se iz skalarnog produkta može izvesti norma, odnosno svaki unitaran prostor je ujedno i normiran, a ono što je zanimljivo je da obrat ne vrijedi, tj. svaki normirani prostor ne mora biti i unitaran. U ovom radu ćemo proučiti koje uvjete zadovoljava norma izvedena iz skalarnog produkta, odnosno što karakterizira klasu unitarnih među normiranim prostorima.

Prvo poglavlje započinje definicijama i primjerima unitarnih i normiranih prostora, nakon čega je dana osnovna karakterizacija unitarnih prostora temeljena na jednakosti paralelograma koju su 1935. godine dokazali Jordan i von Neumann te time otvorili vrata brojnim drugim karakterizacijama.

Jezikom funkcijskih jednadžbi, jednakost paralelograma se poopćava kvadratnom funkcijskom jednadžbom koja se obrađuje u drugom poglavlju. Ona se pokazala važnim instrumentom u proučavanju unitarnih prostora, stoga su je proučavali brojni matematičari kao što su Jensen, Kurepa, Kannappan te već spomenuti Jordan i von Neumann. U ovom poglavlju bit će dano opće neprekidno rješenje kvadratne funkcijske jednadžbe kao i neka njezina poopćenja te će, s njom u vezi, biti razmatrani kvadratni funkcionali.

U trećem poglavlju bit će dano još nekoliko karakterizacija unitarnih prostora koje dobivamo poopćenjem jednakosti paralelograma i kvadratne funkcijske jednadžbe. Osnovna funkcijska jednadžba u ovom poglavlju je Frechétova, iz koje su izvedena daljnja poopćenja.

Poglavlje 1

Unitarni i normirani prostori

1.1 Unitarni prostori

Neka je V vektorski prostor nad $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Definicija 1.1.1. *Skalarni produkt na V je svaka funkcija $\langle \cdot , \cdot \rangle \colon V \times V \to \mathbb{F}$ koja ima sljedeća svojstva:*

(1) $\langle \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, w\rangle = \alpha_1 \langle v_1, w\rangle + \alpha_2 \langle v_2, w\rangle, \quad v_1, v_2, w \in V,\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F}$ *(linearnost u prvoj varijabli),*

(2) $\langle v, w\rangle = \overline{\langle w, v\rangle}, \quad v, w \in V$ *(hermitska simetričnost),*

(3) $\langle v, v\rangle \geq 0, \quad v \in V; \quad \langle v, v\rangle = 0 \iff v = 0$ *(pozitivna definitnost).*

Iz svojstava (1) i (2) slijedi svojstvo konjugirane linearnosti u drugoj varijabli:

$$\langle v, \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2\rangle = \overline{\beta_1}\langle v, w_1\rangle + \overline{\beta_2}\langle v, w_2\rangle, \qquad v, w_1, w_2 \in V,\ \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{F}.$$

Definicija 1.1.2. *Uređeni par vektorskog prostora V i skalarnog produkta $\langle \cdot , \cdot \rangle \colon V \times V \to \mathbb{F}$ zove se unitarni prostor.*

Navedimo neke primjere unitarnih prostora.

Primjer 1.1.3. *Neka je $V = \mathbb{R}^n$ za neki $n \in \mathbb{N}$ te neka su $v = (v_1, \ldots, v_n), w = (w_1, \ldots, w_n) \in V$. Definiramo:*

$$\langle v, w\rangle := \sum_{i=1}^{n} v_i w_i \ \in \mathbb{R}.$$

Uređeni par $(V, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ je standardni n-dimenzionalni realni unitarni prostor ili euklidski prostor.

Primjer 1.1.4. *Neka je* $V = \mathbb{C}^n$ *za neki* $n \in \mathbb{N}$ *te neka su* $v = (v_1, \dots, v_n), w = (w_1, \dots, w_n) \in V$. *Definiramo:*

$$\langle v, w \rangle := \sum_{i=1}^{n} v_i \overline{w_i} \ \in \mathbb{C}.$$

Uređeni par $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *je standardni n-dimenzionalni kompleksni unitarni prostor.*

Primjer 1.1.5. *Definirajmo skalarni produkt na vektorskom prostoru* $C([a, b], \mathbb{F})$ *svih neprekidnih funkcija sa segmenta* $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ *u* $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. *Za* $f, g \in C([a, b], \mathbb{F})$ *definiramo:*

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(t)\overline{g(t)} dt.$$

Uz ovako definiran skalarni produkt, dobivamo unitarni prostor $(C([a, b], \mathbb{F}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

U svakom unitarnom prostoru vrijedi sljedeća nejednakost:

Teorem 1.1.6. *(Buniakowsky-Cauchy-Schwarzova nejednakost) Neka je* $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *unitarni prostor. Tada za sve* $v, w \in V$ *vrijedi*

$$|\langle v, w \rangle|^2 \leq \langle v, v \rangle \langle w, w \rangle. \tag{1.1}$$

Znak jednakosti vrijedi ako i samo ako su v i w linearno ovisni.

Dokaz. Za $w = 0$ dokaz je trivijalan. Za $w \neq 0$ definiramo

$$e = \frac{w}{\langle w, w \rangle^{1/2}},$$

pa

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle v - \langle v, e \rangle e, v - \langle v, e \rangle e \rangle \\ &= \langle v, v \rangle - 2\langle v, e \rangle \langle e, v \rangle + |\langle v, e \rangle|^2 \\ &= \langle v, v \rangle - |\langle v, e \rangle|^2 \end{aligned}$$

povlači

$$|\langle v, e \rangle|^2 \leq \langle v, v \rangle,$$

odakle slijedi (1.1). Ako vrijedi znak jednakosti, tada je

$$v = \langle v, e \rangle e = \frac{1}{\langle w, w \rangle} \langle v, w \rangle w,$$

pa su v i w linarno ovisni. Obratno, ako je $v = \lambda w$ za neki nenul $\lambda \in \mathbb{F}$, tada je

$$\begin{aligned} |\langle v, w \rangle|^2 &= |\langle \lambda w, w \rangle|^2 = |\lambda \langle w, w \rangle|^2 = |\lambda|^2 \langle w, w \rangle \langle w, w \rangle = \\ &= \langle \lambda w, \lambda w \rangle \langle w, w \rangle = \langle v, v \rangle \langle w, w \rangle. \end{aligned}$$

□

1.2 Normirani prostori

Definicija 1.2.1. *Norma na vektorskom prostoru V je svaka funkcija $\|\cdot\|\colon V \to \mathbb{R}$ koja ima sljedeća svojstva:*

(1) $\|v\| \geq 0, \quad v \in V,$

(2) $\|v\| = 0 \iff v = 0,$

(3) $\|\alpha v\| = |\alpha| \cdot \|v\|, \quad v \in V, \alpha \in \mathbb{F}$ *(homogenost),*

(4) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|, \quad v, w \in V$ *(nejednakost trokuta).*

Definicija 1.2.2. *Uređeni par vektorskog prostora V i norme $\|\cdot\|\colon V \to \mathbb{R}$ naziva se normirani prostor.*

Navedimo neke primjere normiranih prostora.

Primjer 1.2.3. *Konačnodimenzionalan prostor $\mathbb{F}^n$, $n \in \mathbb{N}$, možemo opskrbiti normom na sljedeće načine:*

- $(\mathbb{F}, |\cdot|)$, *gdje je $|\cdot|$ apsolutna vrijednost koja igra ulogu norme u polju;*
- $(\mathbb{F}^n, \|\cdot\|_2)$, *gdje je $\|(v_1, \cdots, v_n)\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |v_i|^2}$;*
- $(\mathbb{F}^n, \|\cdot\|_1)$, *gdje je $\|(v_1, \cdots, v_n)\|_1 = \sum_{i=1}^n |v_i|$;*
- $(\mathbb{F}^n, \|\cdot\|_\infty)$, *gdje je $\|(v_1, \cdots, v_n)\|_\infty = \max\{|v_i|\colon i = 1, \ldots, n\}$.*

Primjer 1.2.4. *Vektorski prostor svih neprekidnih realnih ili kompleksnih funkcija na segmentu $[a, b]$ možemo opskrbiti normom na sljedeće načine:*

- $(C[a, b], \|\cdot\|_2)$, *gdje je $\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt}$;*
- $(C[a, b], \|\cdot\|_1)$, *gdje je $\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt$;*
- $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$, *gdje je $\|f\|_\infty = \max\{|f(t)|\colon t \in [a, b]\}$.*

Propozicija 1.2.5. *Neka je $(V, \|\cdot\|)$ normirani prostor. Ako je (x_n) niz u V, a $x \in V$ takav da je $\lim_n \|x_n - x\| = 0$, tada je $\lim_n \|x_n\| = \|x\|$.*

Dokaz. Zbog nejednakosti trokuta je

$$| \, \|x_n\| - \|x\| \, | \leq \|x_n - x\| \longrightarrow 0,$$

odakle slijedi $\|x_n\| \longrightarrow \|x\|$. □

Propozicija 1.2.6. *Ako je* $\langle \cdot , \cdot \rangle \colon V \times V \to \mathbb{F}$ *skalarni produkt na* V*, onda je sa*

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle} \tag{1.2}$$

zadana norma na V.

Dokaz. Očito je da norma (1.2) zadovoljava aksiome (1)-(3) iz definicije 1.2.1. Aksiom (4) slijedi iz Buniakowsky-Cauchy-Scwarzove nejednakosti:

$$\begin{aligned}
\|v + w\|^2 &= \langle v + w, v + w\rangle \\
&= \langle v, v\rangle + \langle w, v\rangle + \langle v, w\rangle + \langle w, w\rangle \\
&\leq \langle v, v\rangle + 2|\langle v, w\rangle| + \langle w, w\rangle \\
&\leq \langle v, v\rangle + 2\sqrt{\langle v, v\rangle\langle w, w\rangle} + \langle w, w\rangle \\
&= \|v\|^2 + 2\|v\|\,\|w\| + \|w\|^2 \\
&= (\|v\| + \|w\|)^2 .
\end{aligned}$$

□

Često se kaže da je norma $\|\cdot\|$ definirana sa (1.2) izvedena iz skalarnog produkta. Primijetimo da Buniakowsky-Cauchy-Scwarzovu nejednakost sada možemo zapisati u obliku

$$|\langle v, w\rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|, \quad v, w \in V.$$

1.3 Banachovi i Hilbertovi prostori

Definicija 1.3.1. *Neka je* $(V, \|\cdot\|)$ *normiran prostor. Niz* $(x_n, n \in \mathbb{N})$ *u* V *je konvergentan (po normi) ako postoji* $x_0 \in V$ *takav da niz brojeva* $n \mapsto \|x_n - x_0\|$ *konvergira nuli tj.*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists\, n(\epsilon) \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n(\epsilon) \Longrightarrow \|x_n - x_0\| < \epsilon.$$

Korolar 1.3.2. *Takav* x_0 *je jedinstven i pišemo* $x_0 = \lim_n x_n$.

Dokaz. Pretpostavimo da takav x_0 nije jedinstven. Neka $x_n \to x_0$ i $x_n \to x_0'$. Tada

$$\|x_0 - x_o'\| = \|(x_0 - x_n) + (x_n - x_0')\| \leq \|x_0 - x_n\| + \|x_n - x_0'\|$$

za $n \to \infty$ povlači $\|x_0 - x_0'\| = 0$, tj. dobivamo $x_0 = x_0'$, što je kontradikcija s našom pretpostavkom. □

Definicija 1.3.3. *Neka je* $(V, \|\cdot\|)$ *normiran prostor. Niz* $(x_n, n \in \mathbb{N})$ *u* V *je Cauchyjev ako*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n(\epsilon) \in \mathbb{N}, \forall n, m \in \mathbb{N},\ n, m \geq n(\epsilon) \Longrightarrow \|x_n - x_m\| < \epsilon.$$

Očito, zbog

$$\|x_n - x_m\| = \|(x_n - x) + (x - x_m)\| \leq \|x_n - x\| + \|x - x_m\|$$

je svaki konvergentan niz Cauchyjev.

Definicija 1.3.4. *Normirani prostor* $(V, \|\cdot\|)$ *je potpun ili Banachov ako je svaki Cauchyjev niz u* V *konvergentan. Potpun unitaran prostor naziva se Hilbertov prostor.*

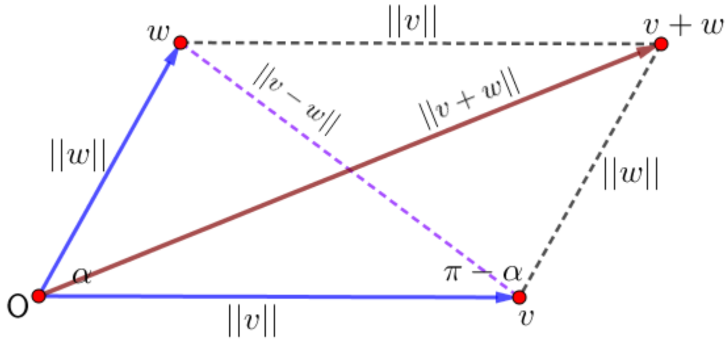
1.4 Jednakost paralelograma

Norma (1.2) zadovoljava tzv. jednakost paralelograma:

$$\| v + w \|^2 + \| v - w \|^2 = 2\,\|v\|^2 + 2\,\|w\|^2, \qquad v, w \in V. \tag{1.3}$$

Jednakost (1.3) dobije se jednostavnim računom:

$$\begin{aligned}
\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 &= \langle v + w, v + w\rangle + \langle v - w, v - w\rangle \\
&= \langle v, v\rangle + \langle v, w\rangle + \langle w, v\rangle + \langle w, w\rangle + \langle v, v\rangle - \langle v, w\rangle - \langle w, v\rangle + \langle w, w\rangle \\
&= 2\langle v, v\rangle + 2\langle w, w\rangle \\
&= 2\,\|v\|^2 + 2\,\|w\|^2.
\end{aligned}$$



Slika 1. Jednakost paralelograma

Naziv jednakost paralelograma u vezi je s činjenicom da je u svakom paralelogramu zbroj kvadrata duljina dijagonala jednak dvostrukom zbroju kvadrata duljina njegovih stranica, što uz oznake kao na slici slijedi iz kosinusovog poučka:

$$\begin{aligned}
\|v + w\|^2 &= \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\|v\|\,\|w\| \cos(\pi - \alpha) \\
&= \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\|v\|\,\|w\| \cos\alpha, \\
\|v - w\|^2 &= \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\|v\|\,\|w\| \cos\alpha,
\end{aligned}$$

odakle zbrajanjem dobivamo jednakost paralelograma.

Slično kao i za (1.3), može se provjeriti da u realnom prostoru vrijedi:

$$\langle v, w\rangle = \frac{1}{4}\,\|v+w\|^2 - \frac{1}{4}\,\|v-w\|^2, \tag{1.4}$$

a u kompleksnom prostoru:

$$\langle v, w\rangle = \frac{1}{4}\,\|v+w\|^2 - \frac{1}{4}\,\|v-w\|^2 + \frac{i}{4}\,\|v+iw\|^2 - \frac{i}{4}\,\|v-iw\|^2. \tag{1.5}$$

Jednakosti (1.4) i (1.5) zovu se polarizacijske formule te one pokazuju da se u svakom unitarnom prostoru skalarni produkt može rekonstruirati iz izvedene norme.

Jednakost paralelograma (1.3) je uvjet koji ispunjava svaka norma izvedena iz skalarnog produkta, a ono što je zanimljivo je da je taj uvjet i dovoljan, o čemu govori sljedeći teorem:

Teorem 1.4.1 (Jordan – von Neumann)**.** *Neka je* $(V, \|\cdot\|)$ *normiran prostor. Tada postoji skalarni produkt* $\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle$ *na* V *takav da za svaki* $v \in V$ *vrijedi* $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$ *ako i samo ako norma* $\|\cdot\|$ *zadovoljava jednakost paralelograma. U tom slučaju taj je skalarni produkt jedinstven i dan je polarizacijskom formulom* (1.4)*, odnosno* (1.5)*, ovisno o tome je li prostor* V *realan ili kompleksan.*

Dokaz. Iz jednakosti paralelograma slijede sljedeće jednakosti:

$$\begin{aligned}
\|x_1+x_2+y\|^2 + \|x_1-x_2+y\|^2 &= 2\left(\|x_1+y\|^2 + \|x_2\|^2\right), && (1.6)\\
\|x_1+x_2-y\|^2 + \|x_1-x_2-y\|^2 &= 2\left(\|x_1-y\|^2 + \|x_2\|^2\right), && (1.7)\\
\|x_1+x_2+y\|^2 + \|x_2-x_1+y\|^2 &= 2\left(\|x_2+y\|^2 + \|x_1\|^2\right), && (1.8)\\
\|x_1+x_2-y\|^2 + \|x_2-x_1-y\|^2 &= 2\left(\|x_2-y\|^2 + \|x_1\|^2\right). && (1.9)
\end{aligned}$$

Izračunamo li $\frac{1}{2}((1.6) - (1.7) + (1.8) - (1.9))$, uzimajući u obzir da je $\|a-b\|^2 = \|b-a\|^2$, dobivamo sljedeću jednakost:

$$\|x_1+x_2+y\|^2 - \|x_1+x_2-y\|^2 = \|x_1+y\|^2 - \|x_1-y\|^2 + \|x_2+y\|^2 - \|x_2-y\|^2.$$

Definiramo li skalarni produkt sa (1.4), dobivamo

$$4\langle x_1+x_2, y\rangle = 4\langle x_1, y\rangle + 4\langle x_2, y\rangle,$$

odakle slijedi aditivnost u prvoj varijabli. Primijetimo da iz definicije (1.4) slijedi simetričnost i pozitivna definitnost. Preostaje dokazati homogenost, a za to nam je potrebna sljedeća lema:

Lema 1.4.2. *Svaka aditivna funkcija $f\colon V \to \mathbb{R}$, gdje je V realan vektorski prostor, je racionalno homogena funkcija. Ako je f i neprekidna, tada je ona (realno) homogena funkcija.*

Dokaz. Ako je f aditivna funkcija, matematičkom indukcijom se lako dokaže da je $f(nx) = nf(x)$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Isto tako, $f(0) = 0$ jer je

$$f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0) = 2f(0).$$

Sada imamo

$$f(x) + f(-x) = f(x - x) = f(0) = 0,$$

pa je $f(-x) = -f(x)$, iz čega slijedi $f(-nx) = -nf(x)$, odnosno $f(mx) = mf(x)$ za sve $m \in \mathbb{Z}$. Uvrstimo li $\frac{x}{m}$ umjesto x, dobivamo

$$f\left(\frac{x}{m}\right) = \frac{f(x)}{m},$$

i konačno

$$f\left(\frac{mx}{n}\right) = mf\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{m}{n}f(x),$$

iz čega slijedi racionalna homogenost funkcije f.

Za svaki $\lambda \in \mathbb{R}$ postoji niz $(q_n) \subseteq \mathbb{Q}$ sa svojstvom $\lim\limits_n q_n = \lambda$. Ako je f neprekidna, tada je

$$f(\lambda x) = f(\lim_n q_n x) = \lim_n f(q_n x) = \lim_n q_n f(x) = \lambda f(x),$$

pa je f homogena funkcija. □

Neka je $\lambda \in \mathbb{R}$. Ako je $(q_n) \subseteq \mathbb{Q}$ takav da je $\lim\limits_n q_n = \lambda$, tada je $\lim\limits_n (q_n x + y) = \lambda x + y$ za sve $x, y \in V$, pa propozicija 1.2.5 povlači $\lim\limits_n \|q_n x + y\| = \|\lambda x + y\|$ za sve $x, y \in V$. Slijedi

$$\begin{aligned}
\langle \lambda x, y\rangle &= \frac{1}{4}\|\lambda x + y\|^2 - \frac{1}{4}\|\lambda x - y\|^2 \\
&= \lim_n \left(\frac{1}{4}\|q_n x + y\|^2 - \frac{1}{4}\|q_n x - y\|^2\right) \\
&= \lim_n \langle q_n x, y\rangle \\
&= \lim_n q_n \langle x, y\rangle \\
&= \lambda\langle x, y\rangle.
\end{aligned}$$

Ovim je dokaz gotov ako je V realan.

Ako je V kompleksan, skalarni produkt definiramo sa (1.5). Primijetimo da smo dokazali da je preslikavanje $(x, y) \mapsto \frac{1}{4}\|x+y\|^2 - \frac{1}{4}\|x-y\|^2$ realno linearno u obje varijable. Kako je

$$\begin{aligned}\langle ix, y\rangle &= \frac{1}{4}\|ix+y\|^2 - \frac{1}{4}\|ix-y\|^2 + \frac{i}{4}\|ix+iy\|^2 - \frac{i}{4}\|ix-iy\|^2\\ &= \frac{i}{4}\|x+y\|^2 - \frac{i}{4}\|x-y\|^2 + \frac{1}{4}\|x-iy\|^2 - \frac{1}{4}\|x+iy\|^2\\ &= i\left(\frac{1}{4}\|x+y\|^2 - \frac{1}{4}\|x-y\|^2 + \frac{i}{4}\|x+iy\|^2 - \frac{i}{4}\|x-iy\|^2\right)\\ &= i\langle x, y\rangle,\end{aligned}$$

to za svaki $\lambda = \mu + i\nu \in \mathbb{C}$, $\mu, \nu \in \mathbb{R}$, imamo

$$\begin{aligned}\langle \lambda x, y\rangle &= \langle(\mu + i\nu)x, y\rangle = \langle \mu x, y\rangle + \nu\langle ix, y\rangle\\ &= \mu\langle x, y\rangle + i\nu\langle x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle,\end{aligned}$$

pa smo dokazali linearnost u prvoj varijabli. Iz (1.5) odmah slijede hermitska simetričnost i pozitivna definitnost. □

Primjer 1.4.3. *Norma $\|\cdot\|_2$ na $\mathbb{F}^n$ je izvedena iz skalarnog produkta, dok norme $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|_\infty$ nisu.*

Najprije pokažimo da je norma $\|\cdot\|_2$ izvedena iz skalarnog produkta. Neka su $v, w \in \mathbb{F}^n$, $v = (v_1, \ldots, v_n), w = (w_1, \ldots, w_n)$. Tada je

$$\begin{aligned}\|v+w\|_2^2 + \|v-w\|_2^2 &= \sum_{i=1}^n (v_i + w_i)^2 + \sum_{i=1}^n (v_i - w_i)^2\\ &= \sum_{i=1}^n {v_i}^2 + 2\sum_{i=1}^n v_i w_i + \sum_{i=1}^n {w_i}^2 + \sum_{i=1}^n {v_i}^2 - 2\sum_{i=1}^n v_i w_i + \sum_{i=1}^n {w_i}^2\\ &= 2\sum_{i=1}^n {v_i}^2 + 2\sum_{i=1}^n {w_i}^2\\ &= 2\|v\|_2^2 + 2\|w\|_2^2,\end{aligned}$$

pa norma $\|\cdot\|_2$ zadovoljava jednakost paralelograma.

Neka je $v = (1, 0, 0, \ldots), w = (0, 1, 0, 0, \ldots)$. Tada je

$$\|v+w\|_1^2 + \|v-w\|_1^2 = 4 + 4 = 8,$$

ali je

$$2\|v\|_1^2 + 2\|w\|_1^2 = 2 + 2 = 4,$$

pa norma $\|\cdot\|_1$ *ne zadovoljava jednakost paralelograma, tj. nije izvedena iz skalarnog produkta. Za iste* v *i* w *imamo i*

$$\|v+w\|_\infty^2 + \|v-w\|_\infty^2 = 1 + 1 = 2,$$

ali je

$$2\|v\|_\infty^2 + 2\|w\|_\infty^2 = 2 + 2 = 4,$$

pa niti norma $\|\cdot\|_\infty$ *nije izvedena iz skalarnog produkta.*

Poglavlje 2

Kvadratna funkcijska jednadžba

2.1 Kvadratna funkcijska jednadžba kao poopćenje jednakosti paralelograma

Kvadratna funkcijska jednadžba je jednadžba oblika

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)+2f(y). \tag{2.1}$$

U teoremu 2.1.2 bit će dano opće neprekidno rješenje kvadratne funkcijske jednadžbe. Bez pretpostavke neprekidnosti vrijedi sljedeći teorem:

Teorem 2.1.1. *Neka* $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *zadovoljava kvadratnu funkcijsku jednadžbu* (2.1) *za sve* $x, y \in \mathbb{R}$. *Tada je*

$$f(rx)=r^2 f(x), \qquad r\in\mathbb{Q}, x\in\mathbb{R}.$$

Posebno,

$$f(r)=cr^2, \qquad r\in\mathbb{Q},$$

gdje je c proizvoljna konstanta.

Dokaz. Uvrštavanjem $x=y=0$ u (2.1) dobijemo

$$f(0)=0. \tag{2.2}$$

Zamijenimo li y sa $-y$ u (2.1) dobijemo

$$f(x-y)+f(x+y)=2f(x)+2f(-y). \tag{2.3}$$

Iz (2.1) i (2.3) slijedi da je $f(y)=f(-y)$ za sve $y\in\mathbb{R}$, pa zaključujemo da je f parna funkcija.

Sada dokažimo da je f kvadratna racionalno homogena funkcija. Uvrštavanjem $y = x$ u (2.1), dobijemo $f(2x) = 4f(x)$, odnosno

$$f(2x) = 2^2 f(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Slično

$$f(2x + x) + f(2x - x) = 2f(2x) + 2f(x),$$

odnosno

$$f(3x) = 2f(2x) + f(x) = 8f(x) + f(x),$$

te naposljetku

$$f(3x) = 3^2 f(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Pretpostavimo da za svaki prirodni broj $k \leq n$ vrijedi

$$f(kx) = k^2 f(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Obzirom da je

$$f(nx + x) + f(nx - x) = 2f(nx) + 2f(x),$$

imamo

$$\begin{aligned} f((n+1)x) &= 2f(nx) + 2f(x) - f((n-1)x) \\ &= 2n^2 f(x) + 2f(x) - (n^2 - 2n + 1)f(x) \\ &= (n^2 + 2n + 1)f(x) \\ &= (n+1)^2 f(x), \end{aligned}$$

pa iz aksioma matematičke indukcije slijedi

$$f(nx) = n^2 f(x), \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{2.4}$$

Sada dokažimo da (2.4) vrijedi i za sve $n \in \mathbb{Z}$. Ako je n negativan cijeli broj, tada je $-n$ prirodan. Uzimajući u obzir da je f parna funkcija, dobivamo

$$f(nx) = f(-(-n)x) = f(-nx) = (-n)^2 f(x) = n^2 f(x),$$

odnosno dokazali smo da (2.4) vrijedi za sve $n \in \mathbb{Z}$. Neka je sada r proizvoljan racionalan broj, odnosno

$$r = \frac{k}{n}, \qquad k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}.$$

Slijedi da je $k = rn$, pa imamo

$$k^2 f(x) = f(kx) = f(rnx) = n^2 f(rx),$$

odnosno dobivamo

$$f(rx) = \frac{k^2}{n^2} f(x) = r^2 f(x), \qquad r \in \mathbb{Q}, x \in \mathbb{R}. \tag{2.5}$$

Uvrštavanjem $x = 1$ u (2.5) dobijemo

$$f(r) = cr^2, \qquad r \in \mathbb{Q},$$

gdje je $c = f(1)$. □

Teorem 2.1.2. *Opće neprekidno rješenje kvadratne funkcijske jednadžbe* (2.1) *dano je sa*

$$f(x) = cx^2, \qquad x \in \mathbb{R},$$

gdje je c proizvoljna konstanta.

Dokaz. Neka je f neprekidno rješenje kvadratne funkcijske jednadžbe (2.1). Za svaki $x \in \mathbb{R}$ postoji niz racionalnih brojeva (r_n) takav da je $\lim_n r_n = x$. Kako f zadovoljava (2.1), prema teoremu 2.1.1 imamo

$$f(r_n) = cr_n^2, \qquad n \in \mathbb{Z}. \tag{2.6}$$

Sada iskoristimo neprekidnost funkcije f da dobijemo

$$f(x) = f(\lim_n r_n) = \lim_n f(r_n) = \lim_n \left(cr_n^2\right) = c \lim_n r_n^2 = c \left(\lim_n r_n\right)^2 = cx^2.$$

Zaključujemo

$$f(x) = cx^2, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

□

2.2 Kvadratni funkcionali

U 1.4 smo dokazali da je, za normu koja zadovoljava jednakost paralelograma, funkcija

$$(x, y) \mapsto \frac{1}{4}\|x + y\|^2 - \frac{1}{4}\|x - y\|^2$$

biaditivna. Sljedeća lema je poopćenje te tvrdnje.

Lema 2.2.1. *Neka je G grupa, a $\mathbb{F}$ polje. Ako funkcija $f\colon G \to \mathbb{F}$ zadovoljava* (2.1)*, onda je funkcija definirana sa:*

$$H(x, y) = f(x + y) - f(x - y)$$

biaditivna (tj. aditivna i u prvoj i u drugoj varijabli) i vrijedi $H(x, x) = 4f(x)$ za svaki $x \in G$. Nadalje, ako je G komutativna, tada je H simetrična, tj. $H(y, x) = H(x, y)$ za sve $x, y \in G$.

Dokaz. Iz (2.1) za $x = y = 0$ dobivamo $f(0) = 0$, a za $x = 0$ dobivamo $f(-y) = f(y)$, pa je f parna funkcija. Slijedi $H(0, y) = 0$ za svaki y. Iz definicije funkcije H je jasno da je $H(x, 0) = 0$ za svaki x. Za $x, y, u \in G$ imamo:

$$\begin{aligned} H(x+y, 2u) &= f(x+y+2u) - f(x+y-2u) \\ &= f[(x+u)+(y+u)] + f[(x+u)-(y+u)] \\ &\quad - f[(x-u)+(y-u)] - f[(x-u)-(y-u)] \\ &= [2f(x+u)+2f(y+u)] - [2f(x-u)+2f(y-u)] \\ &= 2H(x,u) + 2H(y,u). \end{aligned}$$

Odavde za $y = 0$ i $x = z$ dobivamo $H(z, 2u) = 2H(z, u)$, što za $z = x + y$ povlači:

$$H(x+y, u) = H(x,u) + H(y,u), \qquad x, y, u \in G.$$

Na isti način se dobiva i aditivnost funkcije u drugoj varijabli:

$$\begin{aligned} H(2u, x+y) &= f(2u+x+y) - f(2u-x-y) \\ &= f[(u+x)+(u+y)] + f[(u+x)-(u+y)] \\ &\quad - f[(u-x)+(u-y)] - f[-(u-x)+(u-y)] \\ &= [2f(u+x)+2f(u+y)] - [2f(u-x)+2f(u-y)] \\ &= 2H(u,x) + 2H(u,y), \end{aligned}$$

a zatim stavimo $y = 0$ i $x = z$, pa dobivamo $H(2u, z) = 2H(u, z)$, što za $z = x + y$ povlači:

$$H(u,x) + H(u,y) = H(u, x+y), \qquad x, y, u \in G.$$

Kako je $f(0) = 0$, to iz definicije funkcije H slijedi

$$H(x,x) = f(2x), \qquad x \in G.$$

No,

$$f(2x) = f(x+x) + f(x-x) = 2f(x) + 2f(x) = 4f(x).$$

Nadalje, ako je G komutativna, parnost funkcije f povlači

$$H(y,x) = f(y+x) - f(y-x) = f(x+y) - f(x-y) = H(x,y), \qquad x, y \in G.$$

□

Prema lemi 2.2.1, ako je $f\colon G \to \mathbb{F}$, gdje je G komutativna grupa, a $\mathbb{F}$ polje, postoji jedinstvena simetrična biaditivna funkcija $B\colon G \times G \to \mathbb{F}$ takva da je $B(x, x) = f(x)$ za svaki $x \in G$ i dana je sa

$$B(x,y) = \frac{1}{4}\left[f(x+y) - f(x-y)\right].$$

Neka je V vektorski prostor nad $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Ako je $B\colon V \times V \to \mathbb{F}$ funkcional koji je za $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ bilinearan (tj. linearan u obje varijable), a za $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ seskvilinearan (tj. linearan u prvoj i konjugirano linearan u drugoj varijabli), onda funkcional $q(x) = B(x, x)$ ima sljedeća svojstva:

$$q(x + y) + q(x - y) = 2q(x) + 2q(y), \quad x, y \in V; \tag{2.7}$$

$$q(\lambda x) = |\lambda|^2 q(x), \quad \lambda \in \mathbb{F}, x \in V. \tag{2.8}$$

Definicija 2.2.2. *Ako funkcional $q\colon V \to \mathbb{F}$ zadovoljava svojstva* (2.7) *i* (2.8)*, tada kažemo da je q kvadratni funkcional.*

Iz leme 2.2.1 slijedi:

Lema 2.2.3. *Neka je V realan vektorski prostor i $q\colon V \to \mathbb{R}$ kvadratni funkcional. Tada je sa*

$$B(x, y) = \frac{1}{4}\left[q(x + y) - q(x - y)\right] \tag{2.9}$$

definiran simetričan biaditivan funkcional sa svojstvom $q(x) = B(x, x)$ za svaki $x \in V$.

Propozicija 2.2.4. *Ako je V normirani prostor nad $\mathbb{R}$ i $q\colon V \to \mathbb{R}$ neprekidan kvadratni funkcional, tada je sa* (2.9) *definiran neprekidan simetričan bilinearan funkcional $B\colon V \times V \to \mathbb{R}$ sa svojstvom $B(x, x) = q(x)$ za svaki $x \in V$.*

Dokaz. Iz leme 2.2.3 slijedi da je funkcional B definiran sa (2.9) biaditivan. Odatle slijedi $B(\alpha x, y) = \alpha B(x, y)$ za sve $\alpha \in \mathbb{Q}$, $x, y \in V$. Za svaki $\alpha \in \mathbb{R}$ postoji niz (α_n) u $\mathbb{Q}$ sa svojstvom $\lim_n \alpha_n = \alpha$, a tada je $\lim_n \alpha_n x = \alpha x$ u normi. Odatle slijedi $B(\alpha x, y) = \alpha B(x, y)$ za sve $\alpha \in \mathbb{R}$, $x, y \in V$, pa je B linearan u prvoj varijabli. Zbog simetričnosti, B je bilinearan. $\square$

Teorem 2.2.5. *Neka je V kompleksan vektorski prostor i $q\colon V \to \mathbb{C}$ kvadratni funkcional. Tada je sa*

$$B(x, y) = \frac{1}{4}\left[q(x + y) - q(x - y)\right] + \frac{i}{4}\left[q(x + iy) - q(x - iy)\right] \tag{2.10}$$

definiran seskvilinearan funkcional i za njega vrijedi $q(x) = B(x, x)$ za svaki $x \in V$.

Dokaz. Najprije dokažimo jednu lemu.

Lema 2.2.6. *Neka je $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ aditivna funkcija. Ako je*

$$f(\lambda) = -|\lambda|^2 f\left(\frac{1}{\lambda}\right), \qquad \lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq 0,$$

onda je

$$f(\lambda) = f(i)\,\mathrm{Im}\,\lambda, \qquad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Dokaz. Za $\sigma \in [-1, 1]$ uzmimo $\tau \in \mathbb{R}$ tako da bude $\sigma^2 + \tau^2 = 1$. Stavimo $\lambda = \sigma + i\tau$. Tada je $|\lambda| = 1$, pa je

$$f(\sigma) + f(i\tau) = f(\lambda) = -|\lambda|^2 f\left(\overline{\lambda}\right) = -f(\sigma) + f(i\tau),$$

što povlači $f(\sigma) = 0$. Ako je $\sigma > 1$, onda je $\frac{1}{\sigma} < 1$, pa je $f(\sigma) = -\sigma^2 f\left(\frac{1}{\sigma}\right) = 0$. Dakle, za svaki $\sigma \in \mathbb{R}$ vrijedi $f(\sigma) = 0$. Za $\tau \in \langle 0, 1]$ uzmimo $\sigma \in \mathbb{R}$ takav da je $\sigma^2 + \tau^2 = \tau$ i stavimo $\lambda = \sigma + i\tau$. Tada je $|\lambda|^2 = \tau$, pa je

$$\begin{aligned} f(i\tau) &= f(\sigma) + f(i\tau) = f(\lambda) = -|\lambda|^2 f\left(\frac{1}{\lambda}\right) = -\tau f\left(\frac{\sigma - i\tau}{\sigma^2 + \tau^2}\right) \\ &= -\tau f\left(\frac{\sigma}{\sigma^2 + \tau^2}\right) + \tau f\left(\frac{i\tau}{\sigma^2 + \tau^2}\right) = \tau f(i). \end{aligned}$$

Ako je $\tau > 1$, onda je

$$f(i\tau) = -|i\tau|^2 f\left(\frac{1}{i\tau}\right) = \tau^2 f\left(i\frac{1}{\tau}\right) = \tau^2 \frac{1}{\tau} f(i) = \tau f(i).$$

Budući da je $f(i\tau) = \tau f(i)$ za svaki $\tau > 0$ i da je f aditivna funkcija, to je $f(i\tau) = \tau f(i)$ za svaki $\tau \in \mathbb{R}$. No tada je

$$f(\sigma + i\tau) = \tau f(i), \qquad \sigma, \tau \in \mathbb{R}.$$

□

Prema lemi 2.2.1, funkcional

$$S(x, y) = q(x + y) - q(x - y) \tag{2.11}$$

je biaditivan. No, tada je i funkcional B definiran sa (2.10) biaditivan jer je

$$B(x, y) = \frac{1}{4} S(x, y) + \frac{i}{4} S(x, iy).$$

Za $\lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq 0$, pomoću (2.8) dobivamo

$$\begin{aligned} S(\lambda x, y) &= q(\lambda x + y) - q(\lambda x - y) \\ &= |\lambda|^2 \left[q\left(x + \frac{y}{\lambda}\right) - q\left(x - \frac{y}{\lambda}\right)\right] = |\lambda|^2 S\left(x, \frac{y}{\lambda}\right) \\ &\Rightarrow \; B(\lambda x, y) = |\lambda|^2 B\left(x, \frac{y}{\lambda}\right). \end{aligned} \tag{2.12}$$

Sada je

$$\begin{aligned} 4B(ix, y) &= S(ix, y) + iS(ix, iy) = S(x, -iy) + iS(x, y) \\ &= i\left[S(x, y) - iS(x, -iy)\right] = i\left[S(x, y) + iS(x, iy)\right] \\ &= 4iB(x, y), \end{aligned}$$

pa je

$$B(ix, y) = iB(x, y). \tag{2.13}$$

Nadalje je

$$\begin{aligned} 4B(x, iy) &= S(x, iy) + iS(x, -y) = S(x, iy) - iS(x, y) \\ &= -i\left[S(x, y) + iS(x, iy)\right] = -4iB(x, y), \end{aligned}$$

odakle slijedi

$$B(x, iy) = -iB(x, y). \tag{2.14}$$

Za fiksne $x, y \in V$ funkcija $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definirana sa

$$f(\lambda) = B(\lambda x, y) - B(x, \lambda y)$$

je aditivna jer je B biaditivna. Također zbog (2.12),

$$-|\lambda|^2 f\left(\frac{1}{\lambda}\right) = -|\lambda|^2 B\left(\frac{x}{\lambda}, y\right) + |\lambda|^2 B\left(x, \frac{y}{\lambda}\right) = -B(x, \lambda y) + B(\lambda x, y) = f(\lambda).$$

Prema lemi 2.2.6 je $f(\lambda) = f(i)\,\mathrm{Im}\,\lambda$. Posebno je $f(\sigma) = 0$ za $\sigma \in \mathbb{R}$, što povlači

$$B(\sigma x, y) = B(x, \sigma y). \tag{2.15}$$

Ako je $\lambda = i\tau, \tau \in \mathbb{R}$, onda je

$$B(i\tau x, y) - B(x, i\tau y) = f(i\tau) = \tau f(i) = \tau\left[B(ix, y) - B(x, iy)\right],$$

što zajedno sa (2.13) i (2.14) daje $2iB(\tau x, y) = 2i\tau B(x, y)$, tj.

$$B(\tau x, y) = B(x, \tau y) = \tau B(x, y).$$

Konačno,

$$\begin{aligned} B\left((\sigma + i\tau)x, y\right) &= B(\sigma x, y) + B(i\tau x, y) = \sigma B(x, y) + \tau B(ix, y) \\ &= \sigma B(x, y) + i\tau B(x, y) = (\sigma + i\tau)B(x, y), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B\left(x, (\sigma + i\tau)y\right) &= B(x, \sigma y) + B(x, i\tau y) = \sigma B(x, y) - iB(x, \tau y) \\ &= \sigma B(x, y) - i\tau B(x, y) = (\sigma - i\tau)B(x, y), \end{aligned}$$

pa je B seskvilinearan funkcional. □

2.3 Neka poopćenja kvadratne funkcijske jednadžbe

Za početak dokažimo jednu lemu čija će se primjena očitovati u sljedećim rezultatima:

Lema 2.3.1. *Neka je G komutativna grupa, a $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Neka je $f\colon G \to \mathbb{F}$ funkcija koja zadovoljava tzv. Jensenovu funkcijsku jednadžbu*

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x), \qquad x, y \in G. \tag{2.16}$$

Tada postoje jedinstvena aditivna funkcija $g\colon G \to \mathbb{F}$ i jedinstven $c \in \mathbb{F}$ sa svojstvom

$$f(x) = g(x) + c, \qquad x \in G.$$

Posebno, ako je $f(0) = 0$, tada je f aditivna.

Dokaz. Zamijenimo međusobno x i y u (2.16) da dobijemo

$$f(x+y) + f(y-x) = 2f(y), \qquad x, y \in G. \tag{2.17}$$

U slučaju da je f neparna funkcija, zbrajanjem (2.16) i (2.17) te dijeljenjem sa 2 dobijemo

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \qquad x, y \in G,$$

pa zaključujemo da je f aditivna funkcija. U slučaju da je f parna funkcija, oduzimanjem (2.17) od (2.16) te dijeljenjem s 2 dobijemo

$$f(x) = f(y), \qquad x, y \in G,$$

pa zaključujemo da je u ovom slučaju f konstantna funkcija. Sada definiramo neparnu funkciju $g\colon G \to \mathbb{F}$ sa

$$g(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) - f(-x)\right), \qquad x \in G,$$

te parnu funkciju $h\colon G \to \mathbb{F}$ sa

$$h(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) + f(-x)\right), \qquad x \in G.$$

Funkcije g i h zadovoljavaju (2.16) te vrijedi

$$f(x) = g(x) + h(x), \qquad x \in G.$$

Prema dokazanome, g je aditivna, a h konstantna funkcija (postoji $c \in \mathbb{F}$ takav da je $h(x) = c$, za svaki $x \in G$.)

Dokažimo sada da su takva funkcija g i takva konstanta c jedinstvene. Neka su aditivna funkcija $g_0 \colon G \to \mathbb{F}$ i $c_0 \in \mathbb{F}$ takve da je $f(x) = g_0(x) + c_0$ za svaki $x \in G$. Tada je

$$g(x) - g_0(x) = c_0 - c, \qquad x \in G. \tag{2.18}$$

Uvrštavanjem $x = 0$ u (2.18) dobivamo $c_0 - c = g(0) - g_0(0)$. No, g i g_0 su aditivne funkcije, pa je $g(0) = g_0(0) = 0$ i stoga je $c_0 = c$. Slijedi $g(x) = g_0(x)$ za svaki $x \in G$. □

Jedno poopćenje kvadratne funkcijske jednadžbe (2.1) je

$$f_1(x+y) + f_2(x-y) = f_3(x) + f_4(y), \qquad x, y \in \mathbb{R}, \tag{2.19}$$

gdje su $f_1, f_2, f_3, f_4 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nepoznate funkcije. Za rješavanje funkcijske jednadžbe (2.19) bit će nam potrebna sljedeća lema:

Lema 2.3.2. *Opća rješenja $f, g, h \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcijske jednadžbe*

$$f(x+y) + f(x-y) = g(x) + h(y) + h(-y) \tag{2.20}$$

dana su sa

$$\begin{cases} f(x) = B(x,x) + \frac{1}{2}A(x) - \frac{b}{2} \\ g(x) = 2B(x,x) + A(x) - b - a \\ h(x) + h(-x) = 2B(x,x) + a, \end{cases} \tag{2.21}$$

gdje je $B \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ simetrična biaditivna funkcija, $A \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aditivna funkcija, a a i b su proizvoljni realni brojevi.

Dokaz. Uvrštavanjem $y = 0$ u (2.20), dobije se

$$g(x) = 2f(x) - 2h(0). \tag{2.22}$$

Sada koristeći (2.22), jednadžbu (2.20) možemo zapisati kao

$$f(x+y) + f(x-y) - 2f(x) = h(y) + h(-y) - 2h(0), \qquad x, y \in \mathbb{R}. \tag{2.23}$$

Uvrštavanjem $x = 0$ u (2.23) dobivamo

$$h(y) + h(-y) - 2h(0) = f(y) + f(-y) - 2f(0), \tag{2.24}$$

pa iz (2.23) i (2.24) slijedi

$$f(x+y) + f(x-y) - 2f(x) = f(y) + f(-y) - 2f(0). \tag{2.25}$$

Sada definiramo $B\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sa

$$2B(x,y) = f(x+y) - f(x) - f(y) + f(0), \qquad x,y \in \mathbb{R}. \tag{2.26}$$

Iz (2.26) i (2.25) slijedi

$$\begin{aligned}
& 2B(x+u,y) + 2B(x-u,y) \\
= \; & f(x+u+y) + f(x-u+y) - [f(x+u) + f(x-u)] - 2f(y) + 2f(0) \\
= \; & f(x+u+y) + f(x-u+y) - [2f(x) + f(u) + f(-u) - 2f(0)] - 2f(y) + 2f(0) \\
= \; & 2f(x+y) + f(u) + f(-u) - 2f(0) - [2f(x) + f(u) + f(-u) - 2f(0)] - 2f(y) + 2f(0) \\
= \; & 2f(x+y) - 2f(x) - 2f(y) + 2f(0) \\
= \; & 4B(x,y).
\end{aligned}$$

Stoga za sve $x,u,y \in \mathbb{R}$ imamo

$$B(x+u,y) + B(x-u,y) = 2B(x,y),$$

pa zaključujemo da za fiksni y funkcija $x \mapsto B(x,y)$ zadovoljava Jensenovu funkcijsku jednadžbu (2.16). Uvrštavanjem $x = 0$ u (2.26) dobivamo da je $B(0,y) = 0$, pa iz leme 2.3.1 zaključujemo da je funkcija $B(\cdot,y)$ aditivna u prvoj varijabli. Iz simetričnosti funkcije B slijedi da je aditivna i u drugoj varijabli. Stoga je $B\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ simetrična biaditivna funkcija. Sada uvrstimo $y = x$ u (2.26) i (2.25) da dobijemo

$$2B(x,x) = f(2x) - 2f(x) + f(0),$$

odnosno

$$2B(x,x) = f(x) + f(-x) - 2f(0). \tag{2.27}$$

Primijenimo (2.24) i zaključimo

$$h(x) + h(-x) = 2B(x,x) + a,$$

gdje je $a = 2h(0)$. Sada definiramo $l\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sa

$$l(x) = f(x) - f(-x), \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{2.28}$$

Primjenom (2.25) dobivamo

$$\begin{aligned}
l(x+y) + l(x-y) &= f(x+y) + f(x-y) - [f(-y-x) + f(y-x)] \\
&= 2f(x) + f(y) + f(-y) - 2f(0) - [2f(-x) + f(y) + f(-y) - 2f(0)] \\
&= 2l(x),
\end{aligned}$$

pa zaključujemo da i l zadovoljava Jensenovu funkcijsku jednadžbu. Kako je uz to i $l(0) = 0$, iz leme 2.3.1 slijedi da je l aditivna. Dakle,

$$f(x) - f(-x) = A(x), \tag{2.29}$$

gdje je $A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aditivna. Sada zbrajanjem (2.29) i (2.27) i dijeljenjem sa 2 dobivamo

$$f(x) = B(x, x) + \frac{1}{2}A(x) - \frac{b}{2},$$

gdje je $b = -2f(0)$, a iz (2.22) dobivamo

$$g(x) = 2B(x, x) + A(x) - b - a.$$

□

Korolar 2.3.3. *Opće rješenje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcijske jednadžbe*

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x) + f(y) + f(-y)$$

glasi

$$f(x) = B(x, x) + A(x),$$

gdje je $B\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ simetrična biaditivna funkcija, a $A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je aditivna funkcija.

Dokaz. Iz leme 2.3.2 slijedi

$$f(x) = B(x, x) + \frac{1}{2}A(x) - b = B(x, x) + \frac{1}{2}A(x) - b - \frac{a}{2}, \tag{2.30}$$

kao i

$$f(x) + f(-x) = 2B(x, x) + a. \tag{2.31}$$

Iz (2.30) slijedi $a = 0$. Uvrstimo li (2.30) u (2.31) dobivamo

$$2B(x, x) - 2b = 2B(x, x),$$

pa je i $b = 0$. Zamijenimo A sa $2A$ i zaključimo $f(x) = B(x, x) + A(x)$. □

Korolar 2.3.4. *Opće rješenje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcijske jednadžbe*

$$f(x + y + z) + f(x) + f(y) + f(z) = f(x + y) + f(y + z) + f(x + z), \qquad x, y, z \in \mathbb{R} \tag{2.32}$$

glasi

$$f(x) = B(x, x) + A(x),$$

gdje je $B\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ simetrična biaditivna funkcija, a $A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je aditivna funkcija.

Dokaz. Uvrštavanjem $x = y = z = 0$ u (2.32) dobivamo $f(0) = 0$. Zamijenimo li z sa $-y$ u (2.32) dobivamo

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + f(y) + f(-y), \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

Sada iz korolara 2.3.3 slijedi rješenje. □

Sada ćemo odrediti opće rješenje funkcijske jednadžbe (2.19):

Teorem 2.3.5. *Opće rješenje $f_1, f_2, f_3, f_4 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcijske jednadžbe* (2.19) *glasi*

$$\begin{cases} f_1(x) = \frac{1}{2}B(x,x) + \frac{1}{4}(A_1 + A_2)(x) + \left(a - \frac{b}{2}\right), \\ f_2(x) = \frac{1}{2}B(x,x) + \frac{1}{4}(A_1 - A_2)(x) - \left(a + \frac{b}{2}\right), \\ f_3(x) = B(x,x) + \frac{1}{2}A_1(x) - (b+c), \\ f_4(x) = B(x,x) + \frac{1}{2}A_2(x) + c, \end{cases} \tag{2.33}$$

gdje je $B \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ simetrična biaditivna funkcija, $A_1, A_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aditivne funkcije, a a, b i c su proizvoljne konstante.

Dokaz. Lako se provjeri da dane funkcije f_1, f_2, f_3, f_4 zadovoljavaju (2.19). Dokažimo da je to jedino rješenje funkcijske jednadžbe (2.19). Zamijenimo y sa $-y$ u (2.19) da dobijemo

$$f_1(x-y) + f_2(x+y) = f_3(x) + f_4(-y). \tag{2.34}$$

Zbrajanjem (2.34) i (2.19) dobijemo

$$g(x+y) + g(x-y) = 2f_3(x) + f_4(y) + f_4(-y), \tag{2.35}$$

gdje je

$$g(x) = f_1(x) + f_2(x), \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{2.36}$$

Slično, oduzimanjem (2.34) od (2.19) dobijemo

$$h(x+y) - h(x-y) = f_4(y) - f_4(-y), \tag{2.37}$$

gdje je

$$h(x) = f_1(x) - f_2(x), \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{2.38}$$

Sada riješimo sustav jednadžbi (2.35) i (2.37), što je ekvivalentno rješavanju funkcijske jednadžbe (2.19). Najprije riješimo (2.37). Definiramo $k \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sa

$$k(y) = f_4(y) - f_4(-y), \qquad y \in \mathbb{R}. \tag{2.39}$$

Tada (2.37) postaje

$$h(x+y) - h(x-y) = k(y), \qquad x, y \in \mathbb{R}. \tag{2.40}$$

Zamijenimo li y sa $-y$ u (2.39) ili (2.40), vidimo da je

$$k(y) = -k(-y), \tag{2.41}$$

odnosno k je neparna funkcija. Sada uvrstimo $y = x$ u (2.40) da dobijemo

$$h(2x) = k(x) + h(0). \tag{2.42}$$

Iz (2.40) zaključujemo da je

$$\begin{aligned} k(y+v) + k(y-v) &= h(x+y+v) - h(x-v-y) + h(x+y-v) - h(x+v-y) \\ &= h((x+v)+y) - h((x+v)-y) + h((x-v)+y) - h((x-v)-y) \\ &= 2k(y), \end{aligned}$$

pa k zadovoljava Jensenovu jednadžbu (2.16) te je $k(0) = 0$. Iz leme 2.3.1 slijedi da je k aditivna funkcija, odnosno

$$k(y) = A_1(y), \qquad y \in \mathbb{R}, \tag{2.43}$$

gdje je $A_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aditivna funkcija. Iz (2.43) i (2.42) dobijemo

$$h(x) = \frac{1}{2}A_1(x) + a, \tag{2.44}$$

gdje je $a = h(0)$. Sada se iz (2.38) i (2.44) dobije

$$f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{2}A_1(x) + a, \tag{2.45}$$

a iz (2.39) i (2.42) dobije se

$$f_4(y) - f_4(-y) = A_1(y). \tag{2.46}$$

Sada se vratimo na funkcijsku jednadžbu (2.35). Prema lemi 2.3.2 imamo

$$\begin{aligned} g(x) &= B(x,x) + \frac{1}{2}A_2(x) - \frac{b_1}{2}, && (2.47) \\ f_3(x) &= B(x,x) + \frac{1}{2}A_2(x) - \frac{(b_1 + a_1)}{2}, && (2.48) \\ f_4(x) + f_4(-x) &= 2B(x,x) + a_1. && (2.49) \end{aligned}$$

Iz (2.36), (2.38), (2.44) i (2.47) dobivamo

$$\begin{aligned}
2f_1(x) = g(x) + h(x) &= B(x,x) + \frac{1}{2}A_2(x) - \frac{b_1}{2} + \frac{1}{2}A_1(x) + a \\
&= B(x,x) + \frac{1}{2}(A_1 + A_2)(x) + \left(a - \frac{b_1}{2}\right), \\
2f_2(x) = g(x) - h(x) &= B(x,x) + \frac{1}{2}A_2(x) - \frac{b_1}{2} - \frac{1}{2}A_1(x) - a \\
&= B(x,x) + \frac{1}{2}(A_2 - A_1)(x) - \left(a + \frac{b_1}{2}\right).
\end{aligned}$$

Iz (2.46) i (2.49) dobivamo

$$2f_4(x) = 2B(x,x) + A_1(x) + a_1.$$

Zamijenimo A_1 i A_2 te stavimo a umjesto $\frac{a}{2}$, b umjesto $\frac{b_1}{2}$ i c umjesto $\frac{a_1}{2}$. □

Poglavlje 3

Još neke funkcijske jednadžbe koje karakteriziraju unitarne prostore

3.1 Frechétova funkcijska jednadžba

Frechétova funkcijska jednadžba glasi:

$$p(x+y+z) = p(x+y) - p(z) + p(y+z) - p(x) + p(z+x) - p(y). \tag{3.1}$$

Teorem 3.1.1. *Neka su G i H komutativne grupe i neka $p\colon G \to H$ zadovoljava funkcijsku jednadžbu* (3.1). *Tada p zadovoljava*

$$8p(x) = 4A(x) + B(x,x), \qquad x \in G, \tag{3.2}$$

gdje je $A\colon G \to H$ aditivna i $B\colon G \times G \to H$ biaditivna.

Dokaz. Uvrštavanjem $z = 0$ u (3.1), dobije se $p(0) = 0$. Za $z = -(x+y)$, dobije se

$$p(x+y) - p(-(x+y)) = p(x) - p(-x) + p(y) - p(-y). \tag{3.3}$$

Stavimo li

$$A(x) = p(x) - p(-x) \qquad x \in G,$$

iz (3.3) slijedi

$$A(x+y) = A(x) + A(y), \qquad x, y \in G,$$

pa je A aditivna. Uvrstimo li $z = -y$ u (3.1), dobijemo

$$p(x+y) + p(-y+x) = 2p(x) + p(y) + p(-y), \qquad x, y \in G. \tag{3.4}$$

Zamijenimo x sa $-x$ u jednadžbi (3.3), pa imamo:

$$p(-x+y)+p(-y-x)=2p(-x)+p(y)+p(-y), \qquad x,y\in G. \tag{3.5}$$

Zbrajanjem jednadžbi (3.4) i (3.5) dobije se:

$$q(x+y)+q(-x+y)=2q(x)+2q(y), \qquad x,y\in G, \tag{3.6}$$

gdje je

$$q(x)=p(x)+p(-x), \qquad x\in G.$$

Primijetimo da $p(0)=0$ povlači $q(0)=0$. Nadalje, uvrštavanjem $y=x$ u (3.6) dobije se $q(2x)=4q(x)$. Vrijedi:

$$2p(x)=q(x)+A(x), \qquad x\in G. \tag{3.7}$$

Kako je p rješenje od (3.1), slijedi da i q zadovoljava (3.1), tj. vrijedi

$$q(x+y+z)=q(x+y)-q(z)+q(y+z)-q(x)+q(z+x)-q(y), \qquad x,y,z\in G. \tag{3.8}$$

Definiramo $B\colon G\times G\to H$ sa

$$B(x,y)=q(x+y)-q(x-y), \qquad x,y\in G.$$

Primjenom (3.8) i parnosti funkcije q dobivamo:

$$\begin{aligned} B(x+y,z) &= q(x+y+z)-q(x+y-z) \\ &= q(y+z)-q(y-z)+q(z+x)-q(-z+x) \\ &= B(x,z)+B(y,z), \end{aligned}$$

odnosno, B je aditivna u prvoj varijabli. Zbog simetričnosti od B slijedi da je B biaditivna. Vrijedi $B(x,x)=q(2x)=4q(x)$. Konačno, iz (3.7) slijedi

$$8p(x)=4A(x)+B(x,x), \qquad x\in G.$$

Time je teorem dokazan.

□

Razmotrimo sada sljedeće poopćenje jednadžbe (3.1):

$$p(x+y+z)=r(x+y)-r(z)+s(y+z)-s(x)+t(z+x)-t(y), \qquad x,y,z\in G. \tag{3.9}$$

Teorem 3.1.2. *Neka su G i H komutativne grupe. Neka $p,r,s,t\colon G\to H$ zadovoljavaju funkcijsku jednadžbu* (3.9). *Opće rješenje jednadžbe* (3.9) *dano je sa:*

$$16p(x)=16(r(x)-a)=16(s(x)-b)=16(t(x)-c)=4A(x)+B(x,x), \qquad x\in G,$$

gdje je A aditivna, B biaditivna i a, b, c su konstante.

Dokaz. Uvrštavanjem $x = y = z = 0$ u (3.9) dobije se $p(0) = 0$. Uvrstimo li $y = z = 0$ u (3.9), dobije se

$$p(x) = r(x) - a - s(x) + b + t(x) - c \qquad x \in G, \tag{3.10}$$

gdje je $a = r(0)$, $b = s(0)$, $c = t(0)$. Uvrstimo li $z = 0$ u (3.9), dobije se

$$p(x+y) = r(x+y) - a + s(y) - s(x) + t(x) - t(y) \qquad x, y \in G. \tag{3.11}$$

Označimo

$$\alpha(x) = p(x) - r(x) + a \qquad x \in G.$$

Iz (3.10) slijedi

$$t(x) - s(x) = p(x) - r(x) + a - b + c, \qquad x \in G. \tag{3.12}$$

Uvrštavanjem (3.12) u (3.11) dobije se

$$p(x+y) = r(x+y) + p(x) - r(x) - p(y) + r(y) - a,$$

odnosno

$$\alpha(x+y) = \alpha(x) - \alpha(y), \qquad x, y \in G. \tag{3.13}$$

Uvrstimo li $x = 0$ i $y = 0$ u (3.13) dobije se $\alpha(0) = 0$, a uvrstimo li $x = 0$ u (3.13) zaključimo

$$2\alpha(y) = 0, \qquad y \in G,$$

odnosno

$$2p(x) = 2(r(x) - a), \qquad x \in G.$$

Analogno se dobije $2p(x) = 2(s(x) - b) = 2(t(x) - c)$. Uzmemo li ovo u obzir u (3.9), zaključujemo da je $2p(x)$ rješenje od (3.1), te iz teorema 3.1.1 imamo

$$16p(x) = 4A(x) + B(x, x),$$

gdje je A aditivna i B biaditivna. Time je teorem dokazan. □

3.2 Jednakost paralelepipeda

U prvom poglavlju smo vidjeli da je svaka norma koja zadovoljava jednakost paralelograma izvedena iz skalarnog produkta. Sljedeći rezultat je nešto složeniji, no također nam daje uvjet koji karakterizira klasu Hilbertovih prostora među realnim Banachovim prostorima, odnosno govori nam da je svaka potpuna norma na realnom prostoru koja zadovoljava tzv. jednakost paralelepipeda (3.14) izvedena iz skalarnog produkta. Jednakost paralelepipeda je poseban slučaj Frechétove funkcijske jednadžbe.

Teorem 3.2.1. *Svaki realni Banachov prostor* $(V, \|\cdot\|)$ *sa svojstvom*

$$\|x+y+z\|^2 = \|x+y\|^2 + \|y+z\|^2 + \|z+x\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 - \|z\|^2, \quad x, y, z \in V \tag{3.14}$$

je Hilbertov prostor i obrnuto.

Dokaz. Najprije dokažimo da svaka norma izvedena iz skalarnog produkta zadovoljava (3.14). Kako je $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$, imamo

$$\begin{aligned}
& \|x+y\|^2 + \|y+z\|^2 + \|z+x\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 - \|z\|^2 \\
= \ & \langle x+y, x+y\rangle + \langle y+z, y+z\rangle + \langle z+x, z+x\rangle - \langle x,x\rangle - \langle y,y\rangle - \langle z,z\rangle \\
= \ & \langle x+y, x+y\rangle + \langle y,y\rangle + \langle y,z\rangle + \langle z,y\rangle + \langle z,z\rangle + \langle z,z\rangle + \langle z,x\rangle + \langle x,z\rangle + \langle x,x\rangle \\
& -\langle x,x\rangle - \langle y,y\rangle - \langle z,z\rangle \\
= \ & \langle x+y, x+y\rangle + \langle x+y, z\rangle + \langle z, x+y\rangle + \langle z,z\rangle \\
= \ & \langle x+y+z, x+y+z\rangle,
\end{aligned}$$

pa (3.14) vrijedi.

Pretpostavimo da (3.14) vrijedi. Definiramo funkciju $q\colon V \to \mathbb{R}$ sa $q(x) = \|x\|^2$. Tada je $q(0) = 0$, q je parna i zadovoljava (3.1). Tada prema teoremu 3.1.1 imamo

$$q(x) = B(x,x) + A(x), \qquad x \in V,$$

gdje je B biaditivna i A aditivna. Kako je q parna funkcija,

$$-A(x) = A(-x) = q(-x) - B(-x,-x) = q(x) - B(x,x) = A(x),$$

pa je $A = 0$. Slijedi $q(x) = B(x,x)$.

Primijetimo da za sve $x, y \in V$ vrijedi

$$\begin{aligned}
B(x,y) &= \frac{1}{2}[q(x+y) - q(x) - q(y)] \\
&= \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2).
\end{aligned}$$

Ovdje je B biaditivna te za $t, s \in \mathbb{R}$, $x, y \in V$ vrijedi

$$\|tx+y\| = \|(t-s)x + sx + y\| \le |t-s|\,\|x\| + \|sx+y\|$$

odakle slijedi

$$|\,\|tx+y\| - \|sx+y\|\,| \le |t-s|\,\|x\|.$$

Neka je (r_n) niz racionalnih brojeva takav da $r_n \to t$ kada $n \to \infty$. Tada

$$|\,\|r_n x+y\| - \|tx+y\|\,| \le |r_n - t|\,\|x\| \ \to \ 0 \text{ za } n \ \to \ \infty,$$

odnosno,

$$\|r_n x + y\| \ \to \ \|tx + y\| \text{ kada } r_n \ \to \ t \text{ za } x, y \in V.$$

Budući da je B biaditivna, $B(r_n x, y) = r_n B(x, y)$ za $r_n \in \mathbb{Q},\ x, y \in V$, pa imamo

$$\begin{aligned} r_n B(x,y) &= B(r_n x, y) \\ &= \frac{1}{2}\left[\|r_n x + y\|^2 - \|r_n x\|^2 - \|y\|^2\right] \\ &\to \frac{1}{2}\left[\|tx + y\|^2 - \|tx\|^2 - \|y\|^2\right] \\ &= B(tx, y). \end{aligned}$$

Odavde slijedi $B(tx, y) = tB(x, y)$ za sve $t \in \mathbb{R},\ x, y \in V$, odnosno B je bilinearna.

Definiramo li $\langle x, y\rangle = B(x, y)$, tada je $(V, \langle\cdot\,,\,\cdot\rangle)$ unitaran (Hilbertov) prostor i vrijedi $\langle x, x\rangle = B(x, x) = q(x) = \|x\|^2$. □

Većina karakterizacija unitarnih prostora temelji se na jednakosti paralelograma i općenitije na kvadratnoj funkcijskoj jednadžbi (2.1). Sada promotrimo može li se jednakost paralelograma poopćiti. U trodimenzionalnom prostoru promatramo još jednu jednakost poznatu pod nazivom jednakost paralelepipeda:

$$\begin{aligned} & \|x+y+z\|^2 + \|x+y-z\|^2 + \|x-y+z\|^2 + \|x-y-z\|^2 \\ = \ & 2(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 + \|x+z\|^2 + \|x-z\|^2 + \|y+z\|^2 + \|y-z\|^2) \\ & -4(\|x\|^2 + \|y\|^2 + \|z\|^2), \qquad x, y, z \in V. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Pitanje koje logično slijedi je hoće li normirani prostor u kojem vrijedi jednakost paralelepipeda (3.15) biti unitaran?

Uvrštavanjem $y = x$ u (3.15) dobijemo

$$\|2x+z\|^2 + \|2x-z\|^2 = 4\|x+z\|^2 + 4\|x-z\|^2 - 6\|z\|^2. \tag{3.16}$$

Zamjenom z i $2z$ u (3.16) i uvrštavanjem $y = z$ u (3.15) dobijemo

$$\begin{aligned} 4\|x+z\|^2 + 4\|x-z\|^2 &= 4\|x+2z\|^2 + 4\|x-2z\|^2 - 24\|z\|^2 \\ &= 16\|x+z\|^2 + 16\|x-z\|^2 - 24\|x\|^2 - 24\|z\|^2, \end{aligned}$$

odnosno dobijemo $2\|x\|^2 + 2\|z\|^2 = \|x+z\|^2 + \|x-z\|^2$, tj. jednakost paralelograma. Slijedi da će normirani prostor u kojem vrijedi (3.15) zaista biti i unitaran.

Iz jednakosti paralelepipeda (3.15) dobijemo funkcijsku jednadžbu

$$\begin{aligned} & \phi(x+y+z) + \phi(x+y-z) + \phi(x-y+z) + \phi(x-y-z) \\ = \ & 2(\phi(x+y) + \phi(x-y) + \phi(x+z) + \phi(x-z) + \phi(y+z) + \phi(y-z)) \\ & -4(\phi(x) + \phi(y) + \phi(z)). \end{aligned} \tag{3.17}$$

Teorem 3.2.2. *Neka je V realni vektorski prostor. Neka $\phi : V \to \mathbb{R}$ zadovoljava funkcijsku jednadžbu* (3.17)*. Tada $q(x) = \phi(2x) - 16\phi(x)$ zadovoljava kvadratnu funkcijsku jednadžbu* (2.1).

Dokaz. Uvrštavanjem $-z$ umjesto z u (3.17) dobijemo $\phi(z) = \phi(-z)$ te zaključujemo da je ϕ parna. Uvrštavanjem $z = 0$ u (3.17) dobijemo $\phi(0) = 0$. Uvrstimo li $z = y$ u (3.17) dobijemo

$$\phi(x+2y)+\phi(x-2y) = 4\left[\phi(x+y) + \phi(x-y)\right] - 6\phi(x) - 8\phi(y) + 2\phi(2y), \qquad x, y \in V, \tag{3.18}$$

a uvrstimo li $z = x + y$ dobijemo

$$\begin{aligned} & \phi(2x+2y) + \phi(2x) + \phi(2y) \\ = \; & 2\phi(x+y) + 2\phi(x-y) + 2\phi(2x+y) + 2\phi(y) + 2\phi(x+2y) + 2\phi(x) \\ & -4\phi(x) - 4\phi(y) - 4\phi(x+y), \qquad x, y \in V, \end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned} \phi(2x+2y) \; + \; & \phi(2x) + \phi(2y) + 2\left[\phi(x+y) - \phi(x-y)\right] \\ + \; & 2\left[\phi(x) + \phi(y)\right] - 2\left[\phi(x+2y) + \phi(2x+y)\right] = 0, \qquad x, y \in V. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Zamijenimo li y sa $-y$ u (3.19) dobijemo

$$\begin{aligned} \phi(2x-2y) \; + \; & \phi(2x) + \phi(2y) + 2\left[\phi(x-y) - \phi(x+y)\right] \\ + \; & 2\left[\phi(x) + \phi(y)\right] - 2\left[\phi(x-2y) + \phi(2x-y)\right] = 0, \qquad x, y \in V. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Zbrajanjem (3.19) i (3.20) dobije se

$$\begin{aligned} \phi(2x-2y) \; + \; & \phi(2x+2y) + 2\phi(2x) + 2\phi(2y) + 4\phi(x) + 4\phi(y) \\ - \; & 2\phi(x-2y) - 2\phi(2x-y) - 2\phi(x+2y) - 2\phi(2x+y) = 0, \qquad x, y \in V. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Zamijenimo li x i y u (3.18) dobijemo

$$\phi(y+2x)+\phi(y-2x) = 4\left[\phi(x+y) + \phi(y-x)\right] - 6\phi(y) - 8\phi(x) + 2\phi(2x), \qquad x, y \in V. \tag{3.22}$$

Uvrštavanjem (3.22) i (3.18) u (3.21) dobijemo

$$\begin{aligned} \phi(2x+2y) \; + \; & \phi(2x-2y) - 2\phi(2x) - 2\phi(2y) \\ - \; & 16\phi(x+y) - 16\phi(x-y) + 32\phi(x) + 32\phi(y) = 0, \qquad x, y \in V. \end{aligned}$$

Definiranjem $q(x) = \phi(2x) - 16\phi(x)$ dobije se kvadratna funkcijska jednadžba (2.1) čime je teorem dokazan. □

Promotrimo sada još jedno poopćenje jednakosti paralelograma, tzv. jednakost četverokuta:

Teorem 3.2.3. *Neka je* $(V, \|\cdot\|)$ *normiran prostor. Tada je norma* $\|\cdot\|$ *izvedena iz skalarnog produkta ako i samo ako vrijedi*

$$\begin{aligned} & \|x_1 - x_2\|^2 + \|x_2 - x_3\|^2 + \|x_3 - x_4\|^2 + \|x_4 - x_1\|^2 \\ = \; & \|x_1 - x_3\|^2 + \|x_2 - x_4\|^2 + \|x_1 + x_3 - x_2 - x_4\|^2, \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \in V. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Dokaz. Neka je norma $\|\cdot\|$ izvedena iz skalarnog produkta. Tada ona zadovoljava jednakost paralelograma, a iz jednakosti paralelograma slijedi

$$\|x_1 - x_2 + x_3 - x_4\|^2 + \|x_1 - x_2 - (x_3 - x_4)\|^2 = 2\|x_1 - x_2\|^2 + 2\|x_3 - x_4\|^2, \tag{3.24}$$

$$\|x_1 - x_4 + x_3 - x_2\|^2 + \|x_1 - x_4 - (x_3 - x_2)\|^2 = 2\|x_1 - x_4\|^2 + 2\|x_2 - x_3\|^2. \tag{3.25}$$

Zbrajanjem (3.24) i (3.25) dobije se

$$\begin{aligned} & 2\|x_1 + x_3 - x_2 - x_4\|^2 + \|x_1 - x_2 - x_3 + x_4\|^2 + \|x_1 - x_4 - x_3 + x_2\|^2 \\ = \; & 2\|x_1 - x_2\|^2 + 2\|x_3 - x_4\|^2 + 2\|x_1 - x_4\|^2 + 2\|x_2 - x_3\|^2. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Ponovno, iz jednakosti paralelograma slijedi

$$\|x_1 - x_3 + x_2 - x_4\|^2 + \|x_1 - x_3 - (x_2 - x_4)\|^2 = 2\|x_1 - x_3\|^2 + 2\|x_2 - x_4\|^2. \tag{3.27}$$

Uvrštavanjem (3.27) u (3.26) dobivamo (3.23).

Neka sada norma $\|\cdot\|$ zadovoljava (3.23). Uvrštavanjem $x_2 = x_4 = 0$ u (3.23) dobivamo jednakost paralelograma, pa je norma $\|\cdot\|$ izvedena iz skalarnog produkta, čime je ovaj teorem dokazan. □

3.3 Još neka poopćenja jednakosti paralelograma

Uvrštavajući redom $x = u + 2v,\ y = v$ i $x = u + v,\ y = v$ u jednakost paralelograma te oduzimajući dobivene jednakosti dobije se

$$\|u + 3v\|^2 - 3\|u + 2v\|^2 + 3\|u + v\|^2 - \|u\|^2 = 0, \qquad u, v \in V. \tag{3.28}$$

Teorem 3.3.1. *Normirani prostor koji zadovoljava* (3.28) *je unitaran prostor.*

Dokaz. Zamjenom u sa $u - v$ u (3.28) dobijemo

$$\|u + 2v\|^2 - 3\|u + v\|^2 + 3\|u\|^2 - \|u - v\|^2 = 0. \tag{3.29}$$

Zamjenom u sa $u - 2v$ u (3.28) dobijemo

$$\|u - 2v\|^2 - 3\|u - v\|^2 + 3\|u\|^2 - \|u + v\|^2 = 0. \tag{3.30}$$

Zbrajanjem (3.29) i (3.30) dobijemo

$$\|u + 2v\|^2 + \|u - 2v\|^2 = 4\|u + v\|^2 + 4\|u - v\|^2 - 6\|u\|^2. \tag{3.31}$$

Zamjenom $2v$ sa v u (3.31) dobijemo

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = \|2u + v\|^2 + \|2u - v\|^2 - 6\|u\|^2, \tag{3.32}$$

a zamjenom u i v u (3.31) dobijemo

$$\|v + 2u\|^2 + \|v - 2u\|^2 = 4\|u + v\|^2 + 4\|v - u\|^2 - 6\|v\|^2. \tag{3.33}$$

Uvrštavanjem (3.33) u (3.32) dobije se

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 4\|u + v\|^2 + 4\|u - v\|^2 - 6\|v\|^2 - 6\|u\|^2,$$

odnosno dobije se jednakost paralelograma čime je ovaj teorem dokazan. □

Poopćenjem jednadžbe (3.28) dobije se funkcijska jednadžba

$$f(x + 3y) - 3f(x + 2y) + 3f(x + y) - f(x) = 0.$$

No, najprije riješimo jednu njoj srodnu jednadžbu:

Lema 3.3.2. *Neka je V realni vektorski prostor te neka $f\colon V \to \mathbb{R}$ zadovoljava*

$$f(x + 2y) = 3f(x + y) + f(x - y) - 3f(x), \qquad x, y \in V. \tag{3.34}$$

Tada vrijedi

$$f(x) = d + A(x) + q(x) = d + A(x) + B(x, x), \qquad x \in V, \tag{3.35}$$

gdje je d konstanta, A aditivna, q kvadratna, a B simetrična i biaditivna.

Dokaz. Zamijenimo x sa y u (3.34) da dobijemo

$$f(2x + y) = 3f(x + y) + f(y - x) - 3f(y), \qquad x, y \in V. \tag{3.36}$$

Uvrštavanjem $y = 0$ u (3.36) dobijemo

$$f(2x) = 3f(x) + f(-x) - 3f(0), \qquad x \in V. \tag{3.37}$$

Zamijenimo x sa $2x$ u (3.34):

$$f(2x+2y) = 3f(2x+y) + f(2x-y) - 3f(2x).$$

Sada iskoristimo (3.36) i (3.37) pa dobivamo

$$\begin{aligned} & 3f(x+y) + f(-x-y) - 3f(0) \\ = \; & 3\,(3f(x+y) + f(y-x) - 3f(y)) + 3f(x-y) + f(-y-x) - 3f(-y) \\ & -3\,(3f(x) + f(-x) - 3f(0)) \end{aligned}$$

i konačno

$$2f(x+y) + f(x-y) + f(y-x) = 3f(x) + f(-x) + 3f(y) + f(-y) + 4f(0). \tag{3.38}$$

Zamjenom y sa $-y$ u (3.38) te oduzimanjem dobivene jednadžbe od (3.38) dobivamo jednadžbu

$$A(y+x) + A(y-x) = 2A(y), \tag{3.39}$$

gdje je

$$A(x) = f(x) - f(-x).$$

Budući da je $A(0) = 0$, to za $y = 0$ dobivamo $A(x) + A(-x) = 0$, pa je A neparna funkcija. Sada iz (3.39) slijedi

$$A(x+y) - A(x-y) = 2A(y). \tag{3.40}$$

Za $y = x$ dobije se $A(2y) = 2A(y)$, pa (3.40) postaje $A(x+y) = A(x-y) + A(2y)$. Stavimo $u = x-y$ i $v = 2y$ te zaključimo $A(u+v) = A(u) + A(v)$, tj. A je aditivna funkcija. Vrijedi $f(-x) = f(x) - A(x)$. Primjenom ove formule na $x-y$, x i y u (3.38) dobivamo

$$2f(x+y) + 2f(x-y) - A(x-y) = 4f(x) - A(x) + 4f(y) - A(y) - 4f(0),$$

odnosno

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y) - 2f(0).$$

Stavimo li $q(x) = f(x) - \frac{1}{2}A(x) - f(0)$ tada je q kvadratni funkcional te vrijedi (3.35) □

Teorem 3.3.3. *Neka je V realni vektorski prostor. Pretpostavimo da $f\colon V \to \mathbb{R}$ zadovoljava*

$$f(u+3v) - 3f(u+2v) + 3f(u+v) - f(u) = 0, \qquad u, v \in V. \tag{3.41}$$

Tada vrijedi

$$f(x) = d + A(x) + q(x) = d + A(x) + B(x,x), \qquad x \in V, \tag{3.42}$$

gdje je d konstanta, A aditivna, q kvadratna, a B simetrična i biaditivna.

Dokaz. Uvrstimo li $u = x - y$ i $v = y$ u (3.41), dobivamo (3.34), pa tvrdnja teorema slijedi iz leme 3.3.2. □

Teorem 3.3.4. *Neka je V normirani prostor nad $\mathbb{R}$ te neka je funkcija $\phi\colon V^3 \to \mathbb{R}$ definirana sa*

$$\phi(x, y, z) = \|x + y + z\|^2 + \|x + y - z\|^2 - \|x - y + z\|^2 - \|x - y - z\|^2, \quad x, y, z \in V, \quad (3.43)$$

neovisna o z. Tada je V unitaran prostor.

Dokaz. Uvrstimo li $z = x + y$ u (3.43) dobijemo

$$\phi(x, y, x + y) = 4\|x + y\|^2 - 4\|x\|^2 - 4\|y\|^2,$$

a uvrstimo li u (3.43) $z = 0$ dobijemo

$$\phi(x, y, 0) = 2\|x + y\|^2 - 2\|x - y\|^2.$$

Kako je $\phi(x, y, x + y) = \phi(x, y, 0)$, to je

$$4\|x + y\|^2 - 4\|x\|^2 - 4\|y\|^2 = 2\|x + y\|^2 - 2\|x - y\|^2,$$

odakle dobivamo jednakost paralelograma, pa je V unitaran prostor. □

U sljedećem teoremu promatramo funkcijsku jednadžbu koja proizlazi iz (3.43).

Teorem 3.3.5. *Neka je V realni vektorski prostor, $q\colon V \to \mathbb{R}$, te neka je $\phi\colon V^3 \to \mathbb{R}$ definirana sa*

$$\phi(x, y, z) = q(x + y + z) + q(x + y - z) - q(x - y + z) - q(x - y - z), \quad x, y, z \in V, \quad (3.44)$$

neovisna o z. Tada postoje aditivna funkcija $A\colon V \to \mathbb{R}$, biaditivna funkcija $B\colon V^2 \to \mathbb{R}$ i $b \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$q(x) = B(x, x) + A(x) + b, \qquad x \in V.$$

Dokaz. Uvrstimo li $z = x + y$ u (3.44) dobijemo

$$\phi(x, y, x + y) = q(2(x + y)) + q(0) - q(2x) - q(-2y),$$

a uvrstimo li u (3.44) $z = x - y$ dobijemo

$$\phi(x, y, x - y) = q(2x) + q(2y) - q(2(x - y)) - q(0).$$

Izjednačavanjem dobijemo

$$q(2(x + y)) + q(0) - q(2x) - q(-2y) = q(2x) + q(2y) - q(2(x - y)) - q(0), \qquad (3.45)$$

odnosno, zamjenom $2x$ sa x i $2y$ sa y,

$$q(x+y)+q(x-y)=2q(x)+q(y)+q(-y)-2q(0). \tag{3.46}$$

Definiramo $A(x)=q(x)-q(-x)$. Zamijenimo li x i y u (3.46) te dobivenu jednadžbu oduzmemo od (3.46), dobivamo $A(x-y)=A(x)-A(y)$ za sve $x,y\in V$, pa je A aditivna funkcija. Sada definiramo $r(x)=q(-x)-q(0)$, pa iz (3.46) dobivamo

$$r(-x-y)+r(-x+y)=2r(-x)+2r(-y),$$

odnosno, nakon zamjene x sa $-x$ i y sa $-y$, kvadratnu funkcijsku jednadžbu. Lema 2.2.1 sada povlači egzistenciju biaditivne funkcije B sa svojstvom $B(x,x)=r(x)$. Konačno,

$$q(x)-q(0)=r(x)+A(x)=B(x,x)+A(x), \qquad x\in V.$$

□

Teorem 3.3.6. *Neka je V normirani prostor i neka je $\phi\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ neprekidna funkcija za koju vrijedi $\phi(0)=0$ i $\phi(1)=1$. Ako funkcija ϕ zadovoljava*

$$\phi(\|x+y\|)+\phi(\|x-y\|)=2\phi(\|x\|)+2\phi(\|y\|), \qquad x,y\in V, \tag{3.47}$$

tada je V unitaran prostor.

Dokaz. Dokažimo najprije da za sve $n\in\mathbb{N}$ i $x\in V$ vrijedi sljedeća jednakost:

$$\phi(n\|x\|)=n^2\phi(\|x\|).$$

Za $n=1$ očito vrijedi. Sada pretpostavimo da ta jednakost vrijedi za sve prirodne brojeve $1,2,\dots,n$ te provjerimo vrijedi li tada i za $n+1$. Iz (3.47) dobivamo

$$\begin{aligned}
\phi(\|nx+x\|)+\phi(\|nx-x\|) &= 2\phi(n\|x\|)+2\phi(\|x\|),\\
\phi\left((n+1)\|x\|\right)+\phi\left((n-1)\|x\|\right) &= 2n^2\phi(\|x\|)+2\phi(\|x\|),\\
\phi\left((n+1)\|x\|\right)+(n-1)^2\phi(\|x\|) &= 2n^2\phi(\|x\|)+2\phi(\|x\|),\\
\phi\left((n+1)\|x\|\right) &= n^2\phi(\|x\|)+2n\phi(\|x\|)+\phi(\|x\|),\\
\phi\left((n+1)\|x\|\right) &= (n+1)^2\phi(\|x\|),
\end{aligned}$$

pa tvrdnja slijedi iz aksioma matematičke indukcije. Zamijenimo li sada x sa $\frac{x}{n}$, dobivamo $\phi\left(\frac{1}{n}\|x\|\right)=\frac{1}{n^2}\phi(\|x\|)$, odnosno za svaki pozitivan racionalan broj r i za svaki $x\in V$ dobivamo $\phi(r\|x\|)=r^2\phi(\|x\|)$. Kako je ϕ neprekidna, imamo $\phi(t\|x\|)=t^2\phi(\|x\|)$ za $t>0,\ t\in\mathbb{R},\ x\in V$. Izaberemo li x takav da je $\|x\|=1$, dobivamo $\phi(t)=t^2\phi(1)=t^2$ jer je $\phi(1)=1$. Sada (3.47) postaje jednakost paralelograma pa je V unitaran prostor. □

Teorem 3.3.7. *Neka je V vektorski prostor nad $\mathbb{R}$ i neka funkcije $\phi, \psi\colon V \to \mathbb{R}$ zadovoljavaju funkcijsku jednadžbu*

$$\sum_{i=1}^{n} \phi(x_i - \overline{x}) = \sum_{i=1}^{n} \phi(x_i) - n\psi(\overline{x}), \quad x_1, x_2, \ldots, x_n \in V, \quad \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \quad n \geq 3. \tag{3.48}$$

Tada je

$$\begin{aligned} \phi(x) &= q(x) + A(x) + c = B(x,x) + A(x) + c, \\ \psi(x) &= q(x) + A(x) = B(x,x) + A(x), \qquad x \in V, \end{aligned}$$

gdje je q kvadratna, A aditivna, B biaditivna i c konstanta.

Dokaz. Stavimo li $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = x$ u (3.48), dobivamo

$$\psi(x) = \phi(x) - \phi(0), \qquad x \in V. \tag{3.49}$$

Sada uvrštavanjem (3.49) u (3.48) dobivamo

$$\sum_{i=1}^{n} \phi(x_i - \overline{x}) = \sum_{i=1}^{n} \phi(x_i) - n\phi(\overline{x}) + n\phi(0). \tag{3.50}$$

Neka je n paran broj, $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$. Uvrstimo li $x_1 = \cdots = x_k = x$, $x_{k+1} = \cdots = x_{2k} = y$ u (3.50), dobivamo

$$\phi\left(\frac{x-y}{2}\right) + \phi\left(\frac{y-x}{2}\right) = \phi(x) + \phi(y) - 2\phi\left(\frac{x+y}{2}\right) + 2\phi(0). \tag{3.51}$$

Neka je sada n neparan broj, $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$. Uvrstimo li $x_1 = \cdots = x_k = x$, $x_{k+1} = \cdots = x_{2k} = y$, $x_{2k+1} = \frac{x+y}{2}$ u (3.50), dobivamo

$$\begin{aligned} k\phi\left(\frac{x-y}{2}\right) + k\phi\left(\frac{y-x}{2}\right) + \phi(0) &= k\phi(x) + k\phi(y) + \phi\left(\frac{x+y}{2}\right) \\ &\quad -(2k+1)\phi\left(\frac{x+y}{2}\right) + (2k+1)\phi(0). \end{aligned} \tag{3.52}$$

Zamijenimo li x sa $2x$ i y sa $2y$ u (3.51), dobivamo

$$2\phi(x+y) + \phi(x-y) + \phi(y-x) = \phi(2x) + \phi(2y) + 2\phi(0). \tag{3.53}$$

Sada za svaki $x \in V$ definiramo

$$2q(x) = \phi(x) + \phi(-x) - 2\phi(0), \tag{3.54}$$

tako da (3.53) sada glasi

$$\phi(2x) + \phi(2y) = 2q(x - y) + 2\phi(x + y). \tag{3.55}$$

Sada stavimo $u = x + y$ i $v = x - y$ te dobijemo

$$\phi(u + v) + \phi(u - v) = 2\phi(u) + 2q(v), \qquad u, v \in V. \tag{3.56}$$

Primijetimo da je q parna i $q(0) = 0$. Zamjenom u sa $-u$ u (3.56) dobijemo

$$\phi(-u + v) + \phi(-u - v) = 2\phi(-u) + 2q(v). \tag{3.57}$$

Zbrajanjem (3.57) i (3.56) dobivamo

$$\phi(v - u) + \phi(u + v) + \phi\,(-(u + v)) + \phi\,(-(v - u)) = 2\phi(-u) + 2\phi(u) + 4q(v). \tag{3.58}$$

Uvrštavanjem (3.54), odnosno $\phi(x) + \phi(-x) = 2q(x) + 2\phi(0)$ u (3.58) dobivamo

$$q(u + v) + q(u - v) = 2q(u) + 2q(v). \tag{3.59}$$

Oduzimanjem (3.57) od (3.56) dobivamo jednadžbu

$$A(u + v) + A(u - v) = 2A(u), \tag{3.60}$$

gdje je

$$A(u) = \frac{1}{2}\phi(u) - \frac{1}{2}\phi(-u), \qquad u \in V. \tag{3.61}$$

Primijetimo da je $A(0) = 0$. Uvrstimo li $v = u$ u (3.60), dobivamo

$$A(2u) = 2A(u), \qquad u \in V, \tag{3.62}$$

a uvrstimo li $u = x + y$ i $v = x - y$ u (3.60), dobivamo

$$A(2x) + A(2y) = 2A(x + y), \qquad x, y \in V. \tag{3.63}$$

Iz (3.62) i (3.63) slijedi aditivnost funkcije A. Iz (3.61) slijedi

$$\phi(-x) = \phi(x) - 2A(x),$$

što uvrstimo u (3.54) i zaključimo

$$\phi(x) = q(x) + A(x) + \phi(0), \qquad x \in V.$$

Iz (3.49) slijedi

$$\psi(x) = q(x) + A(x), \qquad x \in V.$$

Prema (3.59) je q kvadratni funkcional, pa lema 2.2.3 povlači egzistenciju biaditivne funkcije B sa svojstvom $B(x, x) = A(x)$ za svaki $x \in V$. □

Teorem 3.3.8. *Neka je V normirani prostor nad $\mathbb{R}$. Pretpostavimo da $\phi, \psi \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ zadovoljavaju funkcijsku jednadžbu*

$$\sum_{i=1}^{n} \phi(\|x_i - \overline{x}\|) = \sum_{i=1}^{n} \phi(\|x_i\|) - n\psi(\|\overline{x}\|), \tag{3.64}$$

gdje je $x_1, \ldots, x_n \in V$, $\overline{x} = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$, $n \geq 2$. Tada je

$$\phi(\|x\|) = B(x, x) + c, \quad \psi(\|x\|) = B(x, x), \qquad x \in V, \tag{3.65}$$

gdje je B biaditivna, a c konstanta.

Dokaz. Neka je n paran, $n = 2k, k \in \mathbb{N}$. Uvrstimo $x_1 = x_2 = \cdots = x_k = x$, $x_{k+1} = x_{k+2} = \cdots = x_{2k} = y$ u (3.64) da dobijemo

$$2\phi\left(\frac{\|x - y\|}{2}\right) = \phi(\|x\|) + \phi(\|y\|) - 2\psi\left(\frac{\|x + y\|}{2}\right), \qquad x, y \in V, \tag{3.66}$$

iz čega slijedi

$$2\phi(\|x - y\|) = \phi(2\|x\|) + \phi(2\|y\|) - 2\psi(\|x + y\|), \qquad x, y \in V. \tag{3.67}$$

Stavimo li $y = x$ u (3.67) dobivamo

$$\phi(\|x\|) - \psi(\|x\|) = \phi(0), \tag{3.68}$$

odnosno

$$2\phi(\|x + y\|) + 2\phi(\|x - y\|) = \phi(\|2x\|) + \phi(\|2y\|) + 2\phi(0), \qquad x, y \in V.$$

Neka je sada n neparan, $n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}$. Uvrstimo $x_1 = x_2 = \cdots = x_k = x$, $x_{k+1} = x_{k+2} = \cdots = x_{2k} = y$ i $x_{2k+1} = \frac{x+y}{2}$ u (3.64) da dobijemo

$$2k\phi\left(\frac{\|x - y\|}{2}\right) + \phi(0) = k\phi(\|x\|) + k\phi(\|y\|) + \phi\left(\frac{\|x + y\|}{2}\right) - (2k + 1)\psi\left(\frac{\|x + y\|}{2}\right), \tag{3.69}$$

odakle za $y = x$ ponovno dobijemo (3.68). Iz (3.68) slijedi

$$\phi(0) = \phi\left(\frac{\|x + y\|}{2}\right) - \psi\left(\frac{\|x + y\|}{2}\right),$$

što uvrstimo u (3.69) i nakon dijeljenja sa k također dobijemo (3.67) kao i u slučaju parnog n. Sada riješimo (3.67). Stavimo li $u = x + y$ i $v = x - y$, (3.67) postaje

$$2\phi\left(\|v\|\right) = \phi\left(\|u + v\|\right) + \phi\left(\|u - v\|\right) - 2\psi\left(\|u\|\right), \quad u, v \in V.$$

Zamijenimo li, zbog (3.68), $\psi(\|u\|)$ sa $\phi(\|u\|) - \phi(0)$, dobivamo

$$\phi(\|u+v\|) + \phi(\|u-v\|) = 2\phi(\|u\|) + 2\phi(\|v\|) - 2\phi(0),$$

pa $q\colon V \to \mathbb{R}$ definiran sa $q(x) = \phi(\|x\|) - \phi(0)$ zadovoljava kvadratnu funkcijsku jednadžbu. Preostaje primijeniti lemu 2.2.3. □

Teorem 3.3.9. *Neka je V normirani prostor nad $\mathbb{R}$, $g\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija te neka $h\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ zadovoljava funkcijsku jednadžbu*

$$\sum_{i=1}^{n} g(\|x_i - \overline{x}\|^2) = \sum_{i=1}^{n} g(\|x_i\|^2) - nh(\|\overline{x}\|^2), \tag{3.70}$$

gdje je $x_1, \ldots, x_n \in V$, $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$, $n \geq 2$. Tada je V unitaran prostor.

Dokaz. Ako je g rješenje od (3.70) za svaki $c \in \mathbb{R}$, onda je i $g - c$, pa bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $g(0) = 0$. Sada definiramo $\phi, \psi\colon V \to \mathbb{R}$ sa

$$\phi(\|x\|) = g(\|x\|^2), \quad \psi(\|x\|) = h(\|x\|^2), \quad x \in V.$$

Primijetimo da je $\phi(0) = 0$. Sada (3.70) postaje (3.64) te iz teorema 3.3.8 slijedi

$$g(\|x\|^2) = \phi(\|x\|) = B(x,x) = \psi(\|x\|) = h(\|x\|^2), \qquad x \in V$$

gdje je B simetrična, biaditivna funkcija. Sada za sve $x, y \in V$ vrijedi

$$\phi(\|x+y\|) + \phi(\|x-y\|) = 2\phi(\|x\|) + 2\phi(\|y\|),$$

pa prema teoremu 3.3.6 slijedi da je V unitarni prostor. □

Teorem 3.3.10. *Neka je V realni vektorski prostor. Neka je funkcija $f\colon V \to \mathbb{R}$ takva da je za sve $x, y \in V$, funkcija $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana sa*

$$\phi(t) = f(x+ty), \qquad x, y \in V, t \in \mathbb{R}, \tag{3.71}$$

polinom stupnja 2 u varijabli t. Drugim riječima, pretpostavimo da postoje realni brojevi $a(x,y)$, $b(x,y)$ i $c(x,y)$ takvi da vrijedi

$$\phi(t) = f(x+ty) = a(x,y)t^2 + b(x,y)t + c(x,y), \qquad t \in \mathbb{R}, x, y \in V. \tag{3.72}$$

Tada je

$$f(x) = q(x) + A(x) + d = B(x,x) + A(x) + d, \qquad x \in V, \tag{3.73}$$

$$\phi(t) = q(y)t^2 + [2B(x,y) + A(y)]\,t + q(x) + A(x) + d, \qquad t \in \mathbb{R}, x, y \in V, \tag{3.74}$$

gdje je B biaditivna, A aditivna, q kvadratna funkcijska jednadžba, a d konstanta.

Dokaz. Kako je ϕ kvadratna funkcija po t, (3.71) možemo zapisati kao

$$\phi(t) = f(x + ty) = at^2 + bt + c, \tag{3.75}$$

gdje su a, b, c funkcije s argumentima x i y. Uvrstimo li $t = 0$ u (3.75), dobivamo

$$f(x) = c.$$

Zamijenimo li t sa $-t$ u (3.75), dobivamo

$$f(x - ty) = at^2 - bt + c. \tag{3.76}$$

Oduzimanjem (3.76) od (3.75) dobivamo

$$f(x + ty) - f(x - ty) = 2bt, \tag{3.77}$$

a zbrajanjem (3.76) i (3.75) dobivamo

$$f(x + ty) + f(x - ty) = 2at^2 + 2c = 2at^2 + 2f(x). \tag{3.78}$$

Sada uvrstimo $t = 1$ i $t = 2$ u (3.77):

$$f(x + y) - f(x - y) = 2b; \tag{3.79}$$

$$f(x + 2y) - f(x - 2y) = 4b. \tag{3.80}$$

Iz (3.79) i (3.80) dobivamo

$$f(x + 2y) - f(x - 2y) = 2\left(f(x + y) - f(x - y)\right). \tag{3.81}$$

Na analogan način uvrštavanjem $t = 1$ i $t = 2$ u (3.78) dobivamo

$$f(x + 2y) + f(x - 2y) = 4\left[f(x + y) + f(x - y)\right] - 6f(x). \tag{3.82}$$

Zbrajanjem (3.81) i (3.82) dobivamo

$$f(x + 2y) = 3f(x + y) + f(x - y) - 3f(x), \qquad x, y \in V. \tag{3.83}$$

Sada iz leme 3.3.2 slijedi

$$f(x) = q(x) + A(x) + f(0),$$

što je (3.73). Primijetimo da smo uvrštavanjem $t = 1$ u (3.75) i (3.76) dobili izražene a i b na sljedeći način:

$$f(x + y) + f(x - y) - 2f(x) = 2a, \qquad x, y \in V,$$

$$f(x+y) - f(x-y) = 2b, \qquad x, y \in V.$$

Konačno,

$$\begin{aligned}
2a &= q(x+y) + A(x+y) + d + q(x-y) + A(x-y) + d - 2q(x) - 2A(x) - 2d \\
&= q(x+y) + q(x-y) - 2q(x) = 2q(y), \\
2b &= q(x+y) + A(x+y) + d - q(x-y) - A(x-y) - d \\
&= B(x+y, x+y) - B(x-y, x-y) + 2A(y) = 4B(x, y) + 2A(y), \\
c &= f(x) = q(x) + A(x) + d,
\end{aligned}$$

odakle slijedi (3.74). □

Razmotrimo sada još dvije karakterizacije unitarnih prostora:

Teorem 3.3.11. *Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ karakteristike nula ($n \cdot 1 \neq 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$) i neka $g\colon V \to F$ zadovoljava funkcijsku jednadžbu*

$$g(\lambda y + x) - g(\lambda y - x) = \lambda \left(g(y+x) - g(y-x)\right), \qquad x, y \in V, \lambda \in F. \tag{3.84}$$

Tada $g - g(0)$ zadovoljava kvadratnu funkcijsku jednadžbu te postoji jedinstvena simetrična, bilinearna funkcija $B\colon V \times V \to \mathbb{F}$ takva da je $g(x) = B(x, x) + c$, gdje je $x \in V$, a c konstanta.

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $g(0) = 0$. Uvrstimo li $\lambda = 0$ ili $y = 0$ u (3.84), dobivamo $g(x) = g(-x)$, za svaki $x \in V$, odnosno g je parna. Zamijenimo x sa μx u (3.84) te ponovo iskoristimo (3.84) i to da je g parna da dobijemo

$$g(\lambda y + \mu x) - g(\lambda y - \mu x) = \lambda\mu \left(g(y+x) - g(y-x)\right), \qquad x, y \in V, \lambda, \mu \in \mathbb{F}. \tag{3.85}$$

Sada stavimo $\lambda = \mu$ i $y = x$ u (3.85) te iskoristimo $g(0) = 0$ da dobijemo

$$g(2\lambda x) = \lambda^2 g(2x), \qquad x \in V, \lambda \in \mathbb{F},$$

odnosno uz supstituciju $u = 2x$ dobivamo

$$g(\lambda u) = \lambda^2 g(u), \qquad x \in V, \lambda \in F. \tag{3.86}$$

Sada zamijenimo x sa $x + y$ te uvrstimo $\lambda = 2$ u (3.84) da dobijemo

$$g(3y + x) = 2\left(g(2y + x) - g(x)\right) + g(y - x), \qquad x, y \in V. \tag{3.87}$$

Zamijenimo x sa $2x$ u (3.87) te iskoristimo (3.86) da dobijemo

$$g(3y + 2x) = 8g(y + x) - 8g(x) + g(y - 2x), \tag{3.88}$$

a sada zamijenimo y sa $y - x$ u (3.87) i dobijemo

$$g(3y - 2x) = 2g(2y - x) - 2g(x) + g(y - 2x). \tag{3.89}$$

Oduzimanjem (3.89) od (3.88) dobivamo

$$g(3y + 2x) - g(3y - 2x) = 8g(y + x) - 2g(2y - x) - 6q(x), \tag{3.90}$$

a primjenom parnosti od g i (3.85) u (3.90) dobivamo

$$g(2y - x) = g(y + x) + 3g(y - x) - 3g(x), \qquad x, y \in V. \tag{3.91}$$

Sada zbrojimo (3.88) i (3.89) te dva puta iskoristimo (3.91) da dobijemo

$$\begin{aligned} g(3y + 2x) + g(3y - 2x) &= 8g(y + x) - 10g(x) + 2g(2y - x) + 2g(y - 2x) \\ &= 12\,(g(y + x) + g(y - x)) - 16g(x) - 6g(y). \end{aligned} \tag{3.92}$$

Zamijenimo x sa $3x$ i y sa $2y$ u (3.92) te iskoristimo (3.86), (3.92) i parnost funkcije g da dobijemo

$$\begin{aligned} 36\,(g(y + x) + g(y - x)) &= 12\,(g(2y + 3x) + g(2y - 3x)) - 144g(x) - 24g(y) \\ &= 12\,[12\,(g(y + x) + g(y - x)) - 16g(y) - 6g(x)] \\ &\quad -144g(x) - 24g(y), \end{aligned}$$

odnosno

$$g(y + x) + g(y - x) = 2g(y) + 2g(x),$$

pa g zadovoljava kvadratnu funkcijsku jednadžbu. Prema lemi 2.2.3, postoji jedinstvena simetrična, biaditivna funkcija B takva da je $g(x) = B(x, x)$, gdje je

$$4B(x, y) = g(x + y) - g(x - y), \qquad x, y \in V.$$

Iz (3.84) slijedi $B(\lambda x, y) = \lambda B(x, y)$ za sve $x, y \in V, \lambda \in F$, pa je B i bilinearna, čime je ovaj teorem dokazan. □

Teorem 3.3.12. *Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ karakteristike nula (ili karakteristike $\neq 2$, što znači da je najmanji prirodan broj n za koji je $n \cdot 1 = 0$ različit od 2). Ako $g\colon V \to \mathbb{F}$ zadovoljava funkcijsku jednadžbu*

$$g(\lambda x + y) + g(x - \lambda y) = (1 + \lambda^2)\,(g(x) + g(y))\,, \qquad x, y \in V, \lambda \in \mathbb{F}, \tag{3.93}$$

tada g zadovoljava kvadratnu funkcijsku jednadžbu te postoji simetrična, bilinearna funkcija $B\colon V \times V \to \mathbb{F}$ takva da je $g(x) = B(x, x)$ za svaki $x \in V$.

Dokaz. Neka je $\lambda \neq 0$. Uvrstimo $x = 0$ pa $y = 0$ u (3.93) da dobijemo

$$g(y) + g(-\lambda y) = (1 + \lambda^2)\,(g(0) + g(y))\,, \tag{3.94}$$

$$g(\lambda x) + g(x) = (1 + \lambda^2)\,(g(x) + g(0))\,. \tag{3.95}$$

Zamijenimo x sa y u (3.95). Sada iz toga i (3.94) slijedi

$$g(-\lambda y) = g(\lambda y), \tag{3.96}$$

odnosno g je parna. Uvrštavanjem $y = 0$ u (3.94), dobivamo $g(0) = 0$, pa (3.95) postaje

$$g(\lambda x) = \lambda^2 g(x), \qquad x \in V, \lambda \in \mathbb{F}. \tag{3.97}$$

Ako je $\lambda = 1$, (3.93) postaje kvadratna funkcijska jednadžba, pa prema lemi 2.2.3 postoji simetrična, biaditivna funkcija $B\colon V \times V \to \mathbb{F}$ takva da je $g(x) = B(x, x)$ za svaki $x \in V$, te imamo

$$B(x, y) = \frac{1}{4}\left[g(x + y) - g(x - y)\right], \quad x, y \in V. \tag{3.98}$$

Pokažimo da je B i bilinearna. Zamijenimo x sa y u (3.93) te iskoristimo parnost od g da dobijemo

$$g(\lambda x + y) + g(x - \lambda y) = g(\lambda y + x) + g(y - \lambda x)$$

odnosno

$$\begin{aligned} B(\lambda x, y) &= g(\lambda x + y) - g(\lambda x - y) \\ &= g(\lambda y + x) - g(\lambda y - x) \\ &= B(x, \lambda y), \qquad x, y \in V, \lambda \in \mathbb{F}. \end{aligned} \tag{3.99}$$

Iz (3.97) i (3.98) dobivamo

$$B(\lambda x, x) = \frac{1}{4}\left[(\lambda + 1)^2 - (\lambda - 1)^2\right] g(x) = \lambda B(x, x), \quad x \in V, \lambda \in \mathbb{F}. \tag{3.100}$$

Zamijenimo x sa $x + y$ u (3.100) te iskoristimo (3.99) i simetričnost biaditivne funkcije B da dobijemo

$$B(\lambda x, y) = \lambda B(x, y),$$

pa je B linearna u prvoj varijabli, no iz simetričnosti slijedi da je B bilinearna. $\square$

3.4 Poopćenja Frechétove funkcijske jednadžbe

Lema 3.4.1. *Neka je G grupa (ne nužno komutativna), a H komutativna grupa. Neka $f, g, h \colon G \to H$ zadovoljavaju funkcijsku jednadžbu*

$$f(x+y) = g(x) + h(y), \qquad x, y \in G. \tag{3.101}$$

Tada postoji aditivna funkcija $A \colon G \to H$ takva da je

$$\begin{aligned} f(x) &= A(x) + f(0), \\ g(x) &= A(x) + g(0), \\ h(x) &= A(x) + h(0). \end{aligned}$$

Dokaz. Stavimo li $x = y = 0$ u (3.101), dobivamo

$$f(0) = g(0) + h(0). \tag{3.102}$$

Za $y = 0$, odnosno $x = 0$, jednadžba (3.101) postaje

$$f(x) = g(x) + h(0), \tag{3.103}$$

$$f(y) = g(0) + h(y). \tag{3.104}$$

Zbrajanjem (3.103) i (3.104), uzimajući u obzir (3.101) i (3.102), dobivamo

$$f(x) + f(y) = f(x+y) + f(0). \tag{3.105}$$

Stavimo $A(x) = f(x) - f(0)$. Tada (3.105) povlači

$$A(x+y) = f(x+y) - f(0) = f(x) + f(y) - 2f(0) = A(x) + A(y),$$

tj. A je aditivna funkcija. Dakle,

$$f(x) = A(x) + f(0),$$

pa iz (3.103), (3.104) i (3.102) slijedi

$$\begin{aligned} g(x) &= A(x) + f(0) - h(0) = A(x) + g(0), \\ h(x) &= A(x) + f(0) - g(0) = A(x) + h(0). \end{aligned}$$

□

Poopćenjem Frechétove jednadžbe (3.1) dobije se sljedeća funkcijska jednadžba:

$$p(x+y+z) = p_1(x+y) - p_2(z) + p_3(y+z) - p_4(x) + p_5(z+x) - p_6(y). \tag{3.106}$$

Teorem 3.4.2. *Neka je G grupa (ne nužno komutativna), a H komutativna grupa i neka $p, p_i \colon G \to H, (i = 1, \dots, 6)$ zadovoljavaju funkcijsku jednadžbu* (3.106). *Tada postoje aditivne funkcije $A, A_i \colon G \to H, i = 1, 2, 3,$ te biaditivna funkcija $B \colon G \times G \to H$ takve da p, p_i zadovoljavaju*

$$\begin{cases} 8p(x) = 4A(x) + B(x,x) + 8c, \\ 8p_1(x) = 4A(x) + B(x,x) - 8A_1(x) - 8(c_1 + c_2 - c - b_2), \\ 8p_2(x) = 4A(x) + B(x,x) - 8A_2(x) - 8A_3(x) + 8b_2, \\ 8p_3(x) = 4A(x) + B(x,x) - 8A_3(x) - 8(c_5 + c_6 - c - b_4), \\ 8p_4(x) = 4A(x) + B(x,x) - 8A_1(x) - 8A_2(x) + b_4, \\ 8p_5(x) = 4A(x) + B(x,x) - 8A_2(x) - 8(c_3 + c_4 - c - b_6), \\ 8p_6(x) = 4A(x) + B(x,x) - 8A_1(x) - 8A_3(x) + 8b_6, \end{cases} \tag{3.107}$$

gdje su $c, b_2, b_4, b_6, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ konstante.

Dokaz. Uvrstimo li $z = 0$ u (3.106), dobijemo jednadžbu

$$p(x+y) - p_1(x+y) + b_2 = p_3(y) - p_6(y) + p_5(x) - p_4(x),$$

gdje je $p_2(0) = b_2$ pa prema lemi 3.4.1 postoji aditivna funkcija A_1 takva da

$$\begin{aligned} (p - p_1)(x) &= A_1(x) + c_1 + c_2 - b_2, \\ (p_3 - p_6)(x) &= A_1(x) + c_1, \\ (p_5 - p_4)(x) &= A_1(x) + c_2, \end{aligned} \tag{3.108}$$

gdje su c_1, c_2 proizvoljne konstante. Uvrstimo li $y = 0$ u (3.106) i $x = 0$ u (3.106), redom dobijemo

$$p(x+z) - p_5(x+z) + b_6 = (p_1 - p_4)(x) + (p_3 - p_2)(z);$$

$$p(y+z) - p_3(y+z) + b_4 = (p_1 - p_6)(y) + (p_5 - p_2)(z),$$

gdje su $p_4(0) = b_4$ i $p_6(0) = b_6$, pa ponovo prema lemi 3.4.1 postoje aditivne funkcije A_2 i A_3 takve da je

$$\begin{cases} (p - p_5)(x) = A_2(x) + c_3 + c_4 - b_6, \\ (p_1 - p_4)(x) = A_2(x) + c_4, \\ (p_3 - p_2)(x) = A_2(x) + c_3, \end{cases} \tag{3.109}$$

$$\begin{cases} (p - p_3)(x) = A_3(x) + c_5 + c_6 - b_4, \\ (p_1 - p_6)(x) = A_3(x) + c_5, \\ (p_5 - p_2)(x) = A_3(x) + c_6, \end{cases} \tag{3.110}$$

gdje su c_3, c_4, c_5, c_6 konstante. Sada iskoristimo (3.108), (3.109) i (3.110) kako bismo p_1 i p_6 izrazili pomoću p:

$$\begin{cases} p_1(x) = p(x) - A_1(x) - c_1 - c_2 + b_2, \\ p_5(x) = p(x) - A_2(x) - c_3 - c_4 + b_6, \\ p_3(x) = p(x) - A_3(x) - c_5 - c_6 + b_4, \\ p_2(x) = p_3(x) - A_2(x) - c_3 \\ \qquad = p(x) - A_3(x) - A_2(x) - c_3 - c_5 - c_6 + b_4, \\ p_4(x) = p_1(x) - A_2(x) - c_4 \\ \qquad = p(x) - A_1(x) - A_2(x) - c_4 - c_1 - c_2 + b_2, \\ p_6(x) = p_3(x) - A_1(x) - c_1 \\ \qquad = p(x) - A_3(x) - A_1(x) - c_1 - c_5 - c_6 + b_4. \end{cases} \tag{3.111}$$

Uvrstimo li funkcije $p_1, \dots, p_6$ dane sa (3.111) u (3.106), koristeći da su A_1, A_2 i A_3 aditivne funkcije, dobivamo

$$p(x + y + z) = p(x + y) - p(z) + p(y + z) - p(x) + p(z + x) - p(y) + c, \tag{3.112}$$

gdje je $p(0) = c,\ b_2 = c - c_3 - c_5 - c_6 + b_4,\ b_6 = c - c_1 - c_5 - c_6 + b_4,\ c_1 + c_2 + c_4 = c_3 + c_5 + c_6$. Prema teoremu 3.1.1 postoje aditivna funkcija A i biaditivna funkcija B takve da je

$$8p(x) = 4A(x) + B(x, x) + 8c. \tag{3.113}$$

Sada (3.107) slijedi iz (3.111) i (3.113). □

Riješimo sada funkcijsku jednadžbu koja poopćava (3.43) i (3.44):

$$\phi(x, y, z) = f(x + y + z) + g(x + y - z) + h(x - y + z) + k(x - y - z), \tag{3.114}$$

gdje je ϕ neovisan o z.

Teorem 3.4.3. *Neka je V realni vektorski prostor. Neka su $\phi\colon V^3 \to \mathbb{R}$ i neka su funkcije $f, g, h, k\colon V \to \mathbb{R}$ koje zadovoljavaju* (3.114) *neovisne o z. Tada su f, g, h, k definirane sa*

$$\begin{cases} f(x) = -q(x) + A_3(x) + b_1, \\ g(x) = -q(x) + A_3(x) - A_1(x) + b_2, \\ h(x) = q(x) + A_2(x) + b_3, \\ k(x) = q(x) + A_2(x) + A_1(x) + b_4, \end{cases} \tag{3.115}$$

gdje je $x \in V$, q je kvadratna, A_1, A_2 i A_3 su aditivne, a b_1, b_2, b_3 i b_4 su konstante.

Dokaz. Kako je ϕ neovisna o z, uvrstimo $z = x + y$ i $z = -x - y$ u (3.114) da dobijemo

$$f(2x+2y)+g(0)+h(2x)+k(-2y) = f(0)+g(2x+2y)+h(-2y)+k(2x), \qquad x, y \in V. \tag{3.116}$$

Zamijenimo $2x$ sa x i $2y$ sa y u (3.116) da dobijemo

$$(f - g)(x + y) = (k - h)(x) + (h - k)(-y) + c_1, \tag{3.117}$$

gdje je $c_1 = f(0) - g(0)$, pa prema lemi 3.4.1 postoji aditivna funkcija A_1 takva da je

$$f(x) - g(x) = A_1(x) + c_1, \tag{3.118}$$

$$k(x) - h(x) = A_1(x) + c_2. \tag{3.119}$$

Iz (3.118) slijedi

$$g(x) = f(x) - A_1(x) - c_1,$$

a iz (3.119)

$$k(x) = h(x) + A_1(x) + c_2.$$

Uvrstimo li dobiveno u definiciju funkcije ϕ, imamo

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z) &= f(x + y + z) + f(x + y - z) + h(x - y + z) \\ &\quad + h(x - y - z) - 2A_1(y) - c_1 + c_2 \end{aligned}$$

što ne ovisi o z. Kako je

$$\begin{aligned} \phi(x, y, 0) &= 2f(x + y) + 2h(x - y) - 2A_1(y) - c_1 + c_2, \\ \phi(x, y, x + y) &= f(2x + 2y) + f(0) + h(2x) + h(-2y) - 2A_1(y) - c_1 + c_2, \end{aligned}$$

imamo

$$2f(x + y) + 2h(x - y) = f(0) + f(2x + 2y) + h(-2y) + h(2x). \tag{3.120}$$

Sada uvrstimo $y = x$ u (3.120) te zamijenimo $2x$ sa x da dobijemo

$$2f(x) + 2h(0) = f(0) + f(2x) + h(-x) + h(x). \tag{3.121}$$

Sada iz (3.121) i (3.120) dobivamo

$$2h(x - y) + h(x + y) + h(-x - y) = h(2x) + h(-2y) + 2h(0). \tag{3.122}$$

Zamjenom x i y u (3.122) te oduzimanjem dobivene jednažbe od (3.122) dobivamo

$$2A_2(x - y) = A_2(2x) - A_2(2y), \tag{3.123}$$

gdje je

$$A_2(x) = h(x) - h(-x), \qquad x \in V. \tag{3.124}$$

Primijetimo da je A_2 neparna te da je $A_2(0) = 0$. Uvrstimo li $y = 0$ u (3.123), dobivamo $A_2(2x) = 2A_2(x)$, pa (3.123) povlači aditivnost funkcije A_2. Iz (3.122) i (3.124) dobivamo

$$2h(x-y) + 2h(x+y) - A_2(x+y) = h(2x) + h(2y) - A_2(2y) + 2h(0),$$

što možemo zapisati kao

$$\begin{aligned} 2h(x+y) - A_2(x+y) &- 2h(0) + 2h(x-y) - A_2(x-y) - 2h(0) \\ &= h(2x) - \frac{1}{2}A_2(2x) - h(0) + h(2y) - \frac{1}{2}A_2(2y) - h(0). \end{aligned}$$

Definiramo q sa

$$q(x) = h(x) - \frac{1}{2}A_2(x) - h(0), \qquad x \in V. \tag{3.125}$$

Sada q zadovoljava kvadratnu funkcijsku jednadžbu. Posebno, q je parna funkcija. Tako smo dobili h, a iz (3.119) dobivamo k. Sada ćemo odrediti f i g. Uvrstimo li $z = x - y$ i $z = -x - y$ u (3.114), dobivamo

$$f(2x) + g(2y) + h(2(x-y)) + k(0) = f(0) + g(2x+2y) + h(-2y) + k(2x). \tag{3.126}$$

Zamjenom $2x$ sa x te $2y$ sa y u (3.126) dobivamo

$$f(x) + g(y) + h(x-y) + k(0) = f(0) + g(x+y) + h(-y) + k(x),$$

odnosno prema (3.118) i (3.119),

$$f(x) + f(y) + h(x-y) + h(0) = f(0) + f(x+y) + h(-y) + h(x).$$

Uzmemo u obzir (3.125) i imamo

$$f(x) + f(y) + q(x-y) = f(0) + f(x+y) + q(y) + q(x),$$

odnosno

$$f(x) + f(y) - q(x+y) + 2q(x) + 2q(y) = f(0) + f(x+y) + q(y) + q(x),$$

odakle je

$$(f(x) + q(x) - f(0)) + (f(y) + q(y) - f(0)) = f(x+y) + q(x+y) - f(0).$$

Definiramo li

$$A_3(x) = f(x) + q(x) - f(0), \qquad x \in V$$

tada je A_3 aditivna. Sada formula za g slijedi iz (3.118). □

Bibliografija

[1] B. Harambašić, *Kvadratni funkcionali*, Diplomski rad, Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet, Matematički odsjek, Zagreb, 2007.

[2] P. Kannappan, *Functional equations and inequalities with applications*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, New York, 2009.

[3] S. Kurepa, *Funkcionalna analiza*, Školska knjiga, Zagreb, 1990.

[4] R. Potůček, *Parallelogram identity, its application and generalization*, `https://www.researchgate.netpublication/228842158_Parallelogram_identity_its_application_and_generalization`

[5] P. K. Sahoo, P. Kannappan, *Introduction to functional equations*, CRC Press, Boca Raton, FL, 2011.

Sažetak

Cilj ovog rada je izložiti različite karakterizacije unitarnih prostora među normiranim prostorima. Osnovna karakterizacija je dana Jordan – von Neumannovim teoremom prema kojem je norma izvedena iz skalarnog produkta ako i samo ako ona zadovoljava jednakost paralelograma

$$||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2.$$

Poopćenjem te jednakosti jezikom funkcijskih jednadžbi dobiju se brojne funkcijske jednadžbe koje karakteriziraju unitarne prostore, a najvažnija je kvadratna funkcijska jednadžba

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x) + 2f(y).$$

Jedno poopćenje jednakosti paralelograma je i jednakost

$$||x + y + z||^2 = ||x + y||^2 - ||z||^2 + ||y + z||^2 - ||x||^2 + ||z + x||^2 - ||y||^2,$$

a iz nje je izvedena Frechétova funkcijska jednadžba:

$$f(x + y + z) = f(x + y) - f(z) + f(y + z) - f(x) + f(z + x) - f(y).$$

Summary

The aim of this thesis is to expose various characterizations of inner product spaces among normed spaces. A basic characterization is given by the Jordan – von Neumann theorem according to which a norm is derived from an inner product if and only if it satisfies the parallelogram identity

$$||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2.$$

Numerous functional equations characterizing inner product spaces are obtained by generalizing this identity to the language of functional equations. The most important is the quadratic functional equation

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x) + 2f(y).$$

Another generalization of the parallelogram identity is the identity

$$||x + y + z||^2 = ||x + y||^2 - ||z||^2 + ||y + z||^2 - ||x||^2 + ||z + x||^2 - ||y||^2,$$

from which the Frechét's functional equation is derived:

$$f(x + y + z) = f(x + y) - f(z) + f(y + z) - f(x) + f(z + x) - f(y).$$

Životopis

Rođena sam 8. siječnja 1993. godine u Bjelovaru. Živim u Zagrebu, a odrasla sam u Donjoj Kovačici, malom mjestu pored Bjelovara. Završila sam Osnovnu školu Mate Lovraka u Velikom Grđevcu, nakon koje sam upisala Gimnaziju Bjelovar koju sam, s odličnim uspjehom, završila 2011. godine. Iste godine upisala sam Prirodoslovno-matematički fakultet, Matematički odsjek, a 2014. godine sam se prebacila na nastavnički smjer. Sveučilišni preddiplomski studij Matematika: smjer nastavnički završila sam 2016. godine te sam iste godine upisala Diplomski sveučilišni studij: smjer nastavnički.