Theta liftovi ireducibilnih reprezentacija metaplektičke grupe

Bakić, Petar

Sveučilište u Zagrebu

PRIRODOSLOVNO - MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Petar Bakić

Theta liftovi ireducibilnih reprezentacija metaplektičke grupe

DOKTORSKI RAD

Zagreb, 2018.

University of Zagreb

FACULTY OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Petar Bakić

Theta lifts of irreducible representations of the metaplectic group

DOCTORAL THESIS

Zagreb, 2018

Sveučilište u Zagrebu

PRIRODOSLOVNO - MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Petar Bakić

Theta liftovi ireducibilnih reprezentacija metaplektičke grupe

DOKTORSKI RAD

Mentori:
prof.dr.sc. Marcela Hanzer
prof.dr.sc. Neven Grbac

Zagreb, 2018.

University of Zagreb

FACULTY OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Petar Bakić

Theta lifts of irreducible representations of the metaplectic group

DOCTORAL THESIS

Supervisors:
prof. Marcela Hanzer, PhD
prof. Neven Grbac, PhD

Zagreb, 2018

Zahvala

Od srca zahvaljujem svim kolegama s Matematičkog odsjeka uz koje je rad na Fakultetu toliko ugodan, a posebno Ivanu Krijanu – ne mogu zamisliti bolji ured. Također zahvaljujem članovima seminara za unitarne reprezentacije i automorfne forme, posebno Sonji Žunar na vjernom slušanju seminara i svim savjetima koji su, među ostalim, pomogli i u izradi ovog rada.

Konačno, koristim priliku kako bih zahvalio svojoj mentorici, profesorici Marceli Hanzer. Ovaj rad ne bi bio moguć bez njezinog neiscrpnog strpljenja i bez brojnih razgovora za koje je uvijek imala vremena. Osim znanja, u njima mi je prenijela i mirnoću uz koju se doktorat čak i u najizazovnijim trenucima činio izvedivim.

Sažetak

U ovoj disertaciji proučavaju se theta liftovi generičkih reprezentacija simplektičke, odnosno metaplektičke grupe definirane nad lokalnim nearhimedskim poljem $\mathbb{F}$ karakteristike 0. U radu odgovaramo na osnovna pitanja vezana uz theta korespondenciju: kada su promatrani liftovi različiti od nul-reprezentacije, te kako izgledaju ne-nul liftovi.

Za potpuni odgovor na prvo pitanje koristimo Kudlinu filtraciju i rezultat G. Muića o ireducibilnosti standardnih modula generičkih reprezentacija (tzv. Casselman-Shahidijeva slutnja). Također se oslanjamo na rezultate o liftovima temperiranih reprezentacija koje su u svojem radu ustanovili H. Atobe i W. T. Gan.

Kao odgovor na drugo pitanje dajemo eksplicitni opis svih ne-nul liftova u terminima Langlandsove klasifikacije. Ovaj dio rada zasniva se na detaljnoj analizi mogućih subkvocijenata tzv. velikih theta liftova. Osim već spomenutih rezultata, ovdje se koristimo osnovnim činjenicama o ireducibilnosti induciranih reprezentacija opće linearne grupe koje je dokazao A. Zelevinsky, te Muićevim rezultatima o liftovima reprezentacija diskretne serije.

Koristeći J.-S. Lijeve rezultate o unitarizabilnosti liftova unitarnih reprezentacija u stabilnom rangu, dolazimo do važne posljedice naših rezultata: opis viših liftova omogućuje nam eksplicitnu konstrukciju velikog broja unitarnih reprezentacija.

Ključne riječi: teorija reprezentacija p-adskih grupa; theta korespondencija; theta liftovi; generičke reprezentacije; metaplektička grupa.

Summary

In this thesis we study the theta lifts of generic representations of the symplectic group and its double cover, the metaplectic group, defined over a local non-archimedean field $\mathbb{F}$ of characteristic 0. We consider the two basic problems regarding the local theta correspondence: first, determining when the lifts in question are non-zero, and secondly, explicitly describing those lifts.

To obtain a full answer to the first question, we use Kudla's filtration and a result of G. Muić on the irreducibility of standard modules of generic representation (the so-called Casselman-Shahidi conjecture). We also rely on the results on the lifts of tempered representations established by H. Atobe and W. T. Gan.

Our answer to the second question includes an explicit description of all the non-zero lifts in terms of the Langlands classification. This part of our work is based on a detailed analysis of the possible subquotients of big theta lifts. Apart from the abovementioned results, we use the basic facts regarding the irreducibility of induced representations of the general linear group (established by A. Zelevinsky), as well as Muić's results on the lifts of discrete series representations.

Using the fact that theta correspondence in the stable range preserves unitarity (established by J.-S. Li), we arrive at an important consequence of our results: our description of theta lifts yields a method for constructing a large variety of unitary representations.

Keywords: representation theory of p-adic groups; theta correspondence; theta lifts; generic representations; metaplectic group.

Extended summary

In this thesis we study the theta lifts of generic representations of the symplectic group and its double cover, the metaplectic group, defined over a local non-archimedean field $\mathbb{F}$ of characteristic 0. We consider the two basic problems regarding the local theta correspondence: first, determining when the lifts in question are non-zero, and secondly, explicitly describing those lifts.

To answer the first question, we fix an irreducible generic representation $\pi \in \mathrm{Irr}(Sp(W_n))$ of the symplectic group and a Witt tower $\mathcal{V} = (V_m)$ of quadratic spaces which will serve as the target tower for our lifts. As expressed by the persistence principle, once π occurs in the correspondence at some level, it must also occur at all the higher levels of the Witt tower. Thus, determining when the lifts are non-zero amounts to finding the first occurrence. We use the fact that every irreducible generic representation of the symplectic group is isomorphic to its standard module (this is the so-called Casselman-Shahidi conjecture, proven by G. Muić in [24]). This enables us to write

$$\pi \cong \chi_V \delta_r \nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_V \delta_1 \nu^{s_1} \rtimes \pi_0$$

where $\delta_i \in \mathrm{Irr}(\mathrm{GL}_{n_i}(\mathbb{F}))$ are unitary discrete series representations of the general linear group, χ_V is the character attached to the Witt tower $\mathcal{V}$, $0 < s_1 \leqslant \cdots \leqslant s_r$ are positive real numbers, and $\pi_0 \in \mathrm{Irr}(Sp(W_{n_0}))$ is a tempered representation of the symplectic group of smaller rank ($n_0 = n - 2\sum_{i=1}^{r} n_i$). By repeatedly using Kudla's filtration and the conservation relation, we reduce the problem of determining the first occurrence of π to the same question about the tempered part, π_0. As the theta correspondence for tempered representations has been studied thoroughly by Atobe and Gan in [2], this reduction provides the complete answer to our first question.

The Langlands classification can be extended to include representations of the metaplectic group, which enables a similar approach as in the symplectic case. However, there are exceptions to the Casselman-Shahidi conjecture, which is why, in this setting, we restrict our ourselves to the study of the (broad) class of irreducible generic representations which do possess an irreducible standard module.

The second question requires a considerably more involved approach. Again using

Kudla's filtration, we obtain (except in a single special case) the following epimorphism:

$$\chi_W \delta_r \nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_W \delta_1 \nu^{s_1} \rtimes \Theta(\pi_0) \twoheadrightarrow \theta(\pi).$$

Here we denote by $\theta(\pi)$ the (small) theta lift of π to V_m, while $\Theta(\pi_0)$ denotes the full theta lift of π_0 to the orthogonal group of corresponding rank. From here, we proceed with a detailed analysis of the possible subquotients of $\Theta(\pi_0)$, relying in part on the work of Muić on the lifts of discrete series representations, e.g. [29]. It shows that the irreducible subquotient of $\Theta(\pi_0)$ participating in the above epimorphism is none other than its unique quotient, that is, the small theta lift $\theta(\pi_0)$. In other words, we get

$$\chi_W \delta_r \nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_W \delta_1 \nu^{s_1} \rtimes \theta(\pi_0) \twoheadrightarrow \theta(\pi).$$

However, since $\theta(\pi_0)$ is non-tempered (for high enough ranks), this epimorphism is not enough to uniquely determine $\theta(\pi)$.

To identify $\theta(\pi)$, we carry out a technical computation, using many basic results on the irreducibility of induced representations established by Zelevinsky, [40]. Starting from the above epimorphism and using the known properties of $\theta(\pi_0)$ (established in [2]), this allows us to deduce the appearance of the standard module of $\theta(\pi)$, thereby completing the answer to our second question.

An interesting consequence of these results is a method for constructing a wide array of unitary representations. As shown by J. S. Li, [21], theta correspondence preserves unitarity if the rank of the target group is large enough. On the other hand, the work of Lapid, Muić and Tadić ([20]) provides a complete description of the generic part of the unitary dual. Since our results offer an explicit description of the theta lifts, we can choose any irreducible generic unitary representation (along with an orthogonal group of sufficiently high rank) and apply these results to get an explicit example of a unitary representation. This method can be used to construct a large number of examples, giving a potentially useful insight into the structure of the unitary dual.

Sadržaj

Uvod

Theta korespondencija naziv je za određenu vezu između ireducibilnih reprezentacija dviju grupa koje čine tzv. reduktivni dualni par. Motivacija za proučavanje theta korespondencije ima nekoliko različitih izvora: globalna verzija theta korespondencije važna je iz perspektive teorije brojeva, jer omogućuje konstrukciju automorfnih reprezentacija. S druge strane, lokalna theta korespondencija igra važnu ulogu u teoriji reprezentacija grupa nad nearhimedskim lokalnim poljima; u tom se kontekstu također radi o bitnom načinu konstrukcije reprezentacija, ali i o alatu s brojnim primjenama unutar teorije.

Definicija lokalne theta korespondencije, koju u ovom radu proučavamo, polazi od pojma metaplektičke grupe. Radi se o (jedinstvenom) netrivijalnom dvostrukom natkrivaču simplektičke grupe: za simplektički prostor W nad lokalnim nearhimedskim poljem $\mathbb{F}$ možemo promatrati simplektičku grupu $\mathrm{Sp}(W)$, to jest grupu izometrija prostora W (sekcija 1.1). Metaplektičku grupu $\mathrm{Mp}(W)$ tada možemo definirati kao njezino centralno proširenje grupom $\mu_2 = \{\pm 1\}$, to jest kao jedinstvenu grupu za koju postoji egzaktan niz

$$1 \to \mu_2 \to \mathrm{Mp}(W) \to \mathrm{Sp}(W) \to 1$$

koji se ne cijepa. Važnost metaplektičke grupe proizlazi iz činjenice da posjeduje posebnu – tzv. Weilovu – reprezentaciju, koja je, među ostalim, ključna i za definiciju theta korespondencije. Unutar simplektičke grupe postoje razni parovi podgrupa G i H koje zadovoljavaju

$$C_{\mathrm{Sp}(W)}(G) = H \quad \text{i} \quad C_{\mathrm{Sp}(W)}(H) = G$$

Ovakve parove nazivamo (reduktivnim) dualnim parovima podgrupa. Njihove praslike $\tilde{G}$ i $\tilde{H}$ po surjekciji $\mathrm{Mp}(W) \to \mathrm{Sp}(W)$ zadovoljavaju analogni uvjet u $\mathrm{Mp}(W)$; nadalje, postoji homomorfizam

$$\tilde{j}\colon \tilde{G} \times \tilde{H} \to \mathrm{Mp}(W).$$

pomoću kojega Weilovu reprezentaciju (originalno definiranu na $\mathrm{Mp}(W)$) povlačimo do reprezentacije grupe $\tilde{G} \times \tilde{H}$. Za svaku ireducibilnu reprezentaciju π grupe $\tilde{G}$ možemo promotriti maksimalni kvocijent Weilove reprezentacije na kojem $\tilde{G}$ djeluje kao π; takav kvocijent izomorfan je s

$$\pi \otimes \Theta(\pi)$$

za neku reprezentaciju $\Theta(\pi)$ grupe $\tilde{H}$ koju zovemo velikim theta liftom reprezentacije π.

Ukoliko je različita od nule, ova reprezentacija posjeduje jedinstveni ireducibilni kvocijent koji označavamo s $\theta(\pi)$ i nazivamo malim theta liftom reprezentacije π. Nadalje, pokazuje se da je pridruživanje $\pi \mapsto \theta(\pi)$ injektivno, stoga govorimo o theta *korespondenciji*.

Osnovni zadaci vezani uz theta korespondenciju uključuju određivanje kada je reprezentacija $\Theta(\pi)$ različita od nule, te opis (ili, u najboljem slučaju, identifikaciju) reprezentacije $\theta(\pi)$. Glavni rezultati ovog rada sadrže odgovore na ova pitanja u slučaju kada je reprezentacija π generička. Prije nego što ih skiciramo detaljnije, dajemo kratak pregled dosadašnjeg razvoja ovog područja i rezultata koji su doveli do našeg istraživanja.

Sistematično proučavanje theta korespondencije započeo je sedamdesetih godina prošlog stoljeća Roger Howe ([6, 275–285], [17]). Velik broj autora doprinio je istraživanju lokalne i globalne theta korespondencije u narednim godinama: među ostalima, to su S. Kudla, S. Rallis, J.-L. Waldspurger, I. Piatetski-Shapiro i mnogi drugi. Poseban značaj za naše istraživanje imaju radovi Waldspurgera ([38]) koji iznosi prvi dokaz tzv. Howeove dualnosti (za nearhimedska lokalna polja s rezidualnom karakteristikom različitom od 2) i Kudle ([19]), čiji opis filtracije Jacquetovog modula Weilove reprezentacije koristimo kao jedan od osnovnih alata u ovom radu. Najvažniji rezultati iz ranije faze istraživanja lokalne theta korespondencije mogu se naći u knjizi C. Moeglin, M.-F. Vigneras i J.-L. Waldspurgera, [23].

Važan doprinos istraživanju theta korespondencije dolazi i iz naših krugova, radovima G. Muića, M. Hanzer i I. Matića. Posebno se ističu radovi G. Muića o liftovima reprezentacija diskretne serije ([29] sa G. Savinom, [25], [26]); na ključnim mjestima u disertaciji oslanjamo se na račune i rezultate iz ovih radova.

U posljednjim godinama napravljeno je još nekoliko važnih koraka u istraživanju theta korespondencije: među ostalim, u svojem radu [10], W. T. Gan i S. Takeda upotpunili su dokaz Howeove dualnosti, dok su B. Sun i C.-B. Zhu u [33] dali prvi potpuni dokaz tzv. relacije očuvanja. Najnoviji rezultati, uključujući i napredak u razumijevanju lokalne Langlandsove korespondencije (ponajprije radom J. Arthura, [1]) omogućili su i motivirali nove smjerove istraživanja. Za nas su osobito važni radovi [9] (G. Savin i W. T. Gan) te [2], u kojem su H. Atobe i W. T. Gan dali potpuni opis theta liftova temperiranih reprezentacija u terminima Langlandsovih parametara. Rezultati izneseni u tom radu polazna su točka i za naše istraživanje.

U ovom radu proučavamo theta liftove tzv. generičkih reprezentacija (sekcija 1.5.5). Kao i obično, theta korespondenciju promatramo u tornjevima: nakon što fiksiramo simplektički prostor W_n dimenzije n, umjesto jednog kvadratnog prostora V na koji podižemo reprezentacije pomoću theta korespondencije možemo promatrati cijeli toranj prostora $\mathcal{V} = (V_m)$, kao što je objašnjeno u sekcijama 1.3, odnosno 2.2. Dobivamo uobičajene dualne parove:

$$\begin{cases} G(W_n) = \mathrm{Sp}(W_n) \quad \text{i} \quad H(V_m) = \mathrm{O}(V_m), & \text{kada je } m = \dim V_m \text{ paran broj;} \\ G(W_n) = \mathrm{Mp}(W_n) \quad \text{i} \quad H(V_m) = \mathrm{O}(V_m), & \text{kada je } m = \dim V_m \text{ neparan broj.} \end{cases}$$

Theta liftove ireducibilne reprezentacije π grupe $G(W_n)$ označavamo s $\Theta(\pi, V_m)$ i $\theta(\pi, V_m)$, odnosno $\Theta_l(\pi)$ i $\theta_l(\pi)$, gdje je

$$l = n + 1 - m$$

(oznake se uvode u sekciji 2.2). Nadalje, uobičajeno je umjesto jednog Wittovog tornja $\mathcal{V}$ promatrati dva koja dolaze u paru, $\mathcal{V}^+$ i $\mathcal{V}^-$ (sekcija 2.2.1). Ključno je pitanje na kojem je nivou tornja theta lift dane reprezentacije prvi put različit od nule; uvodimo odgovarajuće oznake

$$m^{\pm}(\pi) := \min\{m \mid \Theta(\pi, V_m^{\pm}) \neq 0\}$$

te $m^{\text{dolje}}(\pi) = \min\{m^+(\pi), m^-(\pi)\}$.

Konačno, za iskaz naših rezultata potrebna je Langlandsova klasifikacija ireducibilnih reprezentacija, prema kojoj se svaka (glatka) ireducibilna reprezentacija π simplektičke grupe može na jedinstven način zapisati kao kvocijent reprezentacije oblika

$$\nu^{s_r}\delta_r \times \cdots \times \nu^{s_1}\delta_1 \rtimes \pi_0$$

pri čemu su $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_r$ ireducibilne kvadratno integrabilne (modulo centar) reprezentacije općih linearnih grupa, $s_r \geqslant s_{r-1} \geqslant \cdots \geqslant s_1 > 0$ pozitivni realni brojevi, a π_0 ireducibilna temperirana reprezentacija (manje) simplektičke grupe. Gornja reprezentacija zove se standardni modul reprezentacije π; pišemo $\pi = L(\nu^{s_r}\delta_r, \ldots, \nu^{s_1}\delta_1; \pi_0)$. Za nas je ključan rezultat G. Muića ([24]) prema kojem je standardni modul svake generičke reprezentacije ireducibilan.

Langlandsova klasifikacija u istoj formi vrijedi i za ortogonalne grupe. Nadalje, može se proširiti tako da uključuje i reprezentacije metaplektičke grupe, no u metaplektičkom slučaju postoje generičke reprezentacije čiji se standardni modul reducira. Zbog toga se u ovom radu ograničavamo na proučavanje (široke) klase generičkih reprezentacija metaplektičke grupe čiji je standardni modul ireducibilan.

Iskažimo sada glavne rezultate ovog rada. Najprije dajemo odgovor (teorem 3.1) na pitanje kada su promatrani theta liftovi različiti od nule.

Teorem 0.1 Neka je $\pi \cong \chi_V\delta_r\nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_V\delta_1\nu^{s_1} \rtimes \pi_0$ ireducibilna generička reprezentacija grupe $G(W_n)$. Tada vrijedi

$$m^{\text{dolje}}(\pi) = m^{\text{dolje}}(\pi_0) + n - n_0$$

pri čemu je broj n_0 definiran s $\pi_0 \in \mathrm{Irr}(G(W_{n_0}))$.

Uočimo da je ovime doista u potpunosti određeno koji su liftovi reprezentacije π različiti od nule: relacija očuvanja daje vezu između prvih pojavljivanja na dva Wittova tornja koja promatramo u paru, a poznato je da su liftovi različiti od nule na svim nivoima nakon prvog pojavljivanja (2.4).

Preostaje nam odrediti kako izgledaju liftovi koji su različiti od nule. Sljedeća dva teorema (3.7, odnosno 3.10) daju odgovor na to pitanje u slučaju prvih ne-nul liftova.

Teorem 0.2 Neka je π ireducibilna generička reprezentacija simplektičke grupe sa standardnim modulom $\chi_V\delta_r\nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_V\delta_1\nu^{s_1} \rtimes \pi_0$. Ako s $\theta(\pi_0)$, $\theta(\pi)$ označimo prvi lift reprezentacije π_0, odnosno π na toranj $\mathcal{V}$, onda vrijedi

$$\chi_W\delta_r\nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_W\delta_1\nu^{s_1} \rtimes \theta(\pi_0) \twoheadrightarrow \theta(\pi).$$

Osim u slučaju 3.2 iz sekcije 3.2, reprezentacija $\theta(\pi_0)$ je temperirana, stoga je ovim epimorfizmom određen i standardni modul reprezentacije $\theta(\pi)$.

U slučaju 3.2 je $\theta(\pi_0)$ Langlandsov kvocijent reprezentacije $\chi_W \mathrm{St}_2\nu^{\frac{1}{2}} \times (\chi_W, h-1) \rtimes \theta_{-1}(\pi_0')$, pri čemu je π_0' ireducibilna temperirana reprezentacija za koju vrijedi $(\chi_V, h) \rtimes \pi_0' \twoheadrightarrow \pi_0$. Standardni modul reprezentacije $\theta(\pi)$ možemo iščitati iz gornjeg epimorfizma koristeći napomenu 3.6.

Teorem 0.3 Neka je π generička reprezentacija metaplektičke grupe koja je izomorfna vlastitom standardnom modulu,

$$\pi \cong \chi_V\delta_r\nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_V\delta_1\nu^{s_1} \rtimes \pi_0.$$

Neka je $\theta(\pi)$, odnosno $\theta(\pi_0)$ prvi lift reprezentacije π, odnosno π_0 na toranj $\mathcal{V}$.

(i) Neka standardni modul reprezentacije π sadrži $\chi_V|\cdot|^{\frac{1}{2}}$, tako da bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da vrijedi $\delta_1\nu^{s_1} = |\cdot|^{\frac{1}{2}}$, i neka se prvi ne-nul lift reprezentacije π pojavljuje u tornju $\mathcal{V}$ na nivou $l = 2$. Tada je reprezentacija $\Theta_0(\pi_0)$ ireducibilna i temperirana, a $\theta(\pi)$ je Langlandsov kvocijent reprezentacije

$$\chi_W\delta_r\nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_W\delta_2\nu^{s_2} \rtimes \Theta_0(\pi_0).$$

(ii) U svim ostalim slučajevima vrijedi

$$\chi_W\delta_r\nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_W\delta_1\nu^{s_1} \rtimes \theta(\pi_0) \twoheadrightarrow \theta(\pi).$$

Osim u slučaju 2.2 sekcije 3.3, reprezentacija $\theta(\pi_0)$ je temperirana pa je ovime dan i standardni modul reprezentacije $\theta(\pi)$.

U slučaju 2.2 je $\theta(\pi_0)$ je Langlandsov kvocijent reprezentacije $\chi_W \mathrm{St}_3\nu^{\frac{1}{2}} \times (\chi_W S_2, h-1) \rtimes \theta_{-2}(\pi_0')$, pri čemu je π_0' ireducibilna temperirana reprezentacija za koju vrijedi

$(\chi_V S_2, h) \rtimes \pi_0' \twoheadrightarrow \pi_0$. Standardni modul reprezentacije $\theta(\pi)$ možemo iščitati iz gornjeg epimorfizma koristeći napomenu 3.6.

Analogni rezultati za liftove na grupe višeg ranga dani su sljedećim teoremima (4.23 i 4.26).

Teorem 0.4 Neka je π ireducibilna generička reprezentacija simplektičke grupe sa standardnim modulom

$$\chi_V \delta_r \nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_V \delta_1 \nu^{s_1} \rtimes \pi_0.$$

Neka je $l \geqslant 1$ neparan prirodni broj takav da vrijedi $\theta_{-l}(\pi) \neq 0$. Tada vrijedi

$$\chi_W \delta_r \nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_W \delta_1 \nu^{s_1} \rtimes \theta_{-l}(\pi_0) \twoheadrightarrow \theta_{-l}(\pi).$$

Nadalje, ako je $\theta_{-l}(\pi_0) = L(\chi_W \delta_k' \nu^{t_k} \times \cdots \times \chi_W \delta_1' \nu^{t_1} \rtimes \tau)$, onda je reprezentacija $\theta_{-l}(\pi)$ jedinstveno određena s

$$\theta_{-l}(\pi) = L(\chi_W \delta_r \nu^{s_r}, \ldots, \chi_W \delta_1 \nu^{s_1}, \chi_W \delta_k' \nu^{t_k}, \ldots, \chi_W \delta_1' \nu^{t_1}; \tau).$$

Teorem 0.5 Neka je π ireducibilna generička reprezentacija metaplektičke grupe. Pretpostavimo, nadalje, da je standardni modul

$$\chi_V \delta_r \nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_V \delta_1 \nu^{s_1} \rtimes \pi_0$$

reprezentacije π ireducibilan. Neka je $l \geqslant 0$ paran prirodni broj takav da vrijedi $\theta_{-l}(\pi) \neq 0$. Tada vrijedi

$$\chi_W \delta_r \nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_W \delta_1 \nu^{s_1} \rtimes \theta_{-l}(\pi_0) \twoheadrightarrow \theta_{-l}(\pi).$$

Nadalje, ako je $\theta_{-l}(\pi_0) = L(\chi_W \delta_k' \nu^{t_k} \times \cdots \times \chi_W \delta_1' \nu^{t_1} \rtimes \tau)$, onda je reprezentacija $\theta_{-l}(\pi)$ jedinstveno određena s

$$\theta_{-l}(\pi) = L(\chi_W \delta_r \nu^{s_r}, \ldots, \chi_W \delta_1 \nu^{s_1}, \chi_W \delta_k' \nu^{t_k}, \ldots, \chi_W \delta_1' \nu^{t_1}; \tau).$$

U skladu s napomenom 3.2, ovime smo opisali sve ne-nul liftove promatranih reprezentacija.

Za kraj uvoda dajemo pregled sadržaja po poglavljima.

U prvom poglavlju definiramo objekte s kojima radimo i iznosimo otprije poznate osnovne činjenice o njima. Podsjećamo na definicije ortogonalne, simplektičke i metaplektičke grupe te na neke ključne pojmove vezane uz kvadratne prostore. Navodimo osnovne pojmove koji se vežu uz teoriju reprezentacija grupa, uključujući i pojam glatkoće i dopustivosti reprezentacija. Nakon što iznesemo najbitnije činjenice o strukturi promatranih grupa (paraboličke podgrupe, Levijeva dekompozicija), ponavljamo definicije i osnovna svojstva Jacquetovog funktora i funktora paraboličke indukcije. Za kraj prvog poglavlja radimo kratak pregled nekih klasa reprezentacija s kojima radimo: to su kuspidalne, kvadratno integrabilne i temperirane reprezentacije. Posebnu pažnju pridajemo generičkim reprezentacijama. Iskazujemo Langlandsovu klasifikaciju ireducibilnih reprezentacija te podsjećamo na formule za računanje (semisimplifikacije) Jacquetovih modula koje ćemo koristiti kasnije u radu.

Drugo poglavlje sadrži najbitnije informacije o theta korespondenciji. Nakon skice konstrukcije koja do nje dovodi, osnovni rezultati vezani za theta korespondenciju dani su u teoremima 2.3 (Howeova dualnost) i 2.4. U sekciji 2.2 uvodimo notaciju koju koristimo u cijelom radu. Slijedi sekcija o Kudlinoj filtraciji koja, osim opisa same filtracije, sadrži iskaze najvažnijih korolara i neke njihove modifikacije (korolari 2.9 i 2.10) koje će biti korisne u kasnijim poglavljima. Kraj poglavlja sadrži kratak pregled poznatih rezultata o theta liftovima: najprije, teorem o liftovima kuspidalnih reprezentacija, zatim rezultate o G. Muića o liftovima reprezentacija diskretne serije i, naposljetku, opis liftova temperiranih reprezentacija H. Atobea i W. T. Gana. Prije iskaza rezultata podsjećamo na osnovne činjenice o lokalnoj Langlandsovoj korespondenciji koju navedeni autori koriste kako bi opisali liftove temperiranih reprezentacija.

U trećem poglavlju dolazimo do prvih originalnih rezultata; u njemu iznosimo potpuni opis prvih ne-nul liftova generičkih reprezentacija. Prvi je rezultat teorem 3.1 o indeksu prvog pojavljivanja; do njega dolazimo jednostavnom primjenom Kudline filtracije i činjenice da su standardni moduli promatranih reprezentacija ireducibilni. Slijede dokazi teorema 3.7, odnosno 3.10, koji određuju izgled prvih ne-nul liftova. Do ovih teorema dolazimo analizom velikog theta lifta temperirane reprezentacije π_0 koja se pojavljuje u standardnom modulu; velik dio ove diskusije o subkvocijentima velikog theta lifta oslanja se na radove G. Muića o reprezentacijama diskretne serije.

U četvrtom (i posljednjem) poglavlju opisujemo sve ostale liftove. Poglavlje započinjemo pregledom nekih bitnih činjenica o ireducibilnosti induciranih reprezentacija opće linearne grupe, koje je u svojem radu [40] iznio A. Zelevinsky. Iz njih izvodimo korolare koje koristimo u daljnjoj diskusiji. Nastavljamo, kao u prethodnom poglavlju, s detaljnom analizom mogućih subkvocijenata velikog theta lifta reprezentacije π_0. Dokaz propozicije 4.7 (tehničko) je središte rezultata dobivenih u ovom poglavlju. U preostalim odjeljcima radimo po slučajevima; tehničkom diskusijom dolazimo od dobivenih epimorfizama do zaključaka o standardnim modulima promatranih liftova. Dobiveni rezultati iskazani su u teoremima 4.23 (za reprezentacije simplektičke grupe), odnosno 4.26 (za reprezentacije metaplektičke grupe).

Za kraj poglavlja (i rada) izdvajamo jednu bitnu posljedicu: rezultati dobiveni u ovom poglavlju omogućuju sistematičnu konstrukciju velikog broja primjera unitarizabilnih reprezentacija. Iskazujemo odgovarajuće teoreme i dajemo nekoliko konkretnih primjera.

Poglavlje 1

Reprezentacije p-adskih grupa

1.1 p-adske grupe

Sve grupe koje se pojavljuju u ovom radu bit će definirane nad nekim lokalnim nearhimedskim poljem. Kažemo da je polje $\mathbb{F}$ lokalno ako je na njemu definirana nediskretna topologija uz koju je $\mathbb{F}$ lokalno kompaktan prostor. Na takvom polju možemo definirati apsolutnu vrijednost; ukoliko je ona nearhimedska, to jest ako zadovoljava

$$|x + y| \leqslant \max\{|x|, |y|\},$$

kažemo da se radi o nearhimedskom lokalnom polju.

Do na izomorfizam, svako lokalno nearhimedsko polje karakteristike 0 jednako je nekom konačnom proširenju polja p-adskih brojeva $\mathbb{Q}_p$. Dokaz ove činjenice, kao i sistematičan opis lokalnih polja, može se naći u Weilovoj knjizi [39]. U nastavku fiksiramo neko lokalno nearhimedsko polje te ga označavamo s $\mathbb{F}$.

Neka je sada V konačnodimenzionalni vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ na kojem je definirana simetrična bilinearna forma

$$(\cdot, \cdot)\colon V \times V \to \mathbb{F}.$$

Kažemo da je V **kvadratni prostor**.

Pomoću ovakve forme uvodimo relaciju ortogonalnosti na V: kažemo da su vektori $v, w \in V$ ortogonalni ako vrijedi $(v, w) = 0$. Za svaki podskup $S \subseteq V$ možemo promatrati skup svih vektora ortogonalnih na S:

$$S^0 = \{v \in V : (v, s) = 0, \forall s \in S\}.$$

Kažemo da je forma $(\cdot, \cdot)$ **nedegenerirana** ako vrijedi $V^0 = \{0\}$. U nastavku pretpostavljamo da su forme s kojima radimo nedegenerirane.

Prvu klasu grupa koje proučavamo čine grupe izometrija kvadratnih prostora. Za kvadratni prostor V s nedegeneriranom formom $(\cdot,\cdot)$ definiramo **ortogonalnu grupu** prostora V:

$$\mathrm{O}(V) = \{A \in \mathrm{GL}(V), (Av, Aw) = (v, w), \forall v, w \in V\},$$

pri čemu smo s $\mathrm{GL}(V)$ označili grupu svih regularnih linearnih operatora na prostoru V.

Slično, možemo krenuti od konačnodimenzionalnog prostora W i nedegenerirane bilinearne forme

$$\langle \cdot,\cdot \rangle \colon W \times W \to \mathbb{F},$$

koja je ovog puta antisimetrična, tj. zadovoljava $\langle v, w\rangle = -\langle w, v\rangle, \forall v, w \in W$.

U ovom slučaju kažemo da je W simplektički prostor te definiramo odgovarajuću **simplektičku grupu**:

$$\mathrm{Sp}(W) = \{A \in \mathrm{GL}(W) : \langle Av, Aw\rangle = \langle v, w\rangle, \forall v, w \in W\}.$$

Za razliku od ortogonalne i simplektičke, **metaplektička grupa** nije matrična grupa: ne može se interpretirati kao podgrupa grupe $\mathrm{GL}(V)$ na nekom vektorskom prostoru. Da bismo je definirali, trebamo pojam centralnog proširenja grupe. Kažemo da je grupa G dobivena centralnim proširenjem grupe Q grupom N ako postoji kratki egzaktni niz

$$1 \to N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} Q \to 1,$$

pri čemu je slika grupe N sadržana u centru grupe G. Kažemo da je ovakvo centralno proširenje netrivijalno ako se epimorfizam p ne cijepa, to jest ako ne postoji homomorfizam $s\colon Q \to G$ takav da vrijedi $p \circ s = id_Q$.

Pokazuje se da simplektička grupa $\mathrm{Sp}(W)$ ima do na izomorfizam jedinstveno netrivijalno centralno proširenje grupom $\mu_2 = \{\pm 1\}$, koje označavamo s $\mathrm{Mp}^{(2)}(W)$. Ulaganjem grupe μ_2 u $\mathbb{C}^\times$ dobivamo centralno proširenje grupe $\mathrm{Sp}(W)$ grupom $\mathbb{C}^\times$. Tako definiranu grupu nazivamo metaplektičkom grupom i označavamo s $\mathrm{Mp}(W)$. Prema tome, imamo

$$1 \to \mathbb{C}^\times \to \mathrm{Mp}(W) \to \mathrm{Sp}(W) \to 1.$$

Skupovno vrijedi jednakost $\mathrm{Mp}(W) = \mathrm{Sp}(W) \times \mathbb{C}^\times$, no množenje je netrivijalno: za $g_1, g_2 \in \mathrm{Sp}(W)$ i $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^\times$ imamo

$$(g_1, z_1) \cdot (g_2, z_2) = (g_1 g_2, c(g_1, g_2) z_1 z_2),$$

pri čemu smo sa c označili tzv. Raov kociklus. Radi se o posebnom preslikavanju

$$c\colon \mathrm{Sp}(W) \times \mathrm{Sp}(W) \to \{\pm 1\}$$

koje zadovoljava $c(g_1, g_2)c(g_1g_2, g_3) = c(g_1, g_2g_3)c(g_2, g_3), \forall g_1, g_2, g_3 \in \mathrm{Sp}(W)$.

Detaljan opis konstrukcije metaplektičke grupe i Raovog kociklusa može se pronaći u Kudlinim bilješkama, [18].

Napomenimo da se topologija polja $\mathbb{F}$ prirodno prenosi na sve grupe opisane u ovom odjeljku; drugim riječima, sve ove grupe su topološke grupe. Bitno je dodati da se radi o **totalno nepovezanim lokalno kompaktnim** grupama: svaka točka ima bazu okolina koje su istovremeno otvorene i kompaktne.

1.1.1 Kvadratni prostori

Prije nastavka iznosimo kratak pregled najvažnijih činjenica o kvadratnim prostorima koje koristimo u radu. Opsežnije izlaganje može se naći u Serreovoj knjizi [32].

Neka je V kvadratni prostor s nedegeneriranom bilinearnom simetričnom formom

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \colon V \times V \to \mathbb{F}.$$

Za vektor $v \in V$ kažemo da je **izotropan** ako vrijedi $\langle v, v \rangle = 0$; u suprotnom kažemo da je **anizotropan**. Kažemo da je prostor V anizotropan ako su svi ne-nul vektori u V anizotropni.

Ukoliko postoji potprostor $W \subseteq V$ takav da vrijedi $W^0 = W$, kažemo da je prostor V **rascijepljen**. Takav V je nužno parne dimenzije, te se može prikazati kao ortogonalna suma tzv. hiperboličkih ravnina – prostora razapetih s dva izotropna vektora v, w koji zadovoljavaju $\langle v, w \rangle \neq 0$.

Ovi pojmovi potrebni su da bismo iskazali Wittov teorem o dekompoziciji: svaki kvadratni prostor V s nedegeneriranom formom može se jedinstveno do na izomorfizam rastaviti na ortogonalnu sumu

$$V = V_a \oplus V_h$$

pri čemu je V_a anizotropni, a V_h rascijepljeni kvadratni prostor. Ovakav rastav prostora V zove se **Wittova dekompozicija**.

Za proizvoljnu bazu $(e_1, \ldots, e_m)$ prostora V možemo konstruirati matricu $A \in M_m(\mathbb{F})$:

$$A = [a_{ij}], \quad a_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle.$$

Ova matrica očito ovisi o odabiru baze: drugi odabir baze rezultirao bi drugom matricom A', no jednostavan račun pokazuje da vrijedi

$$\det A \equiv \det A' \pmod{(\mathbb{F}^\times)^2}.$$

Zbog toga možemo definirati **diskriminantu** prostora V kao

$$\mathrm{disc}(V) \in \mathbb{F}^\times/(\mathbb{F}^\times)^2, \quad \mathrm{disc}(V) \equiv \det A \pmod{(\mathbb{F}^\times)^2}.$$

Još jedan pojam potreban za opis kvadratnih prostora je **Hilbertov simbol**. Radi se o funkciji $(\cdot,\cdot)\colon \mathbb{F}^\times \times \mathbb{F}^\times \to \{\pm 1\}$ definiranoj s

$$(a,b) = \begin{cases} 1, & \text{ako jednadžba } z^2 = ax^2 + by^2 \text{ ima ne-nul rješenje } (x,y,z) \in \mathbb{F}^3 \\ -1, & \text{u suprotnom.} \end{cases}$$

U kasnijim poglavljima često ćemo koristiti karakter $\chi_V\colon \mathbb{F}\times \to \{\pm 1\}$ zadan s

$$\chi_V(x) = (x, (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} \mathrm{disc} V),$$

pri čemu smo s m označili dimenziju prostora V. Osnovna svojstva Hilbertovog simbola ([32, poglavlje III]) pokazuju da je ovime doista dobro definiran karakter grupe $\mathbb{F}^\times$.

Pomoću Hilbertovog simbola može se definirati i tzv. **Hasseova invarijanta** kvadratnog prostora $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Pokazuje se da je kvadratni prostor s nedegeneriranom formom jedinstveno do na (izometrički) izomorfizam određen svojom dimenzijom, diskriminantom i Hasseovom invarijantom ([32, poglavlje IV, 2.3]).

Napomenimo da iste pojmove možemo promatrati i za simplektički prostor, no u tom je slučaju situacija sasvim jednostavna. Naime, nije teško vidjeti da je svaki simplektički prostor W rascijepljen – drugim riječima, anizotropni dio je trivijalan. Također, pokazuje se da uvijek vrijedi $\mathrm{disc}(W) = 1$, stoga je χ_W u ovom slučaju trivijalni karakter.

1.2 Osnovni pojmovi teorije reprezentacija

Osnovni objekti koje proučavamo u ovom radu su reprezentacije grupa. Reprezentacija grupe G na vektorskom prostoru V je svako preslikavanje

$$\pi\colon G \to \mathrm{GL}(V)$$

za koje vrijedi $\pi(g_1g_2) = \pi(g_1)\pi(g_2)$. Prostor V zove se prostor reprezentacije π, no ponekad se terminologija koristi slobodnije pa se i prostor V kratko naziva reprezentacijom grupe G. Mi ćemo uvijek pretpostavljati da je V (ne nužno konačnodimenzionalan) vektorski prostor nad poljem kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$. Nadalje, ograničit ćemo se na promatranje tzv. glatkih, odnosno dopustivih reprezentacija:

Definicija. Neka je G totalno nepovezana lokalno kompaktna grupa. Kažemo da je reprezentacija $\pi\colon G \to \mathrm{GL}(V)$

- **glatka**, ako je za svaki element $v \in V$ skup

$$\{g \in G : \pi(g)v = v\}$$

  (to jest, stabilizator od v) otvoren u G

- **dopustiva**, ako je glatka te ako je za svaku otvorenu podgrupu $U \subseteq V$ prostor

$$V^U = \{v \in V : \pi(u)v = v, \forall u \in U\}$$

  konačnodimenzionalan.

Napomena.
- Glatkoću možemo promatrati kao svojevrsni uvjet neprekidnosti reprezentacije (π, V). Promotrimo preslikavanje $G \times V \to V$ zadano s

$$(g, v) \mapsto \pi(g)v.$$

  Nije teško pokazati da je, uvedemo li na V diskretnu topologiju, neprekidnost ovog preslikavanja ekvivalentna s glatkoćom reprezentacije π.

- Ako nije drugačije specificirano, smatramo da su sve reprezentacije s kojima radimo glatke. U slučajevima kada (π, V) nije glatka obično se ograničavamo na promatranje reprezentacije (π, V_∞). Ovdje smo s V_∞ označili skup svih glatkih vektora (onih čiji je stabilizator otvoren) u V. Nije teško pokazati da se radi o invarijantnom potprostoru prostora V.

U nastavku podsjećamo na nekoliko standardnih pojmova vezanih za reprezentacije grupa. Neka je $\pi\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ reprezentacija. Ako je potprostor W prostora V G-invarijantan, to jest ako vrijedi

$$\pi(g)w \in W, \quad \forall g \in G, w \in W,$$

onda možemo promatrati reprezentaciju $\pi\colon G \to \mathrm{GL}(W)$. Kažemo da se radi o **podreprezentaciji** (subreprezentaciji) reprezentacije π. Također, ako je potprostor W invarijantan, djelovanje grupe prirodno se prenosi na kvocijentni prostor V/W. Tako dobivena reprezentacija zove se **kvocijentna reprezentacija** reprezentacije π ili, kraće, **kvocijent**.

Kažemo da je reprezentacija π na vektorskom prostoru V **ireducibilna** ako nema netrivijalnih podreprezentacija, to jest ako su jedine podreprezentacije $\{0\}$ i V. U suprotnom, kažemo da se radi o reducibilnoj reprezentaciji. Ako za svaku podreprezentaciju W postoji druga podreprezentacija U takva da je V direktna suma W i U (ekvivalentno, ako je V direktna suma ireducibilnih podreprezentacija), kažemo da je reprezentacija π **potpuno reducibilna**.

Posebno važnu klasu reprezentacija čine **unitarizabilne reprezentacije**. Kažemo da je reprezentacija (π, V) grupe G unitarizabilna ako na prostoru V možemo definirati skalarni produkt u odnosu na koji je svaki operator $\pi(g), g \in G$ unitaran.

Preslikavanja između (prostora) reprezentacija nazivaju se **preplitanja**. Preciznije, neka su π i ρ reprezentacije grupe G na prostorima V, odnosno W. Za linearni operator $A \in \mathrm{L}(V, W)$ kažemo da je preplitanje između reprezentacija π i ρ ako vrijedi

$$A(\pi(g)v) = \rho(g)Av, \quad \forall v \in V, g \in G.$$

Skup svih preplitanja između reprezentacija π i ρ označava se s $\mathrm{Hom}_G(\pi, \rho)$.

Koristimo uobičajene nazive za surjekcije, injekcije i bijekcije: epimorfizam, monomorfizam (ulaganje), izomorfizam. Ukoliko postoji izomorfizam između reprezentacija π_1 i π_2, kažemo da su te reprezentacije **izomorfne** i pišemo $\pi_1 \cong \pi_2$. Skup svih klasa (modulo izomorfizam) ireducibilnih reprezentacija grupe G označavamo s Irr G.

Nije teško vidjeti da su jezgra i slika preplitanja uvijek podreprezentacije. Ova činjenica ima zanimljivu posljedicu koju ćemo često koristiti, stoga je sada ističemo. Neka su Π i π reprezentacije grupe G, pri čemu je π ireducibilna. Tada vrijedi:

- svako netrivijalno preplitanje $\Pi \to \pi$ je epimorfizam (pišemo $\Pi \twoheadrightarrow \pi$)
- svako netrivijalno preplitanje $\pi \to \Pi$ je ulaganje (pišemo $\pi \hookrightarrow \Pi$).

Posebno, ako su π i σ ireducibilne reprezentacije, onda je svako netrivijalno preplitanje $\pi \to \sigma$ izomorfizam. Uz ovo vežemo i sljedeću jednostavnu, ali neobično korisnu tvrdnju.

Propozicija 1.1 (Schurova lema) Neka je π dopustiva ireducibilna reprezentacija grupe G. Tada je $\mathrm{Hom}_G(\pi, \pi) \cong \mathbb{C}$.

Napomena. Dokaz gornje tvrdnje zasniva se na činjenici da operator na konačnodimenzionalnom kompleksnom prostoru ima neprazan spektar. Budući da općenito radimo s beskonačnodimenzionalnim reprezentacijama, ovdje je ključno da je π dopustiva.

Pretpostavimo sada da za reprezentaciju π na prostoru V postoji konačan rastući niz podreprezentacija

$$0 = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \cdots \subsetneq V_n = V$$

takav da je svaki od uzastopnih kvocijenata V_i/V_{i-1} ireducibilna reprezentacija. Tada kažemo da je reprezentacija π **konačne duljine**. Ovako dobiven niz ireducibilnih reprezentacija nazivamo kompozicionim nizom reprezentacije π; za danu reprezentaciju nije nužno jedinstven, ali pokazuje se da je (multi)skup ireducibilnih reprezentacija koje se u njemu pojavljuju jedinstveno određen do na poredak i izomorfizam. Broj pojavljivanja ireducibilne reprezentacije τ u kompozicionom nizu od π naziva se kratnost reprezentacije τ u π i označava s $m(\tau : \pi)$.

Još jedna konstrukcija koju ćemo često koristiti je **tenzorski produkt** reprezentacija. Ako je (π, V) reprezentacija grupe G, a (ρ, H) reprezentacija grupe H, onda na prostoru

$V \otimes W$ možemo definirati reprezentaciju $\pi \otimes \rho$ grupe $G \times H$ na sljedeći način:

$$(\pi \otimes \rho)(g,h)(v \otimes w) = \pi(g)v \otimes \rho(h)w, \quad \forall g \in G, h \in H, v \in V, w \in W.$$

Ovako dobivena reprezentacija zove se vanjski tenzorski produkt reprezentacija π i ρ.

Za kraj ovog odjeljka, prisjetimo se definicije kontragredijentne reprezentacije. Ako je π reprezentacija grupe G na prostoru V, možemo na dualnom prostoru V^* definirati reprezentaciju π^* formulom

$$[\pi^*(g)f]v = f(\pi(g^{-1})v), \quad \forall g \in G, v \in V, f \in V^*.$$

Ova reprezentacija nije glatka, stoga promatramo samo njezin glatki dio. Tako dobivena reprezentacija naziva se **kontragredijentna reprezentacija** reprezentacije π i označava s $(\tilde{\pi}, \tilde{V})$. Često koristimo i oznaku $\pi^\vee$.

Nije teško pokazati da za reprezentacije V i W grupe G vrijedi

$$\mathrm{Hom}_G(V, \tilde{W}) \cong \mathrm{Hom}_G(W, \tilde{V}).$$

1.3 Paraboličke podgrupe

Prije nego što krenemo na opis funktora koji se pojavljuju u teoriji dopustivih reprezentacija, moramo podrobnije opisati strukturu grupa s kojima radimo – preciznije, zanimaju nas **paraboličke podgrupe**.

Za sasvim općenitu definiciju paraboličke podgrupe morali bismo zaći dublje u teoriju algebarskih grupa; ipak, u ovom ćemo radu uvijek promatrati neku od grupa opisanih u prvom odjeljku: $\mathrm{O}(V), \mathrm{Sp}(W), \mathrm{Mp}(W)$ ili $\mathrm{GL}(V)$. U ovim konkretnim slučajevima imamo relativno jednostavan i operativan opis paraboličkih podgrupa.

Krenimo od opće linearne grupe $\mathrm{GL}(V)$. Fiksirajmo neki rastav prostora V na direktnu sumu potprostora:

$$V = W_1 \dotplus W_2 \dotplus \cdots \dotplus W_n.$$

Stavimo li $V_k = \sum_{i=1}^{k} W_k$, dobivamo (parcijalnu) zastavu u prostoru V, to jest strogo rastući niz potprostora

$$\{0\} \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_k = V.$$

Skup

$$P = \{A \in \mathrm{GL}(V) : AV_i = V_i, \forall i\},$$

to jest skup svih operatora iz $\mathrm{GL}(V)$ koji fiksiraju ovu zastavu, čini podgrupu grupe $\mathrm{GL}(V)$. Tako dobivene podgrupe nazivamo paraboličkim podgrupama grupe $\mathrm{GL}(V)$. U posebnom slučaju kada su prostori W_i jednodimenzionalni dobivamo minimalne paraboličke podgrupe – njih nazivamo **Borelovim podgrupama**.

Istaknimo još dvije podgrupe grupe $\mathrm{GL}(V)$ dobivene iz gornjeg rastava prostora V:

$$\begin{aligned} M &= \{A \in \mathrm{GL}(V) : AW_i = W_i, \forall i\}, \\ N &= \{A \in P : \overline{A} \text{ djeluje trivijalno na } V_i/V_{i-1}, \forall i\}, \end{aligned}$$

pri čemu smo ovdje s $\overline{A}$ označili operator zadan djelovanjem operatora A na kvocijentnom prostoru V_i/V_{i-1}. Podgrupa M (tzv. Levijeva podgrupa) normalizira grupu N, a važna činjenica koja povezuje ove podgrupe dana je takozvanom **Levijevom dekompozicijom**: vrijedi jednakost

$$P = MN.$$

Uočimo da ovdje vrijedi

$$M \cong \mathrm{GL}_{d_1}(\mathbb{F}) \times \cdots \times \mathrm{GL}_{d_n}(\mathbb{F}),$$

pri čemu smo s d_i označili $\dim W_i$ za $i = 1, \ldots, n$.

Prije opisa paraboličkih podgrupa grupe $\mathrm{O}(V)$ trebamo ukratko objasniti pojam **Wittovih tornjeva**. Prisjetimo se Wittove dekompozicije: svaki kvadratni prostor V možemo zapisati kao ortogonalnu sumu

$$V \cong V_a \oplus H_1 \oplus \cdots \oplus H_r,$$

pri čemu je prostor V_a anizotropan, a $H_1, \ldots, H_r$ su hiperboličke ravnine. U ovakvom je rastavu prostor V_a jedinstveno određen do na izomorfizam. Broj r je također jedinstveno određen; kažemo da se radi o Wittovom indeksu prostora V. Napomenimo da rastav rascijepljenog prostora na ortogonalnu sumu hiperboličkih ravnina nije jedinstven. Ipak, najčešće ga fiksiramo, a paraboličke podgrupe dobivene iz tog fiksnog rastava na način opisan u nastavku nazivamo **standardnima**.

Fiksiramo li anizotropni prostor V_a, vidimo da za svaku dimenziju $m = \dim V_a + 2r$, ($r \geqslant 0$) postoji do na izomorfizam jedinstveni kvadratni prostor V_m dimenzije m s anizotropnim dijelom V_a. Niz prostora (V_m) zove se Wittov toranj pridružen anizotropnom prostoru V_a.

Napomena. Iako bi imalo smisla indeksirati prostore u Wittovom tornju skupom $\mathbb{N}_0$, mi ćemo, radi usklađenosti notacije u kasnijim poglavljima, redovito indeksirati prostore u tornju pomoću njihove dimenzije.

Neka je sada $V = V_m$ neki kvadratni prostor dimenzije m. Uzmemo li prostor $V_{m'}$, pri čemu je $m' < m$, iz istog Wittovog tornja, možemo pisati

$$V = V_{m'} \oplus H_1 \oplus \cdots \oplus H_s, \quad (m = m' + 2s).$$

Odaberemo li za svaku hiperboličku ravninu H_i bazu $\{e_i, e_i'\}$, možemo za svaki $k = 1, \ldots, s$ definirati $U_k = \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_k\}$ i $U_k' = \operatorname{span}\{e_1', \ldots, e_k'\}$; tada imamo

$$V = U_s \oplus V_{m'} \oplus U_s'.$$

Standardne paraboličke podgrupe grupe $\mathrm{O}(V)$ dobivamo izborom dimenzije $m' < m$ i particijama broja s. Za svaki rastav $s = s_1 + \cdots + s_k$ broja s (pri čemu su $s_i \in \mathbb{N}$) možemo promatrati zastavu $U_{s_1} \subset U_{s_1+s_2} \subset \ldots \subset U_s$. Odgovarajuća parabolička podgrupa sastoji se od svih operatora iz $\mathrm{O}(V)$ koji stabiliziraju ovakvu zastavu. Slično kao u slučaju $\mathrm{GL}(V)$, imamo Levijevu dekompoziciju $P = MN$, pri čemu je M grupa svih operatora iz $\mathrm{O}(V)$ koji fiksiraju prostore $\operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_{s_1}\}$, $\operatorname{span}\{e_{s_1+1}, \ldots, e_{s_1+s_2}\}$, itd. Važno je napomenuti da vrijedi

$$M \cong \mathrm{GL}_{s_1}(\mathbb{F}) \times \cdots \times \mathrm{GL}_{s_k}(\mathbb{F}) \times \mathrm{O}(V_{m'}).$$

Sasvim analogno definiramo paraboličke podgrupe za grupu $\mathrm{Sp}(W)$. Štoviše, u ovom slučaju je situacija nešto jednostavnija: budući da ne postoji netrivijalan anizotropni simplektički prostor, imamo samo jedan Wittov toranj. Levijeve komponente paraboličkih podgrupa su u ovom slučaju oblika

$$\mathrm{GL}_{s_1}(\mathbb{F}) \times \cdots \times \mathrm{GL}_{s_k}(\mathbb{F}) \times \mathrm{Sp}(W_{n'}).$$

Konačno, paraboličke podgrupe metaplektičke grupe dobivamo iz odgovarajućih podgrupa simplektičke grupe na istom prostoru. Za svaku paraboličku podgrupu $P = MN$ grupe $\mathrm{Sp}(W)$ možemo promatrati njezinu prasliku po kanonskoj surjekciji $\mathrm{Mp}(W) \to \mathrm{Sp}(W)$. Time dobivamo paraboličku podgrupu $\widetilde{P}$ grupe $\mathrm{Mp}(W)$. Nadalje, ulaganje $N \to \mathrm{Sp}(W)$ se podiže do ulaganja $N \to \mathrm{Mp}(W)$ te imamo Levijevu dekompoziciju

$$\widetilde{P} = \widetilde{M}N.$$

Za grupe $\mathrm{GL}_k(\mathbb{F})$ također možemo promatrati odgovarajuće natkrivače $\widetilde{\mathrm{GL}_k}(\mathbb{F})$ te se pokazuje da postoji epimorfizam grupa

$$\widetilde{\mathrm{GL}}_{s_1}(\mathbb{F}) \times \cdots \times \widetilde{\mathrm{GL}}_{s_k}(\mathbb{F}) \times \mathrm{Mp}(W_{n'}) \twoheadrightarrow \widetilde{M}.$$

U ovom slučaju se ne radi o izomorfizmu, no već i ovakav opis bit će dovoljan da metode koje koristimo za proučavanje reprezentacija grupe $\mathrm{Sp}(W)$ primijenimo i na grupu $\mathrm{Mp}(W)$. Detaljniji opis paraboličkih podgrupa metaplektičke grupe može se naći u [19].

Napomena. U nastavku koristimo sljedeću konvenciju u notaciji. Ukoliko nije drugačije specificirano, oznaka G_n uvijek će implicirati da smo fiksirali neki Wittov toranj te da promatramo grupu Sp, Mp ili O (ovisno o tornju) pridruženu prostoru dimenzije n iz tog tornja. Nadalje, za $s = (s_1, s_2, \dots, s_k) \in \mathbb{N}^k$ s P_s označavamo standardnu paraboličku podgrupu grupe G_n čiji je Levijev dio izomorfan s (odnosno, ako je $G_n = \mathrm{Mp}$, čiji Levijev dio odgovara)

$$\mathrm{GL}_{s_1}(\mathbb{F}) \times \cdots \times \mathrm{GL}_{s_k}(\mathbb{F}) \times G_{n-2t}, \quad t = s_1 + \cdots + s_k.$$

Minimalne paraboličke podgrupe i u ovom slučaju nazivamo Borelovima.

1.4 Parabolička indukcija i Jacquetov funktor

U ovom odjeljku opisujemo dva funktora ključna za teoriju (dopustivih) reprezentacija. Prije samih definicija, trebat će nam nekoliko detalja iz teorije lokalno kompaktnih grupa.

Neka je G lokalno kompaktna topološka grupa. Na takvoj grupi možemo definirati Haarovu mjeru μ koja je invarijantna na desne translacije: vrijedi

$$\mu(Bg) = \mu(B), \quad \forall g \in G \text{ i Borelov skup } B \subseteq G.$$

Takva je mjera jedinstvena do na skaliranje pozitivnom konstantom; nazivamo je desnom Haarovom mjerom na grupi G. Analogno, možemo promatrati i lijevu Haarovu mjeru (koja ne mora biti jednaka desnoj).

Ako je μ desna Haarova mjera, onda za svaki fiksni $g \in G$ možemo promatrati mjeru

$$B \mapsto \mu(g^{-1}B);$$

očito je i ona invarijantna na desne translacije, stoga se također radi o desnoj Haarovoj mjeri. Iz jedinstvenosti sada slijedi da postoji konstanta $\delta_G(g)$ takva da vrijedi

$$\mu(g^{-1}B) = \delta_G(g)\mu(B), \quad \text{za svaki Borelov skup } B.$$

Time je definirano preslikavanje $g \mapsto \delta_G(g)$, to jest $\delta_G \colon G \to \mathbb{R}^+$. Pokazuje se da je δ_G homomorfizam grupa; kažemo da se radi o **modularnom karakteru** grupe G.

Ukoliko je modularni karakter trivijalan (ekvivalentno, ako je lijeva Haarova mjera jednaka desnoj), kažemo da je grupa G unimodularna. Mi ćemo modularni karakter najčešće promatrati na paraboličkim podgrupama, koje uglavnom nisu unimodularne.

Sada smo spremni za opis paraboličke indukcije. Neka je G jedna od grupa opisanih u prvom odjeljku; fiksirajmo i neku njezinu paraboličku podgrupu $P = MN$. Neka je (σ, U) reprezentacija grupe M. Takva se reprezentacija može proširiti do reprezentacije grupe P ako zadamo da elementi grupe N djeluju trivijalno. Označimo s V prostor svih funkcija $f \colon G \to U$ koje zadovoljavaju sljedeće uvjete:

- $f(pg) = \delta_P(p)^{1/2}\sigma(p)f(g)$, za svaki $p \in P$ i $g \in G$
- postoji kompaktna otvorena podgrupa K od G takva da vrijedi $f(gk) = f(g)$ za svaki $g \in G$ i $k \in K$.

Grupa G djeluje na prostor V desnim translacijama; drugim riječima, možemo definirati reprezentaciju π grupe G na prostoru V na sljedeći način:

$$[\pi(g)f](x) = f(xg), \quad \forall g, x \in G, f \in V.$$

Ovako definiranu reprezentaciju (i odgovarajući prostor V) nazivamo reprezentacijom **parabolički induciranom** iz σ te označavamo s $\mathrm{Ind}_P^G(\sigma)$. U sljedećoj propoziciji (bez dokaza) navodimo najvažnije činjenice[1] o paraboličkoj indukciji.

Propozicija 1.2

(i) Paraboličku indukciju možemo promatrati kao funktor s kategorije glatkih reprezentacija grupe M u kategoriju glatkih reprezentacija grupe G. Ovaj funktor je egzaktan.

(ii) Ako je σ dopustiva, onda je i $\mathrm{Ind}_P^G(\sigma)$ dopustiva.

(iii) Ako je σ konačne duljine, onda je i $\mathrm{Ind}_P^G(\sigma)$ takva.

(iv) Indukcija komutira s uzimanjem kontragredijenta: $\mathrm{Ind}_P^G(\tilde{\sigma}) = \mathrm{Ind}_P^G(\sigma)^{\sim}$.

(v) Ako je σ unitarna, onda je i $\mathrm{Ind}_P^G(\sigma)$ takva.

(vi) Induciranje u etapama. Neka su $P = M_1N_1$ i $P_2 = M_2N_2$ standardne paraboličke podgrupe sa standardnim Levijevim dekompozicijama takve da vrijedi $P_1 \subseteq P_2$. Ako je σ reprezentacija grupe M_1, onda vrijedi

$$\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\sigma) = \mathrm{Ind}_{P_2}^G(\mathrm{Ind}_{P_1 \cap M_2}^{M_2}(\sigma)).$$

(vii) Indukcija iz asociranih paraboličkih podgrupa. Ako su $P_1 = MN_1$ i $P_2 = MN_2$ dvije (ne nužno standardne) paraboličke podgrupe, a σ reprezentacija grupe M konačne duljine, onda $\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\sigma)$ i $\mathrm{Ind}_{P_2}^G(\sigma)$ imaju iste kompozicione nizove.

Druga važna konstrukcija koju opisujemo je tzv. Jacquetov funktor. Opet promatramo reprezentaciju (π, V) grupe G te fiksiramo neku paraboličku podgrupu $P = MN$. Neka je

$$V_N = \mathrm{span}\{v - \pi(n)v, v \in V, n \in N\}.$$

[1] Svojstva iv i v vrijede zbog normalizacije indukcije faktorom $\delta_P^{1/2}$ koji inače nije ključan.

Budući da M normalizira N, nije teško vidjeti da je prostor V_N M-invarijantan. Zbog toga na kvocijentu V/V_N možemo definirati reprezentaciju π_N grupe M koja djeluje s $\pi_N(m) = \delta_P^{-1/2}(m)\pi(m)$. Ovako dobivenu reprezentaciju grupe M (i njezin prostor) označavamo s $R_P(\pi)$. Kažemo da se radi o **Jacquetovom modulu** reprezentacije π s obzirom na paraboličku podgrupu $P = MN$.

Uočimo da R_P možemo shvatiti kao funktor iz kategorije dopustivih reprezentacija grupe G u kategoriju dopustivih reprezentacija grupe M. Ponovno navodimo ključna svojstva ove konstrukcije.

Propozicija 1.3

(i) Funktor R_P je egzaktan.

(ii) Ako je π dopustiva / konačne duljine, onda je i $R_P(\pi)$ takva.

(iii) Tranzitivnost Jacquetovih modula. Neka su $P_1 = M_1N_1$ i $P_2 = M_2N_2$ standardne paraboličke podgrupe za koje vrijedi $P_1 \subseteq P_2$ te neka je π reprezentacija grupe G. Tada vrijedi
$$R_{P_1}(\pi) = R_{P_1 \cap M_2}(R_{P_2}(\pi)).$$

(iv) Vrijedi
$$R_P(\tilde{\pi}) = \widetilde{R_{\overline{P}}(\pi)},$$
gdje je $\overline{P} = M\overline{N}$ parabolička podgrupa suprotna podgrupi P (takva da vrijedi $P \cap \overline{P} = M$).

Osnovna činjenica koja povezuje paraboličku indukciju i Jacquetov funktor je **Frobeniusov reciprocitet**: postoji prirodni izomorfizam
$$\mathrm{Hom}_G(\pi, \mathrm{Ind}_P^G(\sigma)) \cong \mathrm{Hom}_M(R_P(\pi), \sigma)$$
pri čemu je $P = MN$ parabolička podgrupa, π reprezentacija grupe G, a σ reprezentacija grupe M.

Posljednji rezultat koji ističemo je netrivijalna, ali vrlo korisna činjenica – takozvani drugi Frobeniusov reciprocitet. Vrijedi
$$\mathrm{Hom}_G(\mathrm{Ind}_P^G(\sigma), \pi) \cong \mathrm{Hom}_M(\sigma, R_{\overline{P}}(\pi)).$$

*

* *

Više o osnovnim svojstvima paraboličke indukcije i Jacquetovog funktora može se naći u [5] i [8]. Bernsteinove bilješke [4] sadrže dokaz drugog Frobeniusovog reciprociteta.

1.4.1 Notacija za paraboličku indukciju

Opisat ćemo i nešto precizniju notaciju za parabolički inducirane reprezentacije. Neka je $P = MN$ parabolička podgrupa grupe $G = \mathrm{GL}(V)$. Već smo vidjeli da vrijedi

$$M \cong \mathrm{GL}_{d_1}(\mathbb{F}) \times \cdots \times \mathrm{GL}_{d_n}(\mathbb{F})$$

za neke prirodne brojeve $d_1, \ldots, d_n$, takve da $d_1 + \cdots + d_n = \dim V$. Zbog toga se svaka ireducibilna reprezentacija σ grupe M može zapisati kao tenzorski produkt

$$\sigma = \sigma_1 \otimes \cdots \otimes \sigma_n,$$

pri čemu je σ_i ireducibilna reprezentacija grupe $\mathrm{GL}_{d_i}(\mathbb{F})$, za $i = 1, \ldots, n$. U ovakvoj situaciji umjesto $\mathrm{Ind}_P^G(\sigma)$ pišemo

$$\sigma_1 \times \cdots \times \sigma_n.$$

Slične oznake koristimo i za ostale grupe s kojima radimo. Neka je G_n simplektička ili ortogonalna grupa koja odgovara prostoru dimenzije n u nekom Wittovom tornju. Vidjeli smo da za Levijev faktor M paraboličke podgrupe $P = MN$ vrijedi

$$M \cong \mathrm{GL}_{s_1}(\mathbb{F}) \times \cdots \times \mathrm{GL}_{s_k}(\mathbb{F}) \times G_{n'},$$

pri čemu je $G_{n'}$ grupa koja odgovara prostoru dimenzije $n' = n - 2(s_1 + \cdots + s_k)$ u istom Wittovom tornju. Odavde slijedi[2] da se svaka ireducibilna reprezentacija σ grupe M može pisati u obliku

$$\sigma = \sigma_1 \otimes \cdots \otimes \sigma_k \otimes \tau,$$

gdje su σ_i neke reprezentacije grupa $\mathrm{GL}_{s_i}(\mathbb{F})$ $(i = 1, \ldots, k)$, a τ reprezentacija grupe $G_{n'}$. Odgovarajuću induciranu reprezentaciju $\mathrm{Ind}_P^{G_n}(\sigma)$ sada označavamo sa

$$\sigma_1 \times \cdots \times \sigma_k \rtimes \tau.$$

Do analognog zaključka dolazimo i u slučaju paraboličkih podgrupa metaplektičke grupe. Ako je $\widetilde{P} = \widetilde{M}N$ parabolička podgrupa grupe $\mathrm{Mp}(W_n)$, znamo da postoji epimorfizam

$$\widetilde{\mathrm{GL}}_{s_1}(\mathbb{F}) \times \cdots \times \widetilde{\mathrm{GL}}_{s_k}(\mathbb{F}) \times \mathrm{Mp}(W_{n'}) \twoheadrightarrow \widetilde{M}.$$

Napomenimo da se reprezentacije natkrivačkih grupa $\widetilde{\mathrm{GL}}_{s_i}(\mathbb{F})$ i $\mathrm{Mp}(W)$ dijele na **prave** (eng. *genuine*) i **neprave** na način opisan u Kudlinim bilješkama [18, Napomena 4.1].

[2] Ključno je da su reprezentacije dopustive; radi se zapravo o Teoremu 1 iz D. Flath, Corvallis [6, str. 179–183]

Pokazuje se ([14]) da se svaka reprezentacija grupe $\widetilde{M}$ može pisati u obliku

$$\sigma_1 \otimes \cdots \otimes \sigma_k \otimes \tau.$$

Ovdje su σ_i reprezentacije grupa $\widetilde{\mathrm{GL}}_{s_i}(\mathbb{F})$, a τ je reprezentacija grupe $\mathrm{Mp}(W_{n'})$; nadalje, $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ i τ su sve istovremeno ili prave, ili neprave. Kao i prije, odgovarajuću induciranu reprezentaciju označavamo sa

$$\sigma_1 \times \cdots \times \sigma_k \rtimes \tau.$$

1.4.2 Računanje Jacquetovih modula

Jedna od osnovnih tehnika koje koristimo u radu je računanje Jacquetovih modula za inducirane reprezentacije. Drugim riječima, ako su $P = MN$ i Q standardne paraboličke podgrupe grupe G, a π reprezentacija grupe M, zanima nas struktura reprezentacije $r_Q\left(\mathrm{Ind}_P^G(\pi)\right)$. Osnovni rezultat koji koristimo je tzv. geometrijska lema ([5], [8]), pomoću koje dolazimo do određene filtracije ove reprezentacije.

Mi ćemo uglavnom koristiti algebarsku verziju geometrijske leme koja je vrlo pogodna za računanje. Za takvu formulaciju potrebne su nam određene algebarske strukture koje sada opisujemo.

Za grupu G označimo s $\mathcal{R}(G)$ slobodnu Abelovu grupu nad skupom $\mathrm{Irr}\, G$. Sada za svaku reprezentaciju π grupe G konačne duljine možemo definirati njezinu **semisimplifikaciju**:

$$\mathrm{s.s.}(\pi) = \sum_{\tau \in \mathrm{Irr} G} m(\tau : \pi)\tau \in \mathcal{R}(G).$$

Najprije promatramo geometrijsku lemu za opću linearnu grupu. Uvedimo oznaku $R_n = \mathcal{R}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}))$ i stavimo $R = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}} R_n$. Pridruživanje

$$(\pi_1, \pi_2) \mapsto \pi_1 \times \pi_2$$

originalno definirano paraboličkom indukcijom za reprezentacije π_1 i π_2 grupa $\mathrm{GL}_{n_1}(\mathbb{F})$, odnosno $\mathrm{GL}_{n_2}(\mathbb{F})$ možemo proširiti na preslikavanje $\times \colon R \times R \to R$. Na taj način R postaje komutativni prsten (asocijativnost vrijedi zbog induciranja u etapama, a komutativnost zbog induciranja iz asociranih paraboličkih podgrupa). Uočimo da je preslikavanje $\times$ biaditivno, stoga se faktorizira kroz preslikavanje

$$m \colon R \otimes R \to R.$$

Neka je sada π ireducibilna reprezentacija grupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$. Ako s P_k označimo standardnu paraboličku podgrupu čiji je Levijev faktor $\mathrm{GL}_k(\mathbb{F}) \times \mathrm{GL}_{n-k}(\mathbb{F})$, možemo promatrati $\mathrm{s.s.}\left(r_{P_k}^{\mathrm{GL}_n}(\pi)\right) \in R_k \otimes R_{n-k}$ (ovdje implicitno koristimo činjenicu $\mathcal{R}(\mathrm{GL}_k(\mathbb{F}) \times \mathrm{GL}_{n-k}(\mathbb{F})) =$

$R_k \otimes R_{n-k})$. Sada definiramo

$$m^*(\pi) = \sum_{k=0}^{n} \text{s.s.}\,(r_{P_k}(\pi)) \in \sum_{k=0}^{n} R_k \otimes R_{n-k} \hookrightarrow R \otimes R.$$

Uočimo da se m^* proširuje do aditivnog preslikavanja $m^* \colon R \to R \otimes R$. Ključna posljedica geometrijske leme je sljedeća činjenica (Zelevinsky, [40]): vrijedi

$$m^*(\pi_1 \times \pi_2) = m^*(\pi_1) \times m^*(\pi_2).$$

Pomoću gornje formule lako ćemo računati Jacquetove module induciranih reprezentacija.

Na sličan način postupamo i s preostalim grupama. Neka je G_n simplektička, metaplektička ili ortogonalna grupa koja odgovara prostoru dimenzije n u nekom Wittovom tornju. Uvedimo $R(G) = \bigoplus_n \mathcal{R}(G_n)$. Kao i za opću linearnu grupu, pridruživanje

$$(\pi, \sigma) \mapsto \pi \rtimes \sigma,$$

inicijalno definirano za reprezentacije π i σ grupa GL, odnosno G_n, možemo proširiti do preslikavanja $\rtimes \colon R \times R(G) \to R(G)$. Time $\mathbb{Z}$-modul $R(G)$ postaje R-modul.

Nadalje, za ireducibilnu reprezentaciju π grupe G_n možemo definirati

$$\mu^*(\pi) = \sum_{k} \text{s.s.}\,(r_{P_k}(\pi)) \in \sum_{k} R_k \otimes R(G_{n-2k}) \hookrightarrow R \otimes R(G)$$

pri čemu smo s P_k označili k-tu standardnu maksimalnu paraboličku podgrupu grupe G_n. Ovdje se μ^* proširuje do aditivnog preslikavanja $\mu^* \colon R(G) \to R \otimes R(G)$. Geometrijska lema sada omogućava sličnu formulu kao za opće linearne grupe. Neka je

$$M^* = (m \otimes 1) \circ (\sim \otimes\, m^*) \circ s \circ m^* \colon R \to R \otimes R,$$

gdje smo s 1 označili identitetu na R, s $\sim$ kontragredijent, a sa s transpoziciju $\sum x_i \otimes y_i \mapsto \sum y_i \otimes x_i$. Tada vrijedi (Tadić, [37])

$$\mu^*(\pi \rtimes \sigma) = M^*(\pi) \rtimes \mu^*(\sigma).$$

1.5 Neke klase dopustivih reprezentacija

1.5.1 Kuspidalne reprezentacije

Definicija. Kažemo da je reprezentacija π grupe G **kuspidalna** ako je za svaku pravu paraboličku podgrupu $P \subsetneq G$ Jacquetov modul $r_P^G(\pi)$ trivijalan.

Koristeći Frobeniusov reciprocitet lako dolazimo do sljedeće posljedice: ako je π kuspidalna reprezentacija, onda ne postoje prava parabolička podgrupa $P = MN$ i reprezentacija σ grupe M takve da vrijedi

$$\pi \hookrightarrow \mathrm{Ind}_P^G(\sigma).$$

Štoviše, nije teško pokazati da je ovaj uvjet zapravo ekvivalentan s definicijom: svaka reprezentacija koja nije kuspidalna ulaže se u neku reprezentaciju oblika $\mathrm{Ind}_P^G(\sigma)$.

Napomena. Do na relaciju asociranosti ([5, def. 22]), kuspidalna reprezentacija σ za koju vrijedi $\pi \hookrightarrow \mathrm{Ind}_P^G(\sigma)$ jedinstveno je određena reprezentacijom π. Klasa ekvivalencije (po relaciji asociranosti) reprezentacije σ zajedno s odgovarajućom Levijevom komponentom paraboličke podgrupe P naziva se **kuspidalni nosač** reprezentacije π.

1.5.2 Kvadratno integrabilne i temperirane reprezentacije

Da bismo definirali kvadratno integrabilne reprezentacije trebamo pojam **matričnih koeficijenata** i **centralnog karaktera**. Neka je (π, V) glatka reprezentacija grupe G i $(\tilde{\pi}, \widetilde{V})$ njezin kontragredijent. Za svaki izbor $v \in V, \tilde{v} \in \widetilde{V}$ možemo promatrati funkciju $G \to \mathbb{C}$ oblika

$$g \mapsto \tilde{v}(\pi(g)v).$$

Takve funkcije nazivamo matričnim koeficijentima reprezentacije π.

Nadalje, neka je (π, V) ireducibilna reprezentacija grupe G. Ako je $z \in Z(G)$ element iz centra grupe G, onda je operator $\pi(z)$ netrivijalno preplitanje iz $\mathrm{Hom}_G(\pi, \pi)$. Prema Schurovoj lemi zaključujemo da je $\pi(z)$ skalarni operator: postoji skalar $\omega_\pi(z) \in \mathbb{C}^\times$ takav da vrijedi $\pi(z) = \omega_\pi(z)\mathrm{id}_V$. Nije teško vidjeti da je ovako definirano preslikavanje

$$\omega_\pi \colon Z(G) \to \mathbb{C}^\times$$

homomorfizam grupa. Kažemo da se radi o centralnom karakteru reprezentacije π. Sada smo spremni za definiciju kvadratno integrabilnih reprezentacija:

Definicija. Kažemo da je ireducibilna reprezentacija (π, V) grupe G kvadratno integrabilna modulo centar ako vrijedi

(i) centralni karakter reprezentacije π je unitaran

(ii) apsolutna vrijednost svakog matričnog koeficijenta reprezentacije π je kvadratno integrabilna funkcija na $G/Z(G)$.

Najčešće koristimo neprecizniji (ali kraći) izraz pa kažemo da je π kvadratno integrabilna. Ovakve reprezentacije ćemo također zvati reprezentacijama **diskretne serije**.

Napomenimo odmah da su sve kuspidalne reprezentacije kvadratno integrabilne. Naime, može se pokazati (npr. [8, Teorem 5.2.1]) da su matrični koeficijenti kuspidalnih reprezentacija funkcije s kompaktnim nosačem na $G/Z(G)$, stoga su i kvadratno integrabilne.

Važno svojstvo kvadratno integrabilnih reprezentacija je unitarnost: ako je (π, V) kvadratno integrabilna reprezentacija grupe G, onda na V možemo pomoću matričnih koeficijenata definirati invarijantni skalarni produkt. Preciznije, fiksiramo li neki $f \in \widetilde{V}$ različit od 0, za $u, v \in V$ možemo definirati

$$\langle u, v \rangle = \int_{G/Z(G)} f(\pi(g)u) \cdot \overline{f(\pi(g)v)} \, \mathrm{d}g.$$

Nije teško pokazati da je ovom formulom na V definiran skalarni produkt u odnosu na koji su svi operatori $\pi(g)$ unitarni.

Uz kvadratno integrabilne reprezentacije često spominjemo i nešto širu klasu tzv. **temperiranih reprezentacija**. Za ireducibilnu reprezentaciju π grupe G kažemo da je temperirana ako postoji (ne nužno prava) parabolička podgrupa $P = MN$ grupe G i kvadratno integrabilna reprezentacija σ grupe M za koju vrijedi

$$\pi \hookrightarrow \mathrm{Ind}_P^G(\sigma).$$

Posebno, uzmemo li $P = G$, vidimo da je svaka kvadratno integrabilna reprezentacija ujedno i temperirana. Može se pokazati da su ireducibilne temperirane reprezentacije također unitarizabilne ([4, Prop. 44]).

Napomena 1.4 Vrlo često ćemo koristiti sljedeću važnu činjenicu ([12]): ako je σ ireducibilna kvadratno integrabilna reprezentacija, onda je $\mathrm{Ind}_P^G(\sigma)$ potpuno reducibilna, te su svi njezini ireducibilni subkvocijenti temperirane reprezentacije.

Ponekad ćemo raditi i s reprezentacijama koje su, do na karakter, kvadratno integrabilne ili temperirane. Reći ćemo da je reprezentacija (π, V) esencijalno kvadratno integrabilna (esencijalno temperirana) ako postaje kvadratno integrabilna (temperirana) kada je pomnožimo s nekim karakterom grupe G. Posebno često ćemo koristiti karakter $\nu\colon \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{R}^\times$, definiran s

$$\nu(g) = |det(g)|_F.$$

Lako se pokazuje sljedeća tvrdnja: za svaku ireducibilnu esencijalno temperiranu reprezentaciju (τ, V) grupe $\mathrm{GL}_n(F)$ postoji jedinstveni broj $e(\tau) \in \mathbb{R}^+$ i jedinstvena temperirana (posebno, unitarna) reprezentacija τ^u takva da vrijedi

$$\tau = \nu^{e(\tau)}\tau^u.$$

Kvadratnu integrabilnost i temperiranost reprezentacija najčešće utvrđujemo pomoću tzv. Casselmanovog kriterija ([8, Teorem 4.4.6]). Ovdje ukratko objašnjavamo kako ga koristimo.

Označimo s $(\cdot,\cdot)$ standardni skalarni produkt na $\mathbb{R}^n$, te neka je

$$\beta_i = (\underbrace{1,1,\ldots,1}_{i \text{ puta}},0,0,\ldots,0), \quad i=1,\ldots,n.$$

Neka je π ireducibilna reprezentacija grupe G_n (pretpostavljamo da nije kuspidalna). Neka je $s=(s_1,s_2,\ldots,s_k)\in\mathbb{N}^k$ k-torka za koju Jacquetov modul $r_{P_s}(\pi)$ ima netrivijalan kuspidalni subkvocijent (posebno, $r_{P_s}(\pi)\neq 0$). Tada su i svi subkvocijenti kuspidalni; neka je σ neki od tih subkvocijenata. Reprezentaciju σ možemo pisati kao

$$\rho_1\otimes\cdots\otimes\rho_k\otimes\rho,$$

pri čemu su ρ_i kuspidalne reprezentacije grupa GL_{s_i} (ili eventualno njihovih natkrivača ako je G_n metaplektička grupa), a ρ kuspidalna reprezentacija grupe $G_{n-|s|}$ ($|s|=s_1+\cdots+s_k$). Neka je

$$e(\sigma)=(\underbrace{e(\rho_1),\ldots,e(\rho_1)}_{s_1 \text{ puta}},\ldots,\underbrace{(\rho_k),\ldots,e(\rho_k)}_{s_k \text{ puta}},\underbrace{0,\ldots,0}_{n-|s| \text{ puta}}).$$

Casselmanov kriterij garantira sljedeće: ako je π kvadratno integrabilna, onda vrijedi

$$(e(\sigma),\beta_{s_1})>0,(e(\sigma),\beta_{s_1+s_2})>0,\ldots,(e(\sigma),\beta_{|s|})>0.$$

Vrijedi i obrat: ako su za svaki par s i σ kao gore ispunjeni ovi uvjeti, onda je π kvadratno integrabilna.

Isti kriterij možemo primijeniti i na temperirane reprezentacije ako stroge nejednakosti zamijenimo slabijim uvjetima $(e(\sigma),\beta)\geqslant 0$.

1.5.3 Kvadratno integrabilne reprezentacije grupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$

U ovom odjeljku navodimo neke od najvažnijih rezultata iz [40] o reprezentacijama opće linearne grupe.

Neka je ρ kuspidalna reprezentacija grupe $\mathrm{GL}_{n_0}(\mathbb{F})$. Svaki skup oblika $\{\rho,\nu^1\rho,\ldots,\nu^k\rho\}$, $k\in\mathbb{N}_0$, nazivamo **segmentom** i označavamo s $[\rho,\nu^k\rho]$. Svakom segmentu $\Delta=[\rho,\nu^k\rho]$ možemo pridružiti induciranu reprezentaciju

$$\nu^k\rho\times\nu^{k-1}\rho\times\cdots\times\nu\rho\times\rho.$$

Pokazuje se da ova reprezentacija ima jedinstvenu ireducibilnu podreprezentaciju, koju označavamo s $\delta(\Delta)$. Ovako dobivena reprezentacija je esencijalno kvadratno integrabilna. Obratno, svaka esencijalno kvadratno integrabilna reprezentacija grupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ može se na jedinstven način prikazati kao $\delta(\Delta)$ za neki segment. Drugim riječima, pridruživanje $\Delta\mapsto$

$\delta(\Delta)$ je bijekcija sa skupa svih segmenata na skup svih esencijalno kvadratno integrabilnih reprezentacija $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}), n \geqslant 1$.

Računanje Jacquetovih modula ovakvih reprezentacija bit će nam olakšano jednostavnom formulom za m^* iz odjeljka 1.4.2. Vrijedi

$$m^*([\rho, \nu^k\rho]) = \sum_{i=-1}^{k} \delta([\nu^{i+1}\rho, \nu^k\rho]) \otimes \delta([\rho, \nu^i\rho]).$$

Slično, imamo

$$M^*([\rho, \nu^k\rho]) = \sum_{i=-1}^{k}\sum_{j=i}^{k} \delta([\nu^{-i}\tilde{\rho}, \tilde{\rho}]) \times \delta([\nu^{j+1}\rho, \nu^k\rho]) \otimes \delta([\nu^{i+i}\rho, \nu^j\rho]).$$

Konačno, navodimo i ključnu činjenicu o reducibilnosti reprezentacije oblika $\delta(\Delta) \times \delta(\Delta')$. Kažemo da su segmenti Δ i Δ' ulančani (eng. *linked*) ako je njihova unija i sama segment, i to strogo veći od Δ i Δ'. Pokazuje se da je reprezentacija $\delta(\Delta) \times \delta(\Delta')$ reducibilna ako i samo ako su segmenti Δ i Δ' ulančani.

Napominjemo da sve rezultate o reprezentacijama grupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ lako možemo prenijeti i na slučaj $\widetilde{GL(\mathbb{F})}$. Naime, reprezentacije grupe $\widetilde{GL(\mathbb{F})}$ lako se mogu opisati preko reprezentacija grupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$: neprave reprezentacije prirodno odgovaraju reprezentacijama grupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$, dok između pravih i nepravih postoji 1–1 korespondencija ostvarena množenjem karakterom χ_ψ opisanim, primjerice, u [14, str. 7].

1.5.4 Langlandsova klasifikacija

Pomoću kvadratno integrabilnih i temperiranih reprezentacija možemo ostvariti potpunu klasifikaciju ireducibilnih reprezentacija za grupe koje promatramo u ovom radu.

Neka su $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_r$ ireducibilne kvadratno integrabilne reprezentacije općih linearnih grupa te neka su $s_r \geqslant s_{r-1} \geqslant \cdots \geqslant s_1 > 0$ pozitivni realni brojevi. Neka je, nadalje, τ temperirana reprezentacija grupe G_{n_0} (kao i do sada, G_{n_0} označava simplektičku, metaplektičku ili ortogonalnu grupu). Reprezentacija

$$\nu^{s_r}\delta_r \times \cdots \times \nu^{s_1}\delta_1 \rtimes \tau \tag{$*$}$$

ima jedinstvenu maksimalnu pravu podreprezentaciju. Odgovarajući kvocijent zove se **Langlandsov kvocijent** i označava s $L(\nu^{s_r}\delta_r \times \cdots \times \nu^{s_1}\delta_1 \rtimes \tau)$. Ponekad ćemo, ako ne pretpostavljamo $s_r \geqslant \cdots \geqslant s_1$, koristiti i oznaku $L(\nu^{s_r}\delta_r, \dots, \nu^{s_1}\delta_1; \tau)$ kojom podrazumijevamo da prije uzimanja kvocijenta treba dovesti reprezentacije $\{\nu^{s_r}\delta_r, \dots, \nu^{s_1}\delta_1\}$ u odgovarajući poredak.

Obratno, svaku ireducibilnu reprezentaciju grupe G_n možemo na jedinstven način prikazati kao Langlandsov kvocijent inducirane reprezentacije oblika $(*)$. Na taj način dobivamo klasifikaciju svih ireducibilnih reprezentacija grupe G_n. Kažemo da je reprezentacija $(*)$ standardni modul (standardna reprezentacija) za odgovarajući Langlandsov kvocijent.

Napomena. Langandsovu klasifikaciju možemo napraviti i za opće linearne grupe. U tom je slučaju standardni modul oblika $\nu^{s_r}\delta_r \times \cdots \times \nu^{s_1}\delta_1$, pri čemu su reprezentacije δ_i kvadratno integrabilne te vrijedi $s_r \geqslant \cdots \geqslant s_1$ (brojevi s_i nisu nužno pozitivni).

Ponekad ćemo koristiti Langlandsovu klasifikaciju i u nešto drugačijoj formi: Langlandsov kvocijent reprezentacije $\nu^{s_r}\delta_r \times \cdots \times \nu^{s_1}\delta_1 \rtimes \tau$ ujedno je i jedinstvena ireducibilna podreprezentacija reprezentacije

$$\nu^{-s_r}\delta_r \times \cdots \times \nu^{-s_1}\delta_1 \rtimes \tau.$$

Ovo je posljedica tzv. MVW involucije ([23]) koju ćemo često koristiti i u nastavku, stoga ovdje zapisujemo odgovarajući rezultat. Radi se o lemi 2.2 iz [2].

Lema 1.5 Neka je P standardna parabolička podgrupa grupe $G(W_n)$ s Levijevim faktorom $\mathrm{GL}_{n_1}(\mathbb{F}) \times \cdots \times \mathrm{GL}_{n_r}(\mathbb{F}) \rtimes G(W_{n_0})$. Tada su za $\tau_i \in \mathrm{Irr}(GL_{n_i}(\mathbb{F}))$, $\pi_0 \in \mathrm{Irr}(G(W_{n_0}))$ te $\pi \in \mathrm{Irr}(G(W_n))$ sljedeće tvrdnje ekvivalentne:

(i) $\pi \hookrightarrow \tau_1 \times \cdots \times \tau_r \rtimes \pi_0$;

(ii) $\tau_1^\vee \times \cdots \times \tau_r^\vee \rtimes \pi_0 \twoheadrightarrow \pi$.

1.5.5 Generičke reprezentacije

Posljednju klasu reprezentacija koje spominjemo u ovom odjeljku čine generičke reprezentacije. Budući da u radu želimo opisati theta korespondenciju upravo za generičke reprezentacije, ovdje navodimo njihova najvažnija svojstva.

Neka je G simplektička, metaplektička, ili ortogonalna grupa definirana nad poljem $\mathbb{F}$. Neka je $B = TU$ Borelova (tj. minimalna parabolička) podgrupa grupe G. Fiksirajmo i netrivijalni[3] karakter χ grupe U. Sada možemo modificirati konstrukciju Jacquetovog funktora. Za reprezentaciju (π, V) označimo s V_χ potprostor razapet svim vektorima oblika

$$\pi(u)v - \chi(u)v, \quad v \in V, u \in U.$$

Prostor V_χ nije, kao kod običnog Jacquetovog funktora, T-invarijantan, no i ovdje možemo promatrati kvocijent $r_\chi(\pi) = V/V_\chi$. Ukoliko je prostor $r_\chi(\pi)$ netrivijalan, kažemo da je reprezentacija π χ-generička.

Ključnu informaciju o generičnosti induciranih reprezentacija daje sljedeći rezultat ([30]):

[3]mora biti i *nedegeneriran* – radi se o tehničkom zahtjevu, opisanom npr. u [29, str. 319]

Teorem 1.6 Neka je G povezana[4] grupa i $P = MN$ parabolička podgrupa. Pretpostavimo da je σ ireducibilna reprezentacija grupe M. Tada je σ $\chi|_M$-generička ako i samo ako je $\mathrm{Ind}_P^G(\sigma)$ χ-generička.

Drugim riječima, za ireducibilne reprezentacije $\pi_1, \ldots, \pi_k, \pi_0$ vrijedi da je

$$\pi_1 \times \cdots \times \pi_k \rtimes \pi_0$$

generička ako i samo ako su sve reprezentacije $\pi_1, \ldots, \pi_k$ i π_0 generičke. Štoviše, u ovakvoj situaciji imamo i sljedeću činjenicu (poznatu pod engleskim nazivom *multiplicity one*): ako je $\pi_1 \times \cdots \times \pi_k \rtimes \pi_0$ generička, onda ima točno jedan ireducibilni generički subkvocijent. Dokaz ove tvrdnje za metaplektičke grupe može se pronaći u [34].

Napomena 1.7 U svim našim računima karakter χ bit će unaprijed fiksiran (napomena 2.14); u takvim situacijama obično ga ispuštamo iz notacije, a za reprezentaciju π jednostavno (kao maloprije) kažemo da je **generička**.

Važno svojstvo generičkih reprezentacija koje koristimo na više mjesta u nastavku je ireducibilnost standardnog modula, dokazana u [24].

Teorem 1.8 Neka je π generička reprezentacija simplektičke ili ortogonalne grupe. Tada je njezin standardni modul ireducibilan.

Napomena. Ovaj rezultat ne vrijedi za reprezentacije metaplektičke grupe. Budući da u radu mnogi zaključci direktno ovise o njemu, ograničit ćemo se na proučavanje (široke klase) generičkih reprezentacija metaplektičke grupe čiji je standardni modul ireducibilan.

Prethodni teorem proizlazi iz još općenitije činjenice o generičkim subkvocijentima standardnih modula, dokazane u [13]:

Teorem 1.9 (*generalized injectivity*) Neka je Π generička standardna reprezentacija. Tada se (jedinstveni) generički subkvocijent u Π pojavljuje kao podreprezentacija.

[4]Rezultat ne vrijedi za ortogonalnu grupu, koja nije povezana. Vrijedi za simplektičku i specijalnu ortogonalnu (SO), kao i za metaplektičku grupu.

POGLAVLJE 2

Theta korespondencija

U ovom poglavlju opisujemo theta korespondenciju i njezina osnovna svojstva, te navodimo najvažnije rezultate koje koristimo u radu. Pri izlaganju osnovnih svojstava pratimo Kudline bilješke [18].

2.1 Definicija theta korespondencije

Prije uvođenja theta korespondencije trebat će nam pojam reduktivnog dualnog para.

Definicija. Dualni par (G, H) u $\mathrm{Sp}(W)$ je par podgrupa $G, H \leqslant \mathrm{Sp}(W)$ za koje vrijedi

$$C_{\mathrm{Sp}(W)}(G) = H \quad \text{i} \quad C_{\mathrm{Sp}(W)}(H) = G$$

pri čemu $C_{\mathrm{Sp}(W)}$ označava centralizator u $\mathrm{Sp}(W)$.

Iako postoji više različitih vrsta dualnih parova, ovdje opisujemo samo slučajeve koje koristimo u radu[1]. Fiksirajmo $\epsilon = \pm 1$. Neka je W konačnodimenzionalni vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ na kojem je definirana nedegenerirana $(-\epsilon)$–simetrična[2] bilinearna forma $\langle\ ,\rangle\colon W \times W \to \mathbb{F}$. Označimo s $G(W)$ grupu izometrija prostora W – drugim riječima, $G(W)$ je ortogonalna grupa ako je forma $\langle\ ,\rangle$ simetrična, odnosno simplektička ako je forma antisimetrična. Analogno, neka je V prostor na kojem je definirana ϵ–simetrična forma $(\ ,)\colon V \times V \to \mathbb{F}$; s $H(V)$ označimo odgovarajuću grupu izometrija.

Na prostoru $\mathbb{W} = V \otimes W$ sada možemo definirati nedegeneriranu antisimetričnu bilinearnu formu formulom

$$\langle\langle x_1 \otimes y_1, x_2 \otimes y_2 \rangle\rangle := (x_1, x_2)\langle y_1, y_2 \rangle$$

te odgovarajuće preslikavanje $j\colon H(V) \times G(W) \to \mathrm{Sp}(\mathbb{W})$ dano s

$$(h, g) \mapsto h \otimes g.$$

[1] Radi se o tzv. dualnim parovima prve vrste. Sličnom konstrukcijom dolazimo do dualnih parova druge vrste, sačinjenih od dvije opće linearne grupe.

[2] tj. antisimetrična ako je $\epsilon = 1$, odnosno simetrična ako je $\epsilon = -1$.

Na taj način dobili smo dualni par $(H(V), G(W))$ u $\mathrm{Sp}(\mathbb{W})$.

Neka je sada (G, H) dualni par u $\mathrm{Sp}(W)$. Neka je $\tilde{G}$ (odnosno $\tilde{H}$) praslika grupe G (odnosno H) po surjekciji $\mathrm{Mp}(W) \to \mathrm{Sp}(W)$. Drugim riječima, imamo centralna proširenja $\tilde{G}$ i $\tilde{H}$ grupa G, odnosno H:

$$1 \to \mathbb{C}^\times \to \tilde{G} \to G \to 1, \quad 1 \to \mathbb{C}^\times \to \tilde{H} \to H \to 1.$$

Pokazuje se (npr. u [23]) da vrijedi

$$C_{\mathrm{Mp}(W)}(\tilde{G}) = \tilde{H} \quad \text{i} \quad C_{\mathrm{Mp}(W)}(\tilde{H}) = \tilde{G}$$

te da se j podiže do homomorfizma

$$\tilde{j} \colon \tilde{G} \times \tilde{H} \to \mathrm{Mp}(W).$$

Polazna točka za proučavanje theta korespondencije je tzv. **Weilova reprezentacija**. Radi se o posebnoj reprezentaciji metaplektičke grupe čija se konstrukcija (opisana u [18]) zasniva na Stone–von Neumannovom teoremu. U nastavku Weilovu reprezentaciju grupe $\mathrm{Mp}(W)$ označavamo s (ω, S), pri čemu je S prostor reprezentacije ω.

Napomena 2.1 Weilova reprezentacija ovisi i o izboru aditivnog karaktera $\psi \colon \mathbb{F} \to \mathbb{C}^\times$. Budući da je on u svim razmatranjima unaprijed fiksiran, obično ga ispuštamo iz notacije.

Pomoću homomorfizma $\tilde{j}$ možemo reprezentaciju ω povući na grupu $\tilde{G} \times \tilde{H}$. Neka je sada (π, V) ireducibilna reprezentacija grupe $\tilde{G}$. Stavimo

$$N(\pi) = \bigcap_{\lambda \in \mathrm{Hom}_{\tilde{G}}(S,\pi)} \ker(\lambda)$$

(gdje smo S shvatili kao prostor reprezentacije $\omega \circ \tilde{j}$ restringirane na $\tilde{G}$) i

$$S(\pi) = S/N(\pi).$$

Djelovanje $\tilde{H}$ na S permutira elemente λ iz $\mathrm{Hom}_{\tilde{G}}(S, \pi)$, stoga je prostor $N(\pi)$ $\tilde{H}$-invarijantan. Nadalje, $N(\pi)$ je očito $\tilde{G}$-invarijantan (radi se o presjeku $\tilde{G}$-invarijantnih potprostora). Zaključujemo da je djelovanje grupe $\tilde{G} \times \tilde{H}$ dobro definirano na kvocijentu $S(\pi)$.

Prema lemi III.4 u [23, poglavlje 2], postoji glatka reprezentacija $\Theta(\pi)$ grupe $\tilde{H}$ takva da vrijedi

$$S(\pi) = \pi \otimes \Theta(\pi).$$

Reprezentacija $\Theta(\pi)$ jedinstvena je do na izomorfizam. Ako se π ne pojavljuje kao kvocijent reprezentacije (ω, S), smatramo da su $S(\pi)$ i $\Theta(\pi)$ nul-reprezentacije.

Istaknimo odmah jednostavnu činjenicu koju ćemo često koristiti u kasnijim računima:

Lema 2.2 Vrijedi

$$\Theta^\vee(\pi) \cong \mathrm{Hom}_{\tilde{G}}(\omega, \pi)_\infty,$$

pri čemu smo s $\Theta^\vee(\pi)$ označili kontragredijent reprezentacije $\Theta(\pi)$.

Osnovni rezultat na kojemu se temelji pojam theta korespondencije naziva se *Howeova dualnost* i iskazan je u sljedećem teoremu. Originalnu tvrdnju formulirao je Howe u svom članku iz Corvallisa, [6, str. 275–285]. Značajan doprinos dali su Kudla ([19]), Moeglin, Vigneras i Waldspurger (MVW) u [23], te Waldspurger, čiji članak [38] sadrži dokaz ove tvrdnje u slučaju kada je rezidualna karakteristika polja $\mathbb{F}$ različita od 2. Potpun dokaz (koji uključuje rezidualnu karakteristiku 2) napravili su Gan i Takeda u [10].

Teorem 2.3 (Howeova dualnost) Neka je π ireducibilna reprezentacija grupe $\tilde{G}$. Tada vrijedi

(i) $\Theta(\pi) = 0$ ili je $\Theta(\pi)$ dopustiva reprezentacija grupe $\tilde{H}$ konačne duljine.

(ii) Ako je $\Theta(\pi) \neq 0$, onda postoji jedinstvena maksimalna prava podreprezentacija $\Theta^0(\pi)$ reprezentacije $\Theta(\pi)$. Odgovarajući kvocijent $\Theta(\pi)/\Theta^0(\pi)$ je ireducibilan i označava se s $\theta(\pi)$. Ako je $\Theta(\pi) = 0$, onda smatramo da je i $\theta(\pi) = 0$.

(iii) Ako su reprezentacije $\theta(\pi_1) \neq 0$ i $\theta(\pi_2) \neq 0$ izomorfne, onda su i reprezentacije π_1 i π_2 izomorfne.

Označimo provizorno

$$\mathrm{Howe}(\tilde{G}, \tilde{H}) = \{\pi \in \mathrm{Irr}(\tilde{G}) \colon \theta(\pi) \neq 0\}.$$

Posljedica gornjeg teorema je da pridruživanje $\pi \mapsto \theta(\pi)$ uspostavlja bijekciju

$$\mathrm{Howe}(\tilde{G}, \tilde{H}) \to \mathrm{Howe}(\tilde{H}, \tilde{G}).$$

Ova bijekcija naziva se **lokalna theta korespondencija**.

Napomena. Kažemo da je $\Theta(\pi)$ **veliki theta lift**, a $\theta(\pi)$ **mali theta lift** reprezentacije π na prostor V. U situacijama kada posebno želimo naglasiti prostor V pisat ćemo $\Theta(\pi, V)$ i $\theta(\pi, V)$ umjesto $\Theta(\pi)$ i $\theta(\pi)$. Ponekad ćemo neformalno reći da se π **pojavljuje** na prostoru V ako je $\Theta(\pi, V) \neq 0$.

Promotrimo sada što Howeova dualnost daje u konkretnom slučaju koji promatramo. Neka je, konkretnosti radi, $\epsilon = 1$ tako da imamo $G(W) = \mathrm{Sp}(W)$ i $H(V) = \mathrm{O}(V)$;

neka je $n = \dim W$ (nužno paran broj), a $m = \dim V$. Sjetimo se da postoji prirodni homomorfizam

$$j\colon \mathrm{O}(V) \times \mathrm{Sp}(W) \to \mathrm{Sp}(\mathbb{W}).$$

Označimo s j_V njegovu restrikciju na $1 \times \mathrm{Sp}(W)$, a s j_W restrikciju na $\mathrm{O}(V) \times 1$. Pokazuje se ([18, sekcija II.4]) da se j_V na jedinstveni način podiže do homomorfizma

$$\tilde{j}_V\colon \mathrm{Mp}(W) \to \mathrm{Mp}(\mathbb{W})$$

čija restrikcija na $\mathbb{C}^\times$ djeluje sa $z \mapsto z^m$. Posebno, vrijedi i $(\omega \circ \tilde{j}_V)(z) = z^m \cdot \mathrm{id}_S$.

Da bismo izbjegli ovakvu ovisnost o m, radimo određenu modifikaciju Weilove reprezentacije. Koristimo činjenicu da postoji jedinstveni karakter λ grupe $\mathrm{Mp}(W)$ čija je jezgra (skupovno) jednaka $\mathrm{Mp}^{(2)}(W) = \mathrm{Sp}(W) \times \{\pm 1\}$, a koji na $\mathbb{C}^\times$ djeluje sa $z \mapsto z^2$. Ako s $\mathcal{A}_m(\mathrm{Mp}(W))$ označimo kategoriju glatkih reprezentacija grupe $\mathrm{Mp}(W)$ čija restrikcija na $\mathbb{C}^\times$ djeluje sa $z \to z^m$, onda putem množenja s λ možemo identificirati kategorije $\mathcal{A}_m(\mathrm{Mp}(W))$ i $\mathcal{A}_{m+2}(\mathrm{Mp}(W))$. Ovo pokazuje da je dovoljno promatrati sljedeće kategorije:

- $\mathcal{A}_0(\mathrm{Mp}(W))$, koju prirodno identificiramo s kategorijom $\mathcal{A}(\mathrm{Sp}(W))$ glatkih reprezentacija grupe $\mathrm{Sp}(W)$
- $\mathcal{A}(\mathrm{Mp}(W))^{\mathrm{gen}} := \mathcal{A}_1(\mathrm{Mp}(W))$, tzv. *prave* reprezentacije grupe $\mathrm{Mp}(W)$

U skladu s time definiramo Weilovu reprezentaciju kao $\omega \circ j_V$ u $\mathcal{A}(\mathrm{Sp}(W))$ ili $\mathcal{A}(\mathrm{Mp}(W))^{\mathrm{gen}}$ (ovisno o parnosti m) na sljedeći način:

$$\begin{cases} \lambda^{-\frac{m}{2}} \otimes (\omega \circ j_V), & \text{ako je } m \text{ paran} \\ \lambda^{-\frac{m-1}{2}} \otimes (\omega \circ j_V), & \text{ako je } m \text{ neparan.} \end{cases}$$

Napomena. Budući da radimo s reprezentacijama iz $\mathcal{A}_1(\mathrm{Mp}(W))$, u nastavku ćemo oznaku $\mathrm{Mp}(W)$ koristiti za jezgru karaktera λ, to jest za dvolisni natkrivač $\mathrm{Mp}^{(2)}(W)$ grupe $\mathrm{Sp}(W)$ (opisan u 1.1).

Za homomorfizam j_W situacija je jednostavnija jer ne trebamo promatrati natkrivač grupe $\mathrm{O}(V)$. Naime, ulaganje $j_W\colon \mathrm{O}(V) \to \mathrm{Sp}(\mathbb{W})$ podiže se do homomorfizma

$$\tilde{j}_W\colon \mathrm{O}(V) \to \mathrm{Mp}(\mathbb{W})$$

pomoću kojeg Weilovu reprezentaciju povlačimo na $\mathrm{O}(V)$ ([18, str. 39]).

Pomoću homomorfizama $\tilde{j}_V$ i $\tilde{j}_W$ možemo na upravo opisan način Weilovu reprezentaciju grupe $\mathrm{Mp}(\mathbb{W})$ povući na $\mathrm{O}(V) \times \mathrm{Mp}(W)$ ako je m neparan, odnosno $\mathrm{O}(V) \times \mathrm{Sp}(W)$ ako je m paran. U skladu s time, Howeova dualnost uspostavlja theta korespondenciju

$$\mathrm{Howe}(\mathrm{O}(V), \mathrm{Mp}(W)) \longleftrightarrow \mathrm{Howe}(\mathrm{Mp}(W), \mathrm{O}(V))$$

ako je m neparan, odnosno

$$\text{Howe}(\mathrm{O}(V), \mathrm{Sp}(W)) \longleftrightarrow \text{Howe}(\mathrm{Sp}(W), \mathrm{O}(V))$$

ako je m paran.

2.2 Osnovni rezultati i notacija

Uobičajeni pristup u proučavanju theta korespondencije zasniva se na promatranju liftova na različite prostore u istom Wittovom tornju. Prije iskaza glavnih rezultata, uvodimo (i ponavljamo) neke konvencije u notaciji: za fiksni izbor $\epsilon = \pm 1$ neka je

$$\begin{aligned} \mathcal{W} = (W_n) &= \text{Wittov toranj } (-\epsilon)\text{–hermitskih}^{3} \text{ prostora} \\ \mathcal{V} = (V_m) &= \text{Wittov toranj } \epsilon\text{–hermitskih prostora.} \end{aligned}$$

Nadalje, paru prostora (W_n, V_m) pridružujemo grupu

$$G_n = G(W_n) = \begin{cases} \mathrm{Mp}(W_n), & \text{ako je } \epsilon = 1 \text{ i } m \text{ neparan;} \\ \mathrm{Sp}(W_n), & \text{ako je } \epsilon = 1 \text{ i } m \text{ paran;} \\ \mathrm{O}(W_n), & \text{ako je } \epsilon = -1. \end{cases}$$

Grupu $H_m = H(V_m)$ definiramo analogno, zamjenom uloga W_n i V_m.

Kao i do sada, m i n označavaju dimenzije prostora. Ponekad ćemo ih, ako situacija dopušta, ispuštati iz notacije i pisati W umjesto W_n, G umjesto G_n, itd.

Ako je iz konteksta jasno s kojim Wittovim tornjem $\mathcal{V}$ radimo, često ćemo umjesto $\Theta(\pi, V_m)$ pisati kratko $\Theta(\pi, m)$ ili $\Theta_l(\pi)$, pri čemu je $l = n + \epsilon - m$ (i analogno za $\theta(\pi, V_m)$).

U sljedećem teoremu ([18, Prop. 4.1 i 4.3]) iskazane su dvije osnovne činjenice o theta korespondenciji u tornjevima:

Teorem 2.4 Neka je $\pi \in \mathrm{Irr} G_n$.

(i) Ako je $\Theta(\pi, V_m) \neq 0$, onda je i $\Theta(\pi, V_{m+2r}) \neq 0, \forall r \in \mathbb{N}$.

(ii) Za dovoljno veliki m vrijedi $\Theta(\pi, V_m) \neq 0$.

Napomena.

- Tvrdnja (ii) iz prethodnog teorema može se precizirati. Sjetimo se da, ako s m_0 označimo dimenziju prvog (anizotropnog) prostora u tornju $\mathcal{V}$, svaki m možemo pisati kao $m_0 + 2r$, gdje r predstavlja Wittov indeks prostora V_m. Pokazuje se da uvjet $r \geqslant n$ implicira $\Theta(\pi, V_m) \neq 0$.

[3] ovdje (-1)–hermitski znači simplektički, dok 1–hermitski znači kvadratni prostor

- Prethodni teorem implicira da se π pojavljuje u svim prostorima u tornju $\mathcal{V} = (V_m)$ od neke razine nadalje. Najmanji m takav da vrijedi $\Theta(\pi, V_m) \neq 0$ naziva se **indeks prvog pojavljivanja**.[4] Uvodimo i oznaku,

$$m(\pi) = \min\{m \colon \Theta(\pi, V_m) \neq 0\}.$$

2.2.1 Parovi Wittovih tornjeva

Već smo u sekciji 1.3 spomenuli kako postoji samo jedan simplektički toranj, ali više različitih Wittovih tornjeva kvadratnih prostora. Nije teško pokazati da unutar jednog Wittovog tornja svi prostori imaju istu diskriminantu. Nadalje, posljedica teorema o klasifikaciji kvadratnih prostora (1.1.1) je činjenica da za svaki Wittov toranj $\mathcal{V}$ postoji točno jedan drugi toranj $\mathcal{V}'$ u kojem prostori imaju istu diskriminantu i jednaku parnost dimenzije kao u $\mathcal{V}$ – popis svih ovakvih parova tornjeva može se naći u [18, poglavlje 5]. Ispostavlja se da je korisno paralelno promatrati liftove dane reprezentacije simplektičke ili metaplektičke grupe na oba tornja u (unaprijed fiksiranom) paru Wittovih tornjeva.

Wittove tornjeve koji dolaze u paru označavamo s $\mathcal{V}^+$ i $\mathcal{V}^-$. U situaciji kada je $\mathcal{W}$ simplektički toranj ($\epsilon = 1$), za reprezentaciju $\pi \in \mathrm{Irr}(G(W_n))$ možemo promatrati odgovarajuće indekse prvog pojavljivanja $m^+(\pi)$ i $m^-(\pi)$.

Za $\epsilon = -1$ je $\pi \in \mathrm{Irr}(G(W_n))$ reprezentacija ortogonalne grupe te postoji samo jedan simplektički toranj $\mathcal{V} = (V_m)$ na kojem promatramo liftove reprezentacije π. Kako i u ovom slučaju želimo dva indeksa prvog pojavljivanja, nedostatak drugog tornja nadoknađujemo na sljedeći način: budući da je $G(W_n) = \mathrm{O}(W_n)$ sada ortogonalna grupa, imamo netrivijalni karakter $\det\colon \mathrm{O}(W_n) \to \{\pm 1\}$. Zbog toga uz reprezentaciju π možemo promatrati i zakrenutu reprezentaciju $\pi \otimes \det$. Sada definiramo odgovarajuće indekse $m^+(\pi)$ i $m^-(\pi)$: ako je n neparan, stavimo

$$m^{\pm}(\pi) := \min\{m \mid \Theta(\pi', V_m) \neq 0\},$$

pri čemu je π' ona reprezentacija od $\{\pi, \pi \otimes \det\}$ za koju vrijedi $\pi'(-\mathbb{1}_{W_n}) = \pm \mathrm{id}$. Za parni n definiramo $m^+(\pi)$ kao manji, a $m^-(\pi)$ kao veći od dva indeksa prvog pojavljivanja za reprezentacije π i $\pi \otimes \det$.

Ključan rezultat koji povezuje ove indekse je tzv. **relacija očuvanja**, iskazana u sljedećem teoremu ([33]):

Teorem 2.5 Za $\pi \in \mathrm{Irr}(G(W_n))$ vrijedi

$$m^+(\pi) + m^-(\pi) = 2n + 2 + 2\epsilon.$$

[4] Preciznije bi bilo izraz *indeks* koristiti za Wittov indeks odgovarajućeg prostora, no ovdje ga (malo slobodnije) koristimo za dimenziju.

U nastavku ćemo ponekad koristiti i oznake

$$m^{\text{dolje}}(\pi) = \min\{m^+(\pi), m^-(\pi)\}, \quad m^{\text{gore}}(\pi) = \max\{m^+(\pi), m^-(\pi)\}$$

te (ako je $m^{\text{dolje}}(\pi) \neq m^{\text{gore}}(\pi)$) nazive gornji i donji toranj za $\mathcal{V}^+$ i $\mathcal{V}^-$.

2.3 Kudlina filtracija

U velikom broju računa vezanih za theta korespondenciju pojavljuje se potreba za razumijevanjem strukture reprezentacije $R_P(\omega)$, tj. Jacquetovog modula Weilove reprezentacije. Ključne informacije u tom smjeru daje **Kudlina filtracija**, iskazana u sljedećem teoremu.

Teorem 2.6 (Kudla, [19]) Označimo s $\omega_{m,n}$ Weilovu reprezentaciju grupe $G_n \times H_m$. Jacquetov modul $R_{P_k}(\omega_{m,n})$ ima $(\mathrm{GL}_k \times G_{n-2k} \times H_m)$-invarijantnu filtraciju

$$R_{P_k}(\omega_{m,n}) = R^0 \supset R^1 \supset \cdots \supset R^k \supset R^{k+1} = 0$$

u kojoj uzastopni kvocijenti $J^a = R^a/R^{a+1}$ zadovoljavaju

$$J^a = \mathrm{Ind}_{P_{k-a,a} \times G_{n-2k} \times Q_a}^{\mathrm{GL}_k \times G_{n-2k} \times H_m}(\chi_V |\det_{\mathrm{GL}_{k-a}}|^{\lambda_{k-a}} \otimes \Sigma_a \otimes \omega_{m-2a,n-2k}).$$

Ovdje je

- $\lambda_{k-a} = (m - n + k - a - \epsilon)/2$;
- P_k standardna parabolička podgrupa G_n s Levijevom komponentom $\mathrm{GL}_k(\mathbb{F}) \times G_{n-2k}$ (analogno Q_a u H_m);
- $P_{k-a,a}$ standardna parabolička podgrupa $\mathrm{GL}_k(\mathbb{F})$ s Levijevom komponentom $\mathrm{GL}_{k-a}(\mathbb{F}) \times \mathrm{GL}_a(\mathbb{F})$;
- $\Sigma_a = C_c^\infty(\mathrm{GL}_a(\mathbb{F}))$, prostor lokalno konstantnih funkcija s kompaktnim nosačem na grupi $\mathrm{GL}_a(\mathbb{F})$. Na Σ_a djeluje grupa $\mathrm{GL}_a(\mathbb{F}) \times \mathrm{GL}_a(\mathbb{F})$ s

$$[(g, h) \cdot f](x) = \chi_V(\det(g))\chi_W(\det(h))f(g^{-1} \cdot x \cdot h)$$

Ako je $m - 2a$ manje od dimenzije prvog (tj. anizotropnog) prostora u tornju $\mathcal{V}$, smatramo da su reprezentacije R^a i J^a jednake 0.

Jedna posljedica Kudline filtracije koju vrlo često koristimo u računima je sljedeća propozicija ([26, korolar 3.2], odnosno [2, propozicija 5.2]).

Propozicija 2.7 Pretpostavimo da vrijedi $l = n - m + \epsilon > 0$ i $k > 0$. Neka je $\pi_0 \in \mathrm{Irr}(G_{n-2k})$ te neka je δ ireducibilna esencijalno kvadratno integrabilna reprezentacija grupe $\mathrm{GL}_k(\mathbb{F})$. Tada je reprezentacija $\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_k(\mathbb{F})\times G_{n-2k}}(J^a, \chi_V\delta^\vee \otimes \pi_0)_\infty$ grupe H_m izomorfna s

$$\begin{cases} \chi_W^{-1}\delta^\vee \rtimes \mathrm{Hom}_{G_{n-2k}}(\omega_{m-2k,n-2k}, \pi_0)_\infty, & \text{ako je } a = k, \\ \chi_W^{-1}\mathrm{St}_{k-1}\nu^{\frac{k-l+1}{2}} \rtimes \mathrm{Hom}_{G_{n-2k}}(\omega_{m-2k+2,n-2k}, \pi_0)_\infty, & \text{ako je } a = k-1 \text{ i } \delta = \mathrm{St}_k\nu^{\frac{l-k}{2}}, \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

(Prisjetimo se da vrijedi $\mathrm{Hom}_G(\omega, \pi)_\infty = \Theta^\vee(\pi)$).

Napomena. Ovdje smo sa St_k označili tzv. **Steinbergovu** reprezentaciju grupe $\mathrm{GL}_k(\mathbb{F})$. Radi se o kvadratno integrabilnoj reprezentaciji $\delta([|\cdot|^{\frac{1-k}{2}}, |\cdot|^{\frac{k-1}{2}}])$. Tako imamo, primjerice,

$$\mathrm{St}_k\nu^{\frac{l-k}{2}} = \delta([|\cdot|^{\frac{l+1}{2}-k}, |\cdot|^{\frac{l-1}{2}}]).$$

Za kraj odjeljka iskazujemo nekoliko jednostavnih posljedica ove propozicije. Sljedeći korolar je [2, korolar 5.3], odnosno [26, korolar 3.2].

Korolar 2.8 Neka je $\pi \in \mathrm{Irr}(G_n), \pi_0 \in \mathrm{Irr}(G_{n-2k})$ te neka je δ ireducibilna esencijalno kvadratno integrabilna reprezentacija grupe $\mathrm{GL}_k(\mathbb{F})$. Pretpostavimo da vrijedi $\delta \not\cong \mathrm{St}_k\nu^{\frac{l-k}{2}}$, gdje je $l = n - m + \epsilon$. Ako postoji epimorfizam

$$\chi_V\delta \rtimes \pi_0 \twoheadrightarrow \pi,$$

onda vrijedi i

$$\chi_W\delta \rtimes \Theta_l(\pi_0) \twoheadrightarrow \Theta_l(\pi).$$

Drugi korolar koji iznosimo mala je modifikacija prethodnog: ovaj put ne dobivamo potpunu informaciju o velikom liftu $\Theta_l(\pi)$, no dopuštamo i iznimni slučaj $\delta \cong \mathrm{St}_k\nu^{\frac{l-k}{2}}$.

Korolar 2.9 Neka je δ ireducibilna esencijalno kvadratno integrabilna reprezentacija grupe $\mathrm{GL}_k(\mathbb{F})$ te neka su $\pi \in \mathrm{Irr}(G_n), \pi_0 \in \mathrm{Irr}(G_{n-2k})$ takve da vrijedi

$$\chi_V\delta \rtimes \pi_0 \twoheadrightarrow \pi,$$

kao u prethodnom korolaru. Tada vrijedi jedno od sljedećeg:

(i) $\chi_W\delta \rtimes \Theta_l(\pi_0) \twoheadrightarrow \theta_l(\pi)$; ili

(ii) $\chi_W\delta([|\cdot|^a, |\cdot|^{b-1}]) \rtimes \Theta_{l-2}(\pi_0) \twoheadrightarrow \theta_l(\pi)$.

Opcija (ii) moguća je samo ako vrijedi $\delta = \delta([|\cdot|^a, |\cdot|^b])$ pri čemu je $b = \frac{l-1}{2}$.

Dokaz. Prema lemi 1.5 vrijedi $\pi \hookrightarrow \chi_V \delta^\vee \rtimes \pi_0$, stoga imamo

$$\begin{aligned}\Theta_l^\vee(\pi) &\cong \mathrm{Hom}_{G_n}(\omega_{m,n}, \pi)_\infty \\ &\hookrightarrow \mathrm{Hom}_{G_n}(\omega_{m,n}, \chi_V \delta^\vee \rtimes \pi_0)_\infty \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_k \times G_{n-2k}}(R_{P_k}(\omega_{m,n}), \chi_V \delta^\vee \otimes \pi_0)_\infty.\end{aligned}$$

Sada koristimo Kudlinu filtraciju Jacquetovog modula $R_{P_k}(\omega_{m,n})$. Za svaki indeks $a = 0, \dots, k$ imamo egzaktan niz

$$0 \to \mathrm{Hom}(J^a, \chi_V \delta^\vee \otimes \pi_0)_\infty \to \mathrm{Hom}(R^a, \chi_V \delta^\vee \otimes \pi_0)_\infty \to \mathrm{Hom}(R^{a+1}, \chi_V \delta^\vee \otimes \pi_0)_\infty.$$

Budući da je, prema 2.7, prostor $\mathrm{Hom}(J^a, \chi_V \delta^\vee \otimes \pi_0)_\infty$ trivijalan za $a = 0, \dots, k-2$, odavde dobivamo ulaganje

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_k \times G_{n-2k}}(R_{P_k}(\omega_{m,n}), \chi_V \delta^\vee \otimes \pi_0)_\infty \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_k \times G_{n-2k}}(R^{k-1}, \chi_V \delta^\vee \otimes \pi_0)_\infty.$$

Posebno, vrijedi i $\Theta_l^\vee(\pi) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_k \times G_{n-2k}}(R^{k-1}, \chi_V \delta^\vee \otimes \pi_0)_\infty$. Kako je $\theta_l^\vee(\pi)$ podreprezentacija od $\Theta_l^\vee(\pi)$, zaključujemo da postoji ulaganje

$$f\colon \theta_l^\vee(\pi) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_k \times G_{n-2k}}(R^{k-1}, \chi_V \delta^\vee \otimes \pi_0)_\infty.$$

S druge strane, imamo egzaktan niz

$$0 \to \mathrm{Hom}(J^{k-1}, \chi_V \delta^\vee \otimes \pi_0)_\infty \xrightarrow{g} \mathrm{Hom}(R^{k-1}, \chi_V \delta^\vee \otimes \pi_0)_\infty \xrightarrow{h} \mathrm{Hom}(J^k, \chi_V \delta^\vee \otimes \pi_0)_\infty.$$

Sada imamo dvije opcije:

(i) Ako je $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(h) = 0$, onda imamo ulaganje

$$h \circ f\colon \theta_l^\vee(\pi) \hookrightarrow \mathrm{Hom}(J^k, \chi_V \delta^\vee \otimes \pi_0)_\infty.$$

Sada iz propozicije 2.7 vidimo kako izgleda reprezentacija $\mathrm{Hom}(J^k, \chi_V \delta^\vee \otimes \pi_0)_\infty$; uzimanjem kontragredijenta dobivamo

$$\chi_W \delta \rtimes \Theta_l(\pi_0) \twoheadrightarrow \theta_l(\pi).$$

(ii) Ako je $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(h) \neq 0$, onda zbog ireducibilnosti reprezentacije $\theta_l(\pi)$ imamo $\theta_l^\vee(\pi) \hookrightarrow \mathrm{Ker}(h)$. Zbog egzaktnosti vrijedi $\mathrm{Ker}(h) = \mathrm{Im}(g)$, a budući da je g ulaganje, imamo i $\mathrm{Im}(g) \cong \mathrm{Hom}(J^{k-1}, \chi_V \delta^\vee \otimes \pi_0)_\infty$. Prema tome, možemo pisati

$$\theta_l^\vee(\pi) \hookrightarrow \mathrm{Hom}(J^{k-1}, \chi_V \delta^\vee \otimes \pi_0)_\infty$$

pa uzimanjem kontragredijenta (i korištenjem propozicije 2.7) dolazimo do

$$\chi_W \delta([|\cdot|^a, |\cdot|^{b-1}]) \rtimes \Theta_{l-2}(\pi_0) \twoheadrightarrow \theta_l(\pi).$$

Uočimo da je ova druga opcija moguća samo ako je prostor $\mathrm{Hom}(J^{k-1}, \chi_V \delta^\vee \otimes \pi_0)_\infty$ netrivijalan; posebno, prema 2.7, mora vrijediti $\delta = \delta([|\cdot|^a, |\cdot|^b])$ i $b = \frac{l-1}{2}$.

□

Posljednja tvrdnja koju iskazujemo poopćenje je prethodnog korolara. Na isti način, koristeći egzaktnost indukcije, dokazuje se

Korolar 2.10 Neka je δ ireducibilna esencijalno kvadratno integrabilna reprezentacija grupe $\mathrm{GL}_k(\mathbb{F})$ te neka su $\pi \in \mathrm{Irr}(G_n), \pi_0 \in \mathrm{Irr}(G_{n-2k})$ takve da vrijedi

$$\chi_V \delta \rtimes \pi_0 \twoheadrightarrow \pi.$$

Neka je, nadalje, A ireducibilna reprezentacija opće linearne grupe. Pretpostavimo da za ireducibilnu reprezentaciju σ vrijedi

$$\chi_W A \rtimes \Theta_l(\pi) \twoheadrightarrow \sigma,$$

gdje je $l = n - m + \epsilon$. Tada vrijedi jedno od sljedećeg:

(i) $\chi_W A \times \chi_W \delta \rtimes \Theta_l(\pi_0) \twoheadrightarrow \sigma$; ili

(ii) $\chi_W A \times \chi_W \delta([|\cdot|^a, |\cdot|^{b-1}]) \rtimes \Theta_{l-2}(\pi_0) \twoheadrightarrow \sigma$.

Opcija (ii) je moguća samo ako vrijedi $\delta = \delta([|\cdot|^a, |\cdot|^b])$ pri čemu je $b = \frac{l-1}{2}$.

Napomena 2.11 Na nekoliko mjesta u računima bit će nam korisno jednom oznakom obuhvatiti obje mogućnosti koje daju opcije (i), odnosno (ii). Zato ćemo koristiti oznaku

$$(\delta) = \begin{cases} \delta, & \text{ako smo iskoristili opciju (i)} \\ \delta([|\cdot|^a, |\cdot|^{b-1}]), & \text{ako smo iskoristili opciju (ii).} \end{cases}$$

2.4 Kuspidalne reprezentacije

U nastavku poglavlja iznosimo najvažnije rezultate vezane za liftove pojedinih klasa dopustivih reprezentacija. Započinjemo s kuspidalnim reprezentacijama; sljedeći teorem (Théorème principal u MVW, [23]) u potpunosti opisuje izgled theta liftova za kuspidalne reprezentacije.

Teorem 2.12 Neka je $\pi \in \mathrm{Irr}(G_n)$ kuspidalna reprezentacija.

- Prvi lift, $\Theta(\pi, m(\pi))$, je ireducibilna i kuspidalna reprezentacija.
- Viši su liftovi također ireducibilni, ali nisu kuspidalni. Za $m \geqslant m(\pi)$ je $\Theta(\pi, m)$ ireducibilna (Langlandsova) podreprezentacija reprezentacije

$$\chi_W |\cdot|^{\frac{n-m+\epsilon+1}{2}} \times \ldots \times \chi_W |\cdot|^{\frac{n-m(\pi)+\epsilon-1}{2}} \rtimes \Theta(\pi, m(\pi)).$$

2.5 Theta liftovi diskretnih serija

U ovom odjeljku iznosimo najvažnije rezultate o liftovima diskretnih serija, dokazane u [26]. Premda su djelomično obuhvaćeni naknadnim opisom theta liftova temperiranih reprezentacija u [2] (2.6), iznosimo ih ovdje zbog uvida koji pružaju u strukturu velikog theta lifta.

Teorem 2.13 ([26], teoremi 6.1, 6.2) Neka je $\sigma \in \mathrm{Irr}(G_n)$ reprezentacija diskretne serije. Neka je

$$m_{\mathrm{temp}}(\sigma) = \begin{cases} m(\sigma), & m(\sigma) > n+1+\epsilon \\ n+1+\epsilon, & m(\sigma) \leqslant n+1+\epsilon. \end{cases}$$

Tada vrijedi

(i) $\Theta(\sigma, m)$ je ireducibilna temperirana reprezentacija za $m(\sigma) \leqslant m \leqslant m_{\mathrm{temp}}(\sigma)$.

(ii) Ako je $m > m_{\mathrm{temp}}(\sigma)$, onda je theta lift $\theta(\sigma, m)$ jedinstvena ireducibilna (Langlandsova) podreprezentacija reprezentacije

$$\chi_W |\cdot|^{\frac{n-m+\epsilon+1}{2}} \times \ldots \times \chi_W |\cdot|^{\frac{n-m_{\mathrm{temp}}(\sigma)+\epsilon-1}{2}} \rtimes \theta(\sigma, m_{\mathrm{temp}}(\sigma)).$$

Svi ostali ireducibilni subkvocijenti reprezentacije $\Theta(\sigma, m)$ su ili temperirani, ili jednaki Langlandsovoj podreprezentaciji reprezentacije oblika

$$\chi_W |\cdot|^{\frac{n-m+\epsilon+1}{2}} \times \ldots \times \chi_W |\cdot|^{\frac{n-m_1+\epsilon-1}{2}} \rtimes \sigma(m_1),$$

pri čemu je $\sigma(m_1)$ neki temperirani ireducibilni subkvocijent reprezentacije $\Theta(\sigma, m_1)$ za $m > m_1 \geqslant m_{\mathrm{temp}}(\sigma)$.

Napomenimo da su glavni rezultati u članku [26] dokazani samo za dualni par $(\mathrm{Sp}(W), O(V))$, no odgovarajuće tvrdnje vrijede i u slučaju $(\mathrm{Mp}(W), O(V))$. Neke od njih bit će direktne posljedice rezultata iz [2], a preostale ćemo dokazati kasnije u radu.

2.6 LLC i temperirane reprezentacije

U ovom odjeljku prenosimo najvažnije rezultate o liftovima temperiranih reprezentacija iz članka [2]. Za iskaz ovih rezultata potrebna je tzv. **lokalna Langlandsova kores-**

pondencija (LLC). Budući da ju i sami koristimo na određenim mjestima u radu, ovdje iznosimo osnovne činjenice vezane za LLC.

2.6.1 Lokalna Langlandsova korespondencija

Lokalna Langlandsova korespondencija je veza između ireducibilnih reprezentacija klasičnih grupa (nad lokalnim poljem $\mathbb{F}$) i odgovarajućih reprezentacija tzv. **Weil–Deligneove grupe**. Takva korespondencija omogućava parametrizaciju svih ireducibilnih reprezentacija za grupe koje promatramo.

Za fiksno lokalno nearhimedsko polje $\mathbb{F}$ karakteristike 0 definiramo **Weilovu grupu** $W_{\mathbb{F}}$ kao određenu gustu podgrupu apsolutne Galoisove grupe $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}/\mathbb{F})$ (Tate, [7, str. 3–26]). Weil–Deligneova grupa definira se kao $WD_{\mathbb{F}} \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$.

Neka je V_m, kao i do sada, kvadratni ili simplektički prostor dimenzije m, te neka je $H(V_m)$ odgovarajuća grupa izometrija. Definiramo $\Phi(H(V_m))$ kao skup klasa ekvivalencije reprezentacija Weil–Deligneove grupe:

$$\begin{cases} \Phi(\mathrm{O}(V_m)) = \{\phi : WD_{\mathbb{F}} \to \mathrm{Sp}_{m-1}(\mathbb{C})\}/\cong, & \text{ako je } m \text{ neparan,} \\ \Phi(\mathrm{Sp}(V_m)) = \{\phi : WD_{\mathbb{F}} \to \mathrm{SO}_{m+1}(\mathbb{C})\}/\cong, & \\ \Phi(\mathrm{O}(V_m)) = \{\phi : WD_{\mathbb{F}} \to \mathrm{O}_m(\mathbb{C}) \mid \det(\phi) = \chi_V\}/\cong, & \text{ako je } m \text{ paran,} \\ \Phi(\mathrm{Mp}(V_m)) = \{\phi : WD_{\mathbb{F}} \to \mathrm{Sp}_m(\mathbb{C})\}/\cong . & \end{cases}$$

Homomorfizam ϕ ovdje shvaćamo kao reprezentaciju na (kompleksnom) vektorskom prostoru M na kojem je definirana odgovarajuća ϕ-invarijantna bilinearna forma B. Ove reprezentacije zadovoljavaju određene tehničke uvjete – među ostalim, sve su glatke na $WD_{\mathbb{F}}$ i algebarske na $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ ([2, Appendix A3]). Nadalje, svaka reprezentacija ϕ je potpuno reducibilna, stoga možemo pisati

$$\phi = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \phi_n \otimes S_n,$$

pri čemu je ϕ_n reprezentacija Weilove grupe, a S_n jedinstvena ireducibilna n-dimenzionalna algebarska reprezentacija grupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$.

Neka je sada C_ϕ grupa svih regularnih operatora na M koji čuvaju formu B i komutiraju s elementima iz $\mathrm{Im}(\phi)$. Stavimo

$$C_\phi^+ = \begin{cases} C_\phi \cap \mathrm{SL}(M) & \text{ako je } m \text{ paran,} \\ C_\phi & \text{inače.} \end{cases}$$

Konačno, s A_ϕ (odnosno A_ϕ^+) označimo komponentu povezanosti jedinice u grupi C_ϕ (C_ϕ^+). Karakteri grupe A_ϕ^+ sudjelovat će u parametrizaciji reprezentacija grupe $H(V_m)$.

Prema vrsti bilinearne forme B, reprezentacije grupe $WD_{\mathbb{F}}$ dijelimo na različite tipove (npr. [2, Appendix A3], detaljnije u [11, §3]). Za ireducibilnu reprezentaciju ϕ_0 Weil–Deligneove grupe označimo s $m_\phi(\phi_0)$ njezin multiplicitet u ϕ. Možemo pisati

$$\phi = m_\phi(\phi_1)\phi_1 + \cdots + m_\phi(\phi_r)\phi_r + \phi' + (\phi')^\vee$$

pri čemu su $\phi_1, \dots, \phi_r$ međusobno neizomorfne reprezentacije grupe grupe $WD_{\mathbb{F}}$ istog tipa kao ϕ, multipliciteta $m_1, \dots, m_r$. Sve ostale reprezentacije koje se pojavljuju u ϕ, ali nisu istog tipa, dolaze u paru s vlastitim kontragredijentom, stoga ih možemo grupirati u sumu oblika $\phi' + (\phi')^\vee$.

Pokazuje se da je grupa A_ϕ slobodni $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-modul ranga r ([11, §4]):

$$A_\phi = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}a_i \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^r.$$

Ovdje $\{a_1, \dots, a_r\}$ označava kanonsku bazu za A_ϕ u kojoj element a_i odgovara reprezentaciji ϕ_i. Također, pokazuje se da vrijedi

$$A_\phi^+ = \begin{cases} \ker(\det), & \text{ako je } m \text{ paran,} \\ A_\phi, & \text{inače,} \end{cases}$$

pri čemu $\det : A_\phi \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ označava homomorfizam

$$\sum_{i=1}^{r} \epsilon_i a_i \mapsto \sum_{i=1}^{r} \epsilon_i \dim(\phi_i)$$

induciran uobičajenim preslikavanjem $\det\colon \mathrm{GL}(M) \to \mathbb{C}^\times$.

Osnovni rezultat lokalne Langlandsove korespondencije je činjenica da su ireducibilne reprezentacije grupe $H(V_m)$ parametrizirane parovima (ϕ, η), pri čemu je $\phi \in \Phi(H(V_m))$, a η karakter grupe A_ϕ^+. Par (ϕ, η) (a ponekad i samo ϕ) nazivamo **Langlandsovim parametrom**, ili kraće, L-parametrom[5]; kažemo da sve reprezentacije s istim parametrom ϕ čine jedan L-**paket**. Bitno je napomenuti da je način na koji su reprezentacije parametrizirane pomoću lokalne Langlandsove korespondencije kompatibilan s mnogim svojstvima bitnima za teoriju reprezentacija.

Primjerice, LLC možemo na jednostavan način ograničiti na neke (nama bitne) klase dopustivih reprezentacija. Tako su temperirane reprezentacije parametrizirane parametrima iz $\Phi_{\mathrm{temp}}(H(V_m))$ – ovdje smo s $\Phi_{\mathrm{temp}}(H(V_m))$ označili skup svih temperiranih parametara, tj. podskup skupa $\Phi(H(V_m))$ koji se sastoji od svih reprezentacija čija je slika ograničena.

[5] Autori članka [2], Atobe i Gan, često nazivaju ϕ prezimenom, a η imenom reprezentacije π parametrizirane parom (ϕ, η).

Slično, reprezentacije diskretne serije parametrizirane su parametrima iz skupa

$$\Phi_{\text{disc}}(H(V_m)) \subseteq \Phi_{\text{temp}}(H(V_m)).$$

Skup $\Phi_{\text{disc}}(H(V_m))$ sastoji se od svih reprezentacija $\phi \in \Phi(H(V_m))$ u kojima se svi ireducibilni sumandi pojavljuju s kratnošću jedan i istog su tipa kao ϕ – drugim riječima, vrijedi $\phi' = 0$ i $m_\phi(\phi_i) = 1, \forall i$.

Napomena 2.14 Bitno je dodati da, za razliku od homomorfizma ϕ, karakter η koji sudjeluje u parametrizaciji nije kanonski određen ([2, napomena B2]). Zbog toga ćemo u radu s generičkim reprezentacijama (implicitno) koristiti odabire koji pojednostavljuju račun: fiksiramo li netrivijalni nedegenerirani karakter χ grupe U (sekcija 1.5.5), možemo specificirati parametrizaciju uz koju sve χ-generičke reprezentacije imaju trivijalni karakter η. Također, od sada nadalje pretpostavljamo da je izbor aditivnog karaktera ψ potrebnog za definiciju Weilove reprezentacije (napomena 2.1) usklađen s ovim odabirima. Ova veza između karaktera χ iz definicije generičnosti i karaktera ψ koji određuje Weilovu reprezentaciju detaljno je objašnjena npr. u [29, sekcija 1].

Znatno detaljniji opis lokalne Langlandsove korespondencije i popisi relevantnih svojstava mogu se naći u članku Atobe–Gan [2, Appendix B] ili u Gan–Gross–Prasad [11].

Lokalnu Langlandsovu korespondenciju za opće linearne grupe ustanovili su (nezavisno) Harris i Taylor [15], Henniart [16], odnosno Scholze [31]. Za klasične grupe radi se o radu više autora, ponajprije Arthura [1]. LLC za metaplektičku grupu opisali su Gan i Savin u [9] pomoću theta korespondencije.

2.6.2 Theta liftovi temperiranih reprezentacija

Sada smo spremni za iskaz glavnih rezultata o theta liftovima temperiranih reprezentacija. Teoremi iz članka [2] daju precizan opis L-parametra reprezentacije $\theta(\pi)$ u terminima parametra (ϕ, η) temperirane reprezentacije π. Budući da uglavnom koristimo dio rezultata koji se odnosi na ϕ, ovdje izostavljamo tvrdnje o prezimenu reprezentacije, tj. η dijelu parametra. Potpune tvrdnje sadržaj su poglavlja 4 u članku [2].

U teoremima koji slijede zadržavamo standardne oznake iz 2.2. Dodatno, koristimo i oznaku κ definiranu s $\kappa \equiv n + \epsilon - m \pmod 2$, $\kappa \in \{1, 2\}$.

Sljedeći teorem opisuje indeks prvog pojavljivanja temperirane reprezentacije.

Teorem 2.15 Neka je π ireducibilna temperirana reprezentacija grupe $G(W_n)$ s L-parametrom (ϕ, η). Neka skup $\mathcal{T}$ sadrži $\kappa - 2$ i sve prirodne brojeve $l \equiv \kappa \pmod 2$ koji zadovoljavaju sljedeće uvjete:

- ϕ sadrži $\chi_V S_r$ za $r = \kappa, \kappa + 2, \dots, l$

- kratnost $m_\phi(\chi_V S_r)$ je neparna za $r = \kappa, \kappa+2, \dots, l-2$
- ako je $\kappa = 2$, vrijedi $\eta(e_2) = \epsilon \cdot \delta(\chi_V = \mathbb{1})$
- $\eta(e_r) = -\eta(e_{r+2})$ za $r = \kappa, \kappa+2, \dots, l-2$.

Ovdje je e_r element A_ϕ koji odgovara reprezentaciji $\chi_V S_r$; za karakter χ koristimo oznaku

$$\delta(\chi = \mathbb{1}) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } \chi = \mathbb{1} \\ -1, & \text{inače.} \end{cases}$$

Stavimo $l(\pi) = \max(\mathcal{T})$. Tada vrijedi

$$m^{\text{dolje}}(\pi) = n + \epsilon - l(\pi) \quad \text{i} \quad m^{\text{gore}}(\pi) = n + \epsilon + 2 + l(\pi)$$

Napomena. Notacija $\chi_V S_r$ koju koristimo u ovim teoremima zahtijeva pojašnjenje. Prema lokalnoj teoriji polja klasa, vrijedi

$$W_{\mathbb{F}}^{\text{ab}} \equiv \mathbb{F}^\times,$$

pri čemu smo s $W_{\mathbb{F}}^{\text{ab}}$ označili maksimalni Abelov kvocijent Weilove grupe (to jest, kvocijent po komutatorskoj podgrupi). Odavde slijedi da karaktere grupe $\mathbb{F}^\times$ možemo poistovjetiti s karakterima Weilove grupe $W_{\mathbb{F}}$. Prema tome, $\chi_V S_r$ označava reprezentaciju Weil–Deligneove grupe $W_{\mathbb{F}} \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ u kojoj $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ djeluje sa S_r, a $W_{\mathbb{F}}$ karakterom χ_V.

Sljedeća dva teorema opisuju parametre theta liftova na donji, odnosno gornji toranj.

Teorem 2.16 Neka je π ireducibilna temperirana reprezentacija grupe $G(W_n)$ s L-parametrom (ϕ, η). Pretpostavimo da V_m pripada donjem tornju – posebno, vrijedi $m \geqslant m^{\text{dolje}}(\pi)$ i $m \equiv m^{\text{dolje}}(\pi) \pmod 2$. Neka je $m_1 = n+\epsilon+2-\kappa$. Označimo s $(\theta_m(\phi), \theta_m(\eta))$ parametar reprezentacije $\theta(\pi, V_m)$.

(1) Ako je $m^{\text{dolje}}(\pi) \leqslant m < m_1$, onda vrijedi

$$\theta_m(\phi) = (\phi \otimes \chi_V^{-1}\chi_W) - \chi_W S_l,$$

pri čemu je $l = n + m - \epsilon > 0$.

(2) Ako je $m = m_1$ i $\kappa = 1$, onda vrijedi

$$\theta_{m_1}(\phi) = (\phi \otimes \chi_V^{-1}\chi_W) \oplus \chi_W.$$

(3) Ako je $m = m_1$ i $\kappa = 2$, onda vrijedi

$$\theta_{m_1}(\phi) = \phi \otimes \chi_V^{-1}\chi_W.$$

(4) Ako je $m > m_1$ onda je parametar $\theta_m(\phi)$ jednak

$$\theta_{m_1}(\phi) \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{(m-m_1)/2} \left(\chi_W |\cdot|^{\frac{m-n-\epsilon+1}{2}-i} \oplus \chi_W |\cdot|^{-\frac{m-n-\epsilon+1}{2}+i} \right) \right).$$

Napomena. Prethodni teorem odnosi se i na slučaj $l(\pi) = -1$, to jest $m^{\text{dolje}}(\pi) = m^{\text{gore}}(\pi)$.

Napomena. Oznaka l u ovoj sekciji poprima različita značenja, baš kao i u originalnom radu [2]. Oznaka $l = n + \epsilon - m$ koju smo uveli u sekciji 2.2 i koju koristimo u ostatku rada motivirana je načinom korištenja u prethodnom teoremu; u teoremu koji slijedi (privremeno) poprima drugo značenje.

Teorem 2.17 Neka je π ireducibilna temperirana reprezentacija grupe $G(W_n)$ s L-parametrom (ϕ, η). Pretpostavimo da V_m pripada gornjem tornju te da vrijedi

$$m \geqslant m^{\text{gore}}(\pi) \geqslant n + \epsilon + 2, \quad \text{to jest} \quad l(\pi) \geqslant 0.$$

Neka je sada $l = m - n - \epsilon - 2 \geqslant 0$. Označimo s $(\theta_m(\phi), \theta_m(\eta))$ parametar reprezentacije $\theta(\pi, V_m)$.

(1) Neka je $m = m^{\text{gore}}(\pi)$ tako da vrijedi $l = l(\pi)$. Ako je $l = 0$ ili ako je kratnost $m_\phi(\chi_V S_l)$ neparna, onda vrijedi

$$\theta_m(\phi) = (\phi \otimes \chi_V^{-1} \chi_W) \oplus \chi_W S_{l+2}.$$

Uočimo da je tada $\theta(\pi, V_m)$ temperirana.

(2) Neka je $m = m^{\text{gore}}(\pi)$ tako da vrijedi $l = l(\pi)$. Ako je $l > 0$ i $m_\phi(\chi_V S_l) = 2h > 0$, onda vrijedi

$$\theta_m(\phi) = \left((\phi \otimes \chi_V^{-1} \chi_W) - \chi_W S_l \right) \oplus \left(\chi_W S_{l+1} \otimes (|\cdot|^{\frac{1}{2}} \oplus |\cdot|^{-\frac{1}{2}}) \right)$$

pa $\theta(\pi, V_m)$ nije temperirana.

(3) Neka je $m > m_1 := m^{\text{gore}}(\pi)$. Tada je parametar $\theta_m(\phi)$ jednak

$$\theta_{m_1}(\phi) \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{(m-m_1)/2} \left(\chi_W |\cdot|^{\frac{m-n-\epsilon+1}{2}-i} \oplus \chi_W |\cdot|^{-\frac{m-n-\epsilon+1}{2}+i} \right) \right).$$

Za kraj odjeljka navodimo još jednu tvrdnju ([2, prop. 5.5, lema 6.4]) korisnu za određivanje strukture velikog theta lifta.

Propozicija 2.18 Neka je $\pi \in \mathrm{Irr}(G(W_n))$ takva da vrijedi $\Theta(\pi, V_m) \neq 0$.

(1) Ako vrijedi jedan od sljedećih uvjeta

 (i) π je temperirana i $m \leqslant n + 1 + \epsilon$;

 (ii) π je reprezentacija diskretne serije i $\Theta(\pi, V_m)$ je prvi lift na gornji toranj

 onda su svi ireducibilni subkvocijenti reprezentacije $\Theta(\pi, V_m)$ temperirani.

(2) Ako su svi ireducibilni subkvocijenti reprezentacije $\Theta(\pi, V_m)$ temperirani, onda pripadaju istom L-paketu.

Poglavlje 3

Prvi liftovi

U ovom poglavlju određujemo indeks prvog pojavljivanja te opisujemo izgled prvih liftova za generičke reprezentacije simplektičke, odnosno metaplektičke grupe.

3.1 Indeks prvog pojavljivanja

Za ireducibilnu temperiranu reprezentaciju $\pi \in \mathrm{Irr}(G(W_n))$ teorem 2.15 daje opis broja $l(\pi)$ za koji vrijedi $m^{\mathrm{dolje}}(\pi) = n + \epsilon - l(\pi)$. Pomoću ove formule proširujemo značenje oznake $l(\pi)$: za proizvoljnu ireducibilnu reprezentaciju π grupe $G(W_n)$ definiramo

$$l(\pi) = n + \epsilon - m^{\mathrm{dolje}}(\pi).$$

Ova oznaka podrazumijeva da smo fiksirali par Wittovih tornjeva $\mathcal{V}^+$ i $\mathcal{V}^-$ na koji podižemo reprezentaciju π.

U nastavku poglavlja fiksiramo $\epsilon = 1$, tako da je $\mathcal{W} = (W_n)$ simplektički, a $\mathcal{V}$ ortogonalni toranj.

Neka je sada π ireducibilna generička reprezentacija grupe $G(W_n)$. Ako je $G(W_n) = \mathrm{Sp}(W_n)$, teorem 1.8 jamči da je standardni modul reprezentacije π ireducibilan, stoga možemo pisati

$$\pi \cong \chi_V \delta_r \nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_V \delta_1 \nu^{s_1} \rtimes \pi_0,$$

gdje su $\delta_i \in \mathrm{Irr}_{\mathrm{disc}} \mathrm{GL}_{n_i}$ $(i = 1, \ldots, r)$, $s_r \geqslant \cdots \geqslant s_1 > 0$, a π_0 ireducibilna temperirana reprezentacija grupe $\mathrm{Sp}(W_{n_0})$. Nadalje, prema teoremu 1.6 znamo da je π_0 generička.

Ukoliko je $G(W_n) = \mathrm{Mp}(W_n)$, standardni modul se može reducirati, ali pretpostavljamo da to ovdje nije slučaj. Zbog toga možemo pisati π kao gore, imajući pritom u vidu da su δ_i i π_0 reprezentacije odgovarajućih natkrivačkih grupa.

Sljedeći rezultat govori o indeksu prvog pojavljivanja generičke reprezentacije π:

Teorem 3.1 Vrijedi $l(\pi) = l(\pi_0)$.

Dokaz. Neka je $l = -l(\pi_0)$ (sjetimo se, $l = n+\epsilon-m$); promatramo liftove na gornji toranj u odnosu na π_0. Uzastopnom primjenom korolara 2.8 na epimorfizam

$$\chi_V\delta_r\nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_V\delta_1\nu^{s_1} \rtimes \pi_0 \twoheadrightarrow \pi \tag{$*$}$$

dobivamo

$$\chi_W\delta_r\nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_W\delta_1\nu^{s_1} \rtimes \Theta_l(\pi_0) \twoheadrightarrow \Theta_l(\pi).$$

Budući da se radi o gornjem tornju, imamo $\Theta_l(\pi_0) = 0$ (sjetimo se, $\Theta_l(\pi_0)$ označava lift reprezentacije π_0 na prostor $V_{n+\epsilon-l}$; prvi ne-nul lift dobivamo za $l = -l(\pi_0) - 2$). Sada iz gornjeg epimorfizma slijedi i $\Theta_l(\pi) = 0$ pa zaključujemo

- gornji toranj za π je isti kao gornji toranj za π_0
- vrijedi $-l(\pi) \leqslant l$, odnosno $l(\pi) \geqslant l(\pi_0)$.

Neka je sada $l = l(\pi_0) + 2$; ovaj put promatramo liftove na donji toranj u odnosu na π_0. Sada na isti način dobivamo

$$\chi_W\delta_r\nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_W\delta_1\nu^{s_1} \rtimes \Theta_l(\pi_0) \twoheadrightarrow \Theta_l(\pi).$$

Budući da je $l > l(\pi_0)$, imamo $\Theta_l(\pi_0) = 0$, stoga iz gornjeg epimorfizma čitamo i $\Theta_l(\pi) = 0$. Zaključujemo da vrijedi $l(\pi) < l$, to jest $l(\pi) \leqslant l(\pi_0)$.

Uočimo da smo u ovom argumentu zanemarili pretpostavke korolara 2.8 – pretpostavili smo da za svaki $i = 1, \ldots, r$ vrijedi $\delta_i\nu^{s_i} \neq \mathrm{St}_k\nu^{\frac{l-k}{2}}$. Ukoliko ipak za neki indeks i imamo $\delta_i\nu^{s_i} = \mathrm{St}_k\nu^{\frac{l-k}{2}}$, koristimo jednostavnu posljedicu MVW involucije (lema 1.5):
Budući da je reprezentacija $\chi_V\delta_r\nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_V\delta_1\nu^{s_1} \rtimes \pi_0$ ireducibilna, vrijedi

$$\chi_V\delta_r\nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_V\delta_i\nu^{s_i} \times \cdots \times \chi_V\delta_1\nu^{s_1} \rtimes \pi_0 \cong \chi_V\delta_r\nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_V(\delta_i)^\vee\nu^{-s_i} \times \cdots \times \chi_V\delta_1\nu^{s_1} \rtimes \pi_0.$$

Zbog toga u epimorfizmu ($*$) možemo zamijeniti $\delta_i\nu^{s_i}$ sa $(\delta_i)^\vee\nu^{-s_i}$ i time zaobići uvjet u korolaru 2.8.

Kombiniranjem dobivenih nejednakosti dobivamo $l(\pi) = l(\pi_0)$, što je trebalo pokazati. Vrijedi uočiti i sljedeći detalj koji proizlazi iz dokaza: donji (gornji) toranj za π isti je kao donji (gornji) toranj za π_0. □

Napomena 3.2 Bitno je naglasiti da kod generičkih reprezentacija postoje samo dvije mogućnosti za indeks prvog pojavljivanja. Naime, budući da je π_0 generička, η dio njezinog parametra je trivijalni karakter (napomena 2.14). Prema tome, četvrti uvjet u teoremu 2.15 ne može biti ispunjen za $l > 2$.

Odavde zaključujemo da su jedine mogućnosti sljedeće:

$$\pi \in \mathrm{Irr}(\mathrm{Sp}(W_n)) \Rightarrow l(\pi) = l(\pi_0) = \begin{cases} 1, & \text{ako } \pi_0 \text{ ima } \chi_V \text{ u parametru} \\ -1, & \text{inače} \end{cases}$$

$$\pi \in \mathrm{Irr}(\mathrm{Mp}(W_n)) \Rightarrow l(\pi) = l(\pi_0) = \begin{cases} 2, & \chi_V = \mathbb{1} \text{ i } \pi_0 \text{ ima } S_2 \text{ u parametru} \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

3.2 Prvi liftovi za $\pi \in \mathrm{Irr}(Sp(W_n))$

U ovom odjeljku opisujemo izgled prvog lifta generičke ireducibilne reprezentacije $\pi \in \mathrm{Irr}(Sp(W_n))$. Nastavljamo koristiti notaciju i pretpostavke iz 3.1; posebno, znamo da je π izomorfna vlastitom standardnom modulu,

$$\pi \cong \chi_V\delta_r\nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_V\delta_1\nu^{s_1} \rtimes \pi_0.$$

Razlikujemo nekoliko slučajeva, u ovisnosti o izgledu parametra ϕ reprezentacije π_0 i izboru Wittovog tornja na koji podižemo π.

Slučaj 1: $l(\pi) = l(\pi_0) = -1$

U ovom se slučaju na oba tornja prvi lift nalazi na nivou $l = -1$. Uzastopnom primjenom korolara 2.8 na epimorfizam

$$\chi_V\delta_r\nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_V\delta_1\nu^{s_1} \rtimes \pi_0 \twoheadrightarrow \pi$$

dobivamo

$$\chi_W\delta_r\nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_W\delta_1\nu^{s_1} \rtimes \Theta_{-1}(\pi_0) \twoheadrightarrow \Theta_{-1}(\pi). \tag{1}$$

Primjena korolara 2.8 je opravdana: budući da vrijedi $l < 0$ i $s_i > 0$, ne može se dogoditi da je gornji rub segmenta koji definira $\delta_i\nu^{s_i}$ jednak $|\cdot|^{\frac{l-1}{2}}$.

Sada uočimo da je $\Theta_{-1}(\pi_0)$ ireducibilna i temperirana. Naime, budući da je π_0 temperirana, postoje ireducibilne reprezentacije diskretne serije $\delta_1', \ldots, \delta_k', \pi_{00}$ takve da vrijedi

$$\chi_V\delta_1' \times \cdots \times \chi_V\delta_k' \rtimes \pi_{00} \twoheadrightarrow \pi_0$$

(štoviše, π_0 je direktni sumand reprezentacije na lijevoj strani, prema napomeni 1.4). I ovdje možemo primijeniti korolar 2.8. Naime, gornji rub segmenta koji definira reprezentaciju δ_i' ne može biti jednak $|\cdot|^{\frac{l-1}{2}}$ jer je $l < 0$. Dobivamo

$$\chi_W\delta_1' \times \cdots \times \chi_W\delta_k' \rtimes \Theta_{-1}(\pi_{00}) \twoheadrightarrow \Theta_{-1}(\pi_0).$$

Sada koristimo rezultat iz [26]: $\Theta_{-1}(\pi_{00})$ je ireducibilna i temperirana. Zbog toga je, prema napomeni 1.4, reprezentacija na lijevoj strani gornjeg epimorfizma potpuno reducibilna, a svi njezini ireducibilni subkvocijenti su temperirani. Zaključujemo da isto vrijedi i za $\Theta_{-1}(\pi_0)$. Kako $\Theta_{-1}(\pi_0)$ ima jedinstveni ireducibilni kvocijent, potpuna reducibilnost povlači da je ona sama ireducibilna i temperirana.

Time smo pokazali da je reprezentacija na lijevoj strani epimorfizma (1) standardna; nadalje, zbog $\Theta_{-1}(\pi) \twoheadrightarrow \theta_{-1}(\pi)$ iz (1) slijedi

$$\chi_W\delta_r\nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_W\delta_1\nu^{s_1} \rtimes \Theta_{-1}(\pi_0) \twoheadrightarrow \theta_{-1}(\pi)$$

pa smo time odredili standardni modul reprezentacije $\theta_{-1}(\pi)$.

<u>Slučaj 2: $l(\pi) = l(\pi_0) = 1$, donji toranj</u>

Sjetimo se da je donji toranj za π isti kao za π_0. Kao u prethodnom slučaju, dobivamo

$$\chi_W\delta_r\nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_W\delta_1\nu^{s_1} \rtimes \Theta_1(\pi_0) \twoheadrightarrow \theta_1(\pi).$$

Ponovno je primjena korolara 2.8 opravdana: kako je $s_i > 0$, gornji rub segmenta koji definira reprezentaciju $\delta_1\nu^{s_1}$ ne može biti jednak $|\cdot|^{\frac{l-1}{2}} = |\cdot|^0$.

Ovaj put ne znamo je li reprezentacija $\Theta_1(\pi_0)$ ireducibilna, no znamo da su svi njezini ireducibilni subkvocijenti temperirani (prop. 2.18). Prema tome, postoji ireducibilni temperirani subkvocijent σ reprezentacije $\Theta_1(\pi_0)$ takav da vrijedi

$$\chi_W\delta_r\nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_W\delta_1\nu^{s_1} \rtimes \sigma \twoheadrightarrow \theta_1(\pi).$$

Pokazat ćemo da vrijedi upravo $\sigma \cong \theta_1(\pi_0)$.

Reprezentacija na lijevoj strani epimorfizma je standardna, stoga možemo pisati $\chi_W\delta_r\nu^{s_r} \rtimes L \twoheadrightarrow \theta_1(\pi)$, gdje smo s L označili Langlandsov kvocijent reprezentacije $\chi_W\delta_{r-1}\nu^{s_{r-1}} \times \cdots \times \chi_W\delta_1\nu^{s_1} \rtimes \sigma$. Sada primjenjujemo korolar 2.8. Imajući u vidu da vrijedi $\theta_{-1}(\theta_1(\pi)) = \pi$, dobivamo

$$\chi_V\delta_r\nu^{s_r} \rtimes \Theta_{-1}(L) \twoheadrightarrow \pi.$$

Uzastopno primjenjujući korolar 2.8 na ovaj način dolazimo do

$$\chi_V\delta_r\nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_V\delta_1\nu^{s_1} \rtimes \Theta_{-1}(\sigma) \twoheadrightarrow \pi$$

Kao u prethodnom slučaju, reprezentacija $\Theta_{-1}(\sigma)$ je ireducibilna i temperirana, stoga smo ovdje dobili standardni modul za reprezentaciju π. Odavde slijedi $\Theta_{-1}(\sigma) = \theta_{-1}(\sigma) = \pi_0$, dakle $\sigma \cong \theta_1(\pi_0)$.

Time smo odredili standardni modul za reprezentaciju $\theta_1(\pi)$; vrijedi

$$\chi_W\delta_r\nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_W\delta_1\nu^{s_1} \rtimes \theta_1(\pi_0) \twoheadrightarrow \theta_1(\pi). \tag{2}$$

Slučaj 3: $l(\pi) = l(\pi_0) = 1$, gornji toranj

Na gornjem se tornju prvi lift pojavljuje na nivou $l = -3$. Kao i u prva dva slučaja, imamo

$$\chi_W \delta_r \nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_W \delta_1 \nu^{s_1} \rtimes \Theta_{-3}(\pi_0) \twoheadrightarrow \theta_{-3}(\pi). \tag{3}$$

Ovaj je slučaj kompliciraniji jer subkvocijenti reprezentacije $\Theta_{-3}(\pi_0)$ nisu nužno temperirani. Imamo dva podslučaja, ovisno o izgledu parametra ϕ reprezentacije π_0.

3.1: kratnost $m_\phi(\chi_V)$ je neparna

Na isti način kao u prvom slučaju pokazujemo da je $\Theta_{-3}(\pi_0)$ ireducibilna i temperirana. Ključna je činjenica da parametar reprezentacije π_{00} (gdje je π_{00} reprezentacija diskretne serije kao u prvom slučaju) sadrži χ_V, stoga vrijedi $l(\pi_{00}) = 1$.

Nadalje, nije teško vidjeti da su gornji, odnosno donji toranj za π_{00} isti kao i za π_0: označimo s $\mathcal{V}'$ donji toranj za π_0, a s Θ' liftove na taj toranj. Tada imamo $\Theta'_{-1}(\pi_0) \neq 0$, ali vrijedi i

$$\chi_W \delta'_1 \times \cdots \times \chi_W \delta'_k \rtimes \Theta'_{-1}(\pi_{00}) \twoheadrightarrow \Theta'_{-1}(\pi_0).$$

Odavde zaključujemo $\Theta'_{-1}(\pi_{00}) \neq 0$, što u kombinaciji s $l(\pi_{00}) = 1$ pokazuje da je $\mathcal{V}'$ donji toranj i za π_{00}.

Ovime smo pokazali smo da je $\Theta_{-3}(\pi_{00})$ prvi lift reprezentacije π_{00} na gornji toranj. Iz [26] sada znamo da je $\Theta_{-3}(\pi_{00})$ ireducibilna i temperirana, odakle dobivamo istu tvrdnju i za $\Theta_{-3}(\pi_0)$.

Time smo odredili standardni modul za reprezentaciju $\theta_{-3}(\pi)$:

$$\chi_W \delta_r \nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_W \delta_1 \nu^{s_1} \rtimes \Theta_{-3}(\pi_0)$$

3.2: kratnost $m_\phi(\chi_V)$ je parna

U ovom slučaju ne znamo je li $\Theta_{-3}(\pi_0)$ ireducibilna (štoviše, znamo da $\theta_{-3}(\pi_0)$ nije temperirana), stoga je potrebna detaljnija analiza. Pretpostavimo da vrijedi $m_\phi(\chi_V) = 2h > 0$. Tada možemo pisati

$$(\chi_V, h) \rtimes \pi'_0 \twoheadrightarrow \pi_0,$$

pri čemu je π'_0 neka ireducibilna temperirana reprezentacija čiji parametar ne sadrži χ_V, a (χ_V, h) oznaka za $\underbrace{\chi_V \times \cdots \times \chi_V}_{h \text{ puta}}$. Primjena korolara 2.8 daje

$$(\chi_W, h) \rtimes \Theta_{-3}(\pi'_0) \twoheadrightarrow \Theta_{-3}(\pi_0).$$

Razlika u odnosu na slučaj 3.1 je to što, budući da parametar reprezentacije π'_0 ne sadrži χ_V, $\Theta_{-3}(\pi'_0)$ nije prvi, već drugi lift reprezentacije π'_0 na ovaj toranj. U svakom slučaju, kombiniranjem ovog epimorfizma s (3) dobivamo

$$\chi_W\delta_r\nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_W\delta_1\nu^{s_1} \times (\chi_W, h) \rtimes \Theta_{-3}(\pi_0') \twoheadrightarrow \theta_{-3}(\pi). \tag{$*$}$$

Htjeli bismo odrediti koji ireducibilni subkvocijent reprezentacije $\Theta_{-3}(\pi_0')$ sudjeluje u epimorfizmu ($*$). Rezultati iz [26] pokazuju[1] da postoje samo dvije mogućnosti za ireducibilne subkvocijente reprezentacije $\Theta_{-3}(\pi_0')$:

(i) subkvocijent je temperiran

(ii) subkvocijent je kvocijent reprezentacije $\chi_W|\cdot| \rtimes \Theta_{-1}(\pi_0')$.

Napomena 3.3 Slično kao i u dosadašnjim slučajevima možemo pokazati da je $\Theta_{-1}(\pi_0')$ ireducibilna i temperirana, stoga je reprezentacija u (ii) zapravo Langlandsov kvocijent. Nadalje, kako znamo da je $\theta_{-3}(\pi_0')$ netemperirana, zaključujemo da je subkvocijent u (ii) jednak upravo $\theta_{-3}(\pi_0')$.

Prva mogućnost je da u ($*$) sudjeluje neki temperirani subkvocijent σ. To bi značilo da postoji ireducibilni temperirani direktni sumand σ' reprezentacije $(\chi_W, h) \rtimes \sigma$ takav da vrijedi

$$\chi_W\delta_r\nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_W\delta_1\nu^{s_1} \rtimes \sigma' \twoheadrightarrow \theta_{-3}(\pi).$$

Sada se opet vraćamo na simplektički toranj i koristimo Kudlinu filtraciju da bismo izračunali $\theta_3(\theta_{-3}(\pi)) = \pi$, kao u slučaju 2. Pritom modificiramo pristup jer ovdje ne možemo koristiti korolar (2.8). Naime, neka od reprezentacija $\delta_i\nu^{s_i}$ možda je jednaka $|\cdot|$ ili $\mathrm{St}_2\nu^{\frac{1}{2}}$, to jest nekoj od reprezentacija koje čine iznimku u tom korolaru (za $l = 3$ i $k = 1, 2$). Zbog toga koristimo korolar 2.10; uzastopno ga primjenjujući na gornji epimorfizam dobivamo

$$\chi_V\delta_r\nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_V\delta_1\nu^{s_1} \rtimes \Theta_3(\sigma') \twoheadrightarrow \pi.$$

Odavde slijedi da postoji neki ireducibilni subkvocijent τ reprezentacije $\Theta_3(\sigma')$ koji sudjeluje u ovom epimorfizmu, to jest takav da vrijedi

$$\chi_V\delta_r\nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_V\delta_1\nu^{s_1} \rtimes \tau \twoheadrightarrow \pi.$$

Uočimo da je τ nužno temperirana (kao i svi subkvocijenti od $\Theta_3(\sigma')$, zbog propozicije 2.18), pa je reprezentacija u gornjem epimorfizmu standardni modul za π. Odavde slijedi $\tau \cong \pi_0$, no to nije moguće. Naime, τ je subkvocijent od $\Theta_3(\sigma')$, stoga prema propoziciji 2.18 (2) i teoremu 2.15 njezin parametar sadrži χ_V s neparnom kratnošću. S druge strane, pretpostavili smo da je kratnost χ_V u parametru za π_0 parna.

[1] Radi se o ne sasvim direktnoj posljedici rezultata iz [26], stoga ćemo se nešto kasnije uvjeriti da ova tvrdnja doista vrijedi.

Time smo došli do kontradikcije pa zaključujemo da u $(*)$ ne sudjeluje temperirani subkvocijent reprezentacije $\Theta_{-3}(\pi_0')$, već $L(\chi_W|\cdot| \rtimes \Theta_{l-1}(\pi_0')) \cong \theta_{-3}(\pi_0')$.

Napomena 3.4 U prethodnoj diskusiji ključna je bila primjena korolara 2.10. Iako u iskazu korolara imamo dvije mogućnosti, mi smo pretpostavili da u svakom koraku koristimo isključivo opciju (i). Ovo je opravdano: da smo u nekom koraku primijenili opciju (ii) (uočimo, ovo možemo napraviti najviše jednom jer je $l = 3$), do kontradikcije bismo došli odmah, jer bismo zaključili da standardni modul reprezentacije π ima GL-dio koji se razlikuje od $\chi_V\delta_r\nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_V\delta_1\nu^{s_1}$.

Budući da smo zaključili da u epimorfizmu $(*)$ sudjeluje $L(\chi_W|\cdot| \rtimes \Theta_{l=-1}(\pi_0'))$, možemo pisati

$$\chi_W\delta_r\nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_W\delta_1\nu^{s_1} \times (\chi_W, h) \rtimes \chi_W|\cdot| \rtimes \Theta_{-1}(\pi_0') \twoheadrightarrow \theta_{-3}(\pi).$$

Bitno je uočiti da se reprezentacija $(\chi_W, h) \rtimes \chi_W|\cdot|$ reducira, no ima samo dva ireducibilna subkvocijenta:

$$L(\chi_W|\cdot| \times (\chi_W, h)) \quad \text{i} \quad \chi_W\mathrm{St}_2\nu^{\frac{1}{2}} \times (\chi_W, h-1).$$

Rezimirajmo dosadašnju diskusiju. Želimo odrediti ireducibilni subkvocijent σ_0 reprezentacije $\Theta_{-3}(\pi_0)$ koji sudjeluje u epimorfizmu (3), to jest takav da vrijedi

$$\chi_W\Pi \rtimes \sigma_0 \twoheadrightarrow \theta_{-3}(\pi), \tag{3'}$$

pri čemu koristimo oznaku $\Pi = \delta_r\nu^{s_r} \times \cdots \times \delta_1\nu^{s_1}$. Dosadašnji zaključci pokazuju da vrijedi jedno od sljedećeg:

a) σ_0 je subkvocijent reprezentacije $L(\chi_W|\cdot| \times (\chi_W, h)) \rtimes \Theta_{-1}(\pi_0')$ i epimorfizam $(3')$ se proširuje do epimorfizma

$$\chi_W\Pi \times \chi_W|\cdot| \times (\chi_W, h) \rtimes \Theta_{-1}(\pi_0') \twoheadrightarrow \theta_{-3}(\pi) \tag{3a}$$

b) σ_0 je subkvocijent reprezentacije $\chi_W\mathrm{St}_2\nu^{\frac{1}{2}} \times (\chi_W, h-1) \rtimes \Theta_{-1}(\pi_0')$ i epimorfizam $(3')$ se proširuje do epimorfizma

$$\chi_W\Pi \times \chi_W\mathrm{St}_2\nu^{\frac{1}{2}} \times (\chi_W, h-1) \rtimes \Theta_{-1}(\pi_0') \twoheadrightarrow \theta_{-3}(\pi) \tag{3b}$$

Napomena 3.5 Uočimo da je reprezentacija u $(3a)$ standardna: $\Theta_{-1}(\pi_0')$ je ireducibilna i temperirana, te (prema teoremu 2.16 (2)) sadrži χ_W u parametru, zbog čega se $(\chi_W, h) \rtimes \Theta_{-1}(\pi_0')$ ne reducira. Zbog toga je jedini ireducibilni subkvocijent reprezentacije $\chi_W|\cdot| \times (\chi_W, h) \rtimes \Theta_{-1}(\pi_0')$ koji sudjeluje u $(3a)$ upravo njezin (jedinstveni) kvocijent. Analogno zaključujemo u slučaju $(3b)$.

Ovime smo pokazali da je subkvocijent σ_0 izomorfan s jednom od sljedećih reprezentacija:

$$L_1 = L(\chi_W|\cdot| \times (\chi_W, h) \rtimes \Theta_{-1}(\pi_0')) \quad \text{ili} \quad L_2 = L(\chi_W \mathrm{St}_2\nu^{\frac{1}{2}} \times (\chi_W, h-1) \rtimes \Theta_{-1}(\pi_0')).$$

Pokažimo da ne može biti $\sigma_0 \cong L_1$. U suprotnom bismo imali

$$\sigma_0 \hookrightarrow \chi_W|\cdot|^{-1} \times (\chi_W, h) \rtimes \Theta_{-1}(\pi_0'),$$

odnosno, koristeći Frobeniusov reciprocitet,

$$R_{P_1}(\sigma_0) \twoheadrightarrow \chi_W|\cdot|^{-1} \otimes (\chi_W, h) \rtimes \Theta_{-1}(\pi_0').$$

Posebno, vrijedi $R_{P_1}(\sigma_0)(\chi_W|\cdot|^{-1}) \neq 0$, odakle slijedi i $R_{P_1}(\Theta_{-3}(\pi_0))(\chi_W|\cdot|^{-1}) \neq 0$. Prema lemi 5.1 iz [25] ovo bi impliciralo $\Theta_{-1}(\pi_0) \neq 0$, no to je nemoguće jer je po pretpostavci $\Theta_{-3}(\pi_0)$ prvi lift reprezentacije π_0 na ovaj toranj.

Ovime smo eliminirali mogućnost $\sigma_0 \cong L_1$, stoga mora biti $\sigma_0 \cong L_2$. Zaključujemo da vrijedi

$$\chi_W\Pi \times \chi_W \mathrm{St}_2\nu^{\frac{1}{2}} \times (\chi_W, h-1) \rtimes \Theta_{-1}(\pi_0') \twoheadrightarrow \theta_{-3}(\pi).$$

Napomena 3.6 Uočimo da smo time odredili standardni modul reprezentacije $\theta_{-3}(\pi)$. Naime, $(\chi_W, h-1) \rtimes \Theta_{-1}(\pi_0')$ je ireducibilna i temperirana. Nadalje, $\chi_W \mathrm{St}_2\nu^{\frac{1}{2}}$ možda nije na dobrom mjestu – ako za reprezentaciju $\chi_W\delta_1\nu^{s_1}$ (posljednja u produktu $\chi_W\Pi$) imamo $s_1 < \frac{1}{2}$, onda bi ona trebala zamijeniti mjesto sa $\chi_W \mathrm{St}_2\nu^{\frac{1}{2}}$; isto vrijedi i za sve ostale reprezentacije koje sudjeluju u definiciji $\chi_W\Pi$. S druge strane, budući da u tom slučaju s_1 nije polucijeli broj, odgovarajući segmenti očito nisu ulančani, te je produkt $\chi_W\delta_1\nu^{s_1} \times \chi_W \mathrm{St}_2\nu^{\frac{1}{2}}$ ireducibilan. Zbog toga doista možemo zamijeniti mjesta ovim reprezentacijama.

Konačno, teorem 5.2 iz [28] pokazuje da vrijedi upravo $L_2 = \theta_{-3}(\pi_0)$, stoga kao i u prethodnim slučajevima imamo

$$\chi_W\Pi \times \theta_{-3}(\pi_0) \twoheadrightarrow \theta_{-3}(\pi).$$

Time smo dokazali

Teorem 3.7 Neka je π ireducibilna generička reprezentacija simplektičke grupe sa standardnim modulom $\chi_V\delta_r\nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_V\delta_1\nu^{s_1} \rtimes \pi_0$. Ako s $\theta(\pi_0)$, $\theta(\pi)$ označimo prvi lift reprezentacije π_0, odnosno π na toranj $\mathcal{V}$, onda vrijedi

$$\chi_W\delta_r\nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_W\delta_1\nu^{s_1} \rtimes \theta(\pi_0) \twoheadrightarrow \theta(\pi).$$

Osim u slučaju 3.2 ($m_\phi(\chi_V) = 2h > 0$, gornji toranj), reprezentacija $\theta(\pi_0)$ je temperirana, stoga je ovim epimorfizmom određen i standardni modul reprezentacije $\theta(\pi)$.

U slučaju 3.2 je $\theta(\pi_0)$ Langlandsov kvocijent reprezentacije $\chi_W \mathrm{St}_2 \nu^{\frac{1}{2}} \times (\chi_W, h-1) \rtimes \theta_{-1}(\pi_0')$, pri čemu je π_0' ireducibilna temperirana reprezentacija za koju vrijedi $(\chi_V, h) \rtimes \pi_0' \twoheadrightarrow \pi_0$. Standardni modul reprezentacije $\theta(\pi)$ možemo iščitati iz gornjeg epimorfizma koristeći napomenu 3.6.

Sljedeća pomoćna tvrdnja korištena je u dokazu (slučaj 3.2)

Lema 3.8 Neka je $\pi_0' \in \mathrm{Irr}(\mathrm{Sp}(W_n))$ temperirana reprezentacija čiji parametar ne sadrži χ_V, tako da vrijedi $l(\pi_0') = -1$ (štoviše, znamo da je tada $\Theta_{-1}(\pi_0')$ ireducibilna i temperirana). Tada je jedini netemperirani ireducibilni subkvocijent lifta $\Theta_{-3}(\pi_0')$ izomorfan Langlandsovom kvocijentu reprezentacije $\chi_W |\cdot| \rtimes \Theta_{-1}(\pi_0')$

Dokaz. Pratimo dokaz teorema 4.1 iz [26] pa preuzimamo i oznake (tako i umjesto π_0' pišemo σ). Na isti način kao u originalnom dokazu dobivamo da (4.4) ne može vrijediti za $j = k-1$, stoga vrijedi (4.5) i (4.6). Posebno, iz (4.6) i $m = n+2$ zaključujemo da je $\alpha = -1$. To odmah povlači da može biti jedino $\beta = 0$ ili $\beta = -1$.

Ako je $\beta = 0$, tvrdimo da mora biti $k = 1$. U suprotnom, epimorfizam (4.4) primijenjen na $j = k-2$ implicirao bi da σ ima χ_V u parametru, što je u kontradikciji s pretpostavkama leme. Zbog toga vrijedi (4.5) i (4.6), ali (4.6) ne može istovremeno vrijediti i za $j = k-1$, i za $j = k-2$. Zaključujemo da mora biti $k = 1$.

S druge strane, tada (4.5) daje $\chi_V \rtimes \Theta(m - m_\delta + 1, \tau_3) \twoheadrightarrow \sigma$, odakle opet zaključujemo da σ ima χ_V u parametru i dolazimo do kontradikcije.

Jedina preostala mogućnost je $\alpha = \beta = -1$, a ona dovodi do željenog zaključka: τ je kvocijent reprezentacije $\chi_W |\cdot| \times \tau_1$. Sada na isti način kao u [26] dovršavamo dokaz.

Na kraju dokaza treba pokazati da J_{11} ne sudjeluje u epimorfizmu na $R_{P_1'}(\Theta(\sigma, m))_{\chi_W |\cdot|^{-1}}$. Ako sudjeluje, pomoću drugog Frobeniusovog izomorfizma zaključujemo da $R_{\overline{P}_1}(\sigma)$ mora imati subkvocijent, a onda i podreprezentaciju, oblika $\chi_V |\cdot| \otimes \sigma'$. Drugim riječima, vrijedi $\chi_V |\cdot| \otimes \sigma' \hookrightarrow R_{\overline{P}_1}(\sigma)$, odnosno

$$\chi_V |\cdot| \rtimes \sigma' \twoheadrightarrow \sigma,$$

što nije moguće jer je σ temperirana. □

3.3 Prvi liftovi za $\pi \in \mathrm{Irr}(Mp(W_n))$

Slično kao što smo u prethodnom odjeljku odredili prve liftove za generičke reprezentacije simplektičke grupe, sada određujemo izgled prvog lifta generičke ireducibilne reprezentacije $\pi \in \mathrm{Irr}(Mp(W_n))$. Sjetimo se, radimo samo s onim reprezentacijama π koje su izomorfne vlastitom standardnom modulu:

$$\pi \cong \chi_V \delta_r \nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_V \delta_1 \nu^{s_1} \rtimes \pi_0.$$

Znamo da za takve reprezentacije vrijedi $l(\pi) = 0$ ili $l(\pi) = 2$. Dokaz i rezultati po svemu nalikuju na one iz prethodnog odjeljka, uz jednu iznimku koju objašnjavamo u prvom slučaju.

Slučaj 1: $l(\pi) = l(\pi_0) = 2$, donji toranj
Računamo $\Theta_2(\pi)$. Uzastopnom primjenom korolara 2.8 na epimorfizam

$$\chi_V \delta_r \nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_V \delta_1 \nu^{s_1} \rtimes \pi_0 \twoheadrightarrow \pi$$

dobivamo

$$\chi_W \delta_r \nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_W \delta_1 \nu^{s_1} \rtimes \Theta_2(\pi_0) \twoheadrightarrow \Theta_2(\pi).$$

Ovdje smo pretpostavili da niti jedna od reprezentacija $\delta_i \nu^{s_i}$ nije jednaka $|\cdot|^{\frac{1}{2}}$, to jest da se ne pojavljuje iznimka iz korolara 2.8 (kasnije ćemo vidjeti što se događa u tom slučaju). Prema tome, zaključujemo da postoji subkvocijent σ_0 reprezentacije $\Theta_2(\pi_0)$ takav da vrijedi

$$\chi_W \Pi \rtimes \sigma_0 \twoheadrightarrow \theta_2(\pi) \tag{$*$}$$

pri čemu koristimo oznaku $\Pi = \delta_r \nu^{s_r} \times \cdots \times \delta_1 \nu^{s_1}$. Budući da ne znamo je li $\Theta_2(\pi_0)$ ireducibilna, trebamo odrediti koji ireducibilni subkvocijent σ_0 reprezentacije $\Theta_2(\pi_0)$ sudjeluje u ovom epimorfizmu. Pokazat ćemo da je riječ upravo o $\theta_2(\pi_0)$.

Znamo da je $\theta_{-2}(\theta_2(\pi)) = \pi$. Ako je $\theta_0(\theta_2(\pi)) = 0$, onda je $\theta_{-2}(\theta_2(\pi))$ prvi lift reprezentacije $\theta_2(\pi)$ na promatrani toranj. Nije teško vidjeti da se tada i reprezentacija σ_0 prvi put pojavljuje na nivou $l = -2$. Pomoću korolara 2.8 dobivamo

$$\chi_V \Pi \rtimes \Theta_{-2}(\sigma_0) \twoheadrightarrow \pi.$$

Pokazuje se (napomena 3.14) da je, budući da se radi o prvom liftu, reprezentacija $\Theta_{-2}(\sigma_0)$ temperirana i ireducibilna. Zbog jedinstvenosti standardnog modula, iz gornjeg epimorfizma sada zaključujemo da vrijedi $\Theta_{-2}(\sigma_0) = \pi_0$, stoga mora biti i $\sigma_0 = \theta_2(\pi)$.

Ako je $\theta_0(\theta_2(\pi)) \neq 0$, potreban je nešto drugačiji argument. Iz [18, prop. 4.1] (koristimo $\theta_{-2}(\theta_2(\pi)) = \pi$) slijedi da je π subkvocijent reprezentacije $\chi_V |\cdot|^{\frac{1}{2}} \rtimes \theta_0(\theta_2(\pi))$. Kako je π generička reprezentacija metaplektičke grupe, teorem 1.6 povlači da je reprezentacija $\theta_0(\theta_2(\pi))$ generička.

S druge strane, korolar 2.8 za $l = 0$ daje

$$\chi_V \Pi \rtimes \Theta_0(\sigma_0) \twoheadrightarrow \Theta_0(\theta_2(\pi)) \twoheadrightarrow \theta_0(\theta_2(\pi)).$$

Iz [9, str. 1678] čitamo da je $\Theta_0(\sigma_0)$ ireducibilna i temperirana, a budući da je reprezentacija na desnoj strani epimorfizma generička, zaključujemo da je i $\Theta_0(\sigma_0)$ generička. Odavde slijedi (pomoću istog rezultata iz [9]) da je i reprezentacija $\sigma_0 = \Theta_0(\Theta_0(\sigma_0))$ generička.

Konačno, budući da $\Theta_2(\pi_0)$ ima najviše jedan generički subkvocijent (ovo znamo jer su prema prop. 2.18 svi njezini subkvocijenti temperirani i pripadaju istom L-paketu), dovoljno je pokazati da je $\theta_2(\pi_0)$ generička kako bismo zaključili $\sigma_0 \cong \theta_2(\pi_0)$. Kao i maloprije, to slijedi iz činjenice da je $\theta_0(\pi_0)$ subkvocijent reprezentacije $\chi_W|\cdot|^{\frac{1}{2}} \rtimes \theta_2(\pi_0)$ i generičnosti reprezentacije $\theta_0(\pi_0)$ ([9, Teorem 1.3 (v)]).

Time smo u potpunosti odredili standardni modul za $\theta_2(\pi)$; vrijedi

$$\chi_W\delta_r\nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_W\delta_1\nu^{s_1} \rtimes \theta_2(\pi_0) \twoheadrightarrow \theta_2(\pi).$$

Preostaje odrediti što se događa u iznimnom slučaju kada se u standardnom modulu pojavljuje $|\cdot|^{\frac{1}{2}}$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da vrijedi $\delta_1\nu^{s_1} = |\cdot|^{\frac{1}{2}}$. Zbog ireducibilnosti standardnog modula reprezentacije $\chi_V\delta_i\nu^{s_i}$ mogu mijenjati mjesta, pa imamo

$$\pi \cong \chi_V|\cdot|^{\frac{1}{2}} \times \chi_V\delta_r\nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_V\delta_2\nu^{s_2} \rtimes \pi_0.$$

Označimo li s $\pi' = \delta_r\nu^{s_r} \times \cdots \times \delta_2\nu^{s_2} \rtimes \pi_0$, možemo pisati i $\pi \cong \chi_V|\cdot|^{\frac{1}{2}} \rtimes \chi_V\pi' \cong \chi_V|\cdot|^{-\frac{1}{2}} \rtimes \chi_V\pi'$ (druga jednakost ovdje slijedi iz ireducibilnosti i MVW involucije, to jest leme 1.5). Sada koristimo račun kao u korolarima 2.8 i 2.10: imamo

$$\Theta_{l=2}^{\vee}(\pi) = \mathrm{Hom}(\omega, \chi_V|\cdot|^{-\frac{1}{2}} \rtimes \pi') = \mathrm{Hom}(R_{P_1}(\omega), \chi_V|\cdot|^{-\frac{1}{2}} \otimes \pi')$$

pa Kudlina filtracija daje egzaktni niz

$$\chi_W|\cdot|^{\frac{1}{2}} \rtimes \Theta_2(\pi') \to \Theta_2(\pi) \to \Theta_0(\pi') \to 0.$$

Odavde čitamo da je $\theta_2(\pi) = \theta_0(\pi')$. Konačno, uočimo da smo maloprije već pokazali da je standardni modul reprezentacije $\theta_0(\pi')$ jednak

$$\delta_r\nu^{s_r} \times \cdots \times \delta_2\nu^{s_2} \rtimes \theta_0(\pi_0),$$

stoga smo ovime odredili i standardni modul reprezentacije $\theta_2(\pi)$.

Slučaj 2: $l(\pi) = l(\pi_0) = 2$, gornji toranj

Ovaj slučaj tretiramo na isti način kao slučaj 3 za $\pi \in \mathrm{Irr}(\mathrm{Sp}(W_n))$. Konkretno, prvi lift u gornjem tornju dobivamo na nivou $l = -4$ (to jest $m = n + 5$); pomoću korolara 2.8 dobivamo

$$\chi_W\delta_r\nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_W\delta_1\nu^{s_1} \rtimes \Theta_{-4}(\pi_0) \twoheadrightarrow \Theta_{-4}(\pi).$$

I ovdje imamo dva slučaja, u ovisnosti o izgledu parametra ϕ reprezentacije π_0.

2.1: kratnost $m_\phi(\chi_V S_2)$ je neparna

Ovdje postupamo na isti način kao u slučaju 3.1 iz prethodnog odjeljka: π_0 možemo pisati kao direktni sumand reprezentacije oblika

$$\chi_V\delta_1' \times \cdots \times \chi_V\delta_k' \rtimes \pi_{00},$$

pri čemu su δ_i' i π_{00} reprezentacije diskretne serije. Odavde slijedi

$$\chi_W\delta_1' \times \cdots \times \chi_W\delta_k' \rtimes \Theta_{-4}(\pi_{00}) \twoheadrightarrow \Theta_{-4}(\pi_0).$$

Budući da je kratnost $m_\phi(\chi_V S_2)$ neparna, zaključujemo da π_{00} ima $\chi_V S_2$ u parametru. Nadalje, iz $l(\pi_0) = 2$ slijedi da je $\chi_V = \mathbb{1}$. Prema napomeni 3.2 sada vidimo da je $l(\pi_{00}) = 2$; drugim riječima, $\Theta_{-4}(\pi_{00})$ je prvi lift reprezentacije π_{00} na gornji toranj.

Pokazat ćemo kasnije da i za reprezentacije metaplektičke grupe vrijede rezultati koji su za simplektičku grupu dobiveni u [26]: prvi lift diskretne serije na gornji toranj uvijek je ireducibilan i temperiran. Prema tome, reprezentacija $\chi_W\delta_1' \times \cdots \times \chi_W\delta_k' \rtimes \Theta_{-4}(\pi_{00})$ koja se pojavljuje u gornjem epimorfizmu je potpuno reducibilna (napomena 1.4), stoga je i njezin kvocijent $\Theta_{-4}(\pi_0)$ potpuno reducibilan. To je moguće samo ako se zapravo radi o ireducibilnoj reprezentaciji.

Prema tome, zaključujemo da je $\Theta_{-4}(\pi_0)$ ireducibilna, a znamo da mora biti i temperirana. Iz gornjeg epimorfizma sada čitamo da je standardni modul za $\theta_{-4}(\pi)$ jednak

$$\chi_W\delta_r\nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_W\delta_1\nu^{s_1} \rtimes \Theta_{-4}(\pi_0).$$

2.2: kratnost $m_\phi(\chi_V S_2)$ je parna

Ovaj podslučaj odgovara slučaju 3.2 iz prethodnog odjeljka. Dokaz provodimo na isti način, uz potrebne promjene na odgovarajućim mjestima. Reprezentaciju π_0 prikazujemo kao direktni sumand reprezentacije $(\chi_V\mathrm{St}_2, h) \rtimes \pi_0'$, pri čemu je π_0' odgovarajuća ireducibilna temperirana reprezentacija čiji parametar ne sadrži $\chi_V S_2$, a $(\chi_V\mathrm{St}_2, h)$ oznaka za $\chi_V\mathrm{St}_2 \times \cdots \times \chi_V\mathrm{St}_2$ (h puta). Bitno je napomenuti da Lemu 5.1 iz [25] koju koristimo na kraju dokaza za $\pi \in \mathrm{Irr}(\mathrm{Sp}(W_n))$ možemo prenijeti i u metaplektički slučaj: [22, prop. 5.1].

Dobivamo sljedeći rezultat: subkvocijent reprezentacije $\Theta_{-4}(\pi_0)$ koji sudjeluje u epimorfizmu

$$\chi_W\delta_r\nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_W\delta_1\nu^{s_1} \rtimes \Theta_{-4}(\pi_0) \twoheadrightarrow \theta_{-4}(\pi)$$

je upravo $\theta_{-4}(\pi_0)$. Nadalje, reprezentacija $\theta_{-4}(\pi_0)$ izomorfna je Langlandsovom kvocijentu reprezentacije $\chi_W\mathrm{St}_3\nu^{\frac{1}{2}} \times (\chi_W\mathrm{St}_2, h-1) \rtimes \Theta_{-2}(\pi_0')$. Ovdje koristimo analogone napomena 3.3 i 3.5: $\Theta_{-2}(\pi_0')$ je ireducibilna i temperirana; a budući da sadrži $\chi_W S_2$ u parametru, ne reducira se pri indukciji s $(\chi_W\mathrm{St}_2, h-1)$.

Prema tome (i uz napomenu 3.6, ako je potrebno), zaključujemo da je standardni modul reprezentacije $\theta_{-4}(\pi)$ jednak

$$\chi_W\delta_r\nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_W\delta_1\nu^{s_1} \times \chi_W\mathrm{St}_3\nu^{\frac{1}{2}} \times (\chi_W\mathrm{St}_2, h-1) \rtimes \Theta_{-2}(\pi_0').$$

Napomena 3.9 Da bismo doista proveli dokaz u slučaju 2 na isti način kao u odjeljku 3.2 trebaju nam dvije činjenice o liftovima diskretnih serija čiji su analogoni za reprezentacije simplektičke grupe posljedice rezultata iz [26]:

- Prvi (veliki) lift diskretne serije π_{00} na gornji toranj je ireducibilna i temperirana reprezentacija.

- Neka π_0' temperirana reprezentacija za koju vrijedi $l(\pi_0') = 0$. Za liftove na gornji toranj tada vrijedi sljedeće: reprezentacija $\Theta_{-2}(\pi_0')$ (prvi lift) je ireducibilna i temperirana, a jedini netemperirani subkvocijent drugog lifta (to jest, reprezentacije $\Theta_{-4}(\pi_0')$) izomorfan je Langlandsovom kvocijentu reprezentacije $\chi_W|\cdot|^{\frac{3}{2}} \rtimes \Theta_{-2}(\pi_0')$.

Ove tvrdnje dokazat ćemo nešto kasnije, na kraju ovog odjeljka.

Slučaj 3: $l(\pi) = l(\pi_0) = 0$, donji toranj

Ovaj je slučaj jednostavniji od prethodna dva. Korolar 2.8 daje

$$\chi_W\delta_r\nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_W\delta_1\nu^{s_1} \rtimes \Theta_0(\pi_0) \twoheadrightarrow \Theta_0(\pi) \twoheadrightarrow \theta_0(\pi).$$

Na sličan način kao i do sada (rastavom na produkt diskretnih serija), ili direktno iz [9, str. 1678], dobivamo da je $\Theta_{l=0}(\pi_0)$ ireducibilna i temperirana. Prema tome, reprezentacija na lijevoj strani gornjeg epimorfizma je standardna te je $\theta_{l=0}(\pi)$ njezin Langlandsov kvocijent.

Slučaj 4: $l(\pi) = l(\pi_0) = 0$, gornji toranj

Kao i do sada, za prvi lift na gornjem tornju (nivo $l = -2$) dobivamo

$$\chi_W\delta_r\nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_W\delta_1\nu^{s_1} \rtimes \Theta_{-2}(\pi_0) \twoheadrightarrow \Theta_{-2}(\pi) \twoheadrightarrow \theta_{-2}(\pi).$$

Pokažemo li da je $\Theta_{-2}(\pi_0)$ ireducibilna i temperirana, moći ćemo iz gornjeg epimorfizma zaključiti kako izgleda standardni modul reprezentacije $\theta_{-2}(\pi)$. Ova tvrdnja se svodi, kao i u nekoliko slučajeva do sada, na odgovarajuću tvrdnju za reprezentacije diskretne serije. Naime, opet možemo prikazati π_0 kao kvocijent

$$\chi_V\delta_1' \times \cdots \times \chi_V\delta_k' \rtimes \pi_{00} \twoheadrightarrow \pi_0,$$

gdje su sve reprezentacije na lijevoj strani reprezentacije diskretne serije. Odavde pomoću korolara 2.8 slijedi

$$\chi_W\delta_1' \times \cdots \times \chi_W\delta_k' \rtimes \Theta_{-2}(\pi_{00}) \twoheadrightarrow \Theta_{-2}(\pi_0),$$

pa na standardni način iz činjenice da je $\Theta_{-2}(\pi_{00})$ ireducibilna i temperirana dobivamo potpunu reducibilnost (a time i ireducibilnost) reprezentacije $\Theta_{-2}(\pi_0)$.

Time smo završili posljednji slučaj i dokazali

Teorem 3.10 Neka je π generička reprezentacija metaplektičke grupe koja je izomorfna vlastitom standardnom modulu,

$$\pi \cong \chi_V\delta_r\nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_V\delta_1\nu^{s_1} \rtimes \pi_0.$$

Neka je $\theta(\pi)$, odnosno $\theta(\pi_0)$ prvi lift reprezentacije π, odnosno π_0 na toranj $\mathcal{V}$.

(i) Neka standardni modul reprezentacije π sadrži $\chi_V|\cdot|^{\frac{1}{2}}$, tako da bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da vrijedi $\delta_1\nu^{s_1} = |\cdot|^{\frac{1}{2}}$, i neka se prvi ne-nul lift reprezentacije π pojavljuje u tornju $\mathcal{V}$ na nivou $l = 2$. Tada je reprezentacija $\Theta_0(\pi_0)$ ireducibilna i temperirana, a $\theta(\pi)$ je Langlandsov kvocijent reprezentacije

$$\chi_W\delta_r\nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_W\delta_2\nu^{s_2} \rtimes \Theta_0(\pi_0).$$

(ii) U svim ostalim slučajevima vrijedi

$$\chi_W\delta_r\nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_W\delta_1\nu^{s_1} \rtimes \theta(\pi_0) \twoheadrightarrow \theta(\pi).$$

Osim u slučaju 2.2 (kada je $l(\pi_0) = 2$, kratnost $m_\phi(\chi_V S_2)$ parna, a $\mathcal{V}$ gornji toranj), reprezentacija $\theta(\pi_0)$ je temperirana pa je ovime dan i standardni modul reprezentacije $\theta(\pi)$.

U slučaju 2.2 je $\theta(\pi_0)$ je Langlandsov kvocijent reprezentacije $\chi_W\mathrm{St}_3\nu^{\frac{1}{2}} \times (\chi_W S_2, h-1) \rtimes \theta_{-2}(\pi_0')$, pri čemu je π_0' ireducibilna temperirana reprezentacija za koju vrijedi $(\chi_V S_2, h) \rtimes \pi_0' \twoheadrightarrow \pi_0$. Standardni modul reprezentacije $\theta(\pi)$ možemo iščitati iz gornjeg epimorfizma koristeći napomenu 3.6.

Kao što smo najavili u napomeni 3.9, da bi dokaz ovog teorema bio potpun, trebamo provjeriti još dvije činjenice. Prva je analogon leme 3.8 za metaplektički slučaj:

Lema 3.11 Neka je $\pi_0' \in \mathrm{Irr}(\mathrm{Mp}(W_n))$ temperirana reprezentacija čiji parametar ne sadrži $\chi_V S_2$, tako da se prvi lift ove reprezentacije na gornjem tornju pojavljuje na nivou $l = -2$

(kasnije ćemo pokazati da je $\Theta_{-2}(\pi_0')$ ireducibilna i temperirana). Tada je jedini netemperirani ireducibilni subkvocijent lifta $\Theta_{-4}(\pi_0')$ na gornji toranj izomorfan Langlandsovom kvocijentu reprezentacije $\chi_W|\cdot|^{\frac{3}{2}} \rtimes \Theta_{-2}(\pi_0')$.

Dokaz. I ovdje pratimo dokaz teorema 4.1 iz [26] te preuzimamo odgovarajuće oznake (posebno, umjesto π_0' pišemo σ).

Računamo s $j = k-1$ pa vidimo (kao u [26]) da ne može vrijediti (4.4). To znači da vrijedi (4.5) i (4.6).

Relacija (4.6) daje $\gamma_k + 1 = \alpha = -3/2$. Zbog $\alpha + \beta < 0$ odmah zaključujemo da mora biti $\beta \in \{-3/2, -1/2, 1/2\}$; želimo pokazati da vrijedi $\beta = -3/2$.

Pokažimo najprije da vrijedi $\gamma_{k-1} = \gamma_k + 1$. U suprotnom, imamo netrivijalni segment u (4.5) za $j = k-1$; vrijedi

$$\gamma_{k-1} + \gamma_k + 2 \leqslant \beta + \alpha + 1.$$

Prema tome, ako ne želimo kontradikciju s kriterijem kvadratne integrabilnosti, mora vrijediti $\beta + \alpha + 1 \geqslant 0$. Odavde slijedi da mora biti $\gamma_{k-1} = \beta$ (posebno, $k = 1$) i $\beta = 1/2$. Sada iz (4.5) čitamo da se $\chi_V S_2$ pojavljuje u parametru od σ, kontradikcija.

Prema tome, preostaje vidjeti što se događa kada je $\gamma_{k-1} = \gamma_k + 1$.

Kada bi bilo $k > 1$, imali bismo sljedeće: iz računa na početku (4.10) vidimo da mora biti $\beta = 1/2$ i $k = 2$. Ako to iskoristimo u (4.4) uz $j = 0$, opet dobivamo da parametar reprezentacije σ sadrži $\chi_V S_2$, što nije istina.

Prema tome, trebalo bi vrijediti (4.5) i (4.6) sa $j = k-2$, no (4.6) već vrijedi s $j = k-1$. Zbog toga mora biti $k = 1$. Budući da imamo i $\gamma_{k-1} = \gamma_k + 1$, to znači da vrijedi $\beta = \alpha = -3/2$.

Sada dovršavamo dokaz na isti način kao u simplektičkom slučaju (lema 3.8).

□

Druga tvrdnja koju trebamo dokazati je ireducibilnost i temperiranost velikog theta lifta za diskretne serije. Za reprezentacije simplektičke grupe, takve rezultate daju teoremi 6.1 i 6.2 iz [26]. Budući da za reprezentacije metaplektičke grupe nemamo odgovarajuću referencu, dokazujemo sljedeću lemu.

Lema 3.12 Neka je $\pi_{00} \in \mathrm{Irr}(\mathrm{Mp}(W_n))$ *generička* reprezentacija diskretne serije. Tada je njezin prvi (veliki) lift na gornji toranj ireducibilna i temperirana reprezentacija.

Napomena 3.13 U lemi se ograničavamo na proučavanje generičkih reprezentacija jer je to dovoljno za potrebe naših razmatranja, a u mnogim situacijama znatno smanjuje broj slučajeva koje je potrebno promatrati. Primjerice, znamo da se prvi lift generičke reprezentacije diskretne serije može pojaviti samo na dva nivoa: $l = -2$ i $l = -4$.

Dokaz leme provodimo u sljedećem odjeljku.

3.3.1 Dokaz leme 3.12

Dokaz se sastoji od više tvrdnji; budući da se radi o istoj tvrdnji koja je u [26] dokazana za reprezentacije simplektičke grupe, te da provodimo u suštini isti dokaz, ponovno prilagođavamo notaciju; posebno, umjesto π_{00} pišemo σ. Neka je, dakle, σ ireducibilna generička reprezentacija diskretne serije. Uvodimo i oznaku $l = l(\sigma) + 2$, tako da je $\Theta_{-l}(\sigma)$ prvi lift reprezentacije σ na gornji toranj.

Tvrdnja 1: Svi ireducibilni subkvocijenti reprezentacije $\Theta_{-l}(\sigma)$ su temperirani.

Dokaz. Ovo je propozicija 2.18. □

Tvrdnja 2: Svaki ireducibilni temperirani subkvocijent τ reprezentacije $\Theta_{-l}(\sigma)$ koji nije reprezentacija diskretne serije[2] je oblika

$$\tau \hookrightarrow \chi_W \mathrm{St}_l \rtimes \tau_1,$$

pri čemu je τ_1 neka reprezentacija diskretne serije.

Ovo je moguće samo ako imamo $\sigma \hookrightarrow \chi_V \delta([|\cdot|^{\frac{3-l}{2}}, |\cdot|^{\frac{l-1}{2}}]) \rtimes \sigma''$ za neku reprezentaciju diskretne serije σ''.

Dokaz. Prvi dio tvrdnje (o izgledu subkvocijenta τ) slijedi iz [2]: iz propozicije 5.5 i leme 6.4 zaključujemo da τ pripada istom L-paketu kao i $\theta_{-l}(\sigma)$. Odavde pomoću teorema 4.5 zaključujemo da se jedino $\chi_W S_l$ pojavljuje u parametru reprezentacije τ s kratnošću 2, pa lako slijedi $\tau \hookrightarrow \chi_W \mathrm{St}_l \rtimes \tau_1$.

Istu tvrdnju sada možemo primijeniti i na $\theta_{-l}(\sigma)$ pa dobivamo $\theta_{-l}(\sigma) \hookrightarrow \chi_W \mathrm{St}_l \rtimes \tau_1'$ za neku reprezentaciju diskretne serije τ_1'. Umjesto ulaganja možemo pisati kvocijent, prema lemi 1.5:

$$\chi_W \mathrm{St}_l \rtimes \tau_1' \twoheadrightarrow \theta_{-l}(\sigma).$$

Sada koristimo korolar 2.9 jer znamo da je σ kvocijent reprezentacije $\Theta_l(\theta_{-l}(\sigma))$. Budući da τ_1' ne sadrži $\chi_W S_l$ u parametru, vrijedi $\Theta_l(\tau_1') = 0$. Prema tome, mora vrijediti opcija (ii):

$$\chi_W \delta([|\cdot|^{\frac{1-l}{2}}, |\cdot|^{\frac{l-3}{2}}]) \rtimes \Theta_{l-2}(\tau_1') \twoheadrightarrow \sigma.$$

Budući da je τ_1' reprezentacija diskretne serije, a $l - 2 \geqslant 0$, znamo (iz [2]) da su svi ireducibilni subkvocijenti od $\Theta_{l-2}(\tau_1')$ reprezentacije diskretne serije. Odavde (opet pomoću leme 1.5) slijedi tvrdnja. □

Tvrdnja 3: Neka su τ, τ_1 i σ'' kao u prethodnoj tvrdnji. Tada je τ_1 ireducibilni subkvocijent reprezentacije $\Theta_{2-l}(\sigma'')$.

[2]Nije moguće da istovremeno postoje temperirani subkvocijenti reprezentacije $\Theta_{-l}(\sigma)$ od kojih su neki reprezentacije diskretne serije, a neki nisu. Ovo slijedi iz činjenice da svi subkvocijenti reprezentacije $\Theta_{-l}(\sigma)$ imaju isti kuspidalni nosač.

Napomena. Ovo je lema 4.4 u [26].

Dokaz. Po pretpostavci vrijedi $\sigma \hookrightarrow \chi_V \delta([|\cdot|^{\frac{3-l}{2}}, |\cdot|^{\frac{l-1}{2}}]) \rtimes \sigma''$, odnosno $\chi_V \delta([|\cdot|^{\frac{1-l}{2}}, |\cdot|^{\frac{l-3}{2}}]) \rtimes \sigma'' \twoheadrightarrow \sigma$. Sada korolar 2.8 daje

$$\chi_W \delta([|\cdot|^{\frac{1-l}{2}}, |\cdot|^{\frac{l-3}{2}}]) \rtimes \Theta_{-l}(\sigma'') \twoheadrightarrow \Theta_{-l}(\sigma).$$

Nadalje, imamo i $\tau \hookrightarrow \chi_W \delta([|\cdot|^{\frac{1-l}{2}}, |\cdot|^{\frac{l-1}{2}}]) \rtimes \tau_1$, odnosno, koristeći Frobeniusov reciprocitet, $R_P(\tau) \twoheadrightarrow \chi_W \delta([|\cdot|^{\frac{1-l}{2}}, |\cdot|^{\frac{l-1}{2}}]) \otimes \tau_1$. Kombinirajući ove dvije tvrdnje, dobivamo

$$\mu^* \left(\chi_W \delta([|\cdot|^{\frac{1-l}{2}}, |\cdot|^{\frac{l-3}{2}}]) \rtimes \Theta_{-l}(\sigma'') \right) \geqslant \mu^*(\tau) \geqslant \chi_W \delta([|\cdot|^{\frac{1-l}{2}}, |\cdot|^{\frac{l-1}{2}}]) \otimes \tau_1.$$

Ovdje koristimo standardnu oznaku μ^* za semisimplifikaciju Jacquetovog modula, kao u 1.4.2. Sada detaljnije analiziramo relaciju

$$\mu^* \left(\chi_W \delta([|\cdot|^{\frac{1-l}{2}}, |\cdot|^{\frac{l-3}{2}}]) \rtimes \Theta_{-l}(\sigma'') \right) \geqslant \chi_W \delta([|\cdot|^{\frac{1-l}{2}}, |\cdot|^{\frac{l-1}{2}}]) \otimes \tau_1 \tag{$*$}$$

kako bismo pokazali da je τ_1 ireducibilni subkvocijent reprezentacije $\Theta_{2-l}(\sigma'')$. U računu koji slijedi koristit ćemo formulu $\mu^*(\pi \rtimes \sigma) = M^*(\pi) \rtimes \mu^*(\sigma)$ (također iz 1.4.2) te formulu

$$M^*([\rho, \nu^k \rho]) = \sum_{i=-1}^{k} \sum_{j=i}^{k} \delta([\nu^{-i}\tilde{\rho}, \tilde{\rho}]) \times \delta([\nu^{j+1}\rho, \nu^k \rho]) \otimes \delta([\nu^{1+i}\rho, \nu^j \rho])$$

(sekcija 1.5.3). Konkretnosti radi, neka je sada $l(\sigma) = 0$, tako da imamo $l = 2$. Koristeći gornje formule za računanje μ^* i imajući u vidu relaciju ($*$), dobivamo da postoje ireducibilni sumand $\delta' \otimes \tau'$ u $\mu^*(\Theta_{-l}(\sigma''))$ i indeksi $-1 \leqslant i \leqslant j \leqslant 0$ takvi da vrijedi

$$\chi_W \delta([|\cdot|^{-\frac{1}{2}}, |\cdot|^{\frac{1}{2}}]) \leqslant \chi_W \delta([|\cdot|^{\frac{1}{2}-i}, |\cdot|^{\frac{1}{2}}]) \times \chi_W \delta([|\cdot|^{j+\frac{1}{2}}, |\cdot|^{-\frac{1}{2}}]) \times \delta' \tag{1}$$

i $\tau_1 \leqslant \chi_W \delta([|\cdot|^{i+\frac{1}{2}}, |\cdot|^{j-\frac{1}{2}}]) \rtimes \tau'$. Imamo samo tri slučaja u ovisnosti o indeksima i i j; najprije pretpostavimo da vrijedi $i = 0, j = 0$. Sada iz (1) slijedi $\delta' = \chi_W |\cdot|^{\frac{-1}{2}}$. Posebno, vrijedi $R_{P_1'}(\Theta_{-l}(\sigma''))_{\frac{-1}{2}} \neq 0$.

Iz epimorfizma $\omega \twoheadrightarrow \sigma'' \otimes \Theta_{-l}(\sigma'')$ slijedi $R_{P_1'}(\omega) \twoheadrightarrow \sigma'' \otimes R_{P_1'}(\Theta_{-l}(\sigma''))$. Posebno, zaključujemo

$$\mathrm{Hom}\left(R_{P_1'}(\omega), \sigma'' \otimes R_{P_1'}(\Theta_{-l}(\sigma''))_{\frac{-1}{2}} \right) \neq 0.$$

Sada koristimo Kudlinu filtraciju za $R_{P_1'}(\omega)$; uočimo da je ona u ovom slučaju posebno jednostavna, duljine 2. Imamo

$$0 \to J^1 \to R_{P_1'}(\omega) \to J^0 \to 0,$$

gdje su J_0 i J_1 subkvocijenti opisani u teoremu 2.6.

Ako vrijedi $0 \neq \mathrm{Hom}\left(J^1, \sigma'' \otimes R_{P_1'}(\Theta_{-l}(\sigma''))_{\frac{-1}{2}}\right)$, onda koristeći drugi Frobeniusov reciprocitet lako zaključujemo da vrijedi $R_{\overline{P_1}}(\sigma'')_{\frac{1}{2}} \neq 0$. Sada Casselmanov kriterij kvadratne integrabilnosti pokazuje da je ovo kontradikcija s činjenicom da je σ'' reprezentacija diskretne serije.

Odavde slijedi da je $R_{P_1'}(\Theta_{-l}(\sigma''))_{\frac{-1}{2}}$ kvocijent reprezentacije J^0. Iz strukture subkvocijenta J^0 sada lako dobivamo da τ_1 mora biti ireducibilni subkvocijent reprezentacije $\Theta_0(\sigma'') = \Theta_{l-2}(\sigma'')$, što smo htjeli pokazati.

U preostalim slučajevima ($i = -1, j = -1$, odnosno $i = -1, j = 0$) lako dolazimo do $R_{P_1'}(\Theta_{-l}(\sigma''))_{\frac{1}{2}} \neq 0$. Sada koristimo Kudlinu filtraciju kao maloprije, pa zaključujemo da postoji ireducibilna reprezentacija σ_1 takva da vrijedi $\sigma'' \hookrightarrow \chi_V|\cdot|^{\frac{1}{2}} \rtimes \sigma_1 = \chi_V|\cdot|^{\frac{l-1}{2}} \rtimes \sigma_1$. Nešto kasnije[3] pokazat ćemo da ovo nije moguće, to jest da smo ovime došli do kontradikcije. Prema tome, jedini slučaj koji ne dovodi do kontradikcije implicira da je τ_1 ireducibilni subkvocijent reprezentacije $\Theta_{l-2}(\sigma'')$, pa je dokaz u slučaju $l(\pi) = 2$ završen.

Sasvim analogno postupamo kada je $l(\sigma) = 2$, odnosno $l = 4$. U ovom slučaju zaključujemo da postoji ireducibilni sumand $\delta' \otimes \tau'$ reprezentacije $\mu^*(\Theta_{-l}(\sigma''))$ takav da vrijedi

$$\chi_W\delta([|\cdot|^{\frac{-3}{2}}, |\cdot|^{\frac{3}{2}}]) \leqslant \chi_W\delta([|\cdot|^{\frac{3}{2}-i}, |\cdot|^{\frac{3}{2}}]) \times \chi_W\delta([|\cdot|^{j-\frac{1}{2}}, |\cdot|^{\frac{1}{2}}]) \times \delta'$$

za neke indekse $-1 \leqslant i \leqslant j \leqslant 2$. Na isti način kao u prošlom slučaju pokazujemo da kombinacije indeksa i, j koje ne vode do zaključka da je τ_1 subkvocijent reprezentacije $\Theta_{l-2}(\sigma'')$ nužno vode do kontradikcije. Do kontradikcije opet dolazimo ili Casselmanovim kriterijem, ili činjenicom da ne postoji ulaganje $\sigma'' \hookrightarrow \chi_V|\cdot|^{\frac{3}{2}} \rtimes \sigma_1 = \chi_V|\cdot|^{\frac{l-1}{2}} \rtimes \sigma_1$. Jedini kompliciraniji slučajevi su $(i,j) = (1,2)$, $(i,j) = (0,1)$ i $(i,j) = (0,2)$. Tada dobivamo $\delta' = \chi_W\delta([|\cdot|^{\frac{-3}{2}}, |\cdot|^{-\frac{1}{2}}])$, odnosno $\delta' = \chi_W\delta([|\cdot|^{\frac{-3}{2}}, |\cdot|^{\frac{1}{2}}])$, pa trebamo pokazati da ovo nije moguće.

Postupamo kao u dokazu leme 3.11, odnosno teorema 4.1 u [26] (pa koristimo i iste oznake za ključne relacije). Koristeći Casselmanov kriterij vidimo da relacije (4.4) i (4.5) ne mogu vrijediti za $j = k-1$. Prema tome, vrijedi (4.6), a segment u (4.5) je prazan. Ovo implicira $k > 1$. Sada vidimo (opet koristeći Casselmanov kriterij) da (4.4) ne može vrijediti ni uz $j = k-2$, stoga bi relacija (4.6) trebala istovremeno vrijediti i za $j = k-1$, i za $j = k-2$. Ovo očito nije moguće, stoga smo došli do kontradikcije.

Time je završena skica dokaza u slučaju $l(\sigma) = 2$. $\square$

Tvrdnja 4: Ne postoji ireducibilna reprezentacija σ_1 takva da vrijedi $\sigma'' \hookrightarrow \chi_V|\cdot|^{\frac{l-1}{2}} \rtimes \sigma_1$.

Dokaz. Nije teško pokazati da, ako postoji, σ_1 mora biti temperirana: u suprotnom možemo pisati

$$\sigma_1 \hookrightarrow \chi_V\delta \rtimes \sigma_2,$$

[3] Tvrdnja 4.

pri čemu je σ_2 neka ireducibilna reprezentacija, a δ esencijalno kvadratno integrabilna reprezentacija zadana segmentom $\Delta = [\rho\nu^\alpha, \rho\nu^\beta]$ (ρ je unitarna kuspidalna) s $\alpha + \beta < 0$. Kombinirajući ovo sa $\sigma'' \hookrightarrow \chi_V |\cdot|^{\frac{l-1}{2}} \rtimes \sigma_1$, dobivamo

$$\sigma'' \hookrightarrow \chi_V |\cdot|^{\frac{l-1}{2}} \times \chi_V \delta \rtimes \sigma_2.$$

Ako je $\beta \neq \frac{l-3}{2}$ ili $\rho \neq \mathbb{1}$, onda segmenti Δ i $[|\cdot|^{\frac{l-1}{2}}, |\cdot|^{\frac{l-1}{2}}]$ nisu ulančani pa možemo pisati $\sigma'' \hookrightarrow \chi_V \delta \times \chi_V |\cdot|^{\frac{l-1}{2}} \rtimes \sigma_2$, no ovo nije moguće po Casselmanovom kriteriju (sjetimo se, σ'' je reprezentacija diskretne serije).

Ako je $\beta = \frac{l-3}{2}$ i $\rho = \mathbb{1}$, onda je nužno $\alpha \leqslant \frac{1-l}{2}$, stoga iz gornjeg ulaganja pomoću Casselmanovog kriterija opet lako dolazimo u kontradikciju s činjenicom da je σ'' reprezentacija diskretne serije.

Sada kada znamo da je σ_1 temperirana, možemo dovršiti dokaz na sljedeći način: σ'' je generička, stoga i σ_1 mora biti generička. Nadalje, sjetimo se da vrijedi $\sigma \hookrightarrow \chi_V \delta([|\cdot|^{\frac{3-l}{2}}, |\cdot|^{\frac{l-1}{2}}]) \rtimes \sigma''$, pa imamo i $\sigma \hookrightarrow \chi_V \delta([|\cdot|^{\frac{3-l}{2}}, |\cdot|^{\frac{l-1}{2}}]) \times \chi_V |\cdot|^{\frac{l-1}{2}} \rtimes \sigma_1$. Prema tome, generička reprezentacija σ dijeli kuspidalni nosač s jedinstvenim generičkim subkvocijentom reprezentacije

$$\chi_V \mathrm{St}_l \rtimes \sigma_1.$$

Budući da su generičke reprezentacije izomorfne čim dijele kuspidalni nosač (*multiplicity one*), odavde slijedi da $\chi_V \mathrm{St}_l \rtimes \sigma_1$ ima subkvocijent izomorfan sa σ. S druge strane, budući da je σ_1 temperirana, znamo da su svi ireducibilni subkvocijenti reprezentacije $\chi_V \mathrm{St}_l \rtimes \sigma_1$ temperirane reprezentacije, ali nisu diskretne serije. Kako je σ reprezentacija diskretne serije, ovime smo došli do kontradikcije. □

Sada dovršavamo dokaz na isti način kao na kraju teorema 6.2 u [26]. Naravno, račun je potrebno prilagoditi na odgovarajući način jer sada radimo s reprezentacijama metaplektičke grupe. U nastavku provjeravamo nekoliko ključnih tvrdnji čiji dokaz nije potpuno analogan dokazu u simplektičkom slučaju.

Tvrdnja 5: Prvi ne-nul lift reprezentacije σ'' na promatranom tornju je $\Theta_{2-l}(\sigma'')$.

Napomena. Sjetimo se, toranj na koji podižemo reprezentacije u ovom dokazu je gornji toranj za reprezentaciju σ.

Dokaz. Ako je $l(\sigma) = 2$, odnosno $l = 4$, onda je dokaz isti kao za (6.7) u [26, teorem 6.2]. Ako je $l(\sigma) = 0$, odnosno ako vrijedi $l = 2$, onda iz činjenice da parametar za σ'' ne sadrži $\chi_V S_2$ (što vidimo iz konstrukcije reprezentacije σ'' u dokazu tvrdnje 2) slijedi $\Theta_2(\sigma'') = 0$. Budući da smo već vidjeli (u dokazu tvrdnje 3) da vrijedi $\Theta_0(\sigma'') \neq 0$, ovo je dovoljno da zaključimo kako je $\Theta_0(\sigma'')$ doista prvi lift na ovaj toranj. □

Tvrdnja 6: Reprezentacija $\Theta_{2-l}(\sigma'')$ je ireducibilna.

Dokaz. Dovoljno je pokazati da su svi ireducibilni subkvocijenti $\Theta_{2-l}(\sigma'')$ reprezentacije diskretne serije, jer tada slijedi da je $\Theta_{2-l}(\sigma'')$ potpuno reducibilna, odakle zaključujemo ireducibilnost.

Ako je $l = 2$, onda je ireducibilnost reprezentacije $\Theta_0(\sigma'')$ poznata iz [9] (a radi se i o lakoj posljedici teorema iz [2]). Ako je $l = 4$, onda iz teorema 2.18 slijedi da se svi subkvocijenti reprezentacije $\Theta_{-2}(\sigma'')$ nalaze u istom L-paketu. Sada iz teorema 2.17 slijedi da za parametar ϕ koji parametrizira taj L-paket vrijedi

$$\phi = \chi_W \chi_V^{-1} \phi_{\sigma''},$$

pri čemu je $\phi_{\sigma''}$ parametar za σ''. Kako $\phi_{\sigma''}$ ne sadrži $\chi_V S_2$, zaključujemo da se svi ireducibilni sumandi u ϕ pojavljuju jednokratno, odakle slijedi da ϕ parametrizira reprezentaciju diskretne serije, što je i trebalo pokazati. $\square$

Na kraju dokaza dolazimo do dva epimorfizma, kao u [26]:

$$\begin{aligned}
f\colon \chi_W \delta([|\cdot|^{\frac{1-l}{2}}, |\cdot|^{\frac{l-3}{2}}]) \times \chi_W|\cdot|^{\frac{l-1}{2}} \rtimes \theta_{2-l}(\sigma'') &\twoheadrightarrow \Theta_{-l}(\sigma) \\
g\colon \chi_W \delta([|\cdot|^{\frac{1-l}{2}}, |\cdot|^{\frac{l-3}{2}}]) \times \chi_W|\cdot|^{\frac{l-1}{2}} \rtimes \theta_{2-l}(\sigma'') &\twoheadrightarrow \chi_W \mathrm{St}_l \rtimes \theta_{2-l}(\sigma'').
\end{aligned}$$

Uočimo da je $\ker(g) = L \rtimes \theta_{2-l}(\sigma'')$, pri čemu je L Langlandsov kvocijent reprezentacije $\chi_W|\cdot|^{\frac{l-1}{2}} \times \chi_W \delta([|\cdot|^{\frac{1-l}{2}}, |\cdot|^{\frac{l-3}{2}}])$ (ovo znamo iz [40]). Sada tvrdimo da je $\ker(g) \subseteq \ker(f)$. U suprotnom, (jedinstveni) kvocijent reprezentacije $L \rtimes \theta_{2-l}(\sigma'')$ sigurno nije sadržan u $\ker(f)$. Kako je f surjekcija, ovo znači da $\Theta_{-l}(\sigma)$ sadrži subkvocijent izomorfan kvocijentu reprezentacije $L \rtimes \theta_{2-l}(\sigma'')$, koji je očito netemperiran. To je kontradikcija s tvrdnjom 1.

Iz $\ker(g) \subseteq \ker(f)$ slijedi da se f faktorizira kroz g, to jest da postoji epimorfizam

$$\chi_W \mathrm{St}_l \rtimes \theta_{2-l}(\sigma'') \twoheadrightarrow \Theta_{-l}(\sigma).$$

Budući da je reprezentacija na lijevoj strani gornjeg epimorfizma potpuno reducibilna (sjetimo se da je $\theta_{2-l}(\sigma'')$ reprezentacija diskretne serije, prema tvrdnji 6), dobivamo da je i $\Theta_{-l}(\sigma)$ potpuno reducibilna, odakle zaključujemo ireducibilnost. Time je dokaz završen.

Napomena 3.14 Isti račun, uz zamijenjene uloge grupa $\mathrm{Mp}(W)$ i $O(V)$, dokazuje tvrdnju koju smo koristili u slučaju 1 na početku odjeljka 3.3: ako je $\sigma \in \mathrm{Irr}(\mathrm{O}(V))$ reprezentacija diskretne serije koja se prvi put pojavljuje na nivou $l = -2$, onda je $\Theta_{-2}(\sigma)$ ireducibilna reprezentacija.

Uočimo da ovdje nemamo pretpostavku o generičnosti reprezentacije σ, no ona i nije potrebna: generičnost u prethodnom dokazu koristimo samo u koraku 4. Nakon što dobijemo da je σ_1 temperirana, taj dio dokaza možemo dovršiti kao u [26, teorem 5.1], čime u potpunosti izbjegavamo korištenje generičnosti.

Konačno, trebamo pokazati da ista tvrdnja vrijedi i ako je σ temperirana reprezentacija koja se prvi put pojavljuje na nivou $l = -2$. U tom slučaju postoje reprezentacije diskretne serije $\delta_1, \dots, \delta_k$ i σ' takve da vrijedi

$$\delta_1 \times \cdots \times \delta_k \rtimes \sigma' \twoheadrightarrow \sigma.$$

Nije teško pokazati da se tada i σ' prvi put pojavljuje na nivou $l = -2$, stoga je reprezentacija $\Theta_{-2}(\sigma')$ (po prethodnom dijelu napomene) ireducibilna i temperirana. Jednostavnom primjenom korolara 2.8 i napomene 1.4 sada se pokazuje da je $\Theta_{-2}(\sigma)$ potpuno reducibilna, odakle zaključujemo ireducibilnost.

POGLAVLJE 4

Viši liftovi

U prethodnom smo poglavlju odredili kako izgledaju i gdje se pojavljuju prvi liftovi generičkih reprezentacija. U ovom poglavlju proučavamo izgled liftova na višim nivoima. I dalje se služimo sličnim metodama, no trebaju nam detaljnije informacije o mogućim subkvocijentima induciranih reprezentacija koje promatramo. Zbog toga najprije dokazujemo nekoliko pomoćnih rezultata o ireducibilnosti induciranih reprezentacija opće linearne grupe.

4.1 Nekoliko činjenica o ireducibilnosti

Prisjetimo se da svakom segmentu oblika $[\rho, \nu^k\rho]$ (sekcija 1.5.3) možemo pridružiti reprezentaciju

$$\nu^k\rho \times \nu^{k-1}\rho \times \cdots \times \nu\rho \times \rho.$$

Ovakve su reprezentacije detaljno analizirane u članku [40]. Pokazuje se da reprezentacija ovog oblika ima jedinstveni (Langlandsov) kvocijent, ali i jedinstvenu podreprezentaciju, koju označavamo s $\delta = \delta([\rho, \nu^k\rho])$. Tako dobivena reprezentacija δ je esencijalno kvadratno integrabilna, a vrijedi i obrat: svaka esencijalno kvadratno integrabilna reprezentacija opće linearne grupe može se dobiti na ovaj način iz nekog (jedinstveno određenog) segmenta.

U lemama koje slijede pretpostavljamo da je za sve segmente koje promatramo kuspidalna reprezentacija ρ jednaka trivijalnom karakteru[1] $\mathbb{1}$ grupe $\mathrm{GL}_1(\mathbb{F})$. Zbog toga privremeno ispuštamo ρ iz notacije: jedinstveni kvocijent reprezentacije $\nu^a\rho \times \cdots \times \nu^b\rho$ pridružene segmentu $[\nu^a\rho, \nu^b\rho]$ označavat ćemo jednostavno s (a, b), a odgovarajuća podreprezentacija bit će označena s $\delta([a, b])$ umjesto s $\delta([\nu^a\rho, \nu^b\rho])$.

Prvi rezultat ovog odjeljka je

Lema 4.1 Neka su $c \leqslant a \leqslant d < b \in \mathbb{R}$ kongruentni modulo $\mathbb{Z}$. Tada je reprezentacija

$$(a, b) \times \delta([c, d])$$

ireducibilna.

[1] Na isti način dokazuju se odgovarajući rezultati i za $\rho \neq \mathbb{1}$

Napomena. Kažemo da su brojevi kongruentni modulo $\mathbb{Z}$ ako je njihova razlika cijeli broj. Uočimo da uvjet $c \leqslant a \leqslant d < b$ znači da segment $[a, b]$ siječe segment $[c, d]$ s gornje strane.

Najprije ćemo dokazati tvrdnju u specijalnom slučaju kada je $a = d$ i $b = d + 1$.

Lema 4.2 Reprezentacija $(d, d+1) \times \delta([c, d])$ je ireducibilna.

Dokaz. Dokaz provodimo indukcijom po duljini $d - c$.

Označimo s $k = d - c + 3$, tako da je $(d, d+1) \times \delta([c, d])$ reprezentacija grupe $\mathrm{GL}_k(\mathbb{F})$. Baza indukcije, to jest činjenica da se $(d, d+1) \times |\cdot|^d$ ne reducira, poznata je iz [40]. I u ostatku dokaza koristimo činjenice o ulančanim segmentima iz tog članka.

Neka je sada $c < d$; pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve c', d' takve da je $d' - c' < d - c$.

Sada računamo Jacquetove module (točnije, njihove semisimplifikacije) reprezentacije $(d, d+1) \times \delta([c, d])$ u odnosu na paraboličke podgrupe $P_{k-1,1}, P_{k-2,2}$ i $P_{k-2,1,1}$. Cilj nam je primijeniti kriterij ireducibilnosti na način opisan u [36, §21]. Koristimo standardnu formulu za m^* (sekcija 1.5.3):

$$m^*(\delta[\rho, \nu^k\rho]) = \sum_{i=-1}^{k} \delta([\nu^{i+1}\rho, \nu^k\rho]) \otimes \delta([\rho, \nu^i\rho]).$$

Dobivamo da su semisimplifikacije Jacquetovih modula u odnosu na $P_{k-1,1}, P_{k-2,2}$ i $P_{k-2,1,1}$ jednake direktnim sumama sljedećih reprezentacija:

$P_{k-1,1}$:

$$|\cdot|^d \times \delta([c, d]) \otimes |\cdot|^{d+1} \tag{A}$$
$$(d, d+1) \times \delta([c+1, d]) \otimes |\cdot|^c \tag{B}$$

$P_{k-2,2}$:

$$\delta([c, d]) \otimes (d, d+1) \tag{1}$$
$$(d, d+1) \times \delta([c+2, d]) \otimes \delta([c, c+1]) \tag{2}$$
$$|\cdot|^d \times \delta([c+1, d]) \otimes |\cdot|^{d+1} \times |\cdot|^c \tag{3}$$

$P_{k-2,1,1}$:

$$\delta([c, d]) \otimes |\cdot|^d \otimes |\cdot|^{d+1} \tag{A1}$$
$$(d, d+1) \times \delta([c+2, d]) \otimes |\cdot|^{c+1} \otimes |\cdot|^c \tag{B2}$$
$$|\cdot|^d \times \delta([c+1, d]) \otimes |\cdot|^{d+1} \otimes |\cdot|^c \tag{B3}$$
$$|\cdot|^d \times \delta([c+1, d]) \otimes |\cdot|^c \otimes |\cdot|^{d+1} \tag{A3}$$

Uočimo da su sve navedene reprezentacije ireducibilne, po induktivnoj pretpostavci. Nadalje, iz $P_{k-1,1}$ čitamo da je duljina reprezentacije $(d, d+1) \times \delta([c,d])$ najviše 2 (ako je duljina 2, onda jednom subkvocijentu pripada (A), a drugom (B)). Sada iz činjenice da se (3) dijeli na (A3) i (B3) vidimo da i (A) i (B) pripadaju istom subkvocijentu kao (3). Posebno, (A) i (B) pripadaju istom subkvocijentu, stoga je ukupna duljina reprezentacije 1, a ne 2.

Time je ova lema dokazana. $\square$

Sada smo spremni za dokaz leme 4.1.

Dokaz. Najprije tvrdimo da reprezentacija

$$\Pi = |\cdot|^b \times |\cdot|^{b-1} \times \cdots \times |\cdot|^a \times \delta([c,d])$$

ima jedinstveni ireducibilni kvocijent.

Kratkim argumentom svodimo ovu tvrdnju na istu, ali za standardne reprezentacije: neka je $s = \frac{c+d}{2}$ (sredina segmenta $[c,d]$). Sjetimo se da vrijedi $c \leqslant a \leqslant d < b$. Posebno, to znači da vrijedi $b > \frac{c+d}{2}$. Zbog toga postoji najmanji element segmenta $[a,b]$ koji je veći od s; označimo ga s b_0.

Tada možemo pisati sljedeće: reprezentacija

$$|\cdot|^b \times |\cdot|^{b-1} \times |\cdot|^{b_0} \times \delta([c,d]) \times |\cdot|^{b_0-1} \cdots \times |\cdot|^a$$

posjeduje jedinstveni (Langlandsov) ireducibilni kvocijent (i taj je multipliciteta 1 u gornjoj reprezentaciji). Budući da se brojevi $a, a+1, \ldots, b_0-1$ nalaze u segmentu $[c,d]$, reprezentacija $\delta([c,d])$ komutira[2] s $|\cdot|^i$, za svaki $i = a, \ldots, b_0-1$. Prema tome, gornja je reprezentacija izomorfna s

$$|\cdot|^b \times |\cdot|^{b-1} \times |\cdot|^{b_0} \times |\cdot|^{b_0-1} \times \cdots \times |\cdot|^a \times \delta([c,d]) = \Pi.$$

Odavde zaključujemo da i Π ima jedinstveni ireducibilni kvocijent.

Jedinstveni ireducibilni kvocijent reprezentacije Π nazovimo π, za potrebe ovog dokaza. Očito imamo epimorfizam $\Pi \twoheadrightarrow (a,b) \times \delta([c,d])$, stoga je π ujedno i jedinstveni kvocijent reprezentacije $(a,b) \times \delta([c,d])$.

S druge strane, imamo i $\Pi \twoheadrightarrow \Pi'$, gdje je

$$\Pi' = |\cdot|^b \times |\cdot|^{b-1} \times \cdots \times |\cdot|^{d+2} \times (d, d+1) \times |\cdot|^{d-1} \times \cdots \times |\cdot|^a \times \delta([c,d])$$

(uočimo, moguće je da su segmenti $[d+2, b]$ i $[a, d-1]$ prazni, no to nam ovdje ne smeta). Odavde zaključujemo da je π jedinstveni kvocijent od Π'.

[2]To jest, vrijedi $\delta([c,d]) \times |\cdot|^i \cong |\cdot|^i \times \delta([c,d])$.

Sada najprije uočimo da vrijedi

$$\Pi' \cong |\cdot|^b \times |\cdot|^{b-1} \times \cdots \times |\cdot|^{d+2} \times (d, d+1) \times \delta([c,d]) \times |\cdot|^{d-1} \times \cdots \times |\cdot|^a$$

jer su brojevi $a, \ldots, d-1$ elementi segmenta $\delta([c,d])$. Zatim, pokazali smo da se $(d, d+1) \times \delta([c,d])$ ne reducira, stoga vrijedi $(d, d+1) \times \delta([c,d]) \cong \delta([c,d]) \times (d, d+1)$. Imamo, dakle,

$$\Pi' \cong |\cdot|^b \times |\cdot|^{b-1} \times \cdots \times |\cdot|^{d+2} \times \delta([c,d]) \times (d, d+1) \times |\cdot|^{d-1} \times \cdots \times |\cdot|^a.$$

Konačno, brojevi $d+2, \ldots, b$ ne nadovezuju se na segment $[c,d]$, stoga i njih možemo premjestiti:

$$\Pi' \cong \delta([c,d]) \times |\cdot|^b \times |\cdot|^{b-1} \times \cdots \times |\cdot|^{d+2} \times (d, d+1) \times |\cdot|^{d-1} \times \cdots \times |\cdot|^a.$$

Budući da je π jedinstveni ireducibilni kvocijent ove reprezentacije, s koje postoji očiti epimorfizam na $\delta([c,d]) \times (a,b)$, zaključujemo da je π jedinstveni ireducibilni kvocijent reprezentacije

$$\delta([c,d]) \times (a,b).$$

Time smo pokazali da obje reprezentacije $\delta([c,d]) \times (a,b)$ i $(a,b) \times \delta([c,d])$ imaju π kao jedinstveni kvocijent, a znamo i da se π pojavljuje s multiplicitetom 1. Zaključujemo da se radi o međusobno izomorfnim ireducibilnim reprezentacijama. □

Napomena 4.3 Slično (ali lakše, jer lema 4.2 nije potrebna) se pokazuje da su reprezentacije

$$(a,b) \times \delta([c,d]) \quad \text{i} \quad \delta([c,d]) \times (a,b)$$

ireducibilne i međusobno izomorfne u slučaju kada segmenti $[a,b]$ i $[c,d]$ nisu ulančani.

Napomena 4.4 U slučaju kada se segmenti nadovezuju ($a = d+1$), na sličan način pokazujemo da $\delta([c,d]) \times (d+1, b)$ ima točno dva ireducibilna subkvocijenta:

$$L(|\cdot|^b \times \ldots \times |\cdot|^{d+1} \times \delta([c,d])) \quad \text{i} \quad L(|\cdot|^b \times \ldots \times |\cdot|^{d+2} \times \delta([c,d+1])).$$

U nekoliko ćemo situacija prethodnu napomenu kombinirati sa sljedećom lemom:

Lema 4.5 Označimo s L reprezentaciju $L(|\cdot|^b \times \ldots \times |\cdot|^{d+1} \times \delta([c,d]))$ koja se pojavljuje u prethodnoj napomeni (uočimo, radi se o jedinstvenom kvocijentu reprezentacije $(b, d+1) \times \delta([c,d])$). Tada je reprezentacija

$$L \times \delta([c,d])$$

ireducibilna.

Dokaz. Dokažimo najprije da vrijedi $L \times \delta([c,d]) \cong \delta([c,d]) \times L$. Uočimo da vrijedi

$$L \times \delta([c,d]) \hookrightarrow \delta([c,d]) \times (d+1,b) \times \delta(c,d).$$

S druge strane, imamo preplitanje

$$T\colon \delta([c,d]) \times (d+1,b) \times \delta(c,d) \to \delta([c,d]) \times L$$

čija je jezgra $\ker(T)$ izomorfna s $\delta(c,d) \times L(|\cdot|^b \times \ldots \times |\cdot|^{d+2} \times \delta([c,d+1]))$ (napomena 4.4).

Restrikcijom operatora T na $L \times \delta([c,d])$ dobivamo preplitanje $\tilde{T}\colon L \times \delta([c,d]) \to \delta([c,d]) \times L$. Pokažimo da se radi o ulaganju.

Da bismo pokazali da je $\tilde{T}$ injekcija, dovoljno je provjeriti da vrijedi $L \times \delta([c,d]) \cap \ker(T) = \{0\}$. Uočimo da $\ker(T)$ ima jedinstvenu ireducibilnu podreprezentaciju τ – radi se o Langlandsovom kvocijentu reprezentacije

$$|\cdot|^b \times \ldots \times |\cdot|^{d+2} \times \delta([c,d+1]) \times \delta([c,d]).$$

Zbog jedinstvenosti zaključujemo: ako je presjek $L \times \delta([c,d]) \cap \ker(T)$ netrivijalan, mora sadržavati reprezentaciju τ.

Sada promotrimo Jacquetove module. Nije teško vidjeti da Jacquetov modul reprezentacije τ u odnosu na odgovarajuću standardnu paraboličku podgrupu P sadrži subkvocijent oblika

$$\delta([c,d]) \otimes \delta([c,d+1]) \otimes (d+2,b).$$

Ako pokažemo da $R_P(L \times \delta([c,d]))$ ne sadrži ovakav subkvocijent, odavde će slijediti da je presjek $L \times \delta([c,d]) \cap \ker(T)$ trivijalan.

Prema napomeni 4.4, reprezentacija

$$A = \delta([c,d]) \times (d+1,b) \times \delta([c,d])$$

ima dva subkvocijenta:

$$L \times \delta([c,d]) \quad \text{i} \quad L' \times \delta([c,d]),$$

pri čemu koristimo oznaku $L' = L(|\cdot|^b \times \ldots \times |\cdot|^{d+2} \times \delta([c,d+1]))$. Jednostavnom primjenom formule $m^*(\pi_1 \times \pi_2) = m^*(\pi_1) \times m^*(\pi_2)$ za semisimplifikaciju Jacquetovog modula dobivamo da $R_P(A)$ sadrži subkvocijent

$$\delta([c,d]) \otimes \delta([c,d+1]) \otimes (d+2,b)$$

s kratnošću 2. Sada zaključujemo da je dovoljno pokazati da oba pojavljivanja ovog subkvocijenta dolaze iz $R_P(L' \times \delta([c,d]))$.

Znamo da vrijedi $L' \hookrightarrow \delta([c, d+1]) \times (d+2, b)$, ali i $L' \hookrightarrow |\cdot|^{d+1} \times \delta([c, d]) \times (d+2, b)$. Odavde lako slijedi da $m^*(L')$ sadrži subkvocijente $\delta([c, d+1]) \otimes (d+2, b)$ i $|\cdot|^{d+1} \otimes \delta([c, d]) \times (d+2, b)$. Ponovnom primjenom multiplikativnosti funkcije m^* odavde dobivamo da $m^*(L' \times \delta([c, d]))$ sadrži

$$\delta([c, d+1]) \times \delta([c, d]) \otimes (d+2, b) + |\cdot|^{d+1} \times \delta([c, d]) \otimes \delta([c, d]) \times (d+2, b)$$

Primjenom Jacquetovog funktora (za odgovarajuću paraboličku podgrupu) vidimo da Jacquetov modul oba sumanda sadrži subkvocijent oblika $\delta([c, d]) \otimes \delta([c, d+1]) \otimes (d+2, b)$, pa zaključujemo da se oba pojavljivanja ovog subkvocijenta nalaze u $R_P(L' \times \delta([c, d]))$.

Time smo pokazali da vrijedi $L \times \delta([c, d]) \cap \ker(T) = \{0\}$, odnosno da je $\tilde{T}$ ulaganje. Budući da reprezentacije $L \times \delta([c, d])$ i $\delta([c, d]) \times L$ imaju jednake duljine, zaključujemo da je $\tilde{T}$ izomorfizam, to jest da vrijedi

$$L \times \delta([c, d]) \cong \delta([c, d]) \times L.$$

Ireducibilnost ovih reprezentacija sada je lako pokazati. Neka je π jedinstveni ireducibilni kvocijent reprezentacije $L \times \delta([c, d])$. Tada imamo i $\pi \hookrightarrow \delta([c, d]) \times L$. Odavde slijedi

$$\pi \hookrightarrow \delta([c, d]) \times L \cong L \times \delta([c, d]) \twoheadrightarrow \pi.$$

Budući da se π u $L \times \delta([c, d])$ pojavljuje s kratnošću 1, jer se zapravo radi o Langlandsovom kvocijentu reprezentacije

$$|\cdot|^{b} \times \ldots \times |\cdot|^{d+1} \times \delta([c, d]) \times \delta([c, d]),$$

zaključujemo da gornji niz preplitanja možemo imati samo ako su reprezentacije $\delta([c, d]) \times L \cong L \times \delta([c, d])$ ireducibilne. $\square$

Za kraj odjeljka, uočimo još jednu posljedicu činjenica iz [40] koja će se pokazati korisnom prilikom računanja standardnih modula:

Napomena 4.6 Promotrimo reprezentacije $\delta_1 = \delta(\Delta_1)$ i $\delta_2 = \delta(\Delta_2)$; bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $e(\delta_1) \geqslant e(\delta_2)$, to jest da je sredina segmenta Δ_1 veća od sredine segmenta Δ_2. Prisjetimo se da je reprezentacija $\delta_1 \times \delta_2$ reducibilna ako i samo ako su segmenti Δ_1 i Δ_2 ulančani. Prema rezultatima iz [40], reprezentacija $\delta_1 \times \delta_2$ je tada duljine 2 te ima jedinstvenu ireducibilnu podreprezentaciju (a zbog toga i jedinstveno određen kvocijent). Jedinstvena podreprezentacija jednaka je $\delta(\Delta^{\cup}) \times \delta(\Delta^{\cap})$, pri čemu smo uveli oznake

$$\Delta^{\cup} = \Delta_1 \cup \Delta_2, \quad \Delta^{\cap} = \Delta_1 \cap \Delta_2.$$

Pretpostavimo sada da su σ i σ_0 ireducibilne reprezentacije takve da vrijedi

$$\delta_k\nu^{s_k} \times \cdots \times \delta_1\nu^{s_1} \rtimes \sigma_0 \twoheadrightarrow \sigma,$$

pri čemu su $\delta_1, \dots, \delta_k$ ireducibilne reprezentacije diskretne serije, a $s_k \geqslant \cdots \geqslant s_1 > 0$ realni brojevi. Ukoliko je σ_0 temperirana, reprezentacija na lijevoj strani gornjeg epimorfizma je standardni modul za σ. U suprotnom, vrijedi

$$\delta\nu^t \rtimes \sigma_1 \twoheadrightarrow \sigma_0$$

pri čemu su σ_1 i δ ireducibilne (δ iz diskretne serije), a t realan broj veći od 0. Zbog toga možemo pisati

$$\delta_k\nu^{s_k} \times \cdots \times \delta_1\nu^{s_1} \times \delta\nu^t \rtimes \sigma_1 \twoheadrightarrow \sigma. \tag{$*$}$$

Sada želimo promijeniti redoslijed reprezentacija $\delta_k\nu^{s_k}, \cdots, \delta_1\nu^{s_1}, \delta\nu^t$ tako da dobijemo eksponente u padajućem poretku. Ako je $t \leqslant s_1$, onda se već nalazimo u željenoj situaciji, stoga pretpostavljamo da vrijedi $t > s_1$.

Znamo da u epimorfizmu ($*$) sudjeluje neki ireducibilni subkvocijent reprezentacije $\delta_1\nu^{s_1} \times \delta\nu^t$; ukoliko se radi o (jedinstvenoj ireducibilnoj) podreprezentaciji, ona je jednaka kvocijentu reprezentacije $\delta\nu^t \times \delta_1\nu^{s_1}$, stoga umjesto ($*$) možemo pisati

$$\delta_k\nu^{s_k} \times \cdots \times \delta\nu^t \times \delta_1\nu^{s_1} \rtimes \sigma_1 \twoheadrightarrow \sigma.$$

Time smo doveli reprezentacije $\delta\nu^t$ i $\delta_1\nu^{s_1}$ u ispravan poredak (sjetimo se, vrijedi $t > s_1$).

Ako u ($*$) ne sudjeluje podreprezentacija, već (jedinstveni ireducibilni) kvocijent reprezentacije $\delta_1\nu^{s_1} \times \delta\nu^t$, onda se radi o ireducibilnoj reprezentaciji $\delta(\Delta^\cup) \times \delta(\Delta^\cap)$ dobivenoj kao u prethodnom dijelu napomene, uz oznake $\delta_1\nu^{s_1} = \delta(\Delta_1)$ i $\delta\nu^t = \delta(\Delta_2)$.

Zapišimo reprezentacije $\delta(\Delta^\cup)$ i $\delta(\Delta^\cap)$ kao $\delta_1'\nu^{r_1}$ i $\delta_2'\nu^{r_2}$ (ne nužno u tom poretku), tako da su δ_1' i δ_2' unitarne kvadratno integrabilne (definirane segmentima centriranima u 0) a $r_2 \geqslant r_1$ sredine odgovarajućih segmenata[3]. Tada umjesto ($*$) možemo pisati

$$\delta_k\nu^{s_k} \times \cdots \times \delta_2'\nu^{r_2} \times \delta_1'\nu^{r_1} \rtimes \sigma_1 \twoheadrightarrow \sigma.$$

Uočimo da brojevi r_1 i r_2 zadovoljavaju

$$s_1 \leqslant r_1 \leqslant r_2 \leqslant t,$$

to jest, zadnja dva eksponenta su i u ovom slučaju u dobrom poretku. Induktivnim ponavljanjem ovakvog postupka (najprije za $\delta_2\nu^{s_2} \times \delta_2'\nu^{r_2}$, itd.) dobivamo padajući niz eksponenata (pri čemu su svi pozitivni).

[3]Moguće je da je segment $\Delta^\cap$ prazan, no u tom je slučaju argument još jednostavniji.

Nakon što dovedemo eksponente u padajući poredak, cijeli postupak možemo ponavljati (počevši ovaj put od reprezentacije σ_1 umjesto σ_0, itd.), sve dok reprezentacija σ_0 ne postane temperirana. Tada ćemo na lijevoj strani epimorfizma $(*)$ imati standardni modul za reprezentaciju σ.

Ovakvo "miješanje" standardnih modula koristit ćemo u više navrata u nastavku.

4.2 Subkvocijenti velikih theta liftova

Sada krećemo na opis viših liftova. U kasnijem dijelu opisa morat ćemo odvajati slučajeve u ovisnosti o tome promatramo li reprezentacije simplektičke ili metaplektičke grupe, no u početnim razmatranjima oba slučaja možemo tretirati jednako. Neka je, dakle, $\pi \in \mathrm{Irr}(G(W_n))$ generička reprezentacija simplektičke ili metaplektičke grupe. Neka je, nadalje, π izomorfna vlastitoj standardnoj reprezentaciji:

$$\pi \cong \chi_V \delta_r \nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_V \delta_1 \nu^{s_1} \rtimes \pi_0.$$

Prisjetimo se da ovo vrijedi za sve generičke reprezentacije simplektičke grupe prema teoremu 1.8, dok za reprezentacije metaplektičke grupe ovo uzimamo kao dodatnu pretpostavku (kojom još uvijek uključujemo vrlo široku klasu generičkih reprezentacija).

U prethodnom smo se poglavlju bavili prvim liftovima, a sada želimo odrediti više liftove: $\theta_{-l}(\pi)$ za $l \geqslant 0$, to jest $m \geqslant n+1$ i više. Podsjećamo da je $\theta_{-l}(\pi)$ oznaka za lift reprezentacije π na V_{n+1+l}; prema tome, za $\pi \in \mathrm{Irr}(\mathrm{Sp}(W_n))$ uzimamo neparne, a za $\pi \in \mathrm{Irr}(\mathrm{Mp}(W_n))$ parne vrijednosti l.

Fiksirajmo $l \geqslant 0$ i označimo $\sigma = \theta_{-l}(\pi)$. Uobičajenom primjenom Kudline filtracije, to jest korolara 2.8, dobivamo

$$\chi_W \delta_r \nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_W \delta_1 \nu^{s_1} \rtimes \Theta_{-l}(\pi_0) \twoheadrightarrow \Theta_{-l}(\pi) \twoheadrightarrow \theta_{-l}(\pi) = \sigma. \tag{0}$$

Osnovna nam je zadaća odrediti koji subkvocijent reprezentacije $\Theta_{-l}(\pi_0)$ sudjeluje u gornjem epimorfizmu. Da bismo opisali taj subkvocijent, moramo detaljnije analizirati reprezentaciju π_0. Kao u prethodnom poglavlju, možemo pisati

$$\chi_V \delta'_1 \times \cdots \times \chi_V \delta'_k \rtimes \pi_{00} \twoheadrightarrow \pi_0$$

pri čemu su $\delta'_1, \ldots, \delta'_k, \pi_{00}$ ireducibilne reprezentacije diskretne serije. Uvedemo li oznaku $\Delta = \delta'_1 \times \cdots \times \delta'_k$, korolar 2.8 ponovno daje

$$\chi_W \Delta \rtimes \Theta_{-l}(\pi_{00}) \twoheadrightarrow \Theta_{-l}(\pi_0).$$

Prema tome, imamo

$$\chi_W\delta_r\nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_W\delta_1\nu^{s_1} \times \chi_W\Delta \rtimes \Theta_{-l}(\pi_{00}) \twoheadrightarrow \sigma. \tag{1}$$

Sada je glavno pitanje koji subkvocijent (nazovimo ga σ_0) reprezentacije $\Theta_{-l}(\pi_{00})$ sudjeluje u ovom epimorfizmu. Pokazat ćemo da vrijedi

Propozicija 4.7 Subkvocijent reprezentacije $\Theta_{-l}(\pi_{00})$ koji sudjeluje u epimorfizmu (1) jednak je upravo $\theta_{-l}(\pi_{00})$.

Napomena 4.8 Prisjetimo se rezultata iz [26] i [2]: $\theta_{-l}(\pi_{00})$ je Langlandsov kvocijent reprezentacije

$$\chi_W|\cdot|^{\frac{l-1}{2}} \times \chi_W|\cdot|^{\frac{l-3}{2}} \times \cdots \times \chi_W|\cdot|^{\frac{1+l_0}{2}} \rtimes \theta_{-l_0}(\pi_{00}) \tag{$*$}$$

gdje je $\theta_{-l_0}(\pi_{00})$ prvi ne-nul lift na nivou većem od ili jednakom $n+1$. U prethodnom smo poglavlju vidjeli da za generičku reprezentaciju simplektičke grupe imamo $l_0 \in \{1,3\}$, dok za generičke reprezentacije metaplektičke grupe imamo $l_0 \in \{0,2\}$.

Svaki drugi subkvocijent reprezentacije $\Theta_{-l}(\pi_{00})$ je:

- temperiran; ili
- Langlandsov kvocijent reprezentacije

  $$\chi_W|\cdot|^{\frac{l-1}{2}} \times \chi_W|\cdot|^{\frac{l-3}{2}} \times \cdots \times \chi_W|\cdot|^{\frac{1+l'}{2}} \rtimes \sigma_0',$$

  gdje je σ_0' neki temperirani subkvocijent reprezentacije $\Theta_{-l'}(\pi_{00})$ (za $l' \geqslant l_0$).

Pritom uočimo da je Langlandsov kvocijent reprezentacije

$$\chi_W|\cdot|^{\frac{l-1}{2}} \times \chi_W|\cdot|^{\frac{l-3}{2}} \times \cdots \times \chi_W|\cdot|^{\frac{1+l'}{2}} \rtimes \sigma_0',$$

ujedno i (jedinstveni) kvocijent reprezentacije $\chi_W\left(\frac{1+l'}{2}, \frac{l-1}{2}\right) \rtimes \sigma_0'$ (ovdje koristimo notaciju iz prethodnog odjeljka).

Sada smo spremni za dokaz prethodne propozicije.

Dokaz. Pretpostavimo, u skladu s prethodnom napomenom, da je subkvocijent σ_0 reprezentacije $\Theta_{-l}(\pi_{00})$ koji želimo odrediti izomorfan jedinstvenom kvocijentu reprezentacije

$$\chi_W\left(\frac{1+l'}{2}, \frac{l-1}{2}\right) \rtimes \sigma_0'.$$

Ovdje dopuštamo i da je segment $[\frac{1+l'}{2}, \frac{l-1}{2}]$ prazan, to jest da je $\sigma_0 = \sigma_0'$ temperirana. Želimo pokazati da vrijedi $l' = l_0$, to jest da se nalazimo u situaciji ($*$) iz prethodne napomene.

Budući da σ_0 sudjeluje u epimorfizmu (1), imamo

$$\chi_W \Pi \times \chi_W \Delta \times \chi_W \left(\frac{1+l'}{2}, \frac{l-1}{2}\right) \rtimes \sigma_0' \twoheadrightarrow \sigma,$$

pri čemu smo $\delta_r \nu^{s_r} \times \cdots \times \delta_1 \nu^{s_1}$ označili s Π. Sada uočimo da se nalazimo unutar uvjeta leme 4.1: $\left(\frac{1+l'}{2}, \frac{l-1}{2}\right)$ komutira sa (skoro) svim reprezentacijama δ_i' koje tvore Δ. Zbog toga možemo pisati

$$\chi_W \Pi \times \chi_W \left(\frac{1+l'}{2}, \frac{l-1}{2}\right) \times \chi_W \Delta \times \sigma_0' \twoheadrightarrow \sigma. \tag{I}$$

Jedini iznimni slučaj u kojem ovo ne možemo napraviti je kada se segment $[\frac{1+l'}{2}, \frac{l-1}{2}]$ nadovezuje na neki od segmenata koji definiraju reprezentacije δ_i', to jest kada je

$$\delta_i' = \delta([|\cdot|^{\frac{1-l'}{2}}, |\cdot|^{\frac{l'-1}{2}}]) = \mathrm{St}_{l'}$$

za neki indeks $i \in \{1, \ldots, k\}$. Ni tada situacija nije puno kompliciranija. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su reprezentacije $\delta_1', \delta_2', \ldots, \delta_i', \ldots, \delta_k'$ poredane uzlazno po duljini segmenta koji ih definira. Lemu 4.1 možemo primijeniti da bismo zamijenili mjesta $(\frac{1+l'}{2}, \frac{l-1}{2})$ i $\delta_{i+1}', \ldots, \delta_k'$. Nakon toga dolazimo do situacije

$$\cdots \times \chi_W \delta_i' \times \chi_W \left(\frac{1+l'}{2}, \frac{l-1}{2}\right) \times \ldots \twoheadrightarrow \sigma$$

pa iz napomene 4.4 slijedi da vrijedi

$$\cdots \times \chi_W \left(\frac{1+l'}{2}, \frac{l-1}{2}\right) \times \chi_W \delta_i' \times \cdots \twoheadrightarrow \sigma$$

ili

$$\cdots \times \chi_W \left(\frac{3+l'}{2}, \frac{l-1}{2}\right) \times \chi_W \delta([|\cdot|^{\frac{1-l'}{2}}, |\cdot|^{\frac{l'+1}{2}}]) \times \cdots \twoheadrightarrow \sigma.$$

Prvi nas slučaj dovodi do istog zaključka kao u (I), dok iz drugog (budući da sada $(\frac{3+l'}{2}, \frac{l-1}{2})$ komutira sa svim $\delta_1', \ldots, \delta_{i-1}'$) dobivamo

$$\chi_W \Pi \times \chi_W \left(\frac{3+l'}{2}, \frac{l-1}{2}\right) \times \chi_W \delta([|\cdot|^{\frac{1-l'}{2}}, |\cdot|^{\frac{l'+1}{2}}]) \times \chi_W \Delta' \rtimes \sigma_0' \twoheadrightarrow \sigma, \tag{II}$$

pri čemu je $\Delta' \cong \delta_1' \times \cdots \times \widehat{\delta_i'} \times \cdots \times \delta_k'$ (ovdje $\widehat{\delta_i'}$ označava da ispuštamo reprezentaciju δ_i' iz produkta).

U oba slučaja (I i II) možemo napraviti sljedeće: reprezentacija $\Pi \times (\frac{1+l'}{2}, \frac{l-1}{2})$, odnosno $\Pi \times (\frac{3+l'}{2}, \frac{l-1}{2}) \times \delta([|\cdot|^{\frac{1-l'}{2}}, |\cdot|^{\frac{l'+1}{2}}])$ može se, koristeći napomenu 4.6 (tj. općenito, činjenice iz [40]), presložiti u produkt

$$\Pi' = \overline{\delta}_t \nu^{e_t} \times \cdots \times \overline{\delta}_1 \nu^{e_1},$$

($\overline{\delta}_i$ su ireducibilne reprezentacije diskretne serije; vrijedi $e_t \geqslant \cdots \geqslant e_1 > 0$). Drugim riječima, dolazimo do standardnog modula

$$\chi_W \Pi' \rtimes \tau \twoheadrightarrow \sigma$$

za reprezentaciju σ, pri čemu je τ ireducibilni (i očito temperirani) subkvocijent reprezentacije $\chi_W \Delta \rtimes \sigma'_0$ (u slučaju I), odnosno $\chi_W \Delta' \rtimes \sigma'_0$ (u slučaju II).

Uočimo da smo pokazali sljedeće:

(I) U slučaju (I), reprezentacija Π' u kuspidalnom nosaču ima točno $|\cdot|^{\frac{l-1}{2}}, |\cdot|^{\frac{l-3}{2}}, \dots, |\cdot|^{\frac{l'+1}{2}}$ viška u odnosu na Π.

(II) U slučaju (II), reprezentacija Π' u kuspidalnom nosaču ima točno $|\cdot|^{\frac{l-1}{2}}, |\cdot|^{\frac{l-3}{2}}, \dots, |\cdot|^{\frac{l'+1}{2}}$ te segment $[\frac{1-l'}{2}, \frac{l'-1}{2}]$ viška u odnosu na Π.

Sada se pomoću Kudline filtracije vraćamo na simplektički toranj: računamo $\theta_l(\sigma)$ (pritom znamo da vrijedi $\theta_l(\sigma) = \pi$) uzastopnom primjenom korolara 2.10 na epimorfizam

$$\chi_W \overline{\delta}_t \nu^{e_t} \times \cdots \times \chi_W \overline{\delta}_1 \nu^{e_1} \rtimes \tau \twoheadrightarrow \sigma.$$

Primijenimo li korolar 2.10 točno t puta, dobit ćemo

$$\chi_V (\overline{\delta}_t \nu^{e_t}) \times \cdots \times \chi_V (\overline{\delta}_1 \nu^{e_1}) \rtimes \Theta_{l-2k}(\tau) \twoheadrightarrow \pi.$$

Ovdje koristimo oznaku $(\overline{\delta}\nu^e)$ u skladu s napomenom 2.11. Nadalje, s k smo označili broj onih segmenata za koje u korolaru 2.10 koristimo opciju (ii) (zbog toga Θ_l prelazi u Θ_{l-2k}).

Sada opet presložimo reprezentacije $\chi_V (\overline{\delta}_i \nu^{e_i})$ tako da dobijemo standardni modul (tj. tako da sredine odgovarajućih segmenata čine padajuć niz).

Napomena 4.9 Pokažimo da je takvo preslagivanje doista moguće. Svaka od reprezentacija $(\overline{\delta}_i \nu^{e_i}) = \delta([\rho_i \nu^{-a_i+e_i}, \rho_i \nu^{a_i+e_i}])$ definirana je nekim segmentom čija je sredina broj $e_i > 0$ (ovdje je a_i nenegativan polucijeli broj). Nakon što ih pomoću korolara 2.10 dovedemo ispred $\Theta_{l-2k}(\tau)$, neke od reprezentacija $(\overline{\delta}_i \nu^{e_i})$ (to jest, one koje dobivamo primjenom opcije (ii)) definirane su malo drugačijim segmentima oblika $[\rho_i \nu^{-a_i+e_i}, \rho_i \nu^{a_i+e_i-1}]$, čija je sredina $(e_i - \frac{1}{2})$. Konkretno, imamo sljedeće mogućnosti:

- Ako je $a_i = 0$, onda je segment $[\rho_i \nu^{-a_i+e_i}, \rho_i \nu^{a_i+e_i-1}]$ prazan; tada reprezentacija $(\overline{\delta}_i \nu^{e_i})$ zapravo ne postoji.

- Moguće je da vrijedi $e_i - \frac{1}{2} = 0$, to jest da je novi segment centriran oko 0.
- Za sve ostale neprazne segmente vrijedi $e_i - \frac{1}{2} > 0$. Naime, ako primjenjujemo opciju (ii) u korolaru 2.10, to nužno implicira (između ostalog) da je e_i polucijeli pozitivan broj, stoga posebno vrijedi i $e_i \geqslant \frac{1}{2}$.

Nadalje, uočimo da doista možemo presložiti reprezentacije $(\overline{\delta}_i \nu^{e_i})$ tako da sredine odgovarajućih segmenata tvore padajuć niz. Naime, ako je potrebno zamijeniti mjesta reprezentacijama $(\overline{\delta}_{i+1}\nu^{e_{i+1}})$ i $(\overline{\delta}_i \nu^{e_i})$, to znači sljedeće: poredak se poremetio jer je na $\overline{\delta}_{i+1}\nu^{e_{i+1}}$ primijenjena opcija (ii), a na $\overline{\delta}_i\nu^{e_i}$ opcija (i) – u suprotnom bi i dalje bile u dobrom poretku. To znači da vrijedi

$$\begin{aligned}(\overline{\delta}_{i+1}\nu^{e_{i+1}}) &= \delta([|\cdot|^{a_{i+1}+e_{i+1}}, |\cdot|^{-a_{i+1}+e_{i+1}-1}]),\\ (\overline{\delta}_i\nu^{e_i}) &= \delta([\rho\nu^{-a_i+e_i}, \rho\nu^{a_i+e_i}]).\end{aligned}$$

Ako pretpostavimo da su ovi segmenti ulančani, onda je $\rho = \mathbb{1}$ i vrijedi

- segmenti su ulančani, stoga je nužno $e_i - e_{i+1} \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$
- treba ih zamijeniti, dakle vrijedi $e_{i+1} - \frac{1}{2} < e_i$
- originalni poredak implicira $e_{i+1} \geqslant e_i$

prema tome, jedina je mogućnost $e_i = e_{i+1}$. Odavde lako slijedi da segmenti ipak ne mogu biti ulančani, stoga im doista možemo zamijeniti mjesta.

Ukratko, možemo pisati

$$\chi_V \Pi'' \times \chi_V \Delta'' \rtimes \Theta_{l-2k}(\tau) \twoheadrightarrow \pi.$$

Ovdje je s $\Pi'' \times \Delta''$ označen produkt reprezentacija $(\overline{\delta}_i\nu^{e_i})$ (u padajućem poretku eksponenata e_i); pritom smo one oblika $\delta([|\cdot|^{-a}, |\cdot|^{a}])$ grupirali u Δ''.

Sada, kako su svi ireducibilni subkvocijenti reprezentacije $\Theta_{l-2k}(\tau)$ temperirani (očito je $l-2k > 0$ pa ovo slijedi iz propozicije 2.18), vidimo da je standardni modul reprezentacije π jednak

$$\chi_V \Pi'' \rtimes \pi_0'',$$

gdje je π_0'' neki (očito temperirani) ireducibilni subkvocijent reprezentacije $\chi_V\Delta'' \rtimes \Theta_{l-2k}(\tau)$. Iz jedinstvenosti standardnog modula sada slijedi da mora biti

$$\chi_V \Pi'' = \chi_V \Pi \quad \text{i} \quad \pi_0'' \cong \pi_0.$$

Posebno, Π'' i Π imaju isti kuspidalni nosač. Već smo ustanovili odnos između kuspidalnih nosača Π i Π'. S druge strane, budući da smo opciju (ii) iz korolara 2.10 primijenili točno

k puta, vidimo da kuspidalnom nosaču od Π'' nedostaje

$$|\cdot|^{\frac{l-1}{2}}, |\cdot|^{\frac{l-3}{2}}, \ldots, |\cdot|^{\frac{l+1}{2}-k},$$

zajedno sa segmentima koji su prešli u Δ'', do kuspidalnog nosača od Π'.

Odavde (u oba slučaja, I i II) usporedbom lagano dolazimo do zaključka da vrijedi $l' = l - 2k$.

Napomena 4.10 U slučaju (I) lako vidimo da niti jedna reprezentacija ne smije završiti u Δ'', dok se u (II) u Δ'' može (i mora) nalaziti samo segment $[\frac{1-l'}{2}, \frac{l'-1}{2}]$, koji je i došao iz temperiranog dijela.

Sada iskoristimo i drugi uvjet: $\chi_V \Delta'' \rtimes \Theta_{l'}(\tau)$ ima generički subkvocijent izomorfan s π_0. Sljedeća lema pokazuje da je ovo moguće jedino ako je $l' = l_0$.

Lema 4.11 Za $l' > l_0$ reprezentacija $\chi_V \Delta'' \rtimes \Theta_{l'}(\tau)$ ne sadrži subkvocijent izomorfan s π_0.

Dokaz. Prisjetimo se da je l_0 najmanji nenegativan broj takav da je lift $\theta_{-l_0}(\pi_{00})$ različit od nul-reprezentacije. Najprije dajemo dokaz u slučaju kada se $\chi_V \Delta''$ ne pojavljuje.

Napomena 4.12 Znamo da je reprezentacija $\theta_{-l_0}(\pi_{00})$ temperirana, dok su za sve $l' > l_0$ liftovi $\theta_{-l'}(\pi_{00})$ netemperirani. Također, znamo da je reprezentacija $\theta_{-l_0}(\pi_0)$ temperirana (ako je različita od nul-reprezentacije).

Neka je sada τ ireducibilna i temperirana reprezentacija ortogonalne grupe, a $l' > l_0$ takav da $\Theta_{l'}(\tau)$ sadrži subkvocijent izomorfan s π_0 (posebno, vrijedi $\Theta_{l'}(\tau) \neq 0$). Tada imamo nekoliko mogućnosti.

(i) Ako τ ne sadrži reprezentaciju $\chi_W \mathrm{St}_{l'}$ u temperiranom nosaču, onda je $\Theta_{l'}(\tau)$ ireducibilna (npr. [2, propozicija 5.4]). Odavde slijedi da bi moralo biti $\theta_{l'}(\tau) = \pi_0$, odnosno $\theta_{-l'}(\pi_0) = \tau$. S druge strane, znamo da ovo nije moguće jer theta lift $\theta_{-l'}(\pi_0)$ netemperiran za $l' > l_0$.

(ii) Ako τ sadrži reprezentaciju $\chi_W \mathrm{St}_{l'}$, trebamo detaljniju analizu. Znamo da možemo zapisati τ kao direktni sumand inducirane reprezentacije

$$\chi_W \delta_1 \times \cdots \times \chi_W \delta_i \times \chi_W(\mathrm{St}_{l'}, h) \rtimes \tau_d.$$

Ovdje su $\delta_1, \ldots, \delta_i, \tau_d$ reprezentacije diskretne serije, dok smo s h označili broj pojavljivanja reprezentacije $\chi_W \mathrm{St}_{l'}$ u temperiranom nosaču. Sada opet razlikujemo dva slučaja: $\Theta_{l'}(\tau_d) \neq 0$ i $\Theta_{l'}(\tau_d) = 0$

a) Neka je $\Theta_{l'}(\tau_d) \neq 0$. Imamo

$$\chi_W \Delta \times \chi_W(\mathrm{St}_{l'}, h) \rtimes \tau_d \twoheadrightarrow \tau$$

pri čemu smo oznaku Δ privremeno iskoristili za $\delta_1 \times \cdots \times \delta_i$. Budući da tražimo subkvocijente reprezentacije $\Theta_{l'}(\tau)$, možemo koristiti propoziciju 2.7 i račun kao u korolaru 2.9. Dobivamo da je π_0 subkvocijent jedne od sljedećih reprezentacija:

- $\chi_V \Delta \times \chi_V(\mathrm{St}_{l'}, h) \rtimes \Theta_{l'}(\tau_d)$;
- $\chi_V \Delta \times \chi_V(\mathrm{St}_{l'}, h-1) \times \chi_V \delta([|\cdot|^{\frac{1-l'}{2}}, |\cdot|^{\frac{l'-3}{2}}]) \rtimes \Theta_{l'-2}(\tau_d)$.

U prvom slučaju znamo da je $\Theta_{l'}(\tau_d)$ ireducibilna reprezentacija diskretne serije; ako $\chi_V \Delta \times \chi_V(\mathrm{St}_{l'}, h) \rtimes \Theta_{l'}(\tau_d)$ sadrži subkvocijent izomorfan s π_0, onda mora vrijediti upravo $\pi_{00} = \Theta_{l'}(\tau_d)$. Ovo nije moguće za $l' > l_0$, jer bi tada reprezentacija $\theta_{-l'}(\pi_{00}) = \tau_d$ bila temperirana, što je u kontradikciji s napomenom 4.12.

Slično, u drugom slučaju znamo da je $\Theta_{l'-2}(\tau_d)$ ireducibilna reprezentacija diskretne serije. Nadalje, znamo da je $\Theta_{l'-2}(\tau_d)$ subkvocijent reprezentacije $|\cdot|^{\frac{1-l'}{2}} \rtimes \Theta_{l'}(\tau_d)$ ([18, prop. 4.1]). Prema tome, π_0 je generički subkvocijent reprezentacije

$$\chi_V \Delta \times \chi_V(\mathrm{St}_{l'}, h-1) \times \chi_V \delta([|\cdot|^{\frac{1-l'}{2}}, |\cdot|^{\frac{l'-3}{2}}]) \times \chi_V |\cdot|^{\frac{1-l'}{2}} \rtimes \Theta_{l'}(\tau_d).$$

Usporedbom kuspidalnih nosača, pomoću teorema 1.6 (multiplicity one) zaključujemo da jedinstveni generički subkvocijent ove reprezentacije mora biti izomorfan jedinstvenom generičkom subkvocijentu reprezentacije $\chi_V \Delta \times \chi_V(\mathrm{St}_{l'}, h) \rtimes \Theta_{l'}(\tau_d)$. S druge strane, svi ireducibilni subkvocijenti ove reprezentacije su temperirani i imaju $\Theta_{l'}(\tau_d)$ u temperiranom nosaču. Prema tome, i u ovom bi slučaju reprezentacija π_{00} trebala biti izomorfna s $\Theta_{l'}(\tau_d)$, a već smo zaključili da to nije moguće za $l' > l_0$.

b) Preostaje ispitati što se događa kada je $\Theta_{l'}(\tau_d) = 0$. Prisjetimo se da je τ direktni sumand reprezentacije

$$\chi_W \Delta \times \chi_W(\mathrm{St}_{l'}, h) \rtimes \tau_d.$$

Odaberemo li odgovarajući ireducibilni (i temperirani) subkvocijent τ_1 reprezentacije $\mathrm{St}_{l'} \rtimes \tau_d$, možemo definirati $\tau_{j+1} = \mathrm{St}_{l'} \rtimes \tau_j$ za $j = 1, 2, \ldots, h-1$ pa vidimo da je τ direktni sumand reprezentacije $\chi_W \Delta \rtimes \tau_h$. Odavde pomoću korolara 2.8 slijedi

$$\chi_V \Delta \rtimes \Theta_{l'}(\tau_h) \twoheadrightarrow \Theta_{l'}(\tau).$$

Uočimo da je sada dovoljno pokazati da niti jedna od reprezentacija $\Theta_{l'}(\tau_j)$ nema generičkih subkvocijenata. Pokazat ćemo ovo indukcijom.

Najprije, tvrdnja očito vrijedi za $j = 1$: budući da su svi ireducibilni subkvocijenti od $\Theta_{l'}(\tau_1)$ reprezentacije diskretne serije, zaključujemo da je $\Theta_{l'}(\tau_1) = \theta_{l'}(\tau_1)$

ireducibilna. Ako je k tome i generička, iz jednakosti kuspidalnih nosača slijedi da bi moralo vrijediti $\theta_{l'}(\tau_1) = \pi_{00}$. Odavde bi slijedilo da je reprezentacija $\theta_{-l'}(\pi_{00}) = \tau_1$ temperirana, no već smo konstatirali da za $l' > l_0$ ovaj theta lift reprezentacije π_{00} nije temperiran.

Pretpostavimo sada da $\Theta_{l'}(\tau_j)$ nema generičkih subkvocijenata. Znamo da vrijedi

$$\chi_W \mathrm{St}_{l'} \rtimes \tau_j \cong \tau_{j+1},$$

pa istim računom kao u dokazu korolara 2.9 dolazimo do zaključka da su svi ireducibilni subkvocijenti reprezentacije $\Theta_{l'}(\tau_{j+1})$ ujedno i subkvocijenti jedne od sljedećih reprezentacija:

1) $\chi_V \mathrm{St}_{l'} \rtimes \Theta_{l'}(\tau_j)$;
2) $\chi_V \delta([|\cdot|^{\frac{1-l'}{2}}, |\cdot|^{\frac{l'-3}{2}}]) \rtimes \Theta_{l'-2}(\tau_j)$.

Po induktivnoj pretpostavci, reprezentacija $\Theta_{l'}(\tau_j)$ nema generičkih subkvcijenata, stoga ih ni cijela reprezentacija u (1) ne može imati.

S druge strane, nije teško pokazati da je reprezentacija $\Theta_{l'-2}(\tau_j)$ ireducibilna. Osim toga, mora vrijediti $\theta_{l'}(\tau_j) \neq 0$ (inače bi slijedilo i $\theta_{l'}(\tau_{j+1}) = 0$). Zaključujemo da je $\Theta_{l'-2}(\tau_j) = \theta_{l'-2}(\tau_j)$ subkvocijent reprezentacije $\chi_V|\cdot|^{\frac{1-l'}{2}} \rtimes \theta_{l'}(\tau_j)$. Zbog toga su svi ireducibilni subkvocijenti reprezentacije u (2) ujedno i subkvocijenti reprezentacije

$$\chi_V \delta([|\cdot|^{\frac{1-l'}{2}}, |\cdot|^{\frac{l'-3}{2}}]) \times \chi_V |\cdot|^{\frac{1-l'}{2}} \rtimes \theta_{l'}(\tau_j).$$

Kako po induktivnoj pretpostavci $\theta_{l'}(\tau_j)$ nije generička, zaključujemo da ni gornja reprezentacija ne može imati generičkih subkvocijenata.

Primijetimo da se u svim slučajevima dokaz svodi na činjenicu da bi reprezentacija $\Theta_{l'}(\tau_d)$ trebala (a ne može) biti izomorfna s π_{00}; zbog toga isti dokaz možemo provesti i kada se $\chi_V \Delta''$ pojavljuje. □

Ovime je završen dokaz propozicije 4.7: pokazali smo da vrijedi $l' = l_0$, to jest da je subkvocijent koji sudjeluje u epimorfizmu (1) jednak upravo $\theta_{-l}(\pi_{00})$. Imamo, dakle,

$$\chi_W \delta_r \nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_W \delta_1 \nu^{s_1} \times \chi_W \Delta \rtimes \theta_{-l}(\pi_{00}) \twoheadrightarrow \sigma. \tag{2}$$

□

Do sada naša razmatranja o višim liftovima nisu ovisila o tome je li π reprezentacija simplektičke ili metaplektičke grupe. U nastavku proučavamo ova dva slučaja zasebno.

4.3 Slučajevi za $\pi \in \mathrm{Irr}(Sp(W_n))$

Prije nego što nastavimo s određivanjem standardnog modula reprezentacije $\theta_{-l}(\pi)$, vratimo se na trenutak na epimorfizam (0). U procesu određivanja standardnog modula, pokazat ćemo da je subkvocijent reprezentacije $\Theta_{-l}(\pi_0)$ koji sudjeluje u tom epimorfizmu jednak upravo $\theta_{-l}(\pi_0)$. Izgled theta lifta $\theta_{-l}(\pi_0)$ u potpunosti je određen u člancima [28] i [2]; budući da će biti korisni u računima koji slijede, podsjećamo na odgovarajuće rezultate u sljedećoj napomeni. U cijelom odjeljku fiksiramo oznaku $r = \frac{l-1}{2}$.

Napomena 4.13 Neka je π_0 generička temperirana reprezentacija simplektičke grupe s parametrom ϕ te neka je $l > 1$ neparan.

(i) Ako je kratnost $m_\phi(\chi_V)$ parna, imamo dva podslučaja:

- ako χ_V nije u temperiranom nosaču reprezentacije π_0, onda je na oba tornja (temperirana) reprezentacija $\theta_{-1}(\pi_0)$ prvo pojavljivanje reprezentacije π_0. Za $l > 1$ imamo standardnu reprezentaciju

$$\chi_W|\cdot|^r \times \cdots \times \chi_W|\cdot|^1 \rtimes \theta_{-1}(\pi_0) \twoheadrightarrow \theta_{-l}(\pi_0).$$

- ako se χ_V pojavljuje h puta u temperiranom nosaču reprezentacije π_0, onda na donjem tornju imamo

$$\chi_W|\cdot|^r \times \cdots \times \chi_W|\cdot|^1 \rtimes \theta_{-1}(\pi_0) \twoheadrightarrow \theta_{-l}(\pi_0).$$

  dok na gornjem tornju vrijedi

$$\chi_W|\cdot|^r \times \cdots \times \chi_W|\cdot|^2 \times \chi_W \mathrm{St}_2\nu^{\frac{1}{2}} \times (\chi_W, h-1) \rtimes \theta_{-1}(\pi_0') \twoheadrightarrow \theta_{-l}(\pi_0).$$

  Ovdje je π_0' (jedinstvena) ireducibilna temperirana reprezentacija takva da vrijedi $\pi_0 \hookrightarrow (\chi_V, h) \rtimes \pi_0'$.

(ii) Ako je kratnost $m_\phi(\chi_V)$ neparna, na donjem je tornju reprezentacija $\theta_{-1}(\pi_0)$ temperirana te imamo

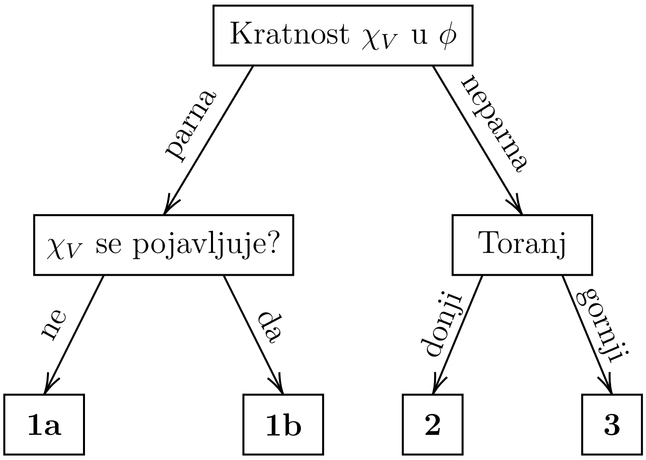
$$\chi_W|\cdot|^r \times \cdots \times \chi_W|\cdot|^1 \rtimes \theta_{-1}(\pi_0) \twoheadrightarrow \theta_{-l}(\pi_0).$$

(iii) Ako je kratnost $m_\phi(\chi_V)$ neparna, na gornjem je tornju reprezentacija $\theta_{-3}(\pi_0)$ temperirana i vrijedi

$$\chi_W|\cdot|^r \times \cdots \times \chi_W|\cdot|^2 \rtimes \theta_{-3}(\pi_0) \twoheadrightarrow \theta_{-l}(\pi_0).$$

Vratimo se sada na epimorfizam (2). Određujemo standardni modul reprezentacije $\sigma = \theta_{-l}(\pi)$; imamo nekoliko slučajeva u ovisnosti o izgledu parametra reprezentacije π_0, te ih odvajamo na način prikazan u sljedećem dijagramu:

Dijagram 1: podjela na slučajeve za $\pi \in \mathrm{Irr}(Sp(W_n))$.



Slučaj 1a: $m_\phi(\chi_V) = 0$
U ovom je slučaju na oba tornja $\theta_{-l}(\pi_{00})$ Langlandsov kvocijent reprezentacije

$$\chi_W|\cdot|^r \times \cdots \times \chi_W|\cdot|^1 \rtimes \theta_{-1}(\pi_{00}).$$

Odavde također slijedi da je $\theta_{-l}(\pi_{00})$ jedinstveni kvocijent reprezentacije

$$\chi_W(1,r) \rtimes \theta_{-1}(\pi_{00}).$$

Zbog toga iz epimorfizma (2) dobivamo

$$\chi_W\delta_r\nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_W\delta_1\nu^{s_1} \times \chi_W\Delta \times \chi_W(1,r) \rtimes \theta_{-1}(\pi_{00}) \twoheadrightarrow \sigma.$$

Sada koristimo lemu 4.1: reprezentacija $\chi_W(1,r)$ može zamijeniti mjesto sa svim reprezentacijama diskretne serije δ_i' koje sudjeluju u produktu Δ. Zbog toga imamo

$$\chi_W\delta_r\nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_W\delta_1\nu^{s_1} \times \chi_W(1,r) \times \chi_W\Delta \rtimes \theta_{-1}(\pi_{00}) \twoheadrightarrow \sigma. \tag{3.1}$$

Konačno, vidimo da postoji ireducibilni subkvocijent τ reprezentacije $\chi_W\Delta \rtimes \theta_{-1}(\pi_{00})$ takav da vrijedi

$$\chi_W\delta_r\nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_W\delta_1\nu^{s_1} \times \chi_W(1,r) \rtimes \tau \twoheadrightarrow \sigma. \tag{4.1}$$

Uočimo da je reprezentacija τ temperirana, jer je $\theta_{-1}(\pi_{00})$ temperirana (štoviše, u ovom slučaju se radi o reprezentaciji diskretne serije), kao i svi subkvocijenti reprezentacije Δ.

Sada tvrdimo:

Lema 4.14 Reprezentacija na lijevoj strani gornjeg epimorfizma posjeduje jedinstveni ireducibilni kvocijent.

Dokaz. Pokazat ćemo da je promatrana reprezentacija kvocijent neke standardne reprezentacije, stoga i sama mora imati jedinstveni ireducibilni kvocijent. Koristimo lemu 4.1. Neka je $[\rho\nu^c, \rho\nu^d]$ segment kojim je definirana reprezentacija $\delta_1\nu^{s_1}$ (posebno, vrijedi $s_1 = \frac{c+d}{2}$). Pretpostavimo da je reprezentacija ρ jednaka trivijalnom karakteru $\mathbb{1}$ grupe $\mathrm{GL}_1(\mathbb{F}) = \mathbb{F}^\times$ te da su c i d cijeli brojevi[4].

Ako je $s_1 \geqslant r$, onda smo gotovi: naime, reprezentacija je tada očito kvocijent standardne reprezentacije

$$\chi_W\delta_r\nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_W\delta_1\nu^{s_1} \times \chi_W|\cdot|^r \times \cdots \chi_W|\cdot|^1 \rtimes \tau,$$

stoga ima jedinstveni ireducibilni kvocijent.

Ako je $s_1 < r$, možemo sa s označiti najmanji broj u skupu $\{1, \dots, r\}$ veći od ili jednak s_1. Tada je reprezentacija $(1, r)$ kvocijent reprezentacije $(s, r) \times (1, s-1)$ (uočimo, segment $[1, s-1]$ može biti prazan, no to nam ovdje ne smeta).

Sada je ključno uočiti da vrijedi $s \leqslant d$. U suprotnom, budući da je d cijeli broj, imali bismo $s \geqslant d + 1 \geqslant s_1 + 1$ što je kontradikcija s minimalnošću broja s.

Napomena 4.15 Drugim riječima, za s koji smo izabrali mora vrijediti $s - s_1 < 1$. Ovo možemo postići jer s biramo iz skupa $\{1, \dots, r\}$, dok je $s_1 = \frac{c+d}{2} > 0$ sigurno polucijeli broj veći od ili jednak $\frac{1}{2}$.

Ovo naglašavamo jer će se u kasnijim slučajevima događati iznimke koje ćemo morati tretirati posebno.

Zaključili smo da vrijedi $c \leqslant s \leqslant d$, stoga se nalazimo unutar uvjeta leme 4.1 (ako je $r > d$) ili napomene 4.3 (ako je $r \leqslant d$). U svakom slučaju, reprezentacija $\delta_1\nu^{s_1} \times (s, r)$ je ireducibilna pa zaključujemo da je izomorfna reprezentaciji $(s, r) \times \delta_1\nu^{s_1}$. Prema tome, reprezentacija

$$\chi_W\delta_r\nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_W\delta_1\nu^{s_1} \times \chi_W(1, r) \rtimes \tau$$

je kvocijent reprezentacije

$$\chi_W\delta_r\nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_W\delta_2\nu^{s_2} \times \chi_W(s, r) \times \chi_W\delta_1\nu^{s_1} \times \chi_W|\cdot|^{s-1} \times \cdots \times \chi_W|\cdot|^1 \rtimes \tau.$$

Sada induktivno nastavljamo postupak, počevši od reprezentacija $\chi_W\delta_2\nu^{s_2}$ i $\chi_W(s, r)$.

Jedini detalj koji treba provjeriti da bismo induktivni korak napravili na isti način je opservacija iz prethodne napomene. Budući da vrijedi $s_2 \geqslant s_1$, a s je bio najmanji cijeli broj veći ili jednak s_1, i u ovom koraku će biti ispunjeni uvjeti željeni uvjeti: ako s s'

[4] Ako jedan od ovih uvjeta nije ispunjen, argument će izgledati isto, osim što neće biti potrebna primjena leme 4.1.

označimo najmanji broj iz skupa $\{s, \ldots, r\}$ veći od ili jednak s_2, imat ćemo $s' - s_2 < 1$. Prema tome, doista ćemo moći napraviti induktivni korak.

Očito je da ćemo nakon konačnog broja ovakvih koraka doći do standardne reprezentacije. Prema tome, pokazali smo da je naša reprezentacija kvocijent standardne reprezentacije, stoga mora imati jedinstveni ireducibilan kvocijent. $\square$

Uočimo da smo prethodnom lemom odredili izgled standardnog modula za reprezentaciju σ: potrebno je jednostavno rasporediti reprezentacije $\chi_W|\cdot|^r, \ldots, \chi_W|\cdot|^1$ među $\chi_W\delta_r\nu^{s_r}, \ldots, \chi_W\delta_1\nu^{s_1}$ tako da dobijemo eksponente u padajućem poretku. Jedino što preostaje je odrediti temperirani dio standardnog modula, to jest reprezentaciju τ.

Pokazali smo da reprezentacija $\chi_W\delta_r\nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_W\delta_1\nu^{s_1} \times \chi_W(1,r) \rtimes \tau$ iz epimorfizma (4.1) ima jedinstveni ireducibilni kvocijent. Prema tome, vrijedi

$$\chi_W\delta_r\nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_W\delta_1\nu^{s_1} \rtimes \tau' \twoheadrightarrow \sigma$$

pri čemu je τ' jedinstveni ireducibilni kvocijent reprezentacije $\chi_W(1,r) \rtimes \tau$ (to jest, Langlandsov kvocijent od $\chi_W|\cdot|^r \times \cdots \times \chi_W|\cdot|^1 \rtimes \tau$).

Sada je bitno uočiti sljedeću činjenicu:

Lema 4.16 Reprezentacija τ' je subkvocijent reprezentacije $\Theta_{-l}(\pi_0)$.

Ovakvu ćemo opservaciju koristiti i u svim ostalim slučajevima, stoga ju sada detaljno argumentiramo:

Dokaz. Promatramo epimorfizme (0), (1), (2), (3.1) i (4.1). Uvedimo oznaku $\Pi = \delta_r\nu^{s_r} \times \cdots \times \delta_1\nu^{s_1}$ i krenimo od epimorfizma (0). Znamo da postoji neki ireducibilni subkvocijent reprezentacije $\Theta_{-l}(\pi_0)$ koji sudjeluje u tom epimorfizmu.

Iz (0) dolazimo do (1) tako da pomoću korolara (2.8) uočimo da postoji epimorfizam

$$\chi_W\Delta \rtimes \Theta_{-l}(\pi_{00}) \twoheadrightarrow \Theta_{-l}(\pi_0).$$

Neka je A jezgra ovog preslikavanja. Sada koristimo egzaktnost indukcije da bismo gornji epimorfizam podigli do epimorfizma (1), koji se faktorizira kao

$$\chi_W\Pi \times \chi_W\Delta \rtimes \Theta_{-l}(\pi_{00}) \twoheadrightarrow \chi_W\Pi \rtimes \Theta_{-l}(\pi_0) \twoheadrightarrow \sigma.$$

Uočimo da je cijela reprezentacija $\chi_W\Pi \rtimes A$ sadržana u jezgri ovog epimorfizma; prema tome, koji god subkvocijent reprezentacije $\chi_W\Delta \rtimes \Theta_{-l}(\pi_{00})$ sudjeluje u (1), ne može se raditi o subkvocijentu reprezentacije A, već o subkvocijentu sadržanom u $\Theta_{-l}(\pi_0)$.

U dokazu propozicije 4.7 pokazujemo da niti jedan ireducibilni subkvocijent osim (jedinstvenog) kvocijenta reprezentacije $\Theta_{-l}(\pi_{00})$ ne može sudjelovati u epimorfizmu 1. Prema tome, ako s Θ^0 označimo jedinstvenu (pravu) maksimalnu podreprezentaciju od

$\Theta_{-l}(\pi_{00})$, vidimo da je reprezentacija $\Pi \times \chi_W \Delta \rtimes \Theta^0$ sadržana u jezgri epimorfizma (1). Time dolazimo do epimorfizma (2), a očito i dalje vrijedi isti zaključak kao maloprije: svaki ireducibilni subkvocijent reprezentacije $\chi_W \Delta \rtimes \theta_{-l}(\pi_{00})$ koji sudjeluje u (2) morao je doći iz $\Theta_{-l}(\pi_0)$.

Reprezentacija $\chi_W(1,r) \times \chi_W \Delta \rtimes \theta_{-1}(\pi_{00})$ koja se pojavljuje u (3.1) je kvocijent reprezentacije $\chi_W \Delta \rtimes \theta_{-l}(\pi_{00})$ koju imamo u (2), stoga i ovdje, baš kao u prijelazu s (0) na (1), dolazimo do istog zaključka: svaki ireducibilni subkvocijent reprezentacije $\chi_W(1,r) \times \chi_W \Delta \rtimes \theta_{-1}(\pi_{00})$ koji sudjeluje u (3.1) mora biti subkvocijent od $\chi_W \Delta \rtimes \theta_{-l}(\pi_{00})$ i sudjelovati u (2). Zbog toga mora biti i subkvocijent reprezentacije $\Theta_{-l}(\pi_0)$.

Budući da smo pronašli subkvocijent – to jest, τ' – reprezentacije $\chi_W(1,r) \times \chi_W \Delta \rtimes \theta_{-1}(\pi_{00})$ koji sudjeluje u (3.1), zaključujemo da je τ' subkvocijent reprezentacije $\Theta_{-l}(\pi_0)$. $\square$

Konačno, preostaje pokazati da vrijedi

Lema 4.17 Jedini subkvocijent reprezentacije $\Theta_{-l}(\pi_0)$ čiji standardni modul ima oblik $\chi_W|\cdot|^r \times \cdots \times \chi_W|\cdot|^1 \rtimes \tau$ jednak je upravo $\theta_{-l}(\pi_0)$.

Dokaz. Neka je τ' subkvocijent reprezentacije $\Theta_{-l}(\pi_0)$ takav da vrijedi

$$\chi_W|\cdot|^r \times \cdots \times \chi_W|\cdot|^1 \rtimes \tau \twoheadrightarrow \tau'$$

za neku temperiranu reprezentaciju τ. Označimo s τ_1 Langlandsov kvocijent reprezentacije $\chi_W|\cdot|^{r-1} \times \cdots \times \chi_W|\cdot|^1 \rtimes \tau$, tako da imamo $\chi_W|\cdot|^r \rtimes \tau_1 \twoheadrightarrow \tau'$, odnosno $\tau' \hookrightarrow \chi_W|\cdot|^{-r} \rtimes \tau_1$.

Sada koristimo Kudlinu filtraciju kao na kraju dokaza leme 3.8: imamo $\mathrm{Hom}(\tau', \chi_W|\cdot|^{-r} \rtimes \tau_1) \neq 0$ pa koristeći Frobeniusov reciprocitet zaključujemo $\mathrm{Hom}(R_{P_1'}(\tau'), \chi_W|\cdot|^{-r} \otimes \tau_1) \neq 0$, pri čemu smo s P_1' označili odgovarajuću standardnu maksimalnu paraboličku podgrupu ortogonalne grupe. Drugim riječima, $\chi_W|\cdot|^{-r} \otimes \tau_1$ je kvocijent reprezentacije $R_{P_1'}(\tau')_{\chi_W|\cdot|^{-r}}$, a zbog toga je ujedno i subkvocijent reprezentacije $R_{P_1'}(\Theta_{-l}(\pi_0))_{\chi_W|\cdot|^{-r}}$.

S druge strane, $\pi_0 \otimes R_{P_1'}(\Theta_{-l}(\pi_0))_{\chi_W|\cdot|^{-r}}$ je očito kvocijent reprezentacije $R_{P_1'}(\omega_{m_0,n_0})$ – ovdje je n_0 definiran s $\pi_0 \in \mathrm{Irr}(\mathrm{Sp}(W_{n_0}))$, $m_0 = n_0 + 1 + l$, a ω_{m_0,n_0} je odgovarajuća Weilova reprezentacija. Sjetimo se i da vrijedi $r = \frac{l-1}{2}$. Kudlina filtracija za $R_{P_1'}(\omega_{m_0,n_0})$ je

$$\begin{aligned} J^0 &= \chi_W|\cdot|^{-r} \otimes \omega_{m_0-2,n_0} \quad \text{(kvocijent)} \\ J^1 &= \mathrm{Ind}(\Sigma_1 \otimes \omega_{m_0-2,n_0-2}) \quad \text{(podreprezentacija).} \end{aligned}$$

Sada nije teško pokazati da je J^1 ne sudjeluje u epimorfizmu $R_{P_1'}(\omega_{m_0,n_0}) \twoheadrightarrow \pi_0 \otimes R_{P_1'}(\Theta_{-l}(\pi_0))_{\chi_W|\cdot|^{-r}}$. Naime, u suprotnom bismo primjenom drugog Frobeniusovog reciprociteta dobili da $R_{\overline{P}_1}(\pi_0)$ (gdje smo s $\overline{P}_1$ označili suprotnu paraboličku podgrupu) ima kvocijent oblika $|\cdot|^r \otimes \pi_1$. Budući da je π_0 temperirana, a $r > 0$, Casselmanov kriterij pokazuje da ovo nije moguće.

Odavde zaključujemo da je $\pi_0 \otimes R_{P_1'}(\Theta_{-l}(\pi_0))_{\chi_W|\cdot|^{-r}}$ kvocijent reprezentacije J^0, odakle lako slijedi da je τ_1 subkvocijent od $\Theta_{2-l}(\pi_0)$.

Induktivnim ponavljanjem ovog argumenta dolazimo do zaključka da je reprezentacija τ subkvocijent reprezentacije $\Theta_{-1}(\pi_0)$, no ona je ireducibilna, stoga imamo $\tau = \Theta_{-1}(\pi_0) = \theta_{-1}(\pi_0)$. Prema tome, pokazali smo da je τ' Langlandsov kvocijent reprezentacije

$$\chi_W|\cdot|^r \times \cdots \times \chi_W|\cdot|^1 \rtimes \theta_{-1}(\pi_0).$$

Prema napomeni 4.13 (i), odavde slijedi $\tau' = \theta_{-l}(\pi_0)$. □

Ovime je završen slučaj (1a). Rezimirajmo: pokazali smo da vrijedi

$$\chi_W \Pi \rtimes \theta_{-l}(\pi_0) \twoheadrightarrow \theta_{-l}(\pi),$$

te smo odredili i standardnu reprezentaciju za $\theta_{-l}(\pi)$:

$$\theta_{-l}(\pi) = L(\chi_W\delta_r\nu^{s_r}, \ldots, \chi_W\delta_1\nu^{s_1}, \chi_W|\cdot|^r, \ldots, \chi_W|\cdot|^1; \theta_{-1}(\pi_0)).$$

Slučaj 1b: $m_\phi(\chi_V) = 2h > 0$

I u ovom je slučaju na oba tornja $\theta_{-l}(\pi_{00})$ Langlandsov kvocijent reprezentacije

$$\chi_W|\cdot|^r \times \cdots \times \chi_W|\cdot|^1 \rtimes \theta_{-1}(\pi_{00}).$$

to jest, jedinstveni kvocijent reprezentacije

$$\chi_W(1, r) \rtimes \theta_{-1}(\pi_{00}).$$

Zbog toga iz epimorfizma (2) opet dobivamo

$$\chi_W\delta_r\nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_W\delta_1\nu^{s_1} \times \chi_W\Delta \times \chi_W(1, r) \rtimes \theta_{-1}(\pi_{00}) \twoheadrightarrow \sigma.$$

Razlika u odnosu na prethodni slučaj je što π_0 sadrži χ_V u temperiranom nosaču; ekvivalentno, među reprezentacijama koje sudjeluju u definiciji Δ nalazi se i trivijalni karakter grupe $GL_1(\mathbb{F})$, i to h puta jer smo pretpostavili $m_\phi(\chi_V) = 2h$. Zbog toga možemo pisati $\chi_W\Delta = (\chi_W, h) \times \chi_W\Delta'$ (za odgovarajuću reprezentaciju Δ' induciranu iz reprezentacija diskretne serije).

Koristeći lemu 4.1, odnosno napomenu 4.3, možemo premjestiti reprezentaciju $\chi_W(1, r)$ i umjesto gornjeg epimorfizma pisati

$$\chi_W\delta_r\nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_W\delta_1\nu^{s_1} \times (\chi_W, h) \times \chi_W(1, r) \times \chi_W\Delta' \rtimes \theta_{-1}(\pi_{00}) \twoheadrightarrow \sigma.$$

Ovdje se situacija komplicira u odnosu na prethodni slučaj: prema napomeni 4.4, reprezentacija $(\chi_W, h) \times \chi_W(1,r)$ se reducira. Znamo da reprezentacija $\mathbb{1} \times (1,r)$ ima dva ireducibilna subkvocijenta; prema napomeni 4.4 to su

(i) $(0,r)$;

(ii) $L =$(jedinstveni) kvocijent od $(2,r) \times \mathrm{St}_2\nu^{\frac{1}{2}}$.

Odavde lako slijedi da iz gornjeg epimorfizma imamo grananje u dva moguća slučaja, prema tome koji subkvocijent reprezentacije $(\chi_W, h) \times \chi_W(1,r)$ sudjeluje u epimorfizmu:

(i) $\chi_W\delta_r\nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_W\delta_1\nu^{s_1} \times \chi_W(1,r) \times (\chi_W, h) \times \chi_W\Delta' \rtimes \theta_{-1}(\pi_{00}) \twoheadrightarrow \sigma$;

(ii) $\chi_W\delta_r\nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_W\delta_1\nu^{s_1} \times \chi_W L \times (\chi_W, h-1) \times \chi_W\Delta' \rtimes \theta_{-1}(\pi_{00}) \twoheadrightarrow \sigma$.

U oba slučaja možemo specificirati ireducibilni subkvocijent temperiranog dijela:

(i) Postoji ireducibilni (i temperirani) subkvocijent τ_1 reprezentacije $(\chi_W, h) \times \chi_W\Delta' \rtimes \theta_{-1}(\pi_{00})$ takav da vrijedi

$$\chi_W\delta_r\nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_W\delta_1\nu^{s_1} \times \chi_W(1,r) \rtimes \tau_1 \twoheadrightarrow \sigma;$$

(ii) Postoji ireducibilni (i temperirani) subkvocijent τ_2 reprezentacije $(\chi_W, h-1) \times \chi_W\Delta' \rtimes \theta_{-1}(\pi_{00})$ takav da vrijedi

$$\chi_W\delta_r\nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_W\delta_1\nu^{s_1} \times \chi_W L \times \tau_2 \twoheadrightarrow \sigma.$$

Ako vrijedi (i), nastavljamo s dokazom kao u prethodnom slučaju (pomoću leme 4.14); na potpuno isti način zaključujemo da je subkvocijent reprezentacije $\Theta_{-l}(\pi_0)$ koji sudjeluje u epimorfizmu Langlandsov kvocijent reprezentacije

$$\chi_W|\cdot|^r \times \cdots \times \chi_W|\cdot|^1 \rtimes \tau_1.$$

Ako vrijedi (ii), možemo na isti način dovršiti dokaz, osim u jednom iznimnom slučaju. Naime, za bazu u induktivnom dokazu leme 4.14 ključna je bila pretpostavka da od segmenta $[1,r]$ možemo uzeti podsegment $[s,r]$ tako da se $\delta_1\nu^{s_1} \times (s,r)$ ne reducira – ključna je činjenica da za s vrijedi $s - s_1 < 1$. Sada, kada krećemo od segmenta $[2,r]$, možemo naići na situaciju u kojoj ovo ne vrijedi. Naime, moguće je da za gornji rub segmenta $[c,d]$ (koji definira reprezentaciju $\delta_1\nu^{s_1}$) vrijedi $d = 1$. U tom je slučaju $s_1 \leqslant 1$ pa dobivamo $s = 2$, no sada je reprezentacija $\delta_1\nu^{s_1} \times (s,r) = \delta([c,1]) \times (2,r)$ reducibilna, stoga ne možemo napraviti zamjenu poretka.

Uočimo da se gore opisana situacija javlja samo za $d = 1$; budući da mora biti $c+d > 0$, jedine su mogućnosti $[c,d] = [0,1]$ i $[c,d] = [1]$, odnosno, $\delta_1\nu^{s_1} = \mathrm{St}_2\nu^{\frac{1}{2}}$ i $\delta_1\nu^{s_1} = |\cdot|^1$.

Mogućnost $\delta_1\nu^{s_1} = |\cdot|^1$ možemo odmah eliminirati: budući da se χ_V nalazi u temperiranom nosaču reprezentacije π_0, a $\chi_V|\cdot|^1 \times \chi_V$ se reducira, koristeći [27, lema 2.1 i 2.2] dobivamo da se standardni modul za π reducira ako se u njemu javlja $\chi_V|\cdot|^1$. Budući da je π generička, ovo nije moguće.

Mogućnost $\delta_1\nu^{s_1} = \mathrm{St}_2\nu^{\frac{1}{2}}$ ne možemo eliminirati tako lako. S druge strane, primijetimo da se $\chi_V\mathrm{St}_2\nu^{\frac{1}{2}}$ može u standardnom modulu za π pojaviti najviše jednom; u suprotnom bismo opet, zbog činjenice da se $\mathrm{St}_2\nu^{\frac{1}{2}} \times \mathrm{St}_2\nu^{-\frac{1}{2}}$ reducira, mogli zaključiti da se standardni modul za π reducira ([27, str. 134]).

Pretpostavimo, dakle, da vrijedi (ii) te da je $\delta_1\nu^{s_1} = \mathrm{St}_2\nu^{\frac{1}{2}}$. Tada imamo

$$\chi_W\delta_r\nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_W\delta_2\nu^{s_2} \times \chi_W\mathrm{St}_2\nu^{\frac{1}{2}} \times \chi_W L \rtimes \tau_2 \twoheadrightarrow \sigma.$$

Lema 4.5 pokazuje da je reprezentacija $\chi_W\mathrm{St}_2\nu^{\frac{1}{2}} \times \chi_W L$ ireducibilna. Zbog toga umjesto $\chi_W\mathrm{St}_2\nu^{\frac{1}{2}} \times \chi_W L$ možemo pisati $\chi_W L \times \chi_W\mathrm{St}_2\nu^{\frac{1}{2}}$ pa dobivamo

$$\chi_W\delta_r\nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_W\delta_2\nu^{s_2} \times \chi_W(2,r) \times \chi_W\mathrm{St}_2\nu^{\frac{1}{2}} \times \chi_W\mathrm{St}_2\nu^{\frac{1}{2}} \rtimes \tau_2 \twoheadrightarrow \sigma.$$

Sada nastavljamo dokaz kao u lemi 4.14: pokazali smo da segmenti koji definiraju preostale reprezentacije $\delta_2\nu^{s_2}, \ldots, \delta_r\nu^{s_r}$ ne mogu imati gornji rub jednak $|\cdot|^1$, stoga će uvjet iz napomene 4.15 biti ispunjen te ćemo moći provesti algoritam kao u dokazu leme. Time smo i u ovom iznimnom slučaju pokazali da reprezentacija na lijevoj strani epimorfizma (ii) ima jedinstven kvocijent.

I ovdje možemo primijeniti argumentaciju kao u lemi 4.16. Time smo mogućnosti (i) i (ii) doveli do sljedećeg zaključka: subkvocijent reprezentacije $\Theta_{-l}(\pi_0)$ koji sudjeluje u epimorfizmu (0) ima standardni modul oblika

(i) $\chi_W|\cdot|^r \times \cdots \times \chi_W|\cdot|^1 \rtimes \tau_1$; ili

(ii) $\chi_W|\cdot|^r \times \cdots \times \chi_W|\cdot|^2 \times \chi_W\mathrm{St}_2\nu^{\frac{1}{2}} \rtimes \tau_2$.

Preostaje odrediti vrijedi li (i) ili (ii), te kako izgledaju τ_1, odnosno τ_2. Postupamo kao u lemi 4.17; nakon odgovarajućeg broja koraka dolazimo do sljedećih zaključaka:

- ako vrijedi (i), onda je (jedinstveni) kvocijent reprezentacije $\chi_W|\cdot|^1 \rtimes \tau_1$ izomorfan nekom subkvocijentu od $\Theta_{-3}(\pi_0)$;

- ako vrijedi (ii), onda je (jedinstveni) kvocijent reprezentacije $\chi_W\mathrm{St}_2\nu^{\frac{1}{2}} \rtimes \tau_2$ izomorfan nekom subkvocijentu od $\Theta_{-3}(\pi_0)$.

Pokazat ćemo da (i) vrijedi za liftove na donji toranj, a (ii) za liftove na gornji toranj.

Sjetimo se da vrijedi $m_\phi(\chi_V) = 2h$, to jest da se χ_V pojavljuje h puta u temperiranom nosaču reprezentacije π_0. To znači da postoji ireducibilna temperirana reprezentacija π_0'

čiji parametar ne sadrži χ_V, takva da vrijedi

$$\pi_0 \hookrightarrow (\chi_V, h) \rtimes \pi_0'.$$

Znamo da je ova reprezentacija potpuno reducibilna; budući da χ_V nije u parametru reprezentacije π_0', zaključujemo da je reducibilna, te da ima točno dva direktna sumanda. Jedan od njih je π_0, a drugi nazovimo π_1. Uočimo da vrijedi

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}(\omega, (\chi_V, h) \rtimes \pi_0')_\infty &= \mathrm{Hom}(\omega, \pi_0)_\infty \oplus \mathrm{Hom}(\omega, \pi_1)_\infty \\ &= \Theta^\vee_{l=-3}(\pi_0) \oplus \Theta^\vee_{l=-3}(\pi_1).\end{aligned}$$

S druge strane, već uobičajenom primjenom Kudline filtracije (kao u korolaru 2.8) dobivamo

$$\mathrm{Hom}(\omega, (\chi_V, h) \rtimes \pi_0')_\infty \hookrightarrow (\chi_W, h) \rtimes \Theta^\vee_{l=-3}(\pi_0')$$

pa uzimanjem kontragredijenta slijedi

$$(\chi_W, h) \rtimes \Theta_{l=-3}(\pi_0') \twoheadrightarrow \Theta_{l=-3}(\pi_0) \oplus \Theta_{l=-3}(\pi_1).$$

Mi tražimo netemperirane kvocijente reprezentacije $\Theta_{-3}(\pi_0)$. Uočimo da se sada nalazimo u istoj situaciji kao u lemi 3.8. Prema tome, zaključujemo da su svi subkvocijenti reprezentacije $\Theta_{l=-3}(\pi_0')$ osim $\theta_{-3}(\pi_0) = L(\chi_W|\cdot| \rtimes \theta_{-1}(\pi_0'))$ temperirani. Odavde slijedi da su svi netemperirani ireducibilni subkvocijenti u $\Theta_{l=-3}(\pi_0) \oplus \Theta_{l=-3}(\pi_1)$ ujedno i subkvocijenti reprezentacije $(\chi_W, h) \times \chi_W|\cdot| \rtimes \Theta_{l=-1}(\pi_0')$, odnosno reprezentacije

$$A = \chi_W|\cdot| \times (\chi_W, h) \rtimes \Theta_{l=-1}(\pi_0').$$

Kao u lemi 3.8, reprezentacija $\Theta_{l=-1}(\pi_0')$ je ireducibilna i temperirana, te sadrži χ_W u parametru, stoga je i $B = (\chi_W, h) \rtimes \Theta_{l=-1}(\pi_0')$ ireducibilna i temperirana. Sada lako vidimo da vrijedi

Lema 4.18

a) Reprezentacija $\chi_W|\cdot| \rtimes B$ sadrži samo jedan netemperirani subkvocijent čiji je standardni modul oblika $\chi_W|\cdot| \rtimes \tau_1$.

b) Reprezentacija $\chi_W|\cdot| \rtimes B$ sadrži samo jedan netemperirani subkvocijent čiji je standardni modul oblika $\chi_W \mathrm{St}_2 \nu^{\frac{1}{2}} \rtimes \tau_2$.

Dokaz. Dokaz se sastoji od jednostavnog računa sa Jacquetovim modulima i primjene Casselmanovog kriterija.

a) Neka je C subkvocijent čiji je standardni modul oblika $\chi_W|\cdot| \rtimes \tau_1$. Tada vrijedi $C \hookrightarrow \chi_W|\cdot|^{-1} \rtimes \tau_1$ pa imamo i $R_{P_1}(C) \twoheadrightarrow \chi_W|\cdot|^{-1} \otimes \tau_1$. Posebno, vrijedi $R_{P_1}(C)_{\chi_W|\cdot|^{-1}} \neq 0$.

S druge strane, možemo računati $R_{P_1}(\chi_W|\cdot| \rtimes B)$; koristimo formulu $\mu^*(\chi_W|\cdot| \rtimes B) = M^*(\chi_W|\cdot|) \rtimes \mu^*(B)$ (sekcija 1.4.2). Budući da je B temperirana, prema Casselmanovom kriteriju vrijedi $R_{P_1}(B)_{\chi_W|\cdot|^{-1}} = 0$ pa vidimo da je jedini ireducibilni subkvocijent koji se nalazi u $R_{P_1}(\chi_W|\cdot| \rtimes B)_{\chi_W|\cdot|^{-1}}$ jednak upravo $\chi_W|\cdot|^{-1} \otimes B$. Odavde slijedi tvrdnja.

b) Ovdje postupamo na sličan način: ako je C subkvocijent sa standardnim modulom oblika $\chi_W \mathrm{St}_2 \nu^{\frac{1}{2}} \rtimes \tau_2$, onda lako vidimo da Jacquetov modul $R_{P_{1,1}}(C)$ sadrži subkvocijent oblika $\chi_W \otimes \chi_W|\cdot|^{-1} \otimes \tau_2$. Sada iskoristimo temperiranost reprezentacije $(\chi_W, h-1) \rtimes \Theta_{l=-1}(\pi_0')$ i gornju formulu za μ^* pa vidimo da je jedini ireducibilni subkvocijent ovog oblika u (semisimplifikaciji reprezentacije) $R_{P_{1,1}}(\chi_W|\cdot| \rtimes B)$ jednak upravo $\chi_W \otimes \chi_W|\cdot|^{-1} \otimes (\chi_W, h-1) \rtimes \Theta_{l=-1}(\pi_0')$. Odavde slijedi i ovaj dio tvrdnje.

□

Usporedimo rezultat ove leme s napomenom 4.13: reprezentacija A očito sadrži subkvocijente $\theta_{-3}(\pi_0)$ i $\theta_{-3}(\pi_1)$, a u napomeni 4.13 vidimo da su njihovi standardni moduli upravo oni koje opisuje prethodna lema. Prema tome, to su ujedno i jedini subkvocijenti reprezentacije A koji imaju standardni modul traženog oblika. Budući da subkvocijent $\theta_{-3}(\pi_1)$ ne pripada reprezentaciji $\Theta_{-3}(\pi_0)$, zaključujemo da je $\theta_{-3}(\pi_0)$ jedini subkvocijent reprezentacije $\Theta_{-3}(\pi_0)$ koji može imati standardni modul traženog oblika.

Štoviše, iz napomene 4.13 vidimo i sljedeće:

(i) Ako se radi o donjem tornju (u odnosu na π_0), onda je

$$\theta_{-3}(\pi_0) = L(\chi_W|\cdot| \rtimes \theta_{-1}(\pi_0)).$$

(ii) Ako se radi o gornjem tornju, onda je

$$\theta_{-3}(\pi_0) = L(\chi_W \mathrm{St}_2 \nu^{\frac{1}{2}} \rtimes ((\chi_W, h-1) \rtimes \theta_{-1}(\pi_0'))).$$

U oba slučaja je $\theta_{-l}(\pi_0)$ kvocijent reprezentacije $\chi_W|\cdot|^r \times \cdots \times \chi_W|\cdot|^2 \rtimes \theta_{-3}(\pi_0)$. Vratimo li se sada na mogućnosti (i) i (ii) prije leme 4.18, vidimo da ovo pokazuje sljedeće: i na gornjem i na donjem tornju vrijedi

$$\chi_W \delta_r \nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_W \delta_1 \nu^{s_1} \rtimes \theta_{-l}(\pi_0) \twoheadrightarrow \theta_{-l}(\pi).$$

Nadalje, argumentacija (koju smo već proveli) kao u lemi 4.14 pokazuje da standardni modul za reprezentaciju $\theta_{-l}(\pi)$ dobivamo tako da reprezentacijama koje se pojavljuju u standardnom modulu za $\theta_{-l}(\pi_0)$ dodamo $\chi_W \delta_r \nu^{s_r}, \ldots, \chi_W \delta_1 \nu^{s_1}$ (i ispravno ih poredamo).

Slučaj 2: neparna kratnost $m_\phi(\chi_V)$, donji toranj

Ovaj je slučaj jednostavniji od prethodnog. Kao i u prethodna dva slučaja, imamo

$\chi_W(1,r) \rtimes \theta_{-1}(\pi_{00}) \twoheadrightarrow \theta_{-l}(\pi_{00})$, stoga iz epimorfizma (2) slijedi

$$\chi_W\delta_r\nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_W\delta_1\nu^{s_1} \times \chi_W\Delta \times \chi_W(1,r) \rtimes \theta_{-1}(\pi_{00}) \twoheadrightarrow \sigma.$$

U prethodnom su slučaju komplikacije nastale jer reprezentacija $\chi_W(1,r)$ nije mogla zamijeniti mjesta sa svim reprezentacijama koje sudjeluju u $\chi_W\Delta$ (problem je bio u reprezentaciji χ_W).

Razlika u odnosu na prethodni slučaj je sljedeća: budući da je kratnost reprezentacije χ_V u parametru ϕ sada neparna, zaključujemo da se χ_V pojavljuje i u parametru za π_{00}. Prema teoremu 2.16 sada vidimo da $\theta_{-1}(\pi_{00})$ nije reprezentacija diskretne serije, već temperirana reprezentacija u čijem se parametru χ_W pojavljuje dvostruko. Zaključujemo da postoji ireducibilna reprezentacija diskretne serije σ_{00} takva da vrijedi $\theta_{-1}(\pi_{00}) \hookrightarrow \chi_W \rtimes \sigma_{00}$ (štoviše, $\theta_{-1}(\pi_{00})$ je direktni sumand ove reprezentacije).

Sada nije teško vidjeti da $\theta_{-l}(\pi_{00})$, kao (jedinstveni) kvocijent reprezentacije $\chi_W(1,r) \rtimes \theta_{-1}(\pi_{00})$, mora biti kvocijent od

$$\chi_W(0,r) \rtimes \sigma_{00}.$$

U suprotnom napomena 4.4 pokazuje da je $\theta_{-l}(\pi_0)$ kvocijent reprezentacije $\chi_W|\cdot|^r \times \cdots \times \chi_W|\cdot|^2 \times \chi_W\mathrm{St}_2\nu^{\frac{1}{2}} \rtimes \sigma_{00}$, a ovo nije moguće zbog jedinstvenosti standardnog modula reprezentacije $\theta_{-l}(\pi_0)$.

Time dobivamo da iz epimorfizma (2) zapravo slijedi

$$\chi_W\delta_r\nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_W\delta_1\nu^{s_1} \times \chi_W\Delta \times \chi_W(0,r) \rtimes \sigma_{00} \twoheadrightarrow \sigma.$$

Ovo značajno pojednostavljuje razmatranje: za razliku od $\chi_W(1,r)$, reprezentacija $\chi_W(0,r)$ prema lemi 4.1 i napomeni 4.3 može zamijeniti mjesta sa svim reprezentacijama koje sudjeluju u definiciji $\chi_W\Delta$. Time dobivamo

$$\chi_W\delta_r\nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_W\delta_1\nu^{s_1} \times \chi_W(0,r) \times \chi_W\Delta \rtimes \sigma_{00} \twoheadrightarrow \sigma$$

to jest, budući da vrijedi $\chi_W(1,r) \times \chi_W \twoheadrightarrow \chi_W(0,r)$,

$$\chi_W\delta_r\nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_W\delta_1\nu^{s_1} \times \chi_W(1,r) \times \chi_W \times \chi_W\Delta \rtimes \sigma_{00} \twoheadrightarrow \sigma.$$

Zaključujemo da postoji ireducibilni (i očito temperirani) subkvocijent τ reprezentacije $\chi_W \times \chi_W\Delta \rtimes \sigma_{00}$ takav da vrijedi

$$\chi_W\delta_r\nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_W\delta_1\nu^{s_1} \times \chi_W(1,r) \rtimes \tau \twoheadrightarrow \sigma.$$

U ovom trenutku možemo nastaviti (i dovršiti) dokaz kao u slučaju **1a**; dobivamo analogni zaključak.

Slučaj 3: neparna kratnost $m_\phi(\chi_V)$, gornji toranj
U ovom slučaju vrijedi $\chi_W(2,r) \rtimes \theta_{-3}(\pi_{00}) \twoheadrightarrow \theta_{-l}(\pi_{00})$ pa epimorfizam (2) daje

$$\chi_W\delta_r\nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_W\delta_1\nu^{s_1} \times \chi_W\Delta \times \chi_W(2,r) \rtimes \theta_{-3}(\pi_{00}) \twoheadrightarrow \sigma.$$

Uočimo da (prema lemi 4.2 i napomeni 4.3) reprezentacija $\chi_W(2,r)$ može zamijeniti mjesta sa svim reprezentacijama koje sudjeluju u $\chi_W\Delta$, osim sa $\chi_W\mathrm{St}_3 = \chi_W\delta([|\cdot|^{-1},|\cdot|^1])$. Pretpostavimo zato najprije da se St_3 ne pojavljuje u Δ to jest, ekvivalentno, da π_0 nema $\chi_V\mathrm{St}_3$ u temperiranom nosaču.

Tada možemo pisati

$$\chi_W\delta_r\nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_W\delta_1\nu^{s_1} \times \chi_W(2,r) \times \chi_W\Delta \rtimes \theta_{-3}(\pi_{00}) \twoheadrightarrow \sigma.$$

Kako je $\theta_{-3}(\pi_{00})$ prvi lift diskretne serije na gornji toranj, radi se o temperiranoj reprezentaciji (propozicija 2.18), stoga su i svi ireducibilni subkvocijenti reprezentacije $\chi_W\Delta \rtimes \theta_{-3}(\pi_{00})$ temperirani. Zbog toga zaključujemo da postoji ireducibilna i temperirana reprezentacija τ – subkvocijent od $\chi_W\Delta \rtimes \theta_{-3}(\pi_{00})$ – takva da vrijedi

$$\chi_W\Pi \times \chi_W(2,r) \rtimes \tau \twoheadrightarrow \sigma,$$

gdje smo s Π označili reprezentaciju $\delta_r\nu^{s_r} \times \cdots \times \delta_1\nu^{s_1}$.

Želimo pokazati da je subkvocijent (označimo ga s A) reprezentacije $\chi_W(2,r) \rtimes \tau$ koji sudjeluje u gornjem epimorfizmu upravo (jedinstveni) kvocijent ove reprezentacije. U tu svrhu koristimo napomenu 4.6. Budući da je $(2,r)$ kvocijent reprezentacije $|\cdot|^r \times \cdots \times |\cdot|^2$, napomena 4.6 (točnije, algoritam za preslagivanje u standardni modul opisan u toj napomeni) primijenjena na gornji epimorfizam pokazuje da je unija kuspidalnih nosača svih GL-reprezentacija koje se pojavljuju u standardnom modulu reprezentacije σ jednaka

$$(\text{kuspidalni nosač od } \chi_W\Pi) \cup \{\chi_W|\cdot|^r, \dots, \chi_W|\cdot|^2\}.$$

Ponovna primjena iste napomene sada pokazuje kako GL-reprezentacije koje se pojavljuju u standardnom modulu za subkvocijent A odgovaraju međusobno disjunktnim segmentima koji u uniji daju $\{\chi_W|\cdot|^r, \dots, \chi_W|\cdot|^2\}$.

Lema 4.19 Jedini subkvocijent reprezentacije $\chi_W(2,r) \rtimes \tau$ koji zadovoljava ovo svojstvo je upravo njezin (jedinstveni) kvocijent.

Dokaz. Najprije uočimo da ovaj zahtjev implicira da sve GL-reprezentacije u standardnom modulu od A imaju oblik $\delta([a,b])$, pri čemu je $[a,b] \subseteq \{2,3,4,\dots,r\}$. Zbog toga u semisimplifikaciji Jacquetovog modula (s obzirom na odgovarajuću paraboličku podgrupu) mora postojati ireducibilni sumand oblika

$$\chi_W|\cdot|^{\alpha(r)} \otimes \cdots \otimes \chi_W|\cdot|^{\alpha(2)} \otimes \tau' \tag{$*$}$$

pri čemu je α neka permutacija skupa $\{2,\ldots,r\}$, a τ' neka ireducibilna reprezentacija. Budući da je τ temperirana, Casselmanov kriterij pokazuje da vrijedi $R_{P_1}(\tau)_{\chi_W|\cdot|^{-e}} = 0$ za svaki $e > 0$. Zbog toga τ ne može doprinijeti u $\chi_W|\cdot|^{\alpha(r)} \otimes \cdots \otimes \chi_W|\cdot|^{\alpha(2)}$, pa zaključujemo da je taj dio zapravo Jacquetov modul reprezentacije $\chi_W(2,r)$.

S druge strane, jednostavan račun s M^* (sekcija 1.4.2) pokazuje da je jedini subkvocijent koji možemo dobiti onaj koji odgovara trivijalnoj permutaciji α. Time smo pokazali da je jedini subkvocijent oblika ($*$) u Jacquetovom modulu reprezentacije $\chi_W(2,r) \rtimes \tau$ jednak

$$\chi_W|\cdot|^r \otimes \cdots \otimes \chi_W|\cdot|^2 \otimes \tau.$$

Budući da ovaj subkvocijent pripada kvocijentu reprezentacije $\chi_W(2,r) \rtimes \tau$, slijedi tvrdnja leme. $\square$

Ovime smo pokazali da je standardni modul subkvocijenta A oblika $\chi_W|\cdot|^r \times \cdots \times \chi_W|\cdot|^2 \rtimes \tau$. S druge strane, argumenti kao u lemi 4.16 pokazuju da je A subkvocijent reprezentacije $\Theta_{-l}(\pi_0)$. Konačno, na isti način kao u lemi 4.17 pokazujemo da je jedini subkvocijent reprezentacije $\Theta_{-l}(\pi_0)$ koji ima standardni modul ovog oblika nužno jednak $\theta_{-l}(\pi_0)$.

Time smo dokazali da vrijedi

$$\chi_W\Pi \rtimes \theta_{-l}(\pi_0) \twoheadrightarrow \theta_{-l}(\pi).$$

Ipak, ovime još nismo u potpunosti odredili reprezentaciju $\theta_{-l}(\pi)$: iz gornjeg epimorfizma ne možemo očitati njezin standardni modul dok ne znamo kako se $\chi_W(2,r)$ kombinira s $\chi_W\Pi$.

Pokazat ćemo da, kao i u dosadašnjim slučajevima, standardni modul za $\theta_{-l}(\pi)$ dobijemo tako da jednostavno ubacimo reprezentacije $\chi_W|\cdot|^r, \ldots, \chi_W|\cdot|^2$ na odgovarajuća mjesta između reprezentacija koje sudjeluju u $\chi_W\Pi$.

U prethodnim smo slučajevima ovakvu situaciju rješavali kao u lemi 4.14. Ovdje je problem sličan kao u slučaju **1b**: ako se u Π pojavljuje $|\cdot|$ ili $\mathrm{St}_2\nu^{\frac{1}{2}}$, onda nije zadovoljen uvjet iz napomene 4.15. Ukoliko se te reprezentacije ne pojavljuju u Π, onda slobodno možemo primijeniti postupak iz leme 4.14 i dobiti željenu tvrdnju.

Pretpostavimo stoga da se takve reprezentacije pojavljuju u Π. Možemo pisati $\Pi = \Pi' \times S$, gdje smo u S grupirali sve reprezentacije $|\cdot|$ i $\mathrm{St}_2\nu^{\frac{1}{2}}$.

Napomena 4.20 Ako se GL-reprezentacije δ_1 i δ_2 pojavljuju u standardnom modulu, onda reducibilnost reprezentacije $\delta_1 \times \delta_2^\vee$ povlači reducibilnost cijelog standardnog modula.

Posljedica ove činjenice je da se $\mathrm{St}_2\nu^{\frac{1}{2}}$ pojavljuje najviše jednom; također, $\mathrm{St}_2\nu^{\frac{1}{2}}$ i $|\cdot|$ ne mogu se pojavljivati zajedno. Slijedi da je $S = \mathrm{St}_2\nu^{\frac{1}{2}}$ ili $S = |\cdot| \times \ldots \times |\cdot|$.

Zbog ireducibilnosti standardnog modula reprezentacije π, možemo umjesto $\chi_V\Pi' \times \chi_V S \rtimes \pi_0$ pisati

$$\chi_V\Pi' \times \chi_V S^\vee \rtimes \pi_0.$$

Sada kao kod epimorfizma (1) dobivamo

$$\chi_W\Pi' \times \chi_W S^\vee \times \chi_W\Delta \rtimes \Theta_{-l}(\pi_{00}) \twoheadrightarrow \sigma$$

pa trebamo pokazati da vrijedi

Lema 4.21 Subkvocijent reprezentacije $\Theta_{-l}(\pi_{00})$ koji sudjeluje u gornjem epimorfizmu je upravo $\theta_{-l}(\pi_{00})$.

Napomena. Sama tvrdnja (a i dokaz) ove leme nalikuje na propoziciju 4.7. Budući da ćemo sličan argument koristiti još nekoliko puta, ovdje zapisujemo detaljan dokaz.

Dokaz. Sjetimo se da je svaki drugi subkvocijent reprezentacije $\Theta_{-l}(\pi_{00})$ jednak $L(\chi_W|\cdot|^r, \ldots, \chi_W|\cdot|^{\frac{l'+1}{2}}; \tau)$, pri čemu je τ neki ireducibilni i temperirani subkvocijent reprezentacije $\Theta_{-l'}(\pi_{00})$ za $l' > 3$. Kada bi takav subkvocijent sudjelovao u gornjem epimorfizmu, imali bismo

$$\chi_W\Pi' \times \chi_W S^\vee \times \chi_W\Delta \times \chi_W\left(\frac{l'+1}{2}, r\right) \rtimes \tau \twoheadrightarrow \sigma.$$

Htjeli bismo reprezentaciju $\left(\frac{l'+1}{2}, r\right)$ dovesti ispred $S^\vee$ pomoću leme 4.1; jedino što nam može zasmetati je ako se u Δ pojavljuje St_l'. Ni u toj situaciji argumentacija nije puno kompliciranija: pomoću napomene 4.4 vidimo da tada mora vrijediti jedno od sljedećeg:

- $\chi_W\Pi' \times \chi_W\left(\frac{l'+1}{2}, r\right) \times \chi_W S^\vee \times \chi_W\Delta \rtimes \tau \twoheadrightarrow \sigma$;
- $\chi_W\Pi' \times \chi_W\left(\frac{l'+3}{2}, r\right) \times \delta([|\cdot|^{\frac{1-l'}{2}}, |\cdot|^{\frac{l'+1}{2}}]) \times \chi_W S^\vee \times \chi_W\Delta \rtimes \tau \twoheadrightarrow \sigma$.

Lako je vidjeti da druga od ove dvije opcije nije moguća: brojimo reprezentacije opće linearne grupe koje se pojavljuju u standardnom modulu za $\sigma = \theta_{-l}(\pi)$, a definirane su nekim segmentom koji sadrži $|\cdot|^{\frac{1-l'}{2}}$.

Neka je k broj takvih reprezentacija koje sudjeluju u definiciji reprezentacije Π. Epimorfizam $\chi_W\Pi \times \chi_W(2, r) \rtimes \theta_{-3}(\pi_{00})$ (koji smo već dokazali) zajedno s napomenom 4.6 pokazuje da je broj takvih reprezentacija u standardnom modulu za σ tada jednak točno k. S druge strane, epimorfizam $\chi_W\Pi' \times \chi_W\left(\frac{l'+3}{2}, r\right) \times \delta([|\cdot|^{\frac{1-l'}{2}}, |\cdot|^{\frac{l'+1}{2}}]) \times \chi_W S^\vee \times \chi_W\Delta \rtimes \tau \twoheadrightarrow \sigma$ implicirao bi (opet, pomoću napomene 4.6) da takvih reprezentacija u standardnom modulu za σ ima barem $k+1$. Zaključujemo da druga opcija nije moguća, to jest da vrijedi

$$\chi_W\Pi' \times \chi_W\left(\frac{l'+1}{2}, r\right) \times \chi_W S^\vee \times \chi_W\Delta \rtimes \tau \twoheadrightarrow \sigma.$$

Drugim riječima, postoji ireducibilni subkvocijent A reprezentacije $\chi_W S^\vee \times \chi_W \Delta \rtimes \tau$ takav da vrijedi

$$\chi_W \Pi' \times \chi_W \left(\frac{l'+1}{2}, r\right) \rtimes A \twoheadrightarrow \sigma.$$

Neka je $\delta'_a \nu^{t_a} \times \cdots \times \delta'_1 \nu^{t_1} \rtimes \tau'$ standardni modul reprezentacije A. Još jedna primjena napomene 4.6 pokazuje da segmenti kojima su definirane reprezentacije $\delta'_a \nu^{t_a}, \ldots, \delta'_1 \nu^{t_1}$ u uniji daju

$$\{\text{kuspidalni nosač od } S\} \cup \left\{\chi_W |\cdot|^2, \ldots, \chi_W |\cdot|^{\frac{l'-1}{2}}\right\}.$$

Odavde vidimo da je reprezentacija $\delta'_a \nu^{t_a}$ definirana segmentom čiji je donji rub nenegativan, a gornji veći od ili jednak 2.

Jednostavnim računom sa Jacquetovim modulima i primjenom Casselmanovog kriterija sada se pokazuje da reprezentacija A ne može sadržavati takav subkvocijent. Time je dokaz leme završen. □

Sada smo dokazali da u gornjem epimorfizmu sudjeluje $\theta_{-l}(\pi_{00})$, a znamo da vrijedi $\chi_W(2, r) \rtimes \theta_{-3}(\pi_{00}) \twoheadrightarrow \theta_{-l}(\pi_{00})$. Odavde imamo

$$\chi_W \Pi' \times \chi_W S^\vee \times \chi_W \Delta \times \chi_W(2, r) \rtimes \theta_{-3}(\pi_{00}) \twoheadrightarrow \sigma.$$

Budući da smo pretpostavili da Δ ne sadrži St_3, $\chi_W(2, r)$ može zamijeniti mjesta sa svim reprezentacijama koje se pojavljuju u $\chi_W \Delta$, ali i $\chi_W S^\vee$. Imamo, dakle,

$$\chi_W \Pi' \times \chi_W(2, r) \times \chi_W S^\vee \times \chi_W \Delta \rtimes \theta_{-3}(\pi_{00}) \twoheadrightarrow \sigma$$

pa vidimo da postoji ireducibilni subkvocijent B reprezentacije $\chi_W S^\vee \times \chi_W \Delta \rtimes \theta_{-3}(\pi_{00})$ takav da vrijedi

$$\chi_W \Pi' \times \chi_W(2, r) \rtimes B \twoheadrightarrow \sigma.$$

Budući da već znamo da vrijedi

$$\chi_W \Pi' \times \chi_W S \times \chi_W(2, r) \rtimes \theta_{-3}(\pi_0) \twoheadrightarrow \sigma,$$

iz napomene 4.6 lako slijedi da se u standardnom modulu reprezentacije B moraju pojavljivati točno one GL-reprezentacije koje se nalaze u $\chi_W S$. Konačno, time dolazimo do

$$\chi_W \Pi' \times \chi_W(2, r) \times \chi_W S \rtimes \theta_{-3}(\pi_0) \twoheadrightarrow \sigma.$$

Sada, kada je reprezentacija $\chi_W(2, r)$ već zamijenila mjesto sa svim reprezentacijama koje kvare uvjet u napomeni 4.15, možemo provesti postupak iz dokaza leme 4.14. Time dolazimo do željenog zaključka o standardnom modulu reprezentacije $\sigma = \theta_{-l}(\pi)$.

Preostaje vidjeti što se događa ako se u Δ pojavljuje reprezentacija St_3. Pretpostavimo da se pojavljuje h puta, $h > 0$. Pokazat ćemo da i ovdje dobivamo isti rezultat:

Lema 4.22 I u ovom slučaju vrijedi $\chi_W \Pi \rtimes \theta_{-l}(\pi_0) \twoheadrightarrow \theta_{-l}(\pi)$.

Dokaz. Imamo dva podslučaja: $m_\phi(\chi_V \mathrm{St}_3) = 2h + 1$ i $m_\phi(\chi_V \mathrm{St}_3) = 2h$. Oba tretiramo na način koji smo već vidjeli u prethodnim slučajevima.

Slučaj 3a: $m_\phi(\chi_V \mathrm{St}_3) = 2h + 1$
Sada parametar reprezentacije π_{00} sadrži $\chi_V S_3$ pa je prema teoremu 2.16 kratnost reprezentacije $\chi_W S_3$ u parametru za $\theta_{-3}(\pi_{00})$ jednaka 2. Ovo znači da $\theta_{-3}(\pi_{00})$ nije reprezentacija diskretne serije (ali je temperirana), te da postoji (slično kao u **slučaju 2**) reprezentacija diskretne serije σ_{00} takva da vrijedi

$$\chi_W \mathrm{St}_3 \rtimes \sigma_{00} \twoheadrightarrow \theta_{-3}(\pi_{00}).$$

Napomena 4.4 sada pokazuje da vrijedi

$$\chi_W L \rtimes \sigma_{00} \twoheadrightarrow \theta_{-l}(\pi_{00}),$$

pri čemu smo uveli oznaku $L = L(|\cdot|^r \times \cdots \times |\cdot|^2 \times \mathrm{St}_3)$. Jedina preostala mogućnost je da imamo

$$\chi_W L' \rtimes \sigma_{00} \twoheadrightarrow \theta_{-l}(\pi_{00}),$$

gdje je $L' = L(|\cdot|^r \times \cdots \times |\cdot|^3 \times \mathrm{St}_4 \nu^{\frac{1}{2}}))$, no ovo je u kontradikciji s izgledom standardnog modula za $\theta_{-l}(\pi_{00})$.

Prema tome, iz epimorfizma (2) možemo pisati

$$\chi_W \delta_r \nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_W \delta_1 \nu^{s_1} \times \chi_W \Delta \times \chi_W L \rtimes \sigma_{00} \twoheadrightarrow \sigma.$$

Nadalje, možemo pisati $\Delta = \Delta' \times (\mathrm{St}_3, h)$, slično kao u **slučaju 1b**. Lema 4.5 sada pokazuje da se reprezentacija $\mathrm{St}_3 \times L$ ne reducira, stoga $\chi_W L$ može zamijeniti mjesta s $\chi_W(\mathrm{St}_3, h)$. Imamo, dakle,

$$\chi_W \delta_r \nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_W \delta_1 \nu^{s_1} \times \chi_W \Delta' \times \chi_W L \times \chi_W(\mathrm{St}_3, h) \rtimes \sigma_{00} \twoheadrightarrow \sigma.$$

Konačno, budući da vrijedi $(2, r) \times \mathrm{St}_3 \twoheadrightarrow L$, a $(2, r)$ može zamijeniti mjesta sa svim reprezentacijama iz Δ', dolazimo do

$$\chi_W \delta_r \nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_W \delta_1 \nu^{s_1} \times \chi_W(2, r) \times \chi_W \Delta' \times \chi_W(\mathrm{St}_3, h + 1) \rtimes \sigma_{00} \twoheadrightarrow \sigma.$$

Sada zaključujemo da postoji ireducibilni (temperirani) subkvocijent τ reprezentacije

$\chi_W \Delta' \times \chi_W(\mathrm{St}_3, h+1) \rtimes \sigma_{00}$ za koji vrijedi

$$\chi_W \delta_r \nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_W \delta_1 \nu^{s_1} \times \chi_W(2,r) \times \tau \twoheadrightarrow \sigma.$$

Odavde tvrdnja leme slijedi kao u prethodnom dijelu **slučaja 3**.

Slučaj 3b: $m_\phi(\chi_V \mathrm{St}_3) = 2h$
U ovom je slučaju $\theta_{-3}(\pi_{00})$ reprezentacija diskretne serije te vrijedi $\chi_W(2,r) \rtimes \theta_{-3}(\pi_{00}) \twoheadrightarrow \theta_{-l}(\pi_{00})$. Zbog toga postupamo slično kao u **slučaju 1b**.

Ponovno rastavimo $\chi_W \Delta = (\chi_W \mathrm{St}_3, h) \times \chi_W \Delta'$ pa vidimo da reprezentacija $\chi_W(2,r)$ može zamijeniti mjesta sa svim reprezentacijama u $\chi_W \Delta'$, dok zamjena sa $\chi_W \mathrm{St}_3$ slično kao u slučaju **1b** dovodi do dvije mogućnosti koje slijede iz epimorfizma (2):

(i) Postoji ireducibilna temperirana reprezentacija τ_1 takva da vrijedi

$$\chi_W \delta_r \nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_W \delta_1 \nu^{s_1} \times \chi_W(2,r) \rtimes \tau_1 \twoheadrightarrow \sigma;$$

(ii) Postoji ireducibilna temperirana reprezentacija τ_2 takva da vrijedi

$$\chi_W \delta_r \nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_W \delta_1 \nu^{s_1} \times \chi_W L' \rtimes \tau_2 \twoheadrightarrow \sigma,$$

pri čemu smo s L' (opet) označili $L(|\cdot|^r \times \cdots \times |\cdot|^3 \times \mathrm{St}_4 \nu^{\frac{1}{2}})$, to jest, jedinstveni kvocijent reprezentacije $(3,r) \times \mathrm{St}_4 \nu^{\frac{1}{2}}$.

Pokazat ćemo da opcija (ii) nije moguća. Najprije pokazujemo da reprezentacija na lijevoj strani epimorfizma u (ii) ima jedinstveni ireducibilni kvocijent, jer je i sama kvocijent standardne reprezentacije. Ovo dobivamo kao u lemi 4.14, osim u slučaju kada se među reprezentacijama $\chi_W \delta_r \nu^{s_r}, \ldots, \chi_W \delta_1 \nu^{s_1}$ nalazi neka koja narušava uvjet iz napomene 4.15. Uočimo da su problematične reprezentacije[5] definirane segmentom čiji je gornji rub jednak $\chi_W |\cdot|^2$; to su $\chi_W |\cdot|^2$, $\chi_W \delta([|\cdot|^1, |\cdot|^2])$, $\chi_W \delta([|\cdot|^0, |\cdot|^2])$ i $\chi_W \delta([|\cdot|^{-1}, |\cdot|^2]) = \chi_W \mathrm{St}_4 \nu^{\frac{1}{2}}$.

Sada uočimo da se prve tri reprezentacije zapravo ne mogu pojaviti: to bi značilo da se u standardnom modulu za π pojavljuju $\chi_V |\cdot|^2$, $\chi_V \delta([|\cdot|^1, |\cdot|^2])$, ili $\chi_V \delta([|\cdot|^0, |\cdot|^2])$. Budući da temperirani nosač reprezentacije π_0 sada sadrži reprezentaciju $\chi_V \mathrm{St}_3$ koja se reducira s ovim reprezentacijama, zaključujemo da bi se u tom slučaju reducirao i standardni modul za π ([27]), a to nije moguće jer je π generička.

Zbog toga se od problematičnih reprezentacija može pojaviti jedino $\chi_W \mathrm{St}_4 \nu^{\frac{1}{2}}$. S druge strane, lema 4.5 pokazuje da se reprezentacija $\mathrm{St}_4 \nu^{\frac{1}{2}} \times L'$ ne reducira. Zbog toga u (ii) možemo zamijeniti mjesta reprezentacijama $\chi_W \mathrm{St}_4 \nu^{\frac{1}{2}}$ i $\chi_W L'$; dobivamo da je reprezentacija

[5] One koje završavaju s $\chi_W |\cdot|^1$ nisu problematične, jer odgovarajući segment uopće nije ulančan sa segmentom $\chi_W[3,r]$.

na lijevoj strani epimorfizma u (ii) zapravo kvocijent reprezentacije

$$\chi_W\delta_r\nu^{s_r}\times\cdots\times\chi_W\delta_2\nu^{s_2}\times\chi_W(3,r)\times\chi_W\mathrm{St}_4\nu^{\frac{1}{2}}\times\chi_W\mathrm{St}_4\nu^{\frac{1}{2}}\rtimes\tau_2.$$

Na ovu reprezentaciju sada možemo primijeniti postupak iz leme 4.14, čime pokazujemo da zaista ima jedinstveni ireducibilni kvocijent.

Sada zaključujemo: ako postoji epimorfizam kao u (ii), onda je subkvocijent reprezentacije $\chi_W L'\rtimes\tau_2$ koji sudjeluje u tom epimorfizmu upravo njezin jedinstveni kvocijent, to jest $L(|\cdot|^r\times\cdots\times|\cdot|^3\times\mathrm{St}_4\nu^{\frac{1}{2}}\rtimes\tau_2)$. Kao i do sada, lema 4.16 pokazuje da u tom slučaju ova reprezentacija mora biti subkvocijent od $\Theta_{-l}(\pi_0)$. Primjena postupka iz leme 4.17 u kombinaciji s ovim zaključkom pokazuje da bi tada reprezentacija $L(\mathrm{St}_4\nu^{\frac{1}{2}}\rtimes\tau_2)$ trebala biti subkvocijent reprezentacije $\Theta_{-5}(\pi_0)$.

Da ovo nije moguće, pokazujemo istim računom kao u **slučaju 1b** (lema 4.18 i diskusija prije nje): budući da se $\chi_V S_3$ pojavljuje u parametru reprezentacije π_0 s parnom kratnošću $2h$, zaključujemo da postoji ireducibilna temperirana reprezentacija π_0' takva da vrijedi

$$(\chi_V\mathrm{St}_3,h)\rtimes\pi_0'\twoheadrightarrow\pi_0.$$

Reprezentacija na lijevoj strani je potpuno reducibilna. Ima dva direktna sumanda od kojih je jedan π_0, a drugi označimo s π_1. Sada kao u slučaju 1b pokazujemo da su svi netemperirani subkvocijenti reprezentacija $\Theta_{-5}(\pi_0)$ i $\Theta_{-5}(\pi_1)$ ujedno i subkvocijenti reprezentacije

$$\chi_W|\cdot|^2\rtimes((\chi_W\mathrm{St}_3,h)\rtimes\Theta_{-3}(\pi_0')).$$

Uočimo da je reprezentacija $(\chi_W\mathrm{St}_3,h)\rtimes\Theta_{-3}(\pi_0')$ ireducibilna i temperirana: $\Theta_{-3}(\pi_0')$ je takva, a sadrži $\chi_W S_3$ u parametru, stoga se $\chi_W\mathrm{St}_3\rtimes\Theta_{-3}(\pi_0')$ ne reducira.

Konačno, jednostavan račun s Jacquetovim modulima kao u lemi 4.18 pokazuje da gornja reprezentacija sadrži samo jedan subkvocijent čiji je standardni modul oblika $\chi_W\mathrm{St}_4\nu^{\frac{1}{2}}\rtimes\tau_2$. Istovremeno, znamo da upravo takav standardni modul ima reprezentacija $\theta_{-5}(\pi_1)$. Zaključujemo da $\Theta_{-5}(\pi_0)$ ne sadrži ireducibilni subkvocijent s ovakvim standardnim modulom, odakle konačno slijedi da opcija (ii) nije moguća.

Za završetak dokaza ove leme trebamo samo uočiti da iz opcije (i) tvrdnja slijedi na isti način kao u prvom dijelu **slučaja 3**: primjenom leme 4.19 i činjenice da je $\theta_{-l}(\pi_0)$ jedini subkvocijent reprezentacije $\Theta_{-l}(\pi_0)$ koji je ujedno i kvocijent reprezentacije oblika $\chi_W(2,r)\rtimes\tau_1$. □

Preostali dio dokaza sličan je onome iz prvog dijela ovog slučaja. Naime, prethodnom smo lemom pokazali da vrijedi

$$\chi_W\Pi\times\chi_W(2,r)\rtimes\theta_{-3}(\pi_0)\twoheadrightarrow\sigma,$$

pri čemu smo ovdje (opet) uveli oznaku $\Pi = \delta_r\nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_W\delta_1\nu^{s_1}$. Ukoliko se među ovim reprezentacijama ne pojavljuju $\chi_W|\cdot|$ ni $\chi_W\mathrm{St}_2\nu^{\frac{1}{2}}$, dokaz završavamo postupkom iz leme 4.14.

Ako se pojavljuju, možemo kao na početku **slučaja 3** regrupirati Π u reprezentaciju $\Pi' \times S$ (gdje S sadrži sve $|\cdot|$ i $\mathrm{St}_2\nu^{\frac{1}{2}}$). Imamo, dakle, $\pi \cong \chi_V\Pi' \times \chi_V S \rtimes \pi_0$ pa zbog ireducibilnosti standardnog modula opet možemo krenuti od

$$\chi_V\Pi' \times \chi_V S^\vee \rtimes \pi_0 \twoheadrightarrow \pi.$$

Na isti način kao u prvom dijelu ovog slučaja sada dolazimo do epimorfizma

$$\chi_W\Pi' \times \chi_W\Delta \times \chi_W S^\vee \times \chi_W(2,r) \rtimes \theta_{-3}(\pi_{00}) \twoheadrightarrow \sigma.$$

Napomena. Ovdje smo zamijenili mjesta reprezentacijama $\chi_W\Delta$ i $\chi_W S^\vee$; to možemo napraviti zato što sve reprezentacije iz Δ mogu zamijeniti mjesta sa svima iz $S^\vee$. Jedini iznimni slučaj kada ne možemo trivijalno mijenjati mjesta je ako S sadrži neku reprezentaciju δ, a Δ neku reprezentaciju δ' tako da se $\delta \times \delta'$ reducira. Već smo konstatirali da takav iznimni slučaj nije moguć jer bi rezultirao redukcijom standardnog modula za π.

Sada koristimo činjenicu da $(2,r)$ može zamijeniti mjesta sa svim reprezentacijama u $S^\vee$, ali i svim reprezentacijama u Δ, osim St_3. Dolazimo do

$$\chi_W\Pi' \times (\chi_W\mathrm{St}_3, h) \times \chi_W(2,r) \times \chi_W\Delta' \times \chi_W S^\vee \rtimes \theta_{-3}(\pi_{00}) \twoheadrightarrow \sigma,$$

pri čemu smo opet rastavili Δ na $(\mathrm{St}_3, h) \times \Delta'$. Ovakve smo situacije već susretali; i ovdje imamo dvije mogućnosti:

(i) $\chi_W\Pi' \times \chi_W(2,r) \times (\chi_W\mathrm{St}_3, h) \times \chi_W\Delta' \times \chi_W S^\vee \rtimes \theta_{-3}(\pi_{00}) \twoheadrightarrow \sigma$;

(ii) $\chi_W\Pi' \times \chi_W(3,r) \times \chi_W\mathrm{St}_4\nu^{\frac{1}{2}} \times (\chi_W\mathrm{St}_3, h-1) \times \chi_W\Delta' \times \chi_W S^\vee \rtimes \theta_{-3}(\pi_{00}) \twoheadrightarrow \sigma$.

Tvrdimo da se (ii) zapravo ne može dogoditi. Označimo s k broj reprezentacija $\delta_i\nu^{s_i}$ iz Π definiranih nekim segmentom koji sadrži $|\cdot|^{-1}$. Iskoristimo li napomenu 4.6, vidimo da opcija (ii) implicira da standardni modul za σ sadrži barem $k+1$ reprezentacija definiranih segmentom koji sadrži $|\cdot|^{-1}$. S druge strane, epimorfizam

$$\chi_W\Pi \times \chi_W(2,r) \rtimes \theta_{-3}(\pi_0) \twoheadrightarrow \sigma$$

(čiju smo egzistenciju već dokazali), zajedno s napomenom 4.6 povlači da je broj takvih reprezentacija u standardnom modulu reprezentacije σ jednak točno k.

Time smo pokazali da vrijedi (i), to jest

$$\chi_W\Pi' \times \chi_W(2,r) \rtimes B \twoheadrightarrow \sigma,$$

pri čemu je B neki ireducibilni subkvocijent reprezentacije $(\chi_W \mathrm{St}_3, h) \times \chi_W \Delta' \times \chi_W S^\vee \rtimes \theta_{-3}(\pi_{00})$. Sada možemo dovršiti dokaz kao u prvom dijelu ovog slučaja (kada reprezentacija Δ nije sadržavala St_3).

*

* *

Ovime smo završili analizu svih slučajeva koje smo dobili podjelom s obzirom na različite mogućnosti za π_0. Sažetak zaključaka po slučajevima sadržaj je sljedećeg teorema:

Teorem 4.23 Neka je π ireducibilna generička reprezentacija simplektičke grupe sa standardnim modulom

$$\chi_V \delta_r \nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_V \delta_1 \nu^{s_1} \rtimes \pi_0.$$

Neka je $l \geqslant 1$ neparan prirodni broj takav da vrijedi $\theta_{-l}(\pi) \neq 0$. Tada vrijedi

$$\chi_W \delta_r \nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_W \delta_1 \nu^{s_1} \rtimes \theta_{-l}(\pi_0) \twoheadrightarrow \theta_{-l}(\pi).$$

Nadalje, ako je $\theta_{-l}(\pi_0) = L(\chi_W \delta'_k \nu^{t_k} \times \cdots \times \chi_W \delta'_1 \nu^{t_1} \rtimes \tau)$, onda je reprezentacija $\theta_{-l}(\pi)$ jedinstveno određena s

$$\theta_{-l}(\pi) = L(\chi_W \delta_r \nu^{s_r}, \ldots, \chi_W \delta_1 \nu^{s_1}, \chi_W \delta'_k \nu^{t_k}, \ldots, \chi_W \delta'_1 \nu^{t_1}; \tau).$$

4.4 Slučajevi za $\pi \in \mathrm{Irr}(Mp(W_n))$

Podjela na slučajeve koju koristimo za određivanje liftova reprezentacija metaplektičke grupe donekle se razlikuje od one iz prethodnog odjeljka, no i dalje koristimo vrlo slične argumente. Kao i kod reprezentacija simplektičke grupe, najprije podsjećamo na mogući oblik liftova za temperirane reprezentacije.

Napomena 4.24 Neka je π_0 temperirana reprezentacija metaplektičke grupe s parametrom ϕ te neka je $l > 0$ paran.

(i) Na donjem tornju imamo temperirani lift $\theta_0(\pi_0)$ te vrijedi

$$\chi_W |\cdot|^{\frac{l-1}{2}} \times \cdots \times \chi_W |\cdot|^{\frac{1}{2}} \rtimes \theta_0(\pi_0) \twoheadrightarrow \theta_{-l}(\pi_0).$$

(ii) Ako se prvi lift na gornjem tornju pojavljuje na nivou $l = -2$, onda je on nužno temperiran, te vrijedi

$$\chi_W |\cdot|^{\frac{l-1}{2}} \times \cdots \times \chi_W |\cdot|^{\frac{3}{2}} \rtimes \theta_{-2}(\pi_0) \twoheadrightarrow \theta_{-l}(\pi_0).$$

(iii) Ako je kratnost $m_\phi(\chi_V S_2)$ neparna te ako je ispunjen tzv. inicijalni uvjet (treći uvjet u teoremu 2.15), onda je na gornjem tornju reprezentacija $\theta_{-4}(\pi_0)$ temperirana i vrijedi

$$\chi_W|\cdot|^{\frac{l-1}{2}} \times \cdots \times \chi_W|\cdot|^{\frac{5}{2}} \rtimes \theta_{-4}(\pi_0') \twoheadrightarrow \theta_{-l}(\pi_0).$$

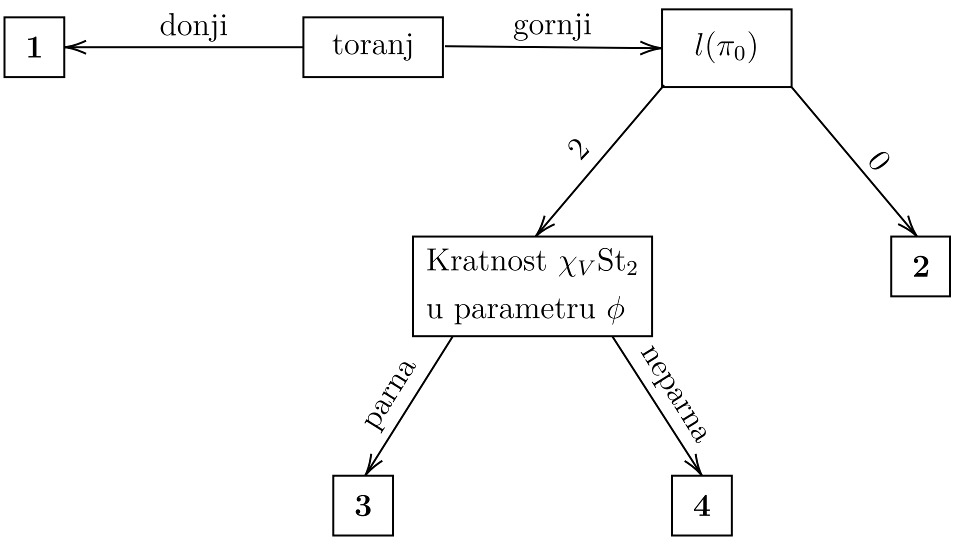
(iv) Ako vrijedi $m_\phi(\chi_V S_2) = 2h > 0$, te ako je ispunjen inicijalni uvjet, onda na gornjem tornju π_0 nema temperiranih liftova i vrijedi

$$\chi_W|\cdot|^{\frac{l-1}{2}} \times \cdots \times \chi_W|\cdot|^{\frac{5}{2}} \times \chi_W \mathrm{St}_3 \nu^{\frac{1}{2}} \times \chi_W(\mathrm{St}_2, h-1) \rtimes \theta_{-2}(\pi_0') \twoheadrightarrow \theta_{-l}(\pi_0).$$

Ovdje je π_0' (jedinstvena) ireducibilna temperirana reprezentacija takva da vrijedi $\pi_0 \hookrightarrow (\chi_V \mathrm{St}_2, h) \rtimes \pi_0'$. Nadalje, parametar reprezentacije $\theta_{-2}(\pi_0')$ sadrži $\chi_W S_2$, stoga je reprezentacija $\chi_W(\mathrm{St}_2, h-1) \rtimes \theta_{-2}(\pi_0')$ ireducibilna i temperirana.

Sada se vraćamo na epimorfizam (2) s kraja dokaza propozicije 4.7. Krećemo s podjelom na slučajeve, slično kao u prethodnom odjeljku:

Dijagram 2: podjela na slučajeve za $\pi \in \mathrm{Irr}(Mp(W_n))$.



Slučaj 1: donji toranj

Kao što pokazuje prethodna napomena, na donjem je tornju $\theta_{-l}(\pi_{00})$ Langlandsov kvocijent reprezentacije

$$\chi_W|\cdot|^{\frac{l-1}{2}} \times \cdots \times \chi_W|\cdot|^{\frac{1}{2}} \rtimes \theta_0(\pi_{00}) \twoheadrightarrow \theta_{-l}(\pi_{00}),$$

odnosno jedinstveni kvocijent reprezentacije

$$\chi_W\left(\frac{1}{2}, \frac{l-1}{2}\right) \rtimes \theta_0(\pi_{00}).$$

Zbog toga iz epimorfizma (2) dobivamo

$$\chi_W \delta_r \nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_W \delta_1 \nu^{s_1} \times \chi_W \Delta \times \chi_W\left(\frac{1}{2}, \frac{l-1}{2}\right) \rtimes \theta_0(\pi_{00}) \twoheadrightarrow \sigma.$$

Budući da je upravo $\chi_W|\cdot|^{\frac{1}{2}}$ donji rub odgovarajućeg segmenta, lema 4.1 pokazuje da $\chi_W(\frac{1}{2}, \frac{l-1}{2})$ može zamijeniti mjesta sa svim reprezentacijama $\chi_W\delta_i\nu^{s_i}$, ali i svim reprezentacijama diskretne serije koje sudjeluju u produktu $\chi_W\Delta$.

Zbog toga možemo nastaviti koristeći istu argumentaciju kao u lemama 4.14, 4.16 i 4.17. Time dolazimo do sljedećeg zaključka: vrijedi

$$\chi_W\delta_r\nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_W\delta_1\nu^{s_1} \rtimes \theta_{-l}(\pi_0) \twoheadrightarrow \theta_{-l}(\pi),$$

a standardni modul reprezentacije $\theta_{-l}(\pi)$ dan je s

$$\theta_{-l}(\pi) = L(\chi_W\delta_r\nu^{s_r}, \dots, \chi_W\delta_1\nu^{s_1}, \chi_W|\cdot|^{\frac{l-1}{2}}, \dots, \chi_W|\cdot|^{\frac{1}{2}}; \theta_0(\pi_0)).$$

<u>**Slučaj 2:** gornji toranj, $l(\pi_0) = 0$</u>

Budući da vrijedi $l(\pi_0) = 0$, lako vidimo da mora biti i $l(\pi_{00}) = 0$. Drugim riječima, reprezentacija π_{00} se na gornjem tornju prvi put pojavljuje na nivou $l = -2$. Nadalje, prema napomeni 4.24 vidimo da je reprezentacija $\theta_{-2}(\pi_{00})$ temperirana, dok je za $l > 2$ reprezentacija $\theta_{-l}(\pi_{00})$ Langlandsov kvocijent reprezentacije

$$\chi_W|\cdot|^{\frac{l-1}{2}} \times \cdots \times \chi_W|\cdot|^{\frac{3}{2}} \rtimes \theta_{-2}(\pi_{00}),$$

to jest jedinstveni kvocijent od

$$\chi_W\left(\frac{3}{2}, \frac{l-1}{2}\right) \rtimes \theta_{-2}(\pi_{00}).$$

Iskoristimo li ovo u epimorfizmu (2), dobivamo

$$\chi_W\delta_r\nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_W\delta_1\nu^{s_1} \times \chi_W\Delta \times \chi_W\left(\frac{3}{2}, \frac{l-1}{2}\right) \rtimes \theta_{-2}(\pi_{00}) \twoheadrightarrow \sigma. \tag{3}$$

Dalje postupamo slično kao kod liftova reprezentacija simplektičke grupe: $\left(\frac{3}{2}, \frac{l-1}{2}\right)$ može, prema lemi 4.1, zamijeniti mjesta sa svim reprezentacijama koje sudjeluju u produktu Δ, osim eventualno sa St_2. Zbog toga je ovdje potrebno daljnje grananje na (pod)slučajeve:

Slučaj 2.1: π_0 nema $\chi_V\mathrm{St}_2$ u temperiranom nosaču

Ovaj slučaj tretiramo slično kao **slučaj 3** iz prethodnog odjeljka. Naime, u ovoj situaciji $\left(\frac{3}{2}, \frac{l-1}{2}\right)$ može zamijeniti mjesta sa svim reprezentacijama koje sudjeluju u produktu Δ. Dobivamo

$$\chi_W\delta_r\nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_W\delta_1\nu^{s_1} \times \chi_W\left(\frac{3}{2}, \frac{l-1}{2}\right) \times \chi_W\Delta \rtimes \theta_{-2}(\pi_{00}) \twoheadrightarrow \sigma,$$

stoga postoji ireducibilni (i temperirani) subkvocijent τ reprezentacije $\chi_W\Delta \rtimes \theta_{-2}(\pi_{00})$

takav da vrijedi

$$\chi_W \delta_r \nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_W \delta_1 \nu^{s_1} \times \chi_W \left(\frac{3}{2}, \frac{l-1}{2}\right) \rtimes \tau \twoheadrightarrow \sigma.$$

Sada kao u slučaju 3 iz prethodnog odjeljka iz gornjeg epimorfizma zaključujemo da vrijedi

$$\chi_W \delta_r \nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_W \delta_1 \nu^{s_1} \rtimes \theta_{-l}(\pi_0) \twoheadrightarrow \sigma.$$

Preostaje odrediti standardni modul reprezentacije σ. Ukoliko se među reprezentacijama $\delta_1\nu^{s_1}, \ldots, \delta_r\nu^{s_r}$ ne nalazi $|\cdot|^{\frac{1}{2}}$, možemo dovršiti dokaz na već uobičajen način, primjenom postupka iz leme 4.14 (kao u prethodnom slučaju). U suprotnom, možemo pisati standardni modul reprezentacije π kao

$$\chi_V \Pi' \times \chi_V S \rtimes \pi_0,$$

pri čemu smo u S grupirali sve reprezentacije $\delta_i\nu^{s_i}$ koje su jednake $|\cdot|^{\frac{1}{2}}$, a u Π' sve ostale. Ovo radimo jer su pojavljivanja reprezentacije $|\cdot|^{\frac{1}{2}}$ jedino što može narušiti uvjet iz napomene 4.15. Sada opet imitiramo dokaz iz slučaja 3 za reprezentacije simplektičke grupe; kao u lemi 4.21 dolazimo do

$$\chi_W \Pi' \times \chi_W S^{\vee} \times \chi_W \Delta \times \chi_W \left(\frac{3}{2}, \frac{l-1}{2}\right) \rtimes \theta_{-2}(\pi_{00}) \twoheadrightarrow \sigma$$

te na isti način kao tamo i dovršavamo dokaz. Zaključujemo da je reprezentacija $\theta_{-l}(\pi)$ jednaka

$$L(\chi_W \delta_r \nu^{s_r}, \ldots, \chi_W \delta_1 \nu^{s_1}, \chi_W |\cdot|^{\frac{l-1}{2}}, \ldots, \chi_W |\cdot|^{\frac{3}{2}}; \theta_{-2}(\pi_0)).$$

Slučaj 2.2: π_0 ima $\chi_V \mathrm{St}_2$ u temperiranom nosaču
U ovom je slučaju potrebna još jedna podjela: argumenti koje koristimo razlikuju se u ovisnosti o tome je li kratnost reprezentacije $\chi_V S_2$ u parametru za π_0 parna ili neparna. Zbog toga posljednju razinu rastava na slučajeve radimo u ovisnosti o tome sadrži li π_{00} u svojem parametru reprezentaciju $\chi_V S_2$.

Napomena 4.25 Uočimo da se u slučaju 2.2 događa situacija kakvu nismo mogli imati kod reprezentacija simplektičkih grupa: iako parametar reprezentacije π_0 sadrži $\chi_V S_2$, njezin prvi lift na gornjem tornju nije na nivou $l = -4$, već na $l = -2$. Ovo je moguće samo ako nije ispunjen tzv. inicijalni uvjet iz teorema 2.15.

2.2A: π_{00} ima $\chi_V S_2$ u parametru
U ovom podslučaju postupamo na sličan način kao u **slučaju 3a** iz prethodnog odjeljka. Naime, već smo vidjeli da je reprezentacija $\theta_{-2}(\pi_{00})$ temperirana te da za $l > 2$ vrijedi

$$\chi_W |\cdot|^{\frac{l-1}{2}} \times \cdots \times \chi_W |\cdot|^{\frac{3}{2}} \rtimes \theta_{-2}(\pi_{00}) \twoheadrightarrow \theta_{-l}(\pi_{00}).$$

Time dolazimo do epimorfizma (3), no u ovom slučaju $\left(\frac{3}{2}, \frac{l-1}{2}\right)$ ne može (kao u slučaju 2.1) zamijeniti mjesta sa svim reprezentacijama koje sudjeluju u produktu Δ, zato što ovaj put Δ sadrži St_2.

S druge strane, budući da π_{00} već sadrži $\chi_V S_2$ u parametru, zaključujemo da parametar reprezentacije $\theta_{-2}(\pi_{00})$ sadrži $\chi_W S_2$ s kratnošću 2; posebno, $\theta_{-2}(\pi_{00})$ je temperirana, ali nije reprezentacija diskretne serije. Odavde na isti način kao u slučaju 3a iz prethodnog odjeljka dolazimo do zaključka da je $\theta_{-l}(\pi_{00})$ kvocijent reprezentacije

$$\chi_W L \rtimes \sigma_{00}$$

pri čemu je σ_{00} (jedinstvena) reprezentacija diskretne serije takva da vrijedi $\theta_{-2}(\pi_{00}) \hookrightarrow \chi_W \mathrm{St}_2 \rtimes \sigma_{00}$, a L privremena oznaka za reprezentaciju $L(|\cdot|^{\frac{l-1}{2}} \times \cdots \times \chi_W |\cdot|^{\frac{3}{2}} \times \mathrm{St}_2)$.

Lema 4.5 sada pokazuje da L može zamijeniti mjesta s reprezentacijama St_2 koje se pojavljuju u Δ, stoga i u ovom slučaju dolazimo do zaključka da vrijedi

$$\chi_W \delta_r \nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_W \delta_1 \nu^{s_1} \times \chi_W \left(\frac{3}{2}, \frac{l-1}{2}\right) \rtimes \tau \twoheadrightarrow \sigma.$$

za neku ireducibilnu temperiranu reprezentaciju τ. Sada smo u istoj poziciji kao u slučaju 2.1, te možemo dovršiti dokaz na isti način.

2.2B: π_{00} nema $\chi_V S_2$ u parametru

Kao i u prethodnim slučajevima, najprije želimo pokazati da vrijedi

$$\chi_W \delta_r \nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_W \delta_1 \nu^{s_1} \rtimes \theta_{-l}(\pi_0) \twoheadrightarrow \sigma.$$

Postupamo kao u slučaju 3b leme 4.22 iz prethodnog odjeljka.

Kao i do sada, krećemo od epimorfizma (2). Znamo da je $\theta_{-2}(\pi_{00})$ temperirana (ovaj put se, za razliku od slučaja 2.2A, radi o reprezentaciji diskretne serije) te da vrijedi

$$\chi_W |\cdot|^{\frac{l-1}{2}} \times \cdots \times \chi_W |\cdot|^{\frac{3}{2}} \rtimes \theta_{-2}(\pi_{00}) \twoheadrightarrow \theta_{-l}(\pi_{00}).$$

Reprezentaciju Δ možemo rastaviti na $(\mathrm{St}_2, h) \times \Delta'$ pa lema 4.1 pokazuje da reprezentacija $(\frac{3}{2}, \frac{l-1}{2})$ može zamijeniti mjesta sa svim reprezentacijama u Δ', dok zamjena sa St_2 dovodi do dvije mogućnosti koje slijede iz epimorfizma (2):

(i) Postoji ireducibilna temperirana reprezentacija τ_1 takva da vrijedi

$$\chi_W \delta_r \nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_W \delta_1 \nu^{s_1} \times \chi_W \left(\frac{3}{2}, \frac{l-1}{2}\right) \rtimes \tau_1 \twoheadrightarrow \sigma;$$

(ii) Postoji ireducibilna temperirana reprezentacija τ_2 takva da vrijedi

$$\chi_W \delta_r \nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_W \delta_1 \nu^{s_1} \times \chi_W L' \rtimes \tau_2 \twoheadrightarrow \sigma,$$

pri čemu L' sada označava $L(|\cdot|^{\frac{l-1}{2}} \times \cdots \times |\cdot|^{\frac{5}{2}} \times \mathrm{St}_3\nu^{\frac{1}{2}})$, to jest, jedinstveni kvocijent reprezentacije $(\frac{5}{2}, \frac{l-1}{2}) \times \mathrm{St}_3\nu^{\frac{1}{2}}$.

Na isti način kao u slučaju 3b iz prethodnog odjeljka sada pokazujemo da druga opcija nije moguća. Uočimo da ovdje imamo tri reprezentacije koje narušavaju uvjet iz napomene 4.15; to su $\chi_W|\cdot|^{\frac{3}{2}}$, $\chi_W\delta([|\cdot|^{\frac{1}{2}}, |\cdot|^{\frac{3}{2}}])$ i $\chi_W\delta([|\cdot|^{-\frac{1}{2}}, |\cdot|^{\frac{3}{2}}]) = \chi_W\mathrm{St}_3\nu^{\frac{1}{2}}$. S druge strane, budući da se u temperiranom nosaču reprezentacije π_0 (to jest, u $\chi_V\Delta$) pojavljuje $\chi_V\mathrm{St}_2$, vidimo da se $\chi_V|\cdot|^{\frac{3}{2}}$ i $\chi_V\delta([|\cdot|^{\frac{1}{2}}, |\cdot|^{\frac{3}{2}}])$ ne mogu pojavljivati u standardnom modulu reprezentacije π – u suprotnom bi došlo do redukcije. Preostaje samo $\chi_W\mathrm{St}_3\nu^{\frac{1}{2}}$, no lema 4.5 pokazuje da ni ona zapravo ne predstavlja problem, jer vrijedi

$$L' \times \mathrm{St}_3\nu^{\frac{1}{2}} = \mathrm{St}_3\nu^{\frac{1}{2}} \times L'.$$

Nastavimo li kao u slučaju 3b iz prethodnog odjeljka, dolazimo do zaključka da $\Theta_{-4}(\pi_0)$ sadrži subkvocijent čiji je standardni modul oblika $\chi_W\mathrm{St}_3\nu^{\frac{1}{2}} \rtimes \tau_2$.

Sada prikazujemo π_0 kao direktni sumand reprezentacije

$$(\chi_V\mathrm{St}_2, h) \rtimes \pi_0' \twoheadrightarrow \pi_0,$$

gdje je π_0' temperirana reprezentacija koja u temperiranom nosaču ne sadrži $\chi_V\mathrm{St}_2$. Gornja reprezentacija sadrži još jedan ireducibilni sumand – nazovimo ga π_1. Nastavljamo argumentirajući kao u slučaju 3b: najprije vidimo da svi netemperirani subkvocijenti reprezentacije $\Theta_{-4}(\pi_0)$ moraju istovremeno biti subkvocijenti od

$$\chi_W|\cdot|^{\frac{3}{2}} \rtimes ((\chi_W\mathrm{St}_2, h) \rtimes \Theta_{-2}(\pi_0')).$$

Zatim pokazujemo da gornja reprezentacija ima samo jedan subkvocijent sa standardnim modulom oblika $\chi_W\mathrm{St}_3\nu^{\frac{1}{2}} \rtimes \tau_2$, te da se radi o $\theta_{-4}(\pi_1)$. Odavde slijedi da $\Theta_{-4}(\pi_0)$ nema takvih subkvocijenata.

Time smo pokazali da opcija (ii) nije moguća pa zaključujemo da vrijedi

$$\chi_W \delta_r \nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_W \delta_1 \nu^{s_1} \times \chi_W \left(\frac{3}{2}, \frac{l-1}{2}\right) \rtimes \tau_1 \twoheadrightarrow \sigma.$$

Odavde na isti način kao u prethodnim slučajevima[6] dolazimo do

$$\chi_W \delta_r \nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_W \delta_1 \nu^{s_1} \rtimes \theta_{-l}(\pi_0) \twoheadrightarrow \sigma.$$

[6] Ovo je zapravo diskusija u slučaju 3 prethodnog odjeljka, uključujući lemu 4.19.

Preostaje odrediti standardni modul reprezentacije $\sigma = \theta_{-l}(\pi)$, a to sada možemo napraviti isto kao u prethodnim dijelovima slučaja 2: uvodimo reprezentaciju S u koju grupiramo sva pojavljivanja reprezentacije $|\cdot|^{\frac{1}{2}}$ u standardnom modulu, te nastavljamo s istom argumentacijom.

Prema tome, vidimo da u svim podslučajevima slučaja 2 dolazimo do istog rezultata: vrijedi

$$\chi_W\delta_r\nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_W\delta_1\nu^{s_1} \rtimes \theta_{-l}(\pi_0) \twoheadrightarrow \theta_{-l}(\pi)$$

i

$$\theta_{-l}(\pi) = L(\chi_W\delta_r\nu^{s_r}, \ldots, \chi_W\delta_1\nu^{s_1}, \chi_W|\cdot|^{\frac{l-1}{2}}, \ldots, \chi_W|\cdot|^{\frac{3}{2}}; \theta_{-2}(\pi_0)).$$

Slučaj 3: gornji toranj, $l(\pi_0) = 2$, $m_\phi(\chi_V S_2) = 2h > 0$

Ovaj je slučaj analogan **slučaju 1b** iz prethodnog odjeljka. Naime, budući da je kratnost reprezentacije $\chi_V S_2$ u parametru ϕ (reprezentacije π_0) parna, vidimo da se ona ne pojavljuje u parametru reprezentacije π_{00}. Zbog toga se π_{00} na gornjem tornju prvi put pojavljuje na nivou $l = -2$; lift $\theta_{-2}(\pi_{00})$ je temperiran (štoviše, radi se o reprezentaciji diskretne serije) te opet vrijedi

$$\chi_W|\cdot|^{\frac{l-1}{2}} \times \cdots \times \chi_W|\cdot|^{\frac{3}{2}} \rtimes \theta_{-2}(\pi_{00}) \twoheadrightarrow \theta_{-l}(\pi_{00}).$$

Uzevši ovo u obzir u epimorfizmu (2), dolazimo do

$$\chi_W\Pi \times \chi_W\Delta \times \chi_W\left(\frac{3}{2}, \frac{l-1}{2}\right) \rtimes \theta_{-2}(\pi_{00}) \twoheadrightarrow \sigma,$$

pri čemu smo iskoristili oznaku $\Pi = \delta_r\nu^{s_r} \times \cdots \times \delta_1\nu^{s_1}$. Već uobičajenim argumentom (lema 4.1) vidimo da $\left(\frac{3}{2}, \frac{l-1}{2}\right)$ može zamijeniti mjesta sa svim reprezentacijama u Δ, osim sa St_2. Kao i do sada u ovakvim situacijama, možemo pisati $\Delta = (\mathrm{St}_2, h) \times \Delta'$ pa napomena 4.4 pokazuje da imamo dvije mogućnosti:

(i) $\chi_W\Pi \times \chi_W\left(\frac{3}{2}, \frac{l-1}{2}\right) \times \chi_W\Delta \rtimes \theta_{-2}(\pi_{00}) \twoheadrightarrow \sigma$;

(ii) $\chi_W\Pi \times \chi_W L \times (\chi_W\mathrm{St}_2, h-1) \times \chi_W\Delta' \rtimes \theta_{-2}(\pi_{00}) \twoheadrightarrow \sigma$,

pri čemu je $L = L(|\cdot|^{\frac{l-1}{2}} \times \cdots \times |\cdot|^{\frac{5}{2}} \times \mathrm{St}_3\nu^{\frac{1}{2}})$.

Pokažimo da opcija (i) nije moguća. Ako vrijedi (i), onda postoji ireducibilni (i temperirani) subkvocijent τ_1 reprezentacije $\chi_W\Delta \rtimes \theta_{-2}(\pi_{00})$ takav da vrijedi

$$\chi_W\Pi \times \chi_W\left(\frac{3}{2}, \frac{l-1}{2}\right) \rtimes \tau_1 \twoheadrightarrow \sigma.$$

Sada možemo argumentirati kao u **slučaju 3** iz prethodnog odjeljka, ponavljajući diskusiju koja uključuje lemu 4.19: iz gornjeg epimorfizma slijedi da bi reprezentacija $\Theta_{-l}(\pi_0)$ trebala imati subkvocijent čiji je standardni modul oblika

$$\chi_W|\cdot|^{\frac{l-1}{2}} \times \cdots \times \chi_W|\cdot|^{\frac{3}{2}} \rtimes \tau_1.$$

Da ovo nije moguće, pokazujemo primjenom već uobičajenog argumenta, kao u lemi 4.17: induktivnim postupkom vidimo da bi trebalo vrijediti $\theta_{-2}(\pi_0) \neq 0$, no to je u kontradikciji s pretpostavkama ovog slučaja. Time smo pokazali da opcija (i) nije moguća.

Na sličan način možemo pokazati da opcija (ii) vodi do željenog zaključka. Najprije uočimo da, ako vrijedi (ii), postoji ireducibilni (i temperirani) subkvocijent τ_2 reprezentacije $(\chi_W \mathrm{St}_2, h-1) \times \chi_W \Delta' \rtimes \theta_{-2}(\pi_{00})$ takav da vrijedi

$$\chi_W \Pi \times \chi_W L \rtimes \tau_2 \twoheadrightarrow \sigma.$$

Pokažimo da reprezentacija na lijevoj strani ovog epimorfizma ima jedinstveni ireducibilni kvocijent. To pokazujemo primjenom leme 4.14; jedine situacije koje moramo tretirati posebno su one u kojima su neke od reprezentacija $\delta_r\nu^{s_r}, \ldots, \delta_1\nu^{s_1}$ definirane segmentom čiji je gornji rub jednak $|\cdot|^{\frac{3}{2}}$ (tada nije zadovoljen uvjet opisan u napomeni 4.15).

S druge strane, budući da se u temperiranom nosaču reprezentacije π_0 pojavljuje $\mathrm{St}_2 = \delta([|\cdot|^{-\frac{1}{2}}, |\cdot|^{\frac{1}{2}}])$, vidimo da se među reprezentacijama $\delta_r\nu^{s_r}, \ldots, \delta_1\nu^{s_1}$ ne mogu pojavljivati $|\cdot|^{\frac{3}{2}}$ i $\delta([|\cdot|^{\frac{1}{2}}, |\cdot|^{\frac{3}{2}}])$. One su, naime, definirane segmentima koji su ulančani s $[|\cdot|^{-\frac{1}{2}}, |\cdot|^{\frac{1}{2}}]$, stoga bi se u tom slučaju standardni modul reducirao.

Jedina preostala reprezentacija koja može kvariti uvjet u napomeni 4.15 je $\mathrm{St}_3\nu^{\frac{1}{2}}$, no tada prema lemi 4.5 vidimo da L i $\mathrm{St}_3\nu^{\frac{1}{2}}$ mogu zamijeniti mjesta. Time smo pokazali da zapravo i u ovom slučaju možemo primijeniti postupak iz leme 4.14. Zaključujemo da reprezentacija u opciji (ii) doista ima jedinstveni ireducibilni kvocijent.

Posebno, odavde slijedi da je subkvocijent (nazovimo ga σ_0) reprezentacije $\chi_W L \rtimes \tau_2$ koji sudjeluje u gornjem epimorfizmu jednak upravo njezinom (jedinstvenom) ireducibilnom kvocijentu. Argumentirajući kao u lemi 4.16, zaključujemo da je σ_0 ujedno i subkvocijent reprezentacije $\Theta_{-l}(\pi_0)$. Prema tome, tražimo neki subkvocijent reprezentacije $\Theta_{-l}(\pi_0)$ čiji standardni modul ima oblik

$$|\cdot|^{\frac{l-1}{2}} \times \cdots \times |\cdot|^{\frac{5}{2}} \times \mathrm{St}_3\nu^{\frac{1}{2}} \rtimes \tau_2.$$

Postupak iz leme 4.17 sada pokazuje da bi reprezentacija $L(\mathrm{St}_3\nu^{\frac{1}{2}} \rtimes \tau_2)$ trebala biti subkvocijent od $\Theta_{-4}(\pi_0)$, a diskusija kao u **slučaju 1b** da je jedini takav subkvocijent upravo $\theta_{-4}(\pi_0)$.

Prema tome, zaključujemo da vrijedi

$$|\cdot|^{\frac{l-1}{2}} \times \cdots \times |\cdot|^{\frac{5}{2}} \rtimes \theta_{-4}(\pi_0) \twoheadrightarrow \sigma_0.$$

Rezultati o liftovima temperiranih reprezentacija (napomena 4.24) pokazuju da je tada reprezentacija σ_0 jednaka upravo $\theta_{-l}(\pi_0)$.

Time smo pokazali da i u ovom slučaju vrijedi

$$\chi_W\Pi \rtimes \theta_{-l}(\pi_0) \twoheadrightarrow \theta_{-l}(\pi).$$

Provedena diskusija također pokazuje da imamo

$$\theta_{-l}(\pi) = L(\chi_W\delta_r\nu^{s_r}, \dots, \chi_W\delta_1\nu^{s_1}, \chi_W|\cdot|^{\frac{l-1}{2}}, \dots, \chi_W|\cdot|^{\frac{5}{2}}, \chi_W\mathrm{St}_3\nu^{\frac{1}{2}}; (\chi_W\mathrm{St}_2, h-1)\rtimes\theta_{-2}(\pi_0')),$$

gdje je π_0' (jedinstvena) ireducibilna temperirana reprezentacija takva da vrijedi $\pi_0 \hookrightarrow (\chi_V\mathrm{St}_2, h) \rtimes \pi_0'$. Uočimo da parametar reprezentacije $\theta_{-2}(\pi_0')$ sadrži $\chi_W S_2$, stoga je reprezentacija $\chi_W(\mathrm{St}_2, h-1) \rtimes \theta_{-2}(\pi_0')$ ireducibilna i temperirana.

Slučaj 4: gornji toranj, $l(\pi_0) = 2$, kratnost $m_\phi(\chi_V S_2)$ neparna

Ovaj (posljednji) slučaj odgovara **slučaju 3** iz prethodnog odjeljka. Ukratko opisujemo ključne korake.

Najprije, činjenica da je kratnost $m_\phi(\chi_V S_2)$ neparna implicira da i parametar reprezentacije π_{00} sadrži $\chi_V S_2$. Zbog toga se π_{00} na gornjem tornju prvi put pojavljuje na nivou $l = -4$; lift $\theta_{-4}(\pi_{00})$ je temperiran, a za $l > 4$ imamo

$$\chi_W|\cdot|^{\frac{l-1}{2}} \times \cdots \times \chi_W|\cdot|^{\frac{5}{2}} \rtimes \theta_{-4}(\pi_{00}) \twoheadrightarrow \theta_{-l}(\pi_{00}).$$

Iskoristimo li ovo u epimorfizmu (2), dobivamo

$$\chi_W\Pi \times \chi_W\Delta \times \chi_W\left(\frac{5}{2}, \frac{l-1}{2}\right) \rtimes \theta_{-4}(\pi_{00}) \twoheadrightarrow \sigma.$$

Prvi dio ovog slučaja odnosi se na situacije kada Δ ne sadrži St_4. Tada reprezentacija $\left(\frac{5}{2}, \frac{l-1}{2}\right)$ može zamijeniti mjesta sa svim reprezentacijama koje sudjeluju u Δ pa dobivamo

$$\chi_W\Pi \times \chi_W\left(\frac{5}{2}, \frac{l-1}{2}\right) \times \chi_W\Delta \rtimes \theta_{-4}(\pi_{00}) \twoheadrightarrow \sigma.$$

Zaključujemo da postoji ireducibilni (i temperirani) subkvocijent τ reprezentacije $\chi_W\Delta \rtimes \theta_{-4}(\pi_{00})$ takav da vrijedi

$$\chi_W\Pi \times \chi_W\left(\frac{5}{2}, \frac{l-1}{2}\right) \rtimes \tau \twoheadrightarrow \sigma.$$

Sada kao u slučaju 3 iz prethodnog odjeljka (koristeći diskusiju koja uključuje lemu 4.19) pokazujemo da odavde slijedi

$$\chi_W\Pi \rtimes \theta_{-l}(\pi_0) \twoheadrightarrow \sigma.$$

Preostaje odrediti standardni modul reprezentacije $\sigma = \theta_{-l}(\pi)$. Jedine situacije u kojima se ne može primijeniti postupak iz leme 4.14 su one u kojima se među reprezentacijama koje definiraju Π nalaze $\delta([|\cdot|^{-\frac{1}{2}}, |\cdot|^{\frac{3}{2}}])$, $\delta([|\cdot|^{\frac{1}{2}}, |\cdot|^{\frac{3}{2}}])$ ili $|\cdot|^{\frac{3}{2}}$. Sva njihova pojavljivanja[7] možemo, kao u slučaju 3 iz prethodnog odjeljka, grupirati u reprezentaciju S tako da imamo $\Pi = \Pi' \times S$.

Tada zbog ireducibilnosti standardnog modula možemo umjesto S promatrati i $S^\vee$, pa lako dolazimo do epimorfizma

$$\chi_W \Pi' \times \chi_W S^\vee \times \chi_W \Delta \rtimes \Theta_{-l}(\pi_{00}) \twoheadrightarrow \sigma.$$

Argumentirajući kao u lemi 4.21 odavde dobivamo

$$\chi_W \Pi' \times \chi_W S^\vee \times \chi_W \Delta \rtimes \theta_{-l}(\pi_{00}) \twoheadrightarrow \sigma.$$

Kako vrijedi $\chi_W \left(\frac{5}{2}, \frac{l-1}{2}\right) \rtimes \theta_{-4}(\pi_{00}) \twoheadrightarrow \theta_{-l}(\pi_{00})$, a $\left(\frac{5}{2}, \frac{l-1}{2}\right)$ može zamijeniti mjesta sa svim reprezentacijama iz $S^\vee$ i Δ (jer se St_4 ne pojavljuje u ovom slučaju), možemo pisati

$$\chi_W \Pi' \times \chi_W \left(\frac{5}{2}, \frac{l-1}{2}\right) \times \chi_W S^\vee \times \chi_W \Delta \rtimes \theta_{-4}(\pi_{00}) \twoheadrightarrow \sigma.$$

Konačno, zaključujemo da postoji ireducibilni subkvocijent B reprezentacije $\chi_W S^\vee \times \chi_W \Delta \rtimes \theta_{-4}(\pi_{00})$ takav da vrijedi

$$\chi_W \Pi' \times \chi_W \left(\frac{5}{2}, \frac{l-1}{2}\right) \rtimes B \twoheadrightarrow \sigma.$$

Usporedbom ovog epimorfizma s (već dokazanim) $\chi_W \Pi \rtimes \theta_{-l}(\pi_0) \twoheadrightarrow \sigma$ pomoću napomene 4.6 zaključujemo da je standardni modul reprezentacije B jednak upravo $\chi_W \rtimes \theta_{-4}(\pi_0)$.

Napomena. Pojasnimo gornju tvrdnju. Neka je $\delta_b' \nu^{t_b} \times \cdots \times \delta_1' \nu^{t_1} \rtimes \tau'$ standardni modul reprezentacije B. Najprije, epimorfizmi

$$\begin{aligned} \chi_W \Pi' \times \chi_W \left(\frac{5}{2}, \frac{l-1}{2}\right) &\rtimes B \twoheadrightarrow \sigma \\ \text{i} \quad \chi_W \Pi &\rtimes \theta_{-l}(\pi_0) \twoheadrightarrow \sigma \end{aligned}$$

zajedno s napomenom 4.6 pokazuju da vrijedi $\tau' = \theta_{-4}(\pi_0)$. Osim toga, primjenom iste napomene vidimo da segmenti koji definiraju reprezentacije $\delta_b' \nu^{t_b}, \ldots, \delta_1' \nu^{t_1}$ moraju u uniji davati multiskup koji je jednak uniji segmenata iz S.

Sjetimo se, u S mogu sudjelovati reprezentacije

- $|\cdot|^{\frac{3}{2}}$

[7] Prve dvije reprezentacije mogu se pojaviti najviše jednom; u suprotnom bi se standardni modul reducirao.

- $\delta([|\cdot|^{\frac{1}{2}}, |\cdot|^{\frac{3}{2}}])$ najviše jednom (napomena 4.20)
- $\delta([|\cdot|^{\frac{-1}{2}}, |\cdot|^{\frac{3}{2}}])$ najviše jednom; ako se pojavljuje, onda se prethodne dvije ne pojavljuju (napomena 4.20).

Prema tome, imamo tri mogućnosti: $S = \delta([|\cdot|^{\frac{-1}{2}}, |\cdot|^{\frac{3}{2}}])$, $S = |\cdot|^{\frac{3}{2}} \times \cdots \times |\cdot|^{\frac{3}{2}}$ i $S = |\cdot|^{\frac{3}{2}} \times \cdots \times |\cdot|^{\frac{3}{2}} \times \delta([|\cdot|^{\frac{1}{2}}, |\cdot|^{\frac{3}{2}}])$.

Ako je $S = \delta([|\cdot|^{\frac{-1}{2}}, |\cdot|^{\frac{3}{2}}])$ ili $S = |\cdot|^{\frac{3}{2}} \times \cdots \times |\cdot|^{\frac{3}{2}}$, očito imamo samo jedan način za rasporediti odgovarajući multiskup u reprezentacije $\delta_b'\nu^{t_b}, \dots, \delta_1'\nu^{t_1}$.

S druge strane, ako je $S = |\cdot|^{\frac{3}{2}} \times \cdots \times |\cdot|^{\frac{3}{2}} \times \delta([|\cdot|^{\frac{1}{2}}, |\cdot|^{\frac{3}{2}}])$, može se učiniti da imamo dva načina za rasporediti multiskup:

$$\begin{aligned}
&1) \quad \delta_b'\nu^{t_b} \times \cdots \times \delta_1'\nu^{t_1} = |\cdot|^{\frac{3}{2}} \times \cdots \times |\cdot|^{\frac{3}{2}} \times \delta([|\cdot|^{\frac{1}{2}}, |\cdot|^{\frac{3}{2}}]) = S \\
&2) \quad \delta_b'\nu^{t_b} \times \cdots \times \delta_1'\nu^{t_1} = |\cdot|^{\frac{3}{2}} \times \cdots \times |\cdot|^{\frac{3}{2}} \times |\cdot|^{\frac{3}{2}} \times |\cdot|^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Ipak, kada bi vrijedilo (2), Jacquetov modul reprezentacije B (u odnosu na odgovarajuću paraboličku podgrupu P) morao bi imati kvocijent oblika

$$|\cdot|^{-\frac{3}{2}} \otimes \cdots \otimes |\cdot|^{-\frac{3}{2}} \otimes |\cdot|^{-\frac{3}{2}} \otimes |\cdot|^{-\frac{1}{2}} \otimes \tau'.$$

Jednostavan račun (koristimo formulu za M^* iz sekcije 1.5.3) i primjena Casselmanovog kriterija sada pokazuju da $R_P(\chi_W S^\vee \times \chi_W \Delta \rtimes \theta_{-4}(\pi_{00}))$ nema takvih subkvocijenata.

Prema tome, vidimo da u svim slučajevima mora vrijediti $\delta_b'\nu^{t_b} \times \cdots \times \delta_1'\nu^{t_1} = S$. Time je željena tvrdnja dokazana.

Prethodna napomena pokazuje da vrijedi

$$\chi_W \Pi' \times \chi_W \left(\frac{5}{2}, \frac{l-1}{2}\right) \times \chi_W S \times \theta_{-4}(\pi_0).$$

Sada konačno možemo primijeniti postupak iz leme 4.14 i dobiti željenu tvrdnju.

Na kraju valja uočiti i sljedeći detalj: ako se u Π' pojavljuje reprezentacija $|\cdot|^{\frac{1}{2}}$, onda reprezentacije iz S neće biti na dobrom mjestu nakon što završimo s induktivnim postupkom iz leme 4.14 – trebale bi zamijeniti mjesta s $|\cdot|^{\frac{1}{2}}$. Ako se radi o $\delta([|\cdot|^{\frac{1}{2}}, |\cdot|^{\frac{3}{2}}])$ ili $\delta([|\cdot|^{\frac{-1}{2}}, |\cdot|^{\frac{3}{2}}])$, možemo slobodno izvesti zamjenu. S $|\cdot|^{\frac{3}{2}}$ ne možemo jednostavno napraviti zamjenu jer se $|\cdot|^{\frac{1}{2}} \times |\cdot|^{\frac{3}{2}}$ reducira, no upravo zbog ove redukcije vidimo da se $|\cdot|^{\frac{1}{2}}$ i $|\cdot|^{\frac{3}{2}}$ ni ne mogu zajedno pojaviti u standardnom modulu.

Time smo i u ovom slučaju odredili standardni modul reprezentacije $\theta_{-l}(\pi)$: vrijedi

$$\theta_{-l}(\pi) = L(\chi_W \delta_r \nu^{s_r}, \dots, \chi_W \delta_1 \nu^{s_1}, \chi_W |\cdot|^{\frac{l-1}{2}}, \dots, \chi_W |\cdot|^{\frac{5}{2}}; \theta_{-4}(\pi_0)).$$

Preostaje provjeriti što se događa ako π_0 sadrži reprezentaciju $\chi_V \mathrm{St}_4$ u temperiranom nosaču. Argumentirajući na isti način kao u lemi 4.22, pokazujemo da i u tom slučaju vrijedi

$$\chi_W \Pi \rtimes \theta_{-l}(\pi_0) \twoheadrightarrow \theta_{-l}(\pi),$$

odnosno

$$\chi_W \Pi \times \chi_W \left(\frac{5}{2}, \frac{l-1}{2}\right) \rtimes \theta_{-4}(\pi_0) \twoheadrightarrow \theta_{-l}(\pi).$$

Sada postupamo kao u prethodnom dijelu ovog slučaja: ako se u Π ne pojavljuju $|\cdot|^{\frac{3}{2}}$, $\delta([|\cdot|^{\frac{1}{2}}, |\cdot|^{\frac{3}{2}}])$ ni $\delta([|\cdot|^{-\frac{1}{2}}, |\cdot|^{\frac{3}{2}}])$, dovršavamo dokaz primjenom leme 4.14. U suprotnom, grupirajući sva pojavljivanja ovih reprezentacija u S, dolazimo do epimorfizma

$$\chi_W \Pi' \times \chi_W \Delta \times \chi_W S^\vee \rtimes \Theta_{-l}(\pi_{00}) \twoheadrightarrow \sigma.$$

Diskusijom kao u slučaju 3 iz prethodnog odjeljka dobivamo

$$\chi_W \Pi' \times \chi_W \left(\frac{5}{2}, \frac{l-1}{2}\right) \times B \twoheadrightarrow \sigma,$$

pri čemu je B neki ireducibilni subkvocijent reprezentacije $\chi_W S^\vee \times \chi_W \Delta \rtimes \Theta_{-l}(\pi_{00})$. Ostatak dokaza identičan je onome u prethodnom dijelu ovog slučaja, kada π_0 nije sadržavala $\chi_V \mathrm{St}_4$ u temperiranom nosaču.

*

* *

Time smo iscrpili sve slučajeve i za $\pi \in \mathrm{Irr}(\mathrm{Mp}(W_n))$. Sažetak rezultata po slučajevima dan je u sljedećem teoremu:

Teorem 4.26 Neka je π ireducibilna generička reprezentacija metaplektičke grupe. Pretpostavimo, nadalje, da je standardni modul

$$\chi_V \delta_r \nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_V \delta_1 \nu^{s_1} \rtimes \pi_0$$

reprezentacije π ireducibilan. Neka je $l \geqslant 0$ paran prirodni broj takav da vrijedi $\theta_{-l}(\pi) \neq 0$. Tada vrijedi

$$\chi_W \delta_r \nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_W \delta_1 \nu^{s_1} \rtimes \theta_{-l}(\pi_0) \twoheadrightarrow \theta_{-l}(\pi).$$

Nadalje, ako je $\theta_{-l}(\pi_0) = L(\chi_W \delta'_k \nu^{t_k} \times \cdots \times \chi_W \delta'_1 \nu^{t_1} \rtimes \tau)$, onda je reprezentacija $\theta_{-l}(\pi)$ jedinstveno određena s

$$\theta_{-l}(\pi) = L(\chi_W \delta_r \nu^{s_r}, \ldots, \chi_W \delta_1 \nu^{s_1}, \chi_W \delta'_k \nu^{t_k}, \ldots, \chi_W \delta'_1 \nu^{t_1}; \tau).$$

4.5 Primjena: konstrukcija unitarizabilnih reprezentacija

U teoremima 4.23 i 4.26 dobili smo potpuni opis viših liftova generičkih reprezentacija. U kombinaciji s rezultatima iz članaka [21] i [20], ovi rezultati otvaraju mogućnost za eksplicitnu konstrukciju velikog broja unitarizabilnih reprezentacija.

Klasifikacija unitarizabilnih reprezentacija – tj. određivanje tzv. unitarnog duala dane grupe – jedan je od najvažnijih problema u teoriji reprezentacija. U nearhimedskom slučaju ovaj je problem riješen za opće linearne grupe (Tadić, [35]) dok općenito za klasične grupe postoje samo parcijalni rezultati: sferički dio unitarnog duala opisan je u [3] (Barbasch, Moy), generički dio u [20] (Lapid, Muić, Tadić), a potpuni opisi unitarnog duala postoje tek u posebnim slučajevima manjeg ranga. U skladu s time, naša konstrukcija unitarizabilnih reprezentacija može biti veoma korisna jer omogućuje uvid u strukturu unitarnog duala za grupe proizvoljno visokog ranga.

Osnovni rezultat koji koristimo je činjenica da su dovoljno visoki liftovi unitarizabilnih reprezentacija i sami unitarizabilni:

Teorem 4.27 (J. S. Li, [21]) Neka je π ireducibilna i unitarizabilna reprezentacija grupe G_n. Tada je, za dovoljno veliki m, i reprezentacija $\theta(\pi, V_m)$ unitarizabilna.

Napomena 4.28 Uvjet iz prethodnog teorema može se i eksplicirati: ako je $V_m = V_a \oplus V_h$ Wittov rastav prostora V_m (sekcija 1.1.1), onda je dovoljno da vrijedi $\dim V_h \geqslant 2 \dim W_n$ (tzv. **stable range**).

Koristeći ovaj teorem dobivamo, krenuvši od jedne generičke unitarizabilne reprezentacije simplektičke ili metaplektičke grupe, beskonačan niz unitarizabilnih reprezentacija ortogonalnih grupa iz istog tornja. Teoremi 4.23 i 4.26 daju eksplicitan opis njihovih standardnih modula.

Za konkretnije primjere možemo iskoristiti glavni rezultat iz članka [20] (teorem 1.1) kojim su u potpunosti opisane unitarizabilne generičke reprezentacije simplektičke grupe:

Teorem 4.29 Neka je reprezentacija π simplektičke grupe zadana s

$$\pi \cong \chi_V \delta_r \nu^{s_r} \times \cdots \times \chi_V \delta_1 \nu^{s_1} \rtimes \pi_0$$

pri čemu su za svaku reprezentaciju diskretne serije $\delta \in \mathrm{Irr}(\mathrm{GL}_m(\mathbb{F}))$ vrijedi

(1) $\mathcal{E}_\pi(\delta^\vee) = \mathcal{E}_\pi(\delta)$;

(2) ako je $\delta \not\cong \delta^\vee$ ili ako je $\delta\nu^{\frac{1}{2}} \rtimes \mathbb{1}_0$ reducibilna, onda vrijedi $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ za sve $\alpha \in \mathcal{E}_\pi(\delta)$;

(3) ako je $\delta \cong \delta^\vee$ i $\delta\nu^{\frac{1}{2}} \rtimes \mathbb{1}_0$ ireducibilna, onda je skup $\mathcal{E}_\pi(\delta)$ jednak $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_l\}$ gdje je

$$0 < \alpha_1 \leqslant \cdots \leqslant \alpha_k < \frac{1}{2} \leqslant \beta_1 < \cdots < \beta_l < 1$$

i vrijedi

(a) $\alpha_i + \beta_j \neq 1$ za $i = 1, \dots, k$ i $j = 1, \dots, l$;

(b) broj $\#\{1 \leqslant i \leqslant k\colon \alpha_i > 1 - \beta_1\}$ je paran ako je $l > 0$;

(c) broj $\#\{1 \leqslant i \leqslant k\colon 1 - \beta_j > \alpha_i > 1 - \beta_{j+1}\}$ je neparan za $j = 1, \dots, l-1$;

(d) broj $k + l$ je paran ako je reprezentacija $\delta \rtimes \pi_0$ reducibilna

(ovdje $\mathcal{E}_\pi(\delta)$ označava multiskup svih eksponenata s_i za koje je $\chi_V \delta_i = \delta$).

Tada je π ireducibilna, unitarizabilna i generička. Obratno, svaka ireducibilna unitarizabilna generička reprezentacija može se jedinstveno prikazati na ovaj način.

Time dolazimo do sljedećih primjera:

Primjer 4.30 Neka je $0 < \alpha < 1$ te neka je $\mathbb{1}$ trivijalna reprezentacija grupe $\mathrm{O}(V_2)$. pri čemu je $V_2 = V_{1,1}$ rascijepljeni kvadratni prostor dimenzije 2; odgovarajući karakter χ_V je trivijalan. Tada je za svaki $r \in \mathbb{N}$ reprezentacija

$$L(|\cdot|^r \times |\cdot|^{r-1} \times \cdots \times |\cdot|^1 \times |\cdot|^\alpha \rtimes \mathbb{1})$$

unitarizabilna.

Dokaz. Promatramo liftove reprezentacije $\pi = |\cdot|^\alpha \rtimes \mathbb{1}_0$ grupe $\mathrm{Sp}(W_2) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{F})$ na rascijepljeni ortogonalni toranj. Ovdje smo s $\mathbb{1}_0$ označili trivijalnu reprezentaciju (trivijalne) grupe $\mathrm{Sp}(W_0)$.

Znamo da je reprezentacija π ireducibilna i unitarizabilna. Poznato je da su sve netrivijalne reprezentacije grupe $\mathrm{Sp}(W_2) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{F})$ nužno generičke, stoga je i π generička.

Nadalje, lako je vidjeti da vrijedi $l(\mathbb{1}_0) = 1$ (Kudla [18, str. 85]). Odavde pomoću teorema 3.1 slijedi i $l(\pi) = 1$. Zaključujemo da se nalazimo u slučaju 2 prema podjeli iz sekcije 4.3.

Kako je $\theta_{-1}(\mathbb{1}_0) = \theta(\mathbb{1}_0, V_2) = \mathbb{1} \in \mathrm{Irr}(\mathrm{O}(V_2))$, prema teoremu 4.23 zaključujemo da za neparan $l \geqslant 1$ vrijedi

$$\theta_{-l}(\pi) = L(|\cdot|^r \times |\cdot|^{r-1} \times \cdots \times |\cdot|^1 \times |\cdot|^\alpha \rtimes \mathbb{1})$$

(ovdje je $r = \frac{l-1}{2}$). Konačno, budući da je već za $l = 1$ ispunjen uvjet iz prethodne napomene, teorem 4.27 povlači da je gornja reprezentacija unitarizabilna za svaki $l \geqslant 1$, čime je dokazana tvrdnja iz primjera. □

Primjer 4.31 Neka je χ netrivijalni karakter grupe $\mathbb{F}^\times$ takav da vrijedi $\chi^2 = 1$; označimo kao u prethodnom primjeru s $\mathbb{1}$ trivijalnu reprezentaciju grupe $\mathrm{O}(V_{1,1})$. Reprezentacija $\chi \rtimes \mathbb{1}$ ima dva ireducibilna (temperirana) sumanda – nazovimo ih τ_1 i τ_2.

Tada je za svaki $r \geqslant 2$ reprezentacija

$$L(|\cdot|^r \times |\cdot|^{r-1} \times \cdots \times |\cdot|^1 \times \mathrm{St}_2\nu^{\frac{1}{4}} \rtimes \tau_i), \quad i = 1, 2$$

unitarizabilna.

Dokaz. Reprezentacija $\chi \rtimes \mathbb{1}_0$ grupe $\mathrm{Sp}(W_2)$ je potpuno reducibilna, duljine 2. Oba ireducibilna sumanda su temperirana; nazovimo ih π_0^1 i π_0^2.

Kao i u prethodnom primjeru, reprezentacije π_0^1 i π_0^2 su generičke (s obzirom na različite karaktere). Također, nije teško vidjeti da je reprezentacija $\mathrm{St}_2\nu^{\frac{1}{2}} \rtimes \mathbb{1}_0$ reducibilna, pa prema uvjetu (2) teorema 4.29 slijedi da su obje reprezentacije

$$\pi^i \cong \mathrm{St}_2\nu^{\frac{1}{4}} \rtimes \pi_0^i, \quad i = 1, 2$$

ireducibilne, generičke i unitarizabilne. Uočimo da su π^1 i π^2 generičke s obzirom na različite aditivne karaktere polja $\mathbb{F}$; označimo te karaktere s ψ_1 i ψ_2.

Sada promatramo liftove reprezentacije π^1 na rascijepljeni ortogonalni toranj, kao u prethodnom primjeru. Znamo da vrijedi $l(\pi_0^1) = 1$: ovo slijedi iz činjenice da je parametar ϕ reprezentacije π_0^1 jednak $\chi \oplus \mathbb{1} \oplus \chi$ i teorema 2.15. Pomoću teorema 3.1 sada zaključujemo da vrijedi i $l(\pi) = 1$, pa vidimo da se opet nalazimo u slučaju 2 (sekcija 4.3).

Nije teško vidjeti da vrijedi $\theta_{-1}(\pi_0^1)$ direktni sumand reprezentacije $\chi \rtimes \mathbb{1}$, stoga bez smanjenja općenitosti možemo pisati $\theta_{-1}(\pi_0^1) = \tau_1$. Teorem 4.23 sada daje

$$\theta_{-l}(\pi^1) = L(|\cdot|^r \times |\cdot|^{r-1} \times \cdots \times |\cdot|^1 \times \mathrm{St}_2\nu^{\frac{1}{4}} \rtimes \tau_1)$$

za $l > 1$ neparan ($r = \frac{l-1}{2}$). Konačno, teorem 4.27 pokazuje da je ova reprezentacija unitarizabilna za sve dovoljno velike r; prema napomeni 4.28 vidimo da je dovoljno $r \geqslant 2$, odakle slijedi tvrdnja.

Uočimo da tvrdnja iz primjera još nije u potpunosti dokazana jer smo ovdje proveli račun samo za π^1, dok liftove reprezentacije π^2 nismo komentirali. Iste zaključke dobivamo i počevši od π^2, no potrebno je uzeti u obzir još jedan detalj:

Prisjetimo se da Weilova reprezentacija kojom zadajemo theta korespondenciju ovisi o izboru netrivijalnog aditivnog karaktera ψ polja $\mathbb{F}$ (napomena 2.1). Kao u svim dosadašnjim razmatranjima, u gornjem smo računu koristili theta korespondenciju definiranu pomoću istog aditivnog karaktera s obzirom na koji definiramo generičnost – u našem slučaju, to je bio ψ_1 (napomena 2.14). Zbog toga, ako želimo analogni zaključak izvesti i za reprezentaciju π^2, moramo koristiti drugačiju theta korespondenciju, to jest onu definiranu pomoću ψ_2. $\square$

Primjer 4.32 Neka je, kao u prethodnim primjerima, $\mathbb{1}$ trivijalna reprezentacija grupe $\mathrm{O}(V_2)$. Reprezentacija $|\cdot|^{-1} \rtimes \mathbb{1}$ ima jedinstveni temperirani subkvocijent kojeg označimo s τ (nije teško pokazati da je riječ o reprezentaciji diskretne serije).

Tada je za $r \geqslant 6$

$$L(|\cdot|^r \times |\cdot|^{r-1} \times \cdots \times |\cdot|^1 \times \mathrm{St}_3\nu^{\frac{1}{2}} \times \mathrm{St}_3\nu^{\frac{1}{3}} \rtimes \tau)$$

unitarizabilna.

Dokaz. Označimo sa $\mathrm{St}_{\mathrm{Sp}_2}$ Steinbergovu reprezentaciju grupe $\mathrm{Sp}(W_2)$, to jest jedinstveni ireducibilni kvocijent reprezentacije $|\cdot|^{-1} \rtimes \mathbb{1}_0$. Radi se o generičkoj reprezentaciji diskretne serije.

Prema uvjetu (3) teorema 4.29 slijedi da je reprezentacija

$$\pi = \mathrm{St}_3\nu^{\frac{1}{2}} \times \mathrm{St}_3\nu^{\frac{1}{3}} \rtimes \mathrm{St}_{\mathrm{Sp}_2}$$

ireducibilna, generička i unitarizabilna: uvjete tog teorema u ovom primjeru provjeravamo za $\delta = \mathrm{St}_3$, a nije teško vidjeti da je reprezentacija $\mathrm{St}_3\nu^{\frac{1}{2}} \rtimes \mathbb{1}_0$ ireducibilna te da je zbog toga relevantan upravo uvjet (3).

Ponovno promatramo liftove reprezentacije π na rascijepljeni ortogonalni toranj. Ovaj put imamo $l(\mathrm{St}_{\mathrm{Sp}_2}) = -1$ jer je parametar ϕ reprezentacije $\mathrm{St}_{\mathrm{Sp}_2}$ jednak S_3. Pomoću teorema 3.1 sada zaključujemo da vrijedi i $l(\pi) = -1$, stoga se ovaj put nalazimo u slučaju 1a iz sekcije 4.3.

Nije teško vidjeti da vrijedi upravo $\tau = \theta_{-1}(\mathrm{St}_{\mathrm{Sp}_2})$. Sada pomoću teorema 4.23 dobivamo

$$\theta_{-l}(\pi) = L(|\cdot|^r \times |\cdot|^{r-1} \times \cdots \times |\cdot|^1 \times \mathrm{St}_3\nu^{\frac{1}{2}} \times \mathrm{St}_3\nu^{\frac{1}{3}} \rtimes \tau)$$

za $l > 1$ neparan ($r = \frac{l-1}{2}$). Kao i u prethodna dva primjera, teorem 4.27 pokazuje da je ova reprezentacija unitarizabilna za sve dovoljno velike r, a napomena 4.28 da je dovoljno $r \geqslant 6$. Odavde slijedi tvrdnja. $\square$

Na sličan način, koristeći teoreme 4.27 i 4.29, možemo konstruirati velik broj unitarnih reprezentacija.

Zaključak

Zbog mnogobrojnih i raznovrsnih primjena, proučavanje theta korespondencije vrlo je aktivna tema unutar teorije reprezentacija. Iako je u posljednjih nekoliko godina ostvaren značajan napredak, velik dio theta korespondencije još je uvijek neistražen. Originalni doprinos ovog rada sastoji se od opisa theta liftova za generičke reprezentacije simplektičke, odnosno metaplektičke grupe. Budući da se radi o sistematičnom opisu liftova za jednu veoma bitnu klasu netemperiranih reprezentacija, ovime je ostvaren važan korak prema ukupnom opisu lokalne theta korespondencije.

Očekujemo brojne zanimljive primjene dokazanih rezultata. Jednu od njih istaknuli smo i u zaključnom poglavlju: opis liftova generičkih reprezentacija na grupe višeg ranga otvara mogućnost za eksplicitnu konstrukciju velikog broja unitarnih reprezentacija, što se može pokazati korisnim u istraživanju veoma bitnog pitanja o izgledu unitarnog duala promatranih grupa.

Preostaje nekoliko otvorenih pitanja koja su usko vezana uz našu temu, ali čiji odgovori premašuju granice ove disertacije. Prije svega, postavlja se pitanje o izgledu theta korespondencije uz zamijenjene uloge grupa u dualnim parovima: zanimaju nas liftovi reprezentacija ortogonalne grupe na toranj simplektičkih, odnosno metaplektičkih grupa. Također, budući da nismo uzimali u obzir generičke reprezentacije metaplektičke grupe čiji se standardni modul reducira, opis liftova takvih reprezentacija predstavljao bi logičnu dopunu ovog rada. Odgovore na ova pitanja istražit ćemo u nadolazećim radovima.

Bibliografija

[1] J. Arthur. "The endoscopic classification of representations, volume 61 of American Mathematical Society Colloquium Publications". *American Mathematical Society, Providence, RI* (2013).

[2] H. Atobe i W. T. Gan. "Local theta correspondence of tempered representations and Langlands parameters". *Inventiones mathematicae* 210.2 (2017), str. 341–415.

[3] D. Barbasch i A. Moy. "Unitary spherical spectrum for p-adic classical groups". *Acta Applicandae Mathematica* 44.1-2 (1996), str. 3–37.

[4] J. Bernstein i K. Rumelhart. "Representations of p-adic groups Lectures by Joseph Bernstein". *Written by Karl E. Rumelhart. Harvard University.(Fall 1992)* 48 (1992).

[5] J. Bernstein i A. V. Zelevinsky. "Induced representations of reductive p-adic groups. I". *Ann. Sci. École Norm. Sup.(4)* 10.4 (1977), str. 441–472.

[6] A. Borel i H. Jacquet. "Automorphic forms and automorphic representations". *Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 1.* 1979.

[7] A. Borel i H. Jacquet. "Automorphic forms and automorphic representations". *Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 2.* 1979.

[8] B. Casselman. "Introduction to admissible representations of p-adic groups". *unpublished notes* (1995).

[9] W. T. Gan i G. Savin. "Representations of metaplectic groups I: epsilon dichotomy and local Langlands correspondence". *Compositio Mathematica* 148.6 (2012), str. 1655–1694.

[10] W. T. Gan i S. Takeda. "A proof of the Howe duality conjecture". *J. Amer. Math. Soc* 29.2 (2016), str. 473–493.

[11] W. T. Gan, B. H. Gross i D. Prasad. "Symplectic local root numbers, central critical L-values, and restriction problems in the representation theory of classical groups". *Astérisque* 346 (2012), str. 1–109.

[12] D. Goldberg. “Reducibility of induced representations for Sp(2n) and SO(n)”. *American Journal of Mathematics* 116.5 (1994), str. 1101–1151.

[13] M. Hanzer. “The generalized injectivity conjecture for classical p-adic groups”. *International mathematics research notices* 2010.2 (2009), str. 195–237.

[14] M. Hanzer i G. Muić. “Parabolic induction and Jacquet functors for metaplectic groups”. *Journal of algebra* 323.1 (2010), str. 241–260.

[15] M. Harris i R. Taylor. *The Geometry and Cohomology of Some Simple Shimura Varieties.(AM-151).* Sv. 151. Princeton university press, 2001.

[16] G. Henniart. “Une preuve simple des conjectures de Langlands pour GL(n) sur un corps p-adique”. *Inventiones mathematicae* 139.2 (2000), str. 439–455.

[17] R. Howe. “Transcending classical invariant theory”. *Journal of the American Mathematical Society* 2.3 (1989), str. 535–552.

[18] S. Kudla. “Notes on the local theta correspondence”. *unpublished notes, available online* (1996).

[19] S. Kudla. “On the local theta-correspondence”. *Inventiones mathematicae* 83.2 (1986), str. 229–255.

[20] E. Lapid, G. Muić i M. Tadić. “On the generic unitary dual of quasisplit classical groups”. *International mathematics research notices* 2004.26 (2004), str. 1335–1354.

[21] J.-S. Li. “Singular unitary representations of classical groups”. *Inventiones mathematicae* 97.2 (1989), str. 237–255.

[22] I. Matić. “Theta lifts of strongly positive discrete series: the case of $(\widetilde{\mathrm{Sp}}(n), \mathrm{O}(V))$”. *Pacific J. Math* 259.2 (2012), str. 445–471.

[23] C. Mœglin, M.-F. Vignéras i J.-L. Waldspurger. *Correspondances de Howe sur un corps p-adique.* Sv. 1291. Springer, 2006.

[24] G. Muić. “A proof of Casselman-Shahidi’s conjecture for quasi-split classical groups”. *Canadian mathematical bulletin* 44.3 (2001), str. 298–312.

[25] G. Muić. “Howe correspondence for discrete series representations; the case of (Sp(n); O(V))”. *Journal fur die Reine und Angewandte Mathematik* 567 (2004), str. 99–150.

[26] G. Muić. “On the structure of theta lifts of discrete series for dual pairs (Sp(n), O(V))”. *Israel Journal of Mathematics* 164.1 (2008), str. 87–124.

[27] G. Muić. “Reducibility of standard representations”. *Pacific journal of mathematics* 222.1 (2005), str. 133–168.

[28] G. Muić. “Theta lifts of tempered representations for dual pairs $(\mathrm{Sp}_{2n}, \mathrm{O}(V))$”. *Canadian J. Math* 60.6 (2008), str. 1306–1335.

[29] G. Muić, G. Savin i dr. "Symplectic-orthogonal theta lifts of generic discrete series". *Duke Mathematical Journal* 101.2 (2000), str. 317–333.

[30] F. Rodier. "Whittaker models for admissible representations of reductive p-adic split groups". *Proc. Sympos. Pure Math.* Sv. 26. 1973, str. 425–430.

[31] P. Scholze. "The local Langlands correspondence for GL_n over p-adic fields". *Inventiones mathematicae* 192.3 (2013), str. 663–715.

[32] J.-P. Serre. *A course in arithmetic.* Sv. 7. Springer Science & Business Media, 2012.

[33] B. Sun i C.-B. Zhu. "Conservation relations for local theta correspondence". *Journal of the American Mathematical Society* 28.4 (2015), str. 939–983.

[34] D. Szpruch. "Uniqueness of Whittaker model for the metaplectic group". *Pacific Journal of Mathematics* 232.2 (2007), str. 453–469.

[35] M. Tadić. "Classification of unitary representations in irreducible representations of general linear group (non-Archimedean case)". *Annales scientifiques de l'Ecole normale supérieure.* Sv. 19. 3. Elsevier. 1986, str. 335–382.

[36] M. Tadić. "Reducibility and discrete series in the case of classical p-adic groups; an approach based on examples". *Geometry and analysis of automorphic forms of several variables.* World Scientific, 2012, str. 254–333.

[37] M. Tadić. "Structure arising from induction and Jacquet modules of representations of classical p-adic groups". *Journal of Algebra* 177.1 (1995), str. 1–33.

[38] J.-L. Waldspurger. "Demonstration d'une conjecture de duality de Howe dans le case p-adiques, p $\neq$ 2, In Festschrift in honor of I. Piatetski-Shapiro". *Israel Math. Conf. Proc.* Sv. 2. 1990, str. 267–324.

[39] A. Weil. *Basic number theory.* Sv. 144. Springer Science & Business Media, 2013.

[40] A. V. Zelevinsky. "Induced representations of reductive p-adic groups. II. On irreducible representations of GL(n)". *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure.* Sv. 13. 2. Elsevier. 1980, str. 165–210.

Životopis

Petar Bakić rođen je 3. listopada 1990. godine u Zagrebu. Nakon završene srednje škole (XV. gimnazija, Zagreb) 2009. godine upisao je preddiplomski studij Matematika na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. Po završetku preddiplomskog studija upisao je 2012. na istom fakultetu diplomski studij Teorijska matematika. Diplomirao je 2014. godine s radnjom *Geometrija shema* (mentor prof. dr. sc. Goran Muić).

Tokom studija primao je stipendiju Grada Zagreba; dobitnik je nagrade Fakultetskog vijeća za izniman uspjeh u studiju. Od 2010. do 2014. godine volontirao je kao voditelj udruge Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić"; u sklopu rada u ovoj udruzi organizirao je Ljetni kamp mladih matematičara i Zimsku školu matematike za učenike srednjih i završnih razreda osnovnih škola. Radio je kao mentor u pripremama učenika XV. gimnazije za natjecanja iz matematike, te je i sam sudjelovao u brojnim studentskim natjecanjima.

Neposredno po završetku studija, u studenom 2014. godine, upisao je doktorski studij matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu i zaposlio se kao asistent na istom fakultetu (Zavod za algebru i osnove matematike). Sudjeluje u radu *Seminara za unitarne reprezentacije i automorfne forme*. Od 2015. godine sudjeluje i u radu Državnog povjerenstva za provedbu natjecanja iz matematike.